А. Х. Шахмейстер

Введение в математический анализ

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под общей редакцией
заслуженного учителя РФ Б. Г. Зива

С.-Петербург
Москва
2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редакторы:
Кандидат физ.-мат. наук, доцент РГПУ им. Герцена, заслуженный учитель РФ С. Е. Рукшин.
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко, заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш, заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Введение в математический анализ. — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2010. — 792 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-538-2, ISBN 978-5-98712-044-6, ISBN 978-5-91281-059-6.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-538-2 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-044-6 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-059-6 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Предисловие редактора

Перед вами уникальная книга «Введение в математический анализ» серии «Математика. Элективные курсы» по школьному курсу «Алгебра и математический анализ» для тех, кто хочет научиться. По существу это энциклопедия различных методов решения задач, кладовая педагогического и методического опыта преподавания сложных тем школьного курса математики.

Это прекрасный самоучитель, в котором рассматриваются с «разных позиций» основные математические понятия курса «Математический анализ». Наличие большого количества разноплановых примеров позволит ученику «прочувствовать» сложные математические понятия, «увидеть» их естественные применения.

Книга адресована широкому кругу читателей:

- интересующемуся ученику обычного класса;
- ученику профильного или специализированного класса;
- студенту, изучающему высшую математику;
- учителю, преподающему школьный курс математики.

Ценность книги заключается в том, что с рассмотренными заданиями приходит понимание трудных для восприятия математических понятий, изучаемых в школе. Многие идеи, заложенные в систему примеров, тренировочных, самостоятельных, безусловно, могут быть использованы для подготовки к экзаменам и олимпиадам.

Желательно, чтобы подготовительная работа к изучению этой книги начиналась с изучения книги «Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии» этой серии уже в 8, 9 классе. Планомерная работа с материалами книг этой серии вместе с материалами учебных методических комплектов даст наибольший эффект понимания содержания школьного курса математики.

А. В. Семенов

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программы элективных курсов для учащихся 10–11 классов

Пределы и производная (30 уроков).

№ № уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий	Кол-во уроков
1–8	Пределы (определение) Практикум 1 (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8)	4
	Доказательство замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Практикум 5 (1, 2, 3, 4)	2
	Тренировочная работа 1 (1, 2, 3, 8, 9, 10)	2
9–30	Производная (определение) Практикум 8 (1, 3, 4, 5, 6)	2
	Теоремы о производных Практикум 9 (1, 2, 4, 7, 8, 9, 11, 12)	2
	Практикум 10 (1 (1, 3), 2 (2, 3, 4), 3 (2, 4, 5))	2
	Практикум 11 (1 (1, 2, 5, 6), 2 (1, 3, 4))	2
	Практикум 12 (1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)	2
	Тренировочная работа 2 (1 (2, 4, 7), 2 (1, 3, 8))	2
	Проверочная работа (1 (1, 3, 4), 2 (2, 4, 6))	2
	Практикум 13 (1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 17, 18)	3
	Геометрический смысл производной, уравнение касательной Практикум 14 (1, 2, 3, 4, 6)	2
	Пример 3 (стр. 170), Пример 4 (стр. 170), Пример 6 (стр. 171) Тренировочная работа 5 (1, 4, 5, 6, 11, 12)	3

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

Применение производной к исследованию функции (24 урока).

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий	Кол-во уроков
1 – 24	Монотонность и экстремумы функций Тренировочная работа 6 (2 (1, 2, 3, 4, 6, 7), 3 (1, 2, 3))	3
	Тренировочная работа 7 (1 (1, 2, 3, 5, 7, 8, 10), 2 (1, 3, 4, 5, 7, 8, 9))	3
	Практикум 18 (1, 2, 4, 6, 7, 8) Практикум 19 (3, 5)	3
	Направление выпуклости графика Практикум 21 (1, 2, 3, 6, 7, 10)	3
	Четные и нечетные функции Практикум 22 (1 (а, б, в), 2 (а, в), 3 (а, б))	2
	Практикум 24 (1, 3, 4, 6, 9, 10)	2
	Практикум 25 (1, 3, 5, 6, 8)	2
	Практикум 26 (1, 2, 4, 5, 8)	2
	Тренировочные карточки: 1 (1, 2, 3); 3 (1, 2, 5); 4 (3, 5); 5 (1, 4); 6 (1, 2, 3, 5)	4

Интеграл (10+10 уроков)

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий	Кол-во уроков
1 – 10 (+10)	Понятие об интеграле Практикум 27 (1, 2, 6–12, 14)	2–3
	Тренировочная работа 11 (2–5, 9)	1–2
	Замена в неопределенных интегралах Примеры (1 – 7)	1–2
	Тренировочная работа 12 (1–4, 6–8, 14, 17 –19)	1–3
	Определенный интеграл Практикум 28 (2–5, 7, 9, 11, 12)	1–3
	Площади фигур, объем тел вращения Тренировочная работа 15 (3, 4, 5, 7, 10, 11, 12)	4–7

Программы подготовлены, составлены и апробированы на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Предел функции

Понятие предела функции в точке

Введение

Пример 1. При нагревании пластины ее линейные размеры меняются по закону $y = 2x + 3$, где x — температура. Вопрос: в каких пределах может меняться температура нагревания вблизи x_0, чтобы линейные размеры ее отличались от 5 не более чем на 0,1; 0,01; 0,001; ... ε (где ε — сколь угодно малая положительная величина), чтобы пластина могла войти в предназначенную для нее технологическую прорезь с определенной степенью упругости.

Попробуем осмыслить ситуацию и графически ее иллюстрировать.

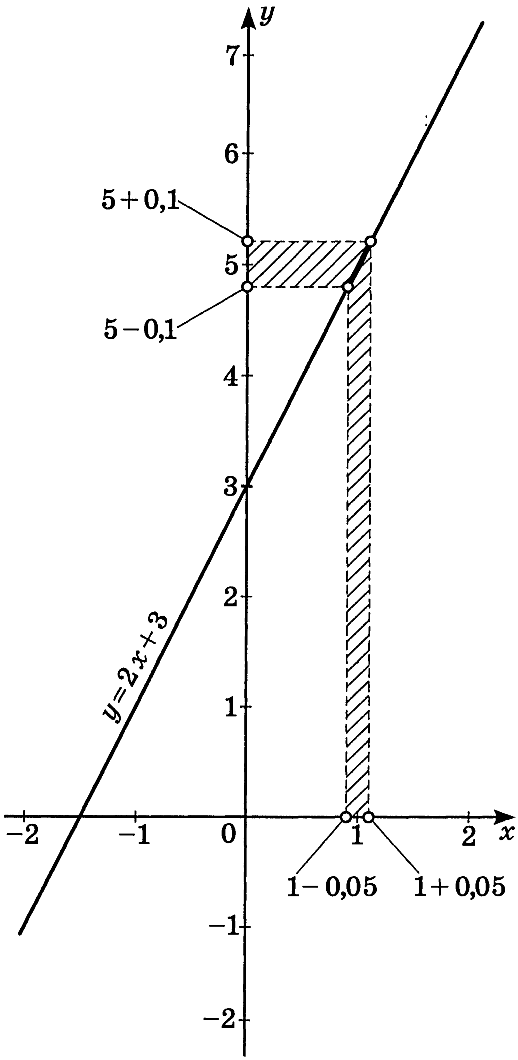
а) Пусть $f(x) = 2x + 3$. Выясним, в каких пределах может меняться x, для того чтобы $|f(x) - 5| < 0{,}1$.

Учитывая свойство $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha > -\beta \end{cases}$, получим

$5 - 0{,}1 < f(x) < 5 + 0{,}1$, тогда $5 - 0{,}1 < 2x + 3 < 5 + 0{,}1$;

$-0{,}1 < 2x + 3 - 5 < 0{,}1$; $\quad -0{,}1 < 2(x - 1) < 0{,}1$;

$-\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}1 < x - 1 < \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}1$; $\quad 1 - 0{,}05 < x < 1 + 0{,}05$.



Первый вывод — изменения по x происходят вокруг $\underline{x_0 = 1}$.

Второй вывод — граница изменения вокруг $x_0 = 1$ должна быть в два раза меньше (уже), чем около $f(x_0) = 5$, чтобы из $x \in (1 - 0{,}05; 1 + 0{,}05)$ следовало $f(x) \in (5 - 0{,}1; 5 + 0{,}1)$.

б) Выясним, в каких границах может изменяться x, чтобы $|f(x) - 5| < 0{,}01$. Решая аналогично, получим

$5 - 0{,}01 < 2x + 3 < 5 + 0{,}01;$

$-0{,}01 < 2(x - 1) < 0{,}01;$

$1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 < x < 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}01.$

Значит, если $x \in (1 - 0{,}005; 1 + 0{,}005)$,

то $f(x) \in (5 - 0{,}01; 5 + 0{,}01)$.

Выводы — те же самые, что и в пункте а).

в) Обобщим. Выясним, в каких границах может меняться x, чтобы $|f(x) - 5| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина[1]).

Обозначим изменение по x вблизи $x_0 = 1$ за $\delta > 0$[2] (тоже сколь угодно малая положительная величина, вообще-то зависящая от ε).

Требуется, чтобы из $|x - 1| < \delta$ следовало, что $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

$5 - \varepsilon < 2x + 3 < 5 + \varepsilon;$

$-\varepsilon < 2(x - 1) < \varepsilon;$

$-\frac{\varepsilon}{2} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2};$

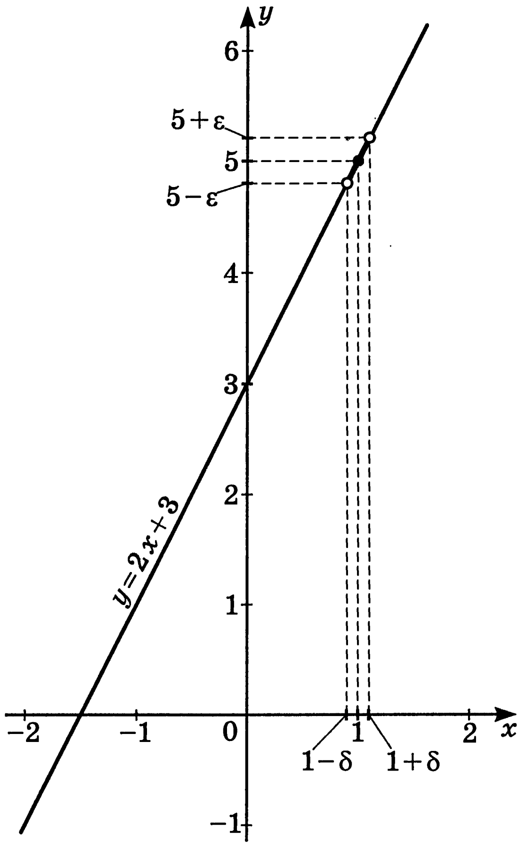
значит при $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ из $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$.

В этом случае ясно, что можно приблизиться к числу 5 сколь угодно близко. Тогда говорят, что число 5 есть предел функции при приближении к $x = 1$ сколь угодно близко.

Записывается это так: $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5}$.

---

[1] ε — читается «эпсилон».
[2] δ — читается «дельта»



Пример 2. Пусть $y = f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$. $D(y): \ x \neq 1$.

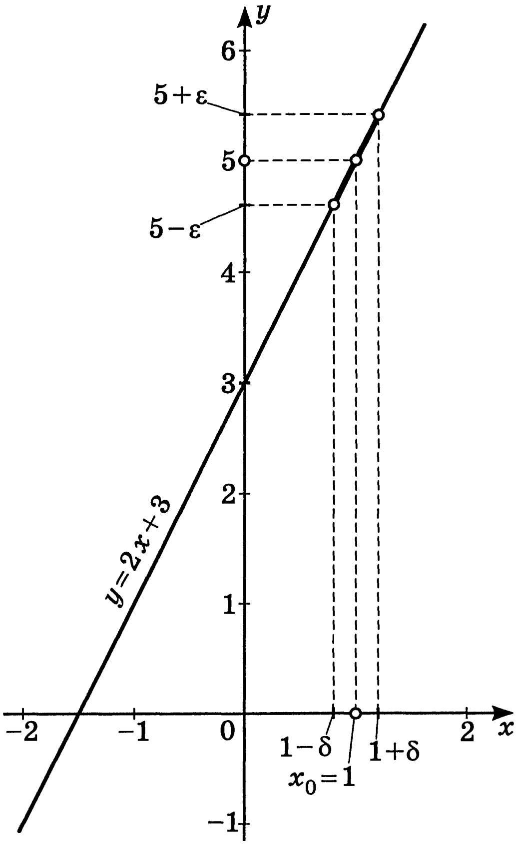
Выясним, в каком интервале может меняться x вблизи $x_0 = 1$, чтобы $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

$2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$, поэтому

$$-\varepsilon < \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1} - 5 < \varepsilon;$$

$$-\varepsilon < 2x + 3 - 5 < \varepsilon; \qquad -\varepsilon < 2(x-1) < \varepsilon;$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т. е. } \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$



Если для любого положительного числа ε существует положительное число δ, такое что для любых $x \neq 1$ из принадлежности x интервалу $(1 - \delta; 1 + \delta)$ следует принадлежность $f(x)$ интервалу $(5 - \varepsilon; 5 + \varepsilon)$, то говорят, что число 5 есть предел функции $f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Записывается это так: если для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \mid \forall x \neq 1$ из $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет своим пределом число 5 в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и записывают $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$.

Примечание. $|x - 1| < \delta \Leftrightarrow 1 - \delta < x < 1 + \delta$, аналогично $|f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$.

Вывод — из второго примера следует, что функция может иметь предел в точке, в которой она не определена, так как для существования предела это не принципиально.

Теперь можно дать определение предела функции в точке в обобщеном виде, учтя выводы из примера 2.

Определение 1. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если для любого положительного ε существует такое положительное δ, что для любого $x \neq a$ из справедливости неравенства $|x-a| < \delta$ следует справеливость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

В более короткой форме условие выглядит так:
если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 \,|\, \forall x \neq a$ из $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ (или из принадлежности $x \in (a-\delta; a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$).

Примечания. 1. По умолчанию далее будем под δ понимать число.

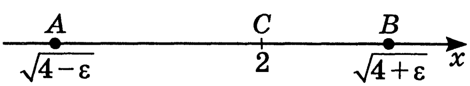
2. По умолчанию если мы говорим о функции, то под точкой $x = a$ понимается точка на числовой оси. Если же мы говорим о кривой или графике функции, то под точкой понимается точка $(x_0; f(x_0))$, или точка с абсциссой, равной x_0.

Пример 3. $y = x^2$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

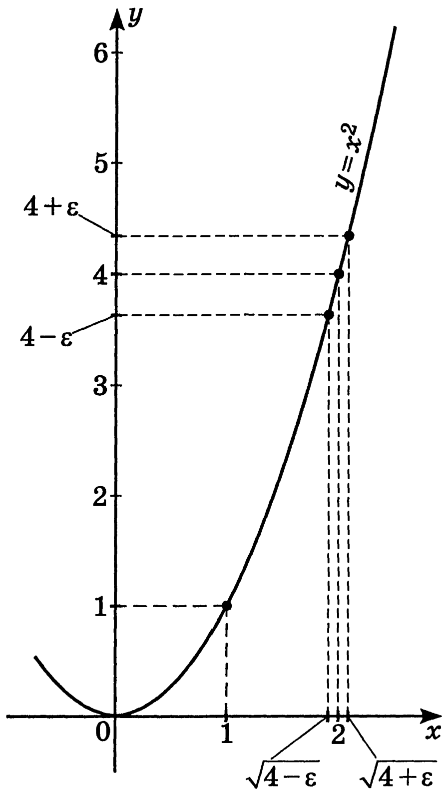
Рассмотрим более подробно.

Выясним, при каких x верно $y \in (4-\varepsilon; 4+\varepsilon)$ вблизи точки $x_0 = 2$ на числовой оси OX.

Так как $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4+\varepsilon \\ x^2 = 4-\varepsilon \end{array}\right.$, то $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{4+\varepsilon} \\ x = \sqrt{4-\varepsilon} \end{array}\right.$ $(x > 0)$.



Очевидно, что $\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$.



$$AC = 2 - \sqrt{4-\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2+\sqrt{4-\varepsilon}}$$
$$BC = \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{2+\sqrt{4+\varepsilon}}$$

Домножили на сопряженное выражение числитель и знаменатель.

Так как $\sqrt{4-\varepsilon} < \sqrt{4+\varepsilon}$, то $AC > BC$.

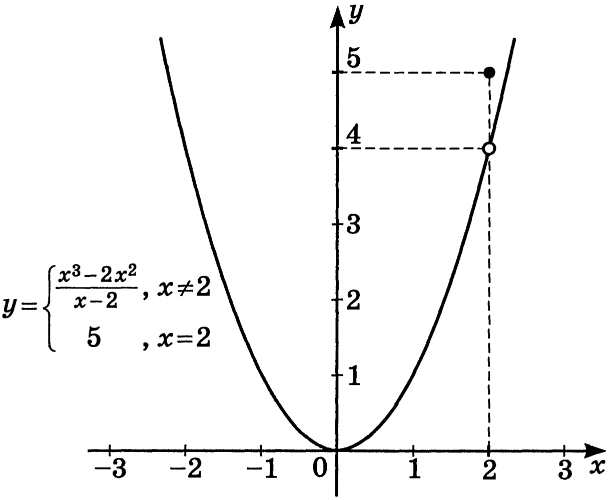
Положим $\delta = \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = BC$.

Тогда по определению для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; (\delta = \sqrt{4+\varepsilon} - 2) \mid \forall x \neq 2$ из $|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, что и требовалось доказать.

Примечание. В данном примере $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$, но это выполняется не всегда.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}, & \text{если } x \neq 2; \\ 5, & \text{если } x = 2. \end{cases}$

Тогда $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 2; \\ 5, & \text{если } x = 2. \end{cases}$



Очевидно, для этой функции $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 5$.

Отметим, что понятие предела последовательности[3] можно так же использовать для определения предела функции в точке.

Определение 2. Число A называют пределом функции в точке с абсциссой $x = a$, если из того, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n \to a$, где $x_k \neq a$ $\forall k \in \mathbb{N}$ следует, что последовательности соответствующих значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \to A$, то есть если из $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, где $x_k \neq a$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

В курсе математического анализа доказывается равносильность двух определений предела функции в точке — на языке эпсилон и дельта и на языке последовательностей. Это очень удоб-

[3] См. Шахмейстер А.Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб, Петроглиф, 2004, 2008 г., стр. 107–110.

но, так как в этом случае все основные теоремы о пределах для последовательностей выполняются и для функций[4].

Примечание. Напомним определение предела числовой последовательности (в несколько иной редакции). Число a называется пределом числовой последовательности x_n, если абсолютная величина разности $(x_n - a)$ начиная с некоторого номера N_0 остается меньше любого наперед заданного положительного числа ε, каким бы малым оно ни было.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке с абсциссой $x = a$, то он единственный.

Теорема 2. Предел постоянной функции есть постоянная величина, т. е. $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Действительно, постоянная от x не зависит.

Теорема 3. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих пределы, равен алгебраической сумме пределов этих функций, т. е. $\lim\limits_{x \to a} (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_p(x)) =$ $= \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x \to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim\limits_{x \to a} f_p(x)$.

Теорема 4. Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы, равен произведению пределов этих функций, т. е.

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_p(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to a} f_p(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to a} (cf(x)) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a} c = c\right)$.

Следствие 2. Предел целой положительной степени равен той же степени предела: $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$.

Теорема 5. Предел частного двух функций, имеющих предел, равен частному пределов этих функций, если предел делителя не равен нулю: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$.

---

[4] Там же, стр. 116–121.

Практикум 1

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x+2)=6;$

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6;$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2;$

4) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x+1}=2.$

Решение практикума 1

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x+2)=6.$

Напомним, что доказать, что функция имеет предел в точке с абсциссой $x=a$, это значит установить функциональную зависимость δ от ε, при которой из $|x-a|<\delta$ $(x\neq a)$ следует, что $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Итак, $|(4x+2)-6|<\varepsilon$, тогда

$$\begin{cases} 4x+2-6<\varepsilon \\ 4x+2-6>-\varepsilon \end{cases}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 4(x-1)<\varepsilon \\ 4(x-1)>-\varepsilon \end{cases}.$$

Отсюда следует, что если $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, то $|(4x-2)-6|<\varepsilon$.

Значит, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$, функциональная связь установлена,

и $\lim\limits_{x\to 1}(4x+2)=6$, что и требовалось доказать.

Примечание. В данном случае $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=6$, т. е. значение предела в точке $x=1$ совпадает со значением функции в точке 1.

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6.\qquad \dfrac{x^2-9}{x+3}=x-3$ (при $x\neq -3$).

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6$ (при $x\neq -3$).

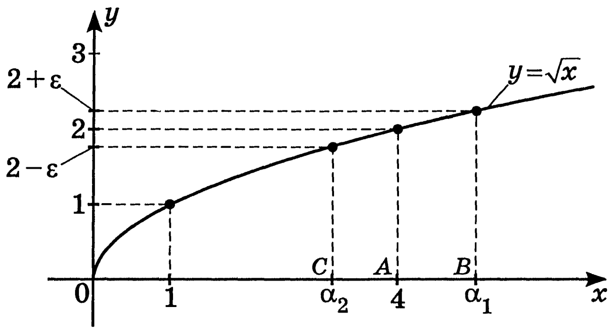
$|(x-3)-(-6)|<\varepsilon;$

$\begin{cases} x-3+6<\varepsilon \\ x-3+6>-\varepsilon \end{cases}$, т. е. $-\varepsilon<x+3<\varepsilon$ ($\delta=\varepsilon$).

Тогда для $\forall\varepsilon>0$ при $\forall x\neq -3$ из $|x+3|<\delta$ следует, что $\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}-(-6)\right|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2.$

Рассмотрим $|\sqrt{x}-2|<\varepsilon$.



$2-\varepsilon<\sqrt{x}<2+\varepsilon$; тогда

$\sqrt{\alpha_1}=2+\varepsilon;\quad \alpha_1=(2+\varepsilon)^2;$

$\sqrt{\alpha_2}=2-\varepsilon;\quad \alpha_2=(2-\varepsilon)^2;$

$AB=\alpha_1-4=(2+\varepsilon)^2-4=\varepsilon^2+4\varepsilon;$

$AC=4-\alpha_2=4-(2-\varepsilon)^2=-\varepsilon^2+4\varepsilon,$

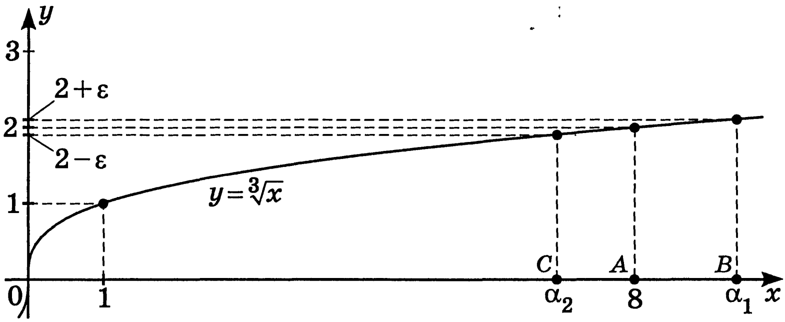
значит $AC<AB$ (при $0<\varepsilon<4$; $AC>0$).

Примем $AC=\delta$, т. е. $-\varepsilon^2+4\varepsilon=\delta$ (установили функциональную зависимость).

Тогда $\forall\varepsilon>0$ (считаем ε достаточно малым) $\exists\delta>0$ ($\delta=4\varepsilon-\varepsilon^2$) $|\forall x\neq 4$ из $|x-4|<\delta$ следует, что $|\sqrt{x}-2|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$, что и требовалось доказать.

4) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2.$

$|\sqrt[3]{x} - 2| < \varepsilon;$



$\sqrt[3]{\alpha_1} = 2 + \varepsilon; \quad \alpha_1 = (2+\varepsilon)^3;$

$\sqrt[3]{\alpha_2} = 2 - \varepsilon; \quad \alpha_2 = (2-\varepsilon)^3;$

$AB = \alpha_1 - 8 = (2+\varepsilon)^3 - 8 =$

$= (2 + \varepsilon - 2)\left((2+\varepsilon)^2 + (2+\varepsilon)\cdot 2 + 4\right);$

$AC = 8 - \alpha_2 = 8 - (2-\varepsilon)^3 =$

$= (2 - 2 + \varepsilon)\left((2-\varepsilon)^2 + (2-\varepsilon)\cdot 2 + 4\right);$

таким образом, $AB = \varepsilon(\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 12)$; $\quad AC = \varepsilon(\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 12)$; очевидно, что $AC < AB$, тогда положим наименьшее $AC = \delta$, т. е. $\delta = \varepsilon(\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 12)$ (установили функциональную связь).

Значит для $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \ (\delta = \varepsilon(\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 12)) \mid \forall x \neq 8$ из $|x - 8| < \delta$ следует $|\sqrt[3]{x} - 2| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x} = 2$, что и требовалось доказать.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{x+1} = 2.$

Рассмотрим $\left|\dfrac{x+2}{x+1} - 2\right| < \varepsilon;$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} - 2 < \varepsilon \\ \dfrac{x+2}{x+1} - 2 > -\varepsilon \end{cases}; \qquad \begin{cases} \dfrac{x+2-2x-2}{x+1} < \varepsilon \\ \dfrac{x+2-2x-2}{x+1} > -\varepsilon \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} < \varepsilon \\ \dfrac{-x}{x+1} > -\varepsilon \end{cases} \quad (\text{при } x \to 0 \quad x+1>0).$$

Тогда $\begin{cases} x > \dfrac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} \\ x < \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{cases}.$

Выясним, что меньше — $\left|\dfrac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right|$ или $\left|\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right|$.

$$\left|\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}; \quad \left|\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}; \quad \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Примем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$,

тогда будет выполняться $|x-0| < \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \delta$

(установили функциональную зависимость).

Значит, $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \;\; \left(\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \mid \forall x \neq 0$ из $|x| < \delta$

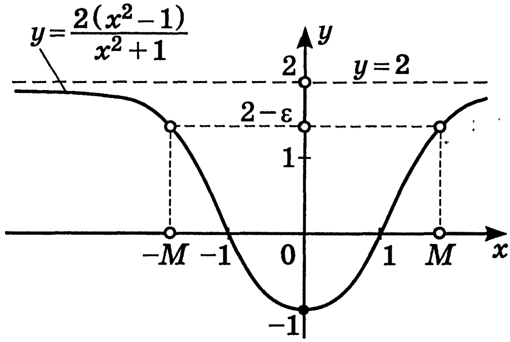
следует, что $\left|\dfrac{x+2}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$,

т. е. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{x+1} = 2$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим определения предела функции на бесконечности (или при $x \to \pm\infty$).

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\forall\varepsilon > 0$ можно указать такое $M > 0$, что $\forall x$ из $|x| > M$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$ (т. е. по сути надо установить функциональную зависимость между ε и M[5]).

[5] Возможно, что $M = \delta$.



Из графика функции видно, что из $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 2)$.

Пример 5. Докажем по определению, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

$\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$, тогда $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$,

значит если $|x| > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (установили функциональную зависимость), то $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, следовательно $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Иногда полезно ввести понятия односторонних пределов.

Определение 3. Число A называется правым пределом функции в точке x_0, если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.

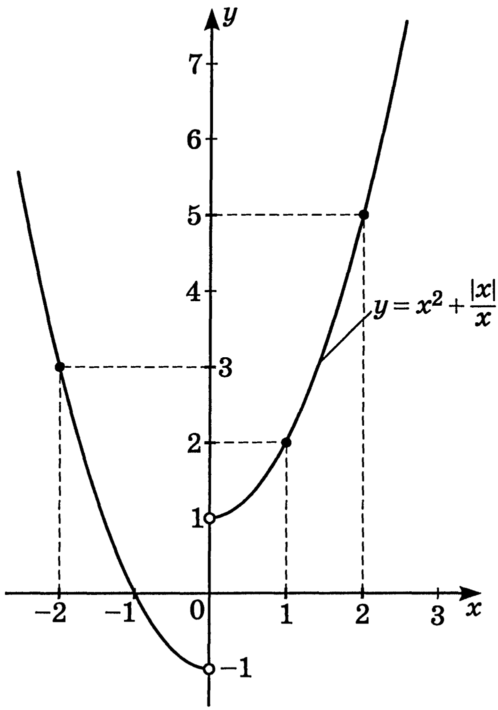
Записывается так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Определение 4. Число A называется левым пределом функции в точке x_0, если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что из $0 < x_0 - x < \delta$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывается так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Пример 6. Рассмотрим $y = x^2 + \dfrac{|x|}{x}$.

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x > 0 \\ x^2 - 1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$



Тогда $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^2 + \dfrac{|x|}{x}\right) = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0-0}\left(x^2 + \dfrac{|x|}{x}\right) = -1.$

В данном случае $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^2 + \dfrac{|x|}{x}\right) \neq \lim\limits_{x\to 0-0}\left(x^2 + \dfrac{|x|}{x}\right).$

С позиции односторонних пределов можно дать иное определение предела функции в точке.

Число A называется пределом функции в точке x_0, если односторонние пределы в этой точке существуют и совпадают, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Непрерывность функции

Основные определения

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0, т. е. если
1) $x_0 \in D(f)$; 2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 6. Функция называется непрерывной, если она непрерывна в каждой точке своей области определения, причем область определения есть либо конечный или бесконечный промежуток, либо вся числовая ось.

На интуитивном уровне это значит, что график непрерывной функции можно начертить, не отрывая руки от чертежа.

Рассмотрим определение непрерывности в точке x_0 на языке эпсилон и дельта.

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что из $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Примечания. 1. Как уже отмечено выше, в данном случае под точкой x_0 имеется в виду абсцисса точки $(x_0; f(x_0))$.

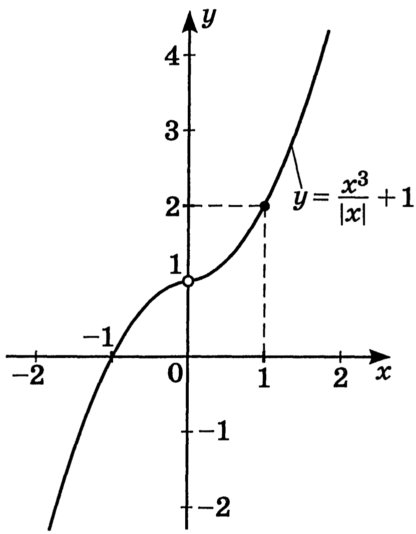
2. Вообще говоря, для каждого x_0 функциональная зависимость δ от ε своя.

Классификация разрывов

Определение 8. Функция разрывна в точке x_0 (или терпит в ней разрыв), если не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке.

Рассмотрим графики функций в примерах 1–4.

Пример 1. $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 1 = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ -x^2 + 1, & x < 0 \end{cases}.$



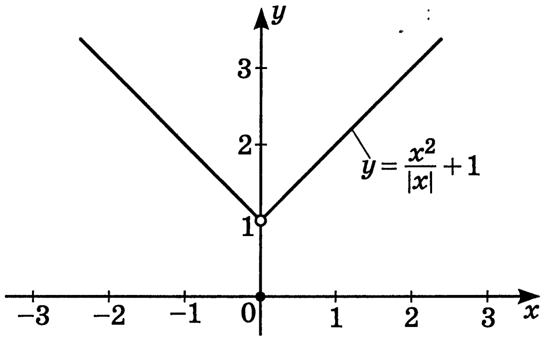
Очевидно, что $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^3}{|x|} + 1 \right) = 1, \quad x_0 = 0 \notin D(f),$

т. е. в точке $x_0 = 0$ функция терпит разрыв, правда, устранимый — функцию можно **доопределить:**

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^3}{|x|} + 1; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases},$$

и тогда эскиз ее графика можно выполнить, не отрывая руки от чертежа.

Пример 2. $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} + 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$



В данном примере $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, но $f(0) = 0$, в точке $x_0 = 0$ функция терпит разрыв.

Аналогично примеру 1 функцию можно **переопределить** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} + 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, и разрыв тоже устранимый.

Из определения непрерывности в точке с абсциссой $x = x_0$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что гарантирует отсутствие скачков вблизи точки $(x_0; f(x_0))$, если же в точке $x = x_0$ функция разрывна, и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$, а $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то величина $|A_2 - A_1|$ называется скачком или разрывом.

Очевидно, их нельзя начертить, не отрывая руки от чертежа. Хотелось бы классифицировать эти **разрывы** в графиках[6].

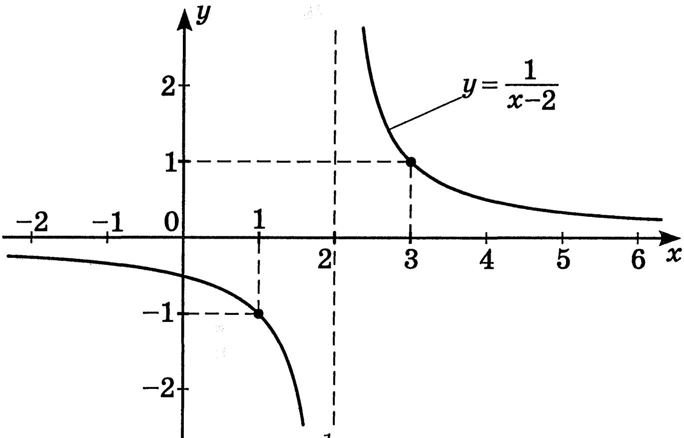
Пусть функция терпит разрыв в точке x_0.
Конечным разрывом, или разрывом I рода, называется такой разрыв, когда величина разрыва или скачка конечна.
Если же величина разрыва или скачка бесконечна, то в точке $x = x_0$ функция терпит разрыв II рода.

В примерах 1 и 2 в точке $x = 0$ функции терпят разрыв I рода и имеют в них нулевой скачок.

---

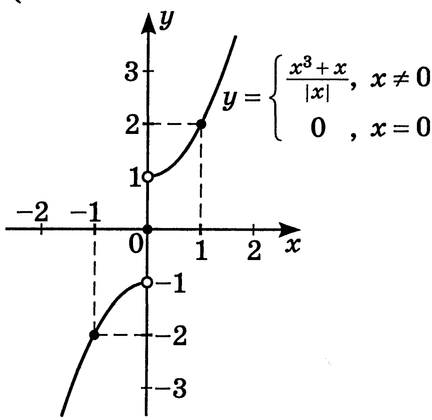
[6] Первым классификацию разрывов дал французский математик Рене Бэр в конце XIX в.

Пример 3. $y = \dfrac{1}{x-2}$.



В точке $x_0 = 2$ функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ терпит разрыв II рода.

Пример 4. $y = \begin{cases} \dfrac{x^3+x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

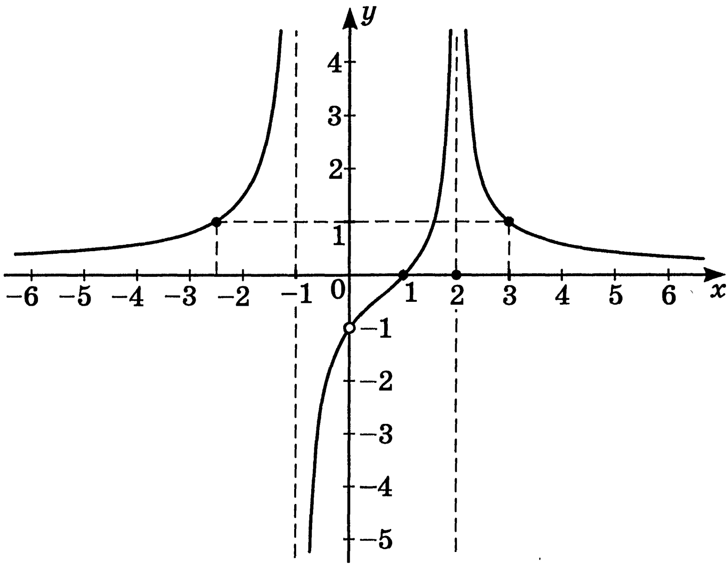


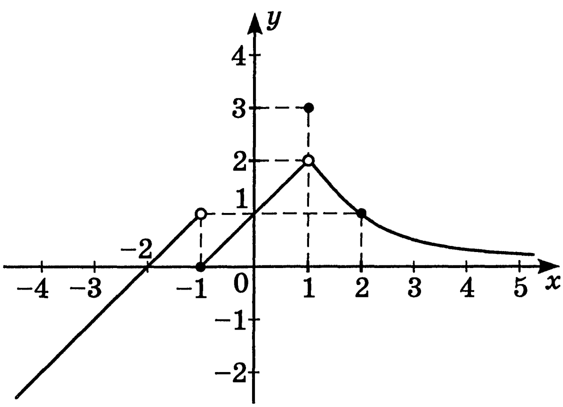
В точке $x_0 = 0$ функция терпит разрыв I рода.

Примечания. Известно, что функция Дирихле (Пьер Лежен Дирихле (1805–1859 гг.)) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррационально} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рационально} \end{cases}$ в каждой своей точке имеет разрыв первого рода.

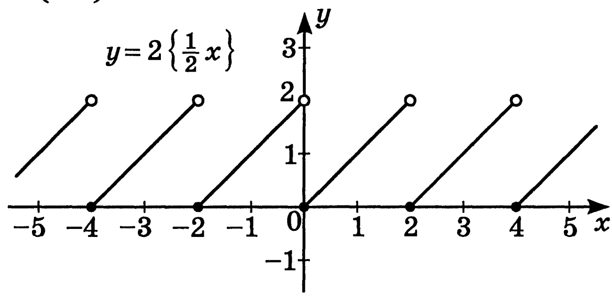
Практикум 2

Определите, в каких точках функция терпит разрыв и какого рода.

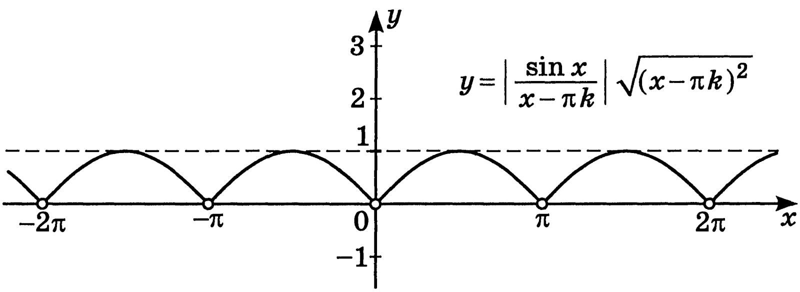
1) 

2) 

3) $y = 2\left\{\frac{1}{2}x\right\}$;



4) $y = \left|\frac{\sin x}{x-\pi k}\right|\sqrt{(x-\pi k)^2}$;



5) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$;

6) $y = x^2 - \frac{2(x^2-1)}{|x|-1} - 1$;

7) $y = \frac{x^2-2x-3}{|x+1|}$;

8) $y = \frac{1-\sin x}{1-\sin x}\operatorname{ctg} x$.

Ответы и решения практикума 2

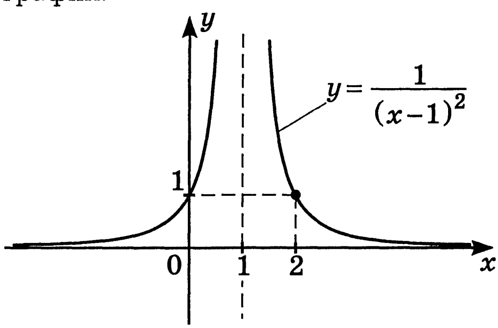
1) Функция в точках $x_0 = -1$ и $x_0 = 2$ терпит разрыв II рода, в точке $x_0 = 0$ — разрыв I рода.

2) В точке $x_0 = -1$ разрыв I рода, в точке $x_0 = 1$ разрыв I рода.

3) Функция $y = 2\left\{\frac{1}{2}x\right\}$ (дробная часть числа) терпит в точках $x_0 = 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$, разрыв I рода.

4) Функция $y = \left|\frac{\sin x}{x - \pi k}\right| \sqrt{(x - \pi k)^2}$ терпит разрыв I рода в точках $x_0 = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

5) Построим график:



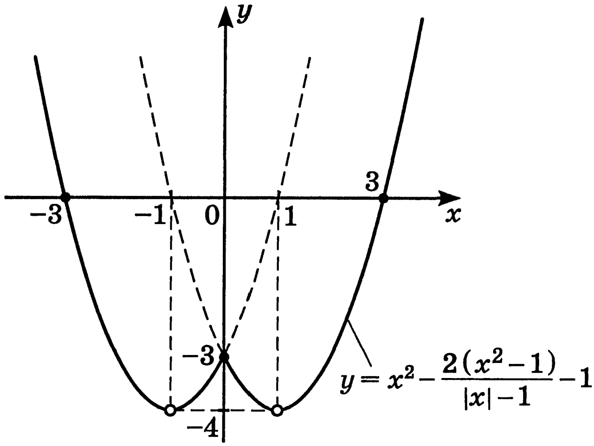
В точке $x_0 = 1$ функция терпит разрыв II рода.

6) Построим график $y = x^2 - \dfrac{2(x^2 - 1)}{|x| - 1} - 1$.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2(x + 1) - 1, \; x \geqslant 0, \; x \neq 1 \\ x^2 + 2(x - 1) - 1, \; x < 0, \; x \neq -1 \end{cases};$$

а) $\begin{cases} x \geqslant 0; \; x \neq 1 \\ y = (x - 3)(x + 1) \end{cases};$

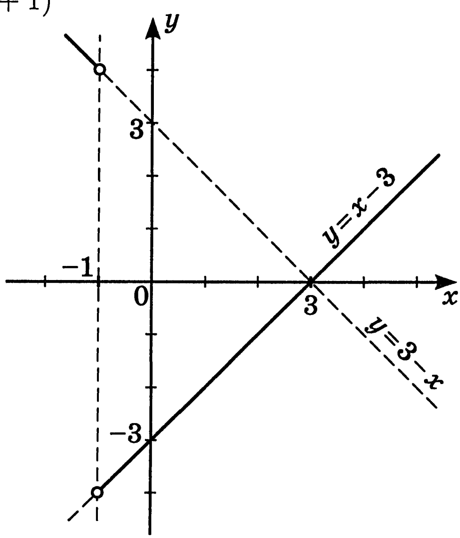
б) $\begin{cases} x < 0; \; x \neq -1 \\ y = (x + 3)(x - 1) \end{cases};$



В точках $x_0=-1$ и $x_0=1$ функция терпит разрыв I рода.

7) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{|x+1|}$. Построим график.

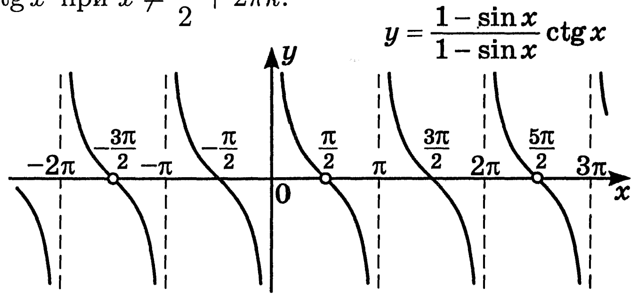
$$y=\begin{cases}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x+1}, & x>-1\\ -\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+1)}, & x<-1\end{cases};\qquad y=\begin{cases}x-3, & x>-1\\ 3-x, & x<-1\end{cases}.$$



В точке $x_0=-1$ функция терпит разрыв I рода.

8) $y = \dfrac{1-\sin x}{1-\sin x}\operatorname{ctg} x.$

$y = \operatorname{ctg} x$ при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k.$



В точке $x_0 = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, функция терпит разрывы II рода.

В точках $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, функция терпит разрыв I рода.

Вычисление пределов

Практикум 3

Отметим некоторые свойства дробно-рациональных функций с учетом их непрерывности.

I. $\lim\limits_{x\to a} x^m = a^m$, так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

II. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0.$$

III. $R(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Пусть $Q(a) \neq 0$, тогда

$$\lim_{x\to a} R(x) = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} P(x)}{\lim\limits_{x\to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

IV. Если $a \in D(f)$, $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$,

то $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} P(x)}$.

Примечание. Здесь мы использовали теоремы о пределах. Рассмотрим примеры применения этих свойств.

$$1)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5x+2}{x^2-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2)} = \frac{2^2+5\cdot 2+2}{2^2-2} = \boxed{8}.$$

При вычислении пределов зачастую приходится сталкиваться с ситуациями, когда трудно или невозможно применить определение или теоремы о пределах. Попробуем дать необходимые определения и классифицировать эти ситуации.

Определение видов неопределенности

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ называется неопределенностью вида 0^0.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x))$ называется неопределенностью вида $\infty - \infty$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ называется неопределенностью вида 1^∞.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x))$ называется неопределенностью вида $0 \cdot \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)^{f(x)}$ называется неопределенностью вида ∞^0.

2) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+4)} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+4} = \frac{2-1}{2+4} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$. Так как $2 \notin D(f)$, то необходимо после преобразований **сократить** на $(x-2)$. После этого можно будет воспользоваться непрерывностью в точке $x = 2$ оставшегося выражения, если это возможно. Аналогичное рассуждение — в примерах 3) и 4).

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3-x}}{3x}=\qquad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3}+\sqrt{3-x})}{3x(\sqrt{3}+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{3-3+x}{3x(\sqrt{3}+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x(\sqrt{3}+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\frac{1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3-0})}=\frac{1}{3\cdot 2\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{18}}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\qquad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{1+x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)=\left(\sqrt{1+0}+1\right)=\boxed{2}.$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}=\qquad\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Вынесем за скобки в числителе и знаменателе x^3 и сократим.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=$$

Приводим к виду, для которого возможно применение основных теорем о пределах.

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{2+0+5\cdot 0^2}{3+0^2-0^3}=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

Практикум 4

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x+4}{x^2-4x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+1}-x+2\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}\right)$.

Решение практикума 4

Вычислите пределы:

1) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+4}{x^2-4x} = \frac{3^2-3\cdot 3+4}{3^2-4\cdot 3} = \frac{4}{-3} = \boxed{-1\frac{1}{3}}.$$

2) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right) = \qquad (\infty-\infty)$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

3) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2+3-4} = \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right) = \sqrt{1^2+3}+2 = \boxed{4}.$$

4) $$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{(x+3-9)}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x+3}+3} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

5) $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-1\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{(2x+3-1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{(5+x-4)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)} = \lim_{x\to-1} \frac{2(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{2\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\sqrt{2x+3}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5-1}+2\right)}{\sqrt{2\cdot(-1)+3}+1} = \frac{2\cdot 4}{1+1} = \boxed{4}.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{1+x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right) =$$

$$= \left(\left(\sqrt[3]{0^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{0+1}+1\right) = \boxed{3}.$$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+1}-x+2\right) =$ $(\infty-\infty)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x+2\right)\left(\sqrt{x^2-3x+1}+x-2\right)}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-2} =$$

[Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $(\infty-\infty)$, которая заменяется неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.]

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x+1}+x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \frac{1-0}{\sqrt{1-0+0}+1-0} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}\right)$. $(\infty-\infty)$

Обозначим $A = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}\right)$.

Домножим и разделим выражение на неполный квадрат суммы относительно корней третьей степени

$$\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^3+3x^2+2} + $$
$$+\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}\right)^2.$$

Тогда в числителе получим $x^3+2x^2+1-x^3-3x^2-2 = = -x^2-1$, далее выносим за скобки $-x^2$:

$$A = \lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)^2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{-(1+0)}{\sqrt[3]{(1+0+0)^2}+\sqrt[3]{1+0+0}\sqrt[3]{1+0+0}+\sqrt[3]{(1+0+0)^2}} =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{3}}.$$

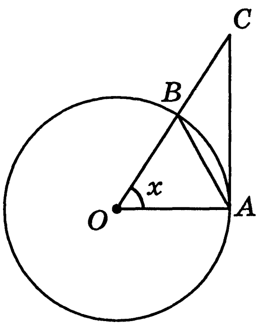
Как и в предыдущем примере, неопределенность вида $(\infty-\infty)$ заменяется неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Докажем этот замечательный предел.

Обозначим $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}=f(x)$, значит $y=f(x)$ — четная функция. Поэтому достаточно исследовать $f(x)$ на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle OAC$, где $OA=R$. $\angle COA=x$ (радиан), $OB=OA$.



$\boxed{S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ab\sin(\widehat{a;b})}$

$\boxed{S_{\text{сек}}=\dfrac{1}{2}R^2\alpha}$

(α — радианная мера угла)

Из чертежа следует, что $S_{\triangle OAB}<S_{\text{сектора } OAB}<S_{\triangle OAC}$.

$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}R^2\sin x$; $\qquad S_{\text{сектора } OAB}=\dfrac{1}{2}R^2x$;

$S_{\triangle OAC}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OA\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x$.

Тогда $\dfrac{1}{2}R^2\sin x<\dfrac{1}{2}R^2x<\dfrac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x$.

Значит $\sin x<x<\operatorname{tg}x$.

Делим на $\sin x$ ($\sin x>0$): $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$;

$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$ $\left(\text{из } a>b>0 \text{ следует } \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}\right)$;

умножим на -1 и прибавим 1:

$-1<-\dfrac{\sin x}{x}<-\cos x$; $\quad 0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x$.

Отметим, что $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, и так как мы уже доказали, что $\sin x < x$ $\left(x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, то $\sin^2\dfrac{x}{2} < \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Значит $0 < 1-\dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{x^2}{2}$, тогда

$$\left|1-\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{x^2}{2} \quad \left(\left|1-\frac{\sin x}{x}\right| = \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|\right).$$

Отсюда следует, что

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, если $\dfrac{x^2}{2} < \varepsilon$, но тогда $0 < x < \sqrt{2\varepsilon}$,

т. е. $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ — установили функциональную зависимость.

Значит для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $(\delta = \sqrt{2\varepsilon})$, такая что $\forall x \neq 0$ из $0 < x < \delta$ следует $\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

В силу четности односторонние пределы совпадают, а значит $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, что и требовалось доказать.

Применение замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ для доказательства непрерывности тригонометрических функций и вычисления пределов

1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$.

   Для этого по определению необходимо доказать, что для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0 \mid \forall x \neq a$ из $|x-a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$.

   Доказательство.

   Рассмотрим $|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}\right| =$

   $$= 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| < 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|.$$

   Здесь мы учли, что $\left|\cos\dfrac{x+a}{2}\right| \leqslant 1$ и $\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\right| < \left|\dfrac{x-a}{2}\right|$.

Тогда при $\delta = \varepsilon$ (установили функциональную зависимость) для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\delta = \varepsilon)$, такое что $\forall x \neq a$ из $|x-a| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$. Непрерывность в точке $x = a$ доказана.

Так как $x = a$ — любая, то $y = \sin x$ — непрерывная функция.

2. Вычислим пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 3x}{5x} = \dfrac{2}{5} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} =$

$$= \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x} = \frac{6}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{6}{5} \cdot 1 = \boxed{1{,}2}.$$

В этом рассуждении использовано следствие 1 из теоремы 4.

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} \right) =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \boxed{0{,}5}.$$

Здесь мы использовали следствие 2 из теоремы 4.

3. Докажем непрерывность $y = \cos x$.

Для этого докажем $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

Рассмотрим $|\cos x - \cos a| = \left| -2\sin \dfrac{x-a}{2} \sin \dfrac{x+a}{2} \right| \leqslant$

$$\leqslant 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| < 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} = |x-a|.$$

Можно положить $\delta = \varepsilon$.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\delta = \varepsilon)$, такое что $\forall x \neq a$ из $|x-a| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos a| < \varepsilon$.

Значит по определению непрерывности косинус непрерывен в точке $x = a$ $\left(\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a \right)$.

Учитывая, что a — любое, непрерывность $y=\cos x$ доказана.

Можно проще, если учесть, что $y=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

Используя теоремы о частном, а также доказанную непрерывность синуса и косинуса, доказывают непрерывность $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ на их областях определения.

4. Вычислите пределы:

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot 2\sin^2 x}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}+2\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2+2\cos 0\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1+2\cdot 1\cdot 1=\boxed{2{,}5}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\cos\frac{0}{2}}{\cos 0}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=\frac{2}{1}=\boxed{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x} =$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x} = \frac{1-(-1)}{1-(-1)+1} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x} =$

$$\left[\begin{aligned} &1-4\sin^2 x = 4\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\sin x\right) \text{ и} \\ &\qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) = \\ &\qquad\qquad = 4\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{4\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)}{4\cos x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\right)}{\cos x\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}}{\cos x\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}+x}{2}\cdot 2\cos\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

Примечание. Если выражение содержит сумму или разность тригонометрических функций, то часто бывает полезно для вычисления пределов переводить их в произведение.

Практикум 5

Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-7x^2-5x^3}{2+2x-x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

3) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to0} (2\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x)$;

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$.

Решение практикума 5

Вычислите:

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3-7x^2-5x^3}{2+2x-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x}-5\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x}-5}{\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x}-5\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1\right)}=\frac{0-0-5}{0+0-1}=\boxed{5}.$$

2) $$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x+7)}{(x+3)(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x+7}{x+5}=\frac{-3+7}{-3+5}=\frac{4}{2}=\boxed{2}.$$

3) $$\lim_{x\to-3}\frac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(5-\sqrt{22-x}\right)\left(5+\sqrt{22-x}\right)\left(1+\sqrt{4+x}\right)}{\left(1-\sqrt{4+x}\right)\left(1+\sqrt{4+x}\right)\left(5+\sqrt{22-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(25-22+x)\left(1+\sqrt{4+x}\right)}{(1-4-x)\left(5+\sqrt{22-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(3+x)\left(1+\sqrt{4+x}\right)}{-(3+x)\left(5+\sqrt{22-x}\right)}=$$

$$=-\frac{1+\sqrt{4-3}}{5+\sqrt{22+3}}=-\frac{1+1}{5+5}=\boxed{-0{,}2}.$$

4) $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-1}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^2+\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\boxed{1{,}5}.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(2\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{ctg} x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x = \boxed{0}.$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(1-\cos x)}{\cos x\cdot 2x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\cos 0} = \boxed{\dfrac{1}{4}}.$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$. Обозначим $t = x - \dfrac{\pi}{4}$. $(\infty\cdot 0)$

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\operatorname{tg} 2\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)\operatorname{tg} t\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2t\right)\operatorname{tg} t\right) = \lim\limits_{t\to 0}(-\operatorname{ctg} 2t\operatorname{tg} t) =$

$= -\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\cos 2t}{\sin 2t}\cdot\dfrac{\sin t}{\cos t}\right) = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\cos 2t}{\cos t}\cdot\dfrac{\sin t}{\sin t\cdot\cos t}\right) =$

$= -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos 2t}{\cos^2 t} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos 0}{\cos^2 0} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$. Положим $1 - x = t$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} = \dfrac{\pi}{2}\cdot 1 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(этот замечательный предел мы рассмотрели выше);

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad e \approx 2{,}71\ldots;$

б) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e;$

3. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e;$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \log_e x = \ln x.$

4. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a;$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu.$

Примечание. В фундаментальных курсах математического анализа эти замечательные пределы доказываются довольно подробно (см. например Г. М. Фихтенгольц «Курс математического анализа» в 3-х томах).

Практикум 6

Рассмотрим примеры использования замечательных пределов для вычисления пределов.

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = \qquad (1^\infty)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}} = \boxed{e^2}$$

(замечательный предел 2).

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x} = 2\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(замечательный предел 5).

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{2x} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{-3x} = -\frac{3}{2}\ln e = \boxed{-1{,}5}$$

(замечательный предел 4).

4) $$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = e^a\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a} = e^a\cdot 1 = \boxed{e^a}$$

(замечательный предел 4).

5) $$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e} = \frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{\frac{x}{e}-1} =$$

Положим $z = \dfrac{x}{e} - 1$.

$$= \frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{\ln(z+1)}{z} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \boxed{e^{-1}}$$

(замечательный предел 3).

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=$ [Положим $x-1=\alpha,\quad x=1+\alpha.$]

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^m-1}{(1+\alpha)^n-1}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{(1+\alpha)^n-1}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{(1+\alpha)^n-1}=\boxed{\frac{m}{n}}$$

(замечательный предел 5).

В качестве повторения[7]:

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt{2-x}-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left[(2x-1)^{\frac{1}{3}}-1\right]\left[(2x-1)^{\frac{2}{3}}+(2x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right]\left[(2-x)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{\left[(2-x)^{\frac{1}{2}}-1\right]\left[(2-x)^{\frac{1}{2}}+1\right]\left[(2x-1)^{\frac{2}{3}}+(2x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1-1)\left[(2-x)^{\frac{1}{2}}+1\right]}{(2-x-1)\left[(2x-1)^{\frac{2}{3}}+(2x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right]}=$$

$$=-2\lim_{x\to 1}\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}+1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}+(2x-1)^{\frac{1}{3}}+1}=$$

$$=-2\cdot\frac{(2-1)^{\frac{1}{2}}+1}{(2-1)^{\frac{2}{3}}+(2-1)^{\frac{1}{3}}+1}=\frac{-2(1+1)}{1+1+1}=-\frac{4}{3}=\boxed{-1\frac{1}{3}}.$$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 9x}{3x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{9x-6x}{2}\cdot\cos\frac{6x+9x}{2}}{3x}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{15x}{2}}{3x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{15x}{2}=$$

$$=-1\cos 0=\boxed{-1}.$$

[7] См. Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб, Петроглиф, 2004, 2008 г., стр. 126.

9) $$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]}{1+x-(1-x)}=$$

$$=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\left(\sqrt[3]{(1+0)^2}+\sqrt[3]{1+0}\cdot\sqrt[3]{1-0}+\sqrt[3]{(1-0)^2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}(1+1+1)=\frac{15}{2}=\boxed{7{,}5}.$$

10) $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\left(\sqrt{1-\sin x}+1\right)}{1-\sin x-1}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\left(\sqrt{1-\sin x}+1\right)}{-\sin x}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi}\left(\sqrt{1-\sin x}+1\right)=-\left(\sqrt{1-0}+1\right)=\boxed{-2}.$$

Практикум 7

Рассмотрим более сложные примеры.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x-\operatorname{tg}8x}{8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x(\cos 8x-1)}{\cos 8x\cdot 8x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 8x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 4x}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{\cos(8\cdot 0)}\cdot 1\cdot(-32)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2=-32\cdot 1=\boxed{-32}.$$

2) $$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4x-3\pi}}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}-1\right)^{\frac{4}{4x-3\pi}}=(1^\infty)$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4x-3\pi}}=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Здесь используем } \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.\\ \text{Положим } x-\dfrac{3\pi}{4}=t.\end{array}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}}}\right]^{\frac{\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}}{t\sin\frac{\pi}{4}}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}}{t\sin\frac{\pi}{4}}}=\boxed{e^{-1}},$$ так как

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}}{t\sin\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{t+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}}{t\sin\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin\frac{t+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{t+\pi}{2}}{t\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{-2}{\sin\frac{\pi}{4}}\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{t}{2}}{t}=$$

$$=\frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\lim_{t\to0}\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}=$$

$$=-\sqrt{2}\sin\left(0+\frac{\pi}{4}\right)\cdot1=-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-1.$$

3) $$\lim_{p\to\infty}\left(\cos\frac{4x}{p}\right)^p=\lim_{p\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{2x}{p}\right)^p= \qquad (1^\infty)$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\left(1-2\sin^2\frac{2x}{p}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{2x}{p}}}\right]^{p\left(-2\sin^2\frac{2x}{p}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{p\to\infty}\left(p\left(-2\sin^2\frac{2x}{p}\right)\right)}=e^0=\boxed{1},\text{ так как}$$

$$\lim_{p\to\infty}\left(p\left(-2\sin^2\frac{2x}{p}\right)\right)= \qquad \left(\text{Положим } p=\frac{1}{t}.\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-2\sin^2(2xt)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(2xt)}{2xt}\cdot\lim_{t\to0}(-4x\sin(2xt))=$$

$$=1\cdot0=0.$$

4) $$\lim_{x\to0}\frac{5^{1-\cos2x}-1}{7^{\sin^2 2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{5^{2\sin^2x}-1}{7^{\sin^2 2x}-1}=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Используем 4-й замечательный предел}\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.\end{array}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{5^{2\sin^2x}-1}{2\sin^2x}\cdot2\sin^2x}{\frac{7^{\sin^2 2x}-1}{\sin^2 2x}\cdot\sin^2 2x}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^{2\sin^2 x}-1}{2\sin^2 x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{7^{\sin^2 2x}-1}{\sin^2 2x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{4\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\ln 5}{\ln 7} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\log_7 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 0} = \boxed{\log_{49} 5}.$$

5) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_4(1-\operatorname{tg}^2 x)}{16^{\sin^2 x}-1} =$$

[Используем 3-й и 4-й замечательные пределы
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e;\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a.$]

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{\log_4(1-\operatorname{tg}^2 x)}{-\operatorname{tg}^2 x} \cdot (-\operatorname{tg}^2 x)}{\frac{16^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)} \right) =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_4(1-\operatorname{tg}^2 x)}{-\operatorname{tg}^2 x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{16^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\log_4 e}{\ln 16} \cdot \frac{-1}{\cos^2 0} = -\frac{1}{2}\frac{\log_4 e}{\ln 4} = \boxed{-\frac{1}{2}\log_4^2 e}.$$

6) $$\lim_{y\to 1} \left((1-y)\operatorname{tg}\frac{3-2y}{2}\cdot\pi \right) = \qquad (0\cdot\infty)$$

(Положим $y-1=t;\quad y=t+1.$)

$$= \lim_{t\to 0} \left((-t)\operatorname{tg}\left(\frac{3-2t-2}{2}\cdot\pi \right) \right) =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \left(t\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi t \right) \right) =$$

$$= -\lim_{t\to 0} (t\operatorname{ctg}\pi t) = -\lim_{t\to 0} \frac{t\cos\pi t}{\sin\pi t} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin\pi t} \cdot \lim_{t\to 0} \cos\pi t =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \left(\lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{\sin\pi t} \right) \cdot \cos 0 = -\frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot 1 = \boxed{-\frac{1}{\pi}}.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1+3x}-\sqrt[8]{1+5x}}{\sqrt[4]{1+3x}-\sqrt[9]{1+5x}}$.

Иногда для решения задач на пределы очень эффективным способом является использование понятия бесконечно малых функций.

Определение. Если при $x \to 0$ $f(x) \to 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, то говорят, что $f(x)$ — бесконечно малая функция.

Определение. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка, если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = c$, где c — константа.

Используя замечательные пределы, можно указать эквивалентные бесконечно малые функции. При $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$, тогда $\sin kx \sim kx$;
   $\operatorname{tg} x \sim x$, $\operatorname{tg} kx \sim kx$;
   $\arcsin x \sim x$, $\arcsin kx \sim kx$;
   $\operatorname{arctg} x \sim x$, $\operatorname{arctg} kx \sim kx$.
2. Так как $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$, то $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, тогда $1-\cos kx \sim \dfrac{k^2x^2}{2}$.
3. $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x\ln a$, тогда $a^{kx} - 1 \sim kx\ln a$.
4. $\ln(1+x) \sim x$, $\log_a(1+x) \sim x\log_a e$, тогда $\log_a(1+kx) \sim kx\log_a e$.
5. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$, тогда $(1+kx)^\mu - 1 \sim k\mu x$.

Для решения данного примера используем то, что $(1+kx)^\mu \sim 1+k\mu x$, тогда:

$$\sqrt[6]{1+3x} = (1+3x)^{\frac{1}{6}} \sim 1+3\cdot\frac{1}{6}x = 1+\frac{1}{2}x;$$

$$\sqrt[8]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{8}} \sim 1 + 5\cdot\frac{1}{8}x;$$

$$\sqrt[4]{1+3x} = (1+3x)^{\frac{1}{4}} \sim 1 + 3\cdot\frac{1}{4}x;$$

$$\sqrt[9]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{9}} \sim 1 + 5\cdot\frac{1}{9}x,$$

значит

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+3x}-\sqrt[8]{1+5x}}{\sqrt[4]{1+3x}-\sqrt[9]{1+5x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x\right)-\left(1+\frac{5}{8}x\right)}{\left(1+\frac{3}{4}x\right)-\left(1+\frac{5}{9}x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x}{\frac{3}{4}x-\frac{5}{9}x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{9}{14}\right) = \boxed{-\frac{9}{14}}.$$

Примечание. Известно, что при вычислении пределов любой бесконечно малый сомножитель можно заменить на эквивалентный ему. Но переходить к эквивалентным бесконечно малым функциям в суммах или разностях, вообще говоря, нельзя. Если в результате такого перехода в ответе получится 0 или ∞, то такой ответ может быть неверным.

Переход к эквивалентным бесконечно малым функциям в суммах или разностях возможен, только если при этом эти бесконечно малые функции взаимно не уничтожают друг друга.

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{(2^x-1)\operatorname{arctg} 3x} =$

$$1-\cos 5x \sim \frac{25x^2}{2};\quad 2^x-1 \sim x\ln 2;\quad \operatorname{arctg} 3x \sim 3x.$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{25x^2}{2}}{x\ln 2\cdot 3x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{3x^2\ln 2} = \frac{25}{2\cdot 3\ln 2} = \boxed{4\frac{1}{6}\log_2 e}.$$

Примечание. В принципе, какие способы будут использованы в вычислении пределов — дело вкуса, опыта, рациональности — как это понимает читатель.

Тренировочная работа 1

Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+2n-1}{2+4+6+\ldots+2n}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x^2}-1}{(\sin x)^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+2\sin^2 x)}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg} x}$;

8) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+6x^2+15x+18}{x^3+5x^2+5x-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sin 2x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 9x-\operatorname{tg} 9x}{9x^3}$;

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4x-\pi}}$;

15) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\cos\dfrac{2x}{m}\right)^{m^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{\sin^2 x}-1}{8^{1-\cos x}-1}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(\cos^2 x)}{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}$;

18) $\lim\limits_{y\to -1} \left((1+y)\operatorname{tg}\dfrac{2y+3}{2}\pi\right)$.

Решение тренировочной работы 1

Вычислите:

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2-4)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5-9)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 2+5}+3}{\sqrt{3\cdot 2-2}+2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{3+3}{2+2}=\frac{9}{4}=\boxed{2{,}25}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{2+4+6+\ldots+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+2n-1}{2}\cdot n}{2\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+1}=\frac{1}{0+1}=\boxed{1}.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2=\boxed{e^2}.$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{-(x+1)}\right]^{\frac{x}{-(x+1)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{-(x+1)}}=\boxed{e^{-1}}.$$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{(\sin x)^2}=$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\frac{2x^2}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=$$

$$=\ln e\cdot2\cdot1=\boxed{2}.$$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lg(1+2\sin^2 x)}{x^2}=$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\lg(1+2\sin^2 x)}{2\sin^2 x}\cdot\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\lg(1+2\sin^2 x)}{2\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=$$

$$=\lg e\cdot2\cdot1=\boxed{2\lg e}.$$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\operatorname{tg} x}=$ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\cos x=\boxed{\frac{1}{n}}.$$

8) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+6x^2+15x+18}{x^3+5x^2+5x-3}.$

Пусть $f(x)=x^3+6x^2+15x+18$; $f(-3)=0$, тогда разделим на $x+3$:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+6x^2+15x+18 & x+3 \\ \cline{2-2}
x^3+3x^2 & x^2+3x+6 \\ \cline{1-1}
-\,3x^2+15x & \\
3x^2+9x & \\ \cline{1-1}
-\,6x+18 & \\
6x+18 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$$f(x)=(x+3)(x^2+3x+6).$$

Пусть $g(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 3$. $g(-3) = 0$, аналогично:

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3 + 5x^2 + 5x - 3 & x + 3 \\ \cline{2-2}
x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 + 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-\,2x^2 + 5x \qquad & \\
2x^2 + 6x \qquad & \\ \cline{1-1}
-\,-x - 3 & \\
-x - 3 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

$g(x) = (x+3)(x^2 + 2x - 1)$.

Значит

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 18}{x^3 + 5x^2 + 5x - 3} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2 + 3x + 6)}{(x+3)(x^2 + 2x - 1)} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 3x + 6}{x^2 + 2x - 1} =$$

$$= \frac{9 - 9 + 6}{9 - 6 - 1} = \boxed{3}.$$

9) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$.

а) Для решения используем замену переменной. Положим $x - 7 = t$, тогда

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \frac{\sqrt{t+9} - \sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16} - 2}$$

и при $x \to 7$ $t \to 0$.

б) Для того, чтобы использовать замечательный предел $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ или эквивалентные бесконечно малые функции, преобразуем каждый из корней.

$$\frac{\sqrt{t+9} - \sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16} - 2} = \frac{3\sqrt{1 + \frac{t}{9}} - 3\sqrt[3]{1 + \frac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1 + \frac{t}{16}} - 2} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{t}{9}} - \sqrt[3]{1 + \frac{t}{27}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{t}{16}} - 1}.$$

в) Используя эквивалентность бесконечно малых функций вида $(1+kx)^\mu \sim 1+k\mu x$, получим при $t\to 0$

$$\sqrt{1+\frac{t}{9}}=\left(1+\frac{t}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\sim\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}t+1;$$

$$\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}=\left(1+\frac{t}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\sim\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{3}t+1;$$

$$\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}=\left(1+\frac{t}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\sim\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}t+1.$$

г) $$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1}{18}t+1\right)-\left(\frac{1}{81}t+1\right)}{\left(\frac{1}{64}t+1\right)-1}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{18}-\frac{t}{81}}{\frac{t}{64}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{64\cdot(9-2)}{3\cdot 54}=\frac{32\cdot 7}{54}=\boxed{4\frac{4}{27}}.$$

10) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x+2-2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=\boxed{4\sqrt{2}}.$$

11) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{(\sin x-\cos x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{(\cos x-\sin x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x-\sin x}=$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = \boxed{-1}.$$

12) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+1\right)}{1-\operatorname{tg} x-1} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+1\right) = -\left(\sqrt{1-0}+1\right) = \boxed{-2}.$$

13) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x - \operatorname{tg} 9x}{9x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 9x(\cos 9x - 1)}{\cos 9x \cdot 9x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 9x}{9x}\frac{-2\sin^2 4{,}5x}{x^2}\frac{1}{\cos 9x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 9x}\cdot\left(-\frac{81}{2}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4{,}5x}{4{,}5x}\right)^2 =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos 0}\cdot\left(-\frac{81}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{81}{2} = \boxed{-40{,}5}.$$

14) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1-\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4x-\pi}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\left(1-\frac{\sin\frac{\pi}{4}-\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{-\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}-\sin x}}\right)^{-\frac{4\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin x\right)}{(4x-\pi)\sin\frac{\pi}{4}}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin x\right)}{(4x-\pi)\sin\frac{\pi}{4}}}.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin x\right)}{(4x-\pi)\sin\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{8\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2}}{8\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= -\sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}}{\frac{\frac{\pi}{4}-x}{2}}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+x}{2} = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -1.$$

Значит,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{4}{4x-\pi}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin x\right)}{(4x-\pi)\sin\frac{\pi}{4}}} = \boxed{e}.$$

15) $$\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{2x}{m}\right)^{m^2} = \lim_{m\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{m}\right)^{m^2} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\left(1-2\sin^2\frac{x}{m}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{m}}}\right)^{-m^2\cdot 2\sin^2\frac{x}{m}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{m\to\infty}\left(-m^2\cdot 2\sin^2\frac{x}{m}\right)} = e^{-2x^2\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}\right)^2} = \boxed{e^{-2x^2}}.$$

16) $$\lim_{x\to 0}\frac{4^{\sin^2 x}-1}{8^{1-\cos x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{4^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{8^{2\sin^2\frac{x}{2}}-1}\right) =$$

$$\ln 4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{8^{2\sin^2\frac{x}{2}}-1} = \ln 4\cdot\frac{1}{\ln 8}\cdot\lim_{x\to 0}2\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\log_8 4 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(\cos^2 x)}{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1} =$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log_2(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\,\frac{\operatorname{tg}^2 x}{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}\,\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}\right) =$$

$$= -\log_2 e\cdot\frac{1}{\ln 4}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x = \boxed{-\frac{1}{2}\log_2^2 e}.$$

18) $\lim\limits_{y\to -1}\left((1+y)\operatorname{tg}\dfrac{2y+3}{2}\pi\right) =$

(Положим $y+1=t$.)

$$= \lim_{t\to 0}\left(t\operatorname{tg}\left(\frac{2t+1}{2}\pi\right)\right) = \lim_{t\to 0}\left(t\operatorname{tg}\left(t\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t}{-\operatorname{tg} t\pi} = -\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t\pi}\cos t\pi\right) =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t\pi}{\pi\sin t\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\pi t = -\frac{1}{\pi}\cdot 1 = \boxed{-\frac{1}{\pi}}.$$

2

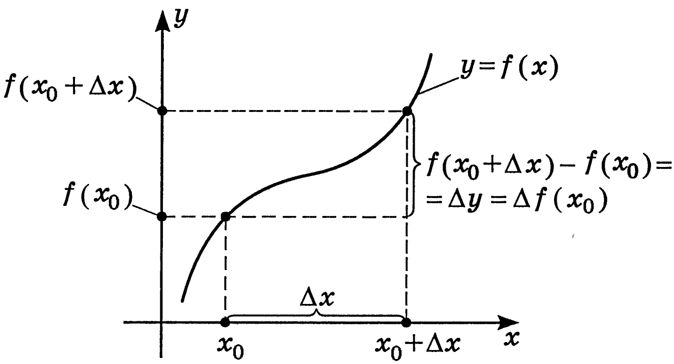
Производная функции

Приращение функции

Понятие монотонности функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Положим $x - x_0 = \Delta x$.
Δx называется приращением аргумента в точке x_0.

$f(x) - f(x_0) = \Delta y = \Delta f(x_0)$ назовем приращением функции в точке x_0, соответствующим Δx.



Пример 1. $y = f(x) = x^3$. $x_0 = 2$. $\Delta x = \dfrac{1}{2}$. $\Delta y = ?$

$x = x_0 + \Delta x$; $x = 2 + \dfrac{1}{2}$;

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f\left(2+\frac{1}{2}\right)-f(2)=$$
$$=(2{,}5)^3-2^3=(2{,}5-2)(2{,}5^2+2{,}5\cdot 2+2^2)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(6{,}25+5+4)=\frac{1}{2}\cdot 15{,}25=7{,}625.$$

Пример 2. $y=f(x)=\frac{1}{x}$. $x_0=2$. $\Delta x=\frac{1}{2}$. $\Delta y=?$

$$\Delta y=f(2{,}5)-f(2)=\frac{1}{2{,}5}-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4-5}{10}=-\frac{1}{10}.$$

Введенные понятия оказываются очень эффективным средством для выяснения промежутков монотонности. Напомним, что

а) если для $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ из $x_2>x_1$ следует $f(x_2)>f(x_1)$, то $y=f(x)$ называется возрастающей;

б) если для $\forall x_1, x_2 \in D(f)$ из $x_2>x_1$ следует $f(x_2)<f(x_1)$, то $y=f(x)$ называется убывающей.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется:

а) возрастающей, если $\forall x_0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$;

б) убывающей, если $\forall x_0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

Примечание. Данное определение есть иная форма записи привычных определений возрастающей и убывающей функций.

Пример 3. $y=f(x)=x^2$. Исследуем функцию на монотонность.

$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$ (приращение в точке x).

Полагая $\Delta x\to 0$, заметим, что $(\Delta x)^2$ — пренебрежимо малая величина, $\Delta f(x)\approx 2x\cdot\Delta x$, тогда $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\approx 2x$, значит

при $x>0$ $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}>0$ — функция возрастает ($\uparrow$),

при $x<0$ $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}<0$ — функция убывает ($\downarrow$).

Пример 4. $y = x^3 - 3x$, исследуем функцию на монотонность по знаку $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

1. $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x) - (x^3 - 3x) =$
$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x - x^3 + 3x =$
$= 3(x^2 - 1)\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

   Пусть $\Delta x \to 0$, тогда $(\Delta x)^2$ и $(\Delta x)^3$ — пренебрежимо малые величины.

   Тогда $\Delta f(x) \approx 3(x^2 - 1)\Delta x$ и $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 3(x^2 - 1)$,

   значит при $x^2 - 1 > 0$ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$, и $f(x)$ возрастает;

   при $x^2 - 1 < 0$ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$, $f(x)$ убывает,

   следовательно, $y = f(x)$ — кусочно-монотонная функция.

   При $x = 1$ $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$;

   при $x = -1$ $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$.

   $y = 0$; $x^3 - 3x = 0$ при $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

   На $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ $y = f(x)$ возрастает;

   на $x \in (-1; 1)$ $y = f(x)$ убывает.

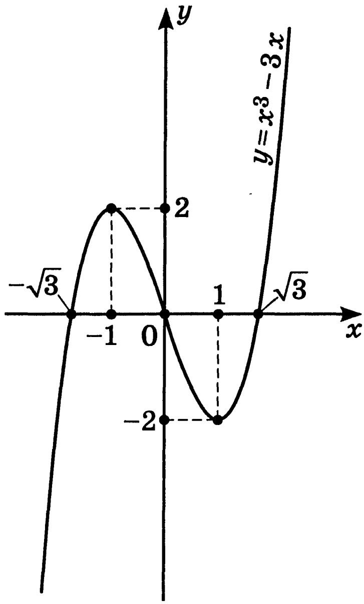
2. Отметим, что

   а) при $x \in (-1 - \Delta x; -1 + \Delta x)$ $f(-1) > f(x)$, при $x = -1$ если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to 0$;

   $f(-1)$ называется максимумом на $(-1 - \Delta x; -1 + \Delta x)$.

   б) при $x \in (1 - \Delta x; 1 + \Delta x)$ $f(1) < f(x)$, при $x = 1$ если $\Delta x \to 0$, то $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to 0$;

   $f(1)$ называется минимумом на $(1 - \Delta x; 1 + \Delta x)$.



Примечание. Даже рассмотренные примеры показывают важность исследования знака $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ для понимания характера поведения функции (интервалы монотонности, наличие максимума, минимума) при $\Delta x \to 0$.

Практикум 8

Найдите:

а) $\Delta f(x)$;

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Укажите, на каком промежутке

в) $y = f(x)$ возрастает и $y = f(x)$ убывает

для следующих функций:

1. $y = x^2 + 2x$;

2. $y = kx + b$;

3. $y = ax^2 + bx + c$;

4. $y = x^3$;

5. $y = \dfrac{1}{x}$;

6. $y = \sqrt{x}$.

Решение практикума 8

1. $y = x^2 + 2x$.

а) $$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\ &= (x + \Delta x)^2 + 2\,(x + \Delta x) - (x^2 + 2x) = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x = \\ &= 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2 .\end{aligned}$$

Итак, $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$.

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2(x + 1) + \Delta x$;

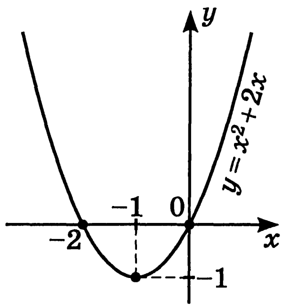
при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 2(x + 1)$.

в) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$, т. е. $2(x+1) > 0; \Leftrightarrow x > -1; \Leftrightarrow y = f(x) \uparrow$;

$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$, т. е. $2(x+1) < 0; \Leftrightarrow x < -1; \Leftrightarrow y = f(x) \downarrow$.

Интересно отметить, что $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to 0$ при $x = -1$,

$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1; \quad f(-1) = f_{\min} = -1.$



2. $y = kx + b$.

а) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) =$
$= kx + k\Delta x + b - kx - b = k\Delta x$;

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = k$ — величина постоянная при $\Delta x \to 0$;

в) при $k > 0 \quad y = f(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}$;
при $k < 0 \quad y = f(x) \downarrow$ на $\mathbb{R}$.

3. $y = ax^2 + bx + c$.

а) $\Delta f(x) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) =$
$= ax^2 + 2a \cdot x\Delta x + a(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c =$
$= 2ax\Delta x + b\Delta x + a(\Delta x)^2$;

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x$;

при $\Delta x \to 0 \quad \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 2ax + b$;

в) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$, т. е. $2ax + b > 0$, значит $y = f(x) \uparrow$, если

при $a > 0$ $x > -\dfrac{b}{2a}$ или при $a < 0$ $x < -\dfrac{b}{2a}$;

$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0$, т. е. $2ax + b < 0$, значит $y = f(x) \downarrow$, если

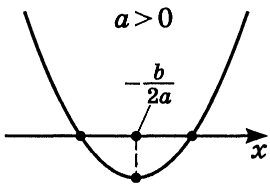
при $a > 0$ $x < -\dfrac{b}{2a}$ или при $a < 0$ $x > -\dfrac{b}{2a}$.

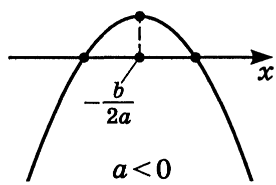
Имеет смысл отметить, что

$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 2ax + b = 0$, тогда $x = -\dfrac{b}{2a}$, значит

при $a > 0$ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = y_{\min}$;

при $a < 0$ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = y_{\max}$.





4. $y = x^3$.

а) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$
$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$
$= \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)\Delta x$;

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$,

при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx 3x^2$;

в) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$ $\forall x \neq 0$ $y = f(x) \uparrow$.

5. $y = \dfrac{1}{x}$.

а) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) =$
$$= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x(x + \Delta x)}$;

при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx -\dfrac{1}{x^2}$;

в) $-\dfrac{1}{x^2} < 0$ при $\forall x \neq 0$, $y = f(x) \downarrow$.

Примечание. В данном случае $y = f(x)$ убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; \infty)$, но не является убывающей — это принципиально.

6. $y = \sqrt{x}$.

а) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} =$
$$= \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

б) $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$;

в) при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ для $\forall x \in (0; \infty)$.

Понятие производной функции в точке

Определение производной

Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к вызвавшему его приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.

Записывается $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

или $\lim\limits_{\Delta x_0 \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = y'$, **или** $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$,

или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'_{x_0} = f'(x_0)$,

или $y'_{x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Примечание. Все это разные формы записи предела функции в точке x_0. Если же понимать производную как **функцию,** то рассматривают предел в точке x — общий вид.

Определение 2. Функция $f(x)$, имеющая производную для $\forall x \in D(f)$, называется дифференцируемой.

Рассмотрим производные простейших элементарных функций.

1. $f(x) = c$ — const.

   $f(x + \Delta x) = c$, тогда $f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$,

   значит $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$, и $\boxed{c' = 0}$.

2. $f(x) = ax + b$.

   $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x) + b - (ax + b) = a\Delta x$;

   $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a = a$,

   значит $\boxed{(ax + b)' = a}$,

   например, $(3x - 4)' = 3$.

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) =$
$= a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) =$
$= 2ax\Delta x + b\Delta x + a(\Delta x)^2$;

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2ax + b + a\Delta x) = 2ax + b,$$

значит $\boxed{(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b}$.

4. $y = x^n$.

Учтем, что $a^n - b^n =$
$= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\Big((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \ldots +$$
$$+ (x + \Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\Big) =$$
$$= x^{n-1} + xx^{n-2} + x^2x^{n-3} + \ldots + x^{n-2}x + x^{n-1} = nx^{n-1},$$

поэтому $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$.

Более строгое доказательство для всех $n \in \mathbb{N}$ возможно только методом математической индукции.

5. $y = \dfrac{1}{x}$.

$$\Delta f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)};$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

$\boxed{\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}}$.

6. $y = \sqrt{x}$.

$$\Delta f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{\Delta x \to 0}(x + \Delta x)} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}.$$

7. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + \Delta x}}{\sqrt[3]{x + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + \Delta x}\right)\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x + \Delta x}\,\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{x - x - \Delta x}{\sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)}\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x\,(x + \Delta x) + \sqrt[3]{x^2}}\right)};$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{\sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)}\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)}\left(\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x\,(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\right)} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}.$$

8. $y = x^{\mu}$.

$$(x^{\mu})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} =$$

$$= x^{\mu} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}, \quad \boxed{(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}},$$

так как $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\mu} - 1}{x} = \mu}$, где $\mu \in D$.

Заметим, что случаи 4–6 — частные случаи данной теоремы при $\mu = n$, $\mu = -1$ и $\mu = \dfrac{1}{2}$ соответственно.

Используя формулу, найдем производные некоторых функций.

9. Пусть $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Представим ее в виде степени: $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Теперь по формуле $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ получим

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

10. $y = \dfrac{1}{x^3}$. $y = x^{-3}$; $y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.

11. $x = \sqrt[5]{x^4}$.

Так как $D(y) = (-\infty; \infty)$, то переход к виду $y = x^{\frac{4}{5}}$ сужает область определения ($x > 0$). Для радикалов нечетной степени применим другую формулу: $\boxed{\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}}$.

В данном случае $m = 4$ и $n = 5$. $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$.

12. $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$. Здесь $m = -1$ и $n = 5$. Тогда $\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)' = \dfrac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}$.

Основные теоремы о производных

Теорема 1. Производная алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих производные, равна алгебраической сумме производных этих функций, т. е. для двух функций, $(w(x)+v(x))' = w'(x)+v'(x)$.

Доказательство.
Пусть $f(x) = w(x)+v(x)$.
$f(x+\Delta x) = w(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$;
$\Delta f(x) = w(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-w(x)-v(x)$;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(w(x+\Delta x)-w(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{w(x+\Delta x)-w(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} =$$
$$= w'(x)+v'(x), \quad \text{т. е. } \boxed{(u+v)' = u'+v'}.$$

Теорема 2. $f(x) = u(x)v(x)$.
$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, т. е. $(uv)' = u'v+uv'$.

Доказательство.
$\Delta f(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x) =$
$[\Delta u(x) = u(x+\Delta x)-u(x)]$
$= (\Delta u(x)+u(x))\,(\Delta v(x)+v(x))-u(x)v(x) =$
$= \Delta u(x)\Delta v(x)+u(x)\Delta v(x)+\Delta u(x)v(x)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\Delta v(x)+u(x)\Delta v(x)+\Delta u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\Delta v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+$$
$$+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} =$$
$$= 0+u(x)v'(x)+u'(x)v(x).$$

Таким образом, $\boxed{(uv)' = u'v+v'u}$.

Следствие 1. $y = cf(x)$.

$(cf(x))' = cf'(x) + c'f(x) = cf'(x) + 0 \cdot f(x)$,

т. е. $\boxed{[cf(x)]' = cf'(x)}$ — постоянную можно выносить за знак производной.

Следствие 2. $\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n\right)' =$
$= a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

Пример 1. $y = x^2 - x + \dfrac{1}{x}$.

$$y' = \left(x^2 - x + \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Пример 2. $y = 4x + 5x^3 - 8\sqrt{x}$.

$$y' = \left(4x + 5x^3 - 8\sqrt{x}\right)' = (4x)' + \left(5x^3\right)' - (8\sqrt{x})' =$$
$$= 4(x)' + 5\left(x^3\right)' - 8\left(\sqrt{x}\right)' = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3x^2 - 8\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= 4 + 15x^2 - 8 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2} - 1} = 15x^2 - 4x^{-\frac{1}{2}} + 4 = 15x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + 4.$$

Пример 3. $y = (3x^2 + 1)(3x - 2x^2)$.

$$y'(x) = (3x^2 + 1)'(3x - 2x^2) + (3x^2 + 1)(3x - 2x^2)' =$$
$$= (6x + 0)(3x - 2x^2) + (3x^2 + 1)(3 - 4x) =$$
$$= 18x^2 - 12x^3 + 9x^2 + 3 - 12x^3 - 4x = -24x^3 + 27x^2 - 4x + 3.$$

Примечание. В примере 3 можно найти производную и не используя теорему о производной произведения. Представим функцию в виде многочлена:

$y = (3x^2 + 1)(3x - 2x^2) = -6x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 3x$;
$y' = -24x^3 + 27x^2 - 4x + 3$.

Теорема 3. Производная частного двух функций, имеющих производную, определяется формулой

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \neq 0)\,.$$

Доказательство.

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}. \qquad \Delta f(x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=$$

$$=\frac{(u(x)+\Delta u(x))\,v(x)-(v(x)+\Delta v(x))\,u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}=$$

$$=\frac{u(x)v(x)+\Delta u(x)v(x)-u(x)v(x)-\Delta v(x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}=$$

$$=\frac{\Delta u(x)v(x)-\Delta v(x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u(x)v(x)-\Delta v(x)u(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}v(x)-\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}u(x)\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)v(x)}=$$

$$=\frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{v(x)u'(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}}$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-4x}.$

$$y'=\left(\frac{2x^2-3x+1}{x^3-4x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(2x^2-3x+1\right)'\left(x^3-4x\right)-\left(x^3-4x\right)'\left(2x^2-3x+1\right)}{\left(x^3-4x\right)^2}=$$

$$=\frac{(4x-3+0)\left(x^3-4x\right)-\left(3x^2-4\right)\left(2x^2-3x+1\right)}{x^2\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^4-3x^3-16x^2+12x-\left(6x^4-8x^2-9x^3+12x+3x^2-4\right)}{x^2\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x^4+6x^3-11x^2+4}{x^2\left(x^2-4\right)^2}.$$

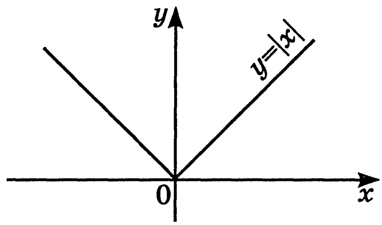
Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Примечания.

1. Из теоремы следует, что если функция не является непрерывной в точке x_0, то в этой точке она производную не имеет.
2. Непрерывная в точке x_0 $y = f(x)$ может в этой точке не иметь производную.

Пример 5. $y = |x|$

Для этой функции в точке x_0 односторонние производные не равны.



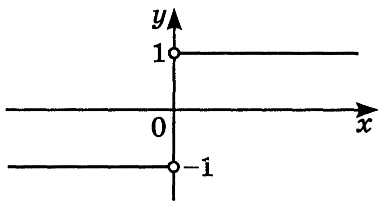
$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\text{ где } x_0=0$$

$f'_{-}(0)\neq f'_{+}(0)$.

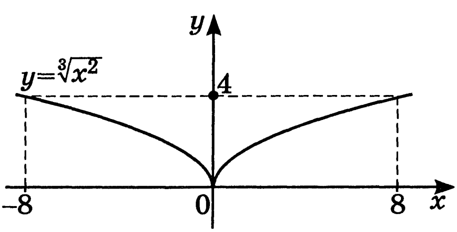
Пример 6.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}\neq\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x};$$

$-1\neq 1;$



Пример 7. $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = 0$ непрерывна. Известно, что $\boxed{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{a^{n-m}}}}$, значит $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Следовательно, не существует производной в точке $x_0 = 0$, потому что в точке $x_0 = 0$ производная не определена.



Практикум 9

Найдите производную:

1. $y = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 3x - 1;$
2. $y = \dfrac{2}{x^2} - 3x^{-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3x^{11} + \sqrt[3]{x} + 2x;$
3. $y = \left(3x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)(2x^2 + \sqrt{x} - 1);$
4. $y = \dfrac{2x^2 + 3}{4x - 5};$
5. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1};$
6. $y = (x^4 - 3x^3 + 1)(x^2 + 3x);$
7. $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 4x - 1};$
8. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3};$
9. $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5}{x\sqrt[3]{x}} + 4;$
10. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2};$
11. $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)(2x + 3);$
12. $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 - 3}{\sqrt[4]{x^3}}.$

Решение практикума 9

Найдите производную:

1. $y'(x) = \left(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 3x - 1\right)' =$

$= 5x^4 - 3\cdot 4x^3 - 5\cdot 3x^2 + 3 - 0 = 5x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 3.$

2. $y'(x) = \left(\dfrac{2}{x^2} - 3x^{-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3x^{11} + \sqrt[3]{x} + 2x\right)' =$

$= \left(2x^{-2}\right)' - 3\left(x^{-1}\right)' + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' - 3\cdot 11x^{10} + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2\cdot 1 =$

$= 2\cdot(-2)x^{-3} - 3\cdot(-1)x^{-2} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} - 33x^{10} + \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + 2 =$

$= -4x^{-3} + 3x^{-2} - \dfrac{1}{2}x^{-1,5} - 33x^{10} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2.$

3. $y'(x) = \left(\left(3x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \sqrt{x} - 1\right)\right)' =$

$= \left(3x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)'\left(2x^2 + \sqrt{x} - 1\right) +$

$+ \left(3x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \sqrt{x} - 1\right)' =$

$= \left(3 - 0 - x^{-2}\right)\left(2x^2 + \sqrt{x} - 1\right) +$

$+ \left(3x - 2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(4x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 0\right) =$

$= 6x^2 + 3\sqrt{x} - 3 - 2 - x^{-1,5} + x^{-2} +$

$+ 12x^2 - 8x + 4 + 1{,}5\sqrt{x} - x^{-\frac{1}{2}} + 0{,}5x^{-1,5} =$

$= 18x^2 + 4{,}5\sqrt{x} - x^{-0,5} - 0{,}5x^{-1,5} + x^{-2} - 1.$

4. $y'(x) = \left(\dfrac{2x^2 + 3}{4x - 5}\right)' =$

$= \dfrac{(2x^2+3)'(4x-5) - (4x-5)'(2x^2+3)}{(4x-5)^2} =$

$$= \frac{4x(4x-5) - 4(2x^2+3)}{(4x-5)^2} = \frac{16x^2 - 20x - 8x^2 - 12}{(4x-5)^2} =$$
$$= \frac{8x^2 - 20x - 12}{(4x-5)^2}.$$

5. $y'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}\right)' =$

$$= \frac{(\sqrt{x}+3)'(2\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}-1)'(\sqrt{x}+3)}{(2\sqrt{x}-1)^2} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x}-1) - \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+3)}{(2\sqrt{x}-1)^2} =$$
$$= \frac{2\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}-6}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-7}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)^2}.$$

6. $y'(x) = \left((x^4 - 3x^3 + 1)(x^2 + 3x)\right)' =$

$$= (4x^3 - 9x^2)(x^2 + 3x) + (2x+3)(x^4 - 3x^3 + 1) =$$
$$= 4x^5 - 9x^4 + 12x^4 - 27x^3 + 2x^5 - 6x^4 + 2x + 3x^4 - 9x^3 + 3 =$$
$$= 6x^5 - 36x^3 + 2x + 3.$$

7. $y'(x) = \left(\dfrac{3x+2}{x^2+4x-1}\right)' =$

$$= \frac{(3x+2)'(x^2+4x-1) - (x^2+4x-1)'(3x+2)}{(x^2+4x-1)^2} =$$
$$= \frac{3(x^2+4x-1) - (2x+4)(3x+2)}{(x^2+4x-1)^2} =$$
$$= \frac{3x^2 + 12x - 3 - 6x^2 - 16x - 8}{(x^2+4x-1)^2} = \frac{-3x^2 - 4x - 11}{(x^2+4x-1)^2}.$$

8. $y'(x) = \left(3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}\right)' =$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + (-3)x^{-4} =$$
$$= 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{1,5} - 3x^{-4}.$$

9. $y'(x) = \left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5}{x\sqrt[3]{x}} + 4\right)' =$ $\boxed{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{a^{n-m}}}}$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' - \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^4}}\right)' + 4' = 4\cdot\frac{-2}{3\sqrt[3]{x^{3-(-2)}}} - 5\cdot\frac{-4}{3\sqrt[3]{x^{3-(-4)}}} + 0 =$$

$$= -\frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{20}{3\sqrt[3]{x^7}}.$$

10. $y'(x) = \left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)' =$

$$= \frac{(x^2-3x+2)'(x^2+3x+2)-(x^2+3x+2)'(x^2-3x+2)}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{(2x-3)(x^2+3x+2)-(2x+3)(x^2-3x+2)}{(x^2+3x+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+3x+2)^2}\cdot(2x^3+6x^2+4x-3x^2-9x-6-$$

$$-2x^3+6x^2-4x-3x^2+9x-6) =$$

$$= \frac{6x^2-12}{(x^2+3x+2)^2}.$$

11. $y' = \left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)(2x+3)\right)' =$

[Так как $D(y):\ x > 0$,
то можно использовать $\boxed{(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}}$.]

$$= \left(2x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\right)'(2x+3) + \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)(2x+3)' =$$

$$= \left(-x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(2x+3) + \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)\cdot 2 =$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} + 4x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2x^{-\frac{1}{2}} + 2\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-1\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}}.$$

12. $y' = \left(\dfrac{x^3 - 5x^2 - 3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' =$

$$= \left(\frac{x^3}{x^{\frac{3}{4}}} - 5\frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{4}}}\right)' = \left(x^{2\frac{1}{4}} - 5x^{1\frac{1}{4}} - 3x^{-\frac{3}{4}}\right)' =$$

$$= 2\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{4}} - 5 \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)x^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{9}{4}x^{1\frac{1}{4}} - \frac{25}{4}x^{\frac{1}{4}} + \frac{9}{4}x^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{4}\left(9x^{1\frac{1}{4}} - 25x^{\frac{1}{4}} + 9x^{-\frac{7}{4}}\right) =$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt[5]{x^4} - \frac{25}{4}\sqrt[4]{x} + \frac{9}{4\sqrt[4]{x^7}}.$$

Результат решения допускается оставлять в любой из последних трех форм.

Производные некоторых функций

Производные тригонометрических функций

1. $y = f(x) = \sin x$.

   Было доказано, что $y = \sin x$ — непрерывная функция.

   $$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$
   $$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
   $$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$
   $$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
   $$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$
   $$= 1\cdot\cos x = \cos x,$$

   т. е. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$.

2. $y = f(x) = \cos x$ — также непрерывна на $D(f)$.

   $$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$
   $$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$
   $$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$
   $$= -1\cdot\sin x = -\sin x,$$

   т. е. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$.

3. $y=f(x)=\operatorname{tg}x$ — непрерывна на $D(f)$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right)$

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},\text{ т. е. }\boxed{(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}}.$$

4. $y=f(x)=\operatorname{ctg}x$ непрерывна на $D(f)$ $(x\neq\pi k \mid k\in\mathbb{Z})$.

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x},\text{ т. е. }\boxed{(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Используя формулы производных тригонометрических функций, найдите производные:

5. $y=(\sin x+2)(2\cos x-1)$.

$$y'=(\sin x+2)'(2\cos x-1)+(2\cos x-1)'(\sin x+2)=$$
$$=\cos x(2\cos x-1)+(-2\sin x)(\sin x+2)=$$
$$=2\cos^2 x-2\cos x-2\sin^2 x-4\sin x.$$

6. $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\cos x+1}$.

$$y'=\frac{(\operatorname{tg}x)'(\cos x+1)-(\cos x+1)'\operatorname{tg}x}{(\cos x+1)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x+1)-(-\sin x)\operatorname{tg}x}{(\cos x+1)^2}=$$

$$=\frac{\cos x+1+\sin x\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos x+1)^2}=\frac{\cos x+1+\sin^2 x\cos x}{\cos^2 x(\cos x+1)^2}.$$

Практикум 10

1. Найдите производную:

1) $y = 3x\sin x - 4x^2\cos x + 3\sqrt[4]{x}$;

2) $y = (2 + 3\cos x)(4x - 5\operatorname{tg} x)$;

3) $y = (2\sin x + 3\cos x - 1)(3\sin x - 5\cos x + 2)$;

4) $y = \dfrac{2\sin x + 5\cos x - 1}{3\sin x - 4\cos x}$.

2. Вычислите:

1) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{8}{x^2} - \sqrt[3]{x}$; $y'(1) = ?$

2) $y = \dfrac{\sqrt{x} - x^{-1}}{\sqrt{x} - x^{-2}}$; $y'(4) = ?$

3) $y = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x^2 + 1$; $y'(\pi) = ?$

4) $y = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{\pi}\sqrt{x} + 2x$; $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$

5) $y = (2 - x)\cos x + \dfrac{\sin x}{2 - x}$; $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = ?$

6) $y = \operatorname{tg} x(2\sin x - 3\cos x) + \operatorname{ctg} x(2\cos x - 3\sin x)$; $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = ?$

3. Решите неравенства:

1) $y = 2x^5 - 3x^4 - 3$; $y'(x) \leqslant 0$;

2) $y = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 - 3$; $y'(x) \leqslant 0$;

3) $y = 3x^2 + \dfrac{48}{x}$; $y'(x) \leqslant 0$.

4) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$; $y'(x) \geqslant 0$;

5) $y = (x^2 + 2x)\sqrt{x}$; $y'(x) \geqslant 0$;

6) $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{4 - x}$; $y'(x) \geqslant 0$.

Решение практикума 10

1. Найдите производную:

1) $y'(x) = \left(3x\sin x - 4x^2\cos x + 3\sqrt[4]{x}\right)' =$

$= 3\sin x + 3x\cos x - 8x\cos x + 4x^2\sin x + 3\cdot\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} =$

$= (3+4x^2)\sin x - 5x\cos x + 0{,}75x^{-0{,}75}$.

2) $y'(x) = ((2+3\cos x)(4x - 5\operatorname{tg} x))' =$

$= (2+3\cos x)'(4x - 5\operatorname{tg} x) + (4x - 5\operatorname{tg} x)'(2+3\cos x) =$

$= -3\sin x(4x - 5\operatorname{tg} x) + \left(4 - \frac{5}{\cos^2 x}\right)(2+3\cos x) =$

$= -12x\sin x + 15\sin x\operatorname{tg} x + 8 + 12\cos x - \frac{15}{\cos x} - \frac{10}{\cos^2 x} =$

$= -12x\sin x + \frac{15\sin^2 x - 15}{\cos x} + 8 + 12\cos x - 10(1+\operatorname{tg}^2 x) =$

$= -12x\sin x - 15\cos x + 12\cos x - 10\operatorname{tg}^2 x - 2 =$

$= -12x\sin x - 3\cos x - 10\operatorname{tg}^2 x - 2$.

3) $y'(x) = ((2\sin x + 3\cos x - 1)(3\sin x - 5\cos x + 2))' =$

$= (2\cos x - 3\sin x)(3\sin x - 5\cos x + 2) +$

$+ (3\cos x + 5\sin x)(2\sin x + 3\cos x - 1) =$

$= 6\cos x\sin x - 9\sin^2 x - 10\cos^2 x + 15\sin x\cos x + 4\cos x -$

$- 6\sin x + 6\cos x\sin x + 10\sin^2 x + 9\cos^2 x +$

$+ 15\sin x\cos x - 3\cos x - 5\sin x =$

$= 42\cos x\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x + \cos x - 11\sin x$.

4) $y'(x) = \left(\frac{2\sin x + 5\cos x - 1}{3\sin x - 4\cos x}\right)' =$

$= \frac{1}{(3\sin x - 4\cos x)^2}\Big((2\cos x - 5\sin x)(3\sin x - 4\cos x) -$

$- (3\cos x + 4\sin x)(2\sin x + 5\cos x - 1)\Big)$.

а) Обозначим $A(x)=(2\cos x-5\sin x)(3\sin x-4\cos x)=$
$=6\cos x\sin x-15\sin^2 x-8\cos^2 x+20\cos x\sin x=$
$=26\sin x\cos x-7\sin^2 x-8 \quad (\sin^2 x+\cos^2 x=1).$

б) Обозначим
$B(x)=(3\cos x+4\sin x)(2\sin x+5\cos x-1)=$
$=6\cos x\sin x+8\sin^2 x+15\cos^2 x+$
$+20\cos x\sin x-3\cos x-4\sin x=$
$=26\sin x\cos x+7\cos^2 x-3\cos x-4\sin x+8.$

в) $A(x)-B(x)=26\sin x\cos x-7\sin^2 x-8-$
$-26\sin x\cos x-7\cos^2 x+3\cos x+4\sin x-8=$
$=3\cos x+4\sin x-23.$

Тогда $y'=\dfrac{3\cos x+4\sin x-23}{(3\sin x-4\cos x)^2}.$

2. Вычислите:

1) $y'(x)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{8}{x^2}-\sqrt[3]{x}\right)'=$

$$=\left(3x^{-\frac{1}{2}}+8x^{-2}-x^{\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}-16x^{-3}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

$$y'(1)=-\frac{3}{2}\cdot 1-16\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 1=\boxed{-17\frac{5}{6}}.$$

2) $y'(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}-x^{-1}}{\sqrt{x}-x^{-2}}\right)'.$

Учтем, что $\dfrac{\sqrt{x}-x^{-1}}{\sqrt{x}-x^{-2}}=\dfrac{x^2\sqrt{x}-x}{x^2\sqrt{x}-1}$, тогда

$$y'=\frac{\left(x^{\frac{5}{2}}-x\right)'\left(x^{\frac{5}{2}}-1\right)-\left(x^{\frac{5}{2}}-1\right)'(x^{\frac{5}{2}}-x)}{(x^2\sqrt{x}-1)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-1\right)\left(x^{\frac{5}{2}}-1\right)-\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^{\frac{5}{2}}-x\right)}{(x^2\sqrt{x}-1)^2}=$$

$$= \frac{5x^4 - 2x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}} + 2 - 5x^4 + 5x^{\frac{5}{2}}}{2\left(x^2\sqrt{x} - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{3x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}} + 2}{2\left(x^2\sqrt{x} - 1\right)^2} = \frac{3x^2\sqrt{x} - 5x\sqrt{x} + 2}{2\left(x^2\sqrt{x} - 1\right)^2};$$

$$y'(4) = \frac{3 \cdot 16 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 2 + 2}{2 \cdot (16 \cdot 2 - 1)} = \frac{96 - 40 + 2}{2 \cdot 31^2} =$$

$$= \frac{58}{2 \cdot 961} = \boxed{\frac{29}{961}}.$$

3) $$y'(x) = \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x^2 + 1\right)' = \cos x - \frac{4x}{\pi}.$$

$$y'(\pi) = \cos\pi - \frac{4\pi}{\pi} = -1 - 4 = \boxed{-5}.$$

4) $$y'(x) = \left(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\pi}\sqrt{x} + 2x\right)' =$$

$$= -\sqrt{2}\sin x + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + 2.$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}}} + 2 = -1 + 1 + 2 = \boxed{2}.$$

5) $$y'(x) = \left((2 - x)\cos x + \frac{\sin x}{2 - x}\right)' =$$

$$= -\cos x - \sin x(2 - x) + \frac{\cos x(2 - x) - (-1)\sin x}{(2 - x)^2};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 - 1 \cdot \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{0 \cdot (2 - \frac{\pi}{2}) + 1}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^3}{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{8 - (4 - \pi)^3}{2(4 - \pi)^2}}.$$

6) $y'(x) = \Big(\operatorname{tg} x(2\sin x - 3\cos x) + \operatorname{ctg} x(2\cos x - 3\sin x)\Big)' =$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}(2\sin x - 3\cos x) + \operatorname{tg} x(2\cos x + 3\sin x) -$$

$$- \frac{1}{\sin^2 x}(2\cos x - 3\sin x) + \operatorname{ctg} x(-2\sin x - 3\cos x) =$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2 x)(2\sin x - 3\cos x) + \operatorname{tg} x(2\cos x + 3\sin x) -$$

$$- (1 + \operatorname{ctg}^2 x)(2\cos x - 3\sin x) + \operatorname{ctg} x(-2\sin x - 3\cos x).$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= (1 + 1^2)\left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \cdot \left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) -$$

$$-(1+1^2)\left(2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \cdot \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

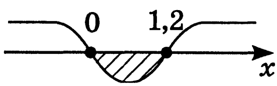
$$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1{,}5\sqrt{2} = \boxed{0}.$$

3. Решите неравенства:

1) $y'(x) = \left(2x^5 - 3x^4 - 3\right)' =$

$$= 10x^4 - 12x^3 = 2x^3(5x - 6).$$

$y'(x) \leqslant 0$

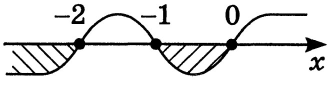


$[0; 1{,}2]$.

2) $y'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 - 3\right)' =$

$$= x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2);$$

$y'(x) \leqslant 0$

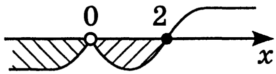


$(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$.

3) $y'(x) = \left(3x^2 + \dfrac{48}{x}\right)' =$

$$= 6x - \frac{48}{x^2} = \frac{6(x^3-8)}{x^2} = \frac{6(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}.$$

$y'(x) \leqslant 0$



$(-\infty; 0) \cup (0; 2]$,

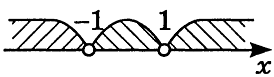
так как $\forall x \quad x^2 + 2x + 4 > 0$.

4) $y'(x) = \left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}\right)' =$

$$= \frac{(2x-2)(x^2-1) - 2x(x^2-2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 - 2x^3 + 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)^2}.$$

$y'(x) \geqslant 0 \quad (\forall x \quad x^2 - x + 1 > 0\,)$

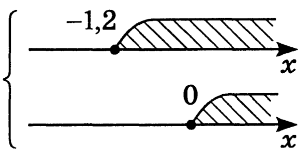


$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

5) $y'(x) = \left((x^2+2x)\sqrt{x}\right)' =$ $\qquad D(y):\ x \geqslant 0$

$$= \left(x^{2,5} + 2x^{1,5}\right)' = 2{,}5x^{1,5} + 3x^{0,5} = x^{0,5}(2{,}5x+3).$$

$y'(x) \geqslant 0$

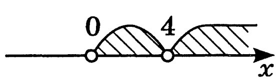


$x \geqslant 0$.

6) $y'(x) = \left(\dfrac{3\sqrt{x}}{4-x}\right)' = \dfrac{\frac{3}{2\sqrt{x}}(4-x) - (-1)\cdot 3\sqrt{x}}{(4-x)^2} =$

$$= \frac{12 - 3x + 6x}{2\sqrt{x}(4-x)^2} = \frac{3x+12}{2\sqrt{x}(4-x)^2}.$$

$y'(x) \geqslant 0$



$D(f):\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \neq 4 \end{cases}; \qquad x \in (0; 4) \cup (4; \infty).$

Производная показательной и логарифмической функции

1. $y = a^x$.

   Для доказательства используем замечательный предел

   $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}.$$

   $$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x}-1\right);$$

   $$y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a,$$

   т. е. $\boxed{(a^x)' = a^x\ln a}$.

2. $y = \log_a x$.

   Используем замечательный предел

   $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}.$$

   $$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$

   $$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

   $$= \frac{1}{x}\log_a e,\quad \text{т. е.}\quad \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e}.$$

3. Следствие 1. $(e^x)' = e^x$.

   Следствие 2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Практикум 11

1. Решите неравенства:

1) $y = 2e^x - 2x;\quad y'(x) > 0;$

2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 24\ln x;\quad y'(x) \leqslant 0;$

3) $y = 3x - 6\sin x;\quad y'(x) \leqslant 0;$

4) $y = 18x^2 - x\sqrt[3]{x};\quad y'(x) \geqslant 0;$

5) $y = x^2 + 6x - 8\ln x;\quad y'(x) < 0;$

6) $y = e^x \cos x;\quad y'(x) \geqslant 0.$

2. Вычислите:

1) $y = \log_5 \sqrt[3]{7x} + \sqrt{2 \cdot 5^{2x+1}};\quad y'(1) = ?$

2) $y = \dfrac{x^2}{1 - \sqrt[3]{x}} + \dfrac{\sin x}{3^{x+1}};\quad y'(0) = ?$

3) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x} \dfrac{2x - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}};\quad y'(1) = ?$

4) $y = \dfrac{x\ln x}{1 + x^2} + x^3 \sin x + e^x \operatorname{tg} x;\quad y'(1) = ?$

Решение практикума 11

1. Решите неравенства:

1) $y'(x) > 0$, если $y = 2e^x - 2x$.

$y'(x) = (2e^x - 2x)' = 2e^x - 2$;

$y'(x) > 0; \quad 2e^x - 2 > 0; \quad e^x > 1; \quad x > 0.$

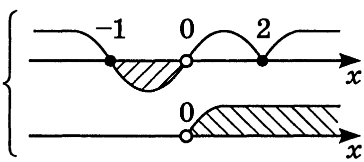
Ответ: $(0; \infty)$.

2) $y'(x) \leqslant 0$, если $y = 2x^3 - 9x^2 + 24\ln x; \qquad D(y): \ x > 0$

$y'(x) = \big(2x^3 - 9x^2 + 24\ln x\big)' =$

$$= 6x^2 - 18x + \frac{24}{x} = \frac{6(x^3 - 3x^2 + 4)}{x} = \frac{6(x+1)(x-2)^2}{x}.$$

$y'(x) \leqslant 0$

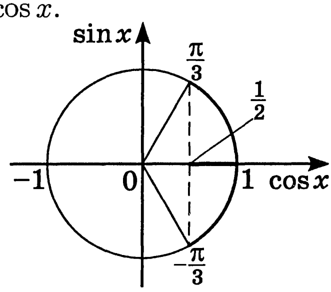


$x = 2.$

Ответ: $\{2\}$.

3) $y'(x) \leqslant 0$, если $y = 3x - 6\sin x$.

$y'(x) = (3x - 6\sin x)' = 3 - 6\cos x.$



$y'(x) \leqslant 0; \quad \cos x \geqslant \frac{1}{2};$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \geqslant x \geqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

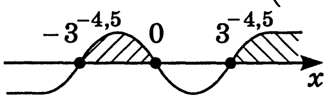
4) $y'(x) \geqslant 0$, если $y = 18x^2 - x\sqrt[3]{x}$.

$y'(x) = \left(18x^2 - x\sqrt[3]{x}\right)' =$

$= 36x - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(27x^{\frac{2}{3}} - 1\right) = 36x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{27}\right) =$

$= 36x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - 3^{-3}\right) = 36x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 3^{-1,5}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + 3^{-1,5}\right);$

$y'(x) \geqslant 0 \qquad 36x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 3^{-1,5}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} + 3^{-1,5}\right) \geqslant 0;$

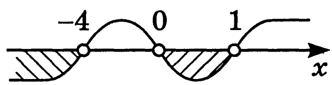


Ответ: $[-3^{-4,5}; 0] \cup [3^{-4,5}; \infty)$.

5) $y'(x) < 0$, если $y = x^2 + 6x - 8\ln x$. $\qquad D(y):\ x > 0$

$y'(x) = \left(x^2 + 6x - 8\ln x\right)' = 2x + 6 - \frac{8}{x} = \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{x}.$

$y'(x) = \frac{2(x^2 + 3x - 4)}{x} < 0;$



учитывая $D(y):\ x > 0$, получаем ответ.

Ответ: $(0; 1)$.

6) $y'(x) \geqslant 0$, если $y = e^x \cos x$.

$y'(x) = (e^x \cos x)' = e^x \cdot \cos x - \sin x \cdot e^x =$

$= e^x(\cos x - \sin x) = e^x \cdot \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

$y'(x) \geqslant 0; \qquad e^x \cdot \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0;$

$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \geqslant x + \frac{\pi}{4} \geqslant -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \geqslant x \geqslant -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$

Ответ: $\left\{\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

2. Вычислите:

1) $y'(1)$, если $y(x) = \log_5 \sqrt[3]{7x} + \sqrt{2 \cdot 5^{2x+1}} =$

$$= \frac{1}{3}\log_5 7x + \left(2 \cdot 5^{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log_5 7 + \log_5 x\right) + \sqrt{2} \cdot 5^{x+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\log_5 7 + \frac{1}{3}\log_5 x + \sqrt{10} \cdot 5^x,$$

т. е. $y = \frac{1}{3}\log_5 7 + \frac{1}{3}\log_5 x + \sqrt{10} \cdot 5^x$.

$$y'(x) = \left(\frac{1}{3}\log_5 7\right)' + \frac{1}{3}\left(\log_5 x\right)' + \sqrt{10} \cdot \left(5^x\right)' =$$

$$= 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}\log_5 e + \sqrt{10} \cdot 5^x \ln 5 =$$

$$= \frac{1}{3x}\log_5 e + \sqrt{10} \cdot 5^x \cdot \ln 5. \qquad \boxed{y'(1) = \frac{1}{3}\log_5 e + 5\sqrt{10}\ln 5}.$$

2) $y'(0)$, если $y = \frac{x^2}{1 - \sqrt[3]{x}} + \frac{\sin x}{3^{x+1}}$.

$$y'(x) = \left(\frac{x^2}{1 - \sqrt[3]{x}} + \frac{\sin x}{3^{x+1}}\right)' =$$

$$= \frac{2x\left(1 - \sqrt[3]{x}\right) - x^2\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)}{\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^2} + \frac{\cos x \cdot 3^x - \sin x \cdot 3^x \ln 3}{3 \cdot 3^{2x}} =$$

$$= \frac{6x - 6x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}}{3\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^2} + \frac{\cos x \cdot 3^x - \sin x \cdot 3^x \ln 3}{3 \cdot 3^{2x}} =$$

$$= \frac{6x - 5x^{\frac{4}{3}}}{3\left(1 - \sqrt[3]{x}\right)^2} + \frac{\cos x - \sin x \cdot \ln 3}{3 \cdot 3^x}; \qquad \boxed{y'(0) = \frac{1}{3}}.$$

3) $y'(1)$, если $y(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x} \dfrac{2x - 3x^2 + 1}{\sqrt{x}} =$

$$= 3^{2x}\left(-3x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) = 9^x\left(-3x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

$$y'(x) = (9^x)'\left(-3x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ 9^x\left(-3x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 9^x \ln 9 \cdot \left(-3x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ 9^x\left(-\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right);$$

$$y'(1) = 9\ln 9 \cdot (-3 + 2 + 1) + 9 \cdot (-4{,}5 + 1 - 0{,}5) = \boxed{-36}.$$

4) $y'(1)$, если $y = \dfrac{x \ln x}{1 + x^2} + x^3 \sin x + e^x \operatorname{tg} x$.

$$y'(x) = \left(\frac{x \ln x}{1 + x^2} + x^3 \sin x + e^x \operatorname{tg} x\right)' =$$

$$= \left(\frac{x}{1 + x^2}\right)' \ln x + (\ln x)' \frac{x}{1 + x^2} + 3x^2 \sin x + x^3 \cos x +$$

$$+ e^x \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} \ln x + \frac{1}{1 + x^2} + 3x^2 \sin x + x^3 \cos x +$$

$$+ e^x \operatorname{tg} x + e^x(1 + \operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \ln x + \frac{1}{1 + x^2} + 3x^2 \sin x + x^3 \cos x +$$

$$+ e^x(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1);$$

$$y'(1) = 0 + \frac{1}{2} + 3\sin 1 + \cos 1 + e^1(\operatorname{tg}^2 1 + \operatorname{tg} 1 + 1) =$$

$$= 0{,}5 + 3\sin 1 + \cos 1 + (\operatorname{tg}^2 1 + \operatorname{tg} 1 + 1)e.$$

$$\boxed{y'(1) = 0{,}5 + 3\sin 1 + \cos 1 + e\left(\operatorname{tg}^2 1 + \operatorname{tg} 1 + 1\right)}.$$

Производная сложной функции

Пусть

1. $u = \varphi(x)$ и $\exists u'_{x_0} = \varphi'(x_0)$;
2. $y = f(u)$ и $\exists y'_{u_0} = f'(u_0)$ в $u_0 = \varphi(x_0)$.

Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет в точке с абсциссой x_0 производную, равную произведению производных:

$\boxed{y'_{x_0} = y'_{u_0} \cdot u'_{x_0}}$ (обозначим $y'(x_0) = y'_{x_0}$).

Пример 1. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Пусть $u = 1 + x^2$; $y = \sqrt{u}$, тогда

$y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$; $u'_x = 2x$; так как $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, то

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

Пример 2. $y = \left(x^3 - 3x + 1\right)^3$.

$$y'(x) = 3\left(x^3 - 3x + 1\right)^2 \left(x^3 - 3x + 1\right)' =$$
$$= 3\left(x^3 - 3x + 1\right)^2 (3x^2 - 3) = \boxed{9(x^2 - 1)\left(x^3 - 3x + 1\right)^2}.$$

Пример 3. $y = \ln(2x^2 - x + 1)$.

$$y'(x) = \frac{1}{2x^2 - x + 1}(2x^2 - x + 1)' = \boxed{\frac{4x - 1}{2x^2 - x + 1}}.$$

Пример 4. $y = \dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

$$y'(x) = \frac{1}{a^2}\,\frac{x'\sqrt{x^2+a^2} - \left(\sqrt{x^2+a^2}\right)' x}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^2} =$$
$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+a^2} - \frac{1\cdot(x^2+a^2)'\cdot x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{a^2(x^2+a^2)} = \frac{2(x^2+a^2) - 2x^2}{2a^2\sqrt{x^2+a^2}(x^2+a^2)} =$$
$$= \frac{2x^2 + 2a^2 - 2x^2}{2a^2\sqrt{x^2+a^2}(x^2+a^2)} = \boxed{\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Пример 5. $y = \sqrt{\lg(x^2 - 3x)}$.

$$y = \sqrt{u}; \qquad y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}};$$

$$u = \lg v; \qquad u'_v = \frac{1}{v}\lg e;$$

$$v = x^2 - 3x; \qquad v'_x = 2x - 3.$$

Тогда $y'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \dfrac{1}{v} \cdot \lg e \cdot (2x - 3) =$

$$= \frac{2x - 3}{2\sqrt{\lg(x^2 - 3x)}} \cdot \frac{\lg e}{x^2 - 3x} = \boxed{\frac{(2x - 3)\lg e}{2x(x - 3)\sqrt{\lg(x^2 - 3x)}}}.$$

Пример 6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\sin^2 x + 3}}$.

Пусть $t(x) = \sin x$.

Пусть $u(t) = 2t^2 + 3$; $y(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$, тогда

$$t'_x = \cos x; \qquad u'_t = 4t; \qquad y'_u = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}},$$

значит $y'_x = y'_u u'_t t'_x$, т. е.

$$y'_x = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} \cdot 4t \cdot \cos x = -\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{(2\sin^2 x + 3)^3}}$$

или $\boxed{y' = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{(4 - \cos 2x)^3}}}$.

Практикум 12

Найдите производную. Решите неравенство.

1. $y = \sqrt{6x - x^2}; \quad y'(x) \leqslant 0;$

2. $y = (3x - 2)^3(5 + 2x)^2; \quad y'(x) \leqslant 0;$

3. $y = x\sqrt{x^2 - 5x - 6}; \quad y'(x) \geqslant 0;$

4. $y = x^2\sqrt[3]{1 - \dfrac{6}{x^2}}; \quad y'(x) \leqslant 0;$

5. $y = (5x^2 - 6x + 1)^{12}; \quad y'(x) \leqslant 0;$

6. $y = \dfrac{x^4}{e^x}; \quad y'(x) \geqslant 0;$

7. $y = \ln\sin x; \quad y'(x) < 0;$

8. $y = \cos^6 x; \quad y'(x) \geqslant 0;$

9. $y = (4x - 7)(3x + 7)\sqrt[3]{3x + 7}; \quad y'(x) \leqslant 0;$

10. $y = e^{x^4 - 5x^2 + 4}; \quad y'(x) \geqslant 0;$

11. $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{4 - x}; \quad y'(x) \geqslant 0;$

12. $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}; \quad y'(x) \leqslant 0;$

13. $y = 2\sin x \cos^2 \dfrac{x}{2}; \quad y'(x) \leqslant 0;$

14. $y = \ln^2 \cos x; \quad y'(x) \geqslant 0;$

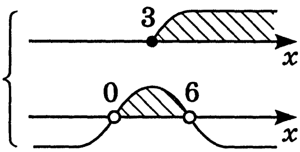
15. $y = \sqrt{\ln(3x^2 + 2x)}; \quad y'(x) \geqslant 0.$

Решение практикума 12

Найдите производную. Решите неравенство.

1. $y' = \left(\sqrt{6x - x^2}\right)' = \dfrac{6 - 2x}{2\sqrt{6x - x^2}}$;

$y'(x) \leqslant 0$; $\quad y'(x) = \dfrac{6 - 2x}{2\sqrt{6x - x^2}} \leqslant 0$; $\qquad \begin{cases} 6 - 2x \leqslant 0 \\ 6x - x^2 > 0 \end{cases}$;



Ответ: $[3; 6)$.

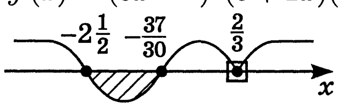
2. $y'(x) = \left((3x - 2)^3(5 + 2x)^2\right)' = \qquad y'(x) \leqslant 0$

$= 3(3x - 2)^2 \cdot 3(5 + 2x)^2 + 2(5 + 2x) \cdot 2(3x - 2)^3 =$

$= (3x - 2)^2(5 + 2x)\left(9(5 + 2x) + 4(3x - 2)\right) =$

$= (3x - 2)^2(5 + 2x)(30x + 37)$.

$y'(x) = (3x - 2)^2(5 + 2x)(30x + 37) \leqslant 0$;



Ответ: $\left[-2{,}5; -\dfrac{37}{30}\right] \cup \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

3. $y'(x) = \left(x\sqrt{x^2 - 5x - 6}\right)' = \qquad y'(x) \geqslant 0$

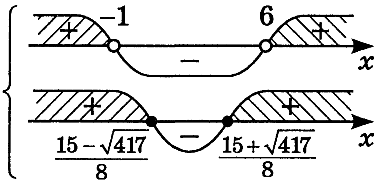
$= \sqrt{x^2 - 5x - 6} + \dfrac{x \cdot (2x - 5)}{2\sqrt{x^2 - 5x - 6}} =$

$= \dfrac{2(x^2 - 5x - 6) + 2x^2 - 5x}{2\sqrt{x^2 - 5x - 6}} = \dfrac{4x^2 - 15x - 12}{2\sqrt{x^2 - 5x - 6}}$;

$y'(x) \geqslant 0$; $\quad y'(x) = \dfrac{4x^2 - 15x - 12}{2\sqrt{x^2 - 5x - 6}} \geqslant 0$;

$4x^2 - 15x - 12 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225+192}}{8} = \frac{15 \pm \sqrt{417}}{8}.$$



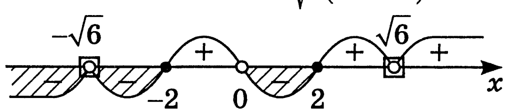
Ответ: $(-\infty; -1) \cup (6; \infty)$.

4. $y'(x) = \left(x^2\sqrt[3]{1-\dfrac{6}{x^2}}\right)' =$ $\qquad y'(x) \leqslant 0$

$$= 2x\sqrt[3]{1-\frac{6}{x^2}} + x^2\frac{12x^{-3}}{3\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^2}} = \qquad \left((\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$= \frac{6x\left(1-\frac{6}{x^2}\right)+\frac{12}{x}}{3\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^2}} = \frac{6x-\frac{24}{x}}{3\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^2}} = \frac{2(x^2-4)}{x\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^2}}.$$

$$y'(x) \leqslant 0; \quad y'(x) = \frac{2(x^2-4)}{x\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^2}} \leqslant 0;$$

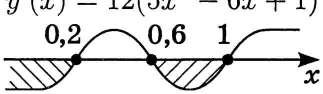


Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{6}\right) \cup \left(-\sqrt{6}; -2\right] \cup (0; 2]$.

5. $y'(x) = \left((5x^2-6x+1)^{12}\right)' = 12(5x^2-6x+1)^{11}(10x-6)$.

$y'(x) \leqslant 0$;

$y'(x) = 12(5x^2-6x+1)^{11}(10x-6) \leqslant 0$;

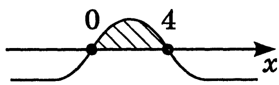


Ответ: $(-\infty; 0{,}2] \cup [0{,}6; 1]$.

6. $y'(x) = \left(\dfrac{x^4}{e^x}\right)' =$

$= \dfrac{4x^3 \cdot e^x - x^4 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{x^3(4-x)}{e^x};$

$y'(x) \geqslant 0; \quad y'(x) = \dfrac{x^3(4-x)}{e^x} \geqslant 0.$



Ответ: $[0; 4]$.

7. $y'(x) = (\ln \sin x)' = \dfrac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x;$

$y'(x) < 0; \quad y'(x) = \operatorname{ctg} x < 0$, но $D(f): \quad \sin x > 0$,

тогда $\pi + 2\pi k > x > \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Ответ: $\left\{ \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

8. $y'(x) = \left(\cos^6 x\right)' = \qquad y'(x) \geqslant 0$

$= 6\cos^5 x \cdot (-\sin x) = -3 \sin 2x \cos^4 x;$

$y'(x) \geqslant 0; \quad y'(x) = -3 \sin 2x \cos^4 x \geqslant 0;$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x \leqslant 0 \\ \cos x = 0 \end{array} \right.; \qquad \left[\begin{array}{l} 2\pi + 2\pi k \geqslant 2x \geqslant \pi + 2\pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array} \right.;$

$\left[\begin{array}{l} \pi + \pi k \geqslant x \geqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array} \right. .$

Ответ: $\left\{ \left[\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k \right] \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

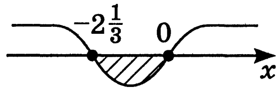
9. $y'(x) = \left((4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}\right)' = \qquad y'(x) \leqslant 0$

$= 4 \cdot (3x+7)^{\frac{4}{3}} + (4x-7) \cdot \dfrac{4}{3}(3x+7)^{\frac{1}{3}} \cdot 3 =$

$= 4(3x+7)^{\frac{1}{3}}(3x+7+4x-7) = 4(3x+7)^{\frac{1}{3}} \cdot 7x;$

$y'(x) \leqslant 0;$

$y'(x) = 28\sqrt[3]{3x+7} \cdot x \leqslant 0.$



Ответ: $\left[-2\dfrac{1}{3}; 0\right]$.

Примечание. Приведенное решение — нестрогое, так как $\sqrt[3]{(3x+7)^4} \neq (3x+7)^{\frac{4}{3}}$ (верно только при $3x+7>0$). В силу двойной ошибки при переходе от $\sqrt[3]{(3x+7)^4}$ к $(3x+7)^{\frac{4}{3}}$ и обратно ответ получился верным. Строгое решение иное:

$$y'(x) = \left((4x-7)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}\right)' = \left((4x-7)\sqrt[3]{(3x+7)^4}\right)' =$$

$$(4x-7)'\sqrt[3]{(3x+7)^4} + (4x-7)\left(\sqrt[3]{(3x+7)^4}\right)' =$$

$$= 4 \cdot \sqrt[3]{(3x+7)^4} + (4x-7) \cdot 3 \cdot \frac{4}{3\sqrt[3]{(3x+4)^{3-4}}} =$$

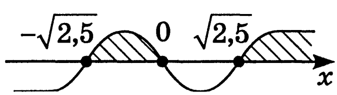
$$= 4\sqrt[3]{(3x+7)^4} + 4(4x-7)\sqrt[3]{3x+7} =$$

$$= 4\sqrt[3]{3x+7}\,(3x+7+4x-7) = 28x\sqrt[3]{3x+7} \text{ (для любых } x\text{)}.$$

10. $y'(x) = \left(e^{x^4-5x^2+4}\right)' =$ $\qquad y'(x) \geqslant 0$

$= (4x^3 - 10x)e^{x^4-5x^2+4} = 2x(2x^2-5)e^{x^4-5x^2+4};$

$y'(x) \geqslant 0; \quad y'(x) = 2x(2x^2-5)e^{x^4-5x^2+4} \geqslant 0.$

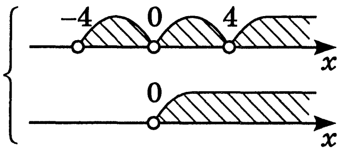


Ответ: $[-\sqrt{2{,}5}; 0] \cup [\sqrt{2{,}5}; \infty)$.

11. $y'(x) = \left(\dfrac{3\sqrt{x}}{4-x}\right)' =$ $\qquad y'(x) \geqslant 0$

$$= \frac{\frac{3\cdot(4-x)}{2\sqrt{x}} - (-1)\cdot 3\sqrt{x}}{(4-x)^2} = \frac{3(4-x)+6x}{2\sqrt{x}(4-x)^2} = \frac{12+3x}{2\sqrt{x}(4-x)^2}.$$

$$y'(x) \geqslant 0; \quad y'(x) = \frac{12+3x}{2\sqrt{x}(4-x)^2} \geqslant 0.$$



Ответ: $(0;4) \cup (4;\infty)$.

12. $y'(x) = \left(\dfrac{\cos 2x}{\sin x}\right)' =$ $\qquad y'(x) \leqslant 0$

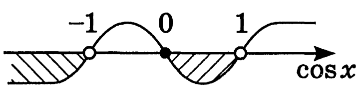
$$= \frac{-\sin 2x \cdot 2 \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-4\sin^2 x \cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-2\sin^2 x \cos x - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x(2\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x}.$$

$$y'(x) \leqslant 0; \quad y'(x) = \frac{-\cos x(2\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x} \leqslant 0;$$

$$\frac{-\cos x}{1-\cos^2 x} \leqslant 0; \quad \frac{\cos x}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \leqslant 0;$$



$$0 \leqslant \cos x < 1; \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad x \neq 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

13. $y'(x) = \left(2\sin x \cos^2 \dfrac{x}{2}\right)' =$ $\qquad y'(x) \leqslant 0$

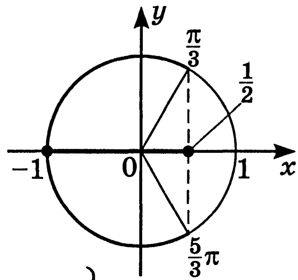
$$= (\sin x(1+\cos x))' = \cos x \cdot (1 + \cos x) + \sin x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x =$$

$$= 2\cos^2 x + \cos x - 1.$$

$$y'(x) \leqslant 0; \quad y'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 \leqslant 0;$$

$$(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0; \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2};$$



$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi k.$$

Ответ: $\left\{\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right] \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

14. $y'(x) = \left(\ln^2 \cos x\right)' =$ $\qquad y'(x) \geqslant 0$

$= 2 \ln \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -2 \operatorname{tg} x \ln \cos x.$

$y'(x) \geqslant 0; \quad y'(x) = -2 \operatorname{tg} x \ln \cos x \geqslant 0 \quad (\ln \cos x \leqslant 0);$

тогда $\operatorname{tg} x \geqslant 0$, но $D(f): \quad \cos x > 0;$

$\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k > x \geqslant 2\pi k.$

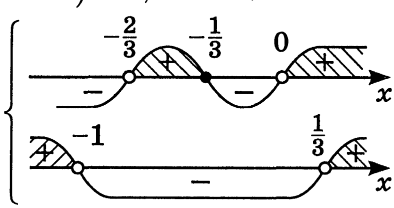
Ответ: $\left\{\left[2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

15. $y'(x) = \left(\sqrt{\ln\left(3x^2 + 2x\right)}\right)' =$ $\qquad y'(x) \geqslant 0$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(3x^2 + 2x\right)}} \cdot \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x} = \frac{3x + 1}{x(3x + 2)\sqrt{\ln\left(3x^2 + 2x\right)}}.$$

$D(y')$: $\ln\left(3x^2 + 2x\right) > 0; \quad 3x^2 + 2x - 1 > 0$, тогда

$y'(x) \geqslant 0$



Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$.

Историческая справка

В связи с быстрым развитием астрономии в XVI в., уточнением астрономических наблюдений и усложнением астрономических выкладок необходимо было создание новых методов вычислений. Еще Архимед (III в. до н.э.) заметил зависимость между свойствами геометрической прогрессии и составленной из показателей степеней ее членов арифметической прогрессии.

Рассмотрим $2^2; 2^4; 2^6; 2^8$ и т.д. Очевидно, что это геометрическая прогрессия, а $2; 4; 6; 8\ldots$ — арифметическая прогрессия. Это было известно и немецким математикам Н. Шюке (?–1500) в 1484 г. и М. Штифелю (1487–1567), которые ввели уже степени с целыми показателями. Наиболее простые действия с положительными дробными показателями были определены еще ранее французским математиком Н. Орема (1323–1382). Симон Стевин (1548–1562), переоткрывший десятичные дроби, определил $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Таким образом можно было определить $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, и $\frac{p}{q}$ — рациональное число. Понятие степени a^x, где x — иррациональное число, еще в достаточной мере не было разработано. Вопрос прояснился только в XIX веке в работах Веерштрасса и Дедекинда.

Полагая $m = a^x$; $n = a^y$, перемножили $m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ и получили возможность умножение заменить на сложение — это и есть основа нового метода вычисления. Но одних идей оказалось недостаточно для создания новых методов вычисления. Чтобы реализовать эту идею необходимо было создание таблиц, что требовало гигантского труда. Очевидно, что сеть целых степеней числа 2 слишком редка. Необходимо было основание очень близкое единице.

Например: $\left(1 + \frac{1}{10^n}\right)^n$ и $\left(1 + \frac{1}{10^n}\right)^{n+1}$ создают достаточно близкие числа при $n \to \infty$. Джон Непер в 1594 г. положил в качестве основания число $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$. Далее Непер исходил из того, что необходимо найти функцию, скорость роста которой была бы обратно пропорциональна x, т. е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{c}{x}$. Иными словами, современном прочтении $y'(x) = \dfrac{c}{x}$. Таким образом, по существу исходным было дифференциальное уравнение, определяющее логарифм, хотя не были еще изобретены дифференциалы. Учитывая, что справа график гиперболы и то что в дальнейшем было показано, что $y(x_0)$ — равно площади криволинейной трапеции под гиперболой на $[1; x_0]$, $y(x)$ иногда называли еще гиперболической. Современное определение логарифма, как показателя степени $a^b = c$, где b — логарифм, было введено У. Гардинером только в 1742 г. Обозначение $\log_a c = b$ принадлежит И. Кеплеру (1571–1630) в 1624 году.

Рассмотрим реализацию идей Д. Непера (1550–1617) более подробно.

Пусть $y = f(x) = a^x$; $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

(a^x — не зависит от Δx).

Определим такое основание $e = a$ так, чтобы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$, тогда $(e^x)' = e^x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x\cdot 1$, т. е. $(e^x)' = e^x$.

Обозначим $\log_e x = \ln x$. Тогда $a = e^{\ln a}$, значит $y = a^x = e^{x\ln a}$.

Для сложной функции $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$.

$y' = (a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a$, т.е. $\boxed{(a^x)' = a^x\ln a}$.

Так как $x = e^{\ln x}$, то $(x)' = \left(e^{\ln x}\right)' = e^{\ln x}\cdot(\ln x)'$, т. е. $1 = x(\ln x)'$, значит $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$, тогда $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'$

(Модуль перехода $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ открыл Н. Меркатор в 1668 г.)

$$\frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x}\log_a e:\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Идея Д. Непера реализована, так как такая функция найдена. С другой стороны,

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x}.$$

Пусть $x=1$, тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} = 1$ или $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$, т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$, значит $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$.

Полагая $\frac{1}{x} = n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, т. е. получим замечательные пределы. По Неперу $\frac{1}{e} \approx \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, т. е. $e \approx \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{-10^7}$.

В 1614 г. он создал таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов с шагом в одну минуту. В 1617 г. по совету Непера Г. Брагис (1561–1630) создал первые таблицы десятичных логарифмов.

Независимо от Непера швейцарский математик И. Брюге (1552–1632) составил таблицы логарифмов по основанию $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$. Они были изданы в 1620 г. Таблицы натуральных логарифмов ввел и составил Спейдел в 1619 г. В 1623 г. английским математиком Д. Гантером была изобретена логарифмическая линейка, которая стала рабочим инструментом, резко повысившим производительность и скорость вычисления на многие столетия вплоть до середины XX века. В 1668 г. Н. Меркатор (1620–1687) доказал, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

В дальнейшем теорию представления функции в виде ряда при определенных условиях разрабатывали в XVIII и XIX веке Брук Тейлор (1685–1731), Колин Маклорен (1698–1746), Леонард Эйлер (1707–1783), Жан Фурье (1768–1830).

Тренировочная работа 2

1. Вычислите:

1) $y = -\dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2} + \sqrt[4]{x};\quad y'(1) = ?$

2) $y = \dfrac{5x^3 + 16x^2 - 3}{3x^2};\quad y'(-1) = ?$

3) $y = (2x^2 + 4x - 1)(x^3 - 1);\quad y'(-1) = ?$

4) $y = \sqrt[3]{(1-2x)^2} - \sqrt{5x+2};\quad y'\left(\dfrac{7}{5}\right) = ?$

5) $y = (x^2 + 3x)\sqrt{x^4 - 4};\quad y'(x) = ?$

6) $y = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}};\quad y'(x) = ?$

7) $y = \dfrac{(5-2x)^7}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}};\quad y'(x) = ?$

8) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};\quad y'(x) = ?$

2. Решите неравенство:

1) $y = 4x^4 - 2x^2 - 3;\quad y'(x) \geqslant 0;$

2) $y = \sqrt{x^2 + 5x - 6};\quad y'(x) \geqslant 0;$

3) $y = (x^3 + 3x^2 - 8)\sqrt{x};\quad y'(x) \leqslant 0;$

4) $y = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 4};\quad y'(x) \geqslant 0;$

5) $y = (3x+2)^5(5-2x)^3;\quad y'(x) \leqslant 0;$

6) $y = (6x^2 - 7x + 1)^{19};\quad y'(x) \leqslant 0;$

7) $y = \sqrt[3]{x^6 - 2x^4};\quad y'(x) \leqslant 0;$

8) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4};\quad y'(x) \leqslant 0;$

9) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3 - 27x}};\quad y'(x) \geqslant 0;$

10) $y = \dfrac{(5+2x)^5}{\sqrt{1-3x}};\quad y'(x) > 0.$

Решение тренировочной работы 2

1. Вычислите:

1) $y'(x) = \left(-\dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2} + \sqrt[4]{x}\right)' = \dfrac{1}{2}\cdot 5x^{-\frac{3}{2}} + 2\cdot 3x^{-3} + \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}};$

$y'(1) = 2{,}5 + 6 + \dfrac{1}{4} = \boxed{8{,}75}.$

2) $y'(x) = \left(\dfrac{5x^3 + 16x^2 - 3}{3x^2}\right)' =$

$= \left(\dfrac{5}{3}x + \dfrac{16}{3} - \dfrac{1}{x^2}\right)' = \dfrac{5}{3} + 2x^{-3};$

$y'(-1) = \dfrac{5}{3} - 2 = \boxed{-\dfrac{1}{3}}.$

3) $y'(x) = \left((2x^2 + 4x - 1)(x^3 - 1)\right)' =$

$= (4x + 4)(x^3 - 1) + (2x^2 + 4x - 1)3x^2 =$

$= 4x^4 + 4x^3 - 4x - 4 + 6x^4 + 12x^3 - 3x^2 =$

$= 10x^4 + 16x^3 - 3x^2 - 4x - 4.$

$y'(-1) = 10 - 16 - 3 + 4 - 4 = \boxed{-9}.$

4) $y'(x) = \left(\sqrt[3]{(1-2x)^2} - \sqrt{5x+2}\right)' =$

$= \dfrac{2}{3}(1-2x)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(-2) - \dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}} =$

$= -\dfrac{4}{3}(1-2x)^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{5}{2}(5x+2)^{-\frac{1}{2}}.$

$y'\left(\dfrac{7}{5}\right) = -\dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{14}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{5}{2}(7+2)^{-\frac{1}{2}} =$

$= -\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{9}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{3} =$

$= \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{4\sqrt[3]{15}}{9} - \dfrac{5}{6} = \boxed{\dfrac{8\sqrt[3]{15} - 15}{18}}.$

5) $y'(x) = \left((x^2+3x)\sqrt{x^4-4}\right)' =$

$$= (2x+3)\sqrt{x^4-4} + \frac{(x^2+3x)\cdot 4x^3}{2\sqrt{x^4-4}} =$$

$$= \frac{(2x+3)(x^4-4)+2x^5+6x^4}{\sqrt{x^4-4}} =$$

$$= \frac{2x^5+3x^4-8x-12+2x^5+6x^4}{\sqrt{x^4-4}} =$$

$$= \boxed{\frac{4x^5+9x^4-8x-12}{\sqrt{x^4-4}}}.$$

6) $y'(x) = \left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}}\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)' =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})\,(1-\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}}.$$

7) $y'(x) = \left(\dfrac{(5-2x)^7}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}}\right)' = \left((5-2x)^7(3x+1)^{-\frac{3}{4}}\right)' =$

$$= 7(5-2x)^6\cdot(-2)(3x+1)^{-\frac{3}{4}} + \left(-\frac{3}{4}\right)(3x+1)^{-\frac{7}{4}}\cdot 3(5-2x)^7 =$$

$$= -\frac{1}{4}(5-2x)^6(3x+1)^{-\frac{7}{4}}\,(56(3x+1)+9(5-2x)) =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}(5-2x)^6(3x+1)^{-\frac{7}{4}}(150x+101)}.$$

8) $$y'(x) = \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1\cdot\left(1+\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} =$$

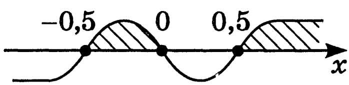
$$= \frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} =$$

$$= \boxed{\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}.$$

2. Решите неравенство:

1) $y = 4x^4 - 2x^2 - 3; \quad y'(x) \geqslant 0.$

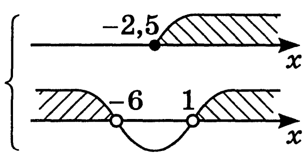
$y'(x) = 16x^3 - 4x = 4x(4x^2-1) = 4x(2x+1)(2x-1) \geqslant 0;$



Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right).$

2) $y = \sqrt{x^2+5x-6}; \quad y'(x) \geqslant 0.$

$$y'(x) = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x-6}} \geqslant 0; \quad D(y') : \left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 1 \end{array}\right. .$$



Ответ: $(1; \infty)$.

3) $y = (x^3+3x^2-8)\sqrt{x}; \quad y'(x) \leqslant 0.$

$$y'(x) = (3x^2+6x)\sqrt{x} + \frac{x^3+3x^2-8}{2\sqrt{x}} =$$

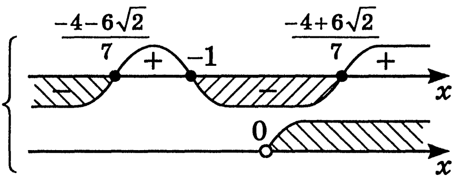
$$= \frac{(6x^2+12x)x + x^3 + 3x^2 - 8}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3+15x^2-8}{2\sqrt{x}} \leqslant 0;$$

$$\begin{array}{rl|l} -\,7x^3+15x^2 & -8 & x+1 \\ \underline{7x^3+\ \ 7x^2} & & \overline{7x^2+8x-8} \\ 8x^2 & -8 & \\ -\,\underline{8x^2+8x} & & \\ -8x & -8 & \\ \underline{-8x} & \underline{-8} & \end{array}$$

Получаем $y'(x)=\dfrac{(x+1)(7x^2+8x-8)}{2\sqrt{x}}\leqslant 0;$

$7x^2+8x-8=0;$

$x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+56}}{7}=\dfrac{-4\pm 6\sqrt{2}}{7};\quad D(y')\colon\ x>0.$



Ответ: $\left(0;\ \dfrac{-4+6\sqrt{2}}{7}\right]$.

4) $y=\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-4};\quad y'(x)\geqslant 0.$

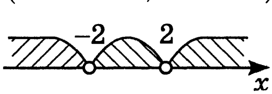
$$y'(x)=\frac{(2x-3)(x^2-4)-2x(x^2-3x-1)}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-3x^2-8x+12-2x^3+6x^2+2x}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\frac{3x^2-6x+12}{(x^2-4)^2}\geqslant 0;$$

$x^2-2x+4>0$ — верно для любого x

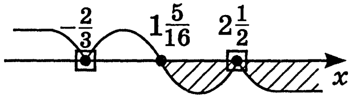
$(a=1>0,\quad D<0)$.



Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

5) $y = (3x+2)^5(5-2x)^3$. $\quad y'(x) \leqslant 0$.

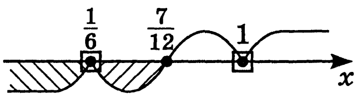
$$y'(x) = 5(3x+2)^4 \cdot 3(5-2x)^3 + 3(5-2x)^2 \cdot (-2)(3x+2)^5 =$$
$$= 3(3x+2)^4(5-2x)^2\,(5(5-2x) - 2(3x+2)) =$$
$$= -3(3x+2)^4(5-2x)^2(16x-21) \leqslant 0.$$



Ответ: $\left[1\frac{5}{16}; \infty\right) \cup \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

6) $y = (6x^2 - 7x + 1)^{19}$; $\quad y'(x) \leqslant 0$.

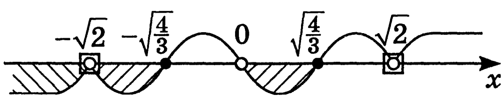
$$y'(x) = 19(6x^2 - 7x + 1)^{18}(12x - 7) \leqslant 0.$$



Ответ: $\left(-\infty; \frac{7}{12}\right] \cup \{1\}$.

7) $y = \sqrt[3]{x^6 - 2x^4}$; $\quad y'(x) \leqslant 0$.

$$y'(x) = \frac{6x^5 - 8x^3}{3\sqrt[3]{(x^6 - 2x^4)^2}} \leqslant 0.$$

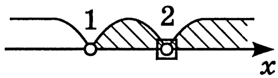


Ответ: $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup \left(-\sqrt{2}; -\sqrt{\frac{4}{3}}\right] \cup \left(0; \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$.

8) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; $\quad y'(x) \leqslant 0$.

$$y'(x) = \frac{\frac{1\cdot 1}{2\sqrt{x-1}}(x^2-4) - 2x\sqrt{x-1}}{(x^2-4)^2} =$$
$$= \frac{x^2 - 4 - 4x(x-1)}{2(x^2-4)^2\sqrt{x-1}} = \frac{4x - 3x^2 - 4}{2(x^2-4)^2\sqrt{x-1}} \leqslant 0;$$

$\dfrac{-1}{2(x^2-4)^2\sqrt{x-1}} \leqslant 0; \quad 3x^2-4x+4>0$ — верно для $\forall x$.

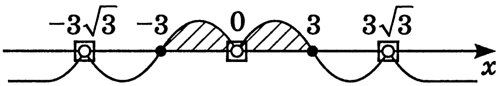


Ответ: $(1;2)\cup(2;\infty)$.

9) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3-27x}}; \quad y'(x)\geqslant 0.$

$$y'(x)=\left(3(x^3-27x)^{-\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$=-(x^3-27x)^{-\frac{4}{3}}(3x^2-27)\geqslant 0.$$



Ответ: $[-3;0)\cup(0;3]$.

10) $y=\dfrac{(5+2x)^5}{\sqrt{1-3x}}; \quad y'(x)>0.$

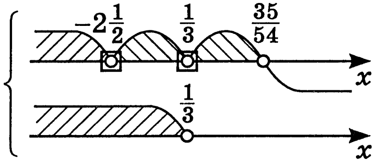
$$y'(x)=\left((5+2x)^5(1-3x)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$=5(5+2x)^4\cdot 2(1-3x)^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\right)(1-3x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-3)(5+2x)^5=$$

$$=(5+2x)^4(1-3x)^{-\frac{3}{2}}\left(10(1-3x)+1{,}5(5+2x)\right)=$$

$$=(5+2x)^4(1-3x)^{-\frac{3}{2}}(-27x+17{,}5)>0.$$



Ответ: $(-\infty;-2{,}5)\cup\left(-2{,}5;\dfrac{1}{3}\right)$.

Проверочная работа 1

1. Вычислите:

1) $y = 3\sqrt[5]{x} + 5\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^2}$; $\quad y'(-1) = ?$

2) $y = \left(3x^2 + x\right)\left(2x^3 - 5x - 1\right)$; $\quad y'(1) = ?$

3) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 192\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; $\quad y'(64) = ?$

4) $y = \left(x^3 + 3x^2 - 8\right)\sqrt{x}$; $\quad y' = 0$; $\quad x = ?$

2. При каком значении x:

1) $y' \geqslant 0$ для $y = 4x^4 - 2x^2 - 8$;

2) $y' \geqslant 0$ для $y = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 4}$;

3) $y' \geqslant 0$ для $y = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$;

4) $y' \leqslant 0$ для $y = \left(6x^2 + 7x + 1\right)^{19}$;

5) $y' \leqslant 0$ для $y = (3x - 2)^5 (5 - 2x)^3$;

6) $y' \leqslant 0$ для $y = \sqrt[3]{x^6 - 6x^4}$?

Решение проверочной работы 1

1. Вычислите:

1) $y = 3\sqrt[5]{x} + 5\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^2}$; $\quad y'(-1) = ?$

Так как $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$ и $(x^m)' = mx^{m-1}$, то

$$y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{5\cdot 2}{3\sqrt[3]{x}} - 4\cdot(-2)x^{-2-1} =$$

$$= \frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{8}{x^3};$$

$$y'(-1) = \frac{3}{5\cdot 1} - \frac{10}{3} - 8 = \boxed{-10\frac{11}{15}}.$$

2) $y = \left(3x^2 + x\right)\left(2x^3 - 5x - 1\right)$; $\quad y'(1) = ?$

Так как $(uv)' = u'v + v'u$, то

$$y' = (6x+1)(2x^3 - 5x - 1) + (6x^2 - 5)(3x^2 + x) =$$

$$= 12x^4 + 2x^3 - 30x^2 - 11x - 1 + 18x^4 + 6x^3 - 15x^2 - 5x =$$

$$= 30x^4 + 8x^3 - 45x^2 - 16x - 1;$$

$$y'(1) = 30 + 8 - 45 - 16 - 1 = \boxed{-24}.$$

3) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 192\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; $\quad y'(64) = ?$

Здесь рациональнее сначала привести функцию к сумме степеней, а затем уже брать производную.

$$y = 3x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 192x^{-\frac{1}{6}} \quad (\text{здесь } D(y):\ x > 0);$$

$$y' = \frac{3\cdot 3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - 192\cdot\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - 32x^{-\frac{7}{6}};$$

$$y'(64) = \frac{9}{2}\cdot 8 - \frac{1}{8} - \frac{32}{64\cdot 2} = 36 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \boxed{35\frac{5}{8}}.$$

4) $y = \left(x^3 + 3x^2 - 8\right)\sqrt{x}; \quad y' = 0; \quad x = ?$

$$y' = (3x^2 + 6x)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3 + 3x^2 - 8) =$$

$$= \frac{(3x^2 + 6x)\cdot 2x + x^3 + 3x^2 - 8}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{7x^3 + 15x^2 - 8}{2\sqrt{x}} \; (\,D(y): \; x > 0\,);$$

$y' = 0; \quad 7x^3 + 15x^2 - 8 = 0.$

Очевидно, что $x = -1$ — корень.

$$\begin{array}{r|l} 7x^3 + 15x^2 \qquad -8 & x + 1 \\ \hline -\;\underline{7x^3 + \;\; 7x^2 \qquad\;\;} & 7x^2 + 8x - 8 \\ 8x^2 \qquad -8 & \\ -\;\underline{8x^2 + 8x \quad\;\;} & \\ -8x - 8 & \\ -\;\underline{-8x - 8} & \end{array}$$

$7x^2 + 8x - 8 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 56}}{7} = \frac{-4 \pm \sqrt{72}}{7} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{2}}{7}.$$

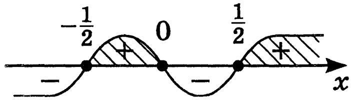
Так как $x > 0$, то подходит только $\boxed{x = \dfrac{6\sqrt{2} - 4}{7}}$.

2. При каком значении x:

1) $y' \geqslant 0$ для $y = 4x^4 - 2x^2 - 8$?

$y' = 16x^3 - 4x = 4x(2x + 1)(2x - 1);$

$y' \geqslant 0;$



$\left[-\dfrac{1}{2}; 0\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; \infty\right)$.

2) $y' \geqslant 0$ для $y = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 4}$?

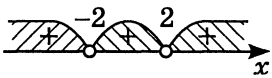
$$y' = \frac{(2x-3)(x^2-4) - 2x(x^2-3x-1)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 12 - 2x^3 + 6x^2 + 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 12}{(x-2)^2(x+2)^2};$$

$y' \geqslant 0$. Так как $\begin{cases} a = 3 > 0 \\ D < 0 \end{cases}$,

то $3x^2 - 6x + 12 > 0$ $(\forall x)$, поэтому

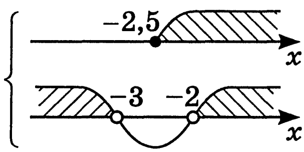


$(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

3) $y' \geqslant 0$ для $y = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$?

$$y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+6}}; \quad y' \geqslant 0;$$

$$\begin{cases} 2x + 5 \geqslant 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases}$$



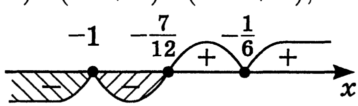
$\boxed{(-2; \infty)}$.

4) $y' \leqslant 0$ для $y = \left(6x^2 + 7x + 1\right)^{19}$?

$$y' = 19(6x^2 + 7x + 1)^{18}(12x + 7) =$$

$$= 19(x+1)^{18}(6x+1)^{18}(12x+7);$$

$y' \leqslant 0$;

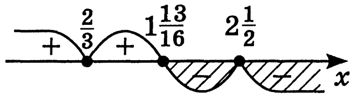


$$\boxed{\left(-\infty; -\frac{7}{12}\right] \cup \left\{-\frac{1}{6}\right\}}.$$

5) $y' \leqslant 0$ для $y = (3x-2)^5(5-2x)^3$?

$$y' = 5(3x-2)^4 \cdot 3(5-2x)^3 + 3(5-2x)^2 \cdot (-2) \cdot (3x-2)^5 =$$
$$= 3(3x-2)^4(5-2x)^2\left(5(5-2x) - 2(3x-2)\right) =$$
$$= 3(3x-2)^4(5-2x)^2(29-16x);$$

$y' \leqslant 0;$

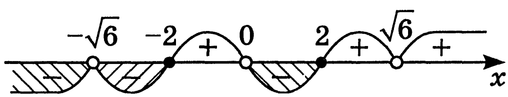


$$\boxed{\left[1\frac{13}{16}; \infty\right) \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}}.$$

6) $y' \leqslant 0$ для $y = \sqrt[3]{x^6 - 6x^4}$?

$$y' = \frac{6x^5 - 24x^3}{3\sqrt[3]{(x^6-6x^4)^2}} = \frac{6x^3(x^2-4)}{3\sqrt[3]{x^8(x^2-6)^2}};$$

$y' \leqslant 0;$



$$\boxed{(-\infty; -\sqrt{6}) \cup \left(-\sqrt{6}; -2\right] \cup (0; 2]}.$$

Практикум 13

Найдите производную:

1) $y = \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x^3}$;

2) $y = \sin^3 4x - \cos\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

3) $y = \left(\sqrt{x-3} + \sqrt{3x-4}\right)^7$;

4) $y = (x^2 - x + 2)\sqrt{4x-2}$;

5) $y = \left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt[3]{x^4}\right)^{10}$;

6) $y = e^{x^2-3x}\operatorname{tg} x$;

7) $y = \lg\left(3e^{x^2} - 3x^3 + 2\operatorname{ctg} 2x\right)$;

8) $y = \ln\sqrt{e^{2x} + 3}$;

9) $y = \sqrt{\ln(2x-5)}$;

10) $y = \dfrac{1}{\lg^2(3 - x^2)}$;

11) $y = \sqrt{\log_x(3x-2)}$;

12) $y = \cos^2\left(e^{x^2-3x} + \sin 3x\right)$;

13) $y = \sin^2\left(\cos^3 4x\right)$;

14) $y = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) + \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)$;

15) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) - \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$;

16) $y = 2\sqrt{x+1} - \ln(x-5)$; $\quad y'(x) = 0$; $\quad x = ?$

17) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

18) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Решение практикума 13

Найдите производную:

1) $$y'(x) = \left(\frac{3x^2+2x-5}{x^3}\right)' =$$
$$= \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)' = \boxed{-3x^{-2} - 4x^{-3} + 15x^{-4}}.$$

2) $$y'(x) = \left(\sin^3 4x - \cos\frac{1}{x^2-3x+2}\right)' =$$
$$= 3\sin^2 4x \cdot (\cos 4x)\cdot 4 + \left(\sin\frac{1}{x^2-3x+2}\right)\cdot\frac{(-1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} =$$
$$= \boxed{6\sin 8x \sin 4x + \frac{(3-2x)}{(x^2-3x+2)^2}\sin\frac{1}{x^2-3x+2}}.$$

3) $$y'(x) = \left(\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{3x-4}\right)^7\right)' =$$
$$= \boxed{7\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{3x-4}\right)^6\left(\frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{3}{2\sqrt{3x-4}}\right)}.$$

4) $$y'(x) = \left((x^2-x+2)\sqrt{4x-2}\right)' =$$
$$= (2x-1)\sqrt{4x-2} + \frac{(x^2-x+2)\cdot 4}{2\sqrt{4x-2}} =$$
$$= \frac{(2x-1)(4x-2)+2x^2-2x+4}{\sqrt{4x-2}} =$$
$$= \frac{8x^2-8x+2+2x^2-2x+4}{\sqrt{4x-2}} = \boxed{\frac{10x^2-10x+6}{\sqrt{4x-2}}}.$$

5) $$y'(x) = \left(\left(\sqrt{x^2-3x} - \sqrt[3]{x^4}\right)^{10}\right)' =$$
$$= \boxed{10\left(\sqrt{x^2-3x} - \sqrt[3]{x^4}\right)^9\left(\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} - \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

6) $y'(x) = \left(e^{x^2-3x}\operatorname{tg} x\right)' = \qquad \left[\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)\right]$

$$= e^{x^2-3x} \cdot (2x-3) \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} e^{x^2-3x} =$$

$$= \boxed{e^{x^2-3x}\left((2x-3)\operatorname{tg} x + 1 + \operatorname{tg}^2 x\right)}.$$

7) $y'(x) = \left(\lg\left(3e^{x^2} - 3x^3 + 2\operatorname{ctg} 2x\right)\right)' =$

$$\left[(\log_a f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \log_a e\right]$$

$$= \frac{\lg e\left(3e^{x^2} \cdot 2x - 9x^2 - \frac{2\cdot 2}{\sin^2 2x}\right)}{3e^{x^2} - 3x^3 + 2\operatorname{ctg} 2x} =$$

$$= \boxed{\frac{6xe^{x^2} - 9x^2 - 4(1 + \operatorname{ctg}^2 2x)}{\left(3e^{x^2} - 3x^3 + 2\operatorname{ctg} 2x\right)\ln 10}}.$$

8) $y'(x) = \left(\ln\sqrt{e^{2x}+3}\right)' = \qquad \left((\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+3}} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+3}} = \boxed{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}}.$$

9) $y'(x) = \left(\sqrt{\ln(2x-5)}\right)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(2x-5)}} \cdot \frac{1 \cdot 2}{2x-5} = \boxed{\frac{1}{(2x-5)\sqrt{\ln(2x-5)}}}.$$

10) $y'(x) = \left(\frac{1}{\lg^2(3-x^2)}\right)' = \left(\left(\lg(3-x^2)\right)^{-2}\right)' =$

$$\left((\lg f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \lg e\right)$$

$$= -2\lg^{-3}(3-x^2) \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{3-x^2} \cdot \lg e = \boxed{\frac{4x \lg e}{(3-x^2)\lg^3(3-x^2)}}.$$

11) $y'(x) = \left(\sqrt{\log_x(3x-2)}\right)' = \qquad \left[\log_x(3x-2) = \dfrac{\ln(3x-2)}{\ln x}\right]$

$$= \left(\sqrt{\frac{\ln(3x-2)}{\ln x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln(3x-2)}{\ln x}}} \cdot \frac{\frac{1\cdot 3}{3x-2}\ln x - \frac{1}{x}\ln(3x-2)}{\ln^2 x} =$$

$$= \boxed{\frac{3x\ln x - (3x-2)\ln(3x-2)}{2(3x-2)x\sqrt{\log_x(3x-2)}\,\ln^2 x}}.$$

12) $y'(x) = \left(\cos^2\left(e^{x^2-3x} + \sin 3x\right)\right)' = \left(\dfrac{1+\cos\left(2e^{x^2-3x}+2\sin 3x\right)}{2}\right)' =$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sin\left(2e^{x^2-3x}+2\sin 3x\right)\right)\left(2(2x-3)e^{x^2-3x}+6\cos 3x\right) =$$

$$= \boxed{-\sin\left(2\left(e^{x^2-3x}+\sin 3x\right)\right)\cdot\left((2x-3)e^{x^2-3x}+3\cos 3x\right)}.$$

13) $y'(x) = \left(\sin^2\left(\cos^3 4x\right)\right)' = \left(\dfrac{1-\cos(2\cos^3 4x)}{2}\right)' =$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(2\cos^3 4x\right)\cdot\left(2\cdot 3\cos^2 4x\right)\cdot(-\sin 4x)\cdot 4 =$$

$$= -12\sin\left(2\cos^3 4x\right)\cos^2 4x\sin 4x =$$

$$= \boxed{-6\sin\left(2\cos^3 4x\right)\sin 8x\cos 4x}.$$

14) $y'(x) = \left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) + \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)' =$

$$= \left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)' =$$

$$= \left(\ln\left(1-x^2+x^2\right)\right)' = (\ln 1)' = \boxed{0}.$$

15) $y'(x) = \left(\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) - \cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)\right)' =$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x - \cos x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + \sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sin x} = \boxed{\sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x}.$$

16) $y'(x) = \left(2\sqrt{x+1} - \ln(x-5)\right)' =$

$$= \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1 \cdot 1}{x-5} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x-5}.$$

$y'(x) = 0$ значит $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{x-5}$; $\quad \sqrt{x+1} = x - 5$;

$(x-5)^2 = x+1$; $\quad x^2 - 10x + 25 - x - 1 = 0$;

$x^2 - 11x + 24 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 8 \end{array}\right.$.

Учтем $D(y)$: $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$; $\quad x > 5$, тогда $x = 8$.

Ответ: $\{8\}$.

17) $y'(x) = \left(\sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}\right)' =$

$$= \frac{1}{5\sqrt[5]{\left(\frac{x(x^2+2)}{x-4}\right)^4}} \frac{(3x^2+2)(x-4) - (x^3+2x) \cdot 1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\left(\frac{x-4}{x(x^2+2)}\right)^4} \cdot \frac{3x^3 - 12x^2 + 2x - 8 - x^3 - 2x}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{(x(x^2+2))^4\,(x-4)^6}} \cdot (2x^3 - 12x^2 - 8) =$$

$$= \boxed{\frac{2}{5}\frac{x^3 - 6x^2 - 4}{\sqrt[5]{x^4(x^2+2)^4(x-4)^6}}}.$$

18) $y'(x) = \left((\sin x)^{\cos x}\right)' =$ $\qquad [\,(\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln \sin x}\,]$

$$= \left(e^{\cos x \cdot \ln \sin x}\right)' = e^{\cos x \cdot \ln \sin x} \cdot (\cos x \cdot \ln \sin x)' =$$

$$= e^{\cos x \cdot \ln \sin x}\left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right) =$$

$$= \boxed{e^{\cos x \cdot \ln \sin x} \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \sin x\right)}.$$

Проверочная работа 2

1. Вычислите:

1) $y'(1)$ для $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2} + \sqrt[4]{x}$;

2) $y'(-1)$ для $y = \dfrac{15x^3 + 6x^2 - 3}{3x^2}$;

3) $y'(-1)$ для $y = (2x^2 - 4x + 1)(x^3 - 1)$.

2. Найдите, при каких значениях x:

1) $y' \geqslant 0$ для $y = 3x^5 - 4x^4 + 5$;

2) $y' \geqslant 0$ для $y = (x^2 + 2x)\sqrt{x}$;

3) $y' \geqslant 0$ для $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$;

4) $y' \geqslant 0$ для $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{4 - x}$;

5) $y' \leqslant 0$ для $y = \sqrt{6x - x^2}$;

6) $y' \leqslant 0$ для $y = (5x^2 - 6x + 1)^{20}$;

7) $y' \leqslant 0$ для $y = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^3 - 27x}}$?

Решение проверочной работы 2

1. Вычислите:

1) $y'(1)$ для $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{x^2} + \sqrt[4]{x}$.

Так как $D(y):\ x > 0$, то

$$y' = \left(5x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-2} + x^{\frac{1}{4}}\right)' = -\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 6x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}},$$

тогда $y'(1) = -\dfrac{5}{2} - 6 + \dfrac{1}{4} = \boxed{-8\dfrac{1}{4}}$.

2) $y'(-1)$ для $y = \dfrac{15x^3 + 6x^2 - 3}{3x^2}$.

Учитывая, что $D(y):\ x \neq 0$, преобразуем

$y = 15x + 2 - x^{-2}$; $\quad y' = 15 + 2x^{-3}$, значит

$y'(-1) = 15 + 2\cdot(-1)^{-3} = \boxed{13}$.

3) $y'(-1)$ для $y = (2x^2 - 4x + 1)(x^3 - 1)$.

$$y' = (4x - 4)(x^3 - 1) + 3x^2(2x^2 - 4x + 1) =$$
$$= 4x^4 - 4x^3 - 4x + 4 + 6x^4 - 12x^3 + 3x^2 =$$
$$= 10x^4 - 16x^3 + 3x^2 - 4x + 4, \text{ значит}$$

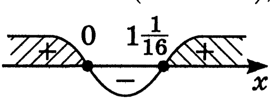
$y'(-1) = 10 + 16 + 3 + 4 + 4 = \boxed{37}$.

2. Найдите, при каких значениях x:

1) $y' \geqslant 0$ для $y = 3x^5 - 4x^4 + 5$?

$y' = 15x^4 - 16x^3 = x^3(15x - 16)$;

$y' \geqslant 0$;

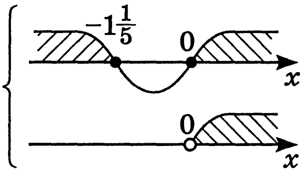


$\boxed{(-\infty; 0] \cup \left[1\frac{1}{16}; \infty\right)}$.

2) $y' \geqslant 0$ для $y = (x^2 + 2x)\sqrt{x}$?

$$y' = (2x+2)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2x) =$$

$$= \frac{(2x+2)\cdot 2x + x^2 + 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}};$$

$y' \geqslant 0$; $\begin{cases} 5x^2+6x \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$; 

$\boxed{(0;\infty)}$.

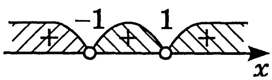
3) $y' \geqslant 0$ для $y = \dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$?

$$y' = \frac{(2x-2)(x^2-1) - 2x(x^2-2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 - 2x^3 + 4x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2x^2-2x+2}{(x-1)^2(x+1)^2};$$

$y' \geqslant 0$. Так как $x^2 - x + 1 > 0$ $(\forall x)$ из-за $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ D = -3 < 0 \end{cases}$,

то $\dfrac{2x^2-2x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x-1)^2(x+1)^2} \geqslant 0$;



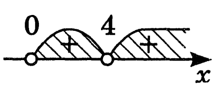
$\boxed{(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)}$.

4) $y' \geqslant 0$ для $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{4-x}$?

$$y' = \frac{\frac{3\cdot 1}{2\sqrt{x}}\cdot(4-x) - (-1)\cdot 3\sqrt{x}}{(4-x)^2} =$$

$$= \frac{12-3x+6x}{2\sqrt{x}(4-x)^2} = \frac{3(x+4)}{2\sqrt{x}(4-x)^2}; \qquad D(y):\ \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 4 \end{cases};$$

$$y' \geqslant 0; \qquad \frac{3(x+4)}{2\sqrt{x}(4-x)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geqslant 0 \\ (4-x)^2 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$



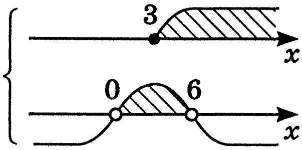
$\boxed{(0;4)\cup(4;\infty)}$.

5) $y' \leqslant 0$ для $y = \sqrt{6x - x^2}$?

$$y' = \frac{6 - 2x}{2\sqrt{6x - x^2}} = \frac{3 - x}{\sqrt{x(6 - x)}};$$

$$y' \leqslant 0; \quad \frac{3 - x}{\sqrt{x(6 - x)}} \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} 3 - x \leqslant 0 \\ x(6 - x) > 0 \end{cases}$$



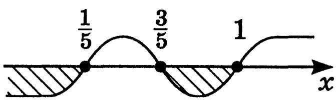
$\boxed{[3; 6)}$.

6) $y' \leqslant 0$ для $y = (5x^2 - 6x + 1)^{20}$?

$$y' = 20(5x^2 - 6x + 1)^{19}(10x - 6) =$$

$$= 40(x - 1)^{19}(5x - 1)^{19}(5x - 3).$$

$y' \leqslant 0$;



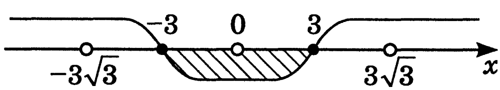
$\boxed{\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}; 1\right]}$.

7) $y' \leqslant 0$ для $y = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^3 - 27x}}$?

$$y' = \left(-2(x^3 - 27x)^{-\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(x^3 - 27x)^{-\frac{4}{3}}(3x^2 - 27) =$$

$$= 2(x + 3)(x - 3)(x^3 - 27x)^{-\frac{4}{3}}.$$

$$y' \leqslant 0; \quad \frac{2(x + 3)(x - 3)}{x^{\frac{4}{3}}(x^2 - 27)^{\frac{4}{3}}} \leqslant 0; \quad \begin{cases} (x + 3)(x - 3) \leqslant 0 \\ x(x^2 - 27) \neq 0 \end{cases};$$



$\boxed{[-3; 0) \cup (0; 3]}$.

Тренировочная работа 3

Найдите производную:

1) $y = 3x^2 + 4\sqrt[3]{x} - 3e^x$;

2) $y = \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\cos x$;

3) $y = x^9 - 3x^{\frac{1}{9}} - 5\ln x$;

4) $y = 2x^8 - 4x^{-\frac{3}{4}} + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg} x$;

5) $y = x^2(x-1) + 3\sin x - 2\operatorname{ctg} x$;

6) $y = \sqrt[5]{3-5x} + \dfrac{1}{(2-3x)^4} - \dfrac{5}{\sqrt[3]{2-9x}}$;

7) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2-4}} + \ln\left(x^2 - 4x\right) - \sin(\ln x)$;

8) $y = \ln\dfrac{2}{3-4x} + \sqrt[3]{\dfrac{3}{2-x}} + 3\cos\dfrac{x+2}{3}$;

9) $y = 3^{2x} + 2x\ln 4x$;

10) $y = e^{\sin^2 3x} - 4^{\log_3\left(x^2-x\right)}$;

11) $y = \dfrac{x^2 - 3x - \sqrt[3]{x} + \ln\sin x}{\sqrt{x}}$;

12) $y = \sin\left(\ln\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)$;

13) $y = \cos\left(e^{x^2-6x} - \operatorname{tg} x\right)$;

14) $y = \sqrt[3]{e^{\cos x} + \cos x} - \operatorname{ctg}\left(x^2 + 3x\right)$;

15) $y = \sqrt[3]{\log_{2x^2+1}(2x+3)}$;

16) $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$;

17) $y = \ln \dfrac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}} \cdot \sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$;

18) $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$;

19) $y = (2x-1)^{3x}$;

20) $y = (\sin x)^{2x^2-4x+1}$.

Решение тренировочной работы 3

Найдите производную:

1) $y'(x) = \left(3x^2 + 4\sqrt[3]{x} - 3e^x\right)' = \boxed{6x + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3e^x}$.

2) $y'(x) = \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 2\cos x\right)' = \boxed{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - 2\sin x}$.

3) $y'(x) = \left(x^9 - 3x^{\frac{1}{9}} - 5\ln x\right)' =$

$= 9x^8 - \frac{3}{9}x^{-\frac{8}{9}} - \frac{5}{x} = \boxed{9x^8 - \frac{1}{3}x^{-\frac{8}{9}} - 5x^{-1}}$.

4) $y'(x) = \left(2x^8 - 4x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x\right)' =$

$= \boxed{16x^7 + 3x^{-\frac{7}{4}} + \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^2 x}}$.

5) $y'(x) = \left(x^2(x-1) + 3\sin x - 2\operatorname{ctg} x\right)' =$

$= \boxed{3x^2 - 2x - 3\cos x + \frac{2}{\sin^2 x}}$.

6) $y'(x) = \left(\sqrt[5]{3-5x} + \frac{1}{(2-3x)^4} - \frac{5}{\sqrt[3]{2-9x}}\right)' =$

$= \frac{1}{5}(3-5x)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-5) - 4(2-3x)^{-5} \cdot (-3) + \frac{5}{3}(2-9x)^{-\frac{4}{3}} \cdot (-9) =$

$= \boxed{-(3-5x)^{-\frac{4}{5}} + 12(2-3x)^{-5} - 15(2-9x)^{-\frac{4}{3}}}$.

7) $y'(x) = \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2-4}} + \ln\left(x^2-4x\right) - \sin(\ln x)\right)' =$

$= -\dfrac{3}{3}(x^2-4)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x + \dfrac{2x-4}{x^2-4x} - \cos(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} =$

$= \boxed{-2x(x^2-4)^{-\frac{4}{3}} + \dfrac{2x-4}{x^2-4x} - \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)}.$

8) $y'(x) = \left(\ln\dfrac{2}{3-4x} + \sqrt[3]{\dfrac{3}{2-x}} + 3\cos\dfrac{x+2}{3}\right)' =$

$= \dfrac{3-4x}{2}\dfrac{(-2)\cdot(-4)}{(3-4x)^2} +$

$+ \dfrac{1}{3}\left(3(2-x)^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3)(2-x)^{-2} \cdot (-1) - 3\sin\dfrac{x+2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} =$

$= -4(4x-3)^{-1} - 3^{-\frac{5}{3}}(2-x)^{\frac{2}{3}} \cdot 3(2-x)^{-2} - \sin\dfrac{x+2}{3} =$

$= \boxed{-4(4x-3)^{-1} - 3^{-\frac{2}{3}}(2-x)^{-\frac{4}{3}} - \sin\dfrac{x+2}{3}}.$

9) $y'(x) = \left(3^{2x} + 2x\ln 4x\right)' =$

$= 3^{2x}\ln 3 \cdot 2 + 2\ln 4x + 2x\dfrac{1}{4x} \cdot 4 =$

$= \boxed{2 \cdot 3^{2x}\ln 3 + 2\ln 4x + 2}.$

10) $y'(x) = \left(e^{\sin^2 3x} - 4^{\log_3(x^2-x)}\right)' =$

$= e^{\sin^2 3x}\left(\dfrac{1-\cos 6x}{2}\right)' - 4^{\log_3(x^2-x)}\ln 4 \cdot \dfrac{\log_3 e}{x^2-x} \cdot (2x-1) =$

$= \dfrac{1}{2}e^{\sin^2 3x} \cdot 6\sin 6x - 4^{\log_3(x^2-x)}\dfrac{2x-1}{x^2-x}\log_3 e^{\ln 4} =$

$= \boxed{3e^{\sin^2 3x}\sin 6x - 4^{\log_3(x^2-x)}\dfrac{2x-1}{x^2-x}\log_3 4}.$

11) $$y'(x)=\left(\frac{x^2-3x-\sqrt[3]{x}+\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right)'=$$
$$=\left(x^{1,5}-3x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{2}}\ln\sin x\right)'=$$
$$=1{,}5x^{0,5}-1{,}5x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}-\frac{1}{2}x^{-1,5}\ln\sin x+x^{-\frac{1}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=$$
$$=\boxed{1{,}5x^{0,5}-1{,}5x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}-\frac{1}{2}x^{-1,5}\ln\sin x+x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{ctg}x}.$$

12) $$y'(x)=\left(\sin\left(\ln\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)\right)'=$$
$$=\cos\left(\ln\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2-3x-4}\left(\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)'=$$
$$=\cos\left(\ln\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2-3x-4}\left(x^{1,5}-3x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}\right)'=$$
$$=\cos\left(\ln\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}\left(1{,}5x^{0,5}-1{,}5x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}\right)}{x^2-3x-4}=$$
$$=\boxed{\cos\left(\ln\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1{,}5x+2x^{-1}-1{,}5}{x^2-3x-4}}.$$

13) $$y'(x)=\left(\cos\left(e^{x^2-6x}-\operatorname{tg}x\right)\right)'=$$
$$=\boxed{\sin\left(e^{x^2-6x}-\operatorname{tg}x\right)\cdot\left(2(x-3)e^{x^2-6x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}.$$

14) $$y'(x)=\left(\sqrt[3]{e^{\cos x}+\cos x}-\operatorname{ctg}\left(x^2+3x\right)\right)'=$$
$$=\frac{1}{3}\left(e^{\cos x}+\cos x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(e^{\cos x}(-\sin x)-\sin x\right)+\frac{2x+3}{\sin^2(x^2+3x)}=$$
$$=\boxed{-\frac{\sin x}{3}\left(e^{\cos x}+\cos x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(e^{\cos x}+1\right)+\frac{2x+3}{\sin^2(x^2+3x)}}.$$

15) $y'(x) = \left(\sqrt[3]{\log_{2x^2+1}(2x+3)}\right)' =$

$$\left[\log_{2x^2+1}(2x+3) = \frac{\ln(2x+3)}{\ln(2x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log_{2x^2+1}(2x+3)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\ln(2x+3)}{\ln(2x^2+1)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log_{2x^2+1}(2x+3)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{\frac{2\ln(2x^2+1)}{2x+3} - \frac{4x\ln(2x+3)}{2x^2+1}}{\ln^2(2x^2+1)} =$$

$$= \boxed{\begin{aligned}&\frac{2}{3}\left(\log_{2x^2+1}(2x+3)\right)^{-\frac{2}{3}} \times \\ &\quad\times \frac{(2x^2+1)\ln(2x^2+1) - 2x(2x+3)\ln(2x+3)}{(2x+3)(2x^2+1)\ln^2(2x^2+1)}\end{aligned}}.$$

16) $y'(x) = \left((\cos x)^{\operatorname{tg} x}\right)' = \left(e^{\operatorname{tg} x \ln\cos x}\right)' =$

$$= e^{\operatorname{tg} x \ln\cos x}\left(\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}\sin x\right) =$$

$$= \boxed{e^{\operatorname{tg} x \ln\cos x}\frac{\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}.$$

17) $$y'(x) = \left(\ln\frac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\cdot\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}\right)' =$$

$$= \left(\frac{13}{21}\ln(x+4) + \frac{13}{28}\ln(x-3) - \frac{1}{12}\ln(x+1)\right)' =$$

$$= \boxed{\frac{13}{21(x+4)} + \frac{13}{28(x-3)} - \frac{1}{12(x+1)}}.$$

18) $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$.

Прологарифмируем обе части: $\ln y = \ln\dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$.

Так как $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ и

$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4)$, то

$$(\ln y)' = (2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4))'.$$

Получим:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}, \text{ тогда}$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}\right)}.$$

19) $y' = \left((2x-1)^{3x}\right)'.$

$$y' = \left(e^{3x\ln(2x-1)}\right)' =$$

$$= e^{3x\ln(2x-1)}\left(3\ln(2x-1) + 3x\cdot\frac{2}{2x-1}\right) =$$

$$= \boxed{(2x-1)^{3x}\left(3\ln(2x-1) + \frac{6x}{2x-1}\right)}.$$

20) $y' = \left((\sin x)^{2x^2-4x+1}\right)' = \left(e^{(2x^2-4x+1)\ln\sin x}\right)' =$

$$= e^{(2x^2-4x+1)\ln\sin x}\left((4x-4)\ln\sin x + \frac{(2x^2-4x+1)\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= \boxed{(\sin x)^{2x^2-4x+1}\left(4(x-1)\ln\sin x + \left(2x^2-4x+1\right)\operatorname{ctg} x\right)}.$$

Производная обратной функции

Теорема 1. Пусть функция f такая, что $D(f)=M$, $E(f)=N$ и она имеет обратную функцию g. Тогда если $f(x)$ дифференцируема на M и $f'(x) \neq 0$ для $\forall x \in M$, то $g(y)$ дифференцируема на N и $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ (где $y \in N$ и $g(y) = x$).

Действительно, учтем, что $g(f(x)) = x$, тогда

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = x' = 1$, т. е. $\boxed{g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}}$ $(y = f(x))$.

Пример 1[8]**.** $y = f(x) = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$;

$g(y) = \sin y \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

$f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} \quad (y = \arcsin x)$;

$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} =$

$\left[\cos y > 0, \text{ так как } -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right]$

$= \sqrt{1 - x^2}$,

т. е. $\boxed{(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$ на $(-1; 1)$.

Пример 2. $y = \arccos x \quad (-1 < x < 1)$;

$g(y) = \cos x \quad (0 < y < \pi)$;

$(\arccos x)' = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{(\cos y)'} = -\dfrac{1}{\sin y}$,

но $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} =$ $[\sin y > 0, \text{ так как } 0 < y < \pi]$

$= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$,

т. е. $\boxed{(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$ на $(-1; 1)$.

Примечание. Для существования производных $x \neq \pm 1$.

---

[8] См. также Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.: «Петроглиф», 2009.

Таблица производных основных функций

$f(x)=c$	$f'(x)=0$
а) $f(x)=x^n$ б) $f(x)=x^\mu$ в) $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ г) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ д) $f(x)=\dfrac{1}{x}$	а) $f'(x)=nx^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$ б) $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$, $\mu\in\mathbb{R}$ в) $f'(x)=\dfrac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, $m\in\mathbb{Z}$ г) $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ д) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
а) $f(x)=a^x$ б) $f(x)=e^x$	а) $f'(x)=a^x\ln a$ б) $f'(x)=e^x$
а) $f(x)=\log_a x$ б) $f(x)=\ln x$	а) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{1}{x}\log_a e$ б) $f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\arcsin x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert<1)$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert<1)$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\operatorname{arcctg} x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+15}{3x+1}\right)^{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1+\sin 3x)}$.

2. Найдите:

1) $y = \dfrac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$; $y' = ?$

2) $y = \sqrt{3x^2+5x+1}$; $y' = ?$

3) $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{1+x^2}$; $y' = ?$

4) $y = \dfrac{x^6-16x^2}{x^2-5x+105}$; $y' = ?$

5) $y = e^{\arcsin^2 x}$; $y' \leqslant 0$;

6) $y = (21-x)\sqrt[3]{x-18} - 14$; $y' \geqslant 0$;

7) $y = \cos 5x \cos 8x$; $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = ?$

8) $y = \ln(x+8) + \ln(x+7) - 1{,}5x - 3$; $y' \leqslant 0$.

Карточка 2

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi-2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\arcsin 2x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 5x)}$.

2. Найдите:

1) $y = 27x^3 - \dfrac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \dfrac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$; $y' = ?$

2) $y = \left(1+5x-8x^2\right)^9$; $y' = ?$

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $y' = ?$

4) $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; $y' = ?$

5) $y = \dfrac{-1}{5x+4} - \dfrac{5x+3\sqrt{2}}{8}$; $y' \geqslant 0$;

6) $y = \sqrt{-4x+3} + 3\sqrt{4x+5}$; $y' \geqslant 0$;

7) $y = (9\sin x - 9\cos x - 4)\,e^x$; $y' = 0$;

8) $y = \left(\dfrac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x\right)\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 25x - 2$; $y' = 0$.

Карточка 3

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4x-\pi}{3\arcsin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+7}{4x+1}\right)^{x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-3x^2}}{1-\sqrt{\cos x}}$;

2. Найдите:

1) $y=\left(\dfrac{2}{27x}-\dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2}$; $\quad y'=?$

2) $y=\arcsin 2x$; $\quad y'=?$

3) $y=\ln\dfrac{x^2+2}{\sqrt{(6+2x^2)^3}}$; $\quad y'=?$

4) $y=\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$; $\quad y'=?$

5) $y=-\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{27}{2}\sqrt[3]{x^2}-11$; $\quad y'(x)\leqslant 0$;

6) $y=e^{3-4x}+(4x+3)\,e^2$; $\quad y'(x)\geqslant 0$;

7) $y=\dfrac{3\cdot 36^x+4\cdot 6^{x+1}-30x\ln 6}{6\ln 6}$; $\quad y'(x)=0$;

8) $y=2x\ln^2(3x)-3$; $\quad y'(x)=0$.

Карточка 4

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 3x - \sin x)\arcsin x}{5x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}-1}{2-\sqrt{5x+4}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin^2 x}-1}{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}$;

2. Найдите:

1) $y = (5x^2 - 7x + 2)(15x^2 + 3)^3$; $y' = ?$

2) $y = \ln\left((3x-2)(4-x)\right)$; $y'(2) = ?$

3) $y = 2^{x^2} e^{3x+4}$; $y'\left(-\dfrac{4}{3}\right) = ?$

4) $y = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$; $y' = ?$

5) $y = \dfrac{(x-15)^2}{(x-12)^3} + \dfrac{23}{81}$; $y'(x) \geqslant 0$;

6) $y = (x+8)\sqrt{x+8} - 39\sqrt{x+8} + 10$; $y'(x) \leqslant 0$;

7) $y = 5 - \dfrac{11}{4}\cos 2x - 44\cos x - 8\sin x - 32x$; $y'(x) = 0$;

8) $y = 4^{x+4} + 24\cdot 2^{x+4} - 28x\ln 4 + 7$; $y'(x) = 0$.

Решения тренировочных карточек

Решение тренировочной карточки 1

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}=$

$\left[\begin{array}{l}\text{Обозначим } \arcsin x=t, \text{ тогда } x=\sin t.\\ \text{Если } x\to 0, \text{ то } t\to 0.\end{array}\right]$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{3\sin t}=\frac{2}{3}\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{2}{3}\cdot 1=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+15}{3x+1}\right)^{x-1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{14}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{14}}\right)^{\frac{14(x-1)}{3x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14(x-1)}{3x+1}}=\boxed{e^{4\frac{2}{3}}}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\cos 0}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1+\sin 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}}{\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 3x}}\cdot\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{2x}{3x}\right)=\frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

2. Найдите:

1) $$y'(x)=\left(\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[15]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)'=$$

$$=\left(5x^{1\frac{3}{5}}+30x^{\frac{1}{15}}+6x^{-\frac{1}{3}}\right)'=8x^{\frac{3}{5}}+2x^{-\frac{14}{15}}-2x^{-\frac{4}{3}}.$$

2) $$y'(x)=\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}.$$

3) $$y'(x)=\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{1+x^2}\right)'=$$

$$=\frac{-1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\frac{-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{\left(1+x^2\right)^2\cdot 2x}{\left((1+x^2)^2+1\right)(1+x^2)^2}=\frac{2x}{x^4+2x^2+2}.$$

4) $$y'(x)=\left(\frac{x^6-16x^2}{x^2-5x+105}\right)'=$$

$$=\frac{(6x^5-32x)(x^2-5x+105)-(2x-5)(x^6-16x^2)}{(x^2-5x+105)^2}=$$

$$=\frac{1}{(x^2-5x+105)^2}\Big(6x^7-30x^6+630x^5-32x^3+160x^2-$$

$$-3360x-2x^7+5x^6+32x^3-80x^2\Big)=$$

$$=\frac{4x^7-25x^6+630x^5+80x^2-3360x}{(x^2-5x+105)^2}.$$

5) $y'(x) = \left(e^{\arcsin^2 x}\right)' = e^{\arcsin^2 x} \cdot 2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$

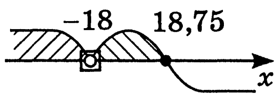
$y'(x) \leqslant 0; \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}.$

Ответ: $(-1; 0]$.

6) $y'(x) = \left((21-x)\sqrt[3]{x-18} - 14\right)' =$

$= -1 \cdot \sqrt[3]{x-18} + \dfrac{21-x}{3\sqrt[3]{(x-18)^2}} = \dfrac{-3x+54+21-x}{3\sqrt[3]{(x-18)^2}} =$

$= \dfrac{75-4x}{3\sqrt[3]{(x-18)^2}}; \quad y'(x) \geqslant 0.$



Ответ: $(-\infty; 18) \cup (18; 18{,}75]$.

7) $y'(x) = (\cos 5x \cos 8x)' = \dfrac{1}{2}(\cos 13x + \cos 3x)' =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot (-\sin 13x) + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-\sin 3x) =$

$= -\dfrac{1}{2}(13 \sin 13x + 3 \sin 3x);$

$y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(13 \sin \dfrac{13\pi}{6} + 3 \sin\left(3 \cdot \dfrac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= -\dfrac{1}{2}\left(13 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot 1\right) = \boxed{-4{,}75}.$

8) $y'(x) = (\ln(x+8) + \ln(x+7) - 1{,}5x - 3)' =$

$= \dfrac{1}{x+8} + \dfrac{1}{x+7} - \dfrac{3}{2} =$

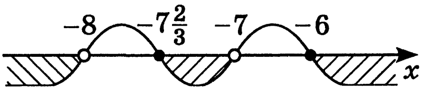
$= \dfrac{2(x+7) + 2(x+8) - 3(x+8)(x+7)}{2(x+8)(x+7)} =$

$= \dfrac{4x + 30 - 3x^2 - 45x - 168}{2(x+8)(x+7)} = \dfrac{-3x^2 - 41x - 138}{2(x+8)(x+7)};$

$$y'(x) = \frac{-3x^2 - 41x - 138}{2(x+8)(x+7)} \leqslant 0;$$

$$3x^2 + 41 + 138 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-41 \pm \sqrt{1681 - 1656}}{6} = \frac{-41 \pm 5}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = -\dfrac{23}{3} \end{array}\right. .$$



Ответ: $(-\infty; -8) \cup \left[-7\frac{2}{3}; -7\right) \cup [6; \infty)$.

Решение тренировочной карточки 2

1. Вычислите:

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{-\sin\frac{\pi}{4}(x-2)}=-\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{4}(x-2)}{\frac{\pi}{4}(x-2)}}\cdot\frac{x+2}{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}(x-2)}{\frac{\pi}{4}(x-2)}}\cdot\frac{4}{\pi}\lim_{x\to 2}(x+2)=\boxed{-\frac{16}{\pi}}.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}}\right)^{\frac{4(3x-1)}{2x-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(3x-1)}{2x-3}}=\boxed{e^6}.$$

3) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

[Обозначим $\arcsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=t$, тогда $\frac{\pi}{2}-x=\sin t$.
Если $x\to\frac{\pi}{2}$, то $t\to 0$ и $\sin t\to 0$.]

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t}=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\boxed{2}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin 2x)}{\ln(1+\operatorname{tg}5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\arcsin 2x)}{\arcsin 2x}}{\frac{\ln(1+\operatorname{tg}5x)}{\operatorname{tg}5x}}\frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}5x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arcsin 2x)}{\arcsin 2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}5x)}{\operatorname{tg}5x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}5x}=$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\arcsin 2x}{2x}}{\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}} =$$

[Пусть $\arcsin 2x = t$, $\quad 2x = \sin t$.]

$$= \frac{2}{5} \frac{\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos 5x}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{\cos 0}} = \boxed{\frac{2}{5}}.$$

2. Найдите производную:

1) $$y'(x) = \left(27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}\right)' =$$

$$= \left(27x^3 - \frac{81}{2}x^{2\frac{2}{3}} + 12x^2 + \frac{12}{5}x^{1\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 81x^2 - \frac{81}{2} \cdot \frac{8}{3}x^{1\frac{2}{3}} + 24x + \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} =$$

$$= 81x^2 - 108x^{1\frac{2}{3}} + 24x + 4x^{\frac{2}{3}}.$$

2) $$y'(x) = \left(\left(1 + 5x - 8x^2\right)^9\right)' =$$

$$= 9(1 + 5x - 8x^2)^8(5 - 16x).$$

3) $$y'(x) = (\operatorname{arctg}\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4) $$y'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos^2 x - \left(\cos^2 x\right)' \cdot \sin x}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x}.$$

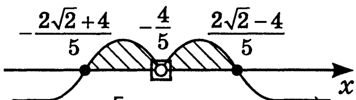
5) $y'(x) = \left(\dfrac{-1}{5x+4} - \dfrac{5x+3\sqrt{2}}{8} \right)' =$

$= 5(5x+4)^{-2} - \dfrac{1}{8}(5+0);$

$y'(x) = 5(5x+4)^{-2} - \dfrac{5}{8} \geqslant 0; \quad (5x+4)^{-2} \geqslant 2^{-3};$

$\left(\dfrac{1}{5x+4} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \right) \left(\dfrac{1}{5x+4} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \right) \geqslant 0;$

$\dfrac{\left(2\sqrt{2}-4-5x\right)\left(2\sqrt{2}+4+5x\right)}{8(5x+4)^2} \geqslant 0.$



Ответ: $\left[-\dfrac{2\sqrt{2}+4}{5}; -\dfrac{4}{5} \right) \cup \left(-\dfrac{4}{5}; \dfrac{2\sqrt{2}-4}{5} \right].$

6) $y'(x) = \left(\sqrt{-4x+3} + 3\sqrt{4x+5} \right)' =$

$= \dfrac{-2}{\sqrt{-4x+3}} + \dfrac{6}{\sqrt{4x+5}} \geqslant 0; \quad 3\sqrt{-4x+3} \geqslant \sqrt{4x+5};$

$9(-4x+3) \geqslant (4x+5); \quad 40x \leqslant 22; \quad x \leqslant \dfrac{11}{20},$

но $D(y') : \begin{cases} 4x+5 > 0 \\ -4x+3 > 0 \end{cases}; \quad -5 < 4x < 3; \quad -\dfrac{5}{4} < x < \dfrac{3}{4}.$

Ответ: $\left(-1\dfrac{1}{4}; \dfrac{11}{20} \right].$

7) $y'(x) = \left((9\sin x - 9\cos x - 4)\, e^x \right)' =$

$= (9\cos x + 9\sin x)\, e^x + e^x(9\sin x - 9\cos x - 4) =$

$= e^x\,(9\cos x + 9\sin x + 9\sin x - 9\cos x - 4) =$

$= 2e^x(9\sin x - 2);$

$y'(x) = 2e^x(9\sin x - 2) = 0; \quad \sin x = \dfrac{2}{9}.$

Ответ: $\left\{ (-1)^k \arcsin\dfrac{2}{9} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

8) $y'(x) = \left(\left(\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 25x - 2\right)' =$

$= (x^2 - 10x + 25)\ln x + \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x}{x} - \frac{1}{3}x^2 + 5x - 25 =$

$= (x-5)^2\ln x + \frac{1}{3}x^2 - 5x + 25 - \frac{1}{3}x^2 + 5x - 25 = (x-5)^2\ln x;$

$y'(x) = (x-5)^2\ln x = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 1 \end{array}\right..$

Ответ: $\{1; 5\}$.

Решение тренировочной карточки 3

1. Вычислите:

1) $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}\cdot\frac{\pi^2}{\pi+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2}{\pi+x}=1\cdot\frac{\pi^2}{\pi+\pi}=\boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4x-\pi}{3\arcsin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Пусть } \arcsin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=t,\text{ тогда } x-\dfrac{\pi}{4}=\sin t;\\ \text{если } x\to\dfrac{\pi}{4},\text{ то } t\to 0 \text{ и } \sin t\to 0.\end{array}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4\sin t}{3t}=\frac{4}{3}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\boxed{\frac{4}{3}}.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+7}{4x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{4x+1}\right)^{\frac{4x+1}{6}}\right)^{\frac{6(x+2)}{4x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(x+2)}{4x+1}}=\boxed{e^{1,5}}.$$

4) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{1-\sqrt{\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\sqrt{1-3x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-3x^2}\right)(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})\left(1+\sqrt{1-3x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-1+3x^2}{1-\cos x}\,\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{1-3x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{1-3x^2}}\right)=$$

$$=3\cdot2\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{1-3x^2}}=6\cdot\frac{1+1}{1+1}=\boxed{6}.$$

2. Найдите:

1) $$y'(x) = \left(\left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2}\right)' =$$

$$= \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)'\sqrt{3x+x^2} + \left(\sqrt{3x+x^2}\right)'\left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{27}x^{-2} + \frac{2}{9}x^{-3}\right)\sqrt{3x+x^2} + \frac{3+2x}{2\sqrt{3x+x^2}} \cdot \frac{2x-3}{27x^2} =$$

$$= -\frac{2(x-3)}{27x^3}\sqrt{3x+x^2} + \frac{(3+2x)(2x-3)}{54x^2\sqrt{3x+x^2}} =$$

$$= \frac{-4(x-3)(3x+x^2) + (4x^2-9)x}{54x^3\sqrt{3x+x^2}} =$$

$$= \frac{27x}{54x^3\sqrt{3x+x^2}} = \frac{1}{2x^2\sqrt{3x+x^2}}.$$

2) $$y'(x) = (\arcsin 2x)' = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

3) $$y'(x) = \left(\ln\frac{x^2+2}{\sqrt{(6+2x^2)^3}}\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{(6+2x^2)^3}}{x^2+2} \cdot \frac{2x\sqrt{(6+2x^2)^3} - \frac{3\cdot 4x(x^2+2)}{2}\sqrt{6+2x^2}}{(6+2x^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{(6+2x^2)^4}\left(2x(6+2x^2) - 6x(x^2+2)\right)}{(x^2+2)(6+2x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x(6+2x^2-3x^2-6)}{(x^2+2)(6+2x^2)} = \frac{-x^3}{(x^2+2)(x^2+3)}.$$

4) $$y'(x) = \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x\right)' =$$

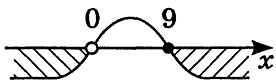
$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{3}\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = \frac{1}{\cos^4 x}.$$

5) $y'(x)=\left(-\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{27}{2}\sqrt[3]{x^2}-11\right)'=$

$=-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+\dfrac{27}{2}\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=-x^{\frac{2}{3}}+9x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{9-x}{\sqrt[3]{x}}.$

$y'(x)=-x^{\frac{2}{3}}+9x^{-\frac{1}{3}}\leqslant 0;$

$x^{-\frac{1}{3}}(9-x)\leqslant 0.$



Ответ: $(-\infty;0)\cup[9;\infty)$.

6) $y'(x)=\left(e^{3-4x}+(4x+3)\,e^2\right)'=$

$=e^{3-4x}\cdot(-4)+4e^2=4e^2\left(1-e^{1-4x}\right);$

$y'(x)=4e^2\left(1-e^{1-4x}\right)\geqslant 0;\quad 1-4x\leqslant 0;\quad x\geqslant 0{,}25.$

Ответ: $[0{,}25;\infty)$.

7) $y'(x)=\left(\dfrac{3\cdot 36^x+4\cdot 6^{x+1}-30x\cdot\ln 6}{6\ln 6}\right)'=$

$=\dfrac{1}{2\ln 6}\cdot 36^x\cdot\ln 36+\dfrac{2\cdot 6^{x+1}\cdot\ln 6}{3\ln 6}-5=$

$=36^x+4\cdot 6^x-5;$

$y'(x)=36^x+4\cdot 6^x-5=0;\quad \left[\begin{array}{l}6^x=-5\\ 6^x=1\end{array}\right.;\quad x=0.$

8) $y'(x)=\left(2x\ln^2(3x)-3\right)'=$

$=2\ln^2(3x)+2x\cdot 2\cdot\dfrac{3}{3x}\ln(3x)=2\ln^2(3x)+4\ln(3x);$

$y'(x)=2\ln^2(3x)+4\ln(3x)=0;$

$2\ln(3x)\left(\ln(3x)+2\right)=0;\quad \left[\begin{array}{l}\ln 3x=0\\ \ln 3x=-2\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{1}{3}e^{-2}\end{array}\right..$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}e^{-2}\right\}$.

Решение тренировочной карточки 4

1. Вычислите:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin 2x}(1+\cos x+\cos^2 x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{x^2}{4x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)}\cdot(1+\cos 0+\cos^2 0)=\boxed{\frac{3}{4}}.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x-\sin x)\arcsin x}{5x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos 2x\arcsin x}{5x^2}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=\boxed{0{,}4}.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin 2x}-1}{2-\sqrt{5x+4}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(\sqrt{1-\sin 2x}+1\right)\left(2+\sqrt{5x+4}\right)}{\left(2-\sqrt{5x+4}\right)\left(2+\sqrt{5x+4}\right)\left(\sqrt{1-\sin 2x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin 2x-1)\left(2+\sqrt{5x+4}\right)}{(4-5x-4)\left(\sqrt{1-\sin 2x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2+\sqrt{5x+4}}{\sqrt{1-\sin 2x}+1}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2+\sqrt{4+0}}{\sqrt{1-0}+1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2+2}{1+1}=\boxed{0{,}8}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin^2 x}-1}{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}}{\frac{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}{\operatorname{tg}^2 x}}\cdot\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}{\operatorname{tg}^2 x}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x=$$

$$\left[\lim_{\sin^2 x\to 0}\frac{2^{\sin^2 x}-1}{\sin^2 x}=\ln 2;\qquad \lim_{\operatorname{tg}^2 x\to 0}\frac{4^{\operatorname{tg}^2 x}-1}{\operatorname{tg}^2 x}=\ln 4\right]$$

$$=\frac{\ln 2}{\ln 4}\cdot\cos 0=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. Найдите производную:

1) $y'(x)=\left((5x^2-7x+2)(15x^2+3)^3\right)'=$

$$=(10x-7)(15x^2+3)^3+3(15x^2+3)^2\cdot 30x(5x^2-7x+2)=$$
$$=(15x^2+3)^2\left((10x-7)(15x^2+3)+90x(5x^2-7x+2)\right)=$$
$$=(15x^2+3)^2(150x^3-105x^2+30x-21+450x^3-630x^2+180x)=$$
$$=(15x^2+3)^2(600x^3-735x^2+210x-21).$$

2) $y'(x)=(\ln((3x-2)(4-x)))'=$

$$=\frac{3(4-x)+(-1)\cdot(3x-2)}{(3x-2)(4-x)}=$$
$$=\frac{-6x+14}{(3x-2)(4-x)}=\frac{6x-14}{(3x-2)(x-4)};$$
$$y'(2)=\frac{12-14}{(6-2)(2-4)}=\frac{-2}{4\cdot(-2)}=\boxed{0{,}25}.$$

3) $y'(x)=\left(2^{x^2}e^{3x+4}\right)'=$

$$=2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2\cdot e^{3x+4}+e^{3x+4}\cdot 3\cdot 2^{x^2}=$$
$$=2^{x^2}e^{3x+4}(2x\ln 2+3).$$
$$y'\left(-\frac{4}{3}\right)=2^{\frac{16}{9}}\cdot e^0\cdot\left(-\frac{8}{3}\ln 2+3\right)=\boxed{2^{\frac{16}{9}}\left(3-\frac{8}{3}\ln 2\right)}.$$

4) $y'(x) = \left(\left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x\right)' =$

$$= \left(\frac{2\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{\cos^2 x}\right)' =$$

$$= \frac{2\cos x\cos^4 x - 8\cos^3 x\cdot(-\sin^2 x)}{\cos^8 x} +$$

$$+ \frac{3\cos x\cdot\cos^2 x - 6\cos x\cdot(-\sin^2 x)}{\cos^4 x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x + 8\sin^2 x}{\cos^5 x} + \frac{3\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x + 8\sin^2 x + 3\cos^4 x + 6\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^5 x} =$$

$$= \frac{2 + 6\sin^2 x(1+\cos^2 x) + 3\cos^4 x}{\cos^5 x} =$$

$$= \frac{2 + 6(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x) + 3\cos^4 x}{\cos^5 x} =$$

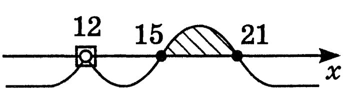
$$= \frac{2 + 6 - 6\cos^4 x + 3\cos^4 x}{\cos^5 x} = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}.$$

5) $y'(x) = \left(\dfrac{(x-15)^2}{(x-12)^3} + \dfrac{23}{81}\right)' =$

$$= \frac{2(x-15)(x-12)^3 - 3(x-12)^2(x-15)^2}{(x-12)^6} =$$

$$= \frac{(x-15)(x-12)^2(2x - 24 - 3x + 45)}{(x-12)^6} =$$

$$= \frac{(x-15)(x-12)^2(21-x)}{(x-12)^6} \geqslant 0;$$

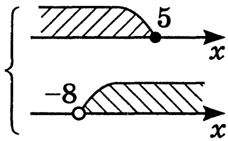


$[15; 21]$.

6) $y'(x) = \left((x+8)\sqrt{x+8} - 39\sqrt{x+8} + 10\right)' =$

$$= \frac{3}{2}(x+8)^{\frac{1}{2}} - \frac{39}{2\sqrt{x+8}} = \frac{3(x+8)-39}{2\sqrt{x+8}} = \frac{3(x-5)}{2\sqrt{x+8}}.$$

$y'(x) = \dfrac{3(x-5)}{2\sqrt{x+8}} \leqslant 0.$



Ответ: $(-8; 5]$.

7) $y'(x) = \left(5 - \dfrac{11}{4}\cos 2x - 44\cos x - 8\sin x - 32x\right)' =$

$$= -\frac{11}{4}\cdot 2(-\sin 2x) + 44\sin x - 8\cos x - 32 =$$

$$= \frac{11}{2}\cdot 2\sin x\cos x + 44\sin x - 8\cos x - 32 =$$

$$= 11\sin x(\cos x + 4) - 8(\cos x + 4) =$$

$$= (\cos x + 4)(11\sin x - 8) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -4 \notin [-1; 1] \\ \sin x = \dfrac{8}{11} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left\{(-1)^k \arcsin\dfrac{8}{11} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8) $y'(x) = \left(4^{x+4} + 24\cdot 2^{x+4} - 28x\ln 4 + 7\right)' =$

$$= 4^{x+4}\ln 4 + 24\cdot 2^{x+4}\ln 2 + (-28\ln 4) =$$

$$= \ln 4\left(4^{x+4} + 12\cdot 2^{x+4} - 28\right) = 0.$$

Обозначая $2^{x+4} = t$ $(t > 0)$, получим

$t^2 + 12t - 28 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -14 \notin [0; \infty) \end{array}\right.;$

$2^{x+4} = 2; \quad x + 4 = 1; \quad x = -3.$

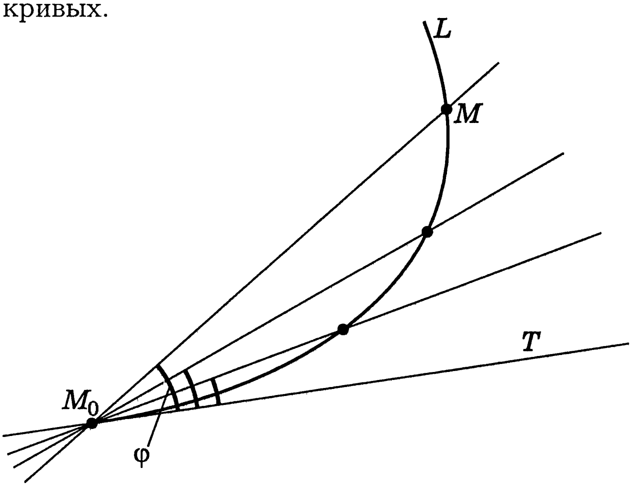
Ответ: $y'(x) = 0$ при $x = -3$.

3

Геометрический смысл понятия производной

Определение касательной

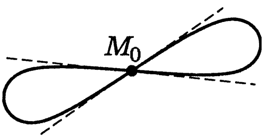
В элементарной геометрии известно определение касательной к окружности как прямой, принадлежащей плоскости окружности и имеющей с ней только одну общую точку. Однако такое определение касательной не является общим и не годится для ряда кривых.



Определение. **Прямая M_0T называется касательной к кривой L в точке M_0, если угол φ между прямой M_0T и секущей M_0M стремится к нулю при неограниченном приближении точки M по кривой L к точке M_0, т. е. если из $(M \to M_0) \Rightarrow (\varphi \to 0)$.**

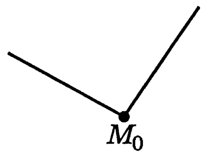
Примеры кривых, у которых в точке M_0 есть или отсутствует касательная к кривой L.

а)



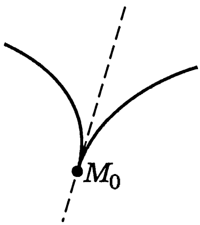
Касательной нет

б)



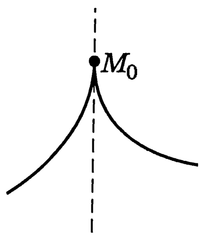
Касательной нет

в)



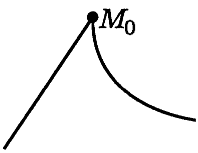
Касательная есть

г)



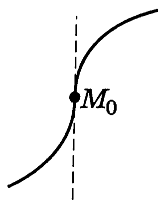
Касательная есть

д)



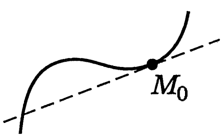
Касательной нет

е)



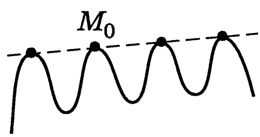
Касательная есть

ж)



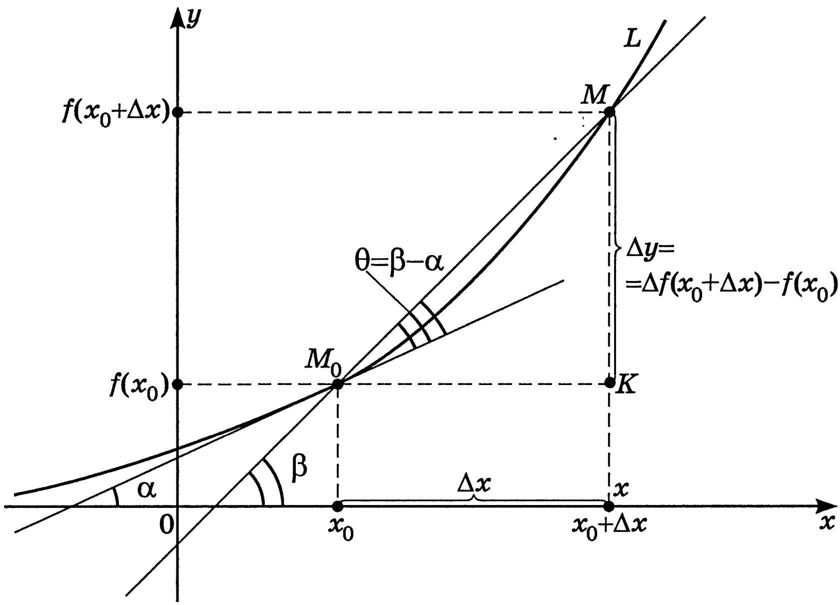
Касательная есть, хотя у нее есть две общие точки с кривой

з)



Касательная есть, хотя у нее четыре общие точки с кривой

Рассмотрим кривую L, являющуюся графиком непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей конечную производную на $(a;b)$ $(x_0 - \Delta x;\ x_0 + \Delta x) \in (a;b)$.



а) Пусть $\Delta x = x - x_0$; $\quad x = x_0 + \Delta x$;

$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f(x) - f\left(x_0\right).$

б) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{MK}{M_0K}$, тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}.$$

в) $y'\left(x_0\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \lim\limits_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta.$

г) $\lim\limits_{M \to M_0} (\beta - \alpha) = 0$ по определению касательной к кривой в точке M_0.

д) В силу непрерывности $y = \operatorname{tg} x$ на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\quad \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3}{2}\pi\right)$

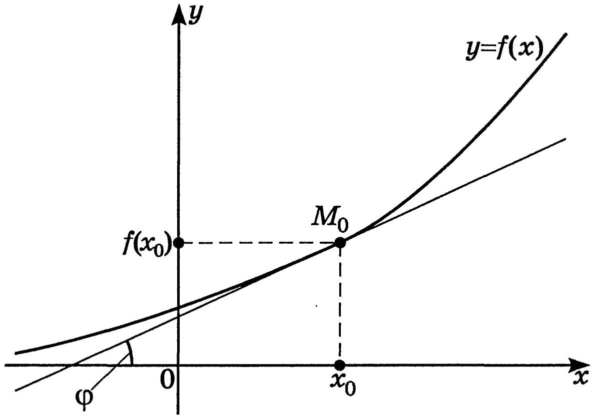
$\lim\limits_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $\boxed{y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha}$.

Вывод. Значение производной в точке касания $(x_0; f(x_0))$ равно угловому коэффициенту касательной, т. е. тангенсу угла наклона между касательной и положительным направлением оси абсцисс (геометрическая интерпретация).

Значит $\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg} y'(x_0), & y'(x_0) \geqslant 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} y'(x_0), & y'(x_0) < 0 \end{cases}$.

При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ конечной производной нет. Тогда в качестве касательной принимают прямую, параллельную Oy, т. е. $x = x_0$.

Уравнение касательной к кривой в данной точке



Пусть $y = kx + b$ — уравнение касательной прямой (такая прямая не параллельна оси Oy).

$y'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = k$, тогда $y = y'(x_0)\,x + b$, так как $y_0 = y(x_0)$.

$y_0 = y'(x_0)\,x_0 + b$, значит $b = y_0 - y'(x_0)\cdot x_0$. Получим то, что $y = y'(x_0)\,x + y_0 - y'(x_0)\,x_0$, тогда $\boxed{y = y_0 + y'(x_0)\cdot(x - x_0)}$

или $\boxed{\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = y'(x_0)}$, если касательная не параллельна Oy.

Эти уравнения называются уравнениями касательных.

При параллельности касательной Oy уравнение касательной имеет вид $x = x_0$.

Можно несколько иначе. Пусть уравнение касательной $y = kx + b$ — прямая, тогда при $M_0(x_0; y_0) \in \Gamma\ y = f(x)$ (т. е. принадлежит графику функции $y = f(x)$).

$y_0 = k\cdot x_0 + b$ вычтем из уравнения $y = kx + b$, получим $y - y_0 = k(x - x_0)$; $y = y_0 + k(x - x_0)$, но $k = y'_{x_0}$, значит $\boxed{y = y_0 + y'_{x_0}(x - x_0)}$ $(y'(x_0) = y'_{x_0})$.

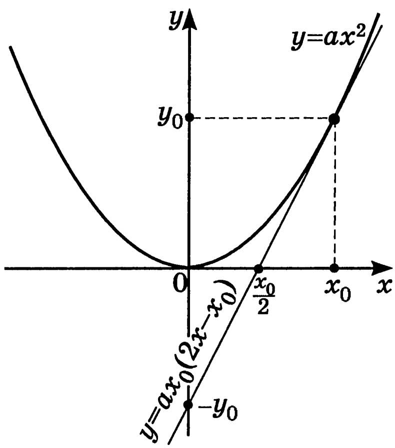
Примечание. $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$ или $y = y_0 + y'_{x_0}(x - x_0)$ — уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ или $(x_0; y(x_0))$, или $(x_0; y_0)$, или в точке с абсциссой x_0. Это разные формы записи.

Пример. Найдите уравнение касательной к графику функции $y(x) = ax^2$ в точке с абсциссой x_0.

Так как $y'(x) = 2ax$; $y(x_0) = ax_0^2$; $y'(x_0) = 2ax_0$, то $y = ax_0^2 + 2ax_0(x - x_0)$, т. е. $y = 2ax_0x - ax_0^2$ — уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$.

Учитывая, что $y = ax_0(2x - x_0)$, получим простой способ построения касательной в точке $(x_0; y_0)$.

Для уравнения касательной при $y = 0$ $x = \dfrac{x_0}{2}$ $(x_0 \neq 0)$, т. е. через точки $(x_0; y(x_0))$ и $\left(\dfrac{x_0}{2}; 0\right)$ строим прямую, которая и есть касательная.



Примечание. Для а) $y = ax^3$; б) $y = ax^4$ касательная в точке $(x_0; y_0)$ проходит через точки:
а) $(x_0; y_0)$ и $\left(\dfrac{x_0}{3}; 0\right)$; б) $(x_0; y_0)$ и $\left(\dfrac{x_0}{4}; 0\right)$ и т. д.

Практикум 14

Найдите уравнение касательной к функции:

1. $y = \frac{1}{3}x^6 + 7x^2 - 2x + 1$ в точке $x_0 = -1$[9];

2. $y = \cos x - \frac{2}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

3. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ в точке $x_0 = 4$;

4. $y = \left(x^2 - 5x + 7\right) e^x$ в точке $x_0 = 0$;

5. $y = \frac{x^2}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$;

6. $y = \frac{\sin x}{2 - x}$ в точке $x_0 = 0$;

7. $y = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2}{x} + 3x - 12$ в точке $x_0 = -1$;

8. $y = \sqrt{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{4} + \frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

[9] По умолчанию имеется в виду точка с абсциссой $x_0 = a$, где a — число.

Решение практикума 14

Найдите уравнение касательной к функции:

1. $y = \frac{1}{3}x^6 + 7x^2 - 2x + 1$ в точке $x_0 = -1$.

$y' = 2x^5 + 14x - 2; \quad y(-1) = \frac{1}{3} + 7 + 2 + 1 = 10\frac{1}{3};$

$y'(-1) = -2 - 14 - 2 = -18; \quad y = 10\frac{1}{3} - 18(x+1);$

$\boxed{y = -18x - 7\frac{2}{3}}$.

2. $y = \cos x - \frac{2}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$y' = -\sin x - \frac{4}{\pi}x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\frac{\pi}{2};$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = -3; \quad y = -\frac{\pi}{2} - 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$

$\boxed{y = -3x + \pi}$.

3. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ в точке $x_0 = 4$.

$$y' = \frac{\frac{x+4}{2\sqrt{x}} - 1\cdot\sqrt{x}}{(x+4)^2} = \frac{x + 4 - 2x}{2\sqrt{x}\,(x+4)^2} = \frac{4-x}{2\sqrt{x}\,(x+4)^2};$$

$y(4) = \frac{\sqrt{4}}{4+4} = \frac{1}{4}; \quad y'(4) = 0$, т. е. $\boxed{y = \frac{1}{4}}$, значит касательная в этой точке параллельна оси абсцисс.

4. $y = \left(x^2 - 5x + 7\right)e^x$ в точке $x_0 = 0$.

$y' = (2x-5)\,e^x + \left(x^2 - 5x + 7\right)e^x = e^x\left(x^2 - 3x + 2\right);$

$y(0) = (0 - 5\cdot 0 + 7)\,e^0 = 7; \quad y'(0) = e^0\,(0 - 3\cdot 0 + 2) = 2;$

$\boxed{y = 2x + 7}$.

5. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$.

$$y' = \frac{2x\,(x+1) - 1\cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2};\quad y(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};$$

$$y'(1) = \frac{1+2}{(1+1)^2} = \frac{3}{4};\quad y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,(x-1);\quad \boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}.$$

6. $y = \dfrac{\sin x}{2-x}$ в точке $x_0 = 0$.

$$y' = \frac{\cos x\,(2-x) - (-1)\sin x}{(2-x)^2} = \frac{\sin x + 2\cos x - x\cos x}{(2-x)^2};$$

$$y\,(0) = 0;\quad y'\,(0) = \frac{0 + 2\cdot 1 - 0\cdot 1}{2^2} = \frac{1}{2};\quad \boxed{y = \frac{1}{2}x}.$$

7. $y = \dfrac{10^x}{\ln 10} - \dfrac{2}{x} + 3x - 12$ в точке $x_0 = -1$.

$$y' = \frac{10^x\cdot\ln 10}{\ln 10} + 2x^{-2} + 3;$$

$$y' = 10^x + 2x^{-2} + 3;\quad y'(-1) = 0{,}1 + 2 + 3 = 5{,}1;$$

$$y(-1) = \frac{0{,}1}{\ln 10} + 2 - 3 - 12 = 0{,}1\lg e - 13;\quad \left(\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right)$$

$$y = 0{,}1\lg e - 13 + 5{,}1\,(x+1);\quad \boxed{y = 5{,}1x + 0{,}1\lg e - 7{,}9}.$$

8. $y = \sqrt{3}\cos x - \cos\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

$$y' = -\sqrt{3}\sin x + \frac{6}{\pi}x;$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{\pi}\,\frac{\pi^2}{9} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3} = -1{,}5 + 2 = 0{,}5;$$

$$y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3} + 0{,}5\left(x - \frac{\pi}{3}\right);\quad \boxed{x = 0{,}5x + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{6}}.$$

Угол между пересекающимися кривыми

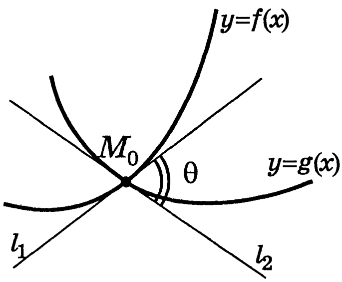
Определение. Углом между пересекающимися кривыми называется нетупой угол между касательными, проведенными к кривым в точке их пересечения.

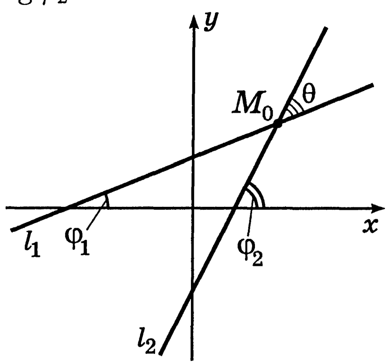
а) Пусть кривые пересекаются в точке M_0,

а прямые l_1 и l_2 — касательные к кривым в точке M_0.

б) Рассмотрим пересекающиеся прямые l_1 и l_2, где θ — угол между прямыми.

Положим $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, а $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$.





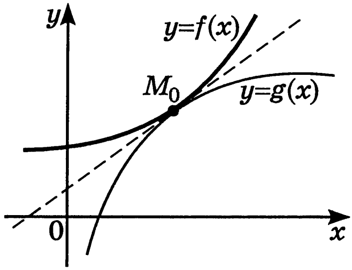
$\theta = |\varphi_2 - \varphi_1|$; так как $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, то

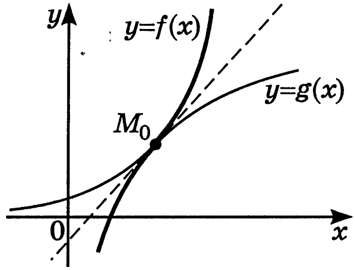
$$|\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| \quad (\theta \in [0; 90°]).$$

При $1 + k_1 k_2 = 0$; $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$; $\operatorname{tg}\theta$ не существует, т. е. $\theta = 90°$. Итак, условие перпендикулярности двух прямых $\boxed{k_2 = -\dfrac{1}{k_1}}$.

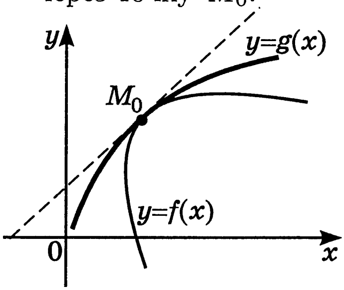
Примечание. При $\varphi_1 = \varphi_2$ кривые касаются друг друга в точке M_0, причем возможны различные случаи.

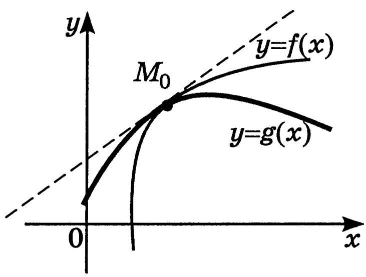
1. Кривые находятся по разные стороны касательной, проходя через точку M_0.





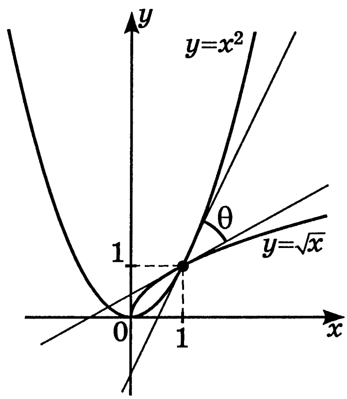
2. Кривые находятся по одну сторону касательной, проходя через точку M_0.





Пример 1. Найдите угол между кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Найдем точки пересечения кривых.



$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$; $\quad x^2 = \sqrt{x}$;

$\sqrt{x}\left((\sqrt{x})^3 - 1\right) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 0 \\ (\sqrt{x})^3 = 1 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

а) $x_0 = 0$; $\quad (x^2)' = 2x$.

В точке $x = 0$ касательная — ось Ox.

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. В точке $x = 0$ нет производной $y = \sqrt{x}$. В данном случае это значит, что ось Oy — касательная для $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 0$, т. е. угол между касательными к кривым в точке $x_0 = 0$ равен $90°$.

б) $x_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} y'_{x_0=1} = 2 \ \text{ для } y = x^2 \\ y'_{x_0=1} = \dfrac{1}{2} \ \text{ для } y = \sqrt{x} \end{array}\right| , \quad \text{тогда } \operatorname{tg}\theta = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

значит $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

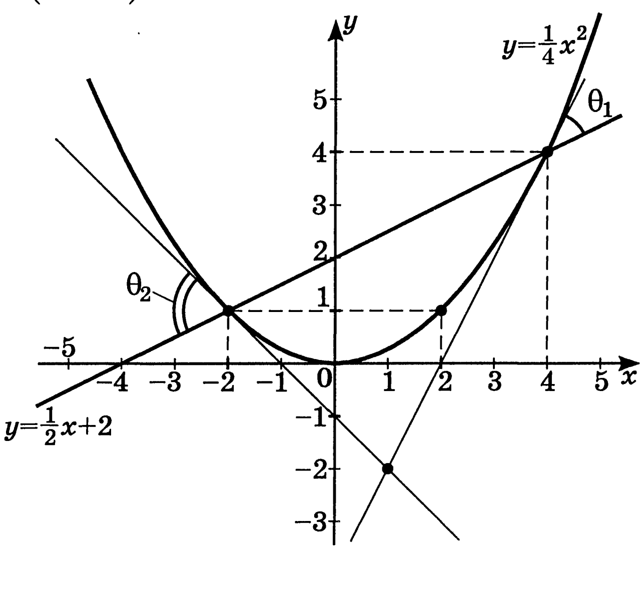
Пример 2. Найдите угол между кривыми $y = \dfrac{1}{4}x^2$ и $x - 2y + 4 = 0$.

Найдем точки пересечения кривых.

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}, \text{ тогда } x^2 - 2x - 8 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' = \frac{1}{2}x;$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)' = \frac{1}{2}.$$



а) $x_0 = 4$;

$$\left.\begin{aligned} f'(4) &= 2 = k_2 \\ g'(4) &= \frac{1}{2} = k_1 \end{aligned}\right| \quad \operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \dfrac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2}} = \frac{3}{4};$$

б) $x_0 = -2$;

$$\left.\begin{aligned} f'(-2) &= -1 = k_2 \\ g'(-2) &= \frac{1}{2} = k_1 \end{aligned}\right| \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \left| \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 + (-1) \cdot \frac{1}{2}} \right| = |-3| = 3.$$

Ответ: $\theta_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{4}$; $\quad \theta_2 = \operatorname{arctg} 3$.

Пример 3. Найдите уравнение касательной к кривой $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{4}x - 1$, параллельной прямой $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

$\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{5}{4}$; $\quad f'(x) = -x + \dfrac{3}{4}$;

так как $y'_{x_0} = \operatorname{tg}\varphi$, то $-\dfrac{5}{4} = -x_0 + \dfrac{3}{4}$,

тогда $x_0 = 2$; $\quad y_0 = -\dfrac{1}{2} \cdot 2^2 + \dfrac{3}{4} \cdot 2 - 1 = -\dfrac{3}{2}$.

$y = -\dfrac{3}{2} + \left(-\dfrac{5}{4}\right)(x - 2)$; $\quad \boxed{y = -\dfrac{5}{4}x + 1}$.

Пример 4. Выясните, в какой точке касательная к $y = -x^2 + 4$ перпендикулярна прямой $x - 2y + 2 = 0$ и напишите уравнение этой касательной.

Данную прямую можно записать в виде $y = \dfrac{1}{2}x + 1$. Так как $k_1 = \dfrac{1}{2}$, то $k_2 = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -2$ — условие перпендикулярности.

$y'_{x_0} = (-2x_0) = -2$; $\quad x_0 = 1$; $\quad y_0 = 3$; $\quad (y_0 = -x_0^2 + 4)$

$y = 3 + (-2)(x - 1)$; $\quad \boxed{y = -2x + 5}$.

Пример 5. Найдите касательную к кривой $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$ в точке пересечения кривой с осью ординат.

$x_0 = 0$; $y_0 = -18$; $(0; -18)$ — точка пересечения.

$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right)$;

$y'(x_0) = 6 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 12 = -12$;

$y = -18 - 12(x - 0)$; $\boxed{y = -12x - 18}$.

Пример 6. Вычислите площадь треугольника, образованного касательной к кривой $y = \dfrac{1}{x}$ и положительными полуосями координат.

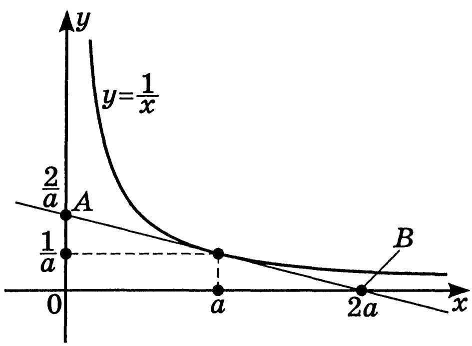
Пусть $x_0 = a$ абсцисса точки касания. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

$y'_{x_0=a} = -\dfrac{1}{a^2}$;

$y(a) = \dfrac{1}{a}$;

$y = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2}(x - a)$;

$\boxed{y = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{2}{a}}$.



а) $y = 0$, $x = 2a$;

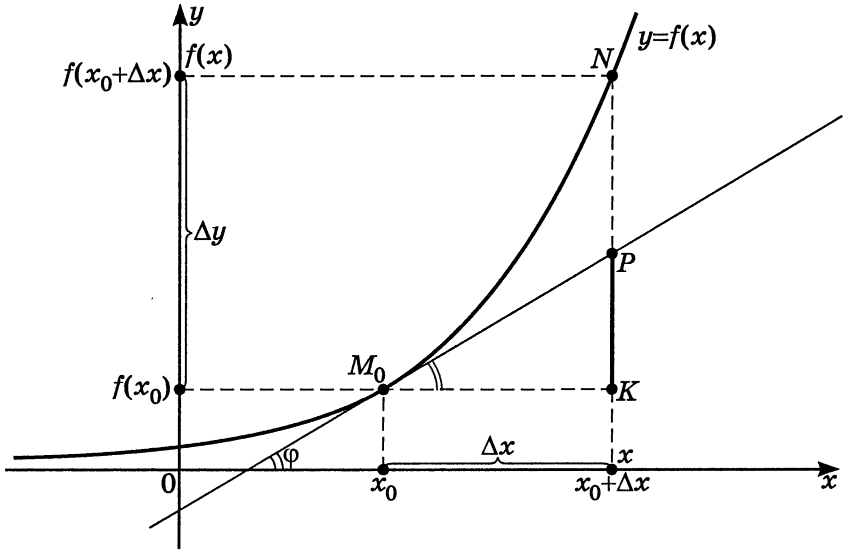
б) $x = 0$, $y = \dfrac{2}{a}$.

Тогда $OA = \dfrac{2}{a}$, $OB = 2a$.

$S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{a} \cdot 2a = 2$ — S_{Δ} не зависит от точки касания.

Понятие дифференциала и приближенные вычисления

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ — непрерывную на $(a; b)$ и имеющую конечную производную на $(a; b)$.



$\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$, $\quad PK = M_0K \operatorname{tg}\varphi$, $\quad M_0K = \Delta x$, тогда

$\boxed{PK = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy}$ — называется дифференциалом функции.

Положим $NP = \alpha(x)$, тогда

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x)$, т. е.

$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x)}$.

Примечание. Отметим, что:

а) дифференциал на латинском языке означает разность. dy — дифференциал функции. Пусть $y = x$, тогда $dy = dx$, но $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, $\quad f'(x) = (x)' = 1$, поэтому $dy = \Delta x$, значит $\underline{\Delta x = dx}$. $\Delta x = dx$ — дифференциал аргумента;

б) $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dy}{dx}$ — еще одна форма записи производной.

Рассмотрим применение понятия дифференциала в приближенном вычислении.

Так как $\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(x)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \dfrac{\alpha(x)}{\Delta x}$,

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x_0) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\Delta x}.$

Тогда $f'(x_0) = f'(x_0) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\Delta x} = 0$.

Таким образом, из $\Delta x \to 0$ следует $\alpha(x) \to 0$.

Значит, $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$ — дифференциал функции.

Тогда $\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}$

$(f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x))$.

Выясним, какую абсолютную и относительную погрешность при этом мы можем получить на конкретном примере.

Пусть $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 2$.

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 + 2(x_0 + \Delta x) - \left(x_0^3 + 2x_0\right) =$
$= 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x_0^3 + 2\Delta x.$

Напомним, что $|\Delta y - dy|$ — абсолютная погрешность,

$\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$ — относительная погрешность.

а) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 2 \cdot 0{,}1 = 1{,}461.$
$dy = \left(3x_0^2 + 2\right)\Delta x$; $dy = \left(3 \cdot 2^2 + 2\right) \cdot 0{,}1 = 1{,}4$;
$|\Delta y - dy| = 0{,}061$; $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}061}{1{,}461} \approx 0{,}04$, т. е. 4%.

б) $\Delta x = 0{,}01$;
$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01^2 + 0{,}01^3 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}140601$;
$\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}000601}{0{,}140601} \approx 0{,}004$, т. е. 0,4%.

Рассуждая аналогично, можно достигнуть любой степени приближения.

Рассмотрим вывод некоторых формул приближенного вычисления, используя понятие дифференциала.

1. $y = f(x) = \sqrt[n]{1+x}$;

   $\Delta x = x - x_0; \quad f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$.

   Пусть $x_0 = 0$, тогда $x = \Delta x$; $\quad f'(0) = \frac{1}{n}; \quad f(0) = 1$.

   Так как $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$, то $\boxed{\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}}$.

   Пример 1. $\sqrt[19]{1{,}02} \approx 1 + \frac{1}{19}\cdot 0{,}02 \approx 1 + 0{,}001 = 1{,}001$.
   Итак, $\sqrt[19]{1{,}02} \approx 1{,}001$.

2. $y = f(x) = \sqrt{a^2+x}$, где $a > 0$.

   Пусть $x_0 = 0$, тогда $x = \Delta x$; $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2+x}}; \quad f'(0) = \frac{1}{2a}$.

   $y(0) = a$, значит $\boxed{\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2a}}$.

   Пример 2. $\sqrt{120} = \sqrt{11^2-1} \approx 11 - \frac{1}{2\cdot 11} \approx 10{,}955$
   $(a = 11; \quad x = -1)$.

3. $y = f(x) = \sqrt[n]{a^n+x}$, где $a > 0$. Пусть $x_0 = 0$, $\quad \Delta x = x$;

   $f'(x) = \frac{1}{n}(a^n+x)^{\frac{1}{n}-1}; \quad f'(0) = \frac{1}{n}\cdot a^{\frac{1-n}{n}\cdot n} = \frac{1}{na^{n-1}}$;

   $f(0) = a$, значит $\boxed{\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{n\cdot a^{n-1}}}$.

   Пример 3. $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{128-28} = \sqrt[7]{2^7-28} \approx 2 - \frac{28}{7\cdot 2^6} \approx$
   $\approx 1{,}938 \quad (a = 2; \quad x = -28)$.

Вывод. Дифференциал функции характеризуется двумя свойствами:

а) он является линейной функцией от Δx;

б) отличается от приращения функции на величину, которая при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx (т. е. $\alpha(x) \to 0$ быстрее, чем $\Delta x \to 0$).

Эти свойства позволяют для нелинейной функции проще вычислить значение $f(x)$, если $f(x_0)$ известно и $x - x_0 = \Delta x \to 0$.

Практикум 15

1. Найдите уравнение касательной к кривой $y = \left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)^6$ в точке $x_0 = 0$.

2. $y = \dfrac{2}{3-x}$. Пусть $dy = 0{,}0057$; $x_0 = 1$; $\Delta x = ?$

3. $y = f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 3x + 3}$. Вычислите $f(0{,}99) \approx ?$

4. Через точку $M\,(0; y_0)$ к кривой $y = x^2 - 1$ проведены касательные, угол между которыми равен $60°$. Найдите y_0.

5. Найдите уравнения касательных, общих к кривым $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ и $g(x) = -x^2 - 4{,}75$, и угол между ними.

6. Касательная к кривой $y = \dfrac{8}{x^2} + 3$ параллельна прямой $y = 0{,}25x + 19$. Найдите расстояние от начала координат до касательной.

7. Найдите уравнение касательных к кривой $y = \dfrac{5}{x}$, параллельной прямой $y = -4x + 3$, и найдите расстояние между ними.

8. Касательная к кривой $y = \dfrac{3}{x} - 3$ и оси координат ограничивают треугольник, один из катетов которого в 12 раз больше другого. Напишите уравнения всех таких касательных.

9. Найдите угол между кривыми $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ и $g(x) = \sqrt{4x + 3}$.

10. Касательные в точках с одинаковыми абсциссами к кривым $f(x) = 2\sqrt{5x - 1}$ и $g(x) = 5\sqrt{2x + 5}$ параллельны между собой. Напишите уравнения таких касательных.

11. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к кривой $y = \sqrt{4 - 3x}$, проведенной в точке пересечения кривой с прямой $y = x$.

12. Найдите уравнение касательной к кривой $y = -9x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 7$ в точке пересечения кривой с осью ординат.

13. Напишите уравнения взаимно перпендикулярных касательных к кривой $y = x^2$, проходящих через точку $M(1; y_o)$.

14. Найдите наибольший угол между касательными, проведенными к кривой $y = x^4 - 5x^2 + 4$ в точках пересечения кривой с осью абсцисс.

15. Выведете формулу расстояния между параллельными прямыми $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$.

Решение практикума 15

1. Найдите уравнение касательной к кривой $y=\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)^6$ в точке $x_0=0$.

$$y'=6\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)^5\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}};\qquad y'(0)=6\cdot 2^5\cdot\frac{1}{3}=64;$$

$$y(0)=\left(\sqrt[3]{0+1}+1\right)^6=64;\qquad y=64+64(x-0);$$

$$\boxed{y=64x+64}.$$

2. $y=\dfrac{2}{3-x}$. Пусть $dy=0{,}0057;\quad x_0=1;\quad \Delta x=?$

$$y'=-2(3-x)^{-2}(-1)=\frac{2}{(3-x)^2};\quad y'(1)=\frac{1}{2};$$

$$dy=y'(x_0)\cdot\Delta x;\qquad dy=\frac{1}{2}\cdot\Delta x;$$

$$\Delta x=2dy=2\cdot 0{,}0057=\boxed{0{,}0114}.$$

3. $y=f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+3}$. Вычислите $f(0,99)\approx?$

Пусть $x=0{,}99$, $x_0=1$, тогда $\Delta x=-0{,}01$, где $x=x_0+\Delta x$;

$$y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x-3}{\sqrt[4]{(x^2-3x+3)^3}};$$

$$y'(x_0)=y'(1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{\sqrt[4]{(1-3+3)^3}}=-\frac{1}{4}.$$

Учтя, что $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, получим:

$$f(0{,}99)\approx 1-\frac{1}{4}\cdot(-0{,}01)=\boxed{1{,}0025}.$$

4. Через точку $M(0;y_0)$ к кривой $y=x^2-1$ проведены касательные, угол между которыми равен 60°. Найдите y_0.

$y'=2x$ общий вид касательной $y=kx+b$ (не параллельной Oy).

Так как $M \in \Gamma\ (y = kx + b)$, то

а) $y_0 = k \cdot 0 + b$; $b = y_0$, т. е. $y = kx + y_0$;

б) $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = kx + y_0 \end{cases}$;

единственный корень возможен только при $D = 0$.

Для $x^2 - kx - y_0 - 1 = 0$; $D = k^2 + 4y_0 + 4 = 0$;

$k_1 = 2\sqrt{-y_0 - 1}$; $k_2 = -2\sqrt{-y_0 - 1}$;

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$,

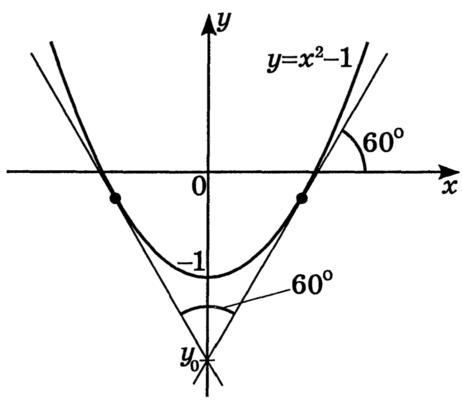
значит $\sqrt{3} = \dfrac{-4\sqrt{-y_0 - 1}}{1 + 4(y_0 + 1)}$.

Пусть $\sqrt{-y_0 - 1} = t$ $(t \geqslant 0)$, тогда $t^2 = -y_0 - 1$.

$\sqrt{3} = \dfrac{-4t}{1 - 4t^2}$; $4\sqrt{3}t^2 - 4t - \sqrt{3} = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{4\sqrt{3}}$;

$\left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \notin [0; \infty) \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$; $\sqrt{-y_0 - 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\boxed{y_0 = -1\dfrac{3}{4}}$.

Примечание. Можно проще. График $y = x^2 - 1$ симметричен относительно оси Oy, тогда касательные, проходящие через точку $(0; y_0)$, тоже симметричны относительно оси Oy. Значит угол между касательной и осью Oy равен 30°, а между касательной и осью Ox — 60° или 120°.



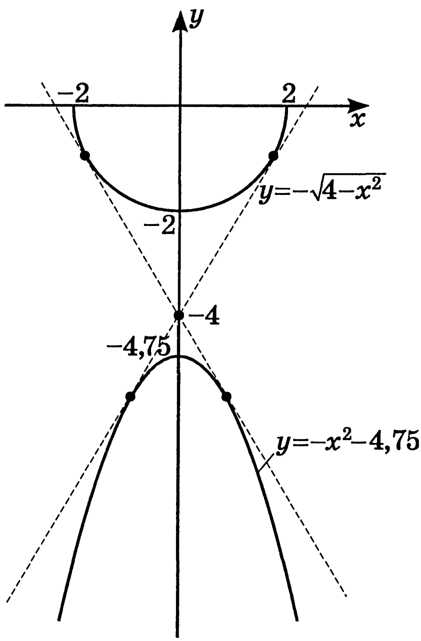
$$y'(x_0) = 2x_0 = \operatorname{tg} 60°; \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y(x_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4};$$

$$y = -\frac{1}{4} + \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$y = \sqrt{3}x - 1\frac{3}{4} \text{ при } x_0 = 0; \qquad \boxed{y_0 = -1\frac{3}{4}}.$$

5. Найдите уравнения касательных, общих к кривым $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ и $g(x) = -x^2 - 4{,}75$, и угол между ними.



$y = -\sqrt{4 - x^2}$ — уравнение полуокружности.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \leqslant 0 \end{cases}; \qquad y = kx + b \text{ — касательная.}$$

а) $\begin{cases} y = kx + b \\ y = -x^2 - 4{,}75 \end{cases}$; $\quad x^2 + kx + b + 4{,}75 = 0$;

б) $\begin{cases} y = kx + b \\ y = -\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$; $\quad -\sqrt{4 - x^2} = kx + b$;

$4 - x^2 = k^2x^2 + 2kbx + b^2$, т. е. $\left(k^2 + 1\right)x^2 + 2kbx + b^2 - 4 = 0$.

Итак, получили 2 уравнения $x^2 + kx + b + 4{,}75 = 0$ и $\left(k^2 + 1\right)x^2 + 2kbx + b^2 - 4 = 0$. Для того чтобы были общие касательные необходимо, чтобы одновременно у каждого уравнения было единственное решение, т. е. $D = 0$. $\left(k^2 + 1 \neq 0\right)$

$\begin{cases} k^2 - 4b - 19 = 0 \\ k^2b^2 - \left(k^2 + 1\right)\left(b^2 - 4\right) = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} k^2 = 4b + 19 \\ k^2b^2 - k^2b^2 - b^2 + 4k^2 + 4 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} k^2 = 4b + 19 \\ -b^2 + 4\left(4b + 19\right) + 4 = 0 \end{cases}$;

$b^2 - 16b - 80 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} b = 20 \\ b = -4 \end{array}\right.$.

в) $b = 20$ не подходит, что видно из чертежа;

$b \notin (-4,75; -2)$;

г) $b = -4 \in (-4{,}75; -2)$, тогда $k = \pm\sqrt{3}$.

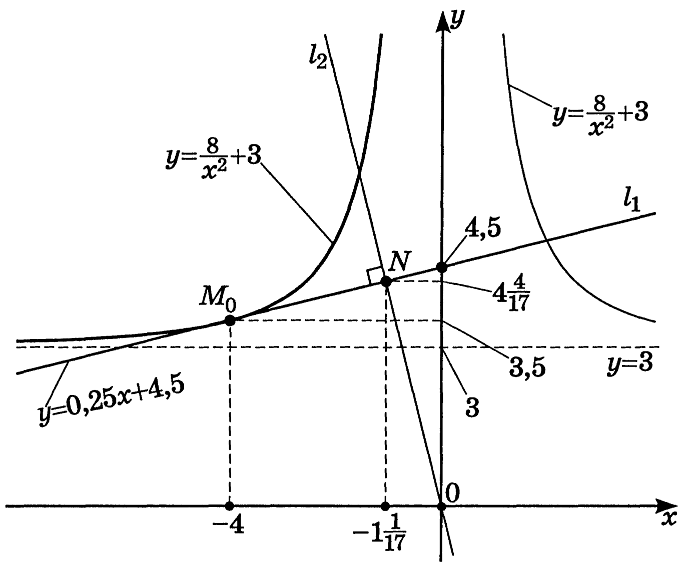
Итак, $l_1: \ y = \sqrt{3}x - 4$ и $l_2: \ y = -\sqrt{3}x - 4$.

6. Касательная к кривой $y = \dfrac{8}{x^2} + 3$ параллельна прямой $y = 0{,}25x + 19$. Найдите расстояние от начала координат до касательной.

$y' = -16x^{-3}$. Учитывая, что касательная параллельна прямой $y = 0{,}25x + 19$; $\quad k = \operatorname{tg}\varphi = 0{,}25$, получим

$-16x_0^{-3} = 0{,}25$; $\quad x_0^{-3} = -\dfrac{1}{64}$; $\quad x_0 = -4$;

$y_0 = f\left(-4\right) = \dfrac{8}{16} + 3 = 3{,}5$.



Чертеж $y = \dfrac{8}{x^2} + 3$ будем рассматривать только в левой полуплоскости.

$y = 3{,}5 + 0{,}25\,(x+4)$; $\quad l_1 :$ $\boxed{y = 0{,}25x + 4{,}5}$.

Так как необходимо найти расстояние от точки $(0;0)$ до l_1, то необходимо найди уравнение прямой $l_2 \perp l_1$, проходящей через начало координат. $l_2 : y = kx$, тогда $k = -\dfrac{1}{0{,}25} = -4$, т. е. $y = -4x$.

Найдем точку пересечения l_1 и l_2. $\begin{cases} y = 0{,}25x + 4,5 \\ y = -4x \end{cases}$;

$-4x = 0{,}25x + 4{,}5$; $\quad -4{,}25x = 4{,}5$; $\quad x = -1\dfrac{1}{17}$; $\; y = 4\dfrac{4}{17}$.

$N\left(-1\dfrac{1}{17}; 4\dfrac{4}{17}\right)$; $\quad O(0;0)$, тогда

$$ON = \sqrt{\left(-\frac{18}{17}\right)^2 + \left(\frac{72}{17}\right)^2} = \frac{9\sqrt{4+64}}{17} = \boxed{\frac{18\sqrt{17}}{17}}.$$

Чертеж лишь иллюстрирует данное решение.

7. Найдите уравнения касательных к кривой $y = \dfrac{5}{x}$, параллельных прямой $y = -4x + 3$, и найдите расстояние между ними.

$y' = \left(\dfrac{5}{x}\right)' = -5x^{-2}$. Так как $\operatorname{tg}\varphi = -4$, то $-5x_0^{-2} = -4$;

значит $x_{0_1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $x_{0_2} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

а) $y\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{5 \cdot 2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$; $\quad l_1:\ y = 2\sqrt{5} - 4\left(x - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$;

$l_1:\ \boxed{y = -4x + 4\sqrt{5}}$.

б) $y\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{5 \cdot 2}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}$; $l_2: y = -2\sqrt{5} - 4\left(x + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$;

$l_2:\ \boxed{y = -4x - 4\sqrt{5}}$.

Для того чтобы найти расстояние между l_1 и l_2, найдем уравнение прямой, перпендикулярной им.

Тогда $k = -\dfrac{1}{-4} = \dfrac{1}{4}$, т. е. $y = \dfrac{1}{4}x$.

Найдем точки пересечения с l_1 и l_2 с прямой $y = \dfrac{1}{4}x$.

а) $\begin{cases} y = -4x + 4\sqrt{5} \\ y = \dfrac{1}{4}x \end{cases}$; $\quad \dfrac{1}{4}x = -4x + 4\sqrt{5}$; $\quad 4{,}25x = 4\sqrt{5}$;

$x_1 = \dfrac{16}{17}\sqrt{5}$; $\quad y_1 = \dfrac{4}{17}\sqrt{5}$.

б) $\begin{cases} y = -4x - 4\sqrt{5} \\ y = \dfrac{1}{4}x \end{cases}$; $\quad \dfrac{1}{4}x = -4x - 4\sqrt{5}$; $\quad 4{,}25x = -4\sqrt{5}$;

$x_2 = -\dfrac{16}{17}\sqrt{5}$; $\quad y_2 = -\dfrac{4}{17}\sqrt{5}$.

Обозначим за $S(l_1; l_2)$ — расстояние между прямыми l_1 и l_2. Значит

$$S(l_1; l_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$S(l_1; l_2) = \sqrt{\left(\frac{16}{17}\sqrt{5} + \frac{16}{17}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{17}\sqrt{5} + \frac{4}{17}\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{17}\sqrt{32^2 \cdot 5 + 8^2 \cdot 5} = \frac{8}{17}\sqrt{4^2 \cdot 5 + 5} = \boxed{\frac{8\sqrt{85}}{17}}.$$

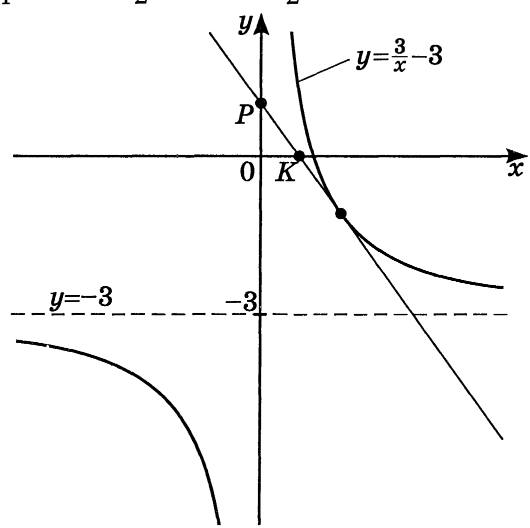
Вывод формулы $S(l_1; l_2)$ в общем виде см. на стр. 191.

8. Касательная к кривой $y = \dfrac{3}{x} - 3$ и оси координат ограничивают треугольник, один из катетов которого в 12 раз больше другого. Напишите уравнения всех таких касательных.

$y' = -3x^{-2}$.

1) $\dfrac{OP}{OK} = 12 = |\mathrm{tg}\,\varphi|$, тогда $\mathrm{tg}\,\varphi = -12$; $\quad -3x^{-2} = -12$;

$x_0^2 = \dfrac{1}{4}$; $\quad x_{0_1} = \dfrac{1}{2}$, $\quad x_{0_2} = -\dfrac{1}{2}$.



а) $x_{0_1} = \dfrac{1}{2}; \quad y_{0_1} = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} - 3 = 3;$

$l_1: \ y = 3 - 12\left(x - \dfrac{1}{2}\right); \quad \boxed{y = -12x + 9}.$

б) $x_{0_2} = -\dfrac{1}{2}; \quad y_{0_2} = \dfrac{3}{-\frac{1}{2}} - 3 = -9;$

$l_2: \ y = -9 - 12\left(x + \dfrac{1}{2}\right); \quad \boxed{y = -12x - 15}.$

2) $\dfrac{OP}{OK} = \dfrac{1}{12} = |\operatorname{tg}\varphi|$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{12}; \quad -3x^{-2} = -\dfrac{1}{12};$

$x_0^2 = 36; \quad x_{0_1} = 6; \quad x_{0_2} = -6.$

а) $x_{0_1} = 6; \quad y_{0_1} = \dfrac{3}{6} - 3 = -2,5;$

$l_3: \ y = -2{,}5 - \dfrac{1}{12}(x - 6); \quad \boxed{y = -\dfrac{1}{12}x - 2}.$

б) $x_{0_2} = -6; \quad y_{0_2} = \dfrac{3}{-6} - 3 = -3{,}5;$

$l_4: \ y = -3{,}5 - \dfrac{1}{12}(x + 6); \quad \boxed{y = -\dfrac{1}{12}x - 4}.$

Примечание. Чертеж дан условный, так как в зависимости от точек касания положение касательных разное, не совпадающее с чертежом, в том числе и в III четверти.

9. Найдите угол между кривыми $f(x) = \sqrt{3x+4}$ и $g(x) = \sqrt{4x+3}$.

Найдем точки пересечения кривых:

$\sqrt{4x+3} = \sqrt{3x+4}; \quad 4x + 3 = 3x + 4; \quad x_0 = 1.$

а) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}; \quad f'(1) = \dfrac{3}{2\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14} = k_1;$

б) $g'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+3}}; \quad g'(1) = \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2}{7}\sqrt{7} = k_2;$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{2}{7}\sqrt{7} - \frac{3\sqrt{7}}{14}}{1 + \frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{14}} = \frac{4\sqrt{7} - 3\sqrt{7}}{2\cdot(7+3)} = \frac{\sqrt{7}}{20}.$$

10. Касательные в точках с одинаковыми абсциссами к кривым $f(x) = 2\sqrt{5x-1}$ и $g(x) = 5\sqrt{2x+5}$ параллельны между собой. Напишите уравнения таких касательных.

Пусть x_0 — абсцисса точек касания.

$f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{5x-1}}$; $g'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x+5}}$. Так как касательные параллельны, то угловые коэффициенты их равны, тогда

$$\frac{5}{\sqrt{5x_0-1}} = \frac{5}{\sqrt{2x_0+5}}; \quad 5x_0 - 1 = 2x_0 + 5; \quad x_0 = 2.$$

а) Найдем уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x_0 = 2$.

$f'(2) = \dfrac{5}{3}$; $f(2) = 2 \cdot 3 = 6$; $y = 6 + \dfrac{5}{3}(x-2)$;

l_1: $\boxed{y = 1\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}}$.

б) Найдем уравнение касательной к кривой $y = g(x)$ в точке $x_0 = 2$.

$g(2) = 5 \cdot 3 = 15$; $y = 15 + \dfrac{5}{3}(x-2)$; l_2: $\boxed{y = 1\frac{2}{3}x + 11\frac{2}{3}}$.

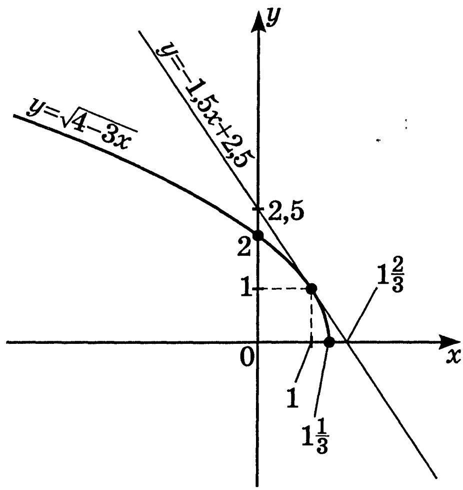
11. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к кривой $y = \sqrt{4-3x}$, проведенной в точке пересечения кривой с прямой $y = x$.

$$\sqrt{4-3x} = x; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4 - 3x = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases}; \quad x_0 = 1;$$

$y' = -\dfrac{3}{2\sqrt{4-3x}}$; $y'(1) = -\dfrac{3}{2\sqrt{4-3}} = -1,5$;

$y(1) = \sqrt{4-3} = 1$; $y = 1 - 1,5(x-1)$;

l_1: $\boxed{y = -1{,}5x + 2{,}5}$.



Найдем точки пересечения касательной с осями координат.

$y = 0;\quad x = \dfrac{2,5}{1,5};\quad x = \dfrac{5}{3}.$

$x = 0;\quad y = 2,5.$

$S = \dfrac{1}{2}\cdot 2,5\cdot\dfrac{5}{3} = \dfrac{25}{12} = \boxed{2\dfrac{1}{12}}.$

12. Найдите уравнение касательной к кривой $y = -9x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 7$ в точке пересечения кривой с осью ординат.

$y\,(0) = -9\cdot 0 + 2\cdot 1^2 - 2\cdot 0 + 7 = 9;\qquad y = y(0) + y'(0)(x-0);$

$y' = -9 - 4\sin x\cos x - 4\cos x\sin x;\qquad y' = -9 - 4\sin 2x;$

$y'\,(0) = -9;\ \boxed{y = -9x + 9}.$

13. Напишите уравнение взаимно перпендикулярных касательных к кривой $y = x^2$, проходящих через точку $M\,(1; y_0)$.

$l:\ y = kx + b;\quad M\,(1; y_0) \in \Gamma\ \ (y = kx + b)$, тогда

$y_0 = k\cdot 1 + b$, т. е. $b = y_0 - k$.

Значит $y = kx + y_0 - k$, $\quad \begin{cases} y = kx + y_0 - k \\ y = x^2 \end{cases};$

$x^2 = kx + y_0 - k; \quad x^2 - kx - y_0 + k = 0.$

Если $D = 0$, $k^2 - 4k + 4y_0 = 0;$

$k_1 = 2 + 2\sqrt{1 - y_0}$, а $k_2 = 2 - 2\sqrt{1 - y_0}$,

но касательные взаимно перпендикулярны, значит

$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}; \quad 2 + 2\sqrt{1 - y_0} = -\dfrac{1}{2 - 2\sqrt{1 - y_0}};$

$4 - 4(1 - y_0) = -1; \quad y_0 = -\dfrac{1}{4}.$

Отсюда следует, что:

а) $k_1 = 2 + 2\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = 2 + \sqrt{5}$, тогда $b = -2,25 - \sqrt{5}$,

т. е. $l_1 : \boxed{y = \left(2 + \sqrt{5}\right) x - 2,25 - \sqrt{5}}.$

б) $k_2 = 2 - \sqrt{5}$, тогда $b = -2{,}25 + \sqrt{5}$,

т. е. $l_2 : \boxed{y = \left(2 - \sqrt{5}\right) x - 2{,}25 + \sqrt{5}}.$

14. Найдите наибольший угол между касательными, проведенными к кривой $y = x^4 - 5x^2 + 4$ в точках пересечения кривой с осью абсцисс.

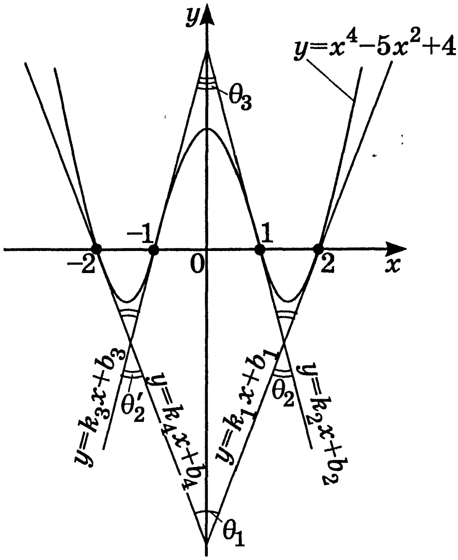
$$y = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.; \qquad y' = 4x^3 - 10x.$$

$k_1 = y'(2) = 4 \cdot 8 - 10 \cdot 2 = 12;$

$k_2 = y'(1) = 4 \cdot 1 - 10 \cdot 1 = -6;$

$k_3 = y'(-1) = -4 + 10 = 6;$

$k_4 = y'(-2) = 4(-8) - 10(-2) = -12;$



$$\operatorname{tg}\theta_1 = \left|\frac{k_1 - k_4}{1 + k_1k_4}\right| = \left|\frac{12+12}{1-144}\right| = \frac{24}{143};$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{-6-12}{1-6\cdot 12}\right| = \frac{18}{71};$$

$$\operatorname{tg}\theta_3 = \left|\frac{k_2 - k_3}{1 + k_2k_3}\right| = \left|\frac{-6-6}{1-6\cdot 6}\right| = \frac{12}{35};$$

$$\operatorname{tg}\theta_4 = \left|\frac{k_2 - k_4}{1 + k_2k_4}\right| = \left|\frac{-6+12}{1+6\cdot 12}\right| = \frac{6}{73}.$$

Примечание. $\operatorname{tg}\theta_2' = \left|\dfrac{k_3 - k_4}{1 + k_3\cdot k_4}\right| = \dfrac{18}{71}$,

$$\operatorname{tg}_{\theta_4'} = \left|\frac{k_3 - k_1}{1 + k_3k_1}\right| = \left|\frac{6-12}{1+6\cdot 12}\right| = \frac{6}{73}.$$

$\theta_2 = \theta_2'$ и $\theta_4 = \theta_4'$ в силу четности $y = f(x)$, а значит и симметричности графика $y = f(x)$ относительно оси Oy.

Так как $\operatorname{tg}\theta_3 > \operatorname{tg}\theta_2 > \operatorname{tg}\theta_1 > \operatorname{tg}\theta_4$, $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1 > \theta_4$ $\left(y = \operatorname{tg}x \uparrow \text{ на } \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, тогда $\theta_3 = \operatorname{arctg}\dfrac{12}{35}$ — наибольший угол между касательными.

15. Выведите формулу расстояния между параллельными прямыми $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$.

Найдем уравнения прямой перпендикулярной, этим параллельным прямым. Так как $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ (для взаимно перпендикулярных прямых), то $y = -\frac{1}{k}x$ — такая прямая.

Найдем точки пересечения с этими прямыми:

а) $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y = kx + b_1 \end{cases}$; $\quad -\frac{1}{k}x = kx + b_1; \quad x\left(k + \frac{1}{k}\right) = -b_1;$

$x = -\frac{kb_1}{k^2+1}$, тогда $y = -\frac{1}{k}\left(-\frac{kb_1}{1+k^2}\right) = \frac{b_1}{k^2+1}$;

$A\left(-\frac{kb_1}{k^2+1}; \frac{b_1}{k^2+1}\right)$.

б) $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y = kx + b_2 \end{cases}$;

по аналогии $x = -\frac{kb_2}{k^2+1}; \quad y = \frac{b_2}{k^2+1}$;

$B\left(-\frac{kb_2}{k^2+1}; \frac{b_2}{k^2+1}\right)$.

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — формула расстояния между двумя точками.

$$AB = \sqrt{\left(\frac{kb_2 - kb_1}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b_2 - b_1}{k^2+1}\right)^2} = \frac{|b_2 - b_1|\sqrt{k^2+1}}{k^2+1}.$$

Итак, $\boxed{AB = \frac{|b_2 - b_1|\sqrt{k^2+1}}{k^2+1}}$ — формула расстояния между прямыми $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$.

Тренировочная работа 4

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.

1) $y = x^2 - 3x; \quad x_0 = 0{,}5;$

2) $y = \dfrac{1}{x^3} + 3; \ x_0 = -\dfrac{1}{3};$

3) $y = \sqrt{x^2+1}; \quad x_0 = -3;$

4) $y = \dfrac{\sqrt{2x}}{x-3}; \ x_0 = 2;$

5) $y = \dfrac{\cos x}{\pi - x}; \ x_0 = \dfrac{\pi}{3};$

6) $y = (2x+1)\,e^{x+1}; \quad x_0 = 1;$

7) $y = \left(x^3 + 3x^2 - 4x + 1\right)\left(2\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right); \quad x_0 = 1;$

8) $y = \dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}; \ x_0 = -1.$

2. Напишите уравнение касательной к кривой, если

1) касательная к кривой $y = -2x^2 + 3x - 5$ параллельна прямой $y = 7x - 6$;

2) касательная к кривой $y = -\sqrt{2x+1}$ перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$;

3) касательные к кривым $f(x) = x^3 - x$ и $\varphi(x) = \dfrac{12}{x}$ проведены в точке их пересечения, и найдите угол между ними;

4) касательная к кривой $y = -2x^2 + 4x - 3$ проходит через точку $A\,(1;7)$;

5) касательная к кривым $f(x) = x^2 - 4x + 8$ и $\varphi(x) = x^2 - 8x + 4$ является общей.

3. Вычислите приближенное значение функции

1) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + x - 1}; \quad f\,(0{,}99) \approx ?$

2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}; \quad f\,(2{,}01) \approx ?$

Решение тренировочной работы 4

1. Напишите уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.

1) $y = x^2 - 3x; \quad x_0 = 0,5;$

$$y' = 2x - 3; \quad y'(0,5) = 2 \cdot 0,5 - 3 = -2;$$

$$y(0,5) = \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1\frac{1}{4};$$

$$y = -1\frac{1}{4} + (-2)\left(x - \frac{1}{2}\right); \quad y = \boxed{-2x - \frac{1}{4}}.$$

2) $y = \dfrac{1}{x^3} + 3;$

$$x_0 = -\frac{1}{3}; \quad y' = -3x^{-4};$$

$$y'\left(-\frac{1}{3}\right) = -3\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = -3 \cdot 3^4 = -243;$$

$$y\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + 3 = -3^3 + 3 = -24;$$

$$y = -24 + (-243)\left(x + \frac{1}{3}\right); \quad \boxed{y = -243x - 105}.$$

3) $y = \sqrt{x^2 + 1}; \quad x_0 = -3;$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y'(-3) = \frac{-3}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{10}\sqrt{10}; \quad y(-3) = \sqrt{10};$$

$$y = \sqrt{10} + \left(-\frac{3}{10}\sqrt{10}\right)(x+3);$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{10}\sqrt{10}x + \frac{1}{10}\sqrt{10}}.$$

4) $y = \dfrac{\sqrt{2x}}{x-3}; \quad x_0 = 2;$

$$y' = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x}}(x-3) - 1\cdot\sqrt{2x}}{(x-3)^2} = \frac{x-3-2x}{(x-3)^2\sqrt{2x}} =$$

$$= -\frac{x+3}{(x-3)^2\sqrt{2x}};$$

$$y'(2) = -\frac{5}{2}; \quad y(2) = -2; \quad y = -2 - \frac{5}{2}(x-2);$$

$\boxed{y = -2{,}5x + 3}$.

5) $y = \dfrac{\cos x}{\pi - x}; \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3};$

$$y' = \frac{-\sin x(\pi - x) + \cos x}{(\pi - x)^2};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}}{\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{4}{9}\pi^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}\pi + 4{,}5}{4\pi^2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\pi - \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4\pi}; \quad y = \frac{3}{4\pi} + \frac{-3\sqrt{3}\pi + 4{,}5}{4\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\boxed{y = \frac{-3\sqrt{3}\pi + 4{,}5}{4\pi^2}x + \frac{\sqrt{3}\pi + 1{,}5}{4\pi}}.$$

6) $y = (2x+1)e^{x+1}; \quad x_0 = 1;$

$y' = 2e^{x+1} + (2x+1)e^{x+1} = (2x+3)e^{x+1};$

$y'(1) = 5e^2; \quad y(1) = 3e^2;$

$y = 3e^2 + 5e^2(x-1); \quad \boxed{y = 5e^2x - 2e^2}$.

7) $y=\left(x^3+3x^2-4x+1\right)\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right);\quad x_0=1;$

$$y'=\left(3x^2+6x-4\right)\frac{2x-1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)\times$$
$$\times\left(x^3+3x^2-4x+1\right);$$

$y'(1)=5\cdot 1+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 1=6{,}5;\qquad y(1)=1\cdot 1=1;$

$y=1+6{,}5\,(x-1);\qquad \boxed{y=6{,}5x-5{,}5}.$

8) $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}};\qquad x_0=-1;$

$$y'=\frac{9x^2\cdot x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^4}}-\frac{\left(1\cdot\sqrt[3]{(2+x^3)^2}+\dfrac{2x\cdot 3x^2}{3\sqrt[3]{(2+x^3)}}\right)\cdot(4+3x^3)}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^4}}=$$

$$=\frac{9x^3\left(2+x^3\right)-\left(2+x^3+2x^3\right)\left(4+3x^3\right)}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}=$$

$$=\frac{18x^3+9x^6-9x^6-18x^3-8}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}=-\frac{8}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}};$$

$y'(-1)=8;\qquad y(-1)=-1;\qquad y=-1+8\,(x+1);$

$\boxed{y=8x+7}.$

2. Напишите уравнение касательной к кривой, если

1) касательная к кривой $y=-2x^2+3x-5$ параллельна прямой $y=7x-6$.

$y'=-4x+3$ — угловой коэффициент прямой равен 7, значит $-4x+3=7$; $x_0=-1$ — абсцисса точки касания. $y(-1)=-2(-1)^2+3(-1)-5=-10;\quad y=-10+7(x+1);$

$\boxed{y=7x-3}.$

2) касательная к кривой $y = -\sqrt{2x+1}$ перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$.

$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Так как касательная перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$ или $y = 2x - 1$, то угловой коэффициент касательной равен $-\dfrac{1}{2}$ $\left(k_2 = -\dfrac{1}{k_1}\right)$, значит

$-\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} = -\dfrac{1}{2}$; $\sqrt{2x+1} = 2$;

$2x + 1 = 4$; $x_0 = 1,5$.

$y(1,5) = -\sqrt{2 \cdot 1,5 + 1} = -2$; $y = -2 + (-0,5)(x - 1,5)$;

$\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x - 1\dfrac{1}{4}}$.

3) касательные к кривым $f(x) = x^3 - x$ и $\varphi(x) = \dfrac{12}{x}$ проведены в точке их пересечения, и найдите угол между ними.

Решим уравнение $f(x) = \varphi(x)$.

$x^3 - x = \dfrac{12}{x}$; $x^4 - x^2 - 12 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -3 \quad \emptyset \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

а) Пусть $x_0 = 2$.

$f'(x) = 3x^2 - 1$; $f'(2) = 11$; $k_1 = 11$;

$f(2) = 6$; $y = 6 + 11(x - 2)$; $\boxed{y = 11x - 16}$.

$\varphi'(x) = -\dfrac{12}{x^2}$; $\varphi'(2) = -3$; $k_2 = -3$; $\varphi(2) = 6$;

$y = 6 + (-3)(x - 2)$; $\boxed{y = -3x + 12}$;

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$; $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{-3 - 11}{1 + 11(-3)} = \dfrac{7}{16}$.

$\boxed{\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{7}{16}}$ — угол между кривыми в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

б) Пусть $x_0 = -2$. $f'(-2) = 11$; $k_3 = 11$; $f(-2) = -6$;
$y = -6 + 11(x+2)$; $\boxed{y = 11x + 16}$.
$\varphi'(-2) = -3$; $k_4 = -3$; $\varphi(-2) = -6$;
$y = -6 + (-3)(x+2)$; $\boxed{y = -3x - 12}$;
$\boxed{\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{7}{16}}$ — угол тот же, так как угловые коэффициенты одинаковые.

Примечание. Так как функции $y = f(x)$ и $g(x)$ нечетные, то их графики центрально-симметричны относительно начала координат, так же как и их точки пересечения. Результат равенства углов в этих точках вполне предсказуем.

4) касательная к кривой $y = -2x^2 + 4x - 3$ проходит через точку $A(1;7)$.

Пусть $y = kx + b$ — касательная, тогда, так как точка $A \in \Gamma(y = kx + b)$, то $7 = k \cdot 1 + b$; $b = 7 - k$. Касательная будет иметь вид $y = kx + 7 - k$. Учитывая, что касательная в данном случае может иметь только одну общую точку с кривой, решим уравнение $-2x^2 + 4x - 3 = kx + 7 - k$, которое должно иметь только один корень.

После преобразования получим уравнение
$2x^2 - (4-k)x + 10 - k = 0$;
$D = (4-k)^2 - 8(10-k) = 0$,
тогда $16 - 8k + k^2 - 80 + 8k = 0$; $k^2 = 64$ $\left[\begin{array}{l} k = 8 \\ k = -8 \end{array}\right.$,
значит при $k = 8$ $\boxed{y = 8x - 1}$;
при $k = -8$ $\boxed{y = -8x + 15}$.

5) касательная к кривым $f(x) = x^2 - 4x + 8$ и $\varphi(x) = x^2 - 8x + 4$ является общей, найдите ее.

Пусть $y = kx + b$ — общая касательная, тогда с каждой их кривых она имеет только одну общую точку, значит каждое из уравнений $x^2 - 4x + 8 = kx + b$ и $x^2 - 8x + 4 = kx + b$ имеет только один корень.

$x^2-(4+k)x+8-b=0;\quad (D=0)\quad (4+k)^2-4(8-b)=0;$

$x^2-(8+k)x+4-b=0;\quad (D=0)\quad (8+k)^2-4(4-b)=0,$

но это должно выполняться одновременно.

$$\begin{cases}(4+k)^2-4(8-b)=0\\(8+k)^2-4(4-b)=0\end{cases};\qquad \boxed{2}-\boxed{1}$$

$$\begin{cases}(4+k)^2-32+4b=0\\(8+k)^2-(4+k)^2-16+4b+32-4b=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}4b=32-(4+k)^2\\(8+k+4+k)(8+k-4-k)+16=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}b=8-\dfrac{1}{4}(4+k)^2\\8(k+6)=-16\end{cases};\qquad \begin{cases}b=8-\dfrac{1}{4}(4-8)^2\\k=-8\end{cases};$$

$$\begin{cases}b=4\\k=-8\end{cases};\qquad \boxed{y=-8x+4}.$$

3. Вычислите приближенное значение функции

1) $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+x-1};\quad f(0{,}99)\approx ?$

Пусть $x=0{,}99$,

тогда $\Delta x=x-x_0$, где $x_0=1$, тогда $\Delta x=-0{,}01$;

$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$.

$$y'=\frac{(2x-4)\left(x^2+x-1\right)-(2x+1)\left(x^2-4x+1\right)}{\left(x^2+x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-2x^2-6x+4-2x^3+7x^2+2x-1}{\left(x^2+x-1\right)^2}=$$

$$=\frac{5x^2-4x+3}{\left(x^2+x-1\right)^2};$$

$$y'(1)=\frac{5-4+3}{(1+1-1)^2}=4;\quad y(1)=\frac{1-4+1}{1+1-1}=-2;$$

$f(0{,}99)\approx -2+4(-0{,}01)$ значит $\boxed{f(0{,}99)\approx -2{,}04}$.

2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}; \quad f\,(2{,}01) \approx ?$

Пусть $x = 2{,}01$; $x_0 = 2$, тогда $\Delta x = 0{,}01$;

$$y' = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2 + 1)^2}};$$

$$y'(2) = \frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot 2}{3\sqrt[3]{(2^3 - 2 \cdot 4 + 1)^2}} = \frac{4}{3};$$

$$y(2) = \sqrt[3]{8 - 8 + 1} = 1;$$

$$f(2{,}01) \approx 1 + \frac{4}{3} \cdot 0{,}01;$$

$$f(2{,}01) \approx 1\frac{4}{300} \approx 1{,}01(3),$$

т. е. $\boxed{f(2{,}01) \approx 1{,}01}$.

Тренировочная работа 5

1. Найдите уравнение касательной к графику кривой $y=\left(\sqrt[3]{3x-4}+2\right)^5$ в точке $x_0=1$.

2. $y=\ln\sqrt{1+x^2}$; $x_0=2$; $dy=-0{,}008$. Найдите Δx.

3. $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2+2x+3}$; $f\,(0,98)\approx ?$

4. Напишите уравнения касательных к графику кривой $y=-6\operatorname{tg}x+5$, параллельных прямой $y=-6x-5$.

5. Касательные в точках касания с одинаковыми абсциссами к графикам кривых $f(x)=(5x+2)\,e^{2x}$ и $g(x)=(7x-4)\,e^{2x}$ параллельны. Напишите уравнения этих касательных.

6. Касательные к графику кривой $y=\dfrac{4}{x^2}$ взаимно перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит оси ординат. Напишите уравнения этих касательных.

7. Касательная к графику кривой $y=14^x-1$ перпендикулярна прямой $y=-x\log_{14}e+4$. Найдите координаты точки касания и напишите уравнение этой касательной.

8. Напишите уравнение касательной и нормали к графику кривой $y=x^3+2x-1$ в точке пересечения с кривой $y=2x^2$.

9. Найдите расстояние между касательными, проведенными к графику кривой $y=x^3-3x$ в точках пересечения ее с осью абсцисс.

10. Найдите угол между кривыми $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ и $g(x)=\sqrt{x+5}$.

11. Найдите площадь треугольника, ограниченного касательными к графикам кривых $f(x)=7\cdot 18^{x+2}$ и $g(x)=6\cdot 21^{x+2}$ в точке их пересечения и осью ординат.

12. Найдите расстояние между параллельными касательными к графикам кривых $f(x) = \ln 81 \cdot \log_3 (3x - 2) - 1$ и $g(x) = \ln \frac{1}{125} \cdot \log_5 (5 - 4x) + 2$ в точках с одинаковыми абсциссами.

13. Напишите уравнения общих касательных к графикам кривых $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = -x^2 - 5x - 6$ и угол между ними.

14. К графику кривой $y = \frac{1}{4}x^2$ проведены взаимно перпендикулярные касательные. Найдите уравнение кривой, которой принадлежат все точки, из которых кривая видна под углом в $90°$.

Решение тренировочной работы 5

1. Найдите уравнение касательной к графику кривой $y = \left(\sqrt[3]{3x-4}+2\right)^5$ в точке $x_0 = 1$.

$$y' = 5\left(\sqrt[3]{3x-4}+2\right)^4 \left(\frac{1\cdot 3}{3\sqrt[3]{(3x-4)^2}}\right);$$

$$y'(1) = 5(-1+2)^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2}} = 5; \quad y(1) = \left(\sqrt[3]{3\cdot 1-4}+2\right)^5 = 1;$$

$$y = 1 + 5(x-1); \qquad \boxed{y = 5x-4}.$$

2. $y = \ln\sqrt{1+x^2}$; $\quad x_0 = 2$; $\quad dy = -0{,}008$. Найдите Δx.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}; \quad y'(2) = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Так как $dy = f'(x_0)\,\Delta x$, то $\Delta x = \dfrac{-0{,}008}{0{,}4} = -0{,}02$.

3. $y = \dfrac{x^2-3x}{x^2+2x+3}$; $\quad f(0{,}98) \approx ?$

$$y' = \frac{(2x-3)\left(x^2+2x+3\right) - (2x+2)\left(x^2-3x\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+x^2-9-2x^3+4x^2+6x}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \frac{5x^2+6x-9}{\left(x^2+2x+3\right)^2}.$$

Пусть $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = -0{,}02$.

Так как $\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$, то вычислим

$$y(1) = \frac{1-3}{1+2+3} = -\frac{1}{3}; \quad y'(1) = \frac{5+6-9}{(1+2+3)^2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18};$$

$$f(x) \approx -\frac{1}{3} + \frac{1}{18}(-0{,}02) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{100} = \frac{-300-1}{900} = -\frac{301}{900},$$

т. е. $f(x) \approx \boxed{-\dfrac{301}{900}}$ с точностью до одной сотой.

4. Напишите уравнения касательных к графику кривой $y = -6\operatorname{tg} x + 5$, параллельных прямой $y = -6x - 5$.

$y' = -\dfrac{6}{\cos^2 x}$, так как $y'(x_0) = -6$, то $-\dfrac{6}{\cos^2 x} = -6$,

т. е. $\cos^2 x = 1$; $\quad x_0 = \pi k$;

$y(\pi k) = -6\operatorname{tg}(\pi k) + 5 = 5$; $\quad y = 5 + (-6)(x - \pi k)$;

$\boxed{y = -6x + 6\pi k + 5} \mid k \in \mathbb{Z}$.

Учтем, что это множество всех уравнений касательных к графику кривой $y = -6\operatorname{tg} x + 5$, параллельных прямой $y = -6x - 5$.

5. Касательные в точках касания с одинаковыми абсциссами к графикам кривых $f(x) = (5x + 2)e^{2x}$ и $g(x) = (7x - 4)e^{2x}$ параллельны. Напишите уравнения этих касательных.

$f'(x) = 5e^{2x} + 2(5x + 2)e^{2x} = e^{2x}(10x + 9)$;

$g'(x) = 7e^{2x} + 2(7x - 4)e^{2x} = e^{2x}(14x - 1)$.

Так как касательные параллельны в точках с одинаковыми абсциссами, то $f'(x_0) = g'(x_0)$,

т. е. $e^{2x_0}(10x_0 + 9) = e^{2x_0}(14x_0 - 1)$; $10x_0 + 9 = 14x_0 - 1$;

$x_0 = 2\frac{1}{2}$.

1) $f(2,5) = (14,5)e^5$; $\quad f'(2,5) = 34e^5$;
   $y = 14,5e^5 + 34e^5(x - 2,5)$; $\quad \boxed{y = 34e^5x - 70,5e^5}$.

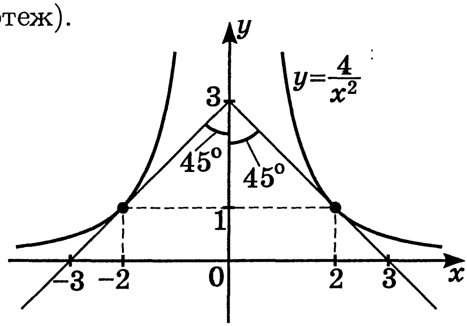
2) $g(2,5) = (7 \cdot 2,5 - 4)e^5 = 13,5e^5$;
   $g'(2,5) = (14 \cdot 2,5 - 1)e^5 = 34e^5$,
   тогда $y = 13,5e^5 + 34e^5(x - 2,5)$; $\quad \boxed{y = 34e^5x - 71,5e^5}$.

6. Касательные к графику кривой $y = \dfrac{4}{x^2}$ взаимно перпендикулярны, а точка их пересечения принадлежит оси ординат. Напишите уравнения этих касательных.

$y' = -8x^{-3}$.

1) Так как $y = x^{-2}$ — четная функция, то ее график симметричен относительно оси Oy.

Известно, что график функции $y = \dfrac{4}{x^2}$ выглядит так (см. чертеж).



2) Так как точка пересечения касательных принадлежит оси Oy и касательные проведены к графику четной функции, то угол касательных с осью Oy равен 45°. Тогда $|\operatorname{tg}\varphi| = 1$.

3) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, значит $-8x_0^{-3} = 1$; $x_0 = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$, т. е. $x_0 = -2$; $y(-2) = \dfrac{4}{(-2)^2} = 1$; $y = 1 + 1\cdot(x+2)$; $\boxed{y = x+3}$ в точке $x_0 = -2$.

4) $\operatorname{tg}\varphi = -1$, значит $-8x_0^{-3} = -1$; $x_0 = \sqrt[3]{8} = 2$, т. е. $x_0 = 2$; $y(2) = \dfrac{4}{2^2} = 1$;
$y = 1 + (-1)(x-2)$; $\boxed{y = -x+3}$ в точке $x_0 = 2$.

7. Касательная к графику кривой $y = 14^x - 1$ перпендикулярна прямой $y = -x\log_{14} e + 4$. Найдите координаты точки касания и напишите уравнение этой касательной.

Пусть $y = ax+b$ касательная к графику кривой $y = 14^x - 1$, тогда $a = -\dfrac{1}{-\log_{14} e} = \ln 14$ (так как прямые $\perp$).

$y' = (14^x - 1)' = 14^x \ln 14$, значит $\ln 14 = 14^{x_0}\ln 14$, тогда $14^{x_0} = 1$, $x_0 = 0$. $y(0) = 14^0 - 1 = 0$; $y = 0 + \ln 14(x-0)$, т. е. $\boxed{y = \ln 14 \cdot x}$, где точка касания $(0;0)$.

8. Напишите уравнение касательной и нормали к графику кривой $y=x^3+2x-1$ в точке пересечения с кривой $y=2x^2$.

$x^3+2x-1=2x^2$. Пусть $\varphi(x)=x^3-2x^2+2x-1$.

Так как $\varphi(1)=0$, то $\varphi(x) \,\vdots\, (x-1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3-2x^2+2x-1 & x-1 \\
\underline{x^3-\ \ x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-x+1} \qquad (D<0) \\
-\ -x^2+2x\quad & \\
\underline{-x^2+\ x\quad} & \\
-\ x-1 & \\
\underline{x-1} &
\end{array}
$$

Таким образом, только $x_0=1$ — абсцисса точки пересечения.

Пусть $f(x)=x^3+2x-1$; $f(1)=1+2-1=2$; $f'(x)=3x^2+2$; $f'(1)=3\cdot 1+2=5$; $y=2+5(x-1)$; $\boxed{y=5x-3}$.

Нормаль — это прямая, перпендикулярная касательной прямой в точке x_0. Тогда $k=-\frac{1}{5}$ (условие перпендикулярности $k_2=-\frac{1}{k_1}$), значит $y=2-\frac{1}{5}(x-1)$; $\boxed{y=-\frac{1}{5}x+2{,}2}$.

9. Найдите расстояние между касательными, проведенными к графику кривой $y=x^3-3x$ в точках пересечения ее с осью абсцисс.

Примечание. Понятие расстояния между прямыми в плоскости можно ввести только для параллельных прямых.

$$y=0;\quad x^3-3x=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=0 \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$y'=\left(x^3-3x\right)'=3x^2-3$; $\quad y'\left(\sqrt{3}\right)=3\cdot 3-3=6$;

$y'(0)=-3$; $\quad y'\left(-\sqrt{3}\right)=3\cdot 3-3=6$,

тогда только касательные в точке $x_0=\sqrt{3}$ и точке $x_0=-\sqrt{3}$ — параллельны.

а) $y = 6\left(x - \sqrt{3}\right);$

$\boxed{y = 6x - 6\sqrt{3}}$: l_1 — касательная в точке $x_0 = \sqrt{3}$.

б) $y = 6\left(x + \sqrt{3}\right);$

$\boxed{y = 6x + 6\sqrt{3}}$: l_2 — касательная в точке $x_0 = -\sqrt{3}$.

Найдем уравнение прямой, перпендикулярной касательной: $k = -\frac{1}{6}$, тогда $y = -\frac{1}{6}x$ — $(l_3 \perp l_1)$.

Затем найдем точки пересечения этих прямых.

в) $\begin{cases} y = -\frac{1}{6}x \\ y = 6x - 6\sqrt{3} \end{cases}; \quad -\frac{1}{6}x = 6x - 6\sqrt{3}; \quad 6\frac{1}{6}x = 6\sqrt{3};$

$x_1 = \frac{36\sqrt{3}}{37}; \quad y_1 = -\frac{6\sqrt{3}}{37}; \quad A\left(\frac{36\sqrt{3}}{37}; -\frac{6\sqrt{3}}{37}\right).$

г) $\begin{cases} y = -\frac{1}{6}x \\ y = 6x + 6\sqrt{3} \end{cases}; \quad -\frac{1}{6}x = 6x + 6\sqrt{3};$

$x_2 = -\frac{36\sqrt{3}}{37}; \quad y_2 = \frac{6\sqrt{3}}{37}; \quad B\left(-\frac{36\sqrt{3}}{37}; \frac{6\sqrt{3}}{37}\right).$

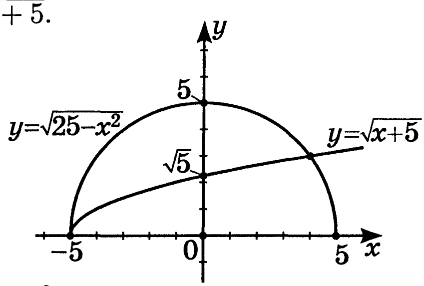
$$AB = \sqrt{\left(\frac{36\sqrt{3}}{37} + \frac{36\sqrt{3}}{37}\right)^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{37} + \frac{6\sqrt{3}}{37}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(72\sqrt{3}\right)^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2}}{37} = \frac{12\sqrt{6^2 \cdot 3 + 3}}{37} = \frac{12\sqrt{111}}{37}.$$

Можно было сразу найти, если помнить, что

$$S\left(l_1; l_2\right) = \frac{|b_2 - b_1|\sqrt{k^2 + 1}}{k^2 + 1}.$$

10. Найдите угол между кривыми $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ и $g(x)=\sqrt{x+5}$.



$$D(f):\begin{cases}25-x^2\geqslant 0\\ x+5\geqslant 0\end{cases};\qquad -5\leqslant x\leqslant 5.$$

$$\sqrt{25-x^2}=\sqrt{x+5};\quad 25-x^2=x+5;\quad x^2+x-20=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=4\end{array}\right.\in D(f).\quad f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}};\quad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}.$$

а) $x_0=4;\quad f'(4)=\dfrac{-4}{\sqrt{25-16}}=-\dfrac{4}{3};\quad g'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4+5}}=\dfrac{1}{6};$

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}\left(-\frac{4}{3}\right)}\right|=1\frac{13}{14};\quad \boxed{\theta=\operatorname{arctg}1\frac{13}{14}}.$$

б) В точке $x_0=-5$ не существует $f'(-5)$ и $g'(-5)$, тогда в точке $x_0=-5$ касательные параллельны (т. е. совпадают), так как они перпендикулярны оси Ox.

11. Найдите площадь треугольника, ограниченного касательными к графикам кривых $f(x)=7\cdot 18^{x+2}$ и $g(x)=6\cdot 21^{x+2}$ в точке их пересечения и осью ординат.

Найдем точку пересечения.

$g(x)=f(x);\quad 7\cdot 18^{x+2}=6\cdot 21^{x+2};$

$$\left(\frac{18}{21}\right)^{x+2}=\frac{6}{7};\quad \left(\frac{6}{7}\right)^{x+2}=\left(\frac{6}{7}\right)^{1};\quad x+2=1;\quad x_0=-1.$$

$f'(x)=7\cdot 18^{x+2}\ln 18;\quad g'(x)=6\cdot 21^{x+2}\ln 21.$

Напишем уравнения касательных к кривым в этой точке.

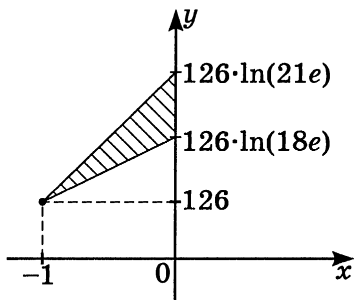
а) $f(-1) = 7 \cdot 18^{-1+2} = 7 \cdot 18 = 126;$
$f'(-1) = 7 \cdot 18^{-1+2} \cdot \ln 18 = 126 \cdot \ln 18;$
$y = 126 + 126 \ln 18(x+1);$
$l_1 : \boxed{y = 126 \ln 18 \cdot x + 126 \ln(18e)}.$

б) $g(-1) = 6 \cdot 21^{-1+2} = 6 \cdot 21 = 126;$
$g'(-1) = 6 \cdot 21^{-1+2} \cdot \ln 21 = 126 \cdot \ln 21;$
$y = 126 + 126 \ln 21(x+1);$
$l_2 : \boxed{y = 126 \ln 21 \cdot x + 126 \ln(21e)}.$

Рассмотрим только графики касательных к кривым в точке их пересечения. Найдем точки пересечения касательных с осью ординат.

в) $x = 0; \quad y = 126 \ln(18e) \quad l_1.$

г) $x = 0; \quad y = 126 \ln(21e) \quad l_2.$



Тогда $S_\Delta = \frac{1}{2}(126 \ln(21e) - 126 \ln(18e)) \cdot 1$, так как высота данного треугольника равна 1. $\boxed{S_\Delta = 63 \ln \frac{7}{6}}.$

12. Найдите расстояние между параллельными касательными к графикам кривых $f(x) = \ln 81 \cdot \log_3(3x-2) - 1$ и $g(x) = \ln \frac{1}{125} \cdot \log_5(5-4x) + 2$ в точках с одинаковыми абсциссами.

Известно, что содержательный смысл понятия расстояния определен только для параллельных прямых. А у параллельных прямых их угловые коэффициенты равны.

$$f'(x) = \ln 81 \cdot \frac{3}{3x-2} \log_3 e; \quad g'(x) = \ln \frac{1}{125} \cdot \frac{-4}{5-4x} \log_5 e.$$

Так как $\ln 81 \cdot \log_3 e = 4$; $\ln \frac{1}{125} \log_5 e = -3$,

$$\left(\log_a b \cdot \log_b a = 1; \quad \ln 81 = 4 \ln 3; \quad \ln \frac{1}{125} = -3 \ln 5\right)$$

то $\dfrac{3 \cdot 4}{3x_0 - 2} = \dfrac{(-4)(-3)}{5 - 4x_0}$; $5 - 4x_0 = 3x_0 - 2$; $x_0 = 1$.

Напишем уравнения касательных.

а) $f(1) = \ln 81 \cdot \log_3 1 - 1 = -1$; $f'(1) = 4 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{3 \cdot 1 - 2} = 12$;

$y = -1 + 12(x-1)$; $\boxed{y = 12x - 13}$.

б) $g(1) = \ln \dfrac{1}{125} \cdot \log_5 (5 - 4 \cdot 1) + 2 = 0 + 2 = 2$;

$g'(1) = 12$; $y = 2 + 12(x-1)$; $\boxed{y = 12x - 10}$.

Найдем по формуле расстояние. $AB = \dfrac{|b_2 - b_1| \sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$;

$$AB = \frac{|13 - 10| \sqrt{12^2+1}}{12^2+1} = \frac{3\sqrt{145}}{145}$$ (см. с. 189).

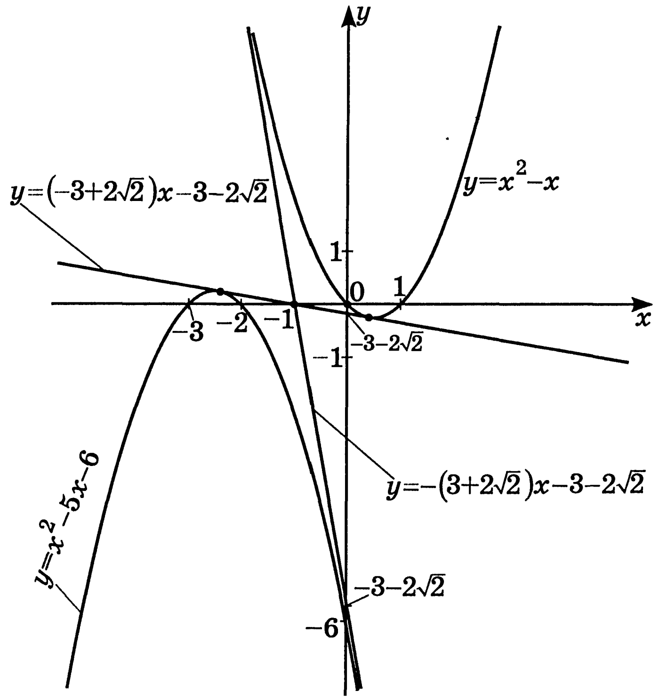
13. Напишите уравнения общих касательных к графикам кривых $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = -x^2 - 5x - 6$ и угол между ними.

Пусть $y = ax + b$ — касательная, тогда

а) $\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = ax + b \end{cases}$; $x^2 - (a+1)x - b = 0$. Для того чтобы было единственное решение: $D = 0$; $(a+1)^2 + 4b = 0$.

б) $\begin{cases} y = -x^2 - 5x - 6 \\ y = ax + b \end{cases}$; $-x^2 - 5x - 6 = ax + b$;

$x^2 + (a+5)x + b + 6 = 0$; $D = (a+5)^2 - 4b - 24 = 0$, т. е. $(a+5)^2 = 4b + 24$. Так как это должно выполняться одновременно, то $\begin{cases} (a+1)^2 + 4b = 0 \\ (a+5)^2 - 4b - 24 = 0 \end{cases}$,



значит $(a+1)^2+(a+5)^2-24=0$;

$a^2+2a+1+a^2+10a+25-24=0$; $\quad a^2+6a+1=0$;

$\left[\begin{array}{l} a=-3+2\sqrt{2} \\ a=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$, то соответственно $\left[\begin{array}{l} b=-3+2\sqrt{2} \\ b=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$l_1:\ y=\left(-3+2\sqrt{2}\right)x-3+2\sqrt{2}$;

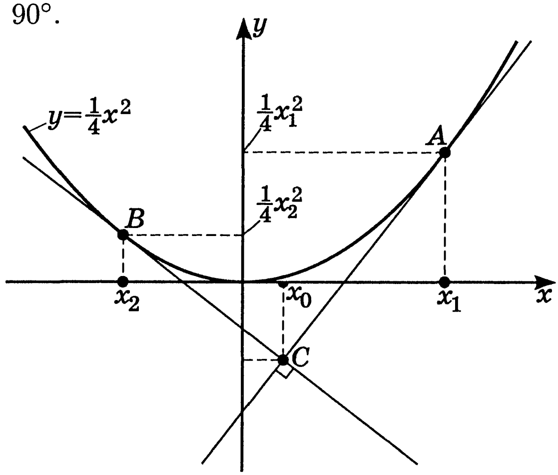
$l_2:\ y=-\left(3+2\sqrt{2}\right)x-3-2\sqrt{2}$;

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-3+2\sqrt{2}-\left(-3-2\sqrt{2}\right)}{1+\left(-3+2\sqrt{2}\right)\left(-3-2\sqrt{2}\right)}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2};$$

$\theta=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$.

Примечание. Обратите внимание на тот факт, что графики этих функций центрально-симметричны относительно точки $M(-1;0)$.

14. К графику кривой $y=\dfrac{1}{4}x^2$ проведены взаимно перпендикулярные касательные. Найдите уравнение кривой, которой принадлежат все точки, из которых кривая видна под углом в 90°.



Пусть $A\left(x_1;\dfrac{1}{4}x_1^2\right)$; $B\left(x_2;\dfrac{1}{4}x_2^2\right)$ — точки касания.

$C\,(x_0;y_0)$ — координаты точки пересечения взаимно перпендикулярных касательных.

а) $y'=\left(\dfrac{1}{4}x^2\right)'=\dfrac{1}{2}x;\quad y'(x_1)=\dfrac{1}{2}x_1;\quad y\,(x_1)=\dfrac{1}{4}x_1^2;$

$y=\dfrac{1}{4}x_1^2+\dfrac{1}{2}x_1\,(x-x_1)$, т. е. $\boxed{y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}x_1^2}$.

б) $y'\,(x_2)=\dfrac{1}{2}x_2;\quad y\,(x_2)=\dfrac{1}{4}x_2^2;\quad y=\dfrac{1}{4}x_2^2+\dfrac{1}{2}x_2\,(x-x_2);$

$\boxed{y=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}x_2^2}$.

в) Но касательные взаимно перпендикулярны

т. е. $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$, тогда $\dfrac{1}{2}x_2=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}x_1}$; $x_1x_2=-4$.

Все условия а), б) и в) выполняются одновременно, значит необходимо решить систему

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x_1x - \dfrac{1}{4}x_1^2 \\ y = \dfrac{1}{2}x_2x - \dfrac{1}{4}x_2^2 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}.$$

Но касательные прямые должны проходить через точку $C(x_0; y_0)$, значит

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{2}x_1x_0 - \dfrac{1}{4}x_1^2 \\ y_0 = \dfrac{1}{2}x_2x_0 - \dfrac{1}{4}x_2^2 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}; \qquad \begin{matrix} \boxed{1} - \boxed{2} \\ \boxed{1} + \boxed{2} \end{matrix}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{2}(x_1 - x_2) - \dfrac{1}{4}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ \dfrac{x_0}{2}(x_1 + x_2) - \dfrac{1}{4}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 2y_0 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)(2x_0 - (x_1 + x_2)) = 0 \\ \dfrac{x_0}{2}(x_1 + x_2) - \dfrac{1}{4}\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = 2y_0 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) = 2x_0 \\ \dfrac{x_0}{2} \cdot 2x_0 - \dfrac{1}{4}\left((2x_0)^2 - 2(-4)\right) = 2y_0 \\ x_1x_2 = -4 \end{cases}.$$

Из второго уравнения получим $2y_0 = x_0^2 - x_0^2 - 2$, т. е. $y_0 = -1$ не зависит от x_0, значит $y = -1$ — кривая, на которой находятся все точки пересечения взаимно перпендикулярных касательных.

Примечание. Эта задача есть частный случай более общей задачи по нахождению кривой $g(x)$, из каждой точки которой можно провести к кривой $f(x)$ касательные, образующие между собой один и тот же угол.

Проверочная работа 3

1. 1) Напишите уравнение касательной к графику $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8$, параллельной $y = 12x + 1$.

2) Найдите угол между кривыми $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8$ и $g(x) = 4 - x^2$.

3) Вычислите $f(-0,99)$.

2. 1) Напишите уравнения касательных к графику $f(x) = x^3 - 4x^2$, перпендикулярных прямой $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

2) Найдите расстояние между такими касательными.

3) Вычислите $f(3{,}02)$.

3. Найдите уравнения касательных к кривой $y = -\frac{3}{4}x^4 + x^2 + 1$, являющихся взаимно перпендикулярными.

4. Найдите уравнение касательной, общей для двух кривых $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ и $g(x) = \frac{4}{x}$.

5. 1) Найдите абсциссы точек касания касательных к кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$, параллельных прямой $y = 19x + 3$.

2) Напишите уравнения таких касательных.

3) Найдите все уравнения прямых, касающихся кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух точках.

Решение проверочной работы 3

1. 1) Напишите уравнение касательной к графику
$f(x) = x^4 - 5x^2 + 8$, параллельной $y = 12x + 1$.
Пусть $x = x_0$ — абсцисса точек касания.
$f'(x) = 4x^3 - 10x = 12; \quad 2x^3 - 5x - 6 = 0.$
Так как $2x^3 - 5x - 6 = (x - 2)\left(2x^2 + 4x + 3\right) \quad (D < 0)$,
то $x_0 = 2$.
$y_0 = f(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 8 = 4; \quad y = 4 + 12(x - 2)$;
$\boxed{y = 12x - 20}$.

2) Найдите угол между кривыми $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8$ и $g(x) = 4 - x^2$.
$x^4 - 5x^2 + 8 = 4 - x^2; \quad x^4 - 4x^2 + 4 = 0; \quad \left(x^2 - 2\right)^2 = 0;$
$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}.$
$f'(x) = 4x^3 - 10x; \quad g'(x) = -2x;$
$f'(x_1) = 4\left(\sqrt{2}\right)^3 - 10\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -2\sqrt{2} = k_1;$
$g'(x_1) = -2\sqrt{2} = k_2.$
Так как $k_1 = k_2$, то в точке с абсциссой $x_1 = \sqrt{2}$ существует единственная касательная и для $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8$, и для $g(x) = 4 - x^2$. В данном случае это точки касания, и угол между совпадающими касательными равен 0. Данные функции четные, а значит их графики симметричны относительно оси Oy, поэтому в точке с абсциссой $x_2 = -\sqrt{2}$ существует единственная для обеих функций касательная.

3) Вычислите $f(-0,99)$.
Пусть $x_0 = -1; \quad x - x_0 = \Delta x;$
$\Delta x = -0,99 - (-1) = 0,01$, т. е. $\Delta x = 0,01$.
Так как $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
$f(x_0) = f(-1) = (-1)^4 - 5(-1)^2 + 8 = 4,$
$f'(x_0) = f'(-1) = 4(-1)^3 - 10(-1) = 6,$
то $f(x) \approx 4 + 6 \cdot 0{,}01 = 4{,}06$.

2. 1) Напишите уравнения касательных к графику $f(x)=x^3-4x^2$, перпендикулярных прямой $y=-\frac{1}{3}x+1$.

Так как $k_1 = -\frac{1}{3}$, то прямая, перпендикулярная к ней, имеет угловой коэффициент $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, т. е. $k_2 = 3$.

Значит, $f'(x) = 3x^2 - 8x = 3$;

$3x^2 - 8x - 3 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+9}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3}; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. .$$

а) Пусть $x_1 = 3$.

Так как $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ — уравнение касательной, где $f(x_1) = f(3) = 27 - 36 = -9$,

то $f'(x_1) = f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 3$;

$y = -9 + 3(x-3)$;

$\boxed{y = 3x - 18}$ — l_1 — касательная.

б) Пусть $x_2 = -\frac{1}{3}$.

$$f(x_2)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-4\left(-\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{1}{27}-\frac{4}{9}=-\frac{13}{27};$$

$$f'(x_2)=f'\left(-\frac{1}{3}\right)=3\left(-\frac{1}{3}\right)^2-8\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3$$

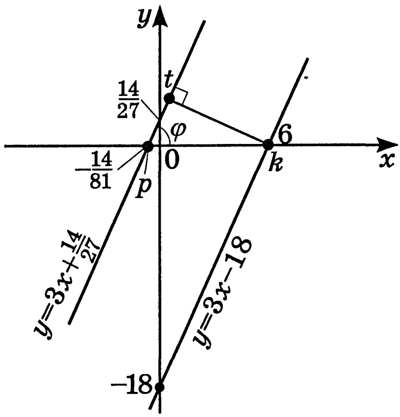
(можно было не вычислять).

$$y = -\frac{13}{27} + 3\left(x + \frac{1}{3}\right);$$

$$y = 3x + 1 - \frac{13}{27};$$

$\boxed{y = 3x + \frac{14}{27}}$ — l_2.

2) Найдите расстояние между такими касательными.



Из Δpkt $\quad S(l_1; l_2) = tk$, где $tk = pk \sin\varphi$.

$y = 3x - 18; \quad y = 0; \quad x = 6.$

$y = 3x + \dfrac{14}{27}; \quad y = 0; \quad x = -\dfrac{14}{81}.$

$$pk = 6 - \left(-\frac{14}{81}\right) = 6\frac{14}{81};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 3; \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}};$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10};$$

$$tk = 6\frac{14}{81} \cdot \frac{3}{10}\sqrt{10} = \frac{500 \cdot 3}{81 \cdot 10}\sqrt{10} = \boxed{\frac{50}{27}\sqrt{10}}.$$

3) Вычислите $f(3{,}02)$.

$x_0 = 3; \quad \Delta x = 3{,}02 - 3 = 0{,}02;$

$f(x_0) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3^2 = -9;$

$f'(x_0) = f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 3;$

$f(3{,}02) \approx -9 + 3(0,02) = -8{,}94.$

3. Найдите уравнения касательных к кривой $y=-\frac{3}{4}x^4+x^2+1$, являющихся взаимно перпендикулярными.

а) $y' = -3x^3 + 2x$.

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны при $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания данной кривой и прямой $y = k_1 + b_1$, тогда $f'(x_0) = -3x_0^3 + 2x_0 = k_1$.

Так как исходная функция $y=-\frac{3}{4}x^4+x^2+1$ — четная, то ее график симметричен относительно оси ординат. x_0' — точка касания кривой и $y=k_2x+b_2$ симметрична x_0, поэтому $x_0' = -x_0$, значит

$y'(x_0') = y'(-x_0) = 3x_0^3 - 2x_0 = k_2$.

б) Учитывая, что $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ получим,

$$3x_0^3 - 2x_0 = -\frac{-1}{3x_0^3 - 2x_0}; \qquad \left(3x_0^3 - 2x_0\right)^2 = 1;$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x_0^3 - 2x_0 = 1 \\ 3x_0^3 - 2x_0 = -1 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} 3x_0^3 - 2x_0 - 1 = 0 \\ 3x_0^3 - 2x_0 + 1 = 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} (x_0 - 1)\left(3x_0^2 + 3x_0 + 1\right) = 0 \\ (x_0 + 1)\left(3x_0^2 - 3x_0 + 1\right) = 0 \end{array}\right..$$

Так как $3x_0^2 \pm 3x_0 + 1 \neq 0 \;\; (D < 0)$, то $\left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$.

в) $x_0 = 1; \quad y'(1) = -3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 = -1;$

$y(1) = -\frac{3}{4} + 1 + 1 = 1{,}25; \quad y = 1{,}25 + (-1)(x - 1);$

$\boxed{y = -x + 2{,}25}$.

г) $x_0 = -1$.

Рассуждая аналогично, получим

$\boxed{y = x + 2{,}25}$.

4. Найдите уравнение касательной, общей для двух кривых $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ и $g(x)=\frac{4}{x}$.

Пусть $y=kx+b$ — общая касательная, тогда у уравнений $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{4}{x}$ должен быть единственный корень, причем при одних и тех же значениях k и b.

$x^2-2kx-2b=0; \quad kx^2+bx-4=0;$

$\begin{cases} D=k^2+2b=0 \\ D=b^2+16k=0 \end{cases};$

$\begin{cases} b=-\frac{1}{2}k^2 \\ \left(-\frac{1}{2}k^2\right)^2+16k=0 \end{cases}.$

Значит $k^4+64k=0; \quad k\left(k^3+64\right)=0; \quad \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=-4 \end{array}\right.;$

$k=0$ — вырожденный случай (не является касательной для $y=g(x)$). При $k=-4;\quad b=-\frac{1}{2}(-4)^2=-8$, тогда $\boxed{y=-4x-8}$ — общая для двух графиков функций касательная.

5. 1) Найдите абсциссы точек касания касательных к кривой $y=x^4-2x^3+x^2+19x+93$, параллельных прямой $y=19x+3$.

Пусть $x=x_0$ — абсцисса точки касания.

$y'=4x^3-6x^2+2x+19=19;$

$4x^3-6x^2+2x=2x\left(2x^2-3x+1\right)=2x(2x-1)(x-1);$

$\left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\frac{1}{2} \\ x_0=1 \end{array}\right..$

2) Напишите уравнения таких касательных. Используем формулу $\boxed{y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)}$.

а) $x = 0$;
$y(0) = 93; \quad y = 93 + 19(x - 0);$
$\boxed{y = 19x + 93}$ — l_1; $A(0; 93)$.

б) $x = \dfrac{1}{2}$;
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 19 \cdot \frac{1}{2} + 93 = 102\frac{9}{16};$$
$$y = 102\frac{9}{16} + 19\left(x - \frac{1}{2}\right);$$
$\boxed{y = 19x + 93\frac{1}{16}}$ — l_2; $C\left(\dfrac{1}{2}; 102\dfrac{9}{16}\right)$.

в) $x = 1$;
$y(1) = 1 - 2 + 1 + 19 + 93 = 112; \quad y = 112 + 19(x - 1);$
$\boxed{y = 19x + 93}$ — l_3; $B(1; 112)$.

Примечание. Оказалось, что прямая $y = 19x + 93$ касается кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух точках.

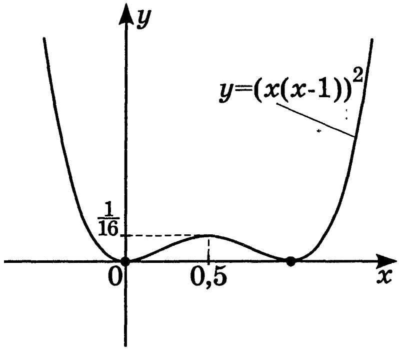
3) Найдите все уравнения прямых, касающихся кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух точках.

Пусть кривая касается прямой $y = kx + b$ в двух точках, тогда уравнение $x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93 = kx + b$ имеет только 2 корня. Перенесем правую часть в левую и сгруппируем.

Получим $x^4 - 2x^3 + x^2 + (19 - k)x + 93 - b = 0$
или $(x(x - 1))^2 + (19 - k)x + 93 - b = 0$.

Очевидно, что график $y = (x(x - 1))^2$ имеет единственную прямую, касающуюся его в двух точках. Это ось абсцисс $y = 0$. Тогда $x = 0$, $x = 1$.

Теперь рассмотрим уравнение
$(x(x - 1))^2 + (19 - k)x + (93 - b) = 0$.



а) при $x = 0$; $93 - b = 0$; $b = 93$;

б) при $x = 1$; $19 - k + 93 - b = 0$; тогда при $b = 93$ $19 - k = 0$; $k = 19$; значит касательная примет вид $y = 19x + 93$.

Итак, при $x = 0$; $y = 93$; $A\,(0; 93)$.

При $x = 1$; $y = 112$; $B\,(1; 112)$.

Значит существует единственная прямая $y = 19x + 93$, касающаяся кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 19x + 93$ в двух точках.

Историческая справка

Понятие касательной одно из древнейших. Еще в древней Греции с помощью циркуля и линейки умели проводить касательные к окружностям, эллипсам, гиперболам, параболам. Много позже Галилей (1564–1642), итальянский физик и астроном ввел циклоиду. Р. Декарт (1596–1650) и П. Ферма (1601–1665) построили к ней касательную, и интерес к касательным существенно возрос. Построение касательных — одна из задач, которые привели к появлению основ дифференциального исчисления. Первый опубликованный труд на эту тему принадлежал Готфриду Лейбницу (1646–1716) — знаменитому немецкому математику, физику, философу. А труд назывался «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствиями ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Следующий шаг в теории экстремумов был сделан, когда стали искать кривые, наилучшие с той или иной точки зрения. Впервые задачу о нахождении поверхности вращения, испытывающей наименьшее сопротивление в некоторой «редкой» среде, дал Исаак Ньютон (1643–1727), выдающийся английский математик, физик, астроном и философ, в 1687 г. в фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии», но так в свое время был до конца и не понят. И только к середине XX появилась теория оптимального управления, создателем которой был российский ученый Лев Семенович Понтрягин (1908–1988), осмысливший и развивший идеи Ньютона с этой точки зрения.

4

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы

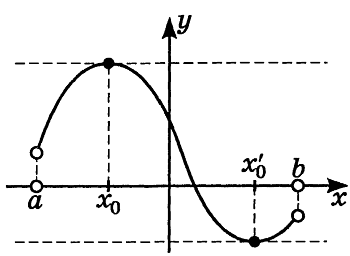
Для рассмотрения теорем напомним определение наибольшего и наименьшего значения функции.

Определения:
а) $f(x_0) = y_{\text{наиб}}$, **если** $f(x_0) \geqslant f(x)$ **для** $\forall x \in (a;b)$;
б) $f(x_0) = y_{\text{наим}}$, **если** $f(x_0) \leqslant f(x)$ **для** $\forall x \in (a;b)$.

Теорема 1 (Пьера Ферма)[10]. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что

1. она определена на множестве $(a;b)$, т. е. $D(f) = (a;b)$;
2. во внутренней точке x_0 (т. е. $x_0 \in (a;b)$) существует наибольшее или наименьшее значение функции;
3. существует конечная производная в точке x_0, т. е. $\exists f'(x_0)$.

Тогда $\boxed{f'(x_0) = 0}$.



[10] Эта теорема воспроизводит только идею, которую применял П. Ферма (1601–1665, Франция) для нахождения наибольших и наименьших значений функции, используя понятия касательной, параллельной оси Ox. Понятие производной ему было еще не известно.

Пример 1. Дана функция $y = \sin x$. Найдите точку x_0, для которой все условия теоремы 1 выполняются.

Пусть:

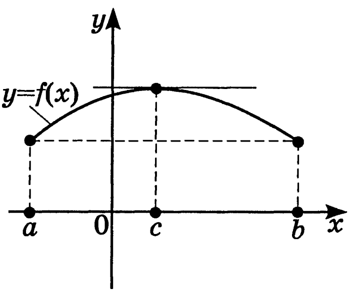
а) $D(f) = (0;\pi)$ (аналогично на $(\pi;2\pi)$);

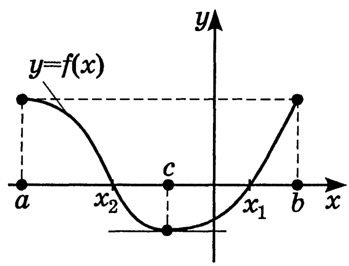
б) при $x_0 = \frac{\pi}{2}$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ — наибольшее значение на $(0;\pi)$;

в) $y' = (\sin x)' = \cos x$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Вывод. При $x_0 = \frac{\pi}{2}$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ — все условия теоремы выполняются.

Теорема 2 (Мишеля Ролля)[11]





Пусть $y = f(x)$, где $D(f) = [a;b]$ и для нее выполняются следующие условия:

1. $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$;

2. $\exists f'(x)$ — конечная производная на $(a;b)$;

3. $f(a) = f(b)$.

Тогда: $\boxed{\exists\, c \in (a;b),\ \text{такая что}\ f'(c) = 0.}$

[11] М. Ролль (1652–1719, Франция) доказал эту теорему только для многочленов.

Пример 2. Дана функция $y = x^3 - 3x$. Найдите точки, для которых все условия теоремы 2 выполняются.

а) При $y = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$ — корни функции,

т. е. $f\left(-\sqrt{3}\right) = f(0) = f\left(\sqrt{3}\right)$ (условие 3 — выполнено).

б) В силу непрерывности $y = x^3 - 3x$ на $\mathbb{R}$, $y = x^3 - 3x$ непрерывна на $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ и на $\left[0; \sqrt{3}\right]$.

в) $y' = 3x^2 - 3$, причем если $y' = 0$, то $\left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left(0; \sqrt{3}\right) \\ x = -1 \in \left(-\sqrt{3}; 0\right) \end{array}\right.$.

Итак, для $c_1 = 1 \in \left(0; \sqrt{3}\right)$ и для $c_2 = -1 \in \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ все условия теоремы 2 выполняются.

Следствие. Между корнями дифференцируемой функции всегда лежит хотя бы один корень производной.

Примечание. На геометрическом языке теорема 2 (М. Ролля) означает, что если на кривой есть точки с одинаковыми ординатами, то между ними на кривой найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

Теорема 3 (Жозефа Луи Лагранжа)[12]

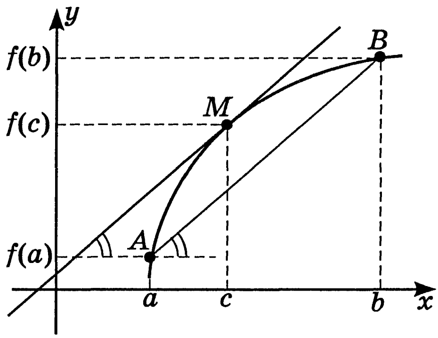
Пусть $y = f(x)$, где $D(f) = [a; b]$ и для нее выполняются следующие условия:

1. $y = f(x)$ — непрерывна на $[a; b]$;

2. $\exists f'(x)$ — конечная производная на $(a; b)$.

Тогда $\boxed{\exists\, c \in (a; b), \text{ такая что } f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}.}$

[12] Жозеф Луи Лагранж (1736–1813, Франция).

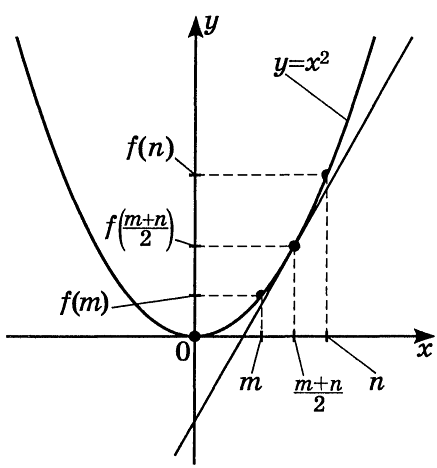


Примечания.

1. Теорема 2 (М. Ролля) — частный случай теоремы 3 (Лагранжа), когда $f(a) = f(b)$.

2. Геометрически теорема Лагранжа означает, что всегда найдется точка $M(c, f(c))$ на кривой $(a < c < b)$ $y = f(x)$, в которой касательная параллельна секущей AB (точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$).

Пример 3. Дана функция $y = x^2$. Найдите точку C с абсциссой x_0 на $[m; n]$, для которой справедлива теорема Лагранжа.



1. $f(n) = n^2$ и $f(m) = m^2$,

тогда $\dfrac{f(n) - f(m)}{n - m} = \dfrac{n^2 - m^2}{n - m} = n + m.$

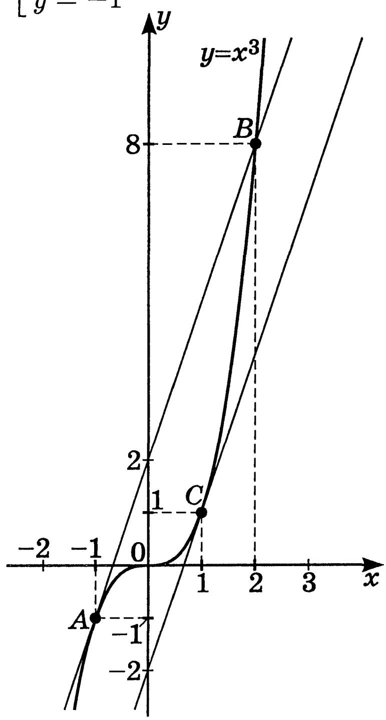
2. $f'(x) = 2x$, тогда $2x = m + n$; $x = \dfrac{n + m}{2}$,

т. е. $c = \dfrac{n + m}{2}$; точка $C\left(\dfrac{m+n}{2}; \left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2\right)$.

Пример 4. На кривой $y = x^3$ найдите точку, касательная в которой параллельна прямой, проходящей через точки $A(-1; -1)$ и $B(2; 8)$ (терема Лагранжа).

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{9}{3} = 3$; $\quad (x^3)' = 3x^2$; $\quad 3x^2 = 3$;

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$, тогда $\left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$.



Ответ: в точках $A(-1; -1)$ и $C(1; 1)$.

Теорема 4 (Огюста Луи Коши)[13]

Пусть $y = f(x)$, где $D(f) = [a;b]$, и $y = g(x)$, где $D(g) = [a;b]$, и для этих функций выполняются следующие условия:

1. $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a;b]$;
2. существует конечная производная для $f'(x)$ и $g'(x)$ на $(a;b)$, где $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$.

Тогда

$\exists c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, если $g'(c) \neq 0$ и $g(b) \neq g(a)$.

Примечание. Очевидно, что теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши, если положить $g(x) = x$ $(g(a) = a; \quad g(b) = b)$.

Пример 5. Даны функции $y = f(x) = x^3 + 2x + 3$ и $y = g(x) = x^2 - x$ на $[1;2]$. Найдите точку с абсциссой $x_0 = c$, для которой справедлива теорема Коши.

а) $f(2) = 8+4+3 = 15; \quad f(1) = 1+2+3 = 6; \quad f(2) - f(1) = 9.$

б) $g(2) = 4 - 2 = 2; \quad g(1) = 1 - 1 = 0; \quad g(2) - g(1) = 2;$
$\dfrac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \dfrac{9}{2}.$

в) $f'(x) = 3x^2 + 2.$

г) $g'(x) = 2x - 1;$ тогда $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{3x^2 + 2}{2x - 1}.$

д) Решим уравнение $\dfrac{3x^2 + 2}{2x - 1} = \dfrac{9}{2}. \quad 6x^2 + 4 = 18x - 9;$

$6x^2 - 18x + 13 = 0; \quad x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 78}}{6} = \dfrac{9 \pm \sqrt{3}}{6};$

$$\frac{9 \pm \sqrt{3}}{6} \in [1;2], \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} c = \dfrac{9 + \sqrt{3}}{6} \\ c = \dfrac{9 - \sqrt{3}}{6} \end{array}\right. .$$

[13] Огюст Луи Коши (1789–1857, Франция).

Метод Лопиталя[14]

Раскрытие неопределенностей методом Лопиталя

Теорема 5. Пусть даны $y = f(x)$ и $g(x)$ непрерывные и дифференцируемые на $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, где $x = a$ — корень (нуль) этих функций, т. е. $f(a) = g(a) = 0$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\boxed{\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ причем } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Примечания.

1. Значение a может быть как конечным, так и бесконечным.
2. Если отношение производных приводит к неопределенности, то правило можно повторить.
3. При помощи правила Лопиталя — И. Бернулли можно раскрывать неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ (см. с. 30).

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2}{2x} =$

$\left[\text{неопределенность вида } \dfrac{0}{0}\right]$

$= \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x} = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x\to 1} x = 1{,}5.$

Этот результат, в данном случае, можно легко проверить.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} =$$
$$= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = 1{,}5.$$

[14] Гильом Франсуа Лопиталь (1661–1704), Иван Бернулли (1667–1748).

Пример 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)'}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)'}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}}{\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{5-x}}=\frac{1}{2}.$$

Очевидно, что в данном примере можно использовать и домножение числителя и знаменателя на сопряженные выражения (см. стр. 31).

Пример 3. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to1}(\ln x\cdot\ln(x-1))}.$

Заменим неопределенность вида 0^0 на неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to1}(\ln x\cdot\ln(x-1))=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\ln(x-1)}}=$

$\left[\text{неопределенность вида } \dfrac{0}{0}\right]$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\ln^2(x-1)}\dfrac{1}{x-1}}==-\lim_{x\to1}\frac{\ln^2(x-1)}{\dfrac{x}{x-1}}=$$

[неопределенность сохраняется]

$$=-\lim_{x\to1}\frac{2\dfrac{1}{x-1}\ln(x-1)}{\dfrac{1\,(x-1)-1(x)}{(x-1)^2}}=2\lim_{x\to1}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=$$

[неопределенность сохраняется]

$$=2\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{0-1}{(x-1)^2}}=-2\lim_{x\to1}(x-1)=0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to1}e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to1}(\ln x\cdot\ln(x-1))}=e^0=1.$

Пришлось трижды применять правило Лопиталя — Бернулли.

Примечания. 1. В примере 3 использована идея правила Лопиталя — Бернулли. Хотя такие примеры рассматривались существенно позже, их решал уже О. Л. Коши.

2. Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to 1} e^{\ln x\cdot\ln(x-1)}$ было использовано известное свойство $\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ (где $a>0$, $y=f(x)$ — непрерывная функция).

Пример 4. Важный контрпример:
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3-2x+4} = \dfrac{15}{8}$. Если же применять правило Лопиталя, то $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3-2x+4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+5}{3x^2-2} = \dfrac{9}{10}$ — явно другой результат.

В чем же дело? А в том, что правило Лопиталя применимо, только если есть неопределенность, а ее здесь нет.

Пример 5. Сравним с помощью правила Лопиталя скорость роста степенной, показательной и логарифмической функций.

1) $\boxed{a>1}$ $n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n\cdot(n-1)\,x^{n-2}} = \ldots$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n!} = \infty,$$

значит показательная функция растет быстрее, чем степенная функция (с любым натуральным показателем).

2) $\boxed{a>1}$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{\log_a x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{x}\log_a e} = \lim_{x\to\infty} nx^n\ln a = \infty.$$

Очевидно, что степенная функция растет быстрее, чем логарифмическая.

Практикум 16

Вычислите (используя правило Лопиталя):

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a}$;

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)}$;

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$;

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 2\ln x}{x}$;

5. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$;

6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$;

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$;

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{tg} 5x}{\mathrm{tg}\, 3x}$;

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \mathrm{ctg} \dfrac{x}{2} \right)$;

10. $\lim\limits_{x \to 1} \left((1 - x)\, \mathrm{tg} \dfrac{\pi}{2} x \right)$.

Решение практикума 16

Вычислите (используя правило Лопиталя):

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x}{1}=\boxed{e^a}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}}=\dfrac{e^0+e^0}{\dfrac{1}{1+0}}=\boxed{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2-4x^3}{2\sqrt{2x-x^4}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}=$

$=\dfrac{\dfrac{2-4}{2\cdot 1}-\dfrac{1}{3}}{-\dfrac{3}{4}\cdot 1}=\boxed{\dfrac{16}{9}}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1}=1+0=\boxed{1}.$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{1\cdot\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{x\ln x+x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\ln x+\dfrac{x}{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{\ln x+2}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}.$

Пришлось дважды применить правило Лопиталя.

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\dfrac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}=\boxed{\dfrac{m}{n}a^{m-n}}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\boxed{\dfrac{1}{6}}.$

а) Пришлось трижды применить правило Лопиталя.

б) По сути это значит, что $\sin x\approx x-\dfrac{1}{6}x^3$. При $x=0{,}1$ радиан $\sin 0{,}1\approx 0{,}1-\dfrac{0{,}001}{6}=0{,}1-0{,}000167=0{,}099833$, что совпадает с точностью шестизначных таблиц Брадиса.

в) Разумеется $\sin x\approx x$ — менее точное приближение.

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{5}{\cos^2 5x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{5\cos^2 3x}{3\cos^2 5x}=$

$=\dfrac{5}{3}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos 5x}\right)^2=\dfrac{5}{3}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-5\sin 5x}\right)^2=$

$=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{3^2}{5^2}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}\right)^2=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{-1}{1}\right)^2=\boxed{\dfrac{3}{5}}.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=2\cos^2 0=\boxed{2}.$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2}x}}=$

$=\dfrac{2}{\pi}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 1\right)=\boxed{\dfrac{2}{\pi}}.$

5

Основные свойства функций

Возрастание и убывание функций

Условия постоянства, возрастания и убывания функции

Теорема 6. Пусть дана $y = f(x)$ и выполняются следующие условия:

1) $D(f) = [a; b]$;

2) $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$;

3) на $(a; b)$ существует конечная производная $f'(x)$.

Тогда:

а) для того чтобы $y = f(x)$ была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \equiv 0$;

б) для того чтобы $y = f(x)$ была возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0)$.

в) Для того чтобы $y = f(x)$ была строго возрастающей (убывающей), достаточно, чтобы $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$.

Доказательство.

а) **Необходимость.**

Если $f(x) = \text{const}$ — постоянная, то $f'(x) = 0$.

Достаточность.

Из условий теоремы 6 следует, что теорема 3 (Лагранжа) выполняется, следовательно для любого $x \in [a; b]$ существует такое c из $[a; x]$, что $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$, где $a < c < x$, так как $f'(c) = 0$, значит $f(x) = f(a)$ для любого $x \in [a; b]$.

б) **Необходимость.**

Пусть $y = f(x)$ — возрастающая в широком смысле, т. е. если $a < x_0 < x < b$, то $f(x) \geqslant f(x_0)$, значит $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Переходя к пределу, получим $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0$.

Достаточность.

По теореме 3 (Лагранжа) если

$[x_2; x_1] \subset [a; b]$, то существует такое c, что

$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, где $x_2 < c < x_1$.

Так как $f'(c) \geqslant 0$ и $x_1 > x_2$, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, ч. т. д.

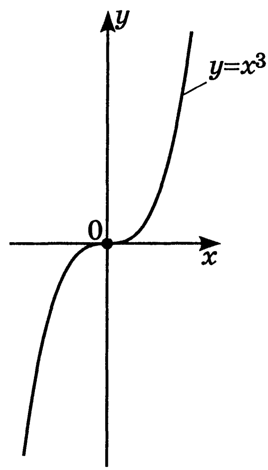
в) **Достаточность.**

Пусть $f'(x) > 0$ на $(a; b)$, $[x_2; x_1] \subset [a; b]$. По теореме 3 (Лагранжа) для $[x_2; x_1]$ существует такое c, что $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, где $x_2 < c < x_1$. Так как $f'(c) > 0$ и $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, ч. т. д.

Следствие. Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены на M и для любых внутренних точек имеют конечные производные, причем $f'(x) = g'(x)$, тогда $f(x) = g(x) + c$ (c — постоянная).

Примечание. Условия $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ не являются необходимым условием строгой монотонности.

Пример. $y = x^3$.
$y' = 3x^2$; $y' = 0$ при $x = 0$, т. е. $y' \geqslant 0$, но $y = x^3$ — строго возрастающая функция.



Примеры исследования.

Найдите промежутки монотонности.

1. $y = 3x^2 - 2x$; $y' = 6x - 2$;

а) $y' \geqslant 0$; $6x - 2 \geqslant 0$; $x \geqslant \frac{1}{3}$,

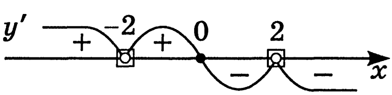
т. е. на $\left[\frac{1}{3}; \infty\right)$ $y \uparrow$.

б) $y' \leqslant 0$; $6x - 2 \leqslant 0$; $x \leqslant \frac{1}{3}$,

т. е. на $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ $y \downarrow$.

2. $y = e^x + 5x$; $y' = e^x + 5 > 0$, значит для $\forall x$ $y' > 0$, т. е. $y = f(x) \uparrow$.

3. $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$; $y' = \dfrac{-4x}{(x^2-4)^2}$.

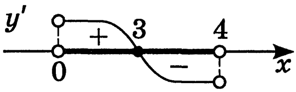


Значит $y' \geqslant 0$ на $(-\infty; -2)$; $y = f(x) \uparrow$,
на $(-2; 0]$; $y = f(x) \uparrow$,
$y' \leqslant 0$ на $[0; 2)$; $y = f(x) \downarrow$,
на $(2; \infty)$; $y = f(x) \downarrow$.

Примечание. Запись вида $y = f(x) \uparrow$ означает, что функция $y = f(x)$ возрастает. Аналогично запись $y = f(x) \downarrow$ означает, что функция убывает.

4. $y = x\sqrt{4x - x^2}$; $\quad y' = \sqrt{4x - x^2} + x\dfrac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} =$

$$= \frac{4x - x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{-2x\,(x - 3)}{\sqrt{4x - x^2}}.$$



$y' \geqslant 0$ на $(0; 3]$; $\quad y = f(x)\uparrow$, $\quad y' \leqslant 0$ на $[3; 4)$; $\quad y = f(x)\downarrow$.

Так как $y(0) = 0$ и $y(4) = 0$ (т. е. в этих точках функция определена), то

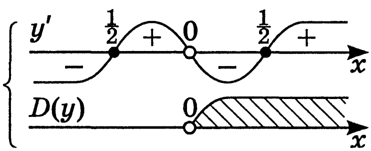
$y = f(x)\uparrow$ на $[0; 3]$; $\quad y = f(x)\downarrow$ на $[3; 4]$.

5. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$; $\quad y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} > 0, \text{ значит } y = f(x)\uparrow.$$

6. $y = 2x^2 - \ln x$; $\quad y' = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2 - 1}{x} = \dfrac{(2x - 1)(2x + 1)}{x}$.

Возможно и иное оформление — в виде системы:



$y' \geqslant 0$ на $[0,5; \infty)$ $\quad y = f(x)\uparrow$,

$y' \leqslant 0$ на $(0; 0,5]$ $\quad y = f(x)\downarrow$.

Экстремумы функции

Определение. Функция $y = f(x)$, заданная на некотором промежутке $(a;b)$, имеет максимум (минимум) в точке с абсциссой $x_0 \in (a;b)$, если существует δ-окрестность точки x_0 $(x_0-\delta;\ x_0+\delta) \subset (a;b)$ такая, что $\forall x \neq x_0$ из $x \in (x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ следует, что $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Дополнение. Максимумы и минимумы называются экстремумами функции.

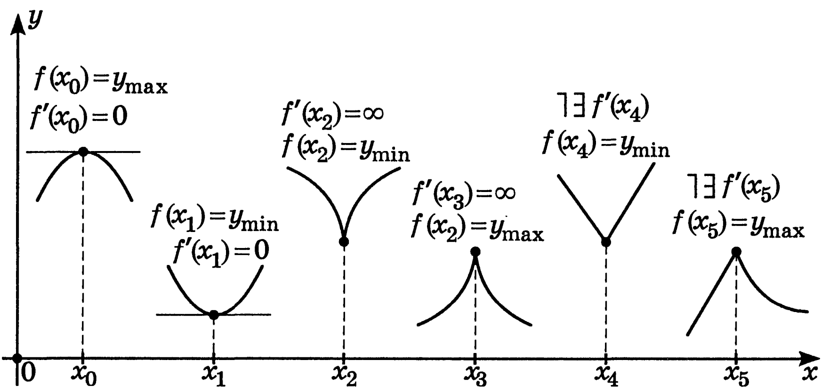
Теорема 7. Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a;b]$ в точке с абсциссой $x_0 \in (a;b)$ имеет экстремум.
Тогда:

а) если в точке с абсциссой x_0 есть конечная производная, то $f'(x_0) = 0$ (по теореме Ферма);

б) либо $f'(x_0)$ — бесконечна, либо $f'(x_0)$ не существует.

Примечание. Теорема формулирует только необходимые условия существования экстремумов, но не достаточные для наличия производной.

Пример 1.

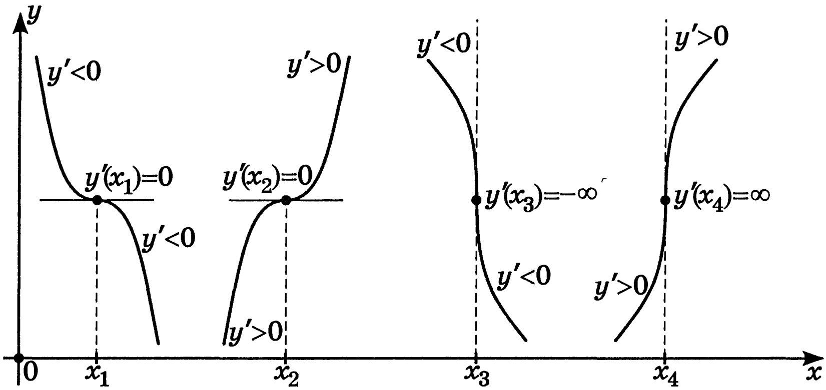


а) $f'(x_2-0) = -\infty$; $\quad f'(x_2+0) = \infty$.

б) $f'(x_3-0) = \infty$; $\quad f'(x_3+0) = -\infty$.

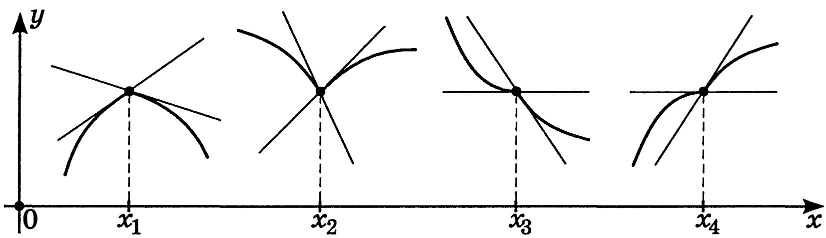
Условия теоремы не являются достаточными, но по определению в точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 есть экстремум.

Пример 2.



В точках x_1, x_2, x_3, x_4 экстремума нет, так как в окрестности x_0 на $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ не выполняются условия существования экстремума по определению.

Пример 3.



а) $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x)$, т. е. не существует $f'(x_1)$, но по определению экстремум в точке x_1 есть.

б) $\lim\limits_{x \to x_2 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_2 + 0} f(x)$, т. е. не существует $f'(x_2)$, но по определению экстремум в точке x_2 есть.

в) $\lim\limits_{x \to x_3 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_3 + 0} f(x)$, т. е. не существует $f'(x_3)$. Учитывая, что $f(x)$ убывает, в точке x_3 экстремума по определению нет.

г) $\lim\limits_{x \to x_4 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_4 + 0} f(x)$, т. е. не существует $f'(x_4)$. Учитывая, что $f(x)$ возрастает, в точке x_4 экстремума по определению нет.

Достаточные условия существования экстремумов

Рассмотрим $y = f(x)$ для которой выполняются следующие условия:

а) $D(f) = (a; b)$;

б) $y = f(x)$ непрерывна в любой внутренней точке $x_0 \in (a; b)$;

в) в δ-окрестности x_0 на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ производная меняет свой знак на противоположный.

Тогда, двигаясь слева направо, получим:

1) если $f'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$», то x_0 — точка минимума, если $f'(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$», то x_0 — точка максимума;

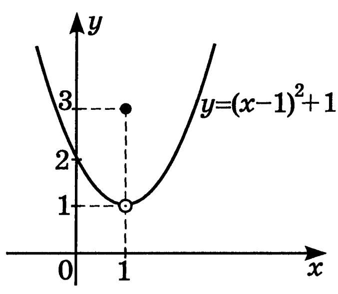
2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума.

Примечания.

1. При $f''(x_0) = 0$ определенных выводов сделать нельзя[15].
2. Иногда интервалы знакопостоянства производной установить технически очень сложно, тогда, возможно, проще вычислить знак второй производой в точке x_0.
3. Требование непрерывности в точке x_0 — очень важно. Если это условие не выполняется, то экстремума может и не быть.

Пример 3.

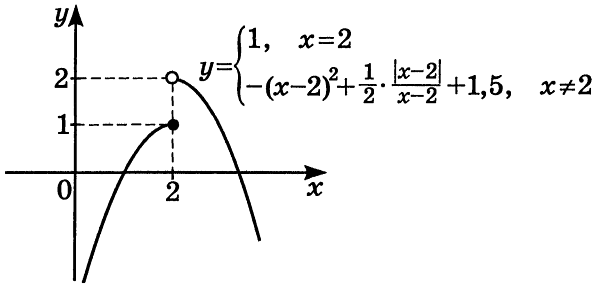
$$y = \begin{cases} (x-1)^2 + 1; & \text{при } x \neq 1 \\ 3; \quad \text{при } x = 1 \end{cases}$$



[15] Так как $f'(x)$ — функция, то $(f'(x))' = f''(x)$ — производная от производной или вторая производная. Аналогично $f^{\text{III}}, f^{\text{IV}}, \ldots, f^{(n)}$.

На графике видно, что $f(1) = 3$, и $f(1) > f(x)$ на $(0;2)$.
На $(0;1)$: $f'(x) < 0$ в $x_0 = 1$ разрыв первого рода.
На $(1;0)$: $f'(x) > 0$ в точке $x_0 = 1$ — экстремум есть, а непрерывности нет.

Контрпример.



Экстремума в точке $x_0 = 2$ нет.

Обобщим результаты наличия или отсутствия экстремумов в точке x_0 в зависимости от знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ в окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ в виде таблицы.

	$(x_0 - \delta;\ x_0)$	x_0	$(x_0;\ x_0 + \delta)$
$f'(x)$	$-$	$f(x_0) = y_{\min}$	$+$
$f'(x)$	$+$	$f(x_0) = y_{\max}$	$-$
$f'(x)$	$+$	Экстремума нет	$+$
$f'(x)$	$-$	Экстремума нет	$-$
$y''(x)$		$f''(x_0) > 0$ $f(x_0) = y_{\min}$	
$y''(x)$		$f''(x_0) < 0$ $f(x_0) = y_{\max}$	

Обратите внимание, что для существования экстремума в точке x_0 совсем необязательно наличие конечной производной в точке x_0. Наличие в точке x_0 конечной производной означает, что касательная в этой точке параллельна оси Ox.

Примечание. Точка экстремума — это абсцисса x_0, экстремум функции — это $f(x_0)$.

Рассмотрим еще некоторые утверждения, связанные с экстремумами функций.

1. Если функция возрастает на $[a; b]$ и убывает на $[b; c]$, то b — абсцисса максимума функции. Докажите.

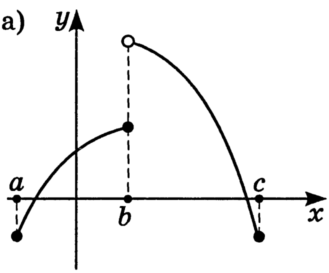
2. Если функция убывает на $[a; b]$ и возрастает на $[b; c]$, то b — абсцисса минимума функции. Докажите.

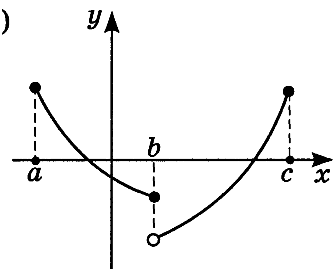
3. Обратите внимание на ложность в общем виде следующих утверждений:

   а) если функция возрастает на $[a; b]$ и убывает на $(b; c]$, то b — абсцисса максимума функции;

   б) если функция убывает на $[a; b]$ и возрастает на $(b; c]$, то b — абсцисса минимума функции.

   Контрпримеры.

   а) 

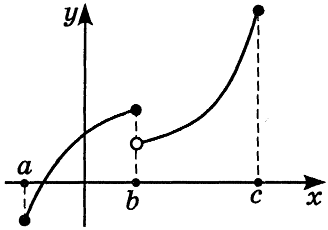
   б) 

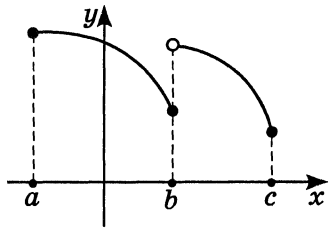
   Аналогично и для промежутков $[a; b)$ и $[b; c]$, а также и для промежутков $[a; b)$ и $(b; c]$.

4. Если функция возрастает (убывает) на $[a; b]$ и $[b; c]$, то она возрастает (убывает) и на $[a; c]$.

5. Обратите внимание на ложность в общем виде утверждения: если функция возрастает (убывает) на $[a; b]$ и $(b; c]$, то функция возрастает (убывает) на $[a; c]$.

Контрпримеры.





Аналогично можно сформулировать утверждения и для промежутков $[a;b)$ и $[b;c]$ и для $[a;b)$ и $(b;c]$.

Определение. Пусть $y = f(x)$ и $D(f) = M$. Значение $f(x_0)$ называется наибольшим (наименьшим) значением на M, если:

1. $x_0 \in M$;
2. $\forall x \in M \quad f(x_0) \geqslant f(x) \quad (f(x_0) \leqslant f(x))$.

Теорема 8. Если $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения: этих значений функция достигает или в критических точках или на концах отрезка $[a;b]$.

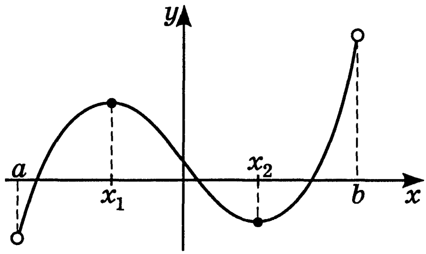
Вывод. Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на $[a;b]$ требуется:

1. Найти все точки, «подозрительные» (или критические) на экстремум, т. е.
   а) стационарные, для которых $f'(x) = 0$;
   б) точки, в которых нет конечной производной, т. е. $f'(x) = \pm\infty$;
   в) точки, в которых нет производной, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
2. Вычислить значение функции во всех этих точках.
3. Вычислить значение функции на концах этого отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$. Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значение функции.

Вопросы

1. Может ли функция, имеющая экстремум, не иметь наибольшего или наименьшего значения?

Ответ: может, смотри данный пример.

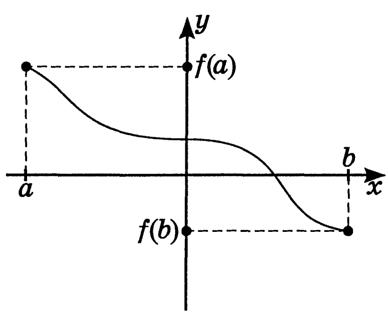


$f(x_1) = y_{\max}$; $f(x_2) = y_{\min}$.

Экстремумы есть, но $y = f(x)$ определена на $(a;b)$ и в данном случае наибольшего и наименьшего значения функции нет.

2. Может ли функция, имеющая наибольшее и наименьшее значение, не иметь экстремумов на $[a;b]$?

Ответ: может, но тогда, например, $f(a) = y_{\text{наиб}}$; $f(b) = y_{\text{наим}}$.

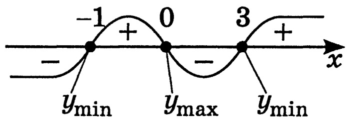


Практикум 17

1. Найдите экстремумы функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ и определите наибольшее и наименьшее значение функции на $[-2; 4]$.

1) а) $y'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$;

б) $y'(x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.



Такая форма записи обозначает, что в точках $x = 1$ и $x = 3$ достигается $y_{\min}$, а в точке $x = 0$ — $x_{\max}$.

в) $y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12} = y_{\min}$;

$y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 + 2 = 2 = y_{\max}$;

$y(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 2 = -\frac{37}{4} = -9\frac{1}{4} = y_{\min}$.

Примечание. Можно определить вид экстремума, используя $y''(x)$:

$y''(x) = \left(x^3 - 2x^2 - 3x\right)' = 3x^2 - 4x - 3$;

$y''(-1)^2 = 3(-1)^2 - 4(-1) - 3 = 4 > 0$, значит $f(-1) = y_{\min}$;

$y''(0) = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$, значит $f(0) = y_{\max}$;

$y''(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 3 = 12 > 0$, значит $f(3) = y_{\min}$.

Таким образом, можно было использовать теорему 7 пункт 2), так как в этих точках $f''(x) \neq 0$.

2) Найдем наибольшее и наименьшее значение на $[-2; 4]$. Для этого вычислим еще кроме значений функции в критических точках значения функции на концах отрезка $[-2; 4]$.

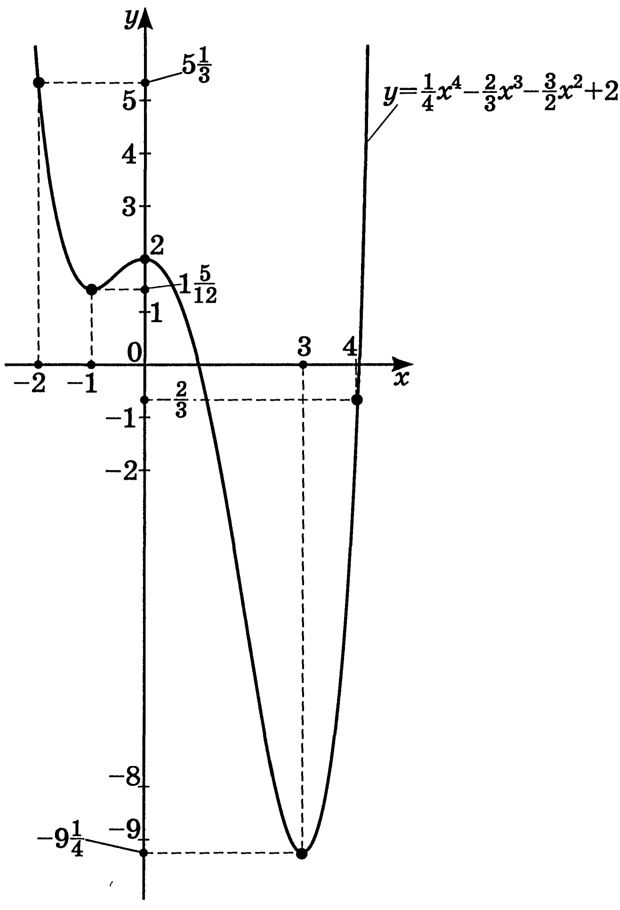
$y(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 + 2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$;

$y(4) = \frac{1}{4} \cdot (4)^4 - \frac{2}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2 + 2 = -\frac{2}{3}$.

Составим таблицу.

x	-2	-1	0	3	4
$f(x)$	$5\frac{1}{3}$	$1\frac{5}{12}$	2	$-9\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$

Отсюда: $y_{\text{наиб}} = f(-2) = 5\frac{1}{3}$; $y_{\text{наим}} = f(3) = -9\frac{1}{4}$.



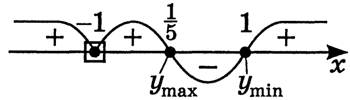
На эскизе графика все наглядно можно увидеть:

на $[-2; 4]$ $E(y) = \left[-9\frac{1}{4}; 5\frac{1}{3}\right]$.

2. Найдите точки экстремума и наибольшее и наименьшее значение функции $y=(x-1)^2(x+1)^3$ на $[-2;2]$.

1) а) $y'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x+1)^2(x-1)^2=$
$=(x-1)(x+1)^2(2(x+1)+3(x-1))=$
$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$;

б) $y'(x)=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{5} \\ x=-1 \end{array}\right.$.



В точке с абсциссой $x=-1$ экстремума нет, так как в δ-окрестности этой точки нет изменения знака производной.

$y(1)=0=y_{\min}$; $y\left(\dfrac{1}{5}\right)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\left(\dfrac{6}{5}\right)^3=\dfrac{3456}{3125}=y_{\max}$.

Итак, точками экстремума являются точки с абсциссами $x=1$ и $x=\dfrac{1}{5}$.

Примечание. Искать экстремумы в данном случае через y'' технически сложно и не исключена вероятность равенства ее в одной из точек нулю, что делает поиск экстремумов через y'' проблематичным.

2) Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $y=(x-1)^2(x+1)^3$ на $[-2;2]$.

Вычислим для этого еще и значения

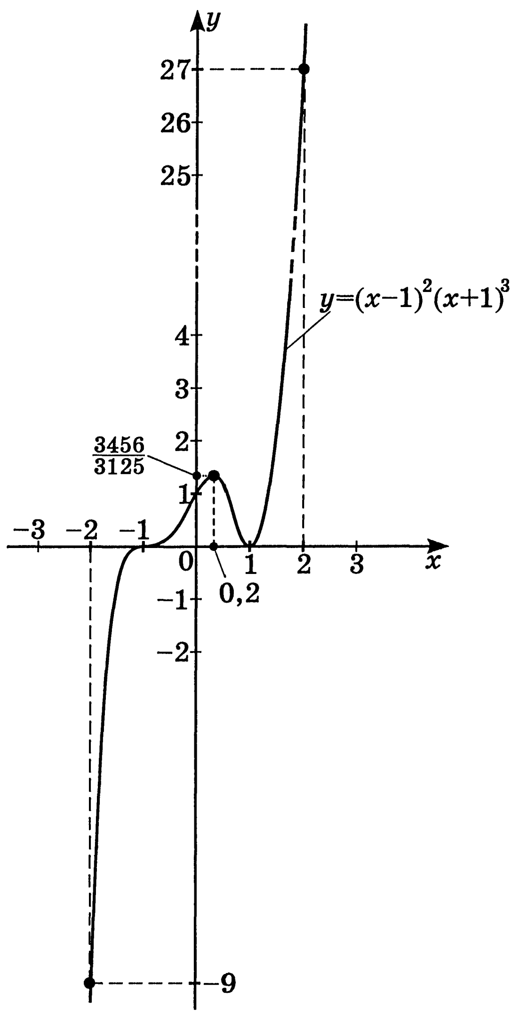
$y(-2)=(-3)^2(-2+1)^3=-9$ и

$y(2)=(2-1)^2(2+1)^3=27$.

Составим таблицу.

x	-2	-1	0,2	1	2
y	-9	0	$\dfrac{3456}{3125}$	0	27

Итак, $y_{\text{наиб}}=27$; $y_{\text{наим}}=-9$.



Эскиз графика иллюстрирует данное исследование.

Примечание. Задача может быть сформулирована несколько иначе. Найдите область изменения функции $y=(x-1)^2(x+1)^3$ на $[-2;2]$, т. е. на $[-2;2]$ $E(y)=?$

3. Найдите экстремумы функции $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ и наибольшее и наименьшее значение функции на $\left[-\frac{1}{8}; \frac{27}{64}\right]$.

1) а) Вычислим вначале $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'$ как производную сложной функции, учитывая что $\sqrt[3]{x^2} \neq x^{\frac{2}{3}}$ $(x > 0)$.

Пусть $t = x^2$, тогда

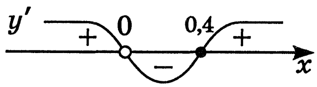
$y(t) = \sqrt[3]{t}; \quad y'_x = t'_x \cdot y'_t.$

$t'_x = 2x; \quad y'_t = \dfrac{1}{3\sqrt{t^2}}.$

Значит $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}.$

б) $y' = 1 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{(x-1)\,2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{3x^2 + 2x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4}} =$

$= \dfrac{x\,(5x-2)}{3\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$ $\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u}$

в) 

г) В точке с абсциссой $x_0 = 0$ производная отсутствует, но экстремумы функции в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 0{,}4$ есть, так как производная в окрестности этих точек меняет свои знаки на противоположные и $y(0) = 0 = y_{\max}$;

$y_{\min} = y\,(0{,}4) = (0{,}4 - 1)\,\sqrt[3]{0{,}16} =$

$= -0{,}6 \cdot 0{,}2\sqrt[3]{20} \approx -0{,}12 \cdot \dfrac{74}{27} = -\dfrac{74}{225} \approx -0{,}328.$

Так как $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \dfrac{x}{na^{n-1}}$,

то $\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{27 - 7} \approx 3 - \dfrac{7}{3 \cdot 3^2} = \dfrac{74}{27}$,

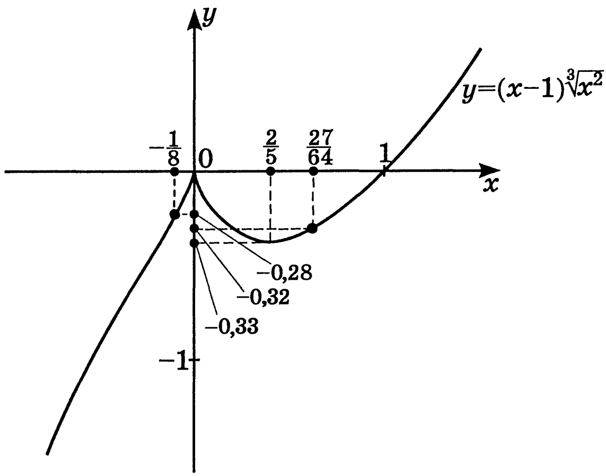
$y_{\min} = y(0{,}4) \approx -0{,}328 \approx -0{,}33.$

2) Найдем наибольшее и наименьшее значение функции на $\left[-\frac{1}{8}; \frac{27}{64}\right]$.

$$f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{9}{8}\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^2} = -\frac{9}{32} \approx -0{,}281 \approx -0{,}28.$$

$$f\left(\frac{27}{64}\right) = -\frac{37}{64}\sqrt[3]{\left(\frac{27}{64}\right)^2} = -\frac{37}{64}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{333}{1024} \approx -0{,}32.$$

x	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{27}{64}$
$f(x)$	$\approx -0{,}28$	0	$\approx -0{,}33$	$\approx -0{,}32$



$$y_{\text{наиб}} = y(0) = 0; \quad y_{\text{наим}} = y(0{,}4) = -0{,}12\sqrt[3]{20}.$$

Примечание: Вычисление приближенных значений было использовано для большей простоты сравнения значений. В радикалах это было бы сделать технически более сложно. В реальной практике, в производстве и научных исследованиях достаточно приближенных вычислений с необходимой степенью точности.

Тренировочная работа 6

1. Вычислите:

1) $y'(1)$ для $y = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{4x^2+1}{3\sqrt{x}}$;

2) $y'(2)$ для $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{x-1}$;

3) $y'(-1)$ для $y = \dfrac{x^2-3x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$;

4) $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ для $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$;

5) $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ для $y = \dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$.

2. Найдите промежутки монотонности:

1) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - \operatorname{tg} 2{,}5$;

2) $y = \dfrac{x^2+3}{x^2+2x}$;

3) $y = \left(x^2 - x\right)\sqrt{x}$;

4) $y = \left(4 - 3x - x^2\right)^{10}$;

5) $y = \dfrac{1}{x^4 - 4x^3 - 8x^2}$;

6) $y = (2x-3)^3(x+1)^2$;

7) $y = -\dfrac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$.

3. Найдите промежутки монотонности и область изменения функции:

1) $y = \sqrt{3}\sin\dfrac{2}{3}x + \cos\dfrac{2}{3}x$ на $[0; 2\pi]$;

2) $y = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}x$ на $[0; 2\pi]$;

3) $y = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 4$ на $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Решение тренировочной работы 6

1. Вычислите:

1) $y'(1)$ для $y = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{4x^2+1}{3\sqrt{x}}$. $\qquad D(y):\ x > 0$

а) Для удобства преобразуем в виде суммы степеней.

$$y = 6x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}};\ y' = -2x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}.$$

б) $y'(1) = -2 + 2 - \dfrac{1}{6} = \boxed{-\dfrac{1}{6}}$.

2) $y'(2)$ для $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x}}{x-1}$.

а) $$y' = \frac{\dfrac{1(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x}}(x-1) - 1\cdot\sqrt{x^2+4x}}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(x+2)(x-1) - x^2 - 4x}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4x}} = \frac{-3x-2}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4x}}.$$

б) $$y'(2) = \frac{-6-2}{(2-1)^2\sqrt{4+8}} = \frac{-8}{\sqrt{12}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{4}{3}\sqrt{3}}.$$

3) $y'(-1)$ для $y = \dfrac{x^2-3x}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$.

а) $$y' = \frac{(2x-3)\sqrt{2x^2-3x+1} - \dfrac{(4x-3)(x^2-3x)}{2\sqrt{2x^2-3x+1}}}{2x^2-3x+1} =$$
$$= \frac{2(2x-3)(2x^2-3x+1) - (4x-3)(x^2-3x)}{2\sqrt{(2x^2-3x+1)^3}} =$$
$$= \frac{8x^3 - 24x^2 + 22x - 6 - 4x^3 + 15x^2 - 9x}{2\sqrt{(2x^2-3x+1)^3}} =$$
$$= \frac{4x^3 - 9x^2 + 13x - 6}{2\sqrt{(2x^2-3x+1)^3}};$$

б) $$y'(-1) = \frac{-4-9-13-6}{2\sqrt{(2+3+1)^3}} = -\frac{32}{2\cdot 6\sqrt{6}} = \boxed{-\frac{4\sqrt{6}}{9}}.$$

4) $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ для $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)$.

а) $y'=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{3}(-3)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)=$
$=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)$;

б) $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{4}\pi\right)=$
$=-2\sin\dfrac{\pi}{6}-\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{2}-0=\boxed{-1}$.

5) $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ для $y=\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$.

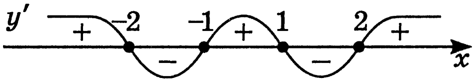
а) $y'=\dfrac{-3\sin 3x\sin 2x-2\cos 2x\cos 3x}{(\sin 2x)^2}=$
$=\dfrac{-\sin 3x\sin 2x-2(\sin 3x\sin 2x+\cos 3x\cos 2x)}{(\sin 2x)^2}=$
$=\dfrac{-\sin 3x\sin 2x-2\cos x}{(\sin 2x)^2}$;

б) $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{-\sin\left(3\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)-2\cos\dfrac{\pi}{3}}{\left(\sin\left(2\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^2}=$
$=\dfrac{-\sin\pi\sin\dfrac{2\pi}{3}-2\cos\dfrac{\pi}{3}}{\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^2}=\dfrac{0-2\cdot\dfrac{1}{2}}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\boxed{-\dfrac{4}{3}}$.

2. Найдите промежутки монотонности:

1) $y=3x^5-25x^3+60x-\operatorname{tg}2{,}5$

$y'=15x^4-75x^2+60=15(x^4-5x^2+4)=$
$=15(x^2-1)(x^2-4)=15(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$.



а) на $(-\infty; -2]$ y возрастает;
б) на $[-2; -1]$ y убывает;
в) на $[-1; 1]$ y возрастает;
г) на $[1; 2]$ y убывает;
д) на $[2; \infty)$ y возрастает.

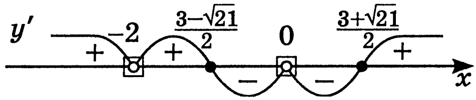
2) $y = \dfrac{x^2+3}{x^2+2x}$.

$$y' = \frac{2x(x^2+2x)-(2x+2)(x^2+3)}{(x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+4x^2-2x^3-2x^2-6x-6}{x^2(x+2)^2} = \frac{2x^2-6x-6}{x^2(x+2)^2};$$

$y' = 0;\quad 2x^2-6x-6=0;\quad x^2-3x-3=0;$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.



а) на $(-\infty; -2)$ y возрастает;

б) на $\left(-2; \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right]$ y возрастает;

в) на $\left[\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}; 0\right)$ y убывает;

г) на $\left(0; \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$ y убывает;

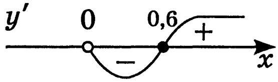
д) на $\left[\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}; \infty\right)$ y возрастает.

3) $y = \left(x^2 - x\right)\sqrt{x};\quad D(y):\ x \geqslant 0$

$$y' = (2x-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2-x\right) =$$

$$= \frac{(2x-1)\,2x + x^2 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2-3x}{2\sqrt{x}};$$

$$y' = \frac{5x^2 - 3x}{2\sqrt{x}}, \text{ где } 0 \notin D(y'), \text{ но } 0 \in D(y).$$



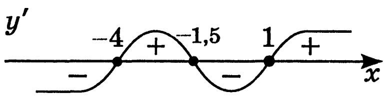
а) на $\left[0; \frac{3}{5}\right]$ y убывает;

б) на $\left[\frac{3}{5}; \infty\right)$ y возрастает.

4) $y = (4 - 3x - x^2)^{10}$.

$y' = 10\left(4 - 3x - x^2\right)^9(-3 - 2x) =$

$= 10(2x + 3)(x - 1)^9(x + 4)^9$.



а) на $(-\infty; -4]$ y убывает;

б) на $[-4; -1{,}5]$ y возрастает;

в) на $[-1{,}5; 1]$ y убывает;

г) на $[1; \infty)$ y возрастает.

5) $y = \dfrac{1}{x^4 - 4x^3 - 8x^2}$.

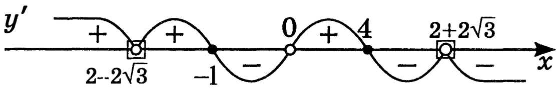
$D(y):\ x^2\left(x^2 - 4x - 8\right) \neq 0; \quad x \neq 2 \pm 2\sqrt{3}$ и $x \neq 0$.

$y' = -(x^4 - 4x^3 - 8x^2)^{-2}(4x^3 - 12x^2 - 16x) =$

$= \dfrac{-4x(x^2 - 3x - 4)}{x^4(x^2 - 4x - 8)^2}$;

$y' = 0; \quad x = 0 \notin D(y)$;

$x^2 - 3x - 4 = 0; \quad x = 4; \quad x = -1$.



а) на $(-\infty; 2-2\sqrt{3})$ y возрастает;

б) на $(2-2\sqrt{3}; -1]$ y возрастает;

в) на $[-1; 0)$ y убывает;

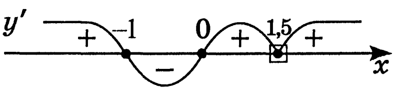
г) на $(0; 4]$ y возрастает;

д) на $[4; 2+2\sqrt{3})$ y убывает;

е) на $\left(2+2\sqrt{3}; \infty\right)$ y убывает.

6) $y = (2x-3)^3(x+1)^2.$

$$y' = 3\cdot 2(2x-3)^2(x+1)^2 + 2(x+1)(2x-3)^3 =$$
$$= 2(2x-3)^2(x+1)\left(3(x+1)+2x-3\right) =$$
$$= 2\cdot 5x\,(2x-3)^2\,(x+1)$$



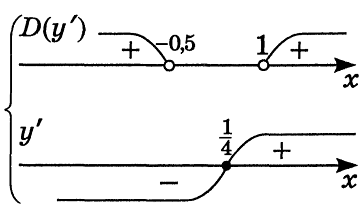
а) на $(-\infty; -1]$ y возрастает;

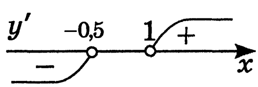
б) на $[-1; 0]$ y убывает;

в) на $[0; \infty)$ y возрастает.

7) $y = -\dfrac{3}{\sqrt{2x^2-x-1}}.$

$$y' = \frac{3}{2}(2x^2-x-1)^{-\frac{3}{2}}(4x-1) = \frac{3(4x-1)}{2\sqrt{(2x^2-x-1)^3}}.$$





а) на $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ y убывает;

б) на $(1; \infty)$ y возрастает.

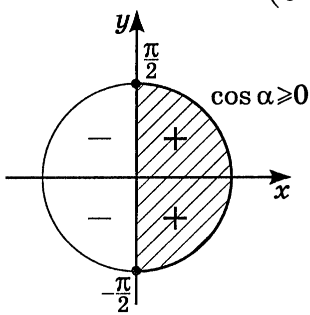
3. Найдите промежутки монотонности и область изменения функции:

1) $y = \sqrt{3}\sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{2}{3}x$ на $[0; 2\pi]$

а) $y' = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}x = \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}x\right) =$

$= \frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{2}{3}x - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{2}{3}x\right) = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right).$

б) Пусть $y' \geqslant 0$; $\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0.$



$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \geqslant \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \geqslant -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \geqslant \frac{2}{3}x \geqslant -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \geqslant \frac{2}{3}x \geqslant -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k;$

$\frac{\pi}{2} + 3\pi k \geqslant x \geqslant -\pi + 3\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$k = 0; \quad x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right] \cap [0; 2\pi] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

$k = 1; \quad x \in [2\pi; 3{,}5\pi] \cap [0; 2\pi] = 2\pi.$

Значит, на $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ $y' \leqslant 0$, т. е.

на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ y возрастает; на $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ y убывает.

в) Для нахождения области изменения на $[0;2\pi]$ найдем значения в стационарных точках и на концах $[0;2\pi]$.

$y(0)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\cdot 0\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\cdot 0\right)=1;$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=2;$

$y(2\pi)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\cdot 2\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\cdot 2\pi\right)=$

$=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}=-2.$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
y	1	2	-2

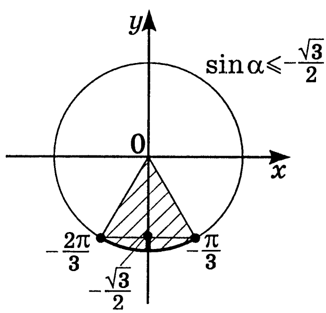
Значит на $[0;2\pi]$ $E(y)=[-2;2]$.

2) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}x$ на $[0;2\pi]$.

а) $y'=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}.$

б) Пусть $y'\geqslant 0$: $-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\geqslant 0;$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}.$



$$-\frac{\pi}{3}+2\pi k \geqslant 2x+\frac{\pi}{3} \geqslant -\frac{2}{3}\pi+2\pi k;$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \geqslant 2x \geqslant -\pi+2\pi k;$$

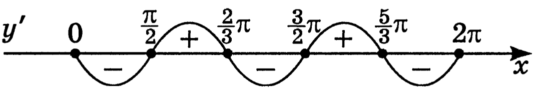
$$-\frac{\pi}{3}+\pi k \geqslant x \geqslant -\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$k=0; \qquad x\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right] \not\subset [0;2\pi];$$

$$k=1; \qquad x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right] \subset [0;2\pi];$$

$$k=2; \qquad x\in\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}\right] \subset [0;2\pi].$$

Тогда на остальных промежутках на $[0;2\pi]$ $\quad y'\leqslant 0$,



Следовательно,

1. на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad y$ убывает;
2. на $\left[\frac{\pi}{2};\frac{2}{3}\pi\right]$ $\quad y$ возрастает;
3. на $\left[\frac{2}{3}\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$ $\quad y$ убывает;
4. на $\left[\frac{3}{2}\pi;\frac{5}{3}\pi\right]$ $\quad y$ возрастает;
5. на $\left[\frac{5}{3}\pi;2\pi\right]$ $\quad y$ убывает.

в) Для нахождения области изменения функции вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка $[0;2\pi]$.

$$y(0)=\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cdot 0=\frac{1}{2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{2};$$

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3};$$

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cdot\frac{3\pi}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2};$$
$$y\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(2\cdot\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cdot\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{5\pi\sqrt{3}}{3};$$
$$y(2\pi)=\cos\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cdot 2\pi=\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\pi.$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}-\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\pi$

Итак, на $[0;2\pi]$ $E(y)=\left[\frac{1}{2}-2\sqrt{3}\pi;\frac{1}{2}\right]$.

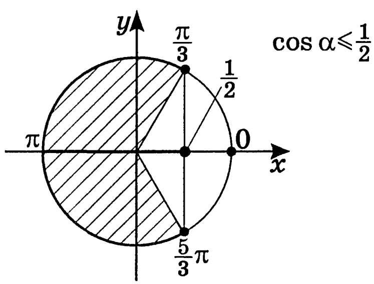
3) $y=3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x-4$ на $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

а) $y'=\dfrac{3}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}=$

$$=\frac{3\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\frac{4\sin^2 x-1}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=$$
$$=\frac{\frac{4(1-\cos 2x)}{2}-1}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\frac{1-2\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}.$$

Так как на $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ $\cos^2 x\cdot\sin^2 x>0$, то знак производной зависит только от числителя.

б) Пусть $y'\geqslant 0$, тогда $1-2\cos 2x\geqslant 0$; $\cos 2x\leqslant\frac{1}{2}$;



$$\frac{5}{3}\pi + 2\pi k \geqslant 2x \geqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$\frac{5}{6}\pi + \pi k \geqslant x \geqslant \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$k = 0; \qquad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right] \cap \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi\right].$$

Значит на $\left[\frac{5}{6}\pi; \pi\right)$ $y' \leqslant 0$, т. е.

на $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5}{6}\pi\right]$ y возрастает;

на $\left[\frac{5}{6}\pi; \pi\right)$ y убывает.

в) Для нахождения области изменения функции на $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ вначале найдем значение функции в стационарной точке $x = \frac{5}{6}\pi$:

$$y\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3\operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 4 =$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \sqrt{3} - 4 = -2\left(\sqrt{3} + 2\right).$$

Так как при

$$\left(x \to \frac{\pi}{2} + 0\right) \Rightarrow (\operatorname{tg} x \to -\infty);$$

$$\left(x \to \frac{\pi}{2} + 0\right) \Rightarrow (\operatorname{ctg} x \to 0);$$

$$(x \to \pi - 0) \Rightarrow (\operatorname{tg} x \to 0);$$

$$(x \to \pi - 0) \Rightarrow (\operatorname{ctg} x \to -\infty),$$

то на $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ $\quad E(y) = \left(-\infty; -2\left(\sqrt{3} + 2\right)\right]$.

Тренировочная работа 7

1. Найдите экстремумы функций:

1) $y = x^4 - 5x^2 + 3$;

2) $y = \left(x^2 + x\right) \sqrt[3]{x}$;

3) $y = (2x - 1)^3 (3x + 2)^4$;

4) $y = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x} - 1}$;

5) $y = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$;

6) $y = \left(4x^2 - x - 3\right)^2$;

7) $y = 2x^2\sqrt{1 - 2x}$;

8) $y = 36x - 3x^2 + 4\sqrt{x^3}$;

9) $y = \dfrac{(5 - 2x)^7}{\sqrt[4]{(3x + 1)^3}}$;

10) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на $[0; 2\pi]$.

2. Найдите на данном отрезке область изменения функции $E(y)$.

1) $y = (x - 3)^3 (x + 2)^2$ на $[-1; 4]$;

2) $y = \dfrac{1}{-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8}$ на $[-3; 3]$;

3) $y = (x + 2) \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ на $[-1; 3]$;

4) $y = (x + 5) \sqrt[3]{x^2}$ на $[-3; 1]$;

5) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}$ на $[-3; 3]$;

6) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x - 1}}$ на $[1{,}125; 3]$;

7) $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x$ на $[0; \pi]$;

8) $y = \cos x\sqrt[3]{\sin x}$ на $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

9) $y = x + \dfrac{8}{x^4}$ на $[-2; -1]$;

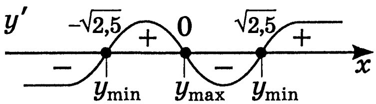
10) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение тренировочной работы 7

1. Найдите экстремумы функций:

1) $y = x^4 - 5x^2 + 3$.

$y' = 4x^3 - 10x = 2x\left(2x^2 - 5\right);$



$y_{\min} = y\left(-\sqrt{2{,}5}\right) = \left(-\sqrt{2{,}5}\right)^4 - 5\left(-\sqrt{2{,}5}\right)^2 + 3 =$
$= 6{,}25 - 12{,}5 + 3 = -3{,}25;$

$y_{\max} = y(0) = 3;$

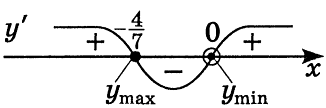
$y_{\min} = y\left(\sqrt{2{,}5}\right) = y\left(-\sqrt{2{,}5}\right) = -3{,}25,$

так как $f(-x) = f(x)$ — четная функция.

2) $y = \left(x^2 + x\right)\sqrt[3]{x}$. $\quad D(y) = (-\infty; \infty)$;

$$y' = (2x+1)\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(x^2 + x\right) =$$

$$= \frac{(2x+1)\,3x + x^2 + x}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x(7x+4)}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$



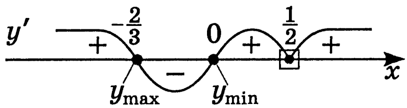
Хотя $0 \notin D(y')$, но $0 \in D(y)$.

$$y_{\max} = y\left(-\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{16}{49} - \frac{4}{7}\right)\sqrt[3]{-\frac{4}{7}} = \frac{12}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}} = \frac{12\sqrt[3]{196}}{343};$$

$y_{\min} = y(0) = 0.$

3) $y = (2x-1)^3(3x+2)^4$.

$y' = 3(2x-1)^2 \cdot 2(3x+2)^4 + 4(3x+2)^3 \cdot 3(2x-1)^3 =$
$= 6(2x-1)^2(3x+2)^3(3x + 2 + 2(2x-1)) =$
$= 6(2x-1)^2(3x+2)^3 \cdot 7x.$



$$y_{\max} = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 \cdot 0 = 0;$$

$$y_{\min} = y\,(0) = (-1)^3 \cdot 2^4 = -16.$$

4) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}-1}$.

$$y' = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{x}-1\right) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(x+2)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{2x - 2\sqrt{x} + x + 2}{2\sqrt{x}\,\left(\sqrt{x}-1\right)^2} =$$

$$= \frac{3x - 2\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}\,\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.$$

Так как $3x - 2\sqrt{x} + 2 > 0 \quad (\forall x \geqslant 0)$; $\left(\begin{matrix} D < 0 \\ a = 3 > 0 \end{matrix}\right)$,

то $y' > 0 \ \ (\forall x \in D\,(y'))$ — экстремумов нет.

5) $y = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.

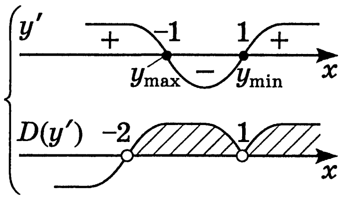
$D\,(y): \ x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$.

Пусть $t(x) = x^3 - 3x + 2$; $t(1) = 0$, значит $t(x) \vdots (x-1)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad - 3x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad & x^2 + x - 2 \\ -\ x^2 - 3x \quad & \\ \underline{x^2 - \ \ x} \quad & \\ -\ -2x + 2 & \\ \underline{-2x + 2} & \end{array}$$

$t(x) = (x+2)(x-1)^2 \geqslant 0; \qquad D\,(y) = [-2; \infty)$.

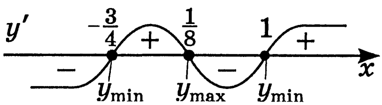
$$y' = \frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x + 2}} = \frac{3\,(x+1)\,(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2(x+2)}};$$



$y_{\max} = y(-1) = \sqrt{-1+3+2} = 2$; $y'(1)$ — не определена, но $1 \in D(y)$, тогда $y_{\min} = y(1) = 0$.

6) $y = \left(4x^2 - x - 3\right)^2$.

$y' = 2(8x-1)\left(4x^2 - x - 3\right) = 2(8x-1)(x-1)(4x+3)$;



$$y_{\min} = y\left(-\frac{3}{4}\right) = 0;$$

$$y_{\max} = y\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8} - 1\right)^2 \left(\frac{4}{8} + 3\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{2}\right)^2 = $$

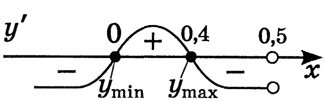
$$= \frac{2401}{256} = 9\frac{97}{256};$$

$$y_{\min} = y(1) = 0.$$

7) $y = 2x^2\sqrt{1-2x}$. $D(y)$: $(-\infty; 0{,}5]$;

$$y' = 4x\sqrt{1-2x} + \frac{-2 \cdot 2x^2}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{4x(1-2x) - 2x^2}{\sqrt{1-2x}} =$$

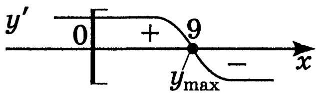
$$= \frac{2x(2-5x)}{\sqrt{1-2x}};$$



$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(0{,}4) = \frac{8}{25}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{8}{125}\sqrt{5}.$$

8) $y = 36x - 3x^2 + 4\sqrt{x^3};\qquad D(y):\ x \geqslant 0;$

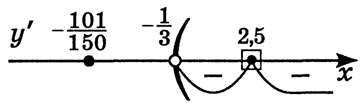
$$y' = 36 - 6x + 4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} = 6\left(6 + \sqrt{x} - x\right) =$$
$$= -6\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)\qquad \left(\sqrt{x} + 2 > 0;\quad \forall x \geqslant 0\right).$$



$$y_{\max} = y(9) = 36\cdot 9 - 3\cdot 81 + 4\cdot 27 = 189.$$

9) $y = \dfrac{(5-2x)^7}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}};\qquad D(y):\ x > -\dfrac{1}{3};$

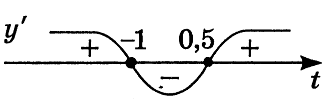
$$y' = \frac{7(5-2x)^6(-2)\sqrt[4]{(3x+1)^3} - \frac{3}{4}(3x+1)^{-\frac{1}{4}}\cdot 3(5-2x)^7}{\sqrt{(3x+1)^3}} =$$
$$= \frac{-(5-2x)^6\left(56(3x+1) + 9(5-2x)\right)}{4\sqrt[4]{3x+1}\sqrt{(3x+1)^3}} =$$
$$= \frac{-(5-2x)^6(150x+101)}{4\sqrt[4]{3x+1}\sqrt{(3x+1)^3}};$$



$-\dfrac{101}{150} \notin \left(-\dfrac{1}{3};\infty\right)$. Экстремумов нет.

10) $y = 2\sin x + \sin 2x$ на $[0;2\pi]$.

$$y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) =$$
$$= 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1).$$ Пусть $t = \cos x$.

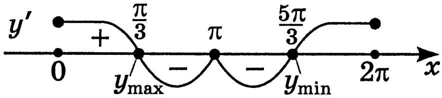


Но $\cos x \geqslant -1$.

Пусть $y' \geqslant 0$, тогда $\left[\begin{array}{l}\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -1\end{array}\right.$, значит

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \geqslant x \geqslant -\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\quad x = \pi + 2\pi k;\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим на $[0; 2\pi]$ знаки y'.



Значит $y_{\max} = y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ и

$$y_{\min} = y\left(\frac{5}{3}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{10}{3}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Найдите на данном отрезке область изменения функции $E(y)$.

1) $y = (x-3)^3(x+2)^2$ на $[-1; 4]$.

$$y' = 3(x-3)^2(x+2)^2 + 2(x+2)(x-3)^3 =$$
$$= (x-3)^2(x+2)(3(x+2) + 2(x-3)) =$$
$$= (x-3)^2(x+2)\,5x;$$

$$y' = 0, \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -2 \notin [-1; 4] \\ x = 0 \end{array}\right. .$$

$f(-1) = (-4)^3(1)^2 = -64;\quad f(0) = -27\cdot 4 = -108;$

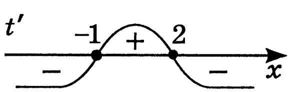
$f(3) = 0;\quad f(4) = 1^3\cdot 6^2 = 36.$

x	-1	0	3	4
y	-64	-108	0	36

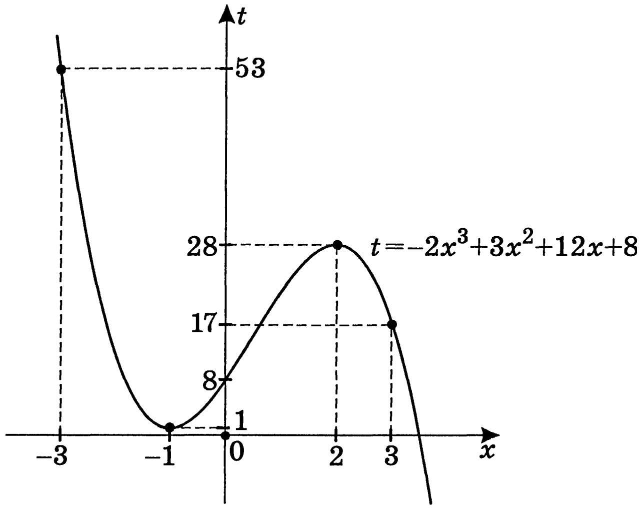
Итак, на $[-1; 4]$ $E(y) = [-108; 36]$.

2) $y = \dfrac{1}{-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8}$ на $[-3; 3]$.

а) Прежде необходимо выяснить, нет ли на $[-3; 3]$ корней функции $t(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 8$, т. е. $[-3; 3] \subset D(y)$ или нет. Исследуем $t(x)$ на $[-3; 3]$. $t'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x-2)(x+1)$;



$$t(-3) = -2(-3)^2 + 3(-3)^2 + 12(-3) + 8 = 53 > 0;$$
$$t_{\min} = t(-1) = -2(-1)^3 + 3 \cdot 1 - 12 + 8 = 1 > 0;$$
$$t_{\max} = t(2) = -2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 8 = 28 > 0;$$
$$t(3) = -2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 8 = 17 > 0.$$



Вид эскиза $t(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 8$.

Очевидно, что $t(x) > 0$ на $[-3;3]$, т. е. на $[-3;3]$ вертикальных асимптот функции $y(x)$ нет.

б) $$y' = \frac{-\left(6x^2 - 6x - 12\right)}{\left(-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8\right)^2} =$$
$$= \frac{-6(x-2)(x+1)}{\left(-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8\right)^2};$$
$$y' = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$
$$f(-3) = \frac{1}{54 + 27 - 36 + 8} = \frac{1}{53};$$
$$f(-1) = \frac{1}{2 + 3 - 12 + 8} = 1;$$
$$f(2) = \frac{1}{28}; \quad f(3) = \frac{1}{17}.$$

x	-3	-1	2	3
y	$\frac{1}{53}$	1	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{17}$

Итак, на $[-3;3]$ $E(y)=\left[\frac{1}{53};1\right]$.

3) $y=(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}$ на $[-1;3]$. $E(y)=?$

а) $y'=1\cdot\sqrt{x^2-4x+4}+\dfrac{(2x-4)(x+2)}{2\sqrt{x^2-4x+4}}=$

$=\dfrac{x^2-4x+4+x^2-4}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$.

$y'=0$; $x=0$; $x=2\notin D(y')$, но $x=2\in D(y)$.

$y(-1)=1\cdot3=3$; $y(0)=2\cdot2=4$; $y(2)=4\cdot0=0$;

$y(3)=5\cdot1=5$.

x	-1	0	2	3
y	3	4	0	5

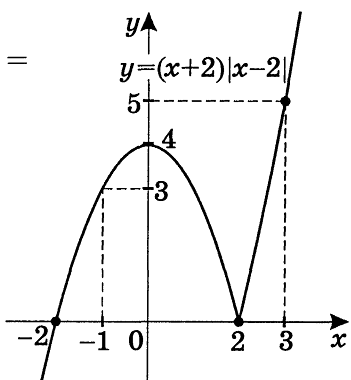
Итак, на $[-1;3]$ $E(y)=[0;5]$.

б) Можно проще, если построить график составной квадратичной функции.

$y=(x+2)\sqrt{x^2-4x+4}=$

$=(x+2)|x-2|=$

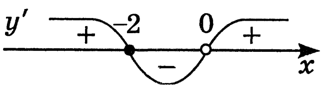
$=\begin{cases} x^2-4; & x\geqslant 2\\ 4-x^2; & x<2 \end{cases}$.



Из графика очевидно следует, что на $[-1;3]$ $E(y)=[0;5]$.

4) $y=(x+5)\sqrt[3]{x^2}$ на $[-3;1]$. $E(y)=?$

$y'=1\cdot\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2x(x+5)}{3\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{3x^2+2x^2+10x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\dfrac{5x(x+2)}{3\sqrt[3]{x^4}}$.



При $x = 0$ производная не определена, но $0 \in D(y)$.

$f(-3) = 2\sqrt[3]{9}$; $f(-2) = 3\sqrt[3]{4}$; $f(0) = 0$; $f(1) = 6$.

x	-3	-2	0	1
y	$2\sqrt[3]{9}$	$3\sqrt[3]{4}$	0	6

Значит на $[-3; 1]$ $E(y) = [0; 6]$.

5) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$ на $[-3; 3]$. $E(y) = ?$

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{4 \cdot 2x}{\sqrt{(x^2+16)^3}} = -\frac{4x}{\sqrt{(x^2+16)^3}}; \quad y' = 0; \quad x = 0.$$

$$f(-3) = \frac{4}{\sqrt{9+16}} = 0{,}8; \quad f(0) = \frac{4}{\sqrt{16}} = 1; \quad f(3) = 0{,}8.$$

x	-3	0	3
y	$0{,}8$	1	$0{,}8$

На $[-3; 3]$ $E(y) = [0{,}8; 1]$.

6) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x-1}}$ на $[1{,}125; 3]$. $E(y) = ?$

$$y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{-2}} \cdot \frac{2x(x-1) - 1 \cdot x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^4}};$$

$y' = 0$; $x = 0 \notin D(y')$ и $0 \notin \left[1\frac{1}{8}; 3\right]$;

$x = 1 \notin D(y')$ и $1 \notin \left[1\frac{1}{8}; 3\right]$;

$x = 2 \in \left[1\frac{1}{8}; 3\right]$;

$$f\left(1\frac{1}{8}\right)=\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^2}{\frac{9}{8}-1}}=\sqrt[3]{\frac{81}{8}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{3};$$

$$f(2)=\sqrt[3]{\frac{2^2}{2-1}}=\sqrt[3]{4};$$

$$f(3)=\sqrt[3]{\frac{9}{3-1}}=\sqrt[3]{4{,}5}.$$

x	$1\frac{1}{8}$	2	3
y	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4{,}5}$

Так как $\sqrt[3]{4{,}5}<\sqrt[3]{\frac{81}{8}}=\sqrt[3]{10\frac{1}{8}}$, то на $[1{,}125;3]$

$E(y)=\left[\sqrt[3]{4};\ 1{,}5\sqrt[3]{3}\right]$.

7) $y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$ на $[0;\pi]$. $E(y)=?$

$$y'=-2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=-2\sin x\cos x+\cos x=$$
$$=\cos x(1-2\sin x);$$

$$y'=0;\qquad \left[\begin{aligned}&\cos x=0\\&\sin x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right.;\qquad \left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{2}+\pi k\\&x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\end{aligned}\right.;\quad k,n\in\mathbb{Z}.$$

$$f(0)=\frac{1}{2}\cos 0+\sin 0=\frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4};$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\pi+\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}(-1)+1=\frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4};$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2}\cos 2\pi + \sin\pi = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	π
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

На $[0;\pi]$ $\quad E(y) = \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$.

8) $y = \cos x\sqrt[3]{\sin x}$ на $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. $\quad E(y) = ?$

$$y' = -\sin x\sqrt[3]{\sin x} + \frac{\cos x\cos x}{3\sqrt[3]{(\sin x)^2}} = \frac{-3\sin^2 x + \cos^2 x}{3\sqrt[3]{(\sin x)^2}} =$$
$$= \frac{-4\sin^2 x + 1}{3\sqrt[3]{(\sin x)^2}};$$

$D(y')$: $\sin x \neq 0$. При $\sin x = 0$, т. е. при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ производная неопределена.

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right., \quad \text{на } \left[0;\frac{3}{2}\pi\right] \text{ это возможно,}$$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ при $x \in \left\{\frac{\pi}{6};\ \frac{6}{5}\pi;\ \frac{7}{6}\pi\right\}$.

$f(0) = 0;$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\sqrt[3]{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4};$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\frac{5}{6}\pi\sqrt[3]{\sin\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4};$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6}\sqrt[3]{\sin\frac{7\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4};$$

$f(\pi) = 0;$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0.$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
y	0	$\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4}$	0

На $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ $\quad E(y) = \left[-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4}; \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{4}\right].$

9) $y = x + \frac{8}{x^4}$ на $[-2; -1]$. $\quad E(y) = ?$

$y' = 1 - \frac{4 \cdot 8}{x^5} = \frac{x^5 - 2^5}{x^5};$

$y' = 0$ при $x = 2 \notin [-2; -1]$. $\qquad x = 0 \notin [-2, -1]$.

$f(-2) = -2 + \frac{8}{16} = -1{,}5; \quad f(-1) = -1 + 8 = 7.$

x	-2	-1
y	$-1{,}5$	7

На $[-2; -1]$ $\quad E(y) = [-1,5; 7]$.

10) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. $\quad E(y) = ?$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 2\cos 2x + \frac{1}{3} \cdot 3\sin x \cos^2 x + \sin x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x \cos^2 x + \sin x;$$

$y' = 0; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x \cos^2 x + \sin x = 0;$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \sin x\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x = 0;$

$\sin^2 x + \sin x - \sin^3 x + \sin x = 0;$

$$-\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin^2 x - \sin x - 2 = 0\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 2 \notin [-1;1]\\ \sin x = -1\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi k\\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\end{array}\right.; \quad k,\, n \in \mathbb{Z}.$$

$$f(0) = 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 1 - 1 = -\frac{4}{3};$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4};$$

$$f(\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi - \frac{1}{3}\cos^3\pi - \cos\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.$$

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	π
y	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{3}$

На $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ $\quad E(y) = \left[-\dfrac{4}{3}; \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{3}\right]$.

Практикум 18

Решение задач на наибольшие и наименьшие значения с использованием свойств квадратного трехчлена.

1. Имеется кусок проволоки длиной m метров. Огородить этой проволокой участок земли, одна сторона которого примыкает к стене здания, так чтобы площадь участка прямоугольной формы была бы наибольшей.

2. В равнобедренную трапецию с основаниями, равными 10 и 4, и высотой 4 вписали прямоугольник наибольшей площади. Вычислите площадь такого прямоугольника.

3. В равнобедренную трапецию с основаниями, равными 10 и 6, и высотой 5 вписали прямоугольник наибольшей площади. Найдите периметр и площадь такого прямоугольника.

4. Найдите наименьшее расстояние между корнями трехчлена $y = x^2 + (2a - 1)\,x - a^2$.

5. График $y = f\,(x) = \dfrac{9}{x - a}$ пересекает прямую $y = x + 10$ в двух точках A и B. Найдите наименьшее значение отрезка AB.

6. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos^4 x + \sin^4 x$.

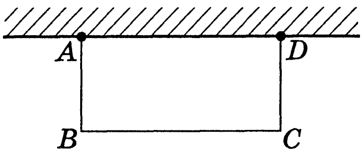
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \dfrac{1}{4\cos^2 x - 2\cos x + 3}$.

8. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 3)\,(x + 4)\,(x + 8)\,(1 - x)$.

9. Сечение правильного тетраэдра плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам, является параллелограммом наибольшей площади. Найдите площадь и периметр такого параллелограмма, если ребро тетраэдра равно a.

Решение практикума 18

1. Имеется кусок проволоки длиной m метров. Огородить этой проволокой участок земли, одна сторона которого примыкает к стене здания, так чтобы площадь участка прямоугольной формы была бы наибольшей.



$$AB + BC + CD = m.$$

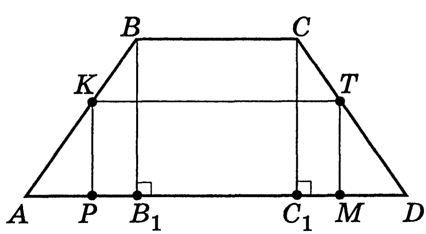
Пусть $AB = x$; тогда $AD = m - 2x$, $S_{ABCD} = AB \cdot AD$, т. е. $S(x) = x(m-2x) = -2x^2 + mx$; $x > 0$; $m - 2x > 0$; $D(f) = \left(0; \frac{m}{2}\right)$.

Так как для $y = ax^2 + bx + c$, если $a < 0$, существует наибольшее значение при $x_0 = -\frac{b}{2a}$, то в данном случае $x_0 = -\frac{m}{2(-2)} = \frac{m}{4}$.

Значит при $x = \frac{m}{4}$ $S_{\text{наиб}} = S\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{m}{4}\left(m - 2 \cdot \frac{m}{4}\right) = \frac{m^2}{8}$.

Ответ: $S_{\text{наиб}} = \frac{m^2}{8}$ (кв. ед.) при $x = \frac{m}{4}$.

2. В равнобедренную трапецию с основаниями, равными 10 и 4, и высотой 4 вписали прямоугольник наибольшей площади. Вычислите площадь такого прямоугольника.



1) Дополнительно построим $BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$ $(BB_1 = CC_1)$.

2) По условию $AB = CD$, значит $\Delta ABB_1 = \Delta DCC_1$, тогда $AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}$; т. е. $AB_1 = \dfrac{10-4}{2} = 3$.

3) Из ΔABB_1: $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{BB_1}{AB_1}$; $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{4}{3}$.

4) Пусть $PM = 2x$; $AP = \dfrac{AD - PM}{2}$;

$AP = \dfrac{10-2x}{2} = 5 - x$, тогда $PK = AP \operatorname{tg}(\angle A)$;

$PK = (5-x)\dfrac{4}{3} \quad (5 - x > 0)$.

5) $S_{PKTM} = PK \cdot PM$; $S(x) = \dfrac{4}{3}(5-x)\cdot 2x$; $D(S) = [2;5)$.

При $PM = 4 \quad x = 2$.

6) $S(x) = -\dfrac{8}{3}x^2 + \dfrac{40}{3}x$ — квадратичная функция. Так как $a < 0$, то существует $S_{\text{наиб}}$ при $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

В данном случае $x_0 = -\dfrac{\frac{40}{3}}{2\left(-\frac{8}{3}\right)} = 2{,}5 \in D(S)$.

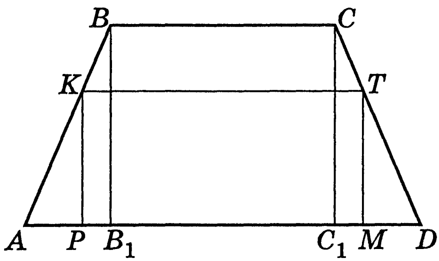
Итак, $S_{\text{наиб}} = S(2{,}5) = \dfrac{4}{3}(5-2{,}5)\cdot 2\cdot 2{,}5 = 16\dfrac{2}{3}$ (кв. ед.)

Ответ: наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в трапецию, равна $16\dfrac{2}{3}$ (кв. ед.).

3. В равнобедренную трапецию с основаниями, равными 10 и 6, и высотой 5 вписали прямоугольник наибольшей площади. Найдите периметр и площадь такого прямоугольника.

1) $AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}$; $AB_1 = \dfrac{10-6}{2} = 2$.

2) $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{BB_1}{AB_1}$; $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{5}{2}$.



3) Положим $PM = 2x$, тогда $AP = \dfrac{AD - PM}{2}$;

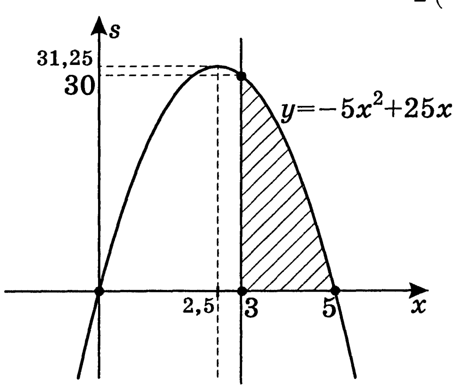
$AP = \dfrac{10 - 2x}{2} = 5 - x$; $PK = AP \operatorname{tg}(\angle A)$;

$PK = (5 - x) \cdot \dfrac{5}{2}$.

4) $S_{PKTM} = PK \cdot PM$; $S(x) = \dfrac{5}{2}(5 - x)\,2x$;

$D(S) = [3; 5)$.

5) $S(x) = 5x(5 - x) = -5x^2 + 25x$ — квадратичная функция ($-5 < 0$), значит при $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ существует наибольшее значение функции, где $x_0 = -\dfrac{25}{2(-5)} = 2{,}5$;



$S_{\text{наиб}} = S(2{,}5) = 31{,}25$ (кв. ед). Но $2{,}5 \notin [3;5)$, поэтому исследуем функцию более подробно.

Так как на $[2{,}5;\infty)$ $f(x)\downarrow$,

то $f(3)$ — наибольшее из возможных,

т. е. $S_{\text{наиб}} = S(3) = 5\cdot 3(5-3) = 30$ (кв. ед.).

Геометрически это означает, что наибольший по площади прямоугольник — это BB_1C_1C.

Ответ: $S_{\text{наиб}} = 30$ (кв. ед.); $P_{BB_1C_1C} = 22$ (лин. ед.).

4. Найдите наименьшее расстояние между корнями трехчлена $y = x^2 + (2a-1)x - a^2$.

$D = (2a-1)^2 + 4a^2 = 8a^2 - 4a + 1 = 8\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ $(\forall a)$, значит $x_1 \neq x_2$;

для $x^2 + px + g = 0$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2};\quad x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}.$$

$x_1 - x_2 = \sqrt{D}$, значит разность между корнями (т. е. расстояние между ними) будет наименьшим при наименьшем значении $\sqrt{D}$, но $D = 8\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$ — квадратичная функция, значит $D_{\text{наим}}$ будет при $a = \frac{1}{4}$.

$D_{\text{наим}} = D\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, таким образом наименьшее

$x_1 - x_2 = \sqrt{D_{\text{наим}}}$, т. е. $(x_1 - x_2)_{\text{наим}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ответ: наименьшее расстояние между корнями функции $y = x^2 + (2a-1)x - a^2$ равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $a = \frac{1}{4}$.

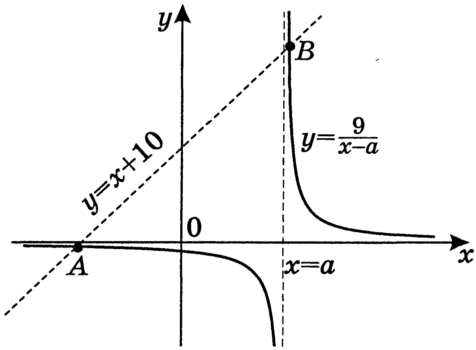
5. График $y = f(x) = \dfrac{9}{x-a}$ пересекает прямую $y = x + 10$ в двух точках: A и B. Найдите наименьшее значение отрезка AB.

Абсциссы точек пересечения графиков связаны уравнением $\dfrac{9}{x-a} = x + 10 \quad (x \neq a)$.

$(x+10)(x-a) = 9; \quad x^2 + 10x - ax - 10a = 9;$

$D = (10-a)^2 + 4(10a+9) = a^2 + 20a + 136 = (a+10)^2 + 36 > 0$ $(\forall a)$. Значит $x_1 \neq x_2$.

Определим координаты точек A и B.



$A(x_1; x_1 + 10); \quad B(x_2; x_2 + 10)$.

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$

$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 10 - (x_2 + 10))^2};$

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|\sqrt{2},$

но $|x_1 - x_2| = \sqrt{D}$ (см. задачу 4.).

$D = (a+10)^2 + 36; \quad D_{\text{наим}} = 36$ при $a = -10$, значит $|x_1 - x_2|_{\text{наим}} = \sqrt{36} = 6$, тогда $AB_{\text{наим}} = 6\sqrt{2}$.

Ответ: наименьшее расстояние между точками пересечения графиков $y = \dfrac{9}{x-a}$ и $y = x + 10$ равно $6\sqrt{2}$ при $a = -10$.

6. Найдите наименьшее значение функции $y=2\cos^4 x+\sin^4 x$.

Для упрощения используем формулы понижения
$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Тогда $y = 2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 =$

$= \dfrac{2+4\cos 2x+2\cos^2 2x+1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} =$

$= \dfrac{3\cos^2 2x+2\cos 2x+3}{4}$.

Учитывая, что мы имеем дело с квадратичной функцией относительно $\cos 2x$, и замечая, что $3>0$ (т. е. $a>0$), убеждаемся в том, что существует $y_{\text{наим}}$.

При $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, т. е. $\cos 2x = -\dfrac{2}{2\cdot 3} = -\dfrac{1}{3} \in [-1;1]$, значит

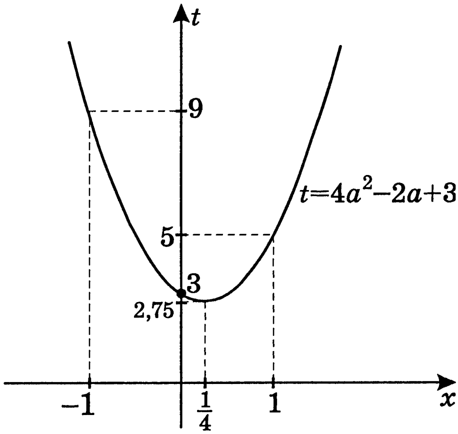
$$y_{\text{наим}} = \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)+3}{4} = \frac{1-2+9}{12} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: наименьшее значение функции $y=2\cos^4 x+\sin^4 x$ равно $\dfrac{2}{3}$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции
$y = \dfrac{1}{4\cos^2 x-2\cos x+3}$.

Пусть $t(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x + 3$. Ее можно представить в виде $t(x) = \left(2\cos x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 2{,}75$. Пусть $\cos x = a$, тогда $t(a) = \left(2a-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2{,}75$, $t_{\text{наим}} = t\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2{,}75$, значит $y_{\text{наиб}} = \dfrac{1}{t_{\text{наим}}} = \dfrac{1}{2{,}75} = \dfrac{4}{11}$.

Вычислить наименьшее значение несколько сложнее.



Построим график $t(a) = 4a^2 - 2a + 3$, учтем, что $a \in [-1; 1]$.
$t(1) = 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 5$; $\quad t(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 9$;
$t_{\text{наиб}} = 9$, значит $y_{\text{наим}} = \dfrac{1}{t_{\text{наиб}}} = \dfrac{1}{9}$.

Ответ: наибольшее значение функции
$y = \dfrac{1}{4\cos^2 x - 2\cos x + 3}$ равно $\dfrac{4}{11}$, а наименьшее значение функции равно $\dfrac{1}{9}$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$y = (x+3)(x+4)(x+8)(1-x)$.

Попробуем заменой переменной упростить решение задачи. Так как $(x+3)(x+4) = x^2 + 7x + 12$,
а $(x+8)(1-x) = -\left(x^2 + 7x - 8\right)$,
то полагая $x^2 + 7x + 12 = t$,
получим, что $-\left(x^2 + 7x - 8\right) = 20 - t$, тогда $y(t) = t(20 - t)$.

В результате имеем квадратичную функцию.

$t_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы.

Так как здесь ветви параболы направлены вниз, то существует $y_{\text{наиб}} = y(t_0)$.

Найдем $t_0 = -\dfrac{20}{2(-1)} = 10$; $y_{\text{наиб}} = y(10) = -100+200 = 100$.

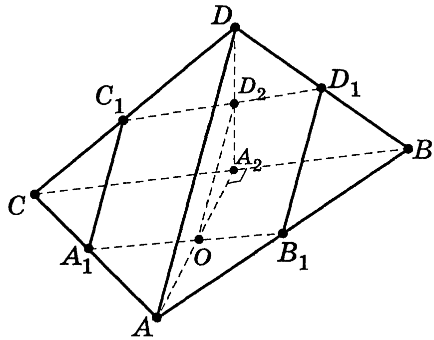
Отметим, что для $t = 10$

$x^2 + 7x + 12 = 10$; $x^2 + 7x + 2 = 0$ — корни есть.

Ответ: наибольшее значение функции

$y = (x+3)(x+4)(x+8)(1-x)$ равно 100.

9. Сечение правильного тетраэдра плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам, является параллелограммом наибольшей площади. Найдите площадь и периметр такого параллелограмма, если ребро тетраэдра равно a.



1) $AB = BC = AC = AD = BD = CD = a$; $A_1C_1 \parallel AD$; $A_1B_1 \parallel BC$ — условие выполнено.

2) Значит $C_1D_1 \parallel BC$, $D_1B_1 \parallel AD$, т. е. $A_1C_1D_1B_1$ — параллелограмм. Пусть $A_1B_1 = x$;

$AA_2 = AC \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

3) $\Delta AA_1B_1 \sim \Delta ACB$, тогда $\dfrac{CB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{AA_1}$;

$\Delta AA_1O \sim \Delta ACA_2$, тогда $\dfrac{AC}{AA_1} = \dfrac{AA_2}{AO} \Rightarrow \dfrac{CB}{A_1B_1} = \dfrac{AA_2}{AO}$,

значит $\dfrac{a}{x} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{AO}$, т. е. $AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

4) $\Delta A_2OD_2 \sim \Delta A_2AD$, тогда $\dfrac{AD}{OD_2} = \dfrac{AA_2}{OA_2}$,

т. е. $\dfrac{a}{OD_2} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{AA_2 - AO}$,

значит $OD_2 = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a - x$; $OD_2 = a - x$.

5) $AA_2 \perp CB$ по построению; AA_2 — медиана ΔABC; $DA_2 \perp CB$ по свойству медианы равнобедренного треугольника ΔADB, значит $CB \perp ADA_2$. По признаку перпендикулярности $OD_2 \perp CB$, но $OD_2 \parallel A_1C_1$ и $A_1B_1 \parallel CB \Rightarrow A_1C_1 \perp A_1B_1$, тогда $A_1C_1D_1B_1$ — прямоугольник.

6) $S_{A_1C_1D_1B_1} = A_1C_1 \cdot A_1B_1$; $A_1C_1 = OD_2 = a - x$,

т. е. $S(x) = x(a - x)$; $D(S) = (0; a)$.

Итак, $S(x) = -x^2 + ax$. Так как это квадратичная функция (ветви параболы направлены вниз), то существует $S_{\text{наиб}}$ при $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, т. е. $x_0 = -\dfrac{a}{2(-1)} = \dfrac{a}{2}$.

Значит $S_{\text{наиб}} = S\left(\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + a \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{4}$; $S_{\text{наиб}} = \dfrac{a^2}{4}$.

Но $A_1B_1 = \dfrac{a}{2}$, значит $OD_2 = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$, т. е. $A_1C_1D_1B_1$ — квадрат, тогда $P_{A_1C_1D_1B_1} = 2a$.

Ответ: наибольшая площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной противоположным ребрам, равна $\dfrac{a^2}{4}$ и сечение есть квадрат, вершины которого — середины противоположных ребер, а периметр равен сумме двух ребер $2a$.

Практикум 19

Решение задач на наибольшее и наименьшее значение с помощью производной.

1. Найдите наибольшую площадь трапеции и ее периметр, если три стороны трапеции равны a.

2. Найдите наибольшую площадь и угол α прямоугольного треугольника, сумма катета и гипотенузы которого равна m.

3. Из квадратного листа жести со стороной a вырезали короб прямоугольного основания наибольшей емкости. Найдите объем такого короба.

4. В параболу $y = -x^2 + 2x + 8$ вписали прямоугольник наибольшей площади, две вершины которого принадлежат оси абсцисс, а две другие — параболе. Найдите площадь такого прямоугольника.

5. Найдите область изменения функции $y = \sin 2x \sin x$.

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \frac{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 10}{x^2 + 2x + 3}.$$

7. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого касаются графика функции $y = \dfrac{0{,}16}{0{,}16x^2 + 1}$, а две другие принадлежат оси абсцисс.

8. Найдите x_1 и x_2 — абсциссы точек экстремума функции $y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, центрально-симметричных относительно начала координат, и вид функции, если $f(x_2) = 11$, $f(x_1) = 7$.

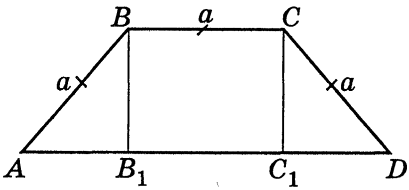
9. Найдите наименьшее расстояние от точки $A\left(1; \frac{3}{4}\right)$ до кривой $y = 1 - 2x^2$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение площади треугольника, у которого одна из вершин есть начало координат, а две другие принадлежат кривым $f(x) = -2x^2 + 5x - 10$ и $g(x) = 3x^2 - 10x + 2$ и имеют одинаковые абсциссы, причем $x \in [0{,}6; 1{,}5]$.

11. В сектор AOB радиуса R с центральным углом 2α вписали прямоугольник наибольшей площади, симметричный оси симметрии сектора. Найдите площадь такого прямоугольника.

Решение практикума 19

1. Найдите наибольшую площадь трапеции и ее периметр, если три стороны трапеции равны a.



$AB = BC = CD = a$. Дополнительное построение:
$BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$, $BB_1 = CC_1$.
Пусть $AD = 2x$.

1) $AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}$; $AB_1 = \dfrac{2x - a}{2} = x - \dfrac{a}{2}$;

2) $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2}$;

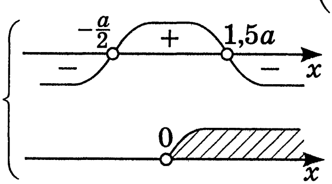
$$BB_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2};$$

3) $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} H_{ABCD}$;

$$S(x) = \frac{a+2x}{2}\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2}.$$

Так как $3a^2 + 4ax - 4x^2 = 3\left(a - \dfrac{2}{3}x\right)(a + 2x)$ и $x > 0$,

то



$(a > 0)$

$D(S) = (0; 1{,}5a)$.

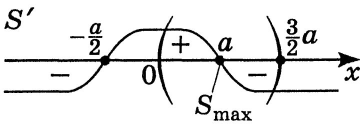
4) $$S'(x) = \frac{0+2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2} +$$
$$+ \frac{a+2x}{4}\frac{4a - 8x}{2\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2}} =$$

$$= \frac{3a^2 + 4ax - 4x^2 + (a+2x)(a-2x)}{2\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2}} =$$

$$= \frac{3a^2 + 4ax - 4x^2 + a^2 - 4x^2}{2\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2}} =$$

$$= \frac{4\left(a^2 + ax - 2x^2\right)}{2\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2}} = \frac{2(a-x)(a+2x)}{\sqrt{3a^2 + 4ax - 4x^2}}.$$

5) $S'(x) = 0;$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{a}{2} \\ x = a \end{array}\right.$.



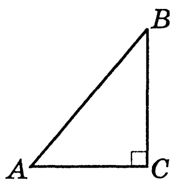
Тогда $AD = 2a$ и $P_{ABCD} = 5a$.

$S_{max} = S(a) = \dfrac{3}{4}a\sqrt{3a^2 + 4a^2 - 4a^2} = \dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}$ (кв. ед.).

В силу непрерывности $S_{max} = S_{наиб}$.

Ответ: наибольшая площадь трапеции равна $\dfrac{3}{4}a^2\sqrt{3}$ (кв. ед.), а периметр равен $5a$.

2. Найдите наибольшую площадь и угол α прямоугольного треугольника, сумма катета и гипотенузы которого равна m.



$AB + AC = m$.

1) Пусть $AC = x$, тогда

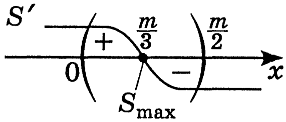
$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$;

$BC = \sqrt{(m-x)^2 - x^2} = \sqrt{m^2 - 2mx}$;

2) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BC$; $\quad S(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{m^2 - 2mx}$,

т. е. $S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{m^2x^2 - 2mx^3}$; $\quad D(f) = \left(0; \dfrac{m}{2}\right)$.

3) $S'(x) = \dfrac{2m^2x - 6mx^2}{2 \cdot 2\sqrt{m^2x^2 - 2mx^3}} = \dfrac{m^2 - 3mx}{2\sqrt{m^2 - 2mx}}.$



4) $S_{\max} = S\left(\dfrac{m}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m}{3}\sqrt{m^2 - \dfrac{2m^2}{3}} = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{18}.$

Так как $S(x)$ — непрерывна на $\left(0; \dfrac{m}{2}\right)$, то

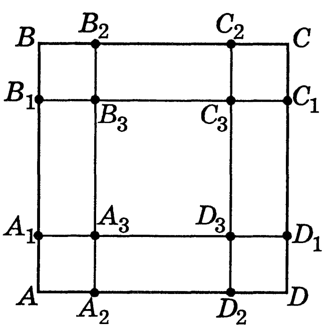
$S_{\max} = S_{\text{наиб}}.$

5) Учитывая что $AC = \dfrac{1}{3}m$ и $AB = \dfrac{2}{3}m$, получим, что

$\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{3}m}{\frac{2}{3}m} = \dfrac{1}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, значит $\alpha = 60°$.

Ответ: при $\alpha = 60°$ треугольник будет иметь наибольшую площадь $S_{\text{наиб}} = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{18}$, если сумма гипотенузы и катета, образующих этот угол, равна m.

3. Из квадратного листа жести со стороной a вырезали короб прямоугольного основания наибольшей емкости. Найдите объем такого короба.



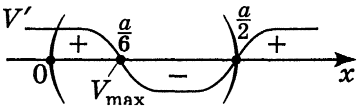
Пусть $AA_1 = x$, тогда:

1) $A_3B_3 = a - 2x$; $\quad A_3D_3 = a - 2x$; $\quad V = (a - 2x)^2 x$;

$D(V) = \left(0; \dfrac{a}{2}\right)$; $\quad V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$.

2) $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$; $\quad V' = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12}$; $\quad x_1 = \dfrac{a}{6}$; $\quad x_2 = \dfrac{a}{2} \notin D(V)$.



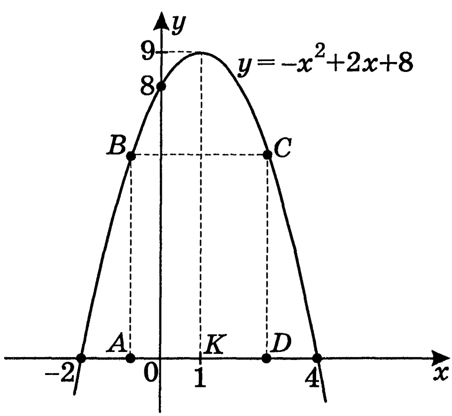
$V_{\max} = V\left(\dfrac{a}{6}\right) = \left(a - \dfrac{2a}{6}\right)^2 \cdot \dfrac{a}{6} = \left(\dfrac{2}{3}a\right)^2 \cdot \dfrac{a}{6} = \dfrac{2a^3}{27}$.

В силу непрерывности $V_{\max} = V_{\text{наиб}}$.

Ответ: $V_{\text{наиб}} = \dfrac{2a^3}{27}$ при глубине разреза $\dfrac{a}{6}$.

4. В параболу $y = -x^2 + 2x + 8$ вписали прямоугольник наибольшей площади, две вершины которого принадлежат оси абсцисс, а две другие — параболе. Найдите площадь такого прямоугольника.

1) Построим график $y = -x^2 + 2x + 8$.



2) Пусть $KD = x$ (ось симметрии параболы проходит через точку K, т. е. $AK = KD$), тогда $OD = x + 1$; $DC = f(x+1)$ (где $f(x) = -x^2 + 2x + 8$). Итак, $f(x+1) = -(x+1)^2 + 2(x+1) + 8 = -x^2 + 9$.

3) $S_{ABCD} = AD \cdot DC$,
т. е. $S(x) = 2x\left(-x^2 + 9\right) = -2x^3 + 18x$; $D(S) = (0; 3)$.

4) $S'(x) = -6x^2 + 18$; $S'(x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$.
$S_{\max} = S\left(\sqrt{3}\right) = -2\left(\sqrt{3}\right)^3 + 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.
В силу непрерывности $S_{\max} = S_{\text{наиб}}$.

Ответ: наибольшая площадь прямоугольника, опирающегося на ось абсцисс, который можно вписать в параболу, равна $12\sqrt{3}$ (кв. ед.).

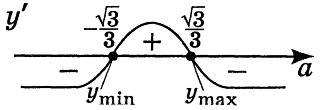
5. Найдите область изменения функции $y = \sin 2x \sin x$.

Представим функцию в виде суммы

1) $y(x) = \sin 2x \sin x = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$. Зная, что
$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, получим
$y(x) = \dfrac{1}{2}\left(\cos x - 4\cos^3 x + 3\cos x\right) = 2\left(\cos x - \cos^3 x\right) =$
$= 2\cos x\,(1 - \cos x)(1 + \cos x)$.
Полагая $\cos x = a$, где $a \in [-1; 1]$, представим
$y = 2a(1 + a)(1 - a)$.
Можно было проще, если помнить, что
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$y = 2\sin x\cos x\sin x = 2\sin^2 x\cos x = 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x$.

2) $y' = \left(2a - 2a^3\right)' = 2 - 6a^2$;

$$y' = 0; \quad \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ a = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. .$$



$$y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt3}{3}\right) = 2\left(\frac{\sqrt3}{3} - \left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^3\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt3}{3} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt3}{3}\right) = \frac{4\sqrt3}{9};$$

$$y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt3}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt3}{3} - \left(-\frac{\sqrt3}{3}\right)^3\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt3}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt3}{3}\right) = -\frac{4\sqrt3}{9}.$$

$y(1) = 0$; $y(-1) = 0$. Составим таблицу.

a	-1	$-\frac{\sqrt3}{3}$	$\frac{\sqrt3}{3}$	1
y	0	$-\frac{4\sqrt3}{9}$	$\frac{4\sqrt3}{9}$	0

Значит $y_{\text{наиб}} = \frac{4\sqrt3}{9}$; $y_{\text{наим}} = -\frac{4\sqrt3}{9}$,

т. е. $E(y) = \left[-\frac{4\sqrt3}{9}; \frac{4\sqrt3}{9}\right]$.

Ответ: $E(y) = \left[-\frac{4\sqrt3}{9}; \frac{4\sqrt3}{9}\right]$ для функции $y = \sin 2x \sin x$.

6. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 10}{x^2 + 2x + 3}.$$

Можно, конечно, сразу вычислять производную, но технически это не просто. Для упрощения попытаемся выделить целую часть.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4+4x^3+10x^2+12x+10 \\ \underline{x^4+2x^3+\ \ 3x^2} \end{array} & \begin{array}{l} x^2+2x+3 \\ \hline x^2+2x+3 \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} 2x^3+\ \ 7x^2+12x \\ \underline{2x^3+\ \ 4x^2+\ \ 6x} \end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} 3x^2+\ \ 6x+10 \\ \underline{3x^2+\ \ 6x+\ \ 9} \end{array} & \\
1 &
\end{array}
$$

Таким образом, $y = x^2 + 2x + 3 + \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$.

Так как $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0 \quad (\forall a)$, то можно воспользоваться теоремой Коши-Буняковского $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$;

$(a \geqslant 0;\ b \geqslant 0)$; если $a = b$, то $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$. Итак,

$$x^2+2x+3+\frac{1}{x^2+2x+3} \geqslant 2\sqrt{(x^2+2x+3)\,\frac{1}{x^2+2x+3}} = 2,$$

т. е. $y \geqslant 2$. Значит $y_{\text{наим}} = 2$.

Вроде все верно, но все-таки проверим, возможно ли $y = 2$.

Это верно, если $x^2 + 2x + 3 = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$,

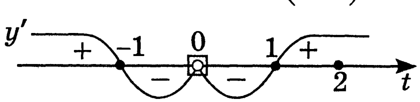
тогда $\left(x^2 + 2x + 3\right)^2 = 1$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x+3 = 1 \\ x^2+2x+3 = -1 \end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+2x+2 = 0 \\ x^2+2x+4 = 0 \end{array}\right. \quad \emptyset.$$

Вот это да! В чем же дело, где подвох? Поступим иначе.

Пусть $x^2 + 2x + 3 = t$, $\quad t = (x+1)^2 + 2$ и $t \geqslant 2$, $\quad$ тогда

$$y = t + \frac{1}{t}; \quad y' = 1 + \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2-1}{t^2}.$$



Но $t \geqslant 2$ и при этом $y(t)\uparrow$, значит $y(2) = y_{\min} = 2 + \dfrac{1}{2} = 2{,}5$.

Так как $x^2+2x+3=2$ при $x=-1$,

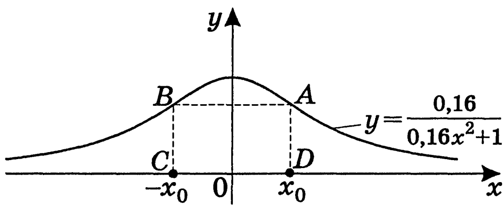
то $y_{\min}=2{,}5$ при $x=-1$.

В силу непрерывности $y(x)$ $y_{\min}=y_{\text{наим}}$.

Ответ: наименьшее значение функции

$y=\dfrac{x^4+4x^3+10x^2+12x+10}{x^2+2x+3}$ равно 2,5 при $x=-1$.

7. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, две вершины которого касаются графика функции $y=\dfrac{0{,}16}{0{,}16x^2+1}$, а две другие принадлежат оси абсцисс.



1) Так как $A(x_0;y_0)\in\Gamma$ $y=\dfrac{0{,}16}{0{,}16x^2+1}$,

$y_0=\dfrac{0{,}16}{0{,}16x_0^2+1}$, т. е. $A\left(x_0;\dfrac{0{,}16}{0{,}16x_0^2+1}\right)$. Функция $y=\dfrac{0{,}16}{0{,}16x^2+1}$ — четная, значит $B\left(-x_0;\dfrac{0{,}16}{0{,}16x_0^2+1}\right)$ $(f(-x)=f(x))$.

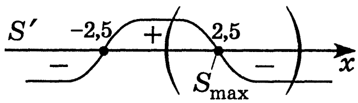
2) $S_{ABCD}=CD\cdot AD$,

т. е. $S(x_0)=2x_0\cdot\dfrac{0{,}16}{0{,}16x_0^2+1}=\dfrac{0{,}32x_0}{0{,}16x_0^2+1}$;

$D(S)=(0;\infty)$;

$$S'(x_0)=\frac{0{,}32\left(0{,}16x_0^2+1\right)-0{,}32x_0\cdot0{,}32x_0}{\left(0{,}16x_0^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{0{,}32\left(1-0{,}16x_0^2\right)}{\left(0{,}16x_0^2+1\right)^2};\quad S'(x_0)=0;\quad \left[\begin{array}{l}x_0=2{,}5\\ x_0=-2{,}5\end{array}\right..$$



$$S_{\max} = S\,(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 \frac{0{,}16}{0{,}16 \cdot 2{,}5^2 + 1} = 0{,}4 \text{ (кв. ед.)}.$$

В силу непрерывности $S_{\max} = S_{\text{наиб}}$.

Ответ: наибольшая площадь прямоугольника, две вершины которого касаются графика функции $y = \dfrac{0{,}16}{0{,}16x^2 + 1}$, а две другие оси абсцисс, равна 0,4 (кв. ед.)

8. Найдите x_1 и x_2 — абсциссы точек экстремума функции $y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, центрально-симметричных относительно начала координат, и вид функции, если $f\,(x_2) = 11$, $f\,(x_1) = 7$.

Так как абсциссы точек экстремума центрально-симметричны относительно начала координат, то $x_2 = -x_1$, т. е. $x_1 + x_2 = 0$, тогда учитывая, что

$f'\,(x) = 3x^2 + 2a_1x + a_2$ и x_1, x_2 — корни производной, получим $a_1 = 0$, т. е. $f'\,(x) = 3x^2 + a_2$. При $f'\,(x) = 0$ $a_2 = -3x^2$, значит $f\,(x) = x^3 + 0 \cdot x^2 + \left(-3x^2\right)x + a_3 = a_3 - 2x^3$.

Значит $f(x_2) = a_3 - 2x_2^3 = 11$. Но $x_1 = -x_2$.

$f(x_1) = a_3 - 2\left(-x_2^3\right) = a_3 + 2x_2^3 = 7$. $\quad \boxed{1} \pm \boxed{2}$

Следовательно, $a_3 = 9$ и $x_2^3 = -1$, т. е. $x_2 = -1$,

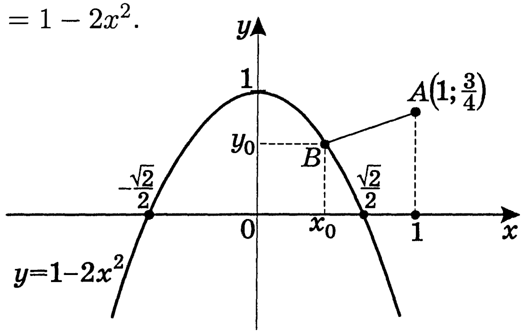
а $x_1 = 1$; $\quad a_2 = -3 \quad \left(a_2 = -3x^2\right)$; $\quad a_3 = 9$.

Тогда $f\,(1) = f_{\min} = 7$; $\quad f\,(-1) = f_{\max} = 11$ и функция имеет вид $y = x^3 - 3x + 9$.

Ответ: абсциссы точек экстремума функции

$y = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, центрально-симметричных относительно начала координат, равны $x_1 = 1$; $\quad x_2 = -1$, и функция имеет вид $y = x^3 - 3x + 9$, где $f_{\max}\,(-1) = 11$, $f_{\min}\,(1) = 7$.

9. Найдите наименьшее расстояние от точки $A\left(1;\dfrac{3}{4}\right)$ до кривой $y=1-2x^2$.



Пусть точка $B(x_0;y_0)$ принадлежит кривой $y=1-2x^2$. Тогда функция расстояния от точки A до точки B будет равна $f(x_0)=\sqrt{(x_0-1)^2+\left(y_o-\dfrac{3}{4}\right)^2}$, где $y_0=1-2x_0^2$.

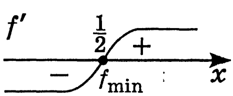
Тогда $f(x_0)=\sqrt{(x_0-1)^2+\left(1-2x_0^2-\dfrac{3}{4}\right)^2}=$

$$=\sqrt{(x_0-1)^2+\left(\frac{1}{4}-2x_0^2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x_0^2-2x_0+1+\frac{1}{16}-x_0^2+4x_0^4}=\sqrt{4x_0^4-2x_0+1\frac{1}{16}}.$$

$$f'(x_0)=\frac{16x_0^3-2}{2\sqrt{4x_0^4-2x_0+1\frac{1}{16}}}=\frac{8x_0^3-1}{\sqrt{4x_0^4-2x_0+1\frac{1}{16}}};$$

$f'(x_0)=0;\quad x_0=\dfrac{1}{2}.$

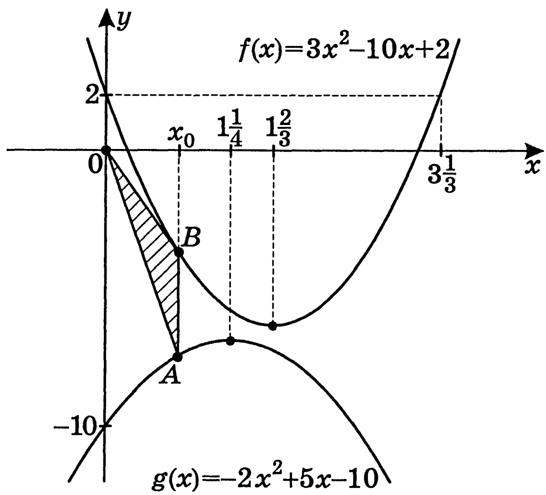


$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{4\cdot\frac{1}{16}-2\cdot\frac{1}{2}+1\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

В силу непрерывности $f_{\min}=f_{\text{наим}}$.

Ответ: наименьшее расстояние от точки $A\left(1;\dfrac{3}{4}\right)$ до кривой $y=1-2x^2$ равно $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение площади треугольника, у которого одна из вершин есть начало координат, а две другие принадлежат кривым $f(x) = -2x^2 + 5x - 10$ и $g(x) = 3x^2 - 10x + 2$ и имеют одинаковые абсциссы, причем $x \in [0{,}6; 1{,}5]$.



1) Так как $\Gamma(y = f(x)) \cap \Gamma(y = g(x)) = \emptyset$ и график $y = f(x)$ выше графика $y = g(x)$,
то положим $A \in \Gamma g(x)$ и $B \in \Gamma f(x)$.
Тогда $B\left(x_0; 3x_0^2 - 10x_0 + 2\right)$, $A\left(x_0; -2x_0^2 + 5x_0 - 10\right)$.
$AB \parallel Oy$, значит
$AB = \left(3x_0^2 - 10x_0 + 2\right) - \left(-2x_0^2 + 5x_0 - 10\right)$, т. е.
$AB = 5x_0^2 - 15x_0 + 12.$

2) $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot Ox_0$, т. е. $S(x_0) = \frac{1}{2} x_0 \left(5x_0^2 - 15x_0 + 12\right)$.

3) $S'(x_0) = \frac{1}{2}\left(5x_0^3 - 15x_0^2 + 12x_0\right)' = \frac{1}{2}\left(15x_0^2 - 30x_0 + 12\right) =$

$= \frac{3}{2}\left(5x_0^2 - 10x_0 + 4\right).$

4) $S'(x_0)=0;\quad (x_0)_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-20}}{5}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{5}.$

Рассмотрим, какие из корней принадлежат $[0{,}6;1{,}5]$.

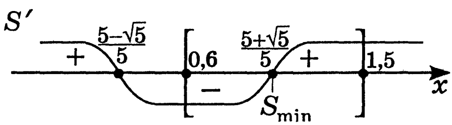
а) Допустим $\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}\geqslant\dfrac{3}{5};\quad 2\geqslant\sqrt{5}$ — ложь,

т. е. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}\notin[0{,}6;1{,}5]$.

б) Допустим $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\in[0{,}6;1{,}5]$, т. е.

$$\begin{cases}\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\leqslant\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\geqslant\dfrac{3}{5}\end{cases};\quad \begin{cases}10+2\sqrt{5}\leqslant 15\\ 5+\sqrt{5}\geqslant 3\end{cases};\quad \begin{cases}2\sqrt{5}\leqslant 5\\ \sqrt{5}\geqslant -2\end{cases};$$

$\begin{cases}20\leqslant 25\\ \sqrt{5}\geqslant -2\end{cases}$ — истина, т. е. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}\in[0{,}6;1{,}5]$, тогда



$$S_{\min}=S\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+5}{5}\left(5\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)^2-15\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5}+12\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\frac{5+10\sqrt{5}+25-15\sqrt{5}-75+60}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{15-5\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left(15-2\sqrt{5}-5\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{5}=1-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

5) Вычислим значение $S(x_0)$ на концах $[0{,}6; 1{,}5]$.

$$S(0{,}6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\left(5\cdot\frac{9}{25} - 15\cdot\frac{3}{5} + 12\right) = \frac{3}{10}\left(\frac{9}{5} - 9 + 12\right) =$$

$$= \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25};$$

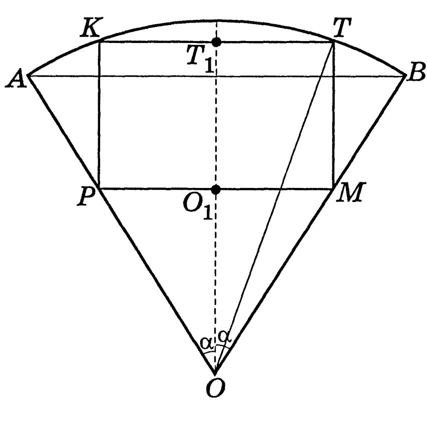
$$S(1{,}5) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(5\cdot\frac{9}{4} - 15\cdot\frac{3}{2} + 12\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{45 - 90 + 48}{4} = \frac{9}{16}.$$

x_0	$0{,}6$	$\frac{5+\sqrt{5}}{5}$	$1{,}5$
$S(x_0)$	$1\frac{11}{25}$	$1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{9}{16}$

Так как $1 - \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{9}{16}$, то $S_{\text{наим}} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$; $S_{\text{наиб}} = 1\frac{11}{25}$.

Ответ: $S_{\text{наим}} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$; $S_{\text{наиб}} = 1\frac{11}{25}$.

11. В сектор AOB радиуса R с центральным углом 2α вписали прямоугольник наибольшей площади, симметричный оси симметрии сектора. Найдите площадь такого прямоугольника.



1) Пусть $O_1M = x$; $OO_1 = O_1M \operatorname{ctg} \alpha$; $\left(\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$; $OO_1 = x \operatorname{ctg} \alpha$.

2) $OT_1 = \sqrt{OT^2 - TT_1^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$; $(O_1M = TT_1)$.
$TM = OT_1 - OO_1 = \sqrt{R^2 - x^2} - x \operatorname{ctg} \alpha$.

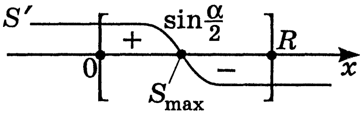
3) $S_{PKTM} = TM \cdot PM$; $S(x) = \left(\sqrt{R^2 - x^2} - x \operatorname{ctg} \alpha\right) 2x$;
$D(S) = (0; R \sin \alpha)$.

4) $$S'(x) = 2\left(\sqrt{R^2 - x^2} - x \operatorname{ctg} \alpha\right) + 2x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} - \operatorname{ctg} \alpha\right) =$$
$$= \frac{2\left(R^2 - x^2 - x \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{R^2 - x^2} - x^2 - x \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{R^2 - x^2}\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$
$$= \frac{2\left(R^2 - 2x^2 - 2x \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{R^2 - x^2}\right)}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

5) $S'(x) = 0$; $R^2 - 2x^2 = 2x \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{R^2 - x^2}$ при $x^2 \leqslant \frac{R^2}{2}$.

$$R^4 - 4R^2x^2 + 4x^4 = 4x^2\left(R^2 - x^2\right) \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$
$$4\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha\right) x^4 - 4R^2\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha\right) x^2 + R^4 = 0;$$
$$\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right); \quad 4x^4 - 4R^2x^2 + R^4 \sin^2 \alpha = 0;$$
$$\frac{D}{4} = 4R^4 - 4R^4 \sin^2 \alpha = 4R^4 \cos^2 \alpha;$$
$$\left(x^2\right)_{1,2} = \frac{2R^2 \pm 2R^2 \cos \alpha}{4};$$
$$\left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) R^2 \notin \left[0; \frac{R^2}{2}\right] \\ x^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) R^2 \in \left[0; \frac{R^2}{2}\right] \end{array}\right., \quad \left(1 + \cos \alpha > 1 \text{ так как } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Тогда $x = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} R$, т. е. $x = R \sin \frac{\alpha}{2}$.



$$S_{\max} = S\left(R\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - R\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\alpha\right)\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \left(R\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}R\right)\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} =$$

$$= 2R^2\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = R^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

В силу непрерывности $S_{\max} = S_{\text{наиб}}$.

Ответ: площадь наибольшего прямоугольника, который можно вписать в сектор радиуса R с углом в 2α с общей осью симметрии, равен $R^2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ (кв. ед.).

Тренировочная работа 8

1. Из трапеции со сторонами 13 и 20 и основаниями 30 и 9 вырезали прямоугольник наибольшей площади, причем одна из сторон прямоугольника лежит на большем основании. Найдите эту площадь.

2. Найдите наименьшее расстояние между корнями трехчлена $y = x^2 - (2a+1)\,x - a^2$.

3. График функции $f\,(x) = \dfrac{9}{a - x}$ пересекает прямую $y = 10 - x$ в точках A и B. Найдите наименьшее расстояние между точками A и B.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin^4 x + \cos^4 x$.

5. При каких линейных размерах бассейна объемом 32 м^3 с основанием в виде квадрата на его облицовку пойдет наименьшее количество материала?

6. Пароход выходит из пункта A в пункт B и затем обратно в пункт C, находящийся между пунктами A и B. При какой скорости течения время следования в пути будет наименьшим, если $AB = a$, $BC = b$?

7. В параболу $y = -x^2 + 4x + 5$ вписали прямоугольник наибольшей площади. Две вершины прямоугольника принадлежат оси абсцисс, две другие — параболе. Найдите площадь такого прямоугольника.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \cos 2x \cos x$.

9. Найдите наименьшее значение функции
$$y = \frac{x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 10}{x^2 - 2x + 3}.$$

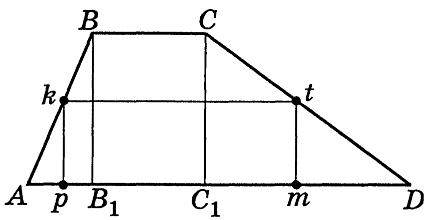
10. Найдите наибольшее значение площади трапеции, у которой вершины большего основания есть точки пересечения прямой $y = 2x+3$ и $y = x^2$, а вершины меньшего основания принадлежат кривой $y = x^2$.

Решение тренировочной работы 8

1. Из трапеции со сторонами 13 и 20 и основаниями 30 и 9 вырезали прямоугольник наибольшей площади, причем одна из сторон прямоугольника лежит на большем основании. Найдите эту площадь.

1) Дополнительные построения:

$BB_1 \perp AD$; $CC_1 \perp AD$, тогда $BB_1 = CC_1$.



2) Пусть $AB_1 = x$, тогда $C_1D = AD - B_1C_1 - AB_1 = 21 - x$.

3) ΔABB_1: $BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2$; $BB_1^2 = 13^2 - x^2$.

ΔDCC_1: $CC_1^2 = CD^2 - C_1D^2$; $CC_1^2 = 20^2 - (21 - x)^2$.

Тогда $13^2 - x^2 = 20^2 - \left(21 - x^2\right)$;

$169 - x^2 = 400 - 441 + 42x - x^2$;

$x = \dfrac{169 - 400 + 441}{42} = 5$, значит

4) $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, т. е. $H_{ABCD} = 12$.

5) ΔABB_1: $\operatorname{ctg}(\angle A) = \dfrac{AB_1}{BB_1}$; $\operatorname{ctg}(\angle A) = \dfrac{5}{12}$;

ΔDCC_1: $\operatorname{ctg}(\angle D) = \dfrac{C_1D}{CC_1}$; $\operatorname{ctg}(\angle D) = \dfrac{21-5}{12} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$.

6) Пусть $pk = n$, тогда $Ap = pk \cdot \operatorname{ctg}(\angle A)$;

$Ap = \dfrac{5}{12}n$; $mD = tm \cdot \operatorname{ctg}(\angle D)$; $mD = \dfrac{4}{3}n$.

Значит $pm = AD - Ap - mD$,

т. е. $pm = 30 - \dfrac{5}{12}n - \dfrac{4}{3}n = 30 - \dfrac{7}{4}n$.

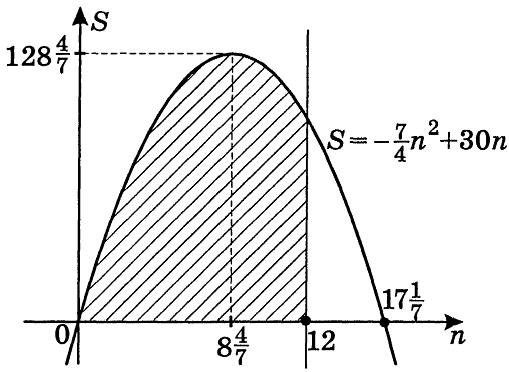
7) $S_{pktm} = pk \cdot pm$; $S(n) = n\left(30 - \frac{7}{4}n\right) = -\frac{7}{4}n^2 + 30n$;
$D(S) = (0; 12]$.

8) $S(n)$ — квадратичная, где $a < 0$, значит, при $n_0 = -\frac{b}{2a}$
$S(n_0) = S_{\text{наиб}}$ (для $S(n) = an^2 + bn + c$).

Здесь $n_0 = -\dfrac{30}{2\left(-\frac{7}{4}\right)} = \dfrac{60}{7} = 8\dfrac{4}{7}$, значит

$$S_{\text{наиб}} = S\left(8\frac{4}{7}\right) = 8\frac{4}{7}\left(30 - \frac{7}{4} \cdot 8\frac{4}{7}\right) = \frac{60}{7}\left(30 - \frac{7}{4} \cdot \frac{60}{7}\right) =$$

$$= \frac{60}{7} \cdot 15 = \frac{900}{7} = 128\frac{4}{7} \text{ (кв. ед.).}$$



Ответ: из трапеции с данными условиями вырезали прямоугольник, наибольшая площадь которого равна $128\frac{4}{7}$ (кв. ед.).

2. Найдите наименьшее расстояние между корнями трехчлена $y = x^2 - (2a+1)x - a^2$.

$D = (2a+1)^2 + 4a^2 = 4a^2 + 4a + 1 + 4a^2 = 8a^2 + 4a + 1 =$
$= 8\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$;

$8\left(a+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$ $(\forall a)$, значит $x_1 \neq x_2$. Для $x^2+px+g=0$;

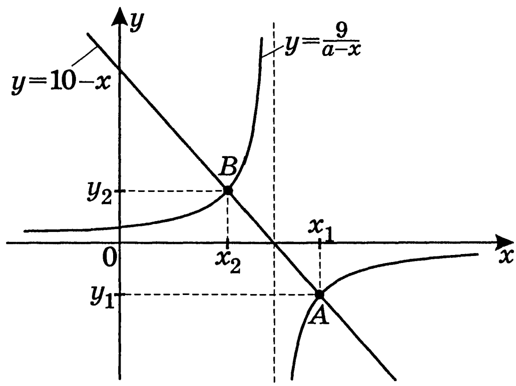
$x_1=-\dfrac{p}{2}+\dfrac{\sqrt{D}}{2}$; $x_2=-\dfrac{p}{2}-\dfrac{\sqrt{D}}{2}$; $x_1-x_2=\sqrt{D}$.

Итак, $D=8\left(a+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{2}$; $D_{\text{наим}}=\dfrac{1}{2}$ при $a=-\dfrac{1}{4}$, тогда

$x_1-x_2=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Ответ: наименьшее расстояние между корнями трехчлена $y=x^2-(2a+1)\,x-a^2$ равно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ при $a=-\dfrac{1}{4}$.

3. График функции $f(x)=\dfrac{9}{a-x}$ пересекает прямую $y=10-x$ в точках A и B. Найдите наименьшее расстояние между точками A и B.



Абсциссы точек пересечения графиков связаны уравнением $\dfrac{9}{a-x}=10-x$, т. е. $9=(10-x)(a-x)$;

$x^2-(a+10)\,x+10a=9$;

$D=(a+10)^2-40a+36=a^2-20a+136=$

$=(a-10)^2+36>0$ $(\forall a)$, значит $x_1 \neq x_2$.

Координаты точек A и B: $A(x_1;10-x_1)$; $B(x_2;10-x_2)$;

$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (10 - x_1 - (10 - x_2))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2| \sqrt{2}.$$

Учитывая результат примера 2 $|x_1 - x_2| = \sqrt{D}$, получим $D = (a-10)^2 + 36$; $\quad D_{\text{наим}} = 36$ при $a = 10$, тогда $|x_1 - x_2|_{\text{наим}} = \sqrt{36} = 6$. Значит $AB_{\text{наим}} = 6\sqrt{2}$.

Ответ: наименьшее расстояние между точками пересечения графиков $f(x) = \dfrac{9}{a-x}$ и $y = 10 - x$ равно $6\sqrt{2}$ при $a = 10$.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin^4 x + \cos^4 x$.

Для упрощения используем формулы понижения. Тогда, учитывая, что $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, преобразуем

$$y = 2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} =$$

$$= \frac{3\cos^2 2x - 2\cos 2x + 3}{4},$$

т. е. y — квадратичная функция от $\cos 2x$. Тогда

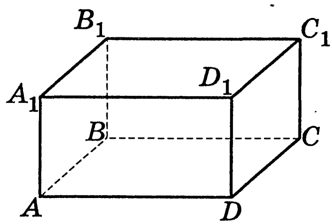
$y_{\text{наим}} = y(t_0)$, где $t_0 = -\dfrac{b}{2a}$ для $y = ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$,

т. е. $t_0 = -\dfrac{-2}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{3}$ (где $t = \cos 2x \in [-1;1]$, $\dfrac{1}{3} \in [-1;1]$).

$$y_{\text{наим}} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 3\right) = \frac{2}{3}.$$

Ответ: наименьшее значение функции $y = 2\sin^4 x + \cos^4 x$ равно $\dfrac{2}{3}$.

5. При каких линейных размерах бассейна объемом 32 $м^3$ с основанием в виде квадрата на его облицовку пойдет наименьшее количество материала?



Пусть $AB = x$, тогда

1) $S_{ABCD} = AB^2 = x^2$;

$V_б = S_{ABCD} \cdot H_б$; $\quad H_б = \dfrac{V_б}{S_{ABCD}}$;

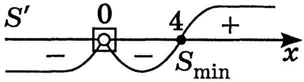
$H_б = \dfrac{32}{x^2}$; $\quad S_{бок} = 4 \cdot \dfrac{32}{x^2} \cdot x = \dfrac{128}{x}$,

значит $S_{п.б} = S_{осн} + S_{бок}$,

т. е. $S_{п.б} = x^2 + \dfrac{128}{x}$; $\quad S(x) = x^2 + \dfrac{128}{x}$;

$D(S) = (0; \infty)$.

2) $S'(x) = 2x - \dfrac{128}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 64)}{x^2}$; $\quad S'(x) = 0$; $\quad x = 4$.



$S_{min} = S(4) = 4^2 + \dfrac{128}{4} = 48$.

Так как $S(x)$ — непрерывна на $(0; \infty)$,

то $S_{min} = S_{наим}$; $\quad H_б = \dfrac{32}{4^2} = 2$.

Ответ: линейные размеры бассейна емкостью 32 куб. м при наименьшей площади внутренней поверхности равны 4 м, 4 м, 2 м.

6. Пароход выходит из пункта A в пункт B и затем обратно в пункт C, находящийся между пунктами A и B. При какой скорости течения время следования в пути будет наименьшим, если $AB = a$, $BC = b$?

Пусть V — скорость парохода в стоячей воде, x — скорость течения реки.

$$t(x) = \frac{AB}{V+x} + \frac{BC}{V-x} \quad (AB > BC; \quad a > b); \quad D(t) = (-V; V),$$

т. е.

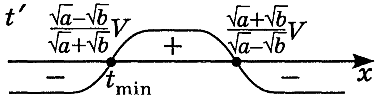
$$t(x) = \frac{a}{V+x} + \frac{b}{V-x} = \frac{-(a-b)x + V(a+b)}{(V+x)(V-x)};$$

$$t'(x) = -\frac{a}{(V+x)^2} + \frac{b}{(V-x)^2}; \qquad t'(x) = 0;$$

$$\frac{a}{(V+x)^2} = \frac{b}{(V-x)^2}; \quad \frac{b}{a} = \left(\frac{V-x}{V+x}\right)^2;$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{V-x}{V+x} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \\ \dfrac{V-x}{V+x} = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \end{array}\right., \text{ тогда } \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot V \in D(t) \\ x = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot V \notin D(t) \end{array}\right., \text{ но}$$

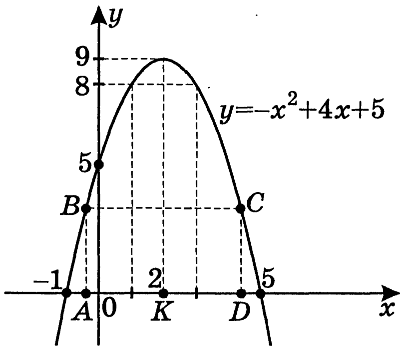
$$t'(x) = \frac{-(a-b)x^2 + 2V(a+b)x - (a-b)V^2}{(V+x)^2(V-x)^2}.$$



В силу непрерывности $t_{\min} = t_{\text{наим}} = V \cdot \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$.

Ответ: наименьшее время требуется на путь из пункта A в пункт B и обратно в пункт C при скорости течения реки, равной $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot V$.

7. В параболу $y = -x^2 + 4x + 5$ вписали прямоугольник наибольшей площади. Две вершины прямоугольника принадлежат оси абсцисс, две другие — параболе. Найдите площадь такого прямоугольника.



Пусть $KD = x$, тогда $OD = 2 + x$ и $AD = 2x$, значит $DC = f(2+x) = -(2+x)^2 + 4(2+x) + 5 = -x^2 + 9$;

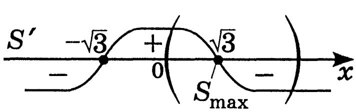
$S_{ABCD} = AD \cdot DC$;

$S(x) = 2x\left(-x^2+9\right)$; $\quad D(S) = (0;3)$;

$S'(x) = \left(-2x^3 + 18x\right)' = -6x^2 + 18$;

$S'(x) = 0; \quad x^2 = 3; \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \notin (0;3) \end{array}\right.$.

$S_{\max} = S\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\left(\sqrt{3}\right)^2 + 9\right) = 12\sqrt{3}.$



В силу непрерывности $S_{\max} = S_{\text{наиб}}$.

Ответ: наибольшая площадь прямоугольника, опирающегося на ось абсцисс, который можно вписать в параболу $y = -x^2 + 4x + 5$, равна $12\sqrt{3}$ (кв. ед.)

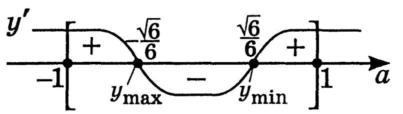
8. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \cos 2x \cos x$.

Для решения задачи преобразуем правую часть. Так как $\cos 2x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$ и $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то $y = \frac{1}{2}\left(4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x\right) = \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x$ (можно проще, если воспользоваться формулой $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$).

Пусть $\cos x = a$, где $a \in [-1; 1]$, тогда $y(a) = a\left(2a^2 - 1\right)$; $D(y) = [-1; 1]$.

$y'(a) = \left(2a^3 - a\right)' = 6a^2 - 1; \quad y'(a) = 0;$

$a^2 = \frac{1}{6}; \quad \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a = -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$.



$y\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}\left(2 \cdot \frac{1}{6} - 1\right) = \frac{\sqrt{6}}{9};$

$y\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(2 \cdot \frac{1}{6} - 1\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9};$

$y(-1) = -1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = -1; \quad y(1) = 1(2 \cdot 1 - 1) = 1.$

Составим таблицу значений.

x	-1	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	1
y	-1	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	$-\frac{\sqrt{6}}{9}$	1

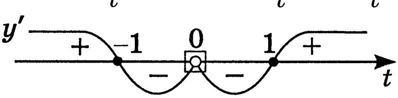
Значит $y_{\text{наиб}} = 1; \quad y_{\text{наим}} = -1$, т. е. для непрерывной функции это значит, что $E(y) = [-1; 1]$.

Ответ: для функции $y = \cos 2x \cos x \quad E(y) = [-1; 1]$.

9. Найдите наименьшее значение функции
$$y=\frac{x^4-4x^3+10x^2-12x+10}{x^2-2x+3}.$$
Для упрощения решения выделим целую часть,
$$\begin{array}{r|l} x^4-4x^3+10x^2-12x+10 & x^2-2x+3 \\ \underline{x^4-2x^3+\ 3x^2\qquad\qquad} & \overline{x^2-2x+3} \\ -2x^3+\ 7x^2-12x\quad & \\ \underline{-2x^3+\ 4x^2-\ 6x\quad} & \\ 3x^2-\ 6x+10 & \\ \underline{3x^2-\ 6x+\ 9} & \\ 1 & \end{array}$$
т. е. $y=x^2-2x+3+\dfrac{1}{x^2-2x+3}$,

так как $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant 0\quad(\forall x)$.

Пусть $t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$, тогда $t\geqslant 2$, значит
$y=t+\dfrac{1}{t}$; $\quad y'=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$.



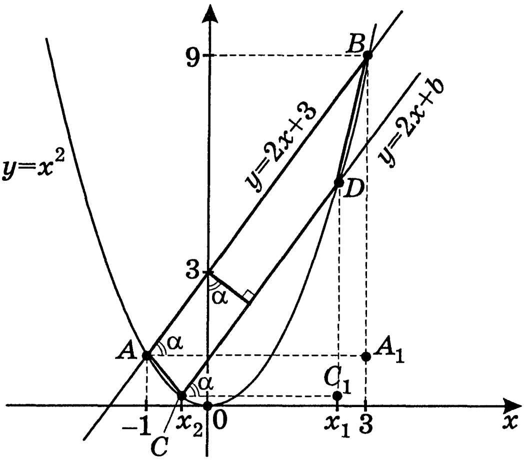
Так как $t\geqslant 2$, то на $[2;\infty)$ $y=t+\dfrac{1}{t}$ — возрастает $(y'>0)$,

значит $y_{\text{наим}}=y(2)=2+\dfrac{1}{2}=2{,}5\quad(t=x^2-2x+3=2;\ x=1)$.

Ответ: наименьшее значение функции
$$y=\frac{x^4-4x^3+10x^2-12x+10}{x^2-2x+3}$$ равно 2,5 при $x=1$.

10. Найдите наибольшее значение площади трапеции, у которой вершины большего основания есть точки пересечения прямой $y=2x+3$ и $y=x^2$, а вершины меньшего основания принадлежат кривой $y=x^2$.

1) $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x^2 \end{cases}$; $\qquad x^2=2x+3;\qquad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.



2) $y = 2x + b$ прямая $\parallel$ $y = 2x + 3$;

$\begin{cases} y = 2x + b \\ y = x^2 \end{cases}$; $\quad x^2 = 2x + b; \quad x^2 - 2x - b = 0.$

$x_1 = 1 + \sqrt{1+b}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{1+b};$

$x_1 - x_2 = 2\sqrt{1+b}.$

3) Для $y = 2x + 3$ $\operatorname{tg}\alpha = 2$ — угловой коэффициент.

Так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, то $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

4) $AB = \dfrac{AA_1}{\cos\alpha}$, тогда $AB = \dfrac{3-(-1)}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}} = 4\sqrt{5}.$

Аналогично $CD = \dfrac{CC_1}{\cos\alpha}$, тогда

$$CD = \frac{x_1 - x_2}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{1+b}}{\dfrac{\sqrt{5}}{5}} = 2\sqrt{5}\sqrt{1+b}.$$

5) $H_{ABDC} = (3-b)\cos\alpha$, т. е. $H_{ABDC} = (3-b)\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

6) $S_{ABDC} = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot H_{ABDC}$;

$S(b) = \dfrac{4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\sqrt{1+b}}{2} \cdot \dfrac{(3-b)\sqrt{5}}{5}$;

т. е. $S(b) = \left(2 + \sqrt{1+b}\right)(3-b)$, где $D(S) = (-1; 3)$.

Примечание. Если 2 вершины трапеции будут лежать на кривой $y = x^2$ выше прямой $y = 2x + 3$, то площадь трапеции есть неограниченно возрастающая функция, а основание CD не будет меньшим.

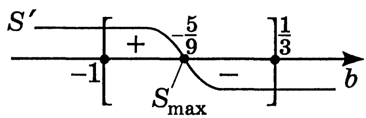
7) $S'(b) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+b}}(3-b) - \left(2 + \sqrt{1+b}\right) =$

$= \dfrac{1 - 4\sqrt{1+b} - 3b}{2\sqrt{1+b}}$;

$S'(b) = 0; \qquad 1 - 3b = 4\sqrt{1+b}$;

$\begin{cases} 1 - 3b \geqslant 0 \\ 1 - 6b + 9b^2 = 16 + 16b \end{cases}; \qquad \begin{cases} b \leqslant \dfrac{1}{3} \\ 9b^2 - 22b - 15 = 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} b \leqslant \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -\dfrac{5}{9} \end{array}\right. \end{cases}; \qquad b = -\dfrac{5}{9}.$



$S_{\max} = S\left(-\dfrac{5}{9}\right) = \left(2 + \sqrt{1 - \dfrac{5}{9}}\right)\left(3 - \left(-\dfrac{5}{9}\right)\right) =$

$= \left(2 + \dfrac{2}{3}\right)\left(3 + \dfrac{5}{9}\right) = 9\dfrac{13}{27}.$

Так как $S(b)$ — непрерывна на $[-1; 3]$, то $S_{\max} = S_{\text{наиб}}$, значит $S_{\text{наиб}} = 9\dfrac{13}{27}$.

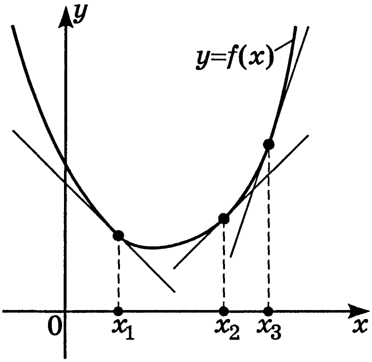
Ответ: наибольшее значение площади трапеции равно $9\dfrac{13}{27}$ (кв. ед.).

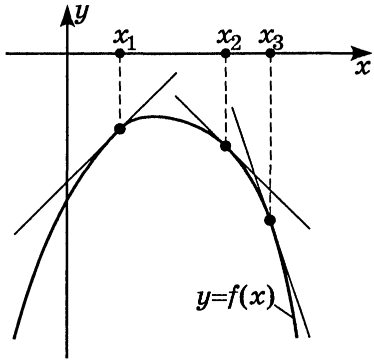
Выпуклость и вогнутость кривой

Понятия выпуклости и вогнутости

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную на $(a; b)$.

Определение 1. Говорят, что кривая на $(a; b)$ обращена выпуклостью вниз, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке на $(a; b)$.





Определение 2. Говорят, что кривая на $(a; b)$ обращена выпуклостью вверх, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке на $(a; b)$.

Определение 3. Дуги кривой, обращенные выпуклостью вниз, будем называть <u>выпуклыми</u>, а обращенные выпуклостью вверх — <u>вогнутыми</u>.

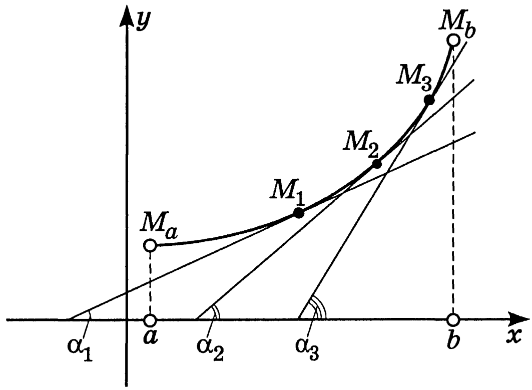
Определение 4. Точки, разделяющие выпуклые и вогнутые участки кривой, называются точками перегиба.

Теорема 9. Кривая выпукла на тех участках кривой, где $f''(x) > 0$ и вогнута на тех, где $f'' < 0$, Точки перегиба — это те точки, в окрестности которых $f''(x)$ меняет свой знак.

Примечание. Имеет смысл запомнить мнемоническое «правило дождя». Дождь, падающий на график кривой, разбивается на вогнутых участках, на которых $f''(x) < 0$ (отрицательна), и собирается на выпуклых участках, на которых $y'' > 0$ (положительна).

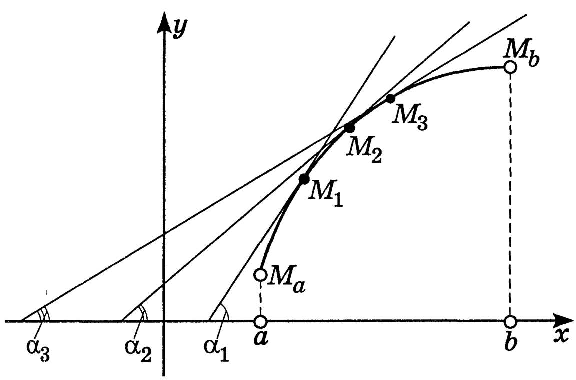
Иллюстрируем данную теорему. Рассмотрим $y = f(x)$ — она определена и непрерывна на $(a; b)$, $f'(x)$ — непрерывна на $(a; b)$.

а) Пусть $f''(x) = (f'(x))' > 0$, значит $f'(x)$ возрастает.



Проведем семейство касательных к графику функции в точках $M_1, M_2, M_3 \ldots$, тогда $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$, соответственно $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3 < \ldots$, значит при стремлении $M_1, M_2, M_3 \ldots \to M_b$ возрастают углы и соответственно возрастает тангенс углов, т. е. $y' = \operatorname{tg}\alpha$ возрастает, а значит $y''(x) > 0$, что возможно только если $f(x)$ выпукла.

б) Пусть $f''(x) = (f'(x))' < 0$, значит $f'(x)$ — убывает.



> Проведем семейство касательных к графику функции в точках M_1, M_2, $M_3 \ldots$, тогда $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$ соответственно $\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2 > \operatorname{tg}\alpha_3 > \ldots$, значит при стремлении M_1, M_2, $M_3 \ldots \to M_b$ убывают углы и соответственно убывает тангенс углов, т. е. $y' = \operatorname{tg}\alpha$ убывает, а значит $y''(x) < 0$, что возможно только если $f(x)$ — вогнута.

Эти определения раскрывают геометрический смысл понятия выпуклости вниз (вверх), но аналитически определяются иначе. Если для любых точек x_1 и $x_2 \in (a; b)$

$f(g_1x_1 + g_2x_2) \leqslant g_1 f(x_1) + g_2 f(x_2)$ при $g_1 > 0$ и $g_2 > 0$ и при этом $g_1 + g_2 = 1$, то $f(x)$ выпукла вниз ($\geqslant$ — выпукла вверх).

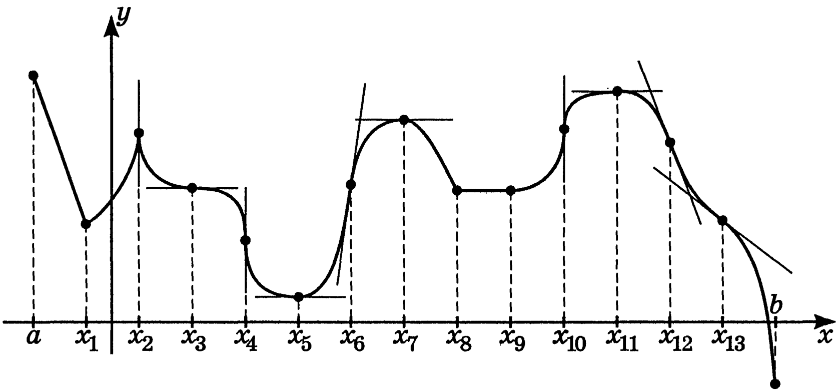
Примечание. Понятие было введено датским математиком Иоганом Иенсоном (1856–1925).

Для случая $g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Отметим также, что $y = ax + b$ аналитически выпукла и вогнута одновременно.

Практикум 20 (Примеры исследования)

1. Исходя из эскиза графика кривой, проанализировать особенности функции в точках.



а) В точке $x = a$ $\quad y(a) = y_{\text{наиб}}$.

б) В точке $x = x_1$ $\quad \neg\exists\, y'(x_1)$,[16] так как
$$\lim_{x\to x_1-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_1+0} f(x); \qquad f(x_1) = y_{\min}.$$

в) В точке $x = x_2$ конечной производной, нет $y'(x_2) = \infty$; $f(x_2) = y_{\max}$.

г) В точке $x = x_3$ $\quad f'(x_3) = 0$; $\quad (x_3; f(x_3))$ — точка перегиба, экстремума нет.

д) В точке $x = x_4$ $\quad \neg\exists\, f'(x_4)$; $\quad (x_4; f(x_4))$ — точка перегиба, экстремума нет.

е) В точке $x = x_5$ $\quad f'(x_5) = 0$; $\quad f(x_5) = y_{\min}$.

ж) В точке $x = x_6$ $\quad (x_6; f(x_6))$ — точка перегиба, экстремума нет.

з) В точке $x = x_7$ $\quad f'(x_7) = 0$; $\quad f(x_7) = y_{\max}$.

и) В точке $x = x_8$ $\quad \neg\exists\, y'(x_8)$, так как
$$\lim_{x\to x_8-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_8+0} f(x),$$ экстремума нет.

---

[16] $\neg\exists$ — означает не существует.

к) В точке $x = x_9$ $f'(x_9) = 0$, экстремума нет.

л) В точке $x = x_{10}$ $\neg\exists y'(x_{10})$; $(x_{10}; f(x_{10}))$ — точка перегиба, экстремума нет.

м) В точке $x = x_{11}$ $f'(x_{11}) = 0$; $f(x_{11}) = y_{\max}$.

н) В точке $x = x_{12}$ $(x_{12}; f(x_{12}))$ — точка перегиба.

о) В точке $x = x_{13}$ $(x_{13}; f(x_{13}))$ — точка перегиба, экстремума нет.

п) В точке $x = b$ $f(b) = y_{\text{наим}}$.

Примечание. Условие $f''(x_0) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, какую играет условие $f'(x_0) = 0$ при нахождении экстремумов функции $y = f(x)$; оно не необходимо и не достаточно.

Достаточность связана с изменением знака $f''(x)$ при переходе через значения $x = x_0$, а равно ли $f''(x_0)$ нулю или в точке с абсциссой $x = x_0$ производной $f''(x_0)$ нет, для существования точек перегиба не имеет значения.

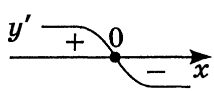
2. а) Найти точки перегиба и определить интервал выпуклости и вогнутости кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$.

$y' = -2xe^{-x^2}$

на $(-\infty; 0]$ $y = f(x) \uparrow$;

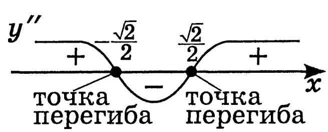
на $[0; \infty)$ $y = f(x) \downarrow$;

$y(0) = y_{\max}$.



$y'' = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$; $y'' = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$



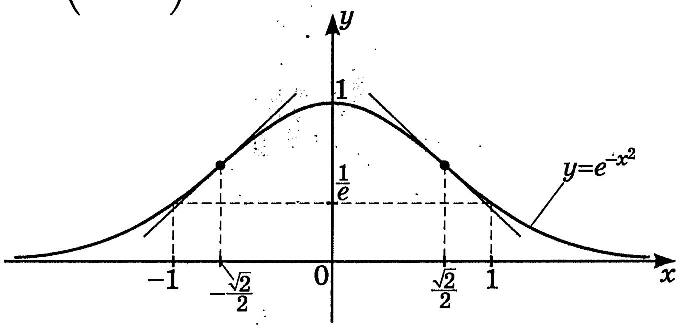
$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — абсцисса точки перегиба;

$x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — абсцисса точки перегиба.

На $\left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — кривая выпукла.

На $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — кривая вогнута

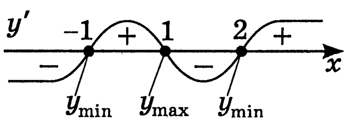
На $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$ — кривая выпукла.



Примечание. Функция $y = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где A и σ — постоянные коэффициенты, нашла широкое применение в теории вероятностей в качестве так называемого нормального закона распределения. Этот закон был введен гениальным немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) и носит его имя.

б) Исследовать функцию $y = \dfrac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 1$ на наличие экстремумов и интервалов выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба.

$y' = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = 3(x+1)(x-1)(x-2).$



$y_{\min} = y(-1) = \dfrac{3}{4} + 2 - \dfrac{3}{2} - 6 - 1 = -5{,}75;$

$y_{\max} = y(1) = \dfrac{3}{4} - 2 - \dfrac{3}{2} + 6 - 1 = 2{,}25;$

$$y_{\min} = y\,(2) = \frac{3}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 1 = 1.$$

Но абсциссы точек максимума или минимума можно определить и иначе.

$y'' = 9x^2 - 12x - 3;$

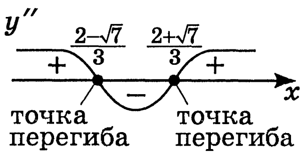
$y''(-1) = 18 > 0$, значит $x = -1$ — абсцисса точки минимума (выпукла).

$y''(1) = -6 < 0$, значит $x = 1$ — абсцисса точки максимума (вогнута).

$y''(2) = 9 > 0$, значит $x = 2$ — абсцисса точки минимума (выпукла).

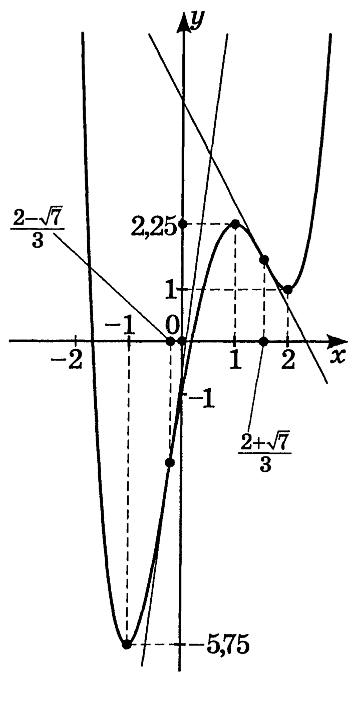
$y'' = 0; \quad 9x^2 - 12x - 3 = 0; \quad 3x^2 - 4x - 1 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$



Примечание.

По умолчанию имеется в виду **абсцисса** точки перегиба.



Практикум 21

Зная график производной функции $y = f(x)$, определите:

а) промежутки монотонности;

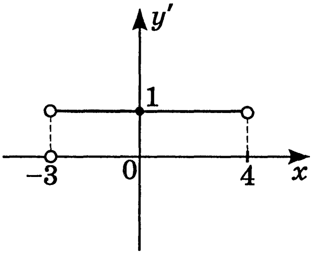
б) экстремумы функции и их вид, если они есть;

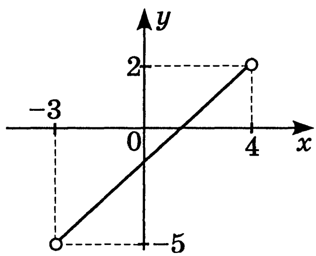
в) интервалы выпуклости и их вид;

г) абсциссы точек «подозрительных» на перегиб;

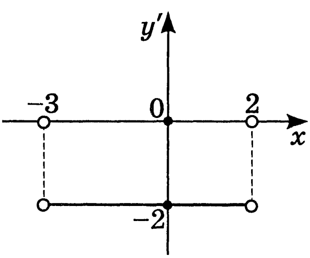
д) абсциссы точек перегиба;

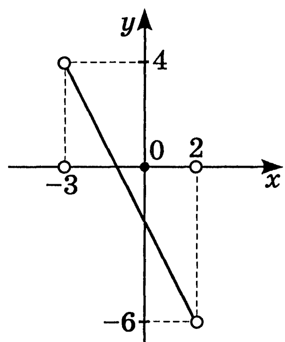
е) постройте **возможный** эскиз графика функции.

1. 



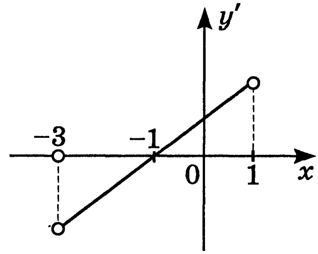
Очевидно $y = f(x)$ возрастает на $(-3; 4)$. Это обычная прямая вида $y = x + b$, где b — константа (например: $y = x - 2$).

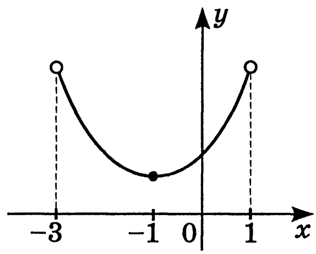
2. 



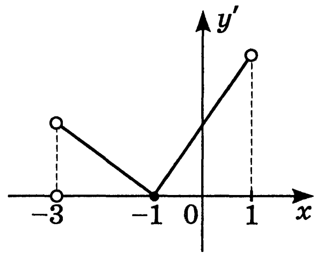
$y = f(x)$ убывает на $(-3; 2)$. Прямая вида $y = -2x + b$, где b — константа (например: $y = -2x - 2$).

3. а) На $(-3;-1)$ $y'(x)<0$, значит $y=f(x)$ убывает;
на $(-1;1)$ $y'(x)>0$, значит $y=f(x)$ возрастает.
б) $y(-1)=y_{\min}$.
в) На $(-3;1)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x)>0$, т. е. на $(-3;1)$ $y=f(x)$ — выпукла.
г), д) Изменения знаков $y''(x)$ нет, значит нет точек перегиба.
е) Один из возможных эскизов графика $y=f(x)$.
Например: $y=(x+1)^2+1$.

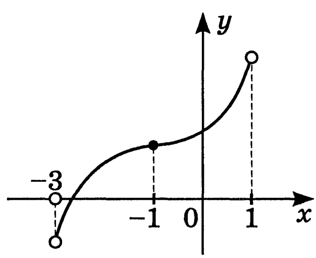




4. а) На $(-3;1)$ $y'(x)\geqslant 0$, значит $y=f(x)$ возрастает.
б) Хотя $y'(-1)=0$, но экстремума нет (нет изменения знаков y' на $(-3;1)$.
в) На $(-3;-1)$ $y'(x)$ убывает, значит $y''(x)<0$, тогда $y=f(x)$ — вогнута;

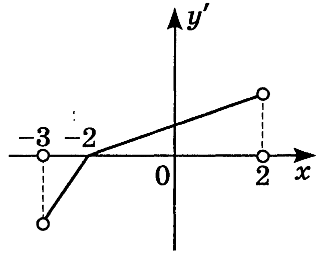


На $(-1;1)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x)>0$, тогда $y=f(x)$ — выпукла.
г) Так как $\neg\exists f''(-1)$[1], то $x_0=-1$ — абсцисса точкиб «подозрительной» на перегиб.
д) Так как, проходя через $x_0=-1$, $y''(x)$ меняет свой знак, то $(-1;\, y(-1))$ — точка перегиба.
е) Один из возможных эскизов графика $y=f(x)$. Например: $y=(x+1)|x+1|+1$.



[1] $\neg\exists$ — означает не существует.

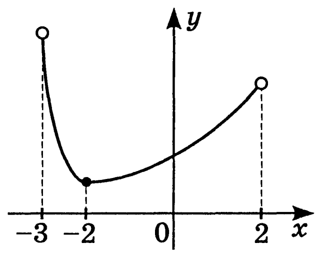
5. а) На $(-3;-2)$ $y'(x)<0$, значит $y=f(x)$ убывает;
на $(-2;2)$ $y'(x)>0$, значит $y=f(x)$ возрастает.
б) $y'(-2)=0$; $y(-2)=y_{\min}$.
в) На $(-3;2)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x)>0$, тогда $y=f(x)$ — выпукла.
г) $\neg\exists f''(-2)$,
значит $x=-2$ — абсцисса точки, «подозрительной» на перегиб.



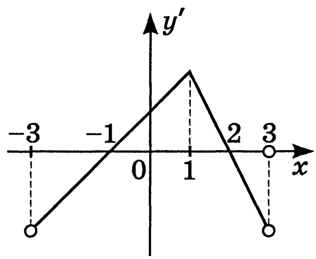
д) Так как на $(-3;2)$ $y''(x)$ не меняет свой знак, то точки перегиба нет.

е) Один из возможных эскизов графика $y=f(x)$. Например:

$$y=\begin{cases}4(x+2)^2+1 & \text{при } x\leqslant -2;\\ \dfrac{1}{8}(x+1)^2+\dfrac{7}{8} & \text{при } x>-2\end{cases}.$$



6. а) на $(-3;-1)$ $y'(x)<0$, значит $y=f(x)$ убывает;
на $(-1;2)$ $y'(x)>0$, значит $y=f(x)$ возрастает;
на $(2;3)$ $y'(x)<0$, значит $y=f(x)$ убывает.
б) $y'(-1)=0$; $y(-1)=y_{\min}$;
$y'(2)=0$; $y(2)=y_{\max}$.



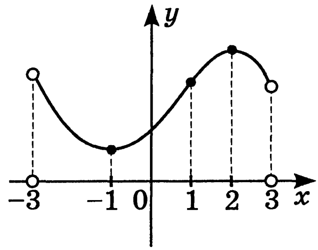
в) На $(-3;1)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x)>0$, тогда $y=f(x)$ выпукла;

на $(1;3)$ $y'(x)$ убывает, значит $y''(x)<0$, тогда $y=f(x)$ вогнута.

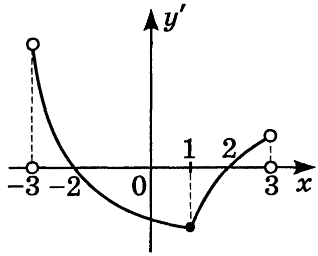
г) Так как $\neg\exists f''(1)$, то $x=1$ — абсцисса точки, «подозрительной» на перегиб.

д) $x = 1$ — абсцисса точки, проходя через которую $f''(x)$ меняет знак, тогда $(1; f(1))$ — точка перегиба.

е) Один из возможных эскизов графика $y = f(x)$



7. а) На $(-3;-2)$ $y'(x)>0$, значит $y = f(x)$ возрастает;
на $(-2;2)$ $y'(x) < 0$, значит $y = f(x)$ убывает;
на $(2;3)$ $y'(x) > 0$, значит $y = f(x)$ возрастает.



б) $y'(-2) = 0$; $y(-2) = y_{\max}$;
$y'(2) = 0$; $y(2) = y_{\min}$.

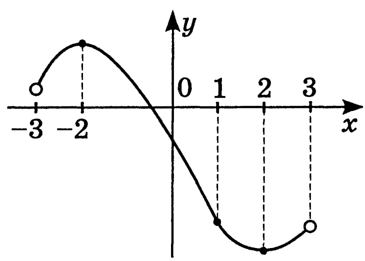
в) На $(-3;1)$ $y'(x)$ убывает, значит $y''(x) < 0$, тогда $y = f(x)$ — вогнута;

на $(1;3)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x) > 0$, тогда $y = f(x)$ — выпукла.

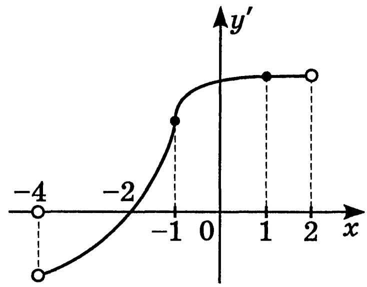
г) Так как $\neg\exists f''(1)$, то $x = 1$ — абсцисса точки, «подозрительной» на перегиб.

д) $x = 1$ — абсцисса точки, проходя через которую $f''(x)$ меняет знак. Значит $(1; f(1))$ — точка перегиба.

е) Один из возможных эскизов графика $y = f(x)$

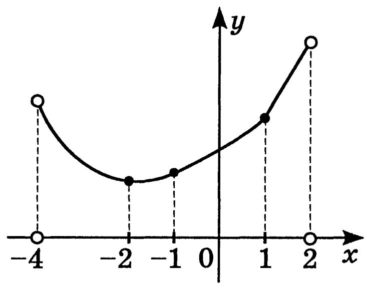


8. а) На $(-4;-2)$ $y'(x)<0$, значит $y=f(x)$ убывает;
на $(-2;2)$ $y'(x)>0$, значит $y=f(x)$ возрастает.



б) $y'(-2)=0$; $y(-2)=y_{\min}$.

в) На $(-4;1)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x)>0$, тогда $y=f(x)$ выпукла;
на $(1;2)$ $y'(x)$ — постоянная (положительная), т. е. в содержательном геометрическом смысле есть прямая.
$y=f(x)$ — общего вида относительно выпуклости. В аналитическом смысле выпукла и вогнута одновременно.



г) Так как $\neg\exists y''(-1)$, то $x=-1$ — абсцисса точки, «подозрительной» на перегиб.

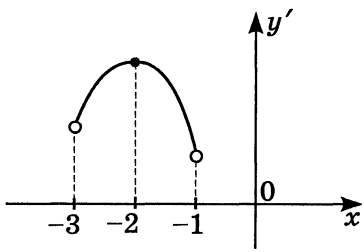
д) Точек перегиба нет, так как нет изменения знака $y''(x)$ на $(-4;2)$ нет.

е) Один из возможных эскизов графика $y=f(x)$.

Примечание. В точке $(-1;f(-1))$ гладкого перехода нет.

9. а) На $(-3;-1)$ $y'(x)>0$, значит $y=f(x)$ возрастает;

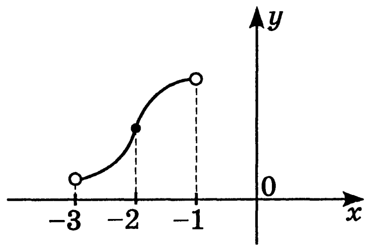
б) На $(-3;-1)$ изменения знаков y' нет, значит нет и экстремумов.



в) На $(-3;-2)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y'' > 0$, т. е. на $(-3;-2)$ кривая выпукла.

г) На $(-2;-1)$ $y'(x)$ убывает, значит $y'' < 0$, т. е. на $(-2;-1)$ кривая вогнута.

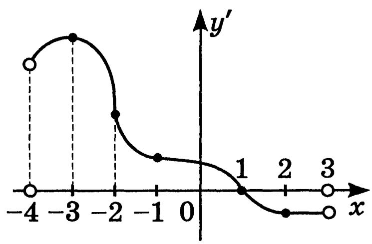
д) $(-2; f(-2))$ — координата точки перегиба.

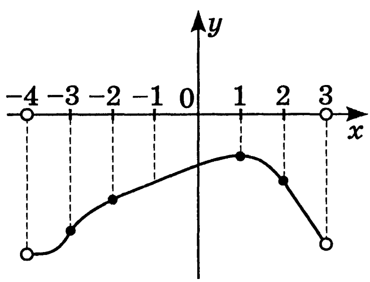


10. а) На $(-4;1)$ $y'(x) > 0$, значит $y = f(x)$ возрастает; на $(1;3)$ $y'(x) < 0$, значит $y = f(x)$ убывает.

б) $y'(1) = 0$; $y(1) = y_{\max}$.

в) На $(-4;-3)$ $y'(x)$ возрастает, значит $y''(x) > 0$, тогда $y = f(x)$ выпукла; на $(-3;2)$ $y'(x)$ убывает, значит $y''(x) < 0$, тогда $y = f(x)$ — вогнута; на $(2;3)$ $y'(x)$ — постоянная (отрицательная) в смысле выпуклости общего вида.





г) Так как $f''(-1) = 0$; $f''(-3) = 0$; $\neg\exists f''(-2)$; $\neg\exists f''(2)$, то $x = -1$; $x = 2$; $x = -2$; $x = -3$ — абсциссы точек, «подозрительных» на перегиб.

д) $(-3; f(-3))$ — координаты точки перегиба, так как, проходя через нее, $y''(x)$ меняет знак.

е) Один из возможных эскизов графика $y = f(x)$.

В точке $(-2; f(-2))$ гладкого перехода нет.

Примечание. Изменение выпуклости графика производной на $(-2;2)$ не влияет на выпуклость графика функции, скорее на степень кривизны.

Рассмотрим несколько известных функций и найдем интервалы выпуклости для них и эскиз графика.

1. $y = a^x \quad (a > 0; \quad a \neq 1);$

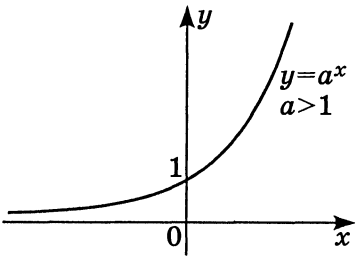
$y' = a^x \ln a.$

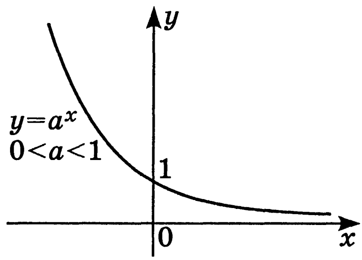
а) При $a > 1 \quad y'(x) > 0; \quad y = a^x$ возрастает.

б) При $0 < a < 1 \quad y'(x) < 0; \quad y = a^x$ убывает.

$y'' = a^x \ln^2 a > 0$ при любых x (для $a > 0$ и $a \neq 1$).

Итак, на $(-\infty; \infty)$ функция $y = a^x$ — выпукла.



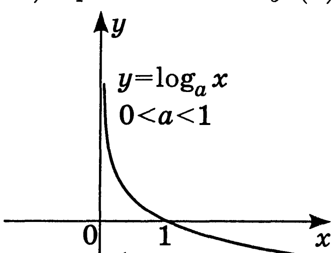


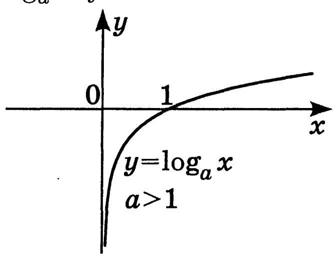
2. $y = \log_a x \quad (a > 0; \quad a \neq 1; \quad x > 0);$

$y' = \dfrac{1}{x} \log_a e.$

а) При $a > 1 \quad y'(x) > 0; \quad y = \log_a x$ возрастает.

б) При $0 < a < 1 \quad y'(x) < 0; \quad y = \log_a x$ убывает.



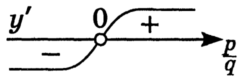


$y'' = -\dfrac{1}{x^2} \log_a e$, значит, если

а) $a > 1$, то $y''(x) < 0$, значит на $(0; \infty)$ при $a > 1$ $y = \log_a x$ — вогнута;

б) $0 < a < 1$, то $y''(x) > 0$, значит на $(0; \infty)$ при $0 < a < 1$ $y = \log_a x$ — выпукла.

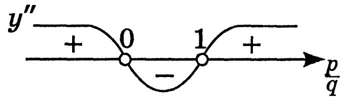
3. $y = x^{\frac{p}{q}}$ на $(0;\infty)$; $y' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$.



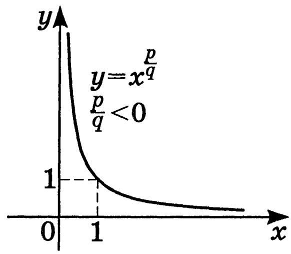
а) При $\frac{p}{q} < 0$ $y'(x) < 0$; $y = x^{\frac{p}{q}}$ убывает.

б) При $\frac{p}{q} > 0$ $y'(x) > 0$; $y = x^{\frac{p}{q}}$ возрастает.

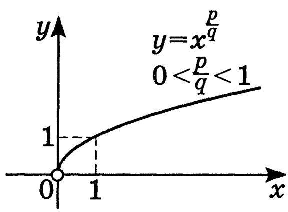
$y'' = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)x^{\frac{p}{q}-2}$.



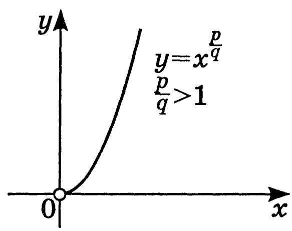
а) При $\frac{p}{q} < 0$ на $(0;\infty)$ $y'' > 0$, тогда $y = x^{\frac{p}{q}}$ выпукла ($0x$ — горизонтальная асимптота; $0y$ — вертикальная асимптота).



б) При $0 < \frac{p}{q} < 1$ на $(0;\infty)$ $y'' < 0$, тогда $y = x^{\frac{p}{q}}$ вогнута.

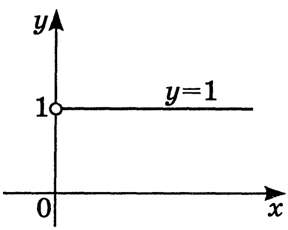


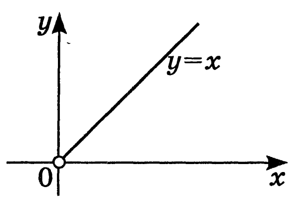
в) При $\frac{p}{q} > 1$ на $(0;\infty)$ $y'' > 0$, тогда $y = x^{\frac{p}{q}}$ выпукла.



г) $\frac{p}{q} = 0$; $y = 1$.

д) $\frac{p}{q} = 1$; $y = x$.





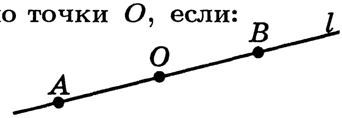
Четные и нечетные функции

Понятия четности и нечетности

Определение 1. Точка A называется центрально-симметричной точке B относительно точки O, если:

а) точки A, B, O одновременно принадлежат прямой l;

б) расстояние $AO = OB$.



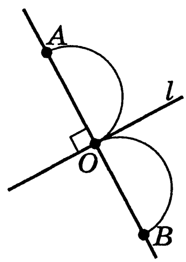
Обозначается $Z_0(A) = B$ или $Z_0(B) = A$.

Определение 2. Точка A называется симметричной точке B относительно оси l, если:

а) прямая $(AB) \perp l$;

б) $AB \cap l = O$ и $AO = OB$.

Обозначается $S_l(A) = B$ или $S_l(B) = A$.



Определение 3. Множество M числовой прямой называется симметричным относительно точки O (начала координат), если для $\forall x \in M$ следует, что $-x \in M$.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется четной, если:

а) область определения $D(f)$ — симметричное множество относительно точки O (начала координат);

б) для $\forall x \in D(f)$ справедливо $\boxed{f(-x) = f(x)}$.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется нечетной, если:

а) область определения $D(f)$ — симметричное множество относительно точки O (начала координат);

б) для $\forall x \in D(f)$ справедливо $\boxed{f(-x) = -f(x)}$.

Определение 6. Функция называется функцией общего вида в смысле четности, если она не является четной и не является нечетной.

Рассмотрим несколько примеров на использование определений.

Выясните четность функции.

1. $y = x^6$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество.

б) $f(-x) = (-x)^6 = x^6 = f(x)$, значит функция четная.

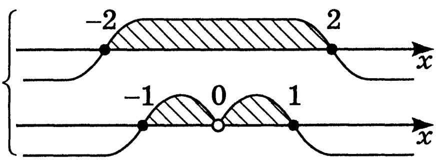
2. $y = \dfrac{1 - x^6}{x^2 - 1}$.

а) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ — симметричное множество.

б) $f(-x) = \dfrac{1 - (-x)^6}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{1 - x^6}{x^2 - 1} = f(x)$ значит, четная.

3. $y = \sqrt{4 - x^2} + \arcsin \dfrac{1}{x^2}$.

а) $D(f)$: $\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0 \\ -1 \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0 \\ \dfrac{1 - x^2}{x^2} \leqslant 0 \end{cases}$.



$D(f) = [-1; 0) \cup (0; 1]$ — симметричное множество

б) $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} + \arcsin \dfrac{1}{(-x)^2} =$

$= \sqrt{4 - x^2} + \arcsin \dfrac{1}{x^2} = f(x)$ — значит четная.

4. $y = x\sqrt{x^2 - 4}$.

а) $D(f) = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ — симметричное множество.

б) $f(-x) = -x\sqrt{(-x)^2 - 4} = -x\sqrt{x^2 - 4} = -f(x)$ — функция нечетная.

5. $y = \log_3\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

а) $D(f): \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} > 0 \\ x^2+1 \geqslant 0 \end{cases}$,

тогда $D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество $\left(\sqrt{x^2+1} > -x \text{ при } \forall x\right)$.

б) $f(-x) = \log_3\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) =$

$$= \log_3\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) =$$

$$= \log_3 \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} =$$

$$= \log_3 \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \log_3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= -\log\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = -f(x).$$

Значит, функция нечетная.

6. $y = \dfrac{\left(1-x^2\right)\cos x}{x^2+2x-3}$.

а) $D(f):\ x^2+2x-3 \neq 0$, тогда

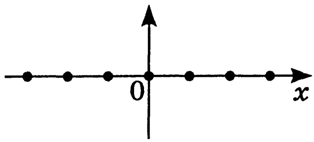
$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; \infty)$ — несимметричное множество.

Так $1 \in D(f)$, а $-1 \notin D(f)$.

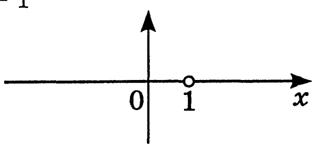
Значит функция общего вида в смысле четности.

Примечания. 1. Определения четности и нечетности имеют содержательный смысл только для ненулевой функции (нулевой называется функция $y = f(x)$, если $\forall x \in D(f) \quad f(x) = 0$).

2. Только нулевые функции являются одновременно четными и нечетными, например, $y = \sqrt{\lg\cos(\pi x)}$.



3. Если нулевая функция не является четной, то она не является и нечетной, и наоборот (т. е. это функция общего вида), например, $y = 1 - \dfrac{x-1}{x-1}$.



Свойства функций, являющихся алгебраическими комбинациями из четных и нечетных функций

1. Пусть $y = f(x)$ — четная и $y = g(x)$ — четная, причем $D(f) = D(g)$, тогда

а) $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ — четная функция,

б) $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ — четная функция,

в) $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ — четная функция,

г) $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$, то $\varphi(x)$ — четная функция.

2. Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — нечетные функции, причем $D(f) = D(g)$, тогда

а) $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ — нечетная функция,

б) $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ — нечетная функция,

в) $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ — четная функция,

г) $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$, то $\varphi(x)$ — четная функция.

3. Пусть $y = f(x)$ — нечетная и $x = \varphi(t)$ — четная, тогда $y = f(\varphi(t))$ — четная функция.

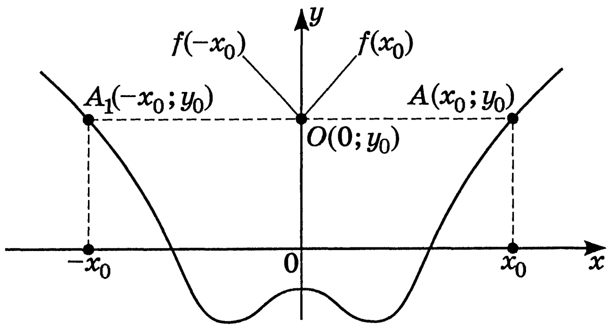
4. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ — нечетные функции, тогда $y = f(\varphi(t))$ — нечетная функция.

5. Пусть $y = f(x)$ — четная функция и $x = \varphi(t)$ — нечетная функция, тогда $y = f(\varphi(t))$ — четная функция.

6. Пусть $y = f(x)$ — четная функция и $f(x) \neq 0$ на $D(f)$, тогда $y = \dfrac{1}{f(x)}$ — четная функция.

7. Пусть $f(x)$ — нечетная функция и $f(x) \neq 0$ на $D(f)$, тогда $y = \dfrac{1}{f(x)}$ — нечетная функция.

Теорема 1. График четной функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси ординат.



Доказательство

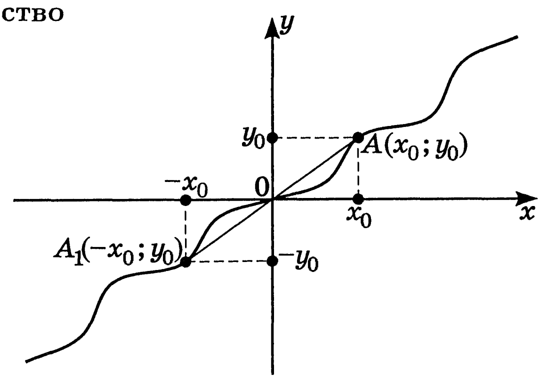
Пусть $A(x_0; y_0) \in \Gamma y = f(x)$.

Так как $y = f(x)$ — четная, то $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$, т. е. $A_1(-x_0; y_0) \in \Gamma y = f(x)$.

$A_1 A \perp Oy$; $A_1 O = AO$, тогда $S_{Oy}(x_0) = -x_0$, а так как $x_0 \in D(f)$, где x_0 — любая точка, и $-x_0 \in D(f)$, то график $y = f(x)$ симметричен относительно оси Oy.

Теорема 2. График нечетной функции центрально-симметричен относительно начала координат.

Доказательство



Пусть $A(x_0; y_0) \in \Gamma y = f(x)$.

1) Так как $y=f(x)$ — нечетная, то $f(-x_0)=-f(x_0)$, значит $A_1(-x_0;-y_0) \in \Gamma y = f(x)$.

2) Так как:

а) очевидно $A_1, 0, A$ принадлежит прямой AA_1;

б) $A_1O = OA \quad (O(0;0))$, то $Z_0(A) = A_1$ и $Z_0(A_1) = A$.

Теорема 3. Пусть $y = f(x)$ — четная функция, тогда если x_0 — абсцисса максимума (минимума) четной функции, то $-x_0$ — также абсцисса максимума (минимума) функции.

Теорема 4. Пусть $y=f(x)$ — нечетная функция, тогда если x_0 — абсцисса максимума (минимума) нечетной функции, то $-x_0$ абсцисса минимума (максимума) функции.

Теорема 5. Если $y = f(x)$:
а) четная,
б) возрастает (убывает) на $[a;b]$,
то она убывает (возрастает) на $[-b;-a]$.

Теорема 6. Если $y = f(x)$:
а) нечетная,
б) возрастает (убывает) на $[a;b] \quad (0 < a < b)$,
то она возрастает (убывает) на $[-b;-a]$.

Примечание. В практикуме 22 проверьте справедливость теорем 5 и 6 в примерах 2, 3, 5, 8 и 10.

Практикум 22

1. Выяснить вид функции в смысле четности.

а) $y = \sqrt{x+3}$;

б) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$;

в) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

г) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$;

д) $y = \sqrt{x^6 - |x|} \cdot \log_3 x^2$;

е) $y = \dfrac{(1-\sin x)\cos^3 x}{|1-\sin x|}$;

ж) $y = \ln\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$;

з) $y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

и) $y = \arccos(\sin x)$;

к) $y = \mathrm{tg}3x \cdot \mathrm{tg}5x$.

2. Существует ли функция $y = f(x)$, где $D(f) = (-\infty; \infty)$, которая одновременно является:

а) нечетной и возрастающей;

б) нечетной и убывающей;

в) четной и возрастающей;

г) четной и невозрастающей?

Если да, то приведите пример, если нет, докажите, что это невозможно.

3. Выясните вид функции в смысле четности и постройте график.

а) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;

б) $y = 1 - \dfrac{\sin x - 1}{\sin x - 1}$.

Решение практикума 22

1. Выяснить вид функции в смысле четности.

а) $y = \sqrt{x+3}$.

Так как $D(f) = [-3; \infty)$, то $D(f)$ не является симметричным множеством,

значит $y = \sqrt{x+3}$ — функция общего вида в смысле четности.

б) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$.

1. $D(f)$: $\quad 2^x - 2^{-x} \neq 0$; т. е. $x \neq 0$.

   $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ — симметричное множество.

2. $f(-x) = \dfrac{2^{-x} + 2^x}{2^{-x} - 2^x} = -\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = -f(x)$,

   т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

в) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

1. $D(f)$: $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} > 0$; $\quad -1 < \sin x < 1$,

   т. е. $D(f)$: $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ — симметричное множество.

2. $f(-x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 + \sin(-x)}{1 - \sin(-x)} = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x} =$

   $= -\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = -f(x)$,

   т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция

   ($y = \sin x$ — нечетная функция).

г) $y = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

1. $D(f)\colon\ x \neq 0$, т. е. $D(f)$ — симметричное множество.
2. $f(-x) = (-x)^2 \sin\left(\dfrac{1}{-x}\right) = x^2\left(-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) =$
$= -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

д) $y = \sqrt{x^6 - |x|} \cdot \log_3 x^2$.

1. $D(f)\colon\ \begin{cases} x^6 - |x| \geqslant 0 \\ x^2 > 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x^6 - |x| \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases};$
$D(f) = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$ — симметричное множество.
2. $f(-x) = \sqrt{(-x)^6 - |-x|} \cdot \log_3 (-x)^2 =$
$= \sqrt{x^6 - |x|} \cdot \log_3 x^2 = f(x)$,
т. е. $y = f(x)$ — четная функция.

е) $y = \dfrac{(1 - \sin x)\cos^3 x}{|1 - \sin x|}$.

$D(f)\colon\ \sin x \neq 1$, т. е. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, тогда $D(f)$ не является симметричным множеством, значит $y = f(x)$ — функция общего вида в смысле четности.

ж) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$.

$D(f)\colon\ x + \sqrt{1 - x^2} > 0;\quad \sqrt{1 - x^2} > -x;$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x \geqslant 0 \\ 1 - x^2 > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -x < 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 0 \\ 0 < x \leqslant 1 \end{array}\right.,$$

т. е. $D(f) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ не является симметричным множеством, значит $y = f(x)$ — функция общего вида в смысле четности.

з) $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

1. $D(f)$: $\begin{cases} x^2+x+1\geqslant 0 \\ x^2-x+1\geqslant 0 \end{cases}$,

т. е. $D(f)=(-\infty;\infty)$ — симметричное множество.

2. $f(-x)=\sqrt{1+(-x)+(-x)^2}-\sqrt{1-(-x)+(-x)^2}=$
$=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-f(x)$,

т. е. $y=f(x)$ — нечетная функция.

и) $y=\arccos(\sin x)$.

1. $D(f)$: $|\sin x|\leqslant 1$, т. е. $D(f)=(-\infty;\infty)$ — симметричное множество; $y=\arccos x$ — функция общего вида в смысле четности.

2. $f(-x)=\arccos(\sin(-x))=\arccos(-\sin x)=$
$=\pi-\arccos(\sin x)\neq\pm f(x)$, т. е. $y=f(x)$ — функция общего вида в смысле четности.

к) $y=\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}5x$.

1. $D(f)$: $\begin{cases} \cos 3x\neq 0 \\ \cos 5x\neq 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} 3x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k \\ 5x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k \end{cases};\quad \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}k \\ x\neq \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi}{5}k \end{cases}$$

(оба множества симметричные).

Известно, что пересечение симметричных множеств есть симметричное множество, т. е. $D(f)$ — симметричное множество.

2. $f(-x)=\operatorname{tg}(-3x)\cdot\operatorname{tg}(-5x)=(-\operatorname{tg}3x)(-\operatorname{tg}5x)=$
$=\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}5x=f(x)$, т. е. $y=f(x)$ — четная функция, хотя $y=\operatorname{tg}ax$ — нечетная функция $(a\neq 0)$.

Можно было использовать свойство 2в) (см. с. 331) на общей области определения (на $D(f)$).

2. Существует ли функция $y = f(x)$, где $D(f) = (-\infty; \infty)$, которая одновременно является:

а) **нечетной и возрастающей?**

Да, существует, например $y = x^3$.

1. $D(f) = (-\infty; \infty)$.
2. $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, т. е. $y = x^3$ — нечетная.
3. Пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2\right)$. $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0 \quad \forall x_2; x_1$ — как неполный квадрат или $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 > 0$ — что очевидно. Значит $(x_2 - x_1)\left(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2\right) > 0$, тогда из $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. $y = f(x)$ — возрастающая. (Можно было бы это доказать, используя производную.)

б) **нечетной и убывающей?**

Да, существует. Например $y = -x^3$. По аналогии доказывается, что $y = -x^3$ нечетная и убывающая.

в) **четной и возрастающей?**

Увы, такой функции нет. Пусть $y = f(x)$ — четная, тогда $f(-x) = f(x)$.

Пусть $x > -x$ $(x > 0$ — любое фиксированное число), тогда если $y = f(x)$ — возрастает, то $f(x) > f(-x)$, но $f(x) = f(-x)$, т. е. одновременно это невозможно.

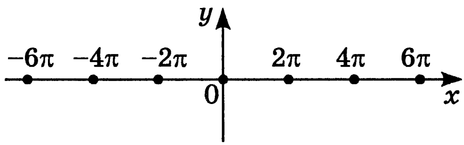
г) **четной и невозрастающей?**

Да. Напомним определение невозрастающей функции. $y = f(x)$ — невозрастающая, если большему значению аргумента $(x_2 > x_1)$ $(\forall x_2; x_1 \in D(f))$ соответствует меньшее или равное значение функции, т. е. из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \leqslant f(x_1)$. Очевидно, что если $f(x) = c$ — постоянная, то $y = f(x)$ является и невозрастающей, и четной функцией. Что и требовалось доказать.

3. Выясните вид функции в смысле четности и постройте график.

а) $y = \sqrt{\cos x - 1}$.

$D(y)$: $\cos x - 1 \geqslant 0$; $\cos x \geqslant 1$; $x = 2\pi k$.

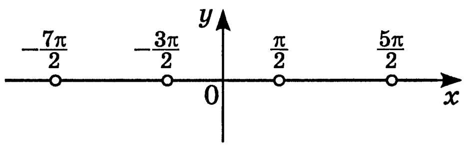


Так как в этих точках $y = 0$,

то $y = \sqrt{\cos x - 1}$ есть нулевая функция,

и $f(-x) = \sqrt{\cos(-x) - 1} = \sqrt{\cos x - 1} = f(x)$, т. е. она является одновременно четной и нечетной функцией.

б) $y = 1 - \dfrac{\sin x - 1}{\sin x - 1}$;



$D(y)$: $\sin x \neq 1$; $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Для $\forall x \in D(y)$ $y = 0$, т. е. y — нулевая функция, а значит, она не является четной и нечетной одновременно.

В данном случае в силу несимметричности $D(y)$ функция y является фунцией общего вида.

Практикум 23

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 4}$. При каких значениях a функция $g(x) = f(x - a)$ — четная?

2. При каких значениях b график функции $y = \sqrt{3 - x} + \sqrt{x + b}$ симметричен относительно оси Oy?

3. Может ли уравнение $2x^6 - 3x^4 - ax^2 = 3$ в зависимости от значения a иметь три корня?

4. Докажите, что при любом значении a уравнение $8x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ имеет четное количество корней.

5. Докажите, что уравнение $5^x - 5^{-x} = x^3 + 4ax$ имеет нечетное число корней при любом значении a.

6. Докажите, что уравнение $4^x + 4^{-x} = ax^2 + 2x^4 + 2$ имеет нечетное число корней.

7. Найдите ось симметрии функции $y = x^2 (x - 1)^2$.

8. Найдите точку, относительно которой график функции $y = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$ центрально-симметричен.

Решение практикума 23

1. $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$. При каких значениях a функция $g(x) = f(x-a)$ — четная?

а) $D(f)$: $x^2+x+4>0$ при любых x (сдвиг вдоль оси Ox не меняет $D(f)$) на $(-\infty;\infty)$. Значит $D(g)$ — симметричное множество.

б) Так как $g(x) = f(x-a) = \sqrt{(x-a)^2+(x-a)+4} =$
$= \sqrt{x^2-(2a-1)x+a^2-a+4}$, а
$g(-x) = f(-x-a) = \sqrt{x^2+(2a-1)x+a^2-a+4}$,
то для четности $g(-x) = g(x)$. Выясним, при каких значениях a это возможно.
$\sqrt{x^2-(2a-1)x+a^2-a+4} =$
$= \sqrt{x^2+(2a-1)x+a^2-a+4}.$
Так как $D(g) = (-\infty;\infty)$,
то $x^2-(2a-1)x+a^2-a+4 = x^2+(2a-1)x+a^2-a+4$,
значит $-(2a-1)x = (2a-1)x$, тогда $2(2a-1)x = 0$, что верно для любых x, только если $a = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: при $a = \dfrac{1}{2}$ функция $g(x) = f(x-a)$, где $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$, есть четная функция.

2. При каких значениях b график функции $y = \sqrt{3-x}+\sqrt{x+b}$ симметричен относительно оси Oy?

а) Для симметричности графика функции функция должна быть четной, значит $D(y)$ — симметричное множество.
$D(f)$: $\begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ x+b \geqslant 0 \end{cases}$; $\quad -b \leqslant x \leqslant 3$, значит $b = 3$.

б) Тогда $y(x) = \sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}$ и
$y(-x) = \sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}$, значит $y(-x) = y(x)$, значит $y(x) = \sqrt{3-x}+\sqrt{x+b}$ — четная при $b = 3$.

3. Может ли уравнение $2x^6 - 3x^4 - ax^2 = 3$ в зависимости от значения a иметь три корня?

Пусть $t(x) = 2x^6 - 3x^4 - ax^2 - 3$.

а) Так как $D(t) = (-\infty; \infty)$, то $D(t)$ — симметричное множество.

б) $t(-x) = 2x^6 - 3x^4 - ax^2 - 3$,

значит $t(-x) = t(x)$,

т. е. $t(x)$ — четная функция, тогда

в) если $t(x_1) = 0$, то и $t(-x_1) = 0$;

г) если $t(x) = 0$ при $x \in \emptyset$, то это тоже четное число решений.

Вывод. Так как $t(0) = -3 \neq 0$, то уравнение может иметь только четное число решений.

Ответ: при любых значениях a уравнение

$2x^6 - 3x^4 - ax^2 = 3$ не может иметь трех корней.

4. Докажите, что при любом значении a уравнение $8x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ имеет четное число корней.

а) Пусть $t(x) = 8x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 - 5$.

$D(t) = (-\infty; \infty)$, значит $D(t)$ — симметричное множество.

б) $t(-x) = 8x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 - 5$, тогда $t(x) = t(-x)$, значит $t(x)$ — четная функция.

в) $t(0) = -5 \neq 0$.

г) Пусть $t(x_1) = 0$, тогда и $t(-x_1) = 0$,

значит $t(x) = 0$ имеет четное число корней,

а тогда и уравнение $8x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ имеет четное число корней при любом значении a.

5. Докажите, что уравнение $5^x - 5^{-x} = x^3 + 4ax$ имеет нечетное число корней при любом значении a.

а) Пусть $t(x) = 5^x - 5^{-x} - x^3 - 4ax$; $D(t) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество.

б) $t(-x) = 5^{-x} - 5^x - (-x)^3 - 4a(-x) = 5^{-x} - 5^x + x^3 + 4ax = -\left(5^x - 5^{-x} - x^3 - 4ax\right) = -t(x)$,
значит $t(x)$ — нечетная функция.

в) $t(0) = 5^0 - 5^0 - 0 - 4a \cdot 0 = 0$, т.е. $x = 0$ — корень функции, а значит и корень уравнения.

г) Пусть $t(x_1) = 0$, значит и $t(-x_1) = -t(x_1) = 0$.

Итак, при любых значениях a функция имеет только нечетное число корней, а значит и уравнение имеет нечетное число корней.

6. Докажите, что уравнение $4^x + 4^{-x} = ax^2 + 2x^4 + 2$ имеет нечетное число корней.

а) Пусть $t(x) = 4^x + 4^{-x} - ax^2 - 2x^4 - 2$.
$D(t) = (-\infty; \infty)$, значит $D(t)$ — симметричное множество.

б) $t(-x) = 4^{-x} + 4^x - ax^2 - 2x^4 - 2 = t(x)$, значит $t(x)$ — четная функция.

в) $t(0) = 4^0 + 4^0 - a \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2 = 0$, значит $x = 0$ — корень функции, а тогда $x = 0$ и корень уравнения.

г) Пусть $t(x_1) = 0$, значит и $t(-x_1) = 0$, тогда функция $t(x)$ имеет нечетное число корней, а значит и уравнение имеет нечетное число корней.

7. Найдите ось симметрии функции $y = x^2(x-1)^2$.

а) Пусть $x = a$ — есть ось симметрии функции
$y = f(x) = x^2(x-1)^2$, тогда так как $D(f) = (-\infty; \infty)$ — симметричное множество, то для симметрии относительно $x = a$ должно выполняться функциональное равенство $f(a+x) = f(a-x)$ для любых x.

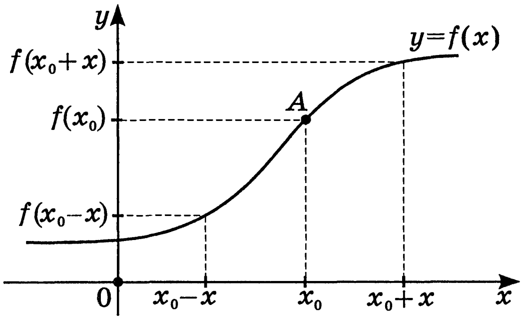
б) $f(a+x) = (a+x)^2(a+x-1)^2$ и
$f(a-x) = (a-x)^2(a-x-1)^2$,
тогда $(a+x)^2(a+x-1)^2 = (a-x)^2(a-x-1)^2$.

Используя разность квадратов, получим:

$$((a+x)(a+x-1)+(a-x)(a-x-1))\times$$
$$\times((a+x)(a+x-1)-(a-x)(a-x-1))=0;$$
$$\left(a^2+2ax+x^2-a-x+a^2-2ax+x^2-a+x\right)\times$$
$$\times\left(a^2+2ax+x^2-a-x-a^2+2ax-x^2+a-x\right)=0;$$
$$2\left(a^2+x^2-a\right)(4ax-2x)=0;\quad \left[\begin{array}{l} a^2+x^2-a=0 \\ 2x(2a-1)=0 \end{array}\right..$$

Итак, при $a=\dfrac{1}{2}$ $f(a+x)=f(a-x)$ при любом x, значит при $a=\dfrac{1}{2}$ $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$ при любом x, тогда прямая $x=\dfrac{1}{2}$ есть ось симметрии функции $y=x^2(x-1)^2$.

8. Найдите точку, относительно которой график функции $y=(x+3)(x+1)(x-2)$ центрально-симметричен.



а) Пусть $A(x_0;y_0)$ — точка, относительно которой график функции центрально-симметричен.
Тогда $f(x_0+x)-f(x_0)=f(x_0)-f(x_0-x)$,
т. е. $2f(x_0)=f(x_0+x)+f(x_0-x)$.

б) Тогда $2f(x_0) = 2(x_0+3)(x_0+1)(x_0-2) =$
$= 2\left(x_0^2+4x_0+3\right)(x_0-2) = 2\left(x_0^3+2x_0^2-5x_0-6\right).$

в) $f(x_0+x) = (x_0+x)^3 + 2(x_0+x)^2 - 5(x_0+x) - 6,$
$f(x_0-x) = (x_0-x)^3 + 2(x_0-x)^2 - 5(x_0-x) - 6,$ значит
$f(x_0+x) + f(x_0-x) =$
$= (x_0+x)^3 + (x_0-x)^3 + 2\left((x_0+x)^2 + (x_0-x)^2\right) -$
$-5(x_0+x+x_0-x) - 12 =$
$= x_0^3 + 3x_0^2x + 3x_0x^2 + x^3 + x_0^3 - 3x_0^2x + 3x_0x^2 -$
$-x^3 + 4x_0^2 + 4x^2 - 10x_0 - 12 =$
$= 2\left(x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0x^2 + 2x^2 - 5x_0 - 6\right).$

Тогда $2\left(x_0^3+2x_0^2-5x_0-6\right) =$
$= 2\left(x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0x^2 + 2x^2 - 5x_0 - 6\right);$

$3x_0x^2 + 2x^2 = 0; \quad x^2(3x_0+2) = 0,$ т. е. $x_0 = -\dfrac{2}{3};$

$2f(x_0) = f(x_0+x) + f(x_0-x)$ при любом x;

$$y_0 = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}+3\right)\left(-\frac{2}{3}+1\right)\left(-\frac{2}{3}-2\right) =$$
$$= \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{56}{27} = -2\frac{2}{27},$$

т. е. точка $A\left(-\dfrac{2}{3}; -2\dfrac{2}{27}\right)$ — точка, относительно которой график функции $f(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$ центрально-симметричен.

6 Исследование функции и построение графиков с использованием производной

Схема исследования функции

Алгоритм исследования

Исследование функций и построение графиков проводятся по следующей схеме.

1. Находится область определения (часто это показывает возможность наличия или отсутствия вертикальных асимптот).

2. Находятся нули функции и интервалы знакопостоянства. В связи с этой информацией находятся области существования графика функции.

3. Выясняется наличие асимптот:

   а) вертикальных;

   б) горизонтальных;

   в) наклонных.

   В связи с этим определяется наличие:

   а) точек пересечения горизонтальной асимптоты и графика функции;

   б) точек пересечения наклонной асимптоты и графика функции.

4. Находится производная функции, затем:
   а) корни (нули) производной (стационарные точки) или их отсутствие;
   б) критические точки (точки, в которых производная отсутствует или не определена);
   в) промежутки монотонности;
   г) экстремумы функции.
5. Находится вторая производная и определяются:
   а) интервалы выпуклости;
   б) точки перегиба.
6. Проверяется четность функции.
7. Проверяется периодичность функции.
8. При необходимости вычисляются контрольные точки.

Примечание. Очевидно, что схема исследования приблизительна. Какие-то пункты рассматривать нет смысла, какие-то пункты необходимо исследовать в первую очередь и т. д.

Необходимо отметить также, что чаще пункты 6 и 7 рассматриваются до нахождения производной, так как для дробно-рациональных функций производная четной функции — нечетная, а производная нечетной функции — четная.

Примеры исследования функций и построения графиков (И.Ф.П.Г.)

1. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

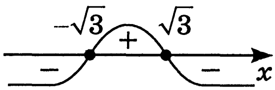
а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) Выясним интервалы знакопостоянства.

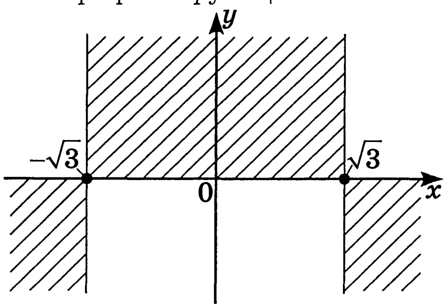
$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y < 0 \\ y > 0 \end{array}\right| \quad -x^4 + 2x^2 + 3 = 0.$$

Пусть $x^2 = t \quad (t \geqslant 0)$. $\quad -t^2 + 2t + 3 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -1 \end{array}\right.$,

тогда $-t^2 + 2t + 3 = -(t-3)(t+1) = -(x^2-3)(x^2+1)$.



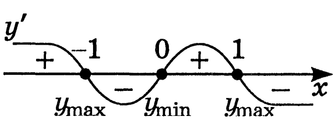
Отметим на плоскости области возможного нахождения графика функции.



в) $y' = (-x^4 + 2x^2 + 3)' = -4x^3 + 4x = -4x(x-1)(x+1)$;

$$y' = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.



(см. стр. 245)

Можно это отобразить в виде таблицы.

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$

$y_{\max} = y(-1) = 4;$

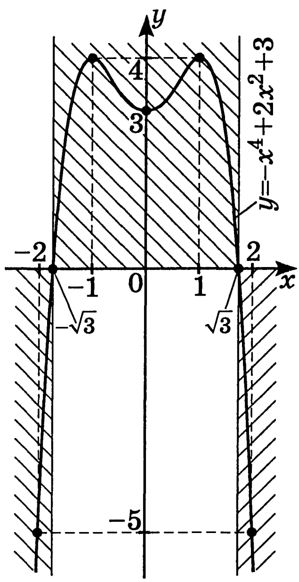
$y_{\max} = y(1) = 4;$

$y_{\min} = y(0) = 3.$

г) $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 3 = -x^4 + 2x^2 + 3 = f(x).$

Функция четная, значит график симметричен относительно оси ординат.

д) Можно уточнить эскиз графика $x = 2;$ $f(2) = -5,$ тогда $f(-2) = -5.$



Примечание. В следующем примере для уточнения построения графика мы будем применять уже и вторую производную.

2. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

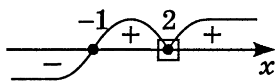
а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) Интервалы знакопостоянства.

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y > 0 \\ y < 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 4 = 0;\ \ f(-1) = -1 - 3 + 4 = 0, \\ \text{т. е. } (x^3 - 3x^2 + 4) \vdots (x - 1). \end{array}$$

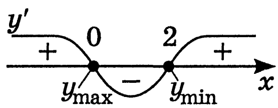
$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \qquad\quad + 4 \\ \underline{x^3 + \ \ x^2 \qquad\qquad\quad} \end{array} & x + 1 \\ \cline{2-2} -\begin{array}{r} -4x^2 \qquad\quad \\ \underline{-4x^2 - 4x} \end{array} & x^2 - 4x + 4 \\ -\begin{array}{r} 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \end{array} & \end{array}$$

Итак, $y = (x + 1)(x - 2)^2$.



в) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Интервалы монотонности.



x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$y_{max} = y(0) = 4;$

$y_{min} = y(2) = 0.$

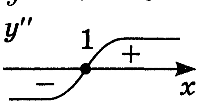
г) Контрольные точки:

$x = 3, \quad y = 4;$

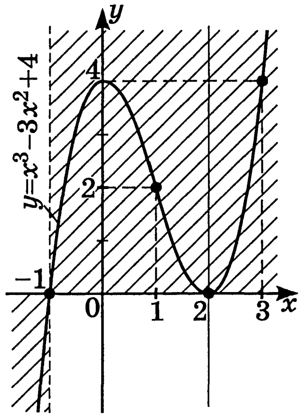
$x = 1, \quad y = 2.$

д) Можно определить точки перегиба

$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1); \qquad y''(1) = 0.$



Тогда на $(1;\infty)$ $y=f(x)$ — выпукла вниз, на $(-\infty;1)$ $y=f(x)$ — выпукла вверх, точка $(1;2)$ — точка перегиба.



3. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1.$

а) $D(f) = (-\infty;\infty).$

б) $f(1) = 3\cdot 1 - 4 + 1 = 0,$ значит $(3x^4 - 4x^3 + 1) \vdots (x-1)$

$$\begin{array}{rl|l}
-\;3x^4 - 4x^3 & \quad\quad +1 & x-1 \\
\underline{3x^4 - 3x^3} & & \overline{3x^3 - x^2 - x - 1} \\
-\;-x^3 & \quad\quad +1 & \\
\underline{-x^3 + x^2} & & \\
-\;-x^2 & \quad\quad +1 & \\
\underline{-x^2 + x} & & \\
-\;-x + 1 & & \\
\underline{-x + 1} & &
\end{array}$$

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1 = (x-1)\left(3x^3 - x^2 - x - 1\right).$

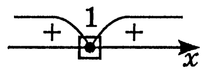
Пусть $\varphi(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1;$

$\varphi(1) = 3 - 1 - 1 - 1 = 0.$

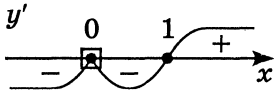
Тогда

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3x^3 - x^2 - x - 1 & x - 1 \\
\underline{3x^3 - 3x^2 \qquad\quad} & \overline{3x^2 + 2x + 1} \quad (D < 0). \\
-\,2x^2 - x - 1 & \\
\underline{2x^2 - 2x \quad} & \\
-\,x - 1 & \\
\underline{x - 1} & \\
\end{array}
$$

$f(x) = (x-1)^2(3x^2+2x+1)$.

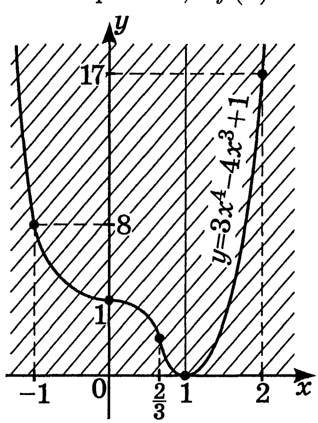


в) $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$.

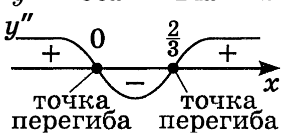


x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(0) = 1$ — точка перегиба, $f(1) = 0 = y_{\min}$.



г) $y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$.



$y'' > 0$ на $(-\infty; 0)$ — выпуклость вниз;

$y'' < 0$ на $\left(0; \dfrac{2}{3}\right)$ — выпуклость вверх;

$y'' > 0$ на $\left(\dfrac{2}{3}; \infty\right)$ — выпуклость вниз.

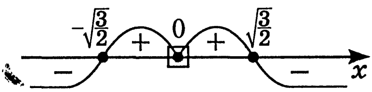
д) $f(-1) = 3 + 4 + 1 = 8;$

$f(2) = (2-1)^2\left(3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1\right) = 17.$

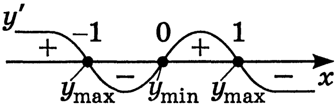
4. $y = 6x^4 - 4x^6.$

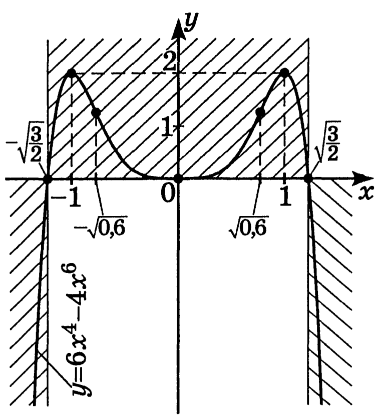
а) $D(f) = (-\infty; \infty).$

б) $y = 2x^4(3 - 2x^2).$



в) $y' = 24x^3 - 24x^5 = 24x^3(1-x)(1+x).$



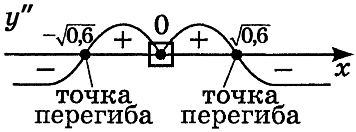


$y_{\max} = f(-1) = 6 - 4 = 2;$

$y_{\max} = f(1) = 6 - 4 = 2;$

$y_{\min} = f(0) = 0.$

г) $y'' = 72x^2 - 120x^4 = 24x^2\left(3 - 5x^2\right)$.



$y'' < 0$ на $\left(-\infty; -\sqrt{0,6}\right)$ — выпукла вверх;

$y'' > 0$ на $\left(-\sqrt{0,6}; 0\right)$ и на $\left(0; \sqrt{0,6}\right)$ — выпукла вниз;

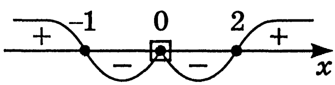
$y'' < 0$ на $\left(\sqrt{0,6}; \infty\right)$ — выпукла вверх.

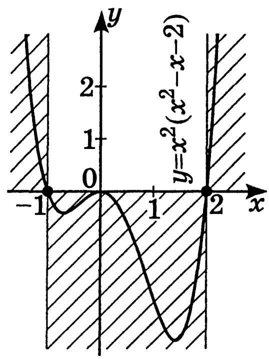
Очевидно, что функция четная $(f(-x) = f(x))$ и ее график симметричен относительно оси Oy.

5. $y = x^2(x^2 - x - 2)$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $y = x^2(x - 2)(x + 1)$.



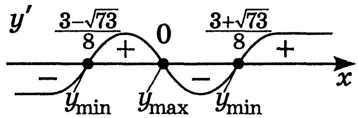


в) $y' = 4x^3 - 3x^2 - 4x =$

$= x(4x^2 - 3x - 4)$;

$y = 0$;

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{3+\sqrt{73}}{8} \\ x &= 0 \\ x &= \frac{3-\sqrt{73}}{8} \end{aligned}\right. .$$



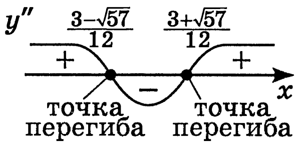
$$\frac{3-\sqrt{73}}{8} \approx -0{,}7; \quad \frac{3+\sqrt{73}}{8} \approx 1{,}4.$$

$y_{\min} \approx f(-0{,}7) \approx -0{,}4$;

$y_{\max} = 0$;

$y_{\min} \approx f(1{,}4) \approx -2{,}8$.

г) $y'' = 12x^2 - 6x - 4 = 2\left(6x^2 - 3x - 2\right).$



$$y'' > 0 \text{ на } \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{12}\right) \text{ — выпуклость вниз;}$$

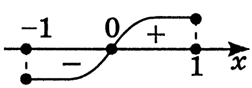
$$y'' < 0 \text{ на } \left(\frac{3-\sqrt{57}}{12}; \frac{3+\sqrt{57}}{12}\right) \text{ — выпуклость вверх;}$$

$$y'' > 0 \text{ на } \left(\frac{3+\sqrt{57}}{12}; \infty\right) \text{ — выпуклость вниз.}$$

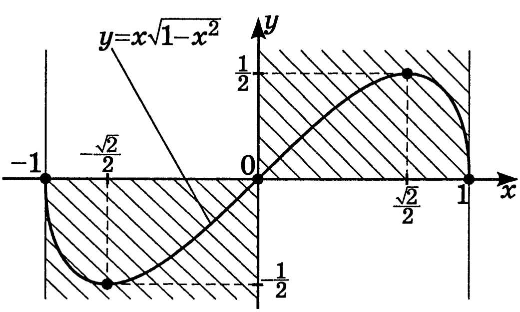
6. $y = x\sqrt{1-x^2}.$

а) $D(f) = [-1; 1].$

б) $y > 0$ | $y = 0$ | $y < 0$

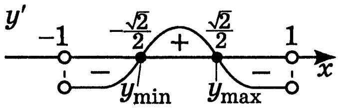


в) $f(-x) = -x\sqrt{1-(-x)^2} = -f(x)$ — функция нечетная, значит ее график центрально симметричен относительно начала координат.



г) $y' = \left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = 1\cdot\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x\,(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = $

$= \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$



x	-1	$-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$	1
y'	Нет	$-$	0	$+$	0	$-$	Нет
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

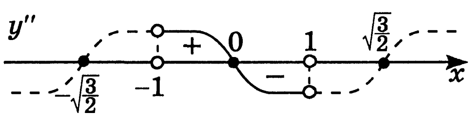
Эскиз графика вроде готов, но, взяв y'' и исследуя ее знак, мы, возможно, существенно уточним его.

д) $y'' = \left(\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)' =$

$$= \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - \left(1-2x^2\right)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-x\left(4\left(1-x^2\right)-1+2x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} =$$

$$= \frac{-x\left(3-2x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$



$y'' > 0$ на $(-1;0)$ — выпуклость вниз;

$y'' < 0$ на $(0;1)$ — выпуклость вверх.

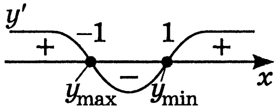
В данном случае существенно уточнить график не удалось, но характер выпуклости графика подтвердился.

7. $y = e^{x^3-3x}$.

а) $D(y) = (-\infty; \infty)$.

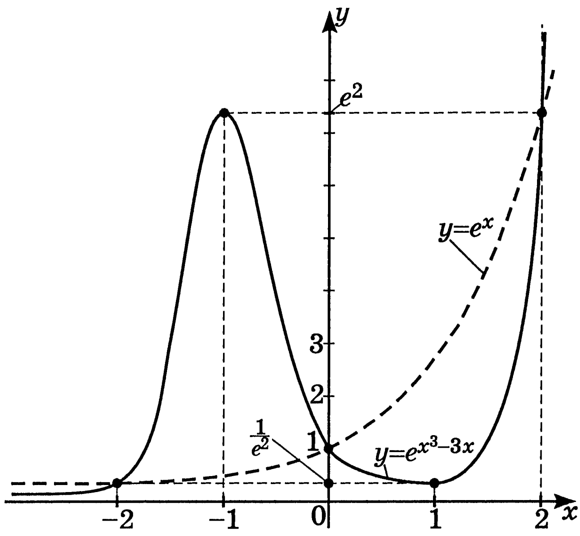
б) $y > 0; \quad \forall x$.

в) $y' = e^{x^3-3x} \cdot \left(3x^2 - 3\right) = 3(x+1)(x-1)e^{x^3-3x}$.



$y_{\max} = y(-1) = e^{-1+3} = e^2;$

$y_{\min} = y(1) = e^{1-3} = e^{-2}.$



г) $(x \to \infty) \quad \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0).$

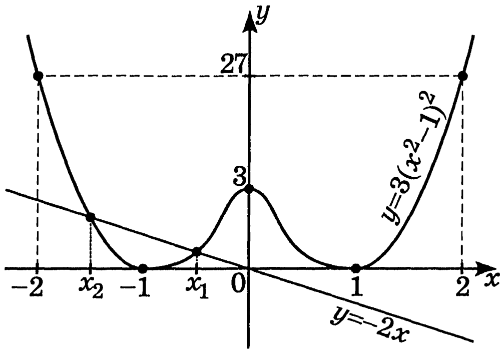
Интересно, в каких точках графика функция пересекается с экспонентой $y = e^x$.

$$e^{x^3-3x} = e^x; \quad x^3 - 3x = x; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. .$$

д) $y'' = 6x \cdot e^{x^3-3x} + 3\left(x^2-1\right) \cdot 3\left(x^2-1\right) e^{x^3-3x} =$
$= 3e^{x^3-3x}\left(2x + 3\left(x^2-1\right)^2\right).$

$y'' = 0,$ если $2x + 3\left(x^2-1\right)^2 = 0,$ т. е. $3\left(x^2-1\right)^2 = -2x.$

Графически решим это уравнение.



Значит точки перегиба имеют абсциссу $x_2 \in (-2; -1)$ и $x_1 \in (-1; 0)$, далее можно уточнить с помощью метода хорд. Получим $x_2 \approx -1{,}5$; $x_1 \approx -0{,}5$ и далее с любой степенью точности (см. далее метод хорд).

Практикум 24 (И.Ф.П.Г.)[17]

1. $y = x^3 - 3x^2$;

2. $y = x^3 - x^2 + x - 1$;

3. $y = 1 - 2x + 2x^3 - x^4$;

4. $y = -x^4 + 8x^2 - 16$;

5. $y = \dfrac{1}{9}x^3\,(x+4)\,$;

6. $y = (x-3)^3\,(x+2)^2\,$;

7. $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$;

8. $y = (x-1)\sqrt{19 - x - x^2}$;

9. $y = \left(x^2 + x - 2\right)\sqrt{4 - x}$;

10. $y = \left(x^2 - x - 2\right)\sqrt[3]{x^2}$.

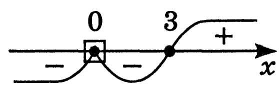
[17] И.Ф.П.Г. — Исследование функции и построение графиков

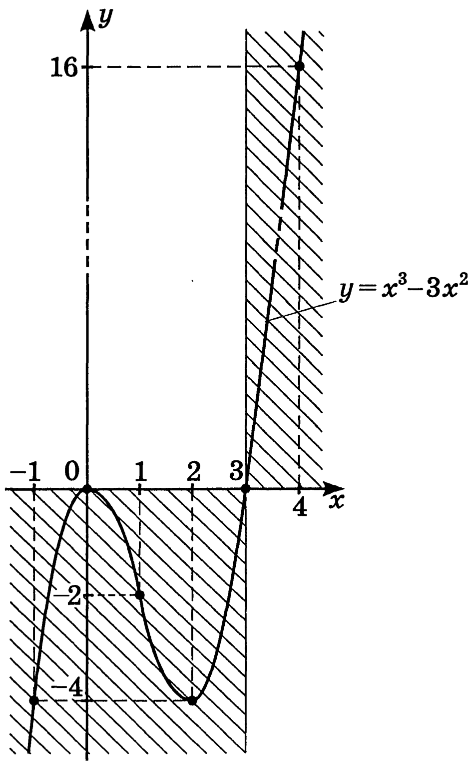
Решение практикума 24

1. $y = x^3 - 3x^2$.

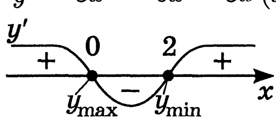
а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right|$ $\qquad y = x^2(x-3)$.





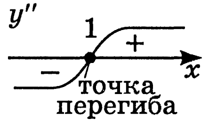
в) $y' = 3x^2 - 6x = 3x\,(x-2)$.



$y_{\max} = y\,(0) = 0;$

$y_{\min} = y\,(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4.$

г) $y'' = 6x - 6 = 6\,(x-1)\,.$



$y'' < 0$ на $(-\infty; 1)$ — выпуклость вверх;

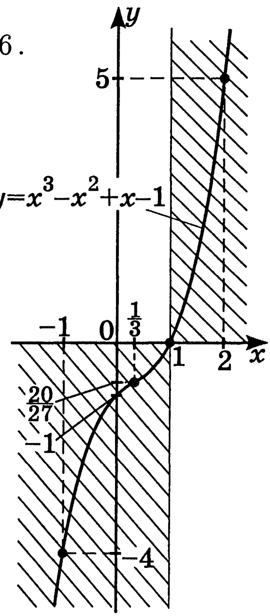
$y'' > 0$ на $(1; \infty)$ — выпуклость вниз.

д) $f\,(1) = -2 \quad (1; -2)$ — координаты точки перегиба.

Контрольные точки:

$f\,(-1) = -1 - 3 = -4; \qquad f\,(4) = 16\,.$

2. $y = x^3 - x^2 + x - 1.$



а) $D(f) = (-\infty; \infty).$

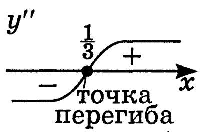
б) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right| \qquad f\,(1) = 0;$

$x^2\,(x-1) + (x-1) = 0;$

$f\,(x) = (x-1)\left(x^2+1\right).$

в) $y' = 3x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x.$

г) $y'' = 6x - 2 = 2\,(3x-1)\,.$



$y'' < 0$ на $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ — выпуклость вверх;

$y'' > 0$ на $\left(\dfrac{1}{3}; \infty\right)$ — выпуклость вниз.

д) Контрольные точки:

$x = -1, \quad f\,(-1) = -1 - 1 - 1 - 1 = -4;$

$x = 0, \quad f\,(0) = -1;$

$x = 2, \quad f\,(2) = 5;$

$x = \dfrac{1}{3}; \quad f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{10}{9} = -\dfrac{20}{27} \approx -\dfrac{2}{3}.$

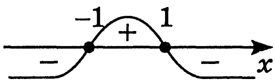
$\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{20}{27}\right)$ — координаты точки перегиба.

3. $y = 1 - 2x + 2x^3 - x^4$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right|$

$y = \left(1 - x^4\right) - 2x\left(1 - x^2\right) = \left(1 - x^2\right)\left(1 + x^2 - 2x\right) =$
$= -(x-1)^3(x+1)$.



в) $y' = -2 + 6x^2 - 4x^3 = -2\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)$;

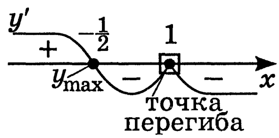
$y'(1) = 0$;

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 \qquad + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 - 2x^2 \qquad\quad} & 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1), \\ -\,x^2 \qquad + 1 & \\ \underline{-\,x^2 + x \qquad} & \\ -x + 1 & \\ \underline{-x + 1} & \end{array}$$

т. е. $y' = -2(x-1)^2(2x+1)$.

$y_{\max} = y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{27}{16}$;

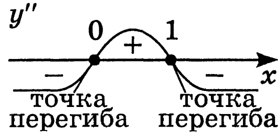
$y(1) = 0$.



г) $y'' = -2\left(6x^2 - 6x\right) = -12x(x-1)$.

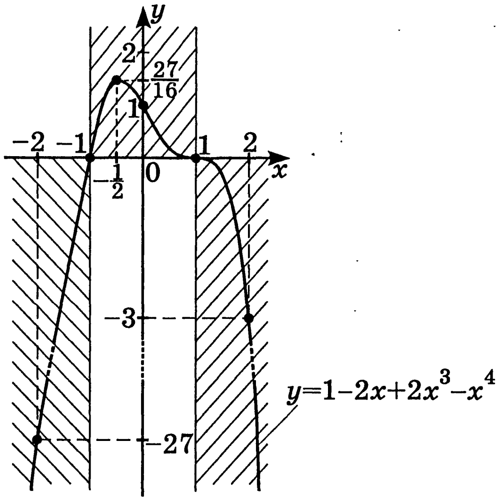
$y'' < 0$ на $(-\infty; 0)$ — выпуклость вверх; $y'' > 0$ на $(0; 1)$ — выпуклость вниз; $y'' < 0$ на $(1; \infty)$ — выпуклость вверх.

$y(0) = 1$.



д) Контрольные точки: $x = -2$, $y = -27$; $x = 2$, $y = -3$.

Примечание. Проще раскладывать на множители, если y' брать как производную произведения.

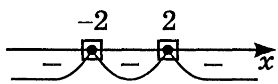


$$y = \left(-(x-1)^3(x+1)\right)' = -3(x-1)^2(x+1) - (x-1)^3 =$$
$$= -(x-1)^2(3x+3+x-1) = -2(x-1)^2(2x+1)\,.$$

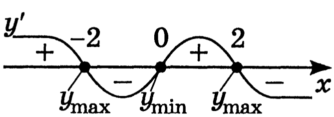
4. $y = -x^4 + 8x^2 - 16.$

а) $D(f) = (-\infty;\infty)\,.$

б) $y = -\left(x^2-4\right)^2.$

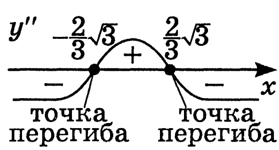


в) $y' = -4x^3 + 16x = -4x(x-2)(x+2)\,;$



$y_{\max} = y(-2) = 0;$
$y_{\min} = y(0) = -16;$
$y_{\max} = y(2) = 0.$

г) $y'' = -12x^2 + 16 = -4\left(3x^2-4\right).$



$y'' < 0$ на $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ — выпуклость вверх;

$y'' > 0$ на $\left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}; \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ — выпуклость вниз;

$y'' < 0$ на $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}; \infty\right)$ — выпуклость вверх.

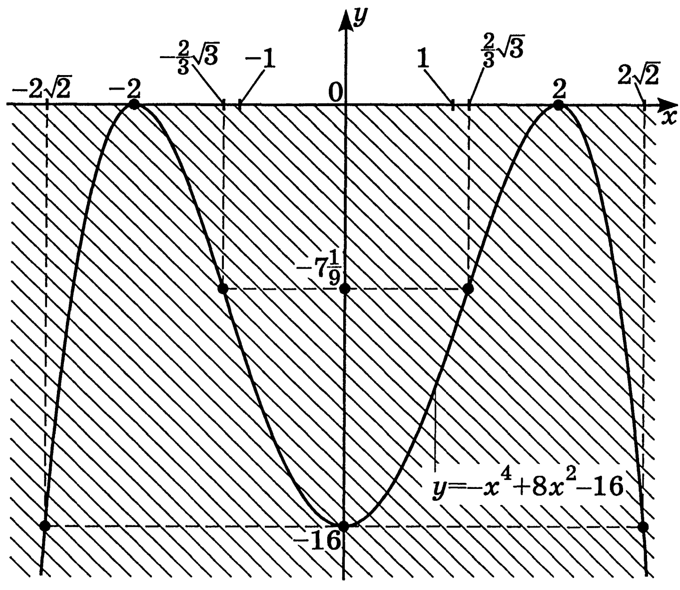
д) Контрольные точки:

$$x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{16}{9} + \frac{8 \cdot 4}{3} - 16 = -7\frac{1}{9};$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -7\frac{1}{9};$$

$$x = -2\sqrt{2}, \quad f\left(-2\sqrt{2}\right) = -16;$$

$$x = 2\sqrt{2}, \quad f\left(2\sqrt{2}\right) = -16.$$

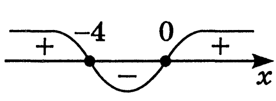


е) $f(-x) = f(x)$ — четная функция.

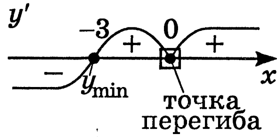
5. $y = \frac{1}{9}x^3(x+4)$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right|$

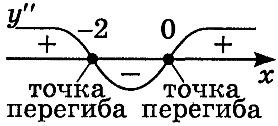


в) $y' = \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{9}x^2(x+3).$



$y_{\min} = y(-3) = \frac{1}{9}(-27) \cdot 1 = -3; \quad y(0) = 0.$

г) $y'' = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x = \frac{4}{3}x(x+2).$



$y'' > 0$ на $(-\infty; -2)$ — выпуклость вниз;

$y'' < 0$ на $(-2; 0)$ — выпуклость вверх;

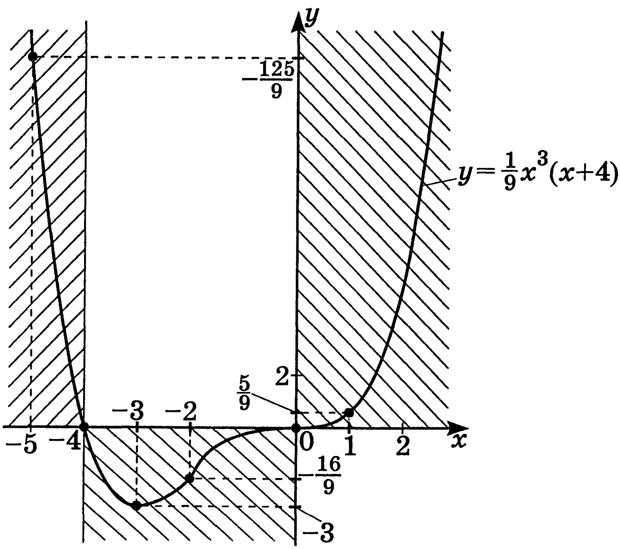
$y'' > 0$ на $(0; \infty)$ — выпуклость вниз.

д) $f(-2) = \frac{1}{9}(-8) \cdot 2 = -\frac{16}{9};$

$\left(-2; -\frac{16}{9}\right)$ — координаты точки перегиба.

Контрольные точки:

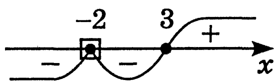
$f(-5) = \frac{125}{9} \approx 14; \quad f(1) = \frac{5}{9}.$



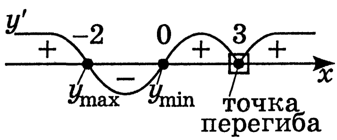
6. $y = (x-3)^3 (x+2)^2$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right|$



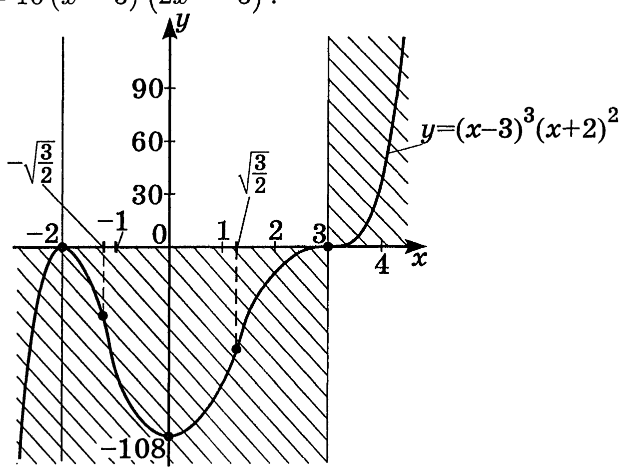
в) $y' = 3(x-3)^2(x+2)^2 + 2(x+2)(x-3)^3 =$
$= (x-3)^2(x+2)(3(x+2) + 2(x-3)) =$
$= (x-3)^2(x+2) \cdot 5x$.



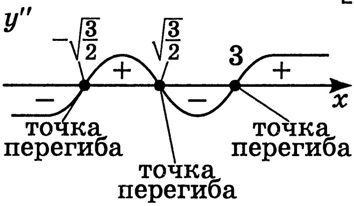
$y_{\max} = y(-2) = 0$;

$y_{\min} = y(0) = -108$.

г) $y'' = \left((x-3)^2(5x^2+10x)\right)' =$
$= 2(x-3)(5x^2+10x) + (10x+10)(x-3)^2 =$
$= 2(x-3)(5x^2+10x+5(x+1)(x-3)) =$
$= 10(x-3)(x^2+2x+x^2-2x-3) =$
$= 10(x-3)(2x^2-3)$.



$$y'' = 0; \qquad \left[\begin{aligned} &x = 3 \\ &x^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}\right. ; \qquad \left[\begin{aligned} &x = 3 \\ &x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right. \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2\right).$$



$y'' < 0$ на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ — выпуклость вверх;

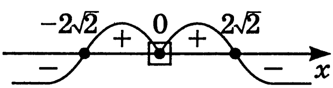
$y'' > 0$ на $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ — выпуклость вниз;

$y'' < 0$ на $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; 3\right)$ — выпуклость вверх;

$y'' > 0$ на $(3; \infty)$ — выпуклость вниз.

7. $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$.

а) $D(f)\colon\ 8x^2 - x^4 \geqslant 0$.

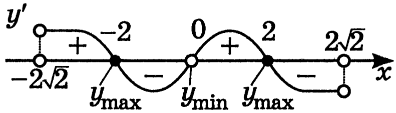


$D(f) = \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$.

б) $y = 0; \qquad \left[\begin{aligned} &x = -2\sqrt{2} \\ &x = 0 \\ &x = 2\sqrt{2} \end{aligned}\right.$.

$y \geqslant 0 \quad \forall x \in D(f)$.

в) $y' = \dfrac{16x - 4x^3}{2\sqrt{8x^2 - x^4}} = \dfrac{2x(2+x)(2-x)}{\sqrt{8x^2 - x^4}}.$



$y_{\max} = y(-2) = \sqrt{8 \cdot 4 - 16} = 4;$

$y_{\min} = y(0) = 0;$

$y_{\max} = y(2) = 4.$

г) $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$ — четная функция, так как:

$D(f)$ — симметричное множество;

$f(-x) = \sqrt{8(-x)^2 - (-x)^4} = \sqrt{8x^2 - x^4} = f(x),$

значит график симметричен относительно оси Oy.

д) Выясним интервалы выпуклости.

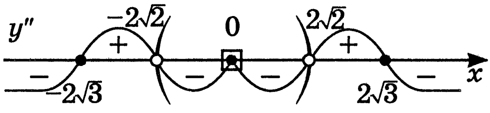
Так как $y' = \dfrac{2(4x - x^3)}{\sqrt{8x^2 - x^4}}$, то

$$y'' = -\frac{2(3x^2-4)\sqrt{8x^2-x^4} - 2(x^3-4x)\cdot\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}}{8x^2-x^4} =$$

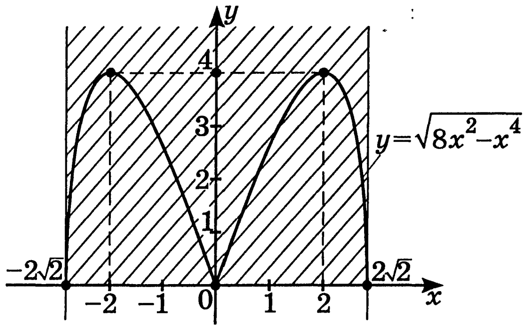
$$= -2\frac{(3x^2-4)(8x^2-x^4) + (x^3-4x)(2x^3-8x)}{(8x^2-x^4)\sqrt{8x^2-x^4}} =$$

$$= -2\frac{(3x^2-4)(8-x^2) + (x^2-4)(2x^2-8)}{(8-x^2)\sqrt{8x^2-x^4}} =$$

$$= \frac{2x^2(x^2-12)}{(8-x^2)\sqrt{8x^2-x^4}}.$$



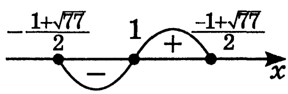
Но $D(f) = [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$, значит на $\left(-2\sqrt{2}; 0\right)$ выпуклость вверх и на $\left(0; 2\sqrt{2}\right)$ выпуклость вверх.



8. $y = (x-1)\sqrt{19-x-x^2}$.

а) $D(f) = \left[-\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{77}}{2}\right]$.

б) $\left.\begin{matrix} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right|$

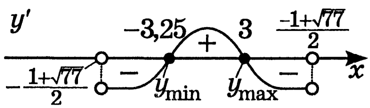


в) $y' = 1 \cdot \sqrt{19-x-x^2} + \dfrac{(x-1)(-2x-1)}{2\sqrt{19-x-x^2}} =$

$$= \frac{38-2x-2x^2-2x^2+x+1}{2\sqrt{19-x-x^2}} = \frac{-4x^2-x+39}{2\sqrt{19-x-x^2}}.$$

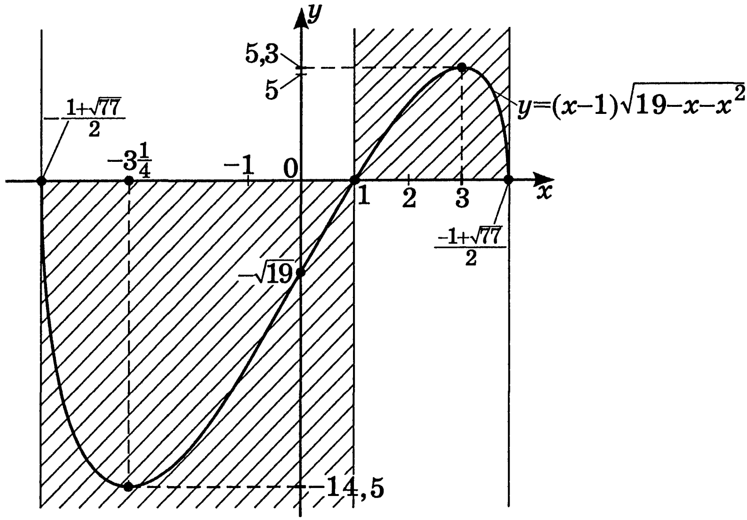
$y' = 0; \quad 4x^2+x-39 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3\dfrac{1}{4} \end{array}\right..$$



$$y_{\min} = y\left(-3\frac{1}{4}\right) = -4{,}25\sqrt{11{,}6875} \approx -14{,}5;$$

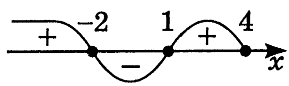
$$y_{\max} = y(3) = 2\sqrt{7} \approx 5{,}3.$$



9. $y = \left(x^2 + x - 2\right)\sqrt{4 - x}$.

а) $D(f) = (-\infty; 4]$.

б) $\left.\begin{matrix} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right|$



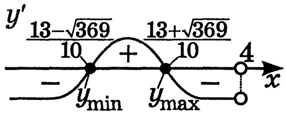
в) $y' = (2x+1)\sqrt{4-x} + \dfrac{\left(x^2+x-2\right)(-1)}{2\sqrt{4-x}} =$

$$= \frac{(2x+1)\,2\,(4-x) - x^2 - x + 2}{2\sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 14x + 8 - x^2 - x + 2}{2\sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{-5x^2 + 13x + 10}{2\sqrt{4-x}}.$$

$y' = 0; \qquad -5x^2 + 13x + 10 = 0.$

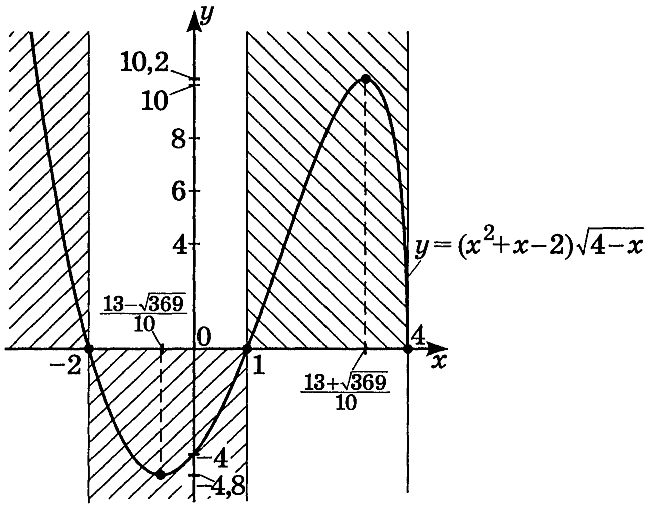


$(\sqrt{369} \approx 19)$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{369}}{10}; \quad x_1 \approx 3{,}2; \quad x_2 \approx -0{,}6.$$

$y_{\min} \approx f(-0{,}6) = -4{,}8;$

$y_{\max} \approx f(3{,}2) \approx 10{,}2.$



Примечание. Здесь эскиз графика ясен, хотя минимаксные отношения вычислены приближенно.

г) Уточним интервалы выпуклости.

$$y'' = \frac{(-10x+13)\sqrt{4-x} - \frac{(-5x^2+13x+10)(-1)}{2\sqrt{4-x}}}{2\,(4-x)} =$$

$$= \frac{2\,(-10x+13)\,(4-x) - 5x^2 + 13x + 10}{4\,(4-x)\sqrt{4-x}} =$$

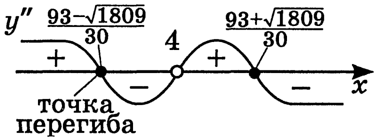
$$= \frac{20x^2 - 106x + 104 - 5x^2 + 13x + 10}{4\,(4-x)\sqrt{4-x}} =$$

$$= \frac{15x^2 - 93x + 114}{4\,(4-x)\sqrt{4-x}}.$$

$$y'' = 0; \qquad 15x^2 - 93x + 114 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{93 \pm \sqrt{93^2 - 60 \cdot 114}}{30} = \frac{93 \pm \sqrt{1809}}{30}; \quad \left(\sqrt{1809} \approx 43\right)$$

$$x_1 \approx \frac{93+43}{30} = 4\frac{8}{15}; \qquad x_2 \approx \frac{93-43}{30} = \frac{5}{3}.$$



Но $D(f) = (-\infty; 4]$, значит

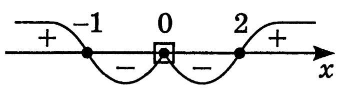
на $\left(-\infty; \dfrac{93-\sqrt{1809}}{30}\right)$ — выпуклость вниз;

на $\left(\dfrac{93-\sqrt{1809}}{30}; 4\right)$ — выпуклость вверх.

10. $y = \left(x^2 - x - 2\right)\sqrt[3]{x^2}$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) $\left.\begin{matrix} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right|$



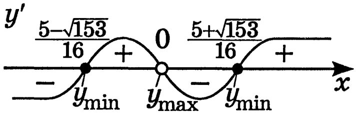
$$y' = (2x-1)\sqrt[3]{x^2} + \frac{\left(x^2 - x - 2\right)2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}} =$$

$$= \frac{3(2x-1)x^2 + 2x^3 - 2x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^4}} =$$

$$= \frac{x\left(6x^2 - 3x + 2x^2 - 2x - 4\right)}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{8x^2 - 5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$y' = 0; \qquad 8x^2 - 5x - 4 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{153}}{16} \approx 1{,}1 \\ x = \dfrac{5-\sqrt{153}}{16} \approx -0{,}5 \end{array}\right.; \qquad \left(\sqrt{153} \approx 12\right)$$



$y_{\min} \approx y(-0{,}5) \approx -0{,}8;$
$y_{\max} = y(0) = 0;$
$y_{\min} \approx y(1{,}1) \approx -2.$

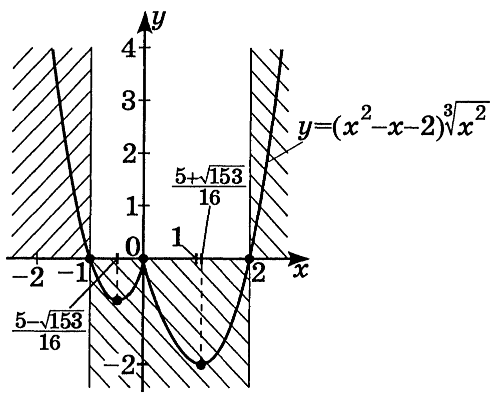
в) $$y'' = \frac{(16x-5)\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(8x^2-5x-4\right)}{3\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \frac{3x(16x-5) - \left(8x^2-5x-4\right)}{9\sqrt[3]{x^4}} =$$

$$= \frac{40x^2-10x+4}{9\sqrt[3]{x^4}} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\left(20x^2-5x+2>0 \quad \forall x\right).$$

Значит, на $(-\infty; 0)$ — выпуклость вниз и на $(0; \infty)$ — также выпуклость вниз.



И.Ф.П.Г. дробно-рациональных функций

Определение асимптоты

Рассмотрим исследование и построение графиков **дробно-рациональных** функций с помощью производных.

Для построения графика таких функций важно использовать понятие асимптоты. Напомним определения[18].

Определение 1. Прямая вида $x = a$ называется <u>вертикальной асимптотой</u> для $y = f(x)$, если из $x \to a \pm 0$ следует, что $f(x) \to \pm\infty$.

Как правило, вертикальные асимптоты связаны с корнями знаменателя.

Определение 2. Прямая вида $y = b$ называется <u>горизонтальной асимптотой</u> для $y = f(x)$, если из $x \to \infty$ следует, что $f(x) \to b$.

Определение 3. Прямая вида $y = kx + b$ называется <u>наклонной асимптотой</u>, если для $y = f(x)$ из $x \to \infty$ следует $f(x) \to (kx + b)$.

Выводы.

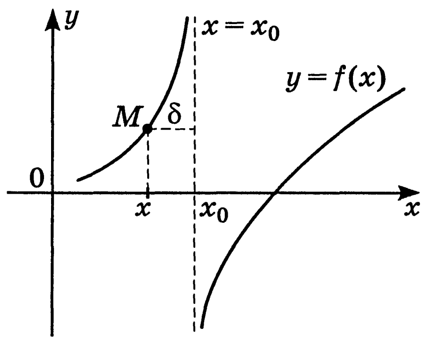
1. Если степени числителя и знаменателя дробно-рациональной функции $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ совпадают $(m = n)$, то горизонтальной асимптотой является прямая $y = \dfrac{a_0}{b_0}$ (то есть в определении 2 число b равно отношению коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя).
2. Если степень числителя меньше степени знаменателя $(n < m)$, то горинзонтальной асимптотой является ось абсцисс $y = 0$.
3. Наклонная асимптота существует для дробно-рациональной функции, если степень числителя на единицу больше степени знаменателя.

[18] Более подробно см. Шахмейстер А. Х. Построение графиков функций элементарными методами. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004, 2008.

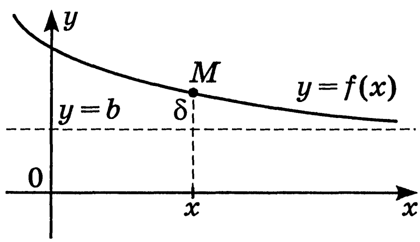
Примечание. Можно дать более общее определение асимптоты.

Если расстояние δ от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется <u>асимптотой</u> кривой.

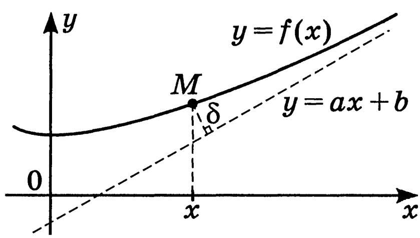
1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ — вертикальная асимптота $x = x_0$.



2. $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x) - b| = 0$ — горизонтальная асимптота $y = b$.



3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$ — наклонная асимптота $y = ax + b$.



Практикум 25

Исследуйте функцию и постройте график (И.Ф.П.Г.).

1. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$;

2. $y = \dfrac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3}$;

3. $y = \dfrac{4}{x^4 - 2x^2}$;

4. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$;

5. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 2}$;

6. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x+2)^2}$;

7. $y = \dfrac{4 + x^2}{x^3 - 9x}$;

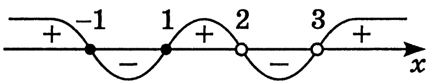
8. $y = \dfrac{5(x-2)}{x^2}$.

Решение практикума 25

Исследуйте функцию и постройте график (И.Ф.П.Г.).

1. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

б) 

в) Проанализируем асимптотику.

1. $(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
   $(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
   $(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
   $(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to \infty)$.

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)} =$$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0+0} = 1.$$

3. Выясним возможные точки пересечения графика функции с асимптотой.
   $$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 1; \quad x^2-1 = x^2-5x+6; \quad x = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

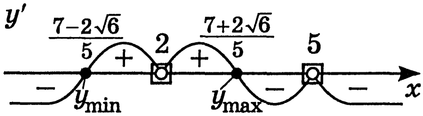
г) $$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}\right)' =$$

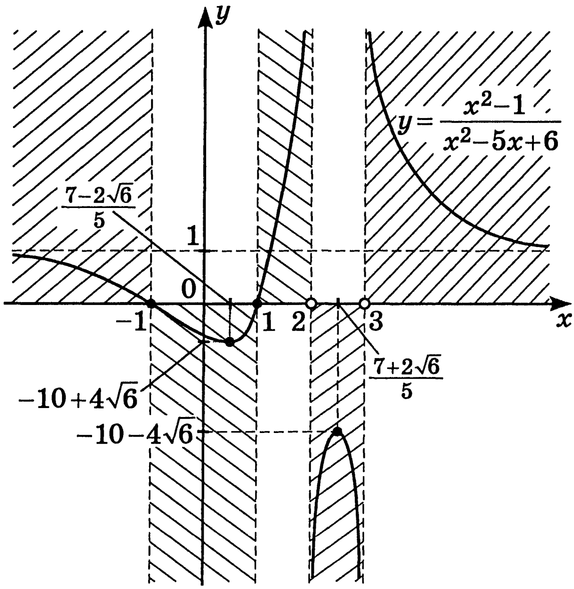
$$= \frac{2x(x^2-5x+6)-(2x-5)(x^2-1)}{(x^2-5x+6)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-10x^2+12x-2x^3+5x^2+2x-5}{(x^2-5x+6)^2} =$$

$$= \frac{-5x^2+14x-5}{(x^2-5x+6)^2}.$$

$$y' = 0; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-25}}{5} = \frac{7 \pm 2\sqrt{6}}{5};$$





$$y_{\min} = f\left(\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{\left(\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - 1}{\left(\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - \frac{5(7-2\sqrt{6})}{5} + 6} =$$

$$= \frac{49 - 28\sqrt{6} + 24 - 25}{49 - 28\sqrt{6} + 24 - 175 + 50\sqrt{6} + 150} = \frac{48 - 28\sqrt{6}}{48 + 22\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{4\left(12 - 7\sqrt{6}\right)}{2\left(24 + 11\sqrt{6}\right)} = \frac{-2\left(12 - 7\sqrt{6}\right)\left(24 - 11\sqrt{6}\right)}{\left(24 + 11\sqrt{6}\right)\left(24 - 11\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{2\left(288 - 300\sqrt{6} + 462\right)}{576 - 726} = \frac{-\left(750 - 300\sqrt{6}\right)}{75} =$$

$$= -10 + 4\sqrt{6}.$$

$$y_{\max} = f\left(\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{\left(\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - 1}{\left(\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right)^2 - \frac{5(7+2\sqrt{6})}{5} + 6} =$$

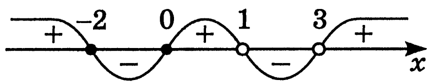
$$= \frac{48+28\sqrt{6}}{48-22\sqrt{6}} = \frac{2\left(12+7\sqrt{6}\right)\left(24+11\sqrt{6}\right)}{\left(24-11\sqrt{6}\right)\left(24+11\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{2\left(750+300\sqrt{6}\right)}{576-726} = -10-4\sqrt{6}.$$

2. $y = \dfrac{2x^2+4x}{x^2-4x+3}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{2x(x+2)}{(x-3)(x-1)}$;

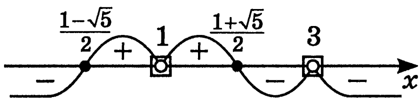


в) $$y' = \frac{(4x+4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(2x^2+4x)}{(x^2-4x+3)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-12x^2-4x+12-4x^3+16x}{(x-1)^2(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-12x^2+12x+12}{(x-1)^2(x-3)^2} = \frac{-(x^2-x-1)}{(x-1)^2(x-3)^2}.$$

$y' = 0;\quad x^2-x-1=0;\quad x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;



$$y_{\min} = f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-3\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1\right)} =$$

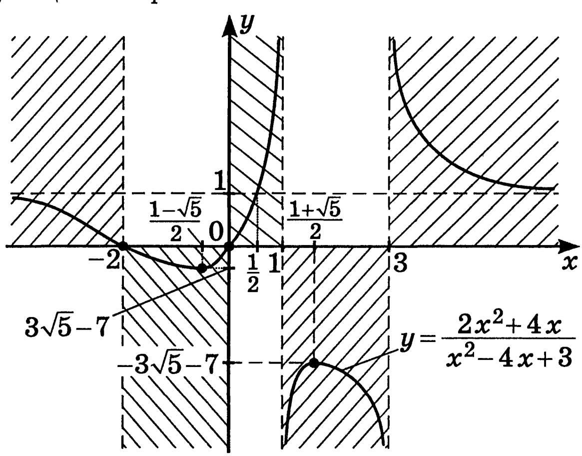
$$= \frac{2(1-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{-2\sqrt{5}(1-2\sqrt{5}+5)}{\sqrt{5}(1+2\sqrt{5}+5)} =$$

$$= -2\cdot\frac{2-\sqrt5}{3+\sqrt5} = -2\cdot\frac{\left(3-\sqrt5\right)^2}{\left(3+\sqrt5\right)\left(3-\sqrt5\right)} = -2\cdot\frac{9-6\sqrt5+5}{9-5} =$$
$$= 3\sqrt5 - 7.$$

$$y_{\max} = f\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt5\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}+2\right)}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}-3\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}-1\right)} =$$
$$= \frac{2\left(1+\sqrt5\right)\left(5+\sqrt5\right)}{\left(-5+\sqrt5\right)\left(-1+\sqrt5\right)} = \frac{2\sqrt5\left(\sqrt5+1\right)^2}{-\sqrt5\left(\sqrt5-1\right)^2} =$$
$$= -2\cdot\frac{\left(\sqrt5+1\right)^2}{4^2} = -\frac18\cdot\left(5+2\sqrt5+1\right)^2 = -\frac12\left(3+\sqrt5\right)^2 =$$
$$= -\frac12\left(9+6\sqrt5+5\right) = -3\sqrt5-7.$$

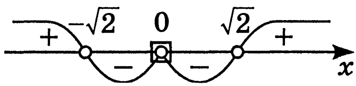
г) Исследуем асимптотику.

1. $(x\to 1-0)\Rightarrow(y\to\infty)$;
   $(x\to 1+0)\Rightarrow(y\to -\infty)$;
   $(x\to 3-0)\Rightarrow(y\to -\infty)$;
   $(x\to 3+0)\Rightarrow(y\to \infty)$.
2. $(x\to\infty)\Rightarrow(y\to 2)$.
3. $\dfrac{2x^2+4x}{x^2-4x+3} = 2;\quad 2x^2+4x = 2x^2-8x+6;$
   $x = 0{,}5$ — абсцисса точки пересечения графика функции с горизонтальной асимптотой.



3. $y = \dfrac{4}{x^4 - 2x^2}$.

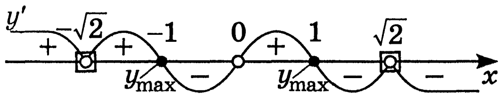
а) $D(f):\ x^4 - 2x^2 \neq 0;\quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

б) 

в) Исследуем асимптотику.

1. $(x \to -\sqrt{2} - 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
   $(x \to -\sqrt{2} + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
   $(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
   $(x \to 0 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
   $(x \to \sqrt{2} - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
   $(x \to \sqrt{2} + 0) \Rightarrow (y \to 0)$.
2. $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

г) $y' = -4(x^4 - 2x^2)^{-2} \cdot (4x^3 - 4x) = \dfrac{-16x(x+1)(x-1)}{(x^4 - 2x^2)^2}$;



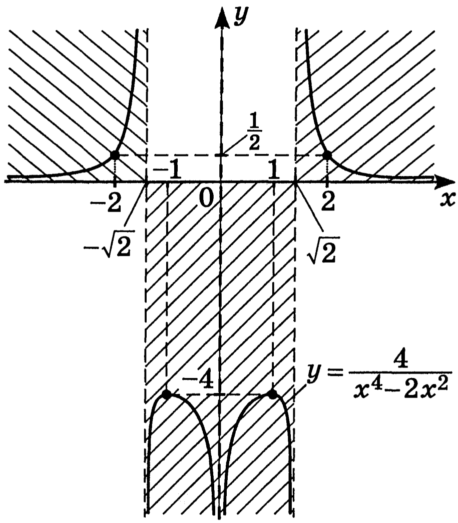
$y_{\max} = f(-1) = \dfrac{4}{1-2} = -4$.

д) $f(-x) = f(x)$ — четная функция. Значит, график симметричен относительно оси Oy.

е) Контрольные точки:

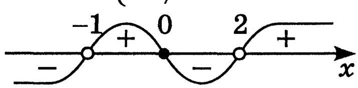
$x = 2;\quad y = \dfrac{1}{2}$;

$x = -2;\quad y = \dfrac{1}{2}$.



4. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

б) 

в) $(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$.

Для того чтобы найти наклонную асимптоту, выделим целую часть делением с остатком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - x - 2 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - x^2 - 2x} & x + 1 \\ x^2 + 2x & \\ -\ \underline{x^2 - x - 2} & \\ 3x + 2 & \end{array}$$

Тогда $\dfrac{x^3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \dfrac{3x + 2}{x^2 - x - 2}$,
и $y = x + 1$ — наклонная асимптота.

Найдем точки пересечения графика с наклонной асимптотой:

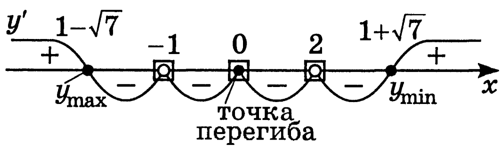
$$\frac{x^3}{x^2-x-2}=x+1;$$

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2}=0; \quad x=-\frac{2}{3}.$$

г) $y'=\dfrac{3x^2(x^2-x-2)-(2x-1)x^3}{(x^2-x-2)^2}=$

$$=\frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x-2)^2(x+1)^2}.$$

$$y'=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1+\sqrt{7} \\ x=1-\sqrt{7} \end{array}\right.;$$



$$y_{\max}=f\left(1-\sqrt{7}\right)=\frac{\left(1-\sqrt{7}\right)^3}{\left(1-\sqrt{7}\right)^2-\left(1-\sqrt{7}\right)-2}=$$

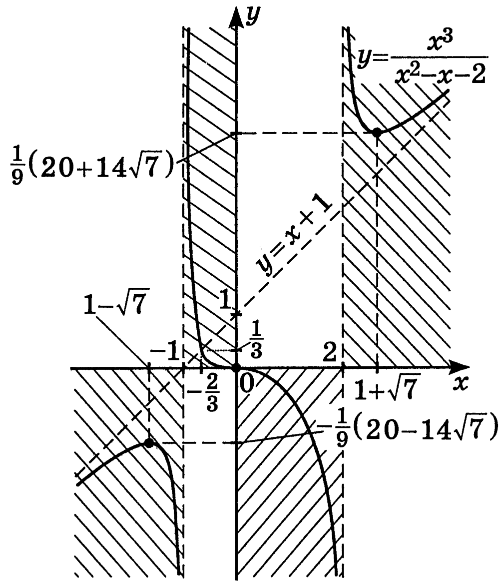
$$=\frac{1-3\sqrt{7}+21-7\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(2-\sqrt{7}\right)}=\frac{2\left(11-5\sqrt{7}\right)}{\sqrt{7}-5}=$$

$$=\frac{2\left(11-5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+5\right)}{\left(\sqrt{7}-5\right)\left(\sqrt{7}+5\right)}=$$

$$=\frac{2\left(55-35-14\sqrt{7}\right)}{7-25}=-\frac{1}{9}\left(20-14\sqrt{7}\right).$$

$$y_{\min}=f\left(1+\sqrt{7}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{7}\right)^2}{\left(1+\sqrt{7}-2\right)\left(1+\sqrt{7}+1\right)}=$$

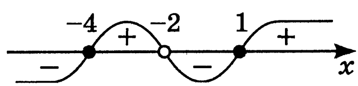
$$=\frac{2\left(11+5\sqrt{7}\right)\left(5-\sqrt{7}\right)}{\left(5+\sqrt{7}\right)\left(5-\sqrt{7}\right)}=\frac{1}{9}\left(20+14\sqrt{7}\right).$$



5. $y = \dfrac{x^2+3x-4}{x+2}$.

а) $D(f):\ (-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$;

б) $y=\dfrac{(x+4)(x-1)}{x+2}$;



в) $(x\to -2-0)\Rightarrow(y\to\infty)$;
$(x\to -2+0)\Rightarrow(y\to -\infty)$.

Найдем наклонную асимптоту:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+3x-4 & x+2 \\ \underline{x^2+2x} & \overline{x+1} \\ -\,x-4 & \\ \underline{x+2} & \\ -6 & \end{array}$$

$y = x+1-\dfrac{6}{x+2}$.

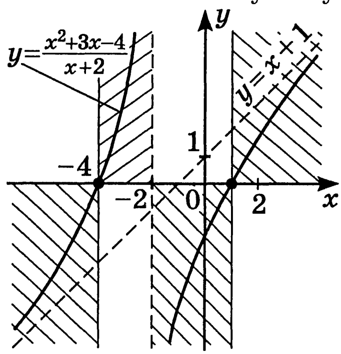
Пересечения графика с наклонной асимптотой нет, так как $-6\neq 0$.

г) $y' = \dfrac{(2x+3)(x+2) - 1\cdot(x^2+3x-4)}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{2x^2+7x+6-x^2-3x+4}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+10}{(x+2)^2}.$

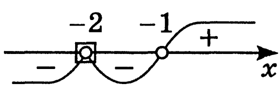
$y' > 0 \quad \forall x \in D(f);$

$y = f(x)$ возрастает на $(-\infty;-2)$ и на $(-2;\infty)$. Минимаксные значения отсутствуют.



6. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x+2)^2}.$

а) $D(f) = (-\infty;-2)\cup(-2;\infty).$

б) 

в) $(x\to -2-0)\ (y\to -\infty);$

$(x\to -2+0)\ (y\to -\infty).$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+3x+1 & x^2+4x+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+4x^2+4x} & x-1 \\ -\,-x^2-x+1 & \\ \underline{-x^2-4x-4} & \\ 3x+5 & \end{array}$$

$y = x - 1 + \dfrac{3x+5}{(x+2)^2}.$

При $x = -\dfrac{5}{3}$ $\left(-1\dfrac{2}{3};-2\dfrac{2}{3}\right)$ есть точка пересечения графика с наклонной асимптотой.

г) $$y' = 1 + \frac{\frac{3}{2}\cdot(x+2)^2 - 2(x+2)(3x+5)}{(x+2)^4} =$$

$$= 1 + \frac{3(x+2) - 2(3x+5)}{(x+2)^3} = 1 + \frac{-3x-4}{(x+2)^3} =$$

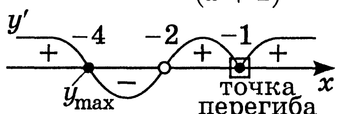
$$= \frac{x^3+6x^2+12x+8-3x-4}{(x+2)^3} = \frac{x^3+6x^2+9x+4}{(x+2)^3}.$$

$y'(-1) = 0;$

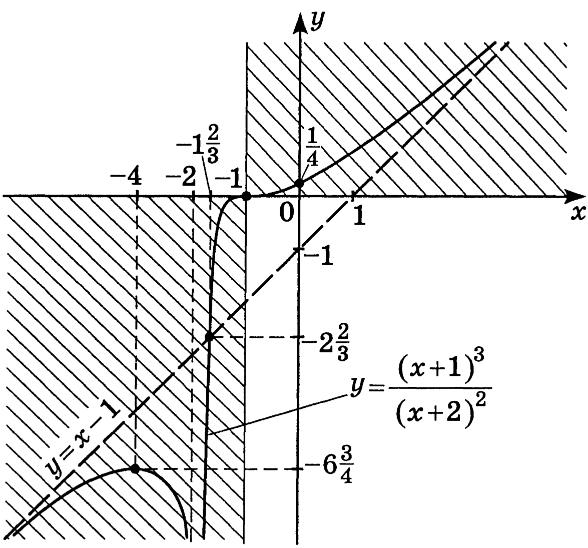
$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+9x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3+x^2} & x^2+5x+4 \\ 5x^2+9x & \\ -\underline{5x^2+5x} & \\ 4x+4 & \\ -\underline{4x+4} & \end{array}$$

$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$. Тогда $y' = \dfrac{(x+1)^2(x+4)}{(x+2)^3}$;

$y' = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

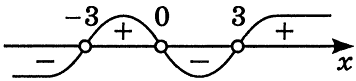


$$y(-4) = \frac{(-3)^3}{2^2} = -\frac{27}{4} = -6\frac{3}{4}.$$



7. $y = \dfrac{4+x^2}{x^3-9x}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

б) 

в) $(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 3-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

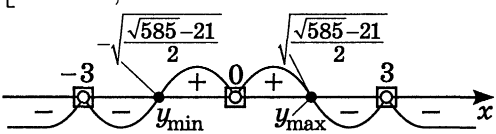
г) $y' = \dfrac{2x(x^3-9x)-(3x^2-9)(4+x^2)}{(x^3-9x)^2} =$

$= \dfrac{2x^4-18x^2-3x^4-3x^2+36}{(x^3-9x)^2} = -\dfrac{x^4+21x^2-26}{(x^3-9x)^2}$;

$y' = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{-21+\sqrt{585}}{2} \approx \dfrac{-21+24}{2} = 1{,}5 \\ x^2 = -\dfrac{21+\sqrt{585}}{2} < 0 \qquad \emptyset \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x \approx 1{,}2 \\ x \approx -1{,}2 \end{array}\right..$$



$y_{max} \approx f(1{,}2) = \dfrac{4+1{,}44}{1{,}2 \cdot (1{,}44-9)} \approx -\dfrac{2}{3}$;

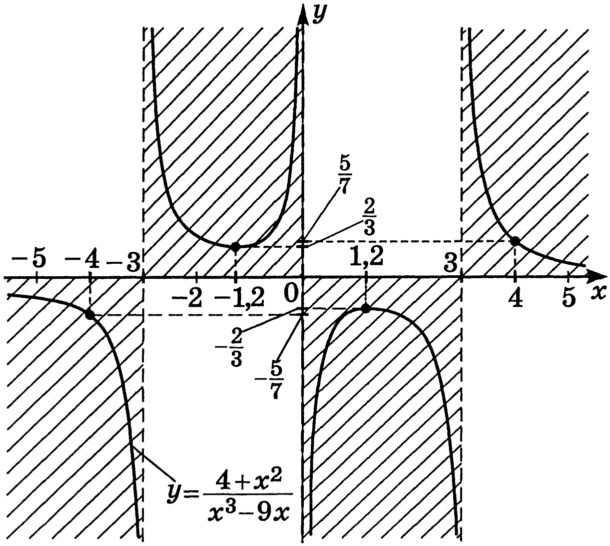
$y_{min} \approx f(-1{,}2) = \dfrac{2}{3}$.

д) $f(-x) = -f(x)$ — тогда график функции центрально-симметричен относительно начала координат.

е) Контрольные точки:

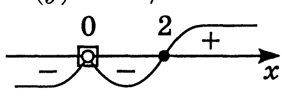
$x = 4; \quad y = \dfrac{5}{7};$

$x = -4; \quad y = -\dfrac{5}{7}.$



8. $y = \dfrac{5(x-2)}{x^2}.$

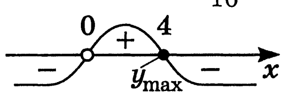
а) $D(y): \ \forall x \neq 0.$

б) 

в) $(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$

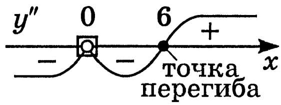
г) $y' = \dfrac{5\left(x^2 - 2x(x-2)\right)}{x^4} = \dfrac{5(x-2x+4)}{x^3} = \dfrac{5(4-x)}{x^3};$

$y_{\max} = y(4) = \dfrac{5 \cdot 2}{16} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625 \approx 0{,}6.$



д) $y'' = \dfrac{5\left(-x^3 - 3x^2(4-x)\right)}{x^6} = \dfrac{5(-x-12+3x)}{x^4} =$

$= \dfrac{10(x-6)}{x^4};$

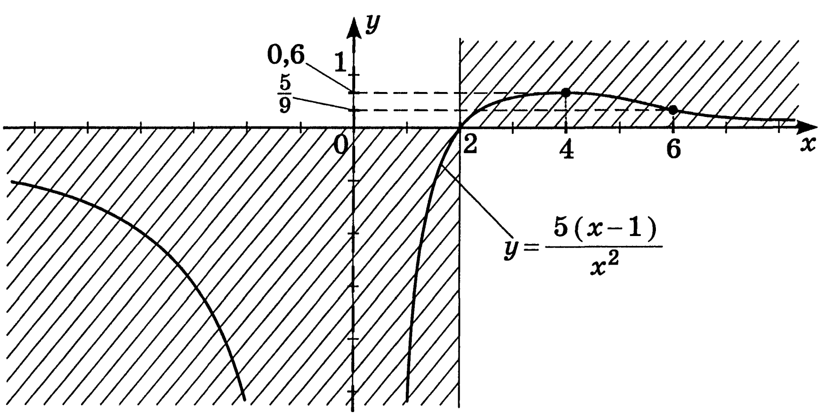


$y(6) = \dfrac{5\cdot 4}{36} = \dfrac{5}{9}.$

Результаты исследования иногда удобно свести в таблицу.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;4)$	4	$(4;6)$	6	$(6;\infty)$
$f(x)$	−	Нет	−	0	+	0,6	+	$\frac{5}{9}$	+
$f'(x)$	−	Нет	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	Нет	−	−	−	−	−	0	+
Интервалы монотонности, точки экстремума	↘	нет	↗		↗	$y_{\max}$	↘		↘
Интервалы выпуклости, точки перегиба	∩	нет	∩					Точка перегиба	∪

Затем, используя таблицу, строят график. Впрочем, это вопрос вкуса, привычки, удобства для исследователя.



Тренировочная работа 9

Исследуйте функцию и постройте график.

1. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

2. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$;

3. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}(9 - x^2)}$;

4. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$;

5. $y = \dfrac{x^4}{(1 + x)^3}$;

6. $y = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(x + 2)^3}{(x - 1)^2}$;

7. $y = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$;

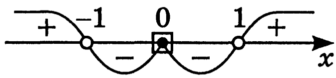
8. $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

Решение тренировочной работы 9

Исследуйте функцию и постройте график.

1. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

б) 

в) $(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to \infty)$

$(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$

$(x \to 1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$

$(x \to 1 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$

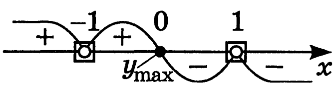
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 1; \quad x^2 = x^2 - 1; \quad -1 = 0; \quad x \in \emptyset.$$

Точек пересечения графика с горизонтальной асимптотой нет.

г) $y' = \dfrac{2x(x^2 - 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} =$

$= -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$.



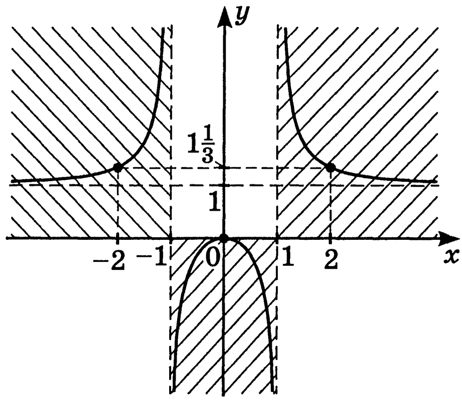
$y_{\max} = y(0) = 0$.

д) $f(-x) = f(x)$ — четная функция, значит график симметричен относительно оси Oy.

е) Контрольные точки:

$x = 2;\quad f(2) = \frac{4}{3};$

$x = -2;\ f(-2) = \frac{4}{3}.$



2. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}.$

а) $D(f):\ (-\infty; \infty);$

б) $y > 0$: $\forall x$;

в) 1. $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$, так как

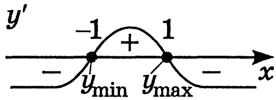
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

2. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 1; \qquad x = 0.$

г) $$y' = \frac{(2x + 1)(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 + x + 1 - 2x^3 - x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2} = -\frac{2(x + 1)(x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$



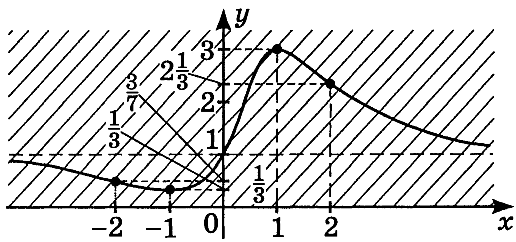
$$y_{\min} = y(-1) = \frac{1-1+1}{1+1+1} = \frac{1}{3};$$

$$y_{\max} = y(1) = \frac{1+1+1}{1-1+1} = 3.$$

д) Контрольные точки

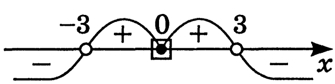
$x = 2;\quad y = 2\frac{1}{3};$

$x = -2;\ y = \frac{3}{7}.$



3. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}(9-x^2)}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}.$

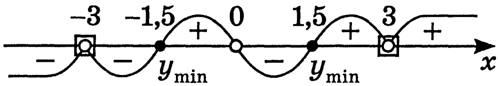
б) 

в) $(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 3+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$

г) $y' = \left(\left(\sqrt[3]{x^2}(9-x^2)\right)^{-1}\right)' =$

$$= -\left(\sqrt[3]{x^2}(9-x^2)\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}(9-x^2) + \sqrt[3]{x^2}\cdot(-2x)\right) =$$

$$= -\frac{2x\cdot(9-x^2-3x^2)}{\left(\sqrt[3]{x^2}(9-x^2)\right)^2\cdot 3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2x(4x^2-9)}{3\sqrt[3]{x^8}(9-x^2)^2}.$$



$$y_{\min} = y(-1{,}5) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left(9-\frac{9}{4}\right)} \approx 0{,}1;$$

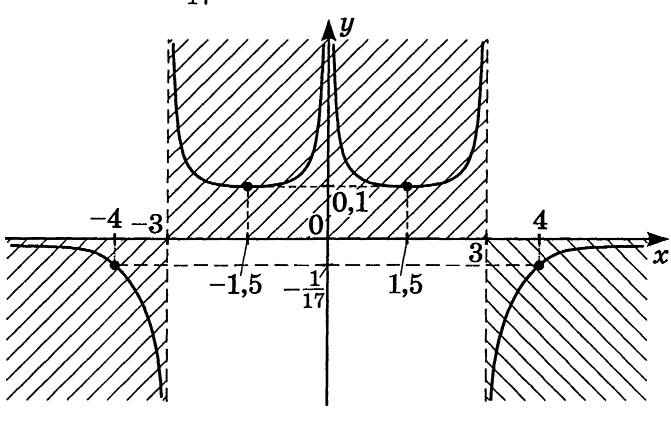
$y_{\max} = y(1{,}5) =\approx 0{,}1.$

д) $f(-x) = f(x)$ — четная функция, значит график симметричен относительно оси Oy.

е) Контрольные точки

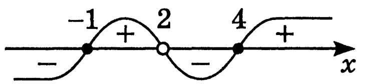
$x = 4; \quad y \approx \frac{1}{17};$

$x = -4;\ y = -\frac{1}{17}.$



4. $y = \dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$.

а) $D(f):\ x \neq 2$.

б) 

в) $(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^2-3x-4 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2-2x} & x-1 \\
-\,-x-4 & \\
\underline{-x+2} & \\
-6 &
\end{array}
$$

$y = x - 1 - \dfrac{6}{x-2}$;

$y = x-1$ — наклонная асимптота, $6 \neq 0$, значит пересечения графика с асимптотой нет.

г) $y' = \dfrac{(2x-3)(x-2) - 1\cdot(x^2-3x-4)}{(x-2)^2} =$

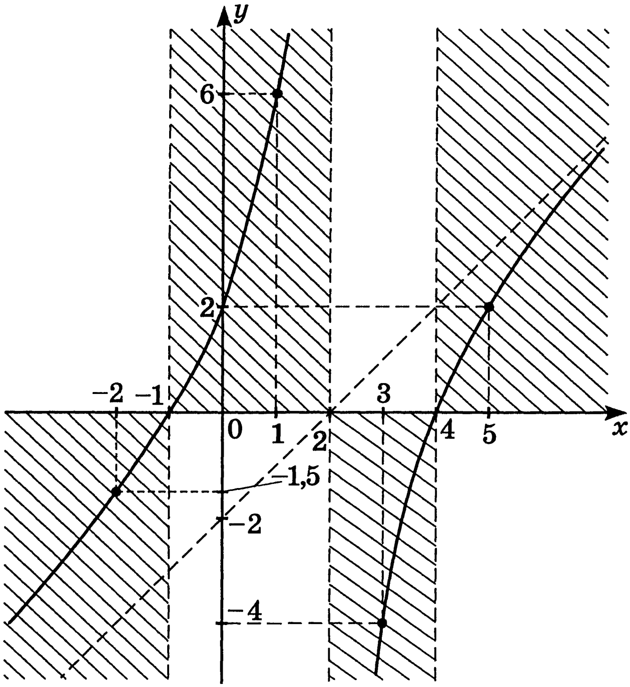
$= \dfrac{2x^2-7x+6-x^2+3x+4}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+10}{(x-2)^2} > 0 \ \ \forall D(f)$,

т. е. на $(-\infty;2)$ $y = f(x)\uparrow$;
на $(2;\infty)$ $y = f(x)\uparrow$.

Экстремумов нет.

д) Контрольные точки:

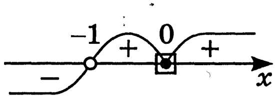
$x = 0$; $y = 2$;
$x = 1$; $y = 6$;
$x = 3$; $y = -4$;
$x = 5$; $y = 2$;
$x = -2$; $y = -1{,}5$.



Примечание. Попробуйте доказать, что график симметричен относительно прямой $\dfrac{y-1}{x-2} = \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}$.

5. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

а) $D(f):\ x \neq -1$.

б) 

в) $(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$x \to -1+0 \Rightarrow (y \to \infty)$.

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$. Выделим целую часть.

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & x^3+3x^2+3x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+3x^3+3x^2+3x} \qquad & x-3 \\
-\ -3x^3-3x^2-3x \qquad & \\
\underline{-3x^3-9x^2-9x-3} & \\
6x^2+6x+3 &
\end{array}
$$

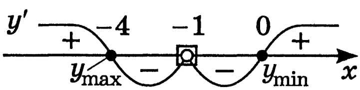
$$y = x - 3 + \frac{3(2x^2+2x+1)}{(x+1)^3};$$

$y = x - 3$ — наклонная асимптота. Точек пересечения с графиком нет.

г) $$y' = \frac{4x^3(1+x)^3 - 3(1+x)^2 \cdot x^4}{(1+x)^6} =$$

$$= \frac{(1+x)^2 \cdot x^3 \cdot (4(1+x) - 3x)}{(1+x)^6} = \frac{x^3 \cdot (1+x)^2 \cdot (x+4)}{(1+x)^6} =$$

$$= \frac{x^3 \cdot (x+4)}{(1+x)^4}.$$



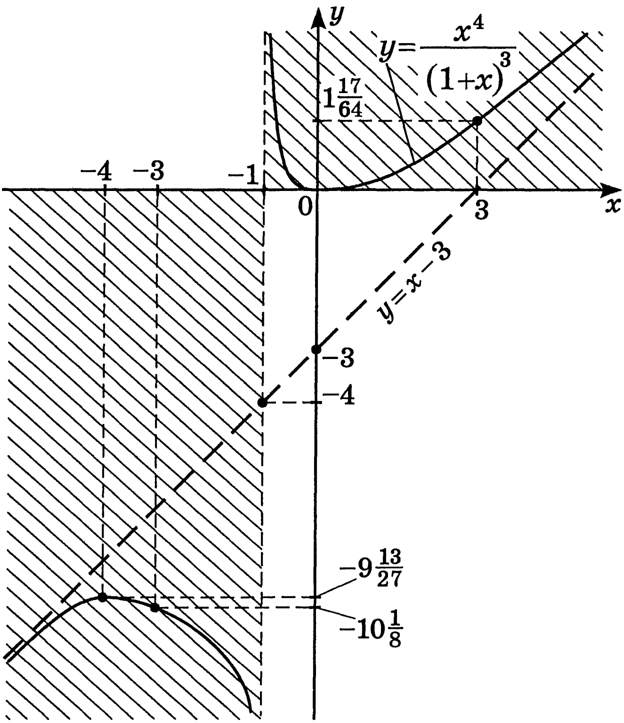
$$y_{\max} = y(-4) = \frac{256}{-27} = -9\frac{13}{27};$$

$$y_{\min} = y(0) = 0.$$

д) Контрольные точки:

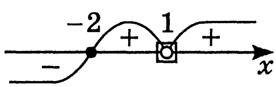
$x = 3; \quad y = 1\frac{17}{64};$

$x = -3; \; y = -10\frac{1}{8}.$



6. $y = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2}$.

а) $D(f):\ x \neq 1$.

б) 

в) $(x \to 1-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$;

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+12x+8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3-2x^2+x} & x+8 \\ 8x^2+11x+8 & \\ -\ \underline{8x^2-16x+8} & \\ 27x & \end{array}$$

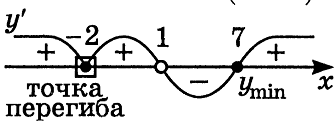
$$y = \frac{1}{4}x + 2 + \frac{27x}{4(x-1)^2};$$

$y = \frac{1}{4}x + 2$ — наклонная асимптота.

При $x = 0$ $y = 2$, значит точка $(0; 2)$ — точка пересечения графика функции и наклонной асимптоты.

г) $$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x+2)^2(x-1)\left(3(x-1) - 2(x+2)\right)}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3};$$

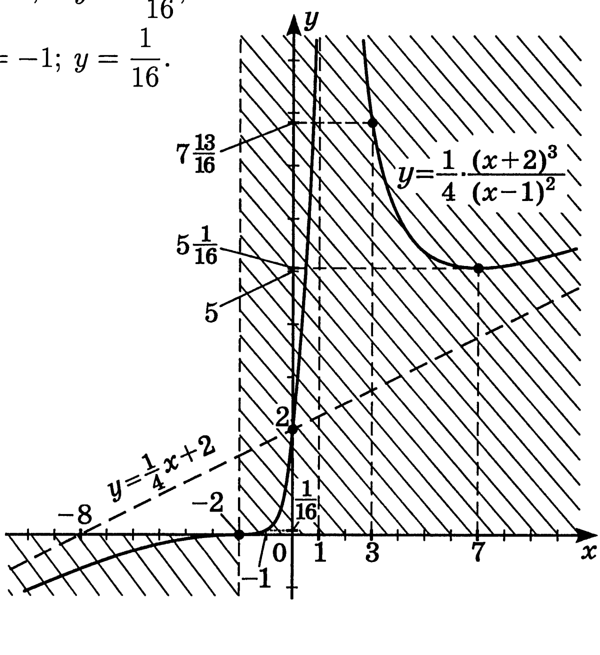


$$y_{\min} = y(7) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9^3}{6^2} = \frac{729}{144} = 5\frac{1}{16}.$$

д) Контрольные точки:

$x = 3;$ $y = 7\frac{13}{16};$

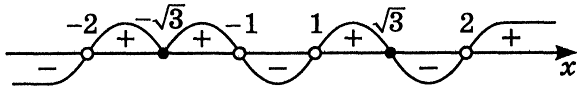
$x = -1;$ $y = \frac{1}{16}.$



7. $y = \dfrac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

а) $D(f):\ x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0;\qquad \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm 2 \end{cases};$

б) $y = \dfrac{(x^2 - 3)(x^2 + 1)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)};$



в) 1. $(x \to -2 - 0) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to -2 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$

$(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$

$(x \to 1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$

$(x \to 1 + 0) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to 2 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$

$(x \to 2 + 0) \Rightarrow (y \to \infty).$

2. $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4} = 1.$

3. Выясним, есть ли точки пересечения асимптоты с графиком функции.

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4} = 1; \quad 3x^2 = 7; \quad \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{array}\right. .$$

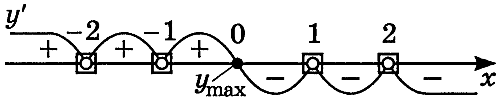
г) $f(-x) = f(x)$ — четная функция. График симметричен относительно оси ординат.

$f(0) = -\dfrac{3}{4}.$

Похоже, график можно построить, не используя мощного аппарата производной, так как, видимо, экстремум есть только в точке $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$. Проверим.

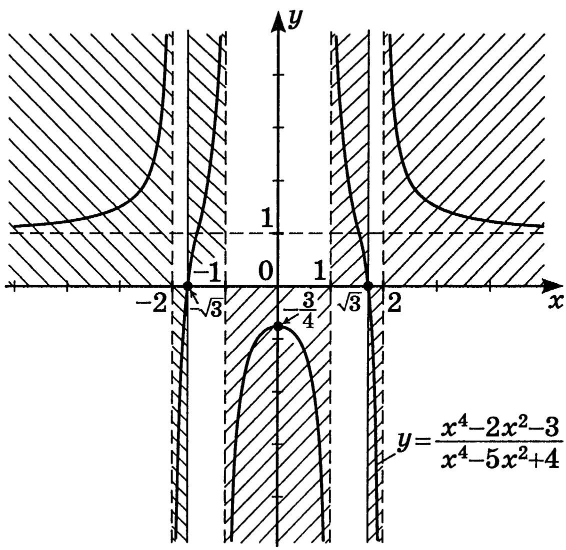
д) $$y' = \frac{(4x^3 - 4x)(x^4 - 5x^2 + 4) - (4x^3 - 10x)(x^4 - 2x^2 - 3)}{(x^4 - 5x^2 + 4)^2} =$$
$$= \frac{4x^7 - 24x^5 + 36x^3 - 16x - 4x^7 + 18x^5 - 8x^3 - 30x}{(x^4 - 5x^2 + 4)^2} =$$
$$= \frac{-2x(3x^4 - 14x^2 + 23)}{(x^4 - 5x^2 + 4)^2};$$

$3x^4 - 14x^2 + 23 > 0 \quad \forall x$, так как $D < 0$.



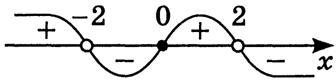
$$y_{\max} = y(0) = -\frac{3}{4}.$$

Новой информации это не добавило, но наши предположения получили строгое доказательство.



8. $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

б) 

в) $(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 & -x^2+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 \quad -4x} & -x \\ 4x & \end{array}$$

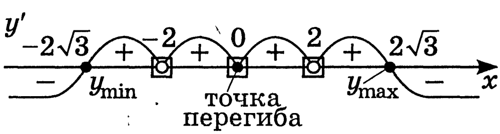
$y = -x + \dfrac{4x}{4-x^2}$;

$y = -x$ — наклонная асимптота.

Точка $(0;0)$ — точка пересечения графика с асимптотой.

г) $y' = \dfrac{3x^2(4-x^2)-(-2x)x^3}{(4-x^2)^2} =$

$= \dfrac{x^2(12-3x^2+2x^2)}{(x-2)^2(x+2)^2} = \dfrac{x^2(12-x^2)}{(x-2)^2(x+2)^2}$;



$y_{\min} = y\left(-2\sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(-2\sqrt{3}\right)^3}{4-\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{-8\cdot 3\sqrt{3}}{4-12} = 3\sqrt{3}$;

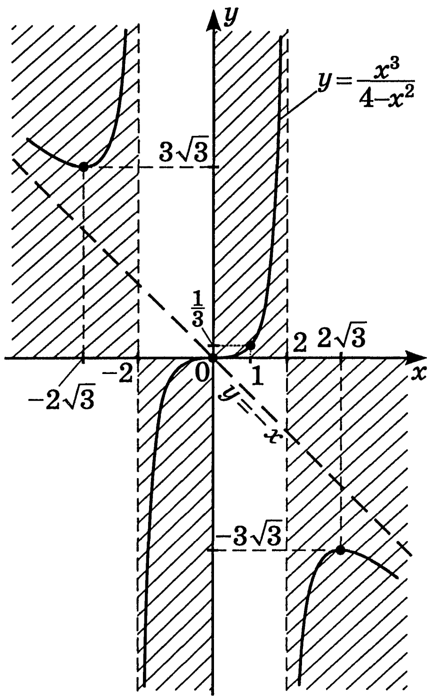
$y_{\max} = y\left(2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3}$.

д) Учтем, что $f(-x) = -f(x)$, график функции центрально-симметричен относительно начала координат.

е) Контрольные точки:

$x = 1; \quad y = \frac{1}{3};$

$x = -1; \; y = -\frac{1}{3}.$



Практикум 26
(Более сложные задачи на И.Ф.П.Г.)

1. $y = \cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x;$

2. $y = \sin x \cdot (1 + \cos x);$

3. $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x};$

4. $y = \dfrac{x^3 + 2}{x};$

5. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 2}};$

6. $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x};$

7. $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}};$

8. $y = e^{\frac{x^3}{4-x^2}};$

9. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$

Решение практикума 26

1. $y = f(x) = \cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x.$

а) $D(y) = (-\infty; \infty)$;

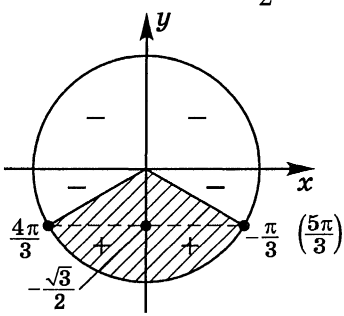
б) $y' = -\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

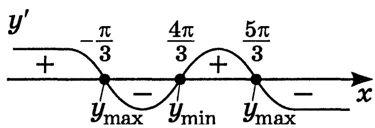
$f'(x) = -\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — непериодическая функция.

$y' = 0;\quad \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};\quad x = (-1)^k \cdot \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \pi k.$

$y' > 0;\quad \sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2};\quad \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k.$

$y' < 0;\quad \sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2};\quad -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k.$





$y_{\max}$ достигается при $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$;

$y_{\min}$ достигается при $x = -\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k$.

$$y_{\max} = \cos\left(2\pi n - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2\pi n - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \pi \cdot n\sqrt{3} \approx 1{,}4 - 5{,}45n.$$

$$y_{\min} = \cos\left(2\pi k + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2\pi k - \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \pi k\sqrt{3} \approx -4{,}1 - 5{,}45k.$$

в) $(x \to \infty) \Rightarrow \left(y \to -\dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

Значит, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ — наклонная асимптота. Найдем точки пересечения графика с наклонной асимптотой.

1. При $\cos x = 0$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ и $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.
2. $y_{\max}$ достигается при:

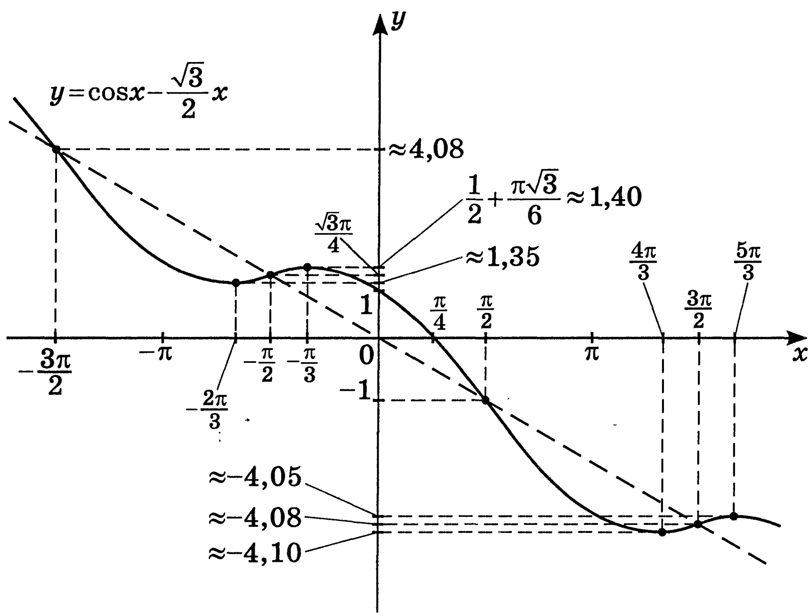
$n = 0; \quad x = -\dfrac{\pi}{3}; \quad y_{\max} \approx 1{,}40;$

$n = 1; \quad x = \dfrac{5\pi}{3}; \quad y_{\max} \approx -4{,}05.$

3. $y_{\min}$ достигается при:

$k = 0; \quad x = \dfrac{4\pi}{3}; \quad y_{\min} \approx -4{,}10;$

$k = -1; \quad x = -\dfrac{2\pi}{3}; \quad y_{\min} \approx 1{,}35.$



2. $y = f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$.

б) Так как $f(-x) = -f(x)$, то график центрально-симметричен относительно начала координат.

в) $y = f(x)$ периодическая с периодом 2π,

так как $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Можно доказать, что $T_0 = 2\pi$ — основной период[19].

г) $y' = \cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$;

$$y' = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \cos\frac{3}{2}x = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \cdot (2k+1) \\ x = \pi \cdot (2k+1) \end{array}\right.; \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Значит, объединяя обе серии, получим $x = \frac{\pi}{3} \cdot (2k+1)$.

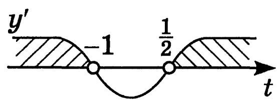
$y' = \cos x + \cos 2x = \cos x + \cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$;

$y' = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$;

$y' > 0; \quad \cos x > \frac{1}{2}$ при $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

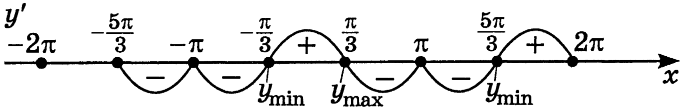
$y' < 0; \quad -1 < \cos x < \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$.

$\cos x = t$



Рассмотрим функцию на $[-2\pi; 2\pi]$.

[19] Более подробно см. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. СПб.: «ЧеРо-на-Неве», 2009.



$y_{\min}$ достигается при $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Так как $y = \sin x + \sin x \cdot \cos x = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$, то

$$y_{\min} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \approx -1{,}3.$$

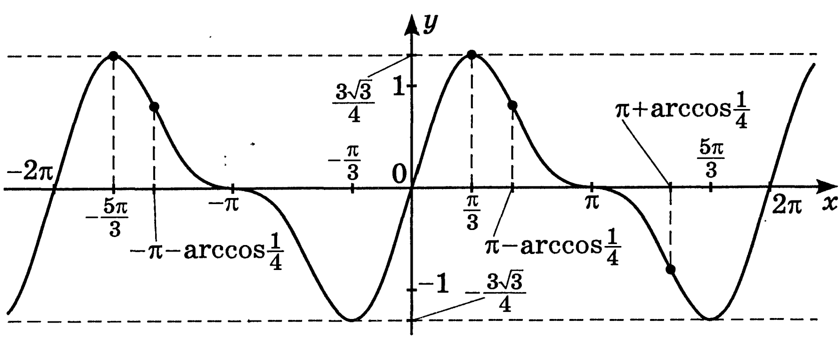
$y_{\max}$ достигается при $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$;

$$y_{\max} = \sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}3.$$

д) $y'' = -4\sin x \cdot \cos x - \sin x = -\sin x \cdot (4\cos x + 1)$;

$y'' = 0$;

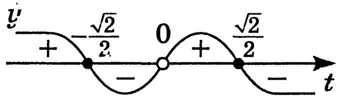
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k \text{ — точки перегиба;} \\ x = \pm\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi n \text{ — точки перегиба.} \end{array}\right.$$



3. $y = f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$.

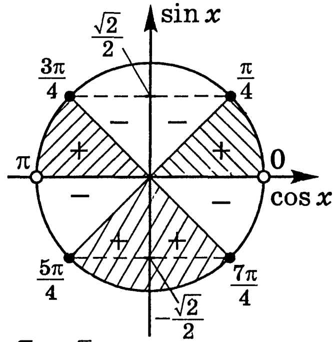
1) $D(f):\ \sin x \neq 0;\quad x \neq \pi k;$

2) $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x} = \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x};$



$(\sin x = t)$.

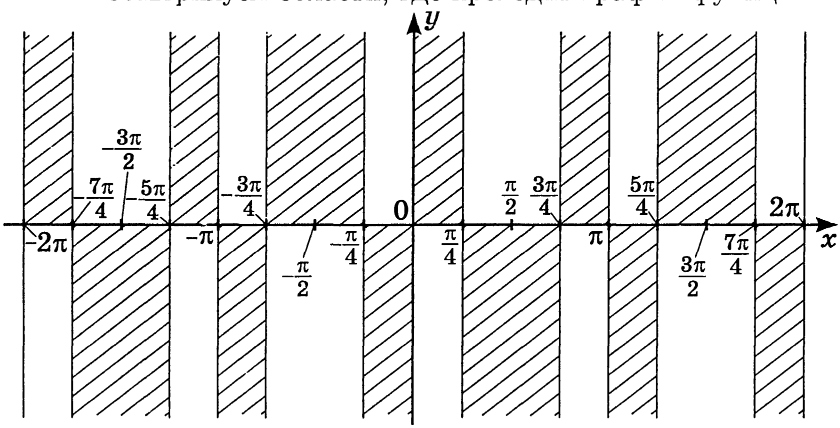
На круге $f(x) \geqslant 0$ в заштрихованной области.



$y = 0$; если $\cos 2x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k;\quad n, k \in \mathbb{Z};$

$x = \pi n$ — вертикальные асимптоты.

Заштрихуем области, где проходит график функции:



3) $y' = \dfrac{(\cos 2x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos 2x}{\sin^2 x} =$

$$= \frac{-2\sin 2x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos 2x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-4\sin^2 x \cdot \cos x - \cos x \cdot \cos 2x}{\sin^2 x} =$$

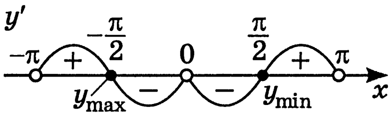
$$= \frac{-\cos x \cdot \left(4\sin^2 x + \cos 2x\right)}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x \cdot (2\sin^2 x + 1)}{\sin^2 x}.$$

$$y' = 0; \quad \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ — стационарные точки;}$$

$$y' > 0; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad (x \neq \pi n);$$

$$y' < 0; \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (x \neq \pi n).$$

Учитывая, что $T_0 = 2\pi$ — период функции, рассмотрим поведение функции только на $(-\pi; \pi)$.

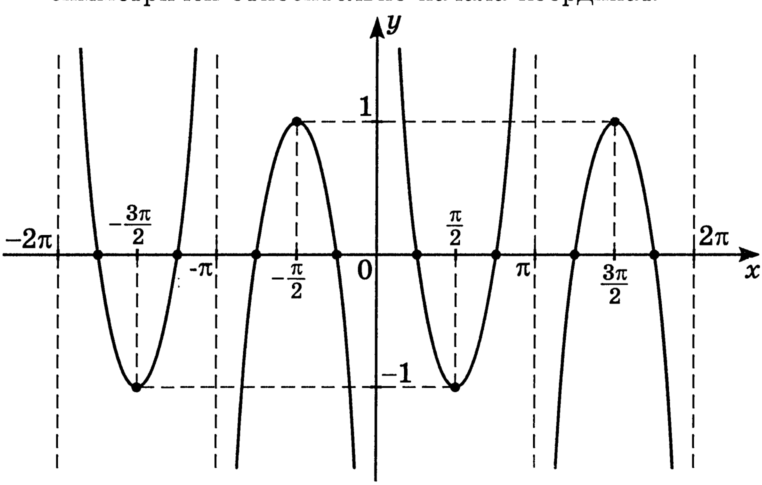


$$y_{\max} = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos(-\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

$$\left(\text{при } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad y_{\max} = 1\right);$$

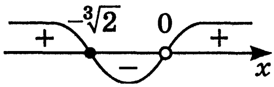
$$y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos \pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = -1 \quad \left(\text{при } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad y_{\min} = -1\right);$$

4) $f(-x) = \dfrac{\cos(-2x)}{\sin(-x)} = -\dfrac{\cos 2x}{\sin x} = -f(x)$, значит $f(x)$ — нечетная функция, и ее график центрально-симметричен относительно начала координат.



4. $y = \dfrac{x^3+2}{x}$.

а) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

б) 

в) $(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to \infty)$.

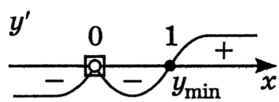
Так как степень числителя больше степени знаменателя на два, то асимптотической кривой на бесконечности будет $y = x^2$, так как $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$. Вблизи нуля асимптотой является $\dfrac{2}{x}$ — гипербола, т. е.

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to x^2)$;

$$(x \to 0) \Rightarrow \left(y \to \frac{2}{x}\right).$$

Пересечений с асимптотическими кривыми нет.

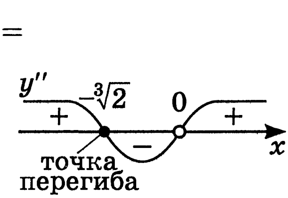
г) $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2(x^3-1)}{x^2}$;



$y_{\min} = y(1) = 3$.

д) $$y'' = \frac{2 \cdot 3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot 2\left(x^3-1\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{6x^3 - 4x^3 + 4}{x^3} = \frac{2(x^3+2)}{x^3}.$$



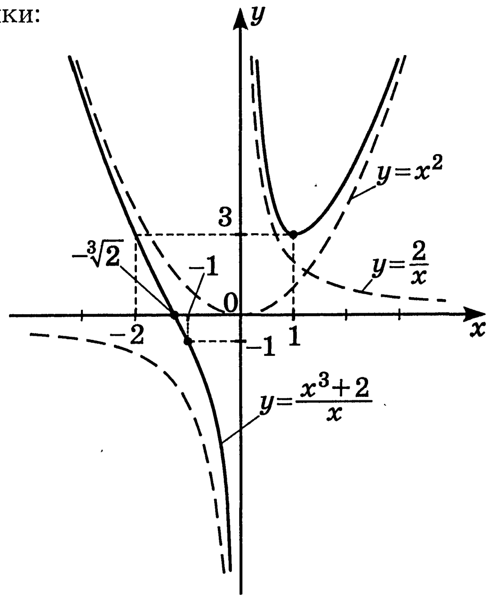
Точка перегиба — $\left(-\sqrt[3]{2}; 0\right)$;

на $\left(-\infty; -\sqrt[3]{2}\right)$ -- выпуклость вниз;

на $\left(-\sqrt[3]{2}; 0\right)$ -- выпуклость вверх;

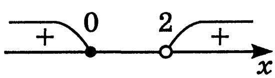
на $(0; \infty)$ -- выпуклость вниз.

е) Контрольные точки:
$x=-2$; $y=3$;
$x=-1$; $y=-1$.



5. $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

а) $D(f)$: $\dfrac{x^3}{x-2}\geqslant 0$; $\quad D(f)=(-\infty;0]\cup(2;\infty)$.

б) 

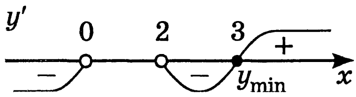
в) $(x\to 2+0)\Rightarrow(y\to\infty)$.

Так как $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}=|x|\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=1$,

то график асимптотически приближается к $y=|x|$.
Пересечение имеет место только в точке $(0;0)$.

г) $$y'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}\cdot\frac{3x^2(x-2)-1\cdot(x^3)}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}}=$$

$$=\frac{2x^2(x-3)}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}=\frac{2x^2(x-3)}{2(x-2)^2\cdot|x|}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x}}.$$



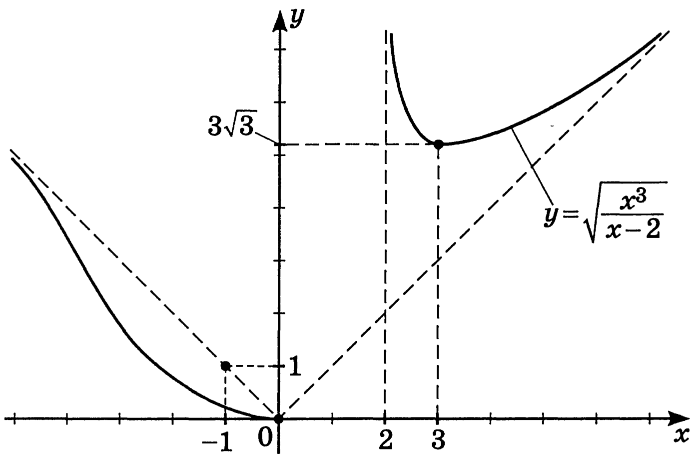
Значит на $D(f)$:

$y_{\min} = y(3) = \sqrt{\dfrac{27}{3-2}} = 3\sqrt{3}$;

$y_{\min} = y(0) = 0$.

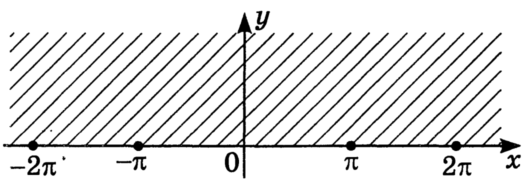
д) Контрольные точки:

$x = -1$; $y = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$, значит $y = f(x)$ проходит ниже асимптоты на $(-\infty; 0]$.



6. $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;



б) $y > 0 \quad y = 0\colon\ \sin x = 0;$

$y = 0 \quad x = \pi k;$

$y < 0 \quad y \geqslant 0\ \forall x \in D(f).$

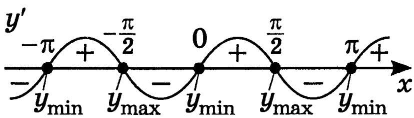
в) $$y' = \frac{2\cos x \cdot \sin x \cdot (2+\sin x) - \sin^2 x \cdot \cos x}{(2+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \cos x}{(2+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \cos x}{(2+\sin x)^2} = \frac{\sin 2x \cdot (4+\sin x)}{2\cdot(2+\sin x)^2}.$$

$$y' = 0; \quad \sin 2x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2}k.$$

Знак y' зависит от знака $\sin 2x$.

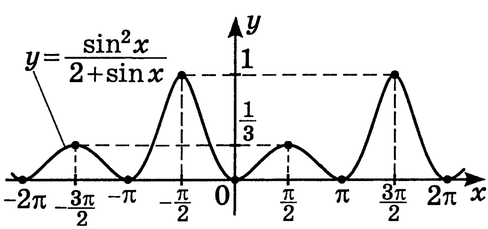


Так как $y = f(x)$ — периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$, то достаточно рассмотреть поведение функции на $[-\pi; \pi]$.

$$y_{\max} = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2-1} = 1;$$

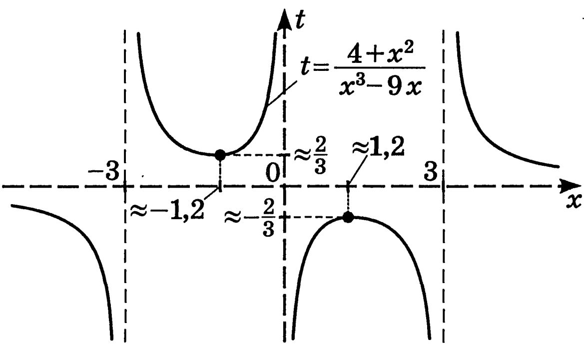
$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3};$$

$$y_{\min} = y(0) = \frac{0}{2+0} = 0.$$



7. $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

Для построения необходимо сначала построить график вспомогательной функции $t(x) = \dfrac{4+x^2}{x^3-9x}$.



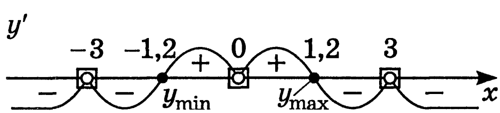
а) $D(y): \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

б) $y > 0: \quad \forall x \in D(f)$.

в) $y'(x) = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}} \cdot \left(-\dfrac{x^4+21x^2-36}{(x^3-9x)^2} \right)$;

$y' = 0; \quad x \approx 1{,}2; \quad x \approx -1{,}2;$

$t\,(-1{,}2) \approx \dfrac{2}{3}; \quad t\,(1{,}2) \approx -\dfrac{2}{3}$.



$y_{\min} = e^{2/3}; \quad y_{\max} = e^{-2/3}$.

г) $(x \to -3-0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$ $\qquad \left(e^{\frac{1}{x}} \to 0\right)$

$(x \to -3+0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty);$

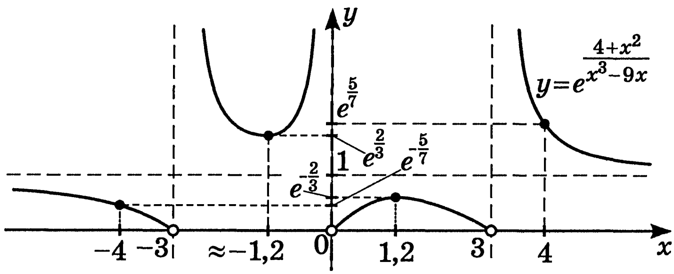
$(x \to 0-0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to 0+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$

$(x \to 3-0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$

$(x \to 3+0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 0) \Rightarrow (y \to 1).$



д) Контрольные точки:

$x = 4; \quad y = e^{\frac{5}{7}};$

$x = -4;\ y = e^{-\frac{5}{7}}.$

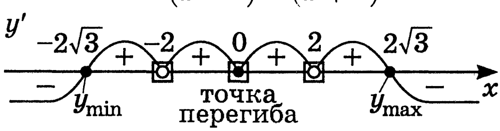
8. $y = e^{\frac{x^3}{4-x^2}}.$

Для построения данного графика необходимо сначала построить вспомогательный график $t(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ (см. с. 402, 403).

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 2 \\ x = -2 \end{cases};$

б) $y > 0 \quad \forall x \in D(f);$

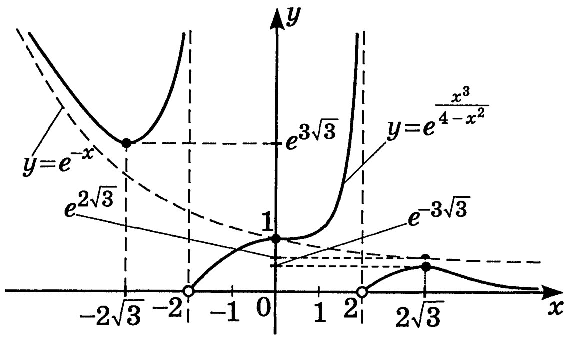
в) $y' = e^{\frac{x^3}{4-x^2}} \cdot \dfrac{x^2 \cdot (12-x^2)}{(x-2)^2 \cdot (x+2)^2};$



$$y_{\min} = y\left(-2\sqrt{3}\right) = e^{3\sqrt{3}};$$
$$y_{\max} = y\left(2\sqrt{3}\right) = e^{-3\sqrt{3}}.$$

г) $(x \to -2-0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to -2+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$
$(x \to 2-0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 2+0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$
$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to -x) \Rightarrow (y \to e^{-x});$
$(x \to -\infty) \Rightarrow (t \to -x) \Rightarrow (y \to e^{-x}).$

$e^{-x} = e^{\frac{x^3}{4-x^2}}$ только при $x = 0$.



9. $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$.

а) $D(y) = (-\infty; \infty)$;

б) $y > 0 \quad \forall x$;

в) $y' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} =$

$$= \frac{(2x+1)\cdot\sqrt{x^2-x+1} + (2x-1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{2\cdot\sqrt{x^2+x+1}\cdot\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$y'=0$, если $(2x+1)\cdot\sqrt{x^2-x+1} = (1-2x)\cdot\sqrt{x^2+x+1}$;

$(4x^2+4x+1)(x^2-x+1) = (1-4x+4x^2)(x^2+x+1)$;

$4x^4+x^2+3x+1 = 4x^4+x^2-3x+1; \quad x = 0.$

При проверке убеждаемся, что это корень производной: $y'(0) = 2$.

г) Решать иррациональное неравенство технически довольно сложно.

Так как на $(-\infty; 0)$ или на $(0; \infty)$ производная имеет постоянный знак (не имеет корней), то простым вычислением выясним вид монотонности на каждом из интервалов:

$y(1) = \sqrt{1+1+1} + \sqrt{1-1+1} = 1 + \sqrt{3} > 2.$

Следовательно, так как $1 > 0$ и $y(1) > y(0)$, то на $[0; \infty)$ y монотонно возрастает.

Очевидно, что на $(-\infty; 0]$ она убывает.

д) Так как $D(f)$ — симметричное множество,

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + (-x) + 1} + \sqrt{(-x)^2 - (-x) + 1} =$$
$$= \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} = f(x),$$

то график функции симметричен относительно оси Oy.

Значит $y(0) = y_{\min} = y_{\text{наим}} = 2.$

е) Проверим, нет ли здесь наклонной асимптоты $y = kx + b$ (так как при $(x \to \infty)$ $\sqrt{x^2 \pm x + 1} \to x$).

Рассмотрим $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 2.$$

Тогда очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} - 2x\right) = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ только при $b = 0$.

Итак, $y = 2x$ — наклонная асимптота на $[0; \infty)$.

Учитывая четность функции, $y = 2|x|$ — асимптота на $(-\infty; \infty)$.

ж) Выясним, нет ли точек пересечения с наклонной асимптотой, т. е. решим уравнение:

$\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x$ на $(0; \infty)$.

Домножим на сопряженное выражение:

$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}} = 2x;$

$x = 0$ — посторонний корень;

$\sqrt{x^2+x+1} = 1 + \sqrt{x^2-x+1};$

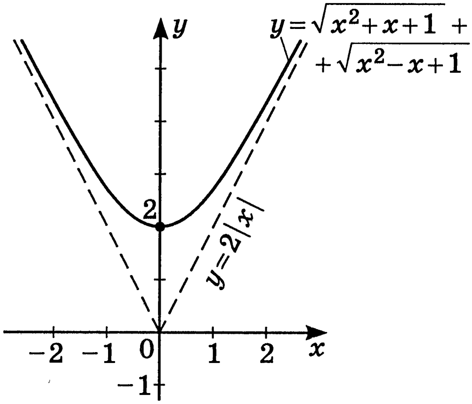
$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$ только при $x = 0$;

$x^2+x+1 = 1 + 2\sqrt{x^2-x+1} + x^2 - x + 1;$

$2x - 1 = 2\sqrt{x^2-x+1};$

$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 4;$

$1 = 4$ — ложь, корней нет.

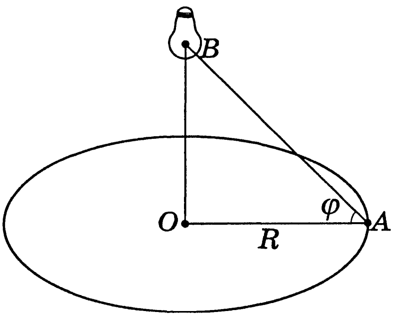


Примечание. Так как здесь мы имеем дело не с дробно-рациональной функцией, то используется общий способ нахождения наклонной асимптоты (см. с. 376).

Несколько задач с физическим содержанием

1. Электрическая лампочка подвешена над центром круглого стола радиуса R. На какой высоте ее нужно подвесить, чтобы освещенность краев стола была наибольшей?

$E = \dfrac{J \cdot \sin\varphi}{AB^2}$; $\quad J$ — сила света.



$AB = \dfrac{R}{\cos\varphi}$, т. е. $E = \dfrac{J \cdot \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi}{R^2} = \dfrac{J \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos\varphi}{2R^2}$.

Для простоты введем $t(\varphi) = \sin 2\varphi \cdot \cos\varphi$, от которой напрямую зависит $E(\varphi)$.

$t'(\varphi) = \sin' 2\varphi \cdot \cos\varphi + \cos'\varphi \cdot \sin 2\varphi =$

$= 2\cos 2\varphi \cdot \cos\varphi + (-\sin\varphi) \cdot \sin 2\varphi =$

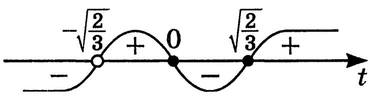
$= 2\cos 2\varphi \cdot \cos\varphi - 2\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi =$

$= 2\cos\varphi(\cos\varphi - \sin^2\varphi) = 2\cos\varphi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi) =$

$= 2\cos\varphi(3\cos^2\varphi - 2)$. Обозначим $\cos\varphi = t$, тогда

$t'(\varphi) = 0; \quad \left[\begin{array}{l}\cos\varphi = 0\\ \cos^2\varphi = 2\sin^2\varphi\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\cos\varphi = 0\\ \operatorname{ctg}^2\varphi = 2\end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l}\varphi = \dfrac{\pi}{2} \notin D(\varphi)\\ \operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{2}, \quad \text{т. е. } \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$



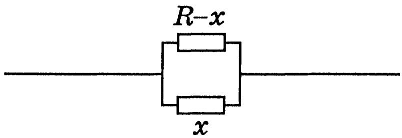
Так как $OB - OA \cdot \operatorname{tg}\varphi$, то $OB = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

$$E_{\max} = E_{\text{наиб}} = E\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ответ: При расположении лампочки на высоте $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ от стола освещенность краев стола будет наибольшей.

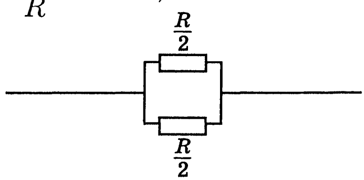
2. Проводник сопротивлением R надо разделить на две части так, чтобы при параллельном соединении сопротивление было наибольшим.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{R-x} = \frac{R}{x(R-x)}; \quad r = -\frac{1}{R}x^2 + x; \quad D(r) = (0; R);$$



$$r'(x) = -\frac{2x}{R} + 1; \quad r'(x) = 0; \quad -\frac{2x}{R} + 1 = 0;$$

$$x = \frac{R}{2} \in (0; R); \quad r_{\max} = r_{\text{наиб}} = \frac{R}{4}.$$



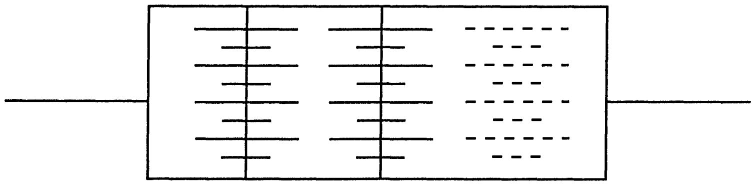
Ответ: Сопротивление будет наибольшим, если сопротивление каждой части проводника $\dfrac{R}{2}$.

3. Как должны быть соединены между собой n одинаковых гальванических элементов, чтобы при данном внешнем сопротивлении R она давала наибольшую силу тока?

Пусть E – ЭДС одного источника, r – внутреннее сопротивление.

Рассмотрим систему, когда n элементов соединены в p групп по k элементов в каждой, причем в каждой группе они соединены параллельно, а группы последовательно.

$$n = k \cdot p; \quad \frac{1}{R_в} = \underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \ldots + \frac{1}{r}}_{k},$$



т. е. $R_в = \dfrac{r}{k}$.

$R_в = \dfrac{rp}{k}$ — внутреннее сопротивление всей группы;

$R + \dfrac{rp}{k}$ — внешнее сопротивление источников;

E — ЭДС каждой группы;

$p \cdot E$ — общая ЭДС.

По закону Ома $I = \dfrac{p \cdot E}{R + \frac{rp}{k}} = f(p)$, так как $k = \dfrac{n}{p}$.

$$I = f(p) = \frac{p \cdot E}{R + \frac{rp^2}{n}};$$

$$I' = f'(p) = \frac{E\left(R + \frac{rp^2}{n}\right) - pE \cdot \frac{2rp}{n}}{\left(R + \frac{rp^2}{n}\right)^2} = \frac{-\frac{Erp^2}{n} + ER}{\left(R + \frac{rp^2}{n}\right)^2}.$$

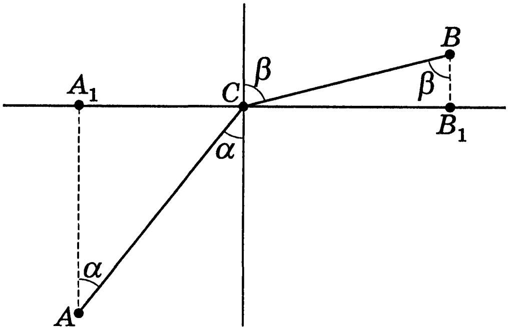
$I' = 0; \quad Erp^2 = EnR$, значит $p^2 = \dfrac{nR}{2}$.

$$I_{\max} = I\left(\sqrt{\frac{nR}{2}}\right) = I_{наиб}.$$

$$R_в = \frac{rp}{k} = \frac{2p^2}{n} = \frac{r}{n} \cdot \frac{nR}{2} = R,$$

т. е. сила тока будет наибольшей, если внешнее сопротивление равно внутреннему.

4. Всадник едет из пункта A в пункт B. Часть пути он едет по равнине со скоростью v_1, а часть по пересеченной местности со скоростью v_2. По какому пути должен двигаться всадник, чтобы на весь путь затратить наименьшее время?



Пусть $A_1C = x$; $A_1B_1 = l$; $AA_1 = n_1$; $BB_1 = n_2$.

Если $v_1 = v_2$, то путь $[AB]$. Пусть $v_1 \neq v_2$.

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{|AC|}{v_1} + \frac{|CB|}{v_2} = \frac{\sqrt{n_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{n_2^2 + (l-x)^2}}{v_2};$$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{n_1^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{2(l-x)\cdot(-1)}{2\sqrt{n_2^2 + (l-x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{n_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{n_2^2 + (l-x)^2}}.$$

Пусть $t'(x) = 0$, тогда

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{n_1^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{n_2^2 + (l-x)^2}}; \quad \frac{x}{|AC|} : \frac{l-x}{|CB|} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Так как $\dfrac{x}{|AC|} = \sin\alpha$; $\dfrac{l-x}{|CB|} = \sin\beta$, то $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

Примечание. Из курса физики известно, что именно так преломляется луч света, переходя из одной среды в другую (α — угол падения, β — угол преломления). Таким образом, луч света двигается по такому пути, чтобы время движения было наименьшим. В этом состоит известный принцип Ферма.

Тренировочные карточки (И.Ф.П.Г.)

Карточка 1

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = 2 + 3x - x^3$;

2. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$;

3. $y = \dfrac{4}{4x^2 - x^4}$;

4. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2}$;

5. $y = \dfrac{(x+1)^3}{-x^2 + 2x + 15}$.

Карточка 2

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = x^4 - 5x^2 + 4$;

2. $y = (x+1)\sqrt{24 - 3x - x^2}$;

3. $y = \dfrac{4}{x^3 - 3x}$;

4. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$;

5. $y = \frac{1}{4} \cdot \dfrac{(x+4)^3}{(x+1)^2}$.

Карточка 3

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$;

2. $y = (x+3)^3(x-1)^2$;

3. $y = (x-1)\sqrt{40 - x^2}$;

4. $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 4x^2 + 3}$;

5. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2 - x}$.

Карточка 4

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = \dfrac{3}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

2. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x(4 - x^2)}$;

3. $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$;

4. $y = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)}$;

5. $y = (x^2 - 8)e^x$.

Карточка 5

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = (x^2 - 4)e^{1-x^2}$;

2. $y = \dfrac{2x^2}{2 - x}$;

3. $y = \dfrac{3}{2x(x-2)^3}$;

4. $y = \dfrac{\cos^2 x}{2 - \cos x}$;

5. $y = e^{\frac{1}{x^3 - 3x}}$.

Карточка 6

Исследуйте функции и постройте графики.

1. $y = e^{-x} \cdot (x^2 + x - 5)$;

2. $y = (1 - x^2)^3$;

3. $y = \ln\left(x^3 - 3x\right)^2$;

4. $y = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$;

5. $y = e^{\frac{4-x^2}{x+3}}$.

Решение тренировочных карточек (И.Ф.П.Г.)

Решение тренировочной карточки 1

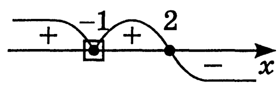
1. $y = 2 + 3x - x^3$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;

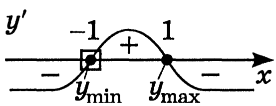
б) $y(-1) = 2 - 3 + 1 = 0$, значит можно разделить:

$$\begin{array}{r|l} -x^3 \qquad + 3x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 \qquad\qquad & -x^2 + x - 2 \\ \cline{1-1} x^2 + 3x + 2 & \\ x^2 + \ \ x \ \ \ \ \ \ & \\ \cline{1-1} 2x + 2 & \\ 2x + 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Тогда $y = (x+1)^2(2-x)$;



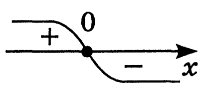
в) $y' = 3 - 3x^2 = -3(x+1)(x-1)$;



$y_{\max} = y(1) = 2 + 3 - 1 = 4$;

$y_{\min} = y(-1) = 0$;

г) $y'' = -6x$;



$y'' > 0$ на $(-\infty; 0)$ — выпуклость вниз;

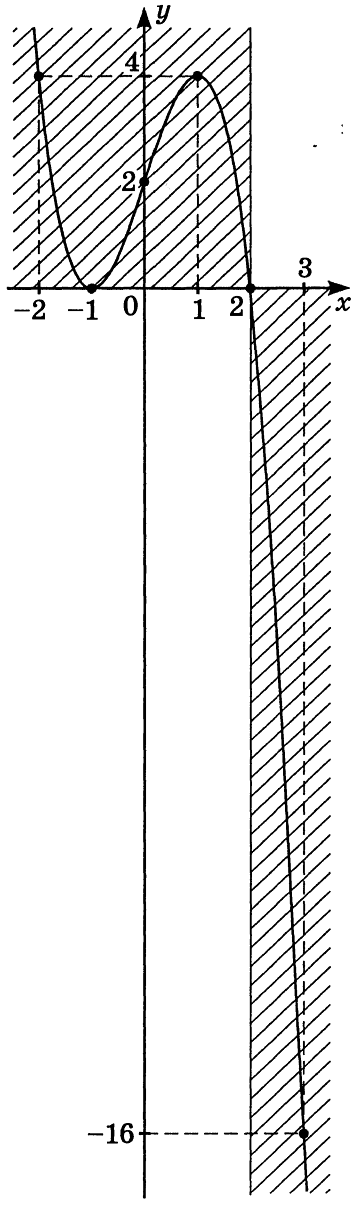
$y'' < 0$ на $(0; \infty)$ — выпуклость вверх;

$y''(0) = 2$; точка $(0; 2)$ — точка перегиба.

д) Контрольные точки

$x = -2$; $y = 4$;

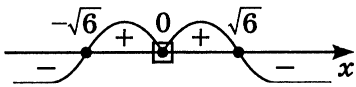
$x = 3$; $y = -16$.


y
4
2
3
x
−2
−1
0
1
2
−16

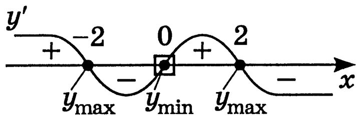
2. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6.$

а) $D(f) = (-\infty; \infty);$

б) $y = \frac{1}{24}x^4(6 - x^2);$



в) $y' = x^3 - \frac{1}{4}x^5 = \frac{1}{4}x^3(4 - x^2);$

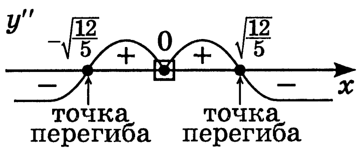


$y_{\max} = y(-2) = 1\frac{1}{3};$

$y_{\max} = y(2) = 1\frac{1}{3};$

$y_{\min} = y(0) = 0;$

г) $y'' = 3x^2 - \frac{5}{4}x^4 = \frac{1}{4}x^2(12 - 5x^2);$

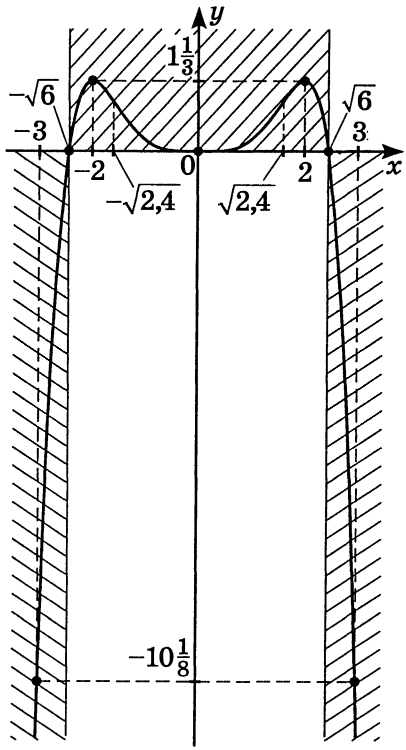


д) $f(-x) = f(x)$ — четная функция, график симметричен относительно оси ординат.

е) Контрольные точки:

$x = 3; \quad y = -10\frac{1}{8};$

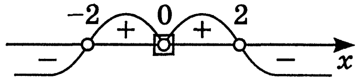
$x = -3; \; y = -10\frac{1}{8}.$



3. $y = \dfrac{4}{4x^2 - x^4}$.

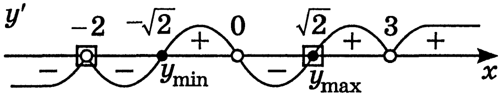
а) $D(f): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases};$

б) $y = \dfrac{4}{x^2(2-x)(2+x)}$;



в) $(x \to -2 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0 - 0) \quad \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0 + 0) \quad \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2 - 0) \quad \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2 + 0) \quad \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to \infty) \qquad \Rightarrow (y \to 0)$.

г) $y' = 4\dfrac{-(8x-4x^3)}{(4x^2-x^4)^2} = \dfrac{16x(x^2-2)}{(4x^2-x^4)^2}$;



$y_{\min} = y\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{4\cdot 2-4} = 1$;

$y_{\min} = y\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{4\cdot 2-4} = 1$.

д) $f(-x) = f(x)$ — четная функция, график симметричен относительно оси ординат.

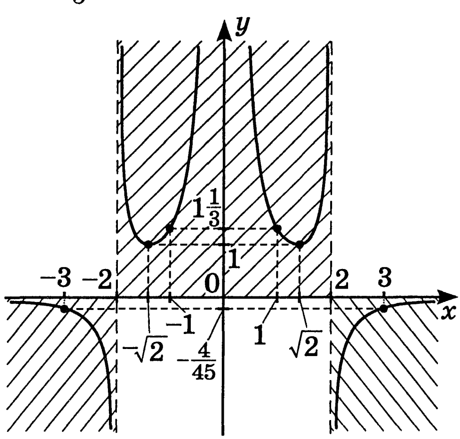
е) Контрольные точки:

$x=-3;\ y=-\dfrac{4}{45}$;

$x=3;\quad y=-\dfrac{4}{45}$;

$x=-1;\ y=1\dfrac{1}{3}$;

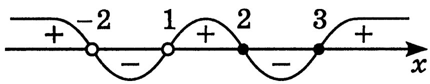
$x=1;\quad y=1\dfrac{1}{3}$.



4. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-1)}$;

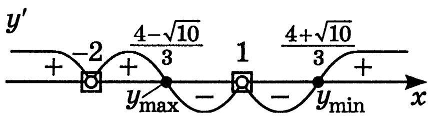


в) 1. $(x \to -2 - 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to -2 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1 - 0) \quad \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1 + 0) \quad \Rightarrow (y \to \infty)$.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} = 1$, т. е. $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 1)$ — горизонтальная асимптота $y = 1$.

г) $$y' = \frac{(2x-5)(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2-5x+6)}{(x^2+x-2)^2} =$$
$$= \frac{2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 - 2x^3 + 9x^2 - 7x - 6}{(x+2)^2(x-1)^2} =$$
$$= \frac{6x^2 - 16x + 4}{(x+2)^2(x-1)^2} = \frac{2(3x^2 - 8x + 2)}{(x+2)^2(x-1)^2};$$

$y' = 0; \quad 3x^2 - 8x + 2 = 0; \quad x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 6}}{3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$.



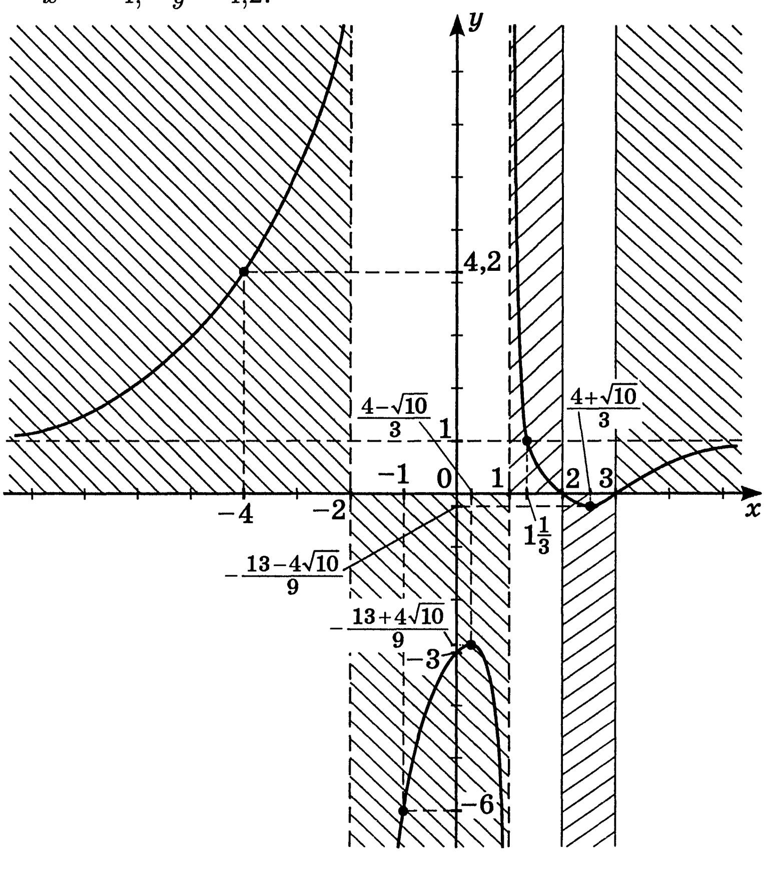
$$y_{\max} = y\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3} - 2\right)\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3} - 3\right)}{\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3} + 2\right)\left(\frac{4-\sqrt{10}}{3} - 1\right)} =$$
$$= \frac{\left(2+\sqrt{10}\right)\left(5+\sqrt{10}\right)}{\left(10-\sqrt{10}\right)\left(1-\sqrt{10}\right)} = \frac{20 + 7\sqrt{10}}{20 - 11\sqrt{10}} =$$
$$= \frac{\left(20+7\sqrt{10}\right)\left(20+11\sqrt{10}\right)}{20^2 - \left(11\sqrt{10}\right)^2} = \frac{400 + 770 + 360\sqrt{10}}{400 - 1210} =$$
$$= -\frac{13 + 4\sqrt{10}}{9}.$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3} - 2\right)\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3} - 3\right)}{\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3} + 2\right)\left(\frac{4+\sqrt{10}}{3} - 1\right)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}-5)}{(10+\sqrt{10})(1+\sqrt{10})} = \frac{20-7\sqrt{10}}{20+11\sqrt{10}} = \frac{-13+4\sqrt{10}}{9}.$$

д) Контрольные точки:

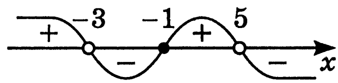
$x = 0;\quad y = -3;$
$x = -1;\quad y = -6;$
$x = 4;\quad y = \frac{1}{9};$
$x = -3;\quad y = 7{,}5;$
$x = -4;\quad y = 4{,}2.$



5. $y = \dfrac{(x+1)^3}{-x^2+2x+15}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -3 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{(x+1)^3}{-(x-5)(x+3)}$;



в) $(x \to -3-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$(x \to -3+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to 5-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$(x \to 5+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+3x+1 & -x^2+2x+15 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-2x^2-15x} & -x-5 \\ -\,5x^2+18x+1 & \\ \underline{5x^2-10x-75} & \\ 28x+76 & \end{array}$$

$y = -x-5+\dfrac{28x+76}{-x^2+2x+15}$;

$y=-x-5$ — наклонная асимптота.

$x = -\dfrac{76}{28} = -2\dfrac{5}{7}$ — абсцисса точки пересечения асимптоты с графиком функции.

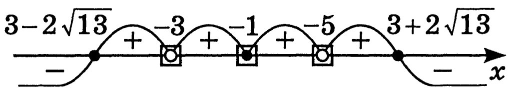
г) $y' = \dfrac{3(x+1)^2(-x^2+2x+15)-(-2x+2)(x+1)^3}{(5-x)^2(x+3)^2} =$

$= \dfrac{(x+1)^2\left(-3x^2+6x+45+2x^2-2\right)}{(5-x)^2(x+3)^2} =$

$= -\dfrac{(x+1)^2(x^2-6x-43)}{(5-x)^2(x+3)^2}$;

$$y' = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x - 43 = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 + 2\sqrt{13} \\ x = 3 - 2\sqrt{13} \; ; \\ x = -1 \end{array}\right.$$



$$y_{\min} = y\left(3 - 2\sqrt{13}\right) = \frac{\left(3 - 2\sqrt{13}\right)^3}{\left(-2 - 2\sqrt{13}\right)\left(6 - 2\sqrt{13}\right)} =$$

$$= \frac{8\left(2 - \sqrt{13}\right)^3}{4\left(1 + \sqrt{13}\right)\left(3 - \sqrt{13}\right)} = \frac{\left(2 - \sqrt{13}\right)^3}{\sqrt{13} - 5} =$$

$$= \frac{8 - 12\sqrt{13} + 6 \cdot 13 - 13\sqrt{13}}{\sqrt{13} - 5} = \frac{86 - 25\sqrt{13}}{\sqrt{13} - 5} =$$

$$= \frac{\left(86 - 25\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{13} + 5\right)}{13 - 25} = \frac{105 - 39\sqrt{13}}{-12} =$$

$$= \frac{13\sqrt{13} - 35}{4}.$$

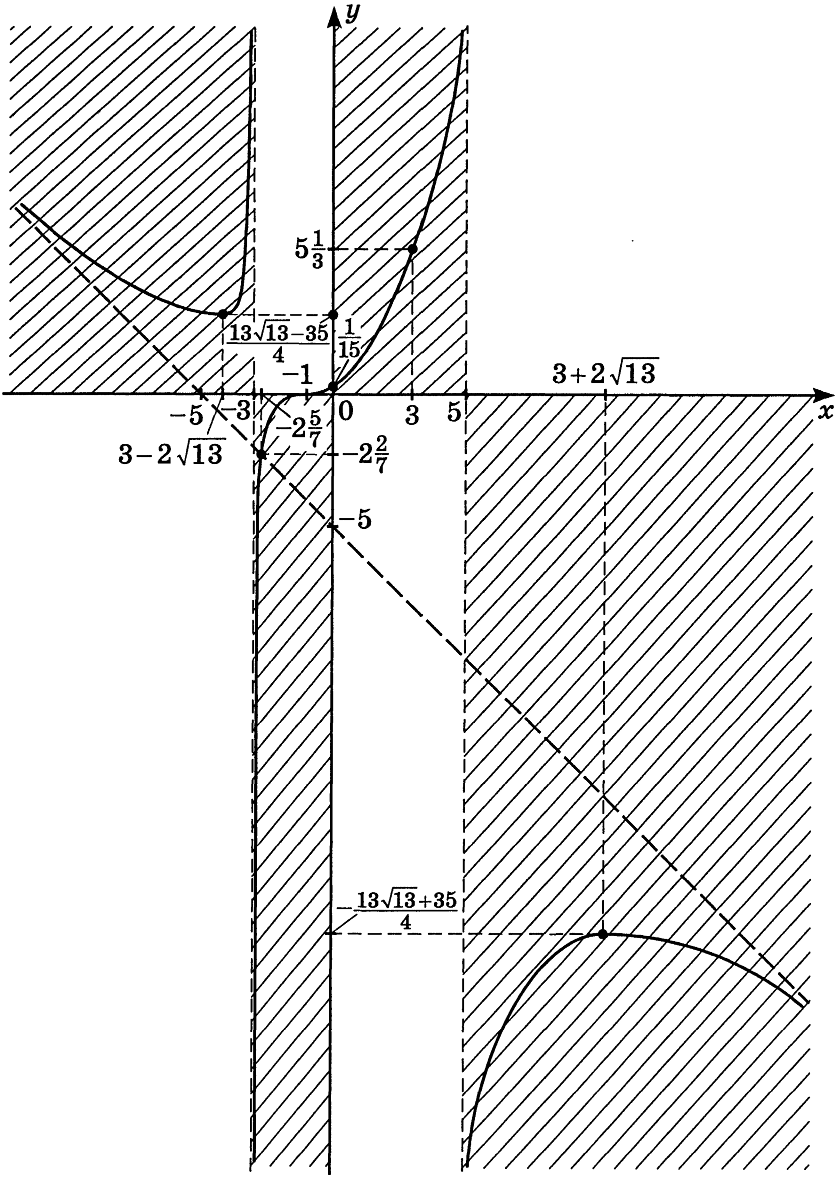
$$y_{\max} = y\left(3 + 2\sqrt{13}\right) = \frac{\left(4 + 2\sqrt{13}\right)^3}{-\left(-2 + 2\sqrt{13}\right)\left(6 + 2\sqrt{13}\right)} =$$

$$= \frac{\left(2 + \sqrt{13}\right)^3}{\sqrt{13} - 5} = -\frac{13\sqrt{13} + 35}{4}.$$

д) Контрольные точки:

$$x = 0; \; y = \frac{1}{15};$$

$$x = 3; \; y = 5\frac{1}{3}.$$

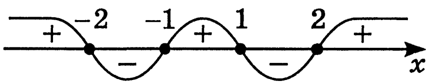

y
x
$5\frac{1}{3}$
$\frac{13\sqrt{13}-35}{4}$
$\frac{1}{15}$
-1
$3+2\sqrt{13}$
-5
-3
0
3
5
$-2\frac{5}{7}$
$3-2\sqrt{13}$
$-2\frac{2}{7}$
-5
$-\frac{13\sqrt{13}+35}{4}$

Решение тренировочной карточки 2

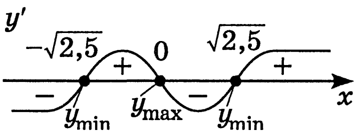
1. $y = x^4 - 5x^2 + 4.$

а) $D(f) = (-\infty; \infty);$

б) $y = (x^2 - 4)(x^2 - 1);$



в) $y' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5);$

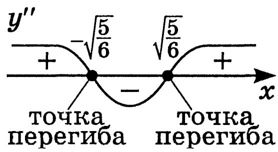


$$y_{\min} = y\left(-\sqrt{2{,}5}\right) = 6{,}25 - 12{,}5 + 4 = -2{,}25;$$

$$y_{\max} = y(0) = 4;$$

$$y_{\min} = y\left(\sqrt{2{,}5}\right) = -2{,}25.$$

г) $y'' = 12x^2 - 10 = 12\left(x^2 - \frac{5}{6}\right);$



$y'' > 0$ на $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ — выпуклость вниз;

$y'' < 0$ на $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}; \sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ — выпуклость вверх;

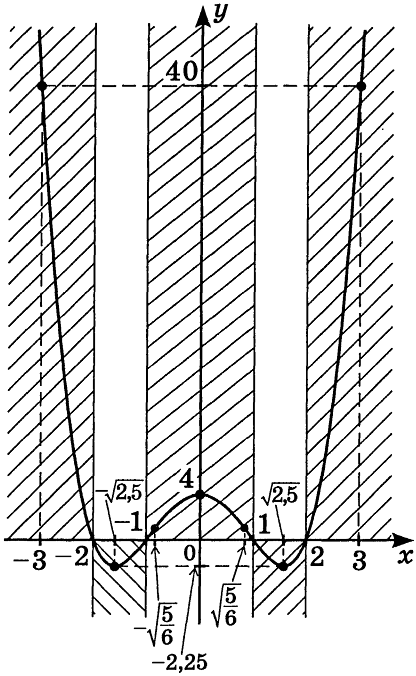
$y'' > 0$ на $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}; \infty\right)$ — выпуклость вниз.

д) $f(-x) = f(x)$ — четная. График симметричен относительно оси ординат.

е) Контрольные точки:

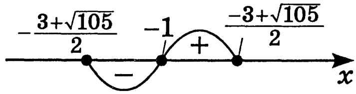
$x = 3;\quad y = 40;$

$x = -3;\ y = 40.$



2. $y = (x+1)\sqrt{24 - 3x - x^2}.$

а) $D(f)\colon 24-3x-x^2 \geqslant 0;\quad D(f) = \left[-\frac{3+\sqrt{105}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{105}}{2}\right].$

б) 

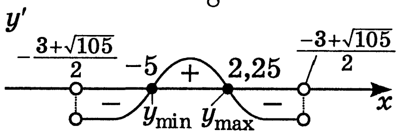
в) $$y' = \sqrt{24 - 3x - x^2} + (x+1)\frac{-2x-3}{2\sqrt{24-3x-x^2}} =$$

$$= \frac{2(24 - 3x - x^2) + (x+1)(-2x-3)}{2\sqrt{24-3x-x^2}} =$$

$$= \frac{48 - 6x = 2x^2 - 2x^2 - 5x - 3}{2\sqrt{24-3x-x^2}} = \frac{-4x^2 - 11x + 45}{2\sqrt{24-3x-x^2}}.$$

$$y' = 0; \quad 4x^2 + 11x - 45 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 720}}{8} = \frac{-1 \pm 29}{8}; \quad \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 2{,}25 \end{array}\right.;$$



$$y_{\min} = y(-5) = (-5+1)\sqrt{24 + 15 - 25} = -4\sqrt{14};$$

$$y_{\max} = y(2{,}25) = 3{,}25\sqrt{24 - \frac{3 \cdot 9}{4} - \frac{81}{16}} =$$

$$= 3{,}25\sqrt{24 - 11\frac{13}{16}} = 3{,}25\sqrt{12\frac{3}{16}}.$$

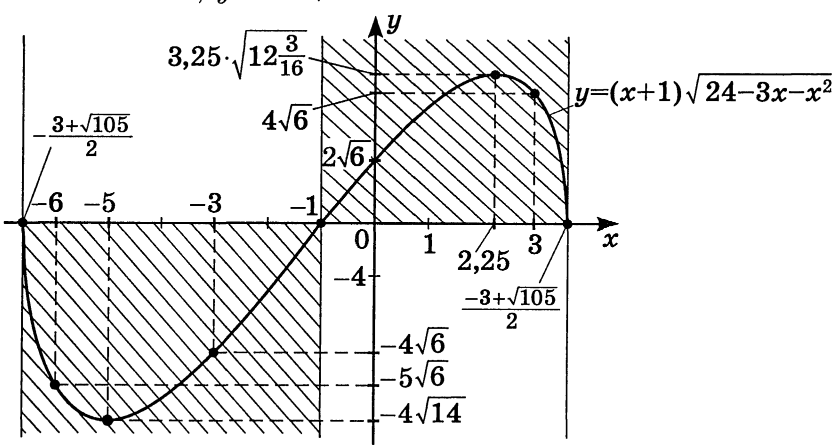
г) Контрольные точки:

$x = 3; \quad y = 4\sqrt{6};$

$x = 0; \quad y = 2\sqrt{6};$

$x = -3; \quad y = -4\sqrt{6};$

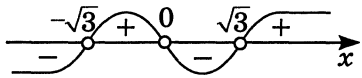
$x = -6; \quad y = -5\sqrt{6}.$



3. $y = \dfrac{4}{x^3 - 3x}.$

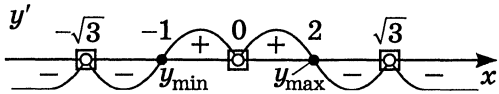
а) $D(f): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -\sqrt{3} \end{cases};$

б) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right|$



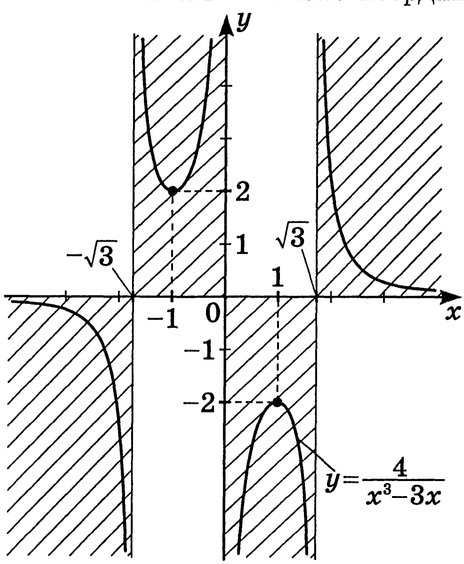
в) $(x \to -\sqrt{3} - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -\sqrt{3} + 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to \sqrt{3} - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to \sqrt{3} + 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$

г) $y' = \dfrac{-4 \cdot 3(x+1)(x-1)}{x^2(x^2-3)^2};$



$y_{\min} = y(-1) = 2; \quad y_{\max} = y(1) = -2.$

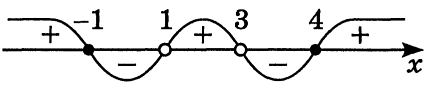
д) $f(-x) = -f(x)$ — нечетная, значит график центрально-симметричен относительно начала координат.



4. $y = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$;



в) 1. $(x \to 1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1 + 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 3 - 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 3 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = 1$; $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

$\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = 1$; $x = 7$ — абсцисса точки пересечения асимптоты с графиком.

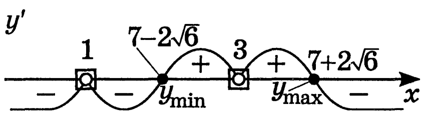
г) $y' = \dfrac{(2x-3)(x^2-4x+3) - (2x-4)(x^2-3x-4)}{(x-1)^2(x-3)^2} =$

$= \dfrac{2x^3 - 11x^2 + 18x - 9 - 2x^3 + 10x^2 - 4x - 16}{(x-1)^2(x-3)^2} =$

$= \dfrac{-x^2 + 14x - 25}{(x-1)^2(x-3)^2}$.

$y' = 0$; $x^2 - 14x + 25 = 0$;

$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{24} = 7 \pm 2\sqrt{6}$.



$$y_{\min} = y\left(7-2\sqrt{6}\right) = \frac{\left(3-2\sqrt{6}\right)\left(8-2\sqrt{6}\right)}{\left(4-2\sqrt{6}\right)\left(6-2\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{2\left(3-2\sqrt{6}\right)\left(4-\sqrt{6}\right)}{4\left(2-\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{6}\right)} = \frac{12+12-11\sqrt{6}}{2\left(6+6-5\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{\left(24-11\sqrt{6}\right)\left(12+5\sqrt{6}\right)}{2\left(12-5\sqrt{6}\right)\left(12+5\sqrt{6}\right)} = \frac{288-330-12\sqrt{6}}{2(144-150)} =$$

$$= \frac{-42-12\sqrt{6}}{-12} = \frac{7+2\sqrt{6}}{2}.$$

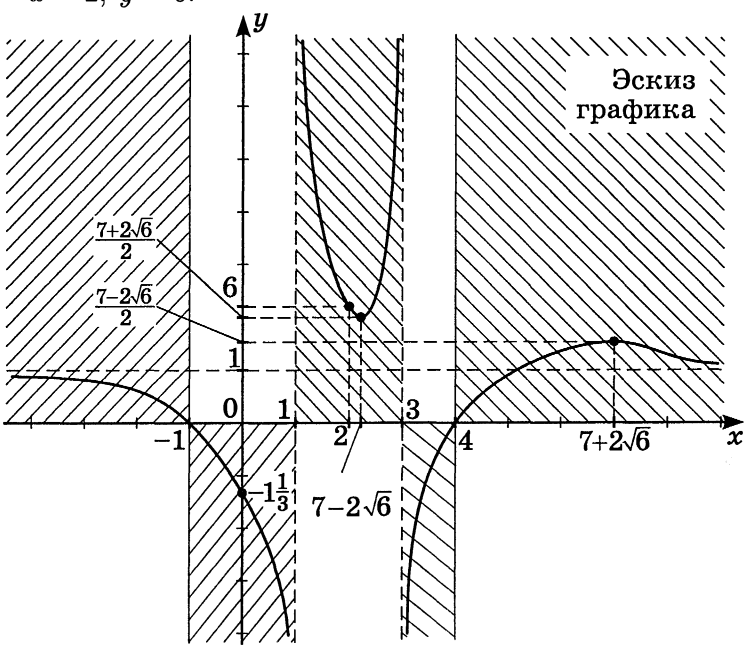
$$y_{\max} = y\left(7+2\sqrt{6}\right) = \frac{\left(3+2\sqrt{6}\right)\left(8+2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(6+2\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{24+11\sqrt{6}}{2\left(12+5\sqrt{6}\right)} = \frac{\left(24+11\sqrt{6}\right)\left(12-5\sqrt{6}\right)}{2(144-150)} = \frac{7-2\sqrt{6}}{2}.$$

д) Контрольные точки:

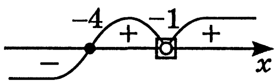
$x=0;\ y=-1\frac{1}{3};$

$x=2;\ y=6.$



5. $y = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(x+4)^3}{(x+1)^2}$.

а) $D(f):\ x \neq -1$;

б) 

в) 1. $(x \to -1-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (y \to \infty)$.

2.
$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+12x^2+48x+64 & 4x^2+8x+4 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+\ \ 2x^2+\ \ \ \ \ \ x\ \ \ \ \ \ } & \frac{1}{4}x+2{,}5 \\ -\,10x^2+47x+64 & \\ \underline{10x^2+20x+10} & \\ 27x+54 & \end{array}$$

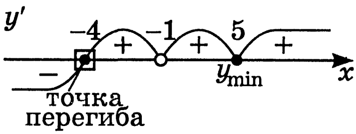
$$y = \frac{1}{4}(x+10) + \frac{27(x+2)}{4(x+1)^2};$$

$y = \dfrac{1}{4}(x+10)$ — наклонная асимптота;

$x = -2$ — абсцисса точки пересечения асимптоты с графиком.

г) $y' = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3(x+4)^2(x+1)^2 - 2(x+1)(x+4)^3}{(x+1)^4} =$

$$= \frac{(x+4)^2(3x+3-2x-8)}{(x+1)^3} = \frac{(x+4)^2(x-5)}{(x+1)^3};$$

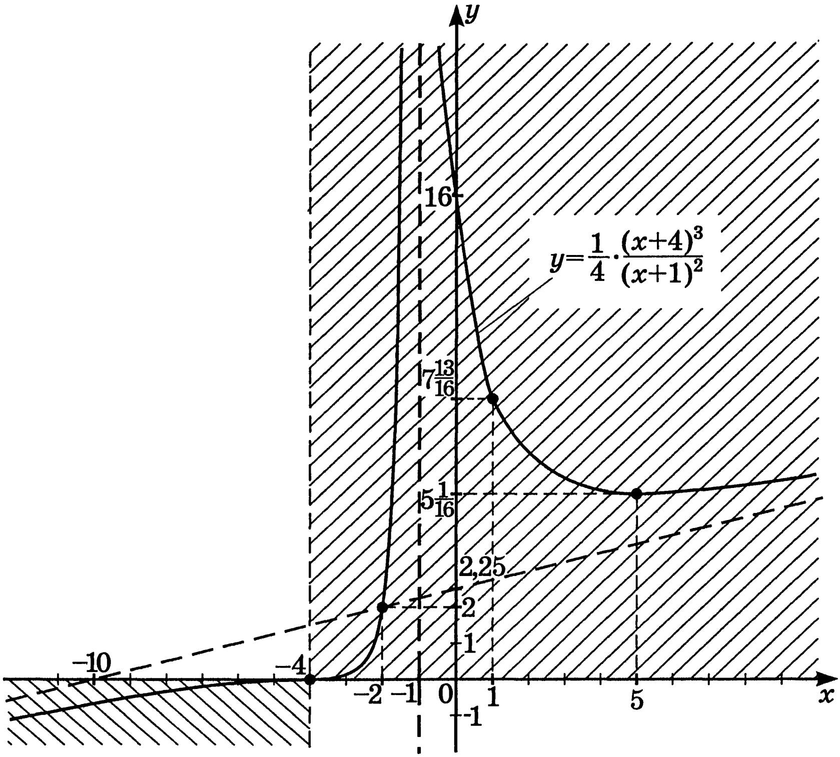


$$y_{\min} = y(5) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9^3}{6^2} = \frac{3^6}{4 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16};$$

д) Контрольные точки:

$x = 0;\ y = 16;$

$x = 1;\ y = 7\dfrac{13}{16}.$



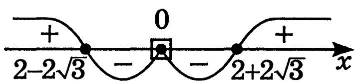
Решение тренировочной карточки 3

1. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

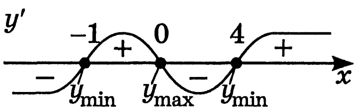
а) $D(y) = (-\infty; \infty)$;

б) $y = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 + 2\sqrt{3} \\ x = 2 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. ;$$



в) $y' = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x(x^2 - 3x - 4) =$
$= 4x(x-4)(x+1)$;

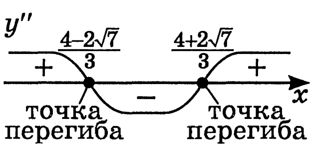


$y_{\min} = y(-1) = 1 + 4 - 8 = -3$;

$y_{\max} = y(0) = 0$;

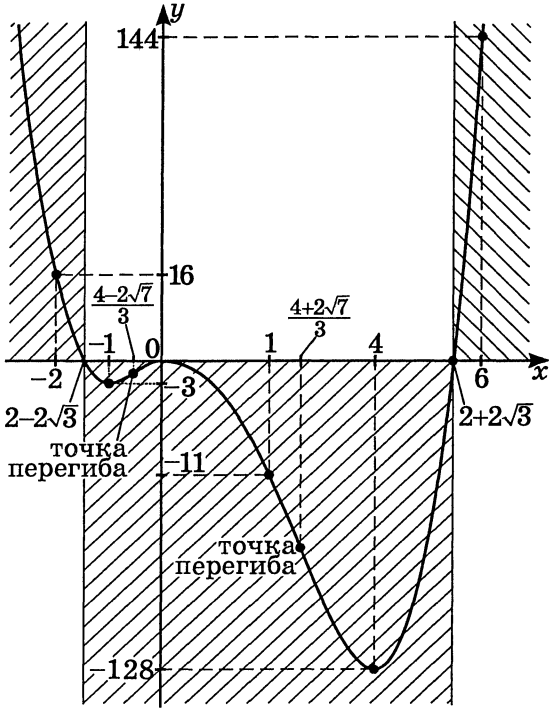
$y_{\min} = y(4) = 4^4 - 4^4 - 8 \cdot 4^2 = -128$.

г) $y'' = 12x^2 - 24x - 16 = 4(3x^2 - 6x - 4)$;



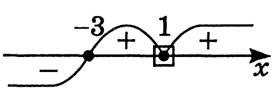
д) Контрольные точки:

$x = 1; \quad y = -11$;
$x = -2; \; y = 16$.



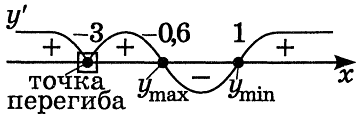
2. $y = (x+3)^3(x-1)^2$.

а) $D(y) = (-\infty; \infty)$;

б) 

в) $y' = 3(x+3)^2(x-1)^2 + 2(x-1)(x+3)^2 =$

$= (x-1)(x+3)^2(3x-3+2x+6) = (x-1)(x+3)^2(5x+3)$;



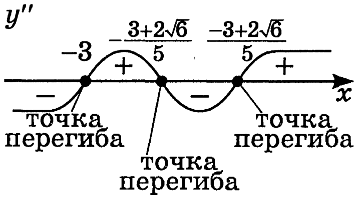
$y_{\max} = y(-0{,}6) = 2{,}4^3 \cdot 1{,}6^2 \approx 35;$

$y_{\min} = y(1) = 0;$

г) $y'' = \big((5x^2 - 2x - 3)(x+3)^2\big)' =$

$= (10x - 2)(x+3)^2 + 2(x+3)(5x^2 - 2x - 3) =$

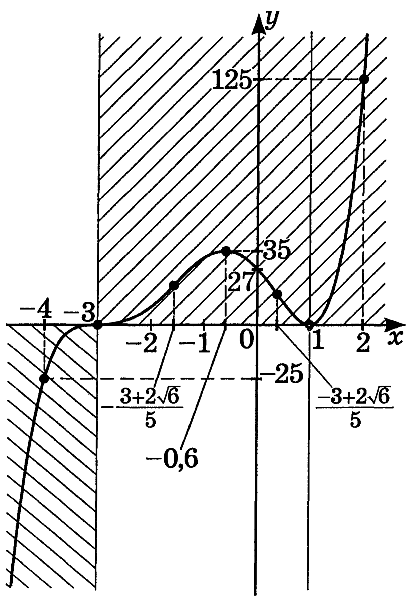
$= 4(x+3)(5x^2 + 6x - 3).$



д) Контрольные точки:

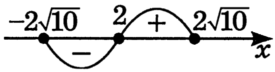
$x = -4;\ y = -25;$

$x = 2;\quad y = 125.$



3. $y = (x-1)\sqrt{40-x^2}$.

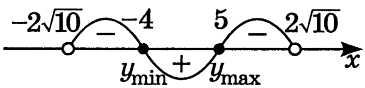
а) $D(y) = \left[-2\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\right]$;

б) 

в) $y' = 1 \cdot \sqrt{40-x^2} + \dfrac{(x-2)\cdot(-2x)}{2\sqrt{40-x^2}} =$

$= \dfrac{40 - x^2 - x^2 + 2x}{\sqrt{40-x^2}} = -\dfrac{2(x^2 - x - 20)}{\sqrt{40-x^2}} =$

$= \dfrac{-2(x-5)(x+4)}{\sqrt{40-x^2}}$;



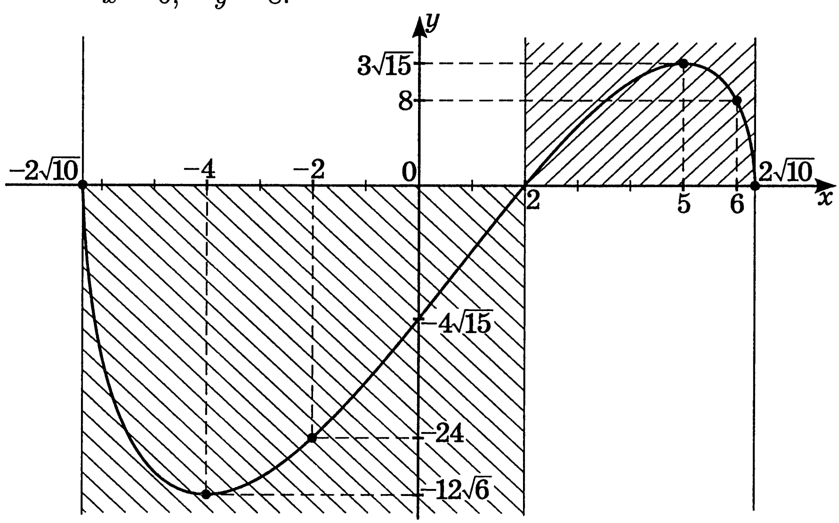
$y_{\min} = y(-4) = -6\sqrt{24} = -12\sqrt{6}$;

$y_{\max} = y(5) = 3\sqrt{15}$.

г) Контрольные точки:

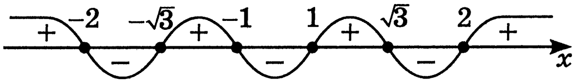
$x = -2$; $y = -24$;

$x = 6$; $y = 8$.



4. $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 4x^2 + 3}$.

а) $D(y):\ \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases};$

б) 

в) 1. $(x \to -\sqrt{3} - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to -\sqrt{3} + 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to -1 - 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to -1 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to 1 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to 1 + 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to \sqrt{3} - 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to \sqrt{3} + 0) \Rightarrow (y \to -\infty).$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 4x^2 + 3} = 1,$

т. е. $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

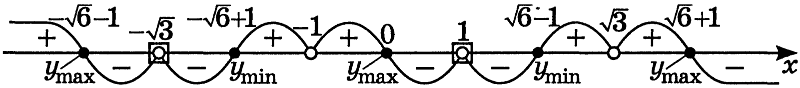
$\dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 4x^2 + 3} = 1; \quad x^2 = 7;$

$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{7} \\ x = -\sqrt{7} \end{array}\right.$ — абсциссы точек пересечения асимптоты с графиком.

г) Очевидно, что в силу симметричности $D(y)$ и $f(-x) = f(x)$ — функция четная, значит график ее симметричен относительно оси $0y$.

д) $$y' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 4x^2 + 3) - (4x^3 - 8x)(x^4 - 3x^2 - 4)}{(x^2 - 1)^2(x^2 - 3)^2} =$$
$$= \frac{2x\left((2x^2 - 3)(x^4 - 4x^2 + 3) - (2x^2 - 4)(x^4 - 3x^2 - 4)\right)}{(x^2 - 1)^2(x^2 - 3)^2} =$$
$$= \frac{2x(2x^6 - 11x^4 + 18x^2 - 9 - 2x^6 + 10x^4 - 4x^2 - 16)}{(x^2 - 1)^2(x^2 - 3)^2} =$$
$$= \frac{-2x(x^4 - 14x^2 + 25)}{(x^2 - 1)^2(x^2 - 3)^2};$$

$$y' = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 7 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{6}+1\right)^2 \\ x^2 = 7 - 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{6}-1\right)^2 \end{array}\right. ;$$



1. $y_{max} = y\left(-\sqrt{6}-1\right) =$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{6}+1\right)^2 - 4\right)\left(\left(\sqrt{6}+1\right)^2 + 1\right)}{\left(\left(\sqrt{6}+1\right)^2 - 3\right)\left(\left(\sqrt{6}+1\right)^2 - 1\right)} =$$

$$= \frac{\left(3+2\sqrt{6}\right)\cdot 2\left(4+\sqrt{6}\right)}{2\left(2+\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{12+12+11\sqrt{6}}{6+6+5\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{24+11\sqrt{6}}{12+5\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(24+11\sqrt{6}\right)\left(12-5\sqrt{6}\right)}{\left(12+5\sqrt{6}\right)\left(12-5\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{288-330+12\sqrt{6}}{144-150} = \frac{7-2\sqrt{6}}{2}.$$

2. В силу четности $y_{max} = y\left(\sqrt{6}+1\right) = \dfrac{7-2\sqrt{6}}{2}$.

3. $y_{min} = y\left(-\sqrt{6}+1\right) =$

$$= \frac{\left(\left(1-\sqrt{6}\right)^2 - 4\right)\left(\left(1-\sqrt{6}\right)^2 + 1\right)}{\left(\left(\sqrt{6}-1\right)^2 - 3\right)\left(\left(\sqrt{6}-1\right)^2 - 1\right)} =$$

$$= \frac{\left(3-2\sqrt{6}\right)\cdot 2\left(4-\sqrt{6}\right)}{2\left(2-\sqrt{6}\right)\cdot\left(3-\sqrt{6}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{24-11\sqrt{6}}{12-5\sqrt{6}} =$$

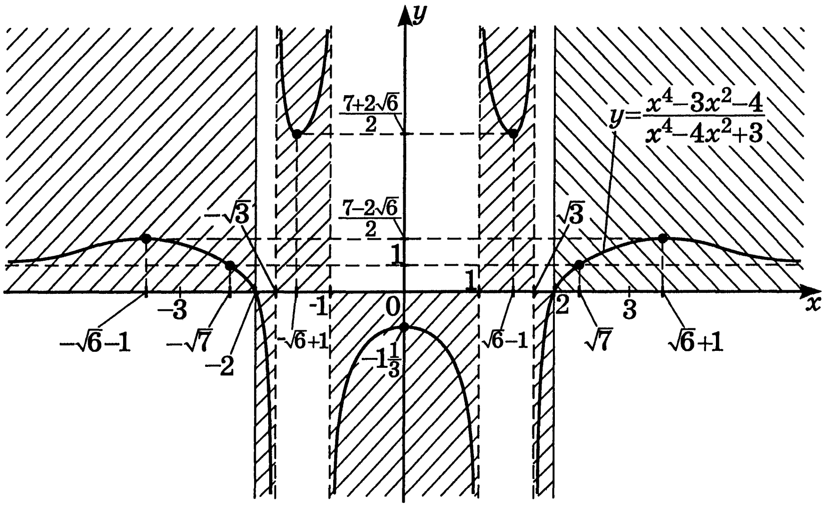
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(24-11\sqrt{6}\right)\left(12+5\sqrt{6}\right)}{\left(12-5\sqrt{6}\right)\left(12+5\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{288-330-12\sqrt{6}}{144-150} = \frac{7+2\sqrt{6}}{2}.$$

4. В силу четности $y_{min} = y\left(\sqrt{6}-1\right) = \dfrac{7+2\sqrt{6}}{2}$.

е) Контрольные точки:

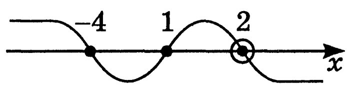
$x = 0$; $y = -1\dfrac{1}{3}$.



5. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2 - x}$.

а) $D(y):\ x \neq 2$;

б)



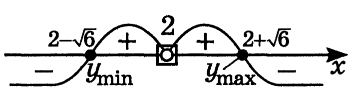
в) 1. $(x \to 2 - 0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

2. Разделим x^2+3x-4 на $-x+2$ с остатком, получим $y = -x - 5 + \dfrac{6}{2 - x}$, значит $y = -x - 5$ — наклонная асимптота.

Точек пересечения ее с графиком нет.

г) $y' = \dfrac{(2x + 3)(2 - x) + (x^2 + 3x - 4)}{(2 - x)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x + 2}{(2 - x)^2}$;

$y' = 0; \quad x^2 - 4x - 2 = 0; \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$;



$y_{\min} = y\left(2 - \sqrt{6}\right) = \dfrac{\left(2 - \sqrt{6} + 4\right)\left(2 - \sqrt{6} - 1\right)}{2 - 2 + \sqrt{6}} =$

$$= \frac{(6-\sqrt{6})(1-\sqrt{6})}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}(1-\sqrt{6})^2}{\sqrt{6}} =$$

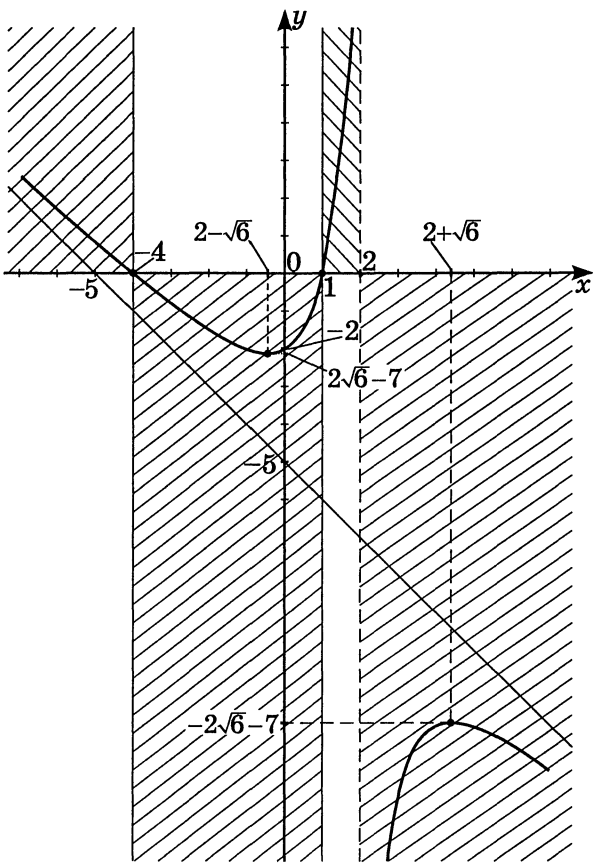
$$= -\left(1-2\sqrt{6}+6\right) = 2\sqrt{6}-7.$$

$$y_{\max} = y\left(2+\sqrt{6}\right) = \frac{\left(2+\sqrt{6}+4\right)\left(2+\sqrt{6}-1\right)}{2-2-\sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6}(1+\sqrt{6})^2}{\sqrt{6}} = -2\sqrt{6}-7.$$

д) Контрольные точки:

$x = 0$; $y = -2$.

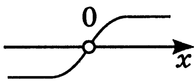


Решение тренировочной карточки 4

1. $y = \dfrac{3}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

а) $D(f):\ 4x^3 - 9x^2 + 6x \neq 0;$

$x \neq 0; \quad 4x^2 - 9x + 6 = 0 \quad (D < 0);$

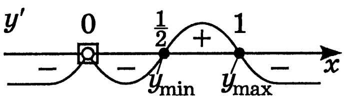
б) 

в) 1. $(x \to 0 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to \infty).$

2. $(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$

$$\left(\lim_{x\to\infty} \frac{3}{4x^3 - 9x^2 + 6x} = 0\right);$$

г) $y' = \dfrac{-3(12x^2 - 18x + 6)}{x^2(4x^2 - 9x + 6)^2} = \dfrac{-18(2x^2 - 3x + 1)}{x^2(4x^2 - 9x + 6)^2};$



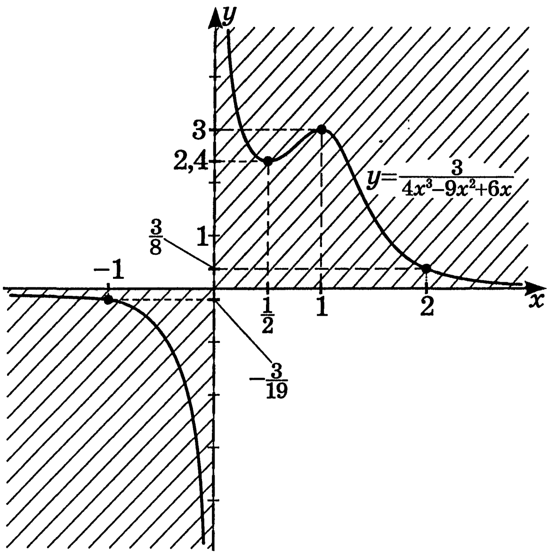
$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\frac{1}{2} - \frac{9}{4} + 3} = 2\frac{2}{5};$$

$$y_{\max} = y(1) = \frac{3}{4 - 9 + 6} = 3.$$

д) Контрольные точки:

$x = -1;\ y = -\dfrac{3}{19};$

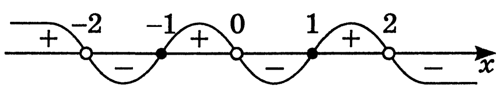
$x = 2; \quad y = \dfrac{3}{8}.$



2. $y = \dfrac{x^2-1}{x(4-x^2)}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x(2+x)(2-x)}$;



в) $(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0)$.

г) $y' = \dfrac{2x \cdot x(4-x^2) - (4-3x^2)(x^2-1)}{x^2(4-x^2)^2} = \dfrac{x^4+x^2+4}{x^2(4-x^2)^2} > 0.$

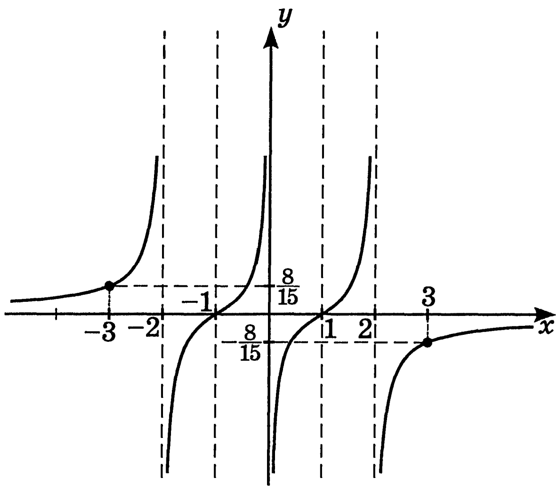
$y = f(x)$ — кусочно-монотонная, на каждом своем интервале непрерывно возрастает.

д) $f(-x) = -f(x)$ — нечетная, значит ее график центрально-симметричен относительно начала координат.

е) Контрольные точки:

$x = -3;\ y = \dfrac{8}{15};$

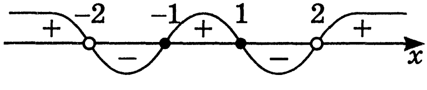
$x = 3;\quad y = -\dfrac{8}{15}.$



3. $y = \dfrac{x^4-1}{x^2-4}.$

а) $D(f):\ x \neq \pm 2;$

б)



в) 1. $(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to \infty)$.

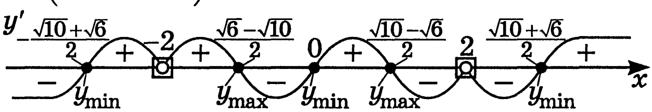
2. Разделим x^4-1 на x^2-4 с остатком, получим $y = x^2+4+\dfrac{15}{x^2-4}$, значит $y = x^2+4$ — асимптотическая кривая без точек пересечения с графиком функции.

г) $y' = \dfrac{4x^3(x^2-4) - 2x\cdot(x^4-1)}{(x^2-4)^2} =$

$= \dfrac{2x\cdot(2x^4-8x^2-x^4+1)}{(x-2)^2(x+2)^2}$;

$y' = 0$; $\quad (x^2)_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15} = \dfrac{8\pm 2\sqrt{15}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 =$

$= \left(\dfrac{\sqrt{10}\pm\sqrt{6}}{2}\right)^2$;



$y_{\min} = y\left(-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right) = \dfrac{(4+\sqrt{15})^2 - 1}{4+\sqrt{15}-4} =$

$= \dfrac{16+8\sqrt{15}+15-1}{\sqrt{15}} = 2\sqrt{15}+8$;

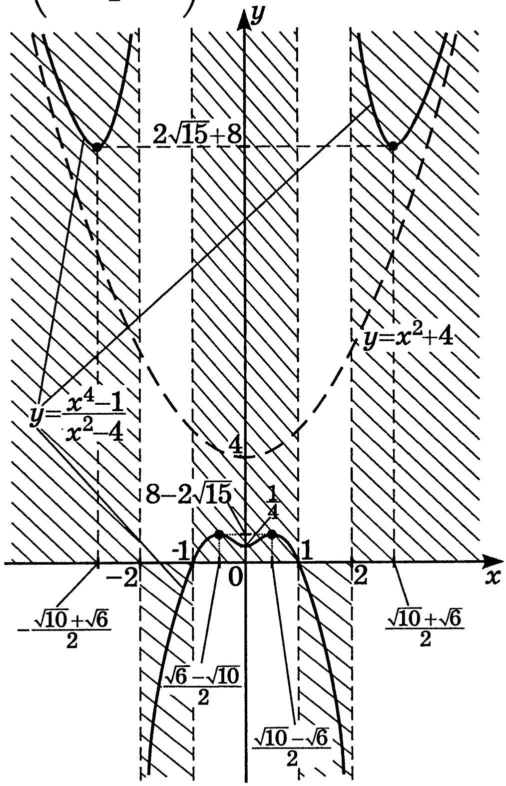
$y_{\max} = y\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}\right) = \dfrac{(4-\sqrt{15})^2 - 1}{4-\sqrt{15}-4} =$

$= \dfrac{16-8\sqrt{15}+15-1}{-\sqrt{15}} = 8-2\sqrt{15}$.

Так как $f(-x) = f(x)$ и $D(f)$ симметричное множество, то $y = f(x)$ — четная, т. е. график ее симметричен относительно оси ординат.

Тогда $y_{\min} = y\left(\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right) = 2\sqrt{15}+8;$

$y_{\max} = y\left(\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}\right) = 8-2\sqrt{15}.$

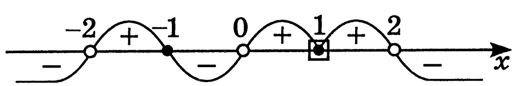


4. $y = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$;

б) $y = \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x(2-x)(2+x)}$;

$y > 0$
$y = 0$
$y < 0$



в) 1. $(x \to -2-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 0+0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)} = -1$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to -1)$;
$\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x(4-x^2)} = 1; \quad x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 - 4x$;
$x^2 - 3x - 1 = 0$.

Точки пересечения асимптоты $y = -1$ графиком:
$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

г) $$y' = \left(\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{-x^3 + 4x}\right)' =$$
$$= \frac{(3x^2 - 2x - 1)(-x^3 + 4x) - (-3x^2 + 4)(x^3 - x^2 - x + 1)}{x^2(x^2-4)^2} =$$
$$= \frac{-(x-1)(3x+1)(x^3 - 4x) - (4 - 3x^2)(x-1)^2(x+1)}{x^2(x^2-4)^2} =$$
$$= \frac{-(x-1)\left((3x+1)(x^3-4x) - (3x^2-4)(x^2-1)\right)}{x^2(x^2-4)^2} =$$
$$= \frac{-(x-1)(3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x - 3x^4 + 7x^2 - 4)}{x^2(x^2-4)^2} =$$
$$= \frac{-(x-1)(x^3 - 5x^2 - 4x - 4)}{x^2(x^2-4)^2}.$$

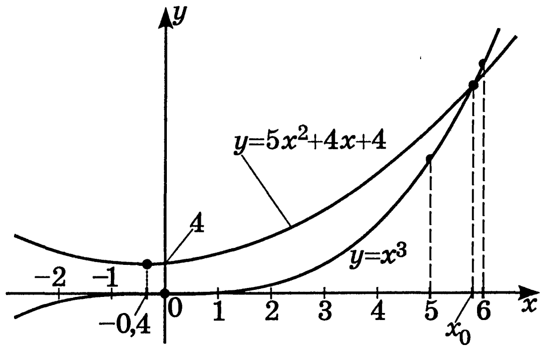
Возникла проблема.

Сколько корней в уравнении $x^3 - 5x^2 - 4x - 4 = 0$?

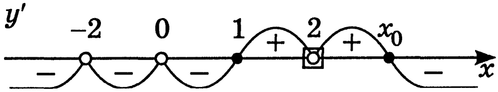
Пусть $\varphi(x) = x^3; \quad g(x) = 5x^2 + 4x + 4$.

$\varphi(2) = 8; \quad g(2) = 32; \quad \varphi(2) < g(32)$,

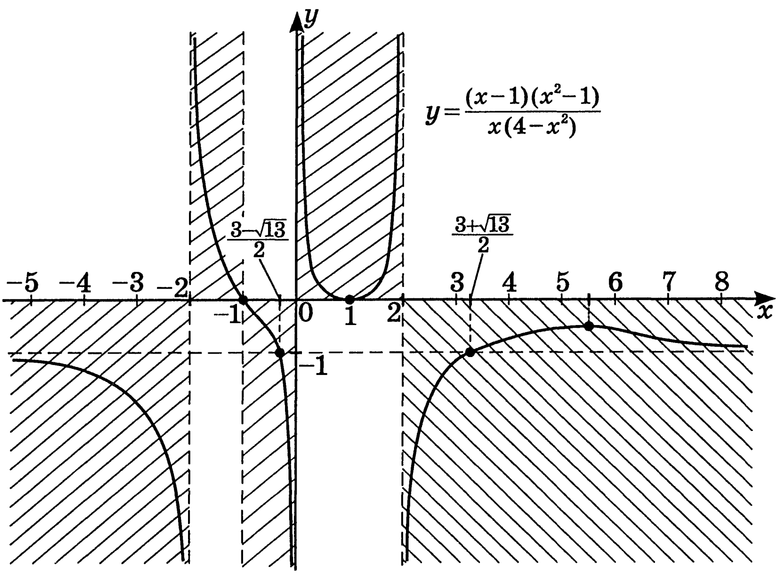
т. е. на $(-\infty; 2]$ точек пересечения нет.



$\varphi(6)=216$; $g(6)=208$; $\varphi(6)>g(6)$, т. е. на $[5;6]$ есть единственный корень ($y_{\max}$), далее $\varphi(x)$ растет значительно быстрее $g(x)$, и точек пересечения на $(6;\infty)$ нет.

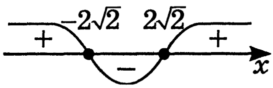


Вывод: $x_0 \in (5;6)$ можно определить только приблизительно. Для построения эскиза графика этого достаточно.

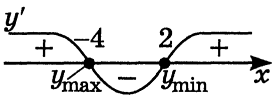


5. $y = (x^2 - 8)e^x$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;

б) 

в) $y' = 2xe^x + (x^2 - 8)e^x = (x^2 + 2x - 8)e^x$;



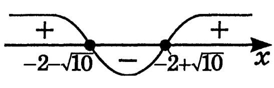
$y_{\max} = y(-4) = 4 \cdot e^{-4}$;

$y_{\min} = y(2) = -4e^2$.

г) $(x \to -\infty) \Rightarrow (y \to e^{-x} \to 0)$;

д) $y'' = (2x + 2)e^x + e^x(x^2 + 2x - 8) =$

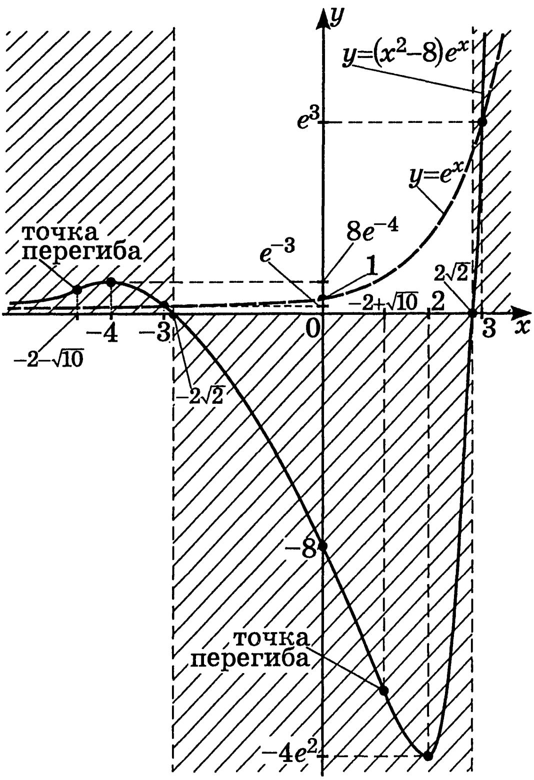
$= e^x(x^2 + 4x - 6)$;



е) Контрольные точки:

$x = 0$; $\quad y = -8$;
$x = -3$; $y = e^3$;
$x = 3$; $\quad y = e^{-3}$.

$x = 3$ и $x = -3$ — абсциссы точек пересечения асимптотической кривой $y = e^x$ и графика функции.

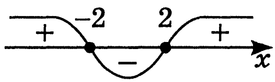

y
$y=(x^2-8)e^x$
e^3
$y=e^x$
$8e^{-4}$
e^{-3}
1
точка перегиба
$2\sqrt{2}$
$-2+\sqrt{10}$
2
-4
-3
0
3
x
$-2-\sqrt{10}$
$-2\sqrt{2}$
-8
точка перегиба
$-4e^2$

Решение тренировочной карточки 5

1. $y = (x^2 - 4)e^{1-x^2}$.

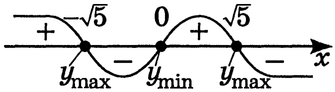
а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;

б)



в) $(x \to \infty) \Rightarrow \left(y \to \dfrac{x^2}{e^{x^2}} \to 0\right)$;

г) $y' = 2xe^{1-x^2} + (x^2 - 4) \cdot (-2x)e^{1-x^2} = 2x^{1-x^2} \cdot x \cdot (5 - x^2)$;



$y_{\max} = y\left(-\sqrt{5}\right) = (5 - 4)e^{1-5} = e^{-4}$;

$y_{\min} = y(0) = -4e$;

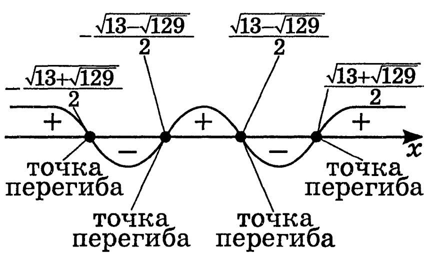
$y_{\max} = y\left(\sqrt{5}\right) = e^{-4}$;

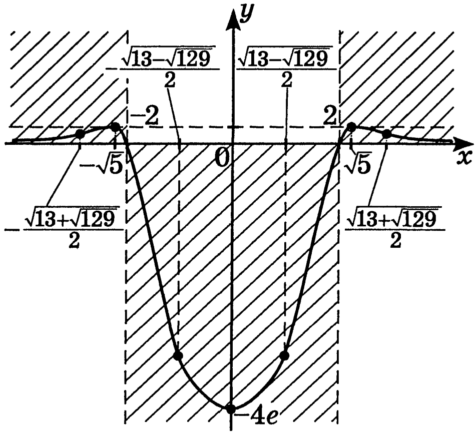
д) $f(-x) = f(x)$ — функция четная, график симметричен относительно оси ординат.

е) $y'' = 2\left[(5 - 3x^2)e^{1-x^2} + x(5 - x^2) \cdot (-2x) \cdot e^{1-x^2}\right] =$

$= 2e^{1-x^2}(2x^4 - 13x + 5)$;

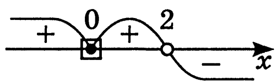
$y'' = 0; \quad \left(x^2\right)_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{129}}{4}$.





2. $y = \dfrac{2x^2}{2-x}$.

а) $D(f): \ x \neq 2;$

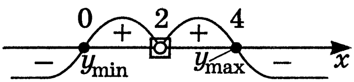
б) 

в) 1. $(x \to 2-0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 2+0) \Rightarrow (y \to -\infty).$

2. Разделим $2x^2$ на $-x+2$ с остатком, получим
$y = -2x - 4 + \dfrac{8}{2-x};$
$y = -2x - 4$ — асимптота и нет точек пересечения с графиком ($x \neq 0$).

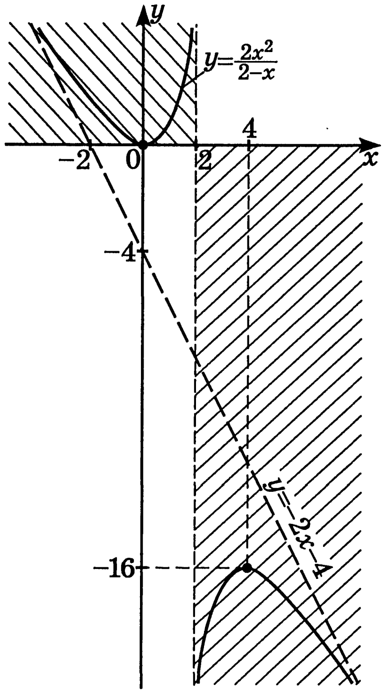
г) $y' = \dfrac{4x(2-x) - (-1)\cdot 2x^2}{(2-x)^2} =$

$= \dfrac{-2x(2x-4-x)}{(2-x)^2} = \dfrac{-2x(x-4)}{(2-x)^2}.$



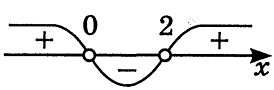
$$y_{\min} = y(0) = 0;$$

$$y_{\max} = y(4) = \frac{32}{-2} = -16.$$



3. $y = \dfrac{3}{2x(x-2)^3}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases};$

б) 

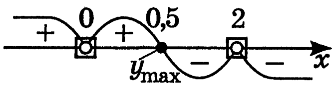
в) $(x \to 0 - 0) \Rightarrow (y \to \infty);$
$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to 2 - 0) \Rightarrow (y \to -\infty);$
$(x \to 2 + 0) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$

г) $$y' = \frac{-3\left(2(x-2)^3 + 3(x-3)^2 \cdot 2x\right)}{4x^2 \cdot (x-2)^2} =$$

$$= \frac{-6(x-2)^2 \cdot (x-2+3x)}{4x^2 \cdot (x-2)^2} = \frac{-12(2x-1)}{4x^2 \cdot (x-2)^2} =$$

$$= -\frac{3(2x-1)}{x^2 \cdot (x-2)^2};$$



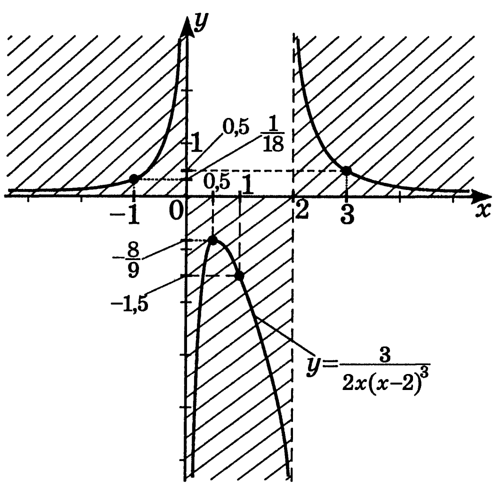
$$y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{8}{9}.$$

д) Контрольные точки:

$x = 3; \quad y = 0{,}5;$

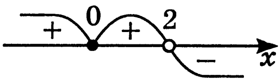
$x = -1; \; y = \dfrac{1}{18};$

$x = 1; \quad y = -1{,}5.$



4. $y = \dfrac{\cos^2 x}{2 - \cos x}$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;

б) 

Но $|\cos x| \leqslant 1$, т. е. $y \geqslant 0 \quad \forall x$.

$y = 0; \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k.$

в) $y = \dfrac{\cos^2 x}{2 - \cos x}$ — периодическая.

$T = 2\pi$, поэтому достаточно рассмотреть ее на $[0; 2\pi]$.

г) $$y' = \frac{-2\sin x \cdot \cos x \cdot (2 - \cos x) - \sin x \cdot \cos^2 x}{(2 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot (-4 + 2\cos x - \cos x)}{(2 - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \cos x \cdot (4 - \cos x)}{(2 - \cos x)^2}.$$

$$y' = 0; \quad -\sin x \cdot \cos x = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \pi n \end{array}\right.; \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

1. $y' > 0; \quad -\dfrac{1}{2}\sin 2x > 0; \quad \sin 2x < 0;$

   $\pi + 2\pi k < 2x < 2\pi + 2\pi k; \quad \dfrac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k;$

   $k = 0; \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi;$

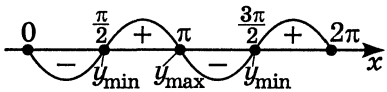
   $k = 1; \quad 1{,}5\pi < x < 2\pi.$

2. $y' < 0; \quad \sin 2x > 0;$

   $\pi + 2\pi k > 2x > 2\pi k; \quad \dfrac{\pi}{2} > \pi k > x > \pi k;$

   $k = 0; \quad \dfrac{\pi}{2} > x > 0;$

   $k = 1; \quad 1{,}5\pi > x > \pi.$



$$y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

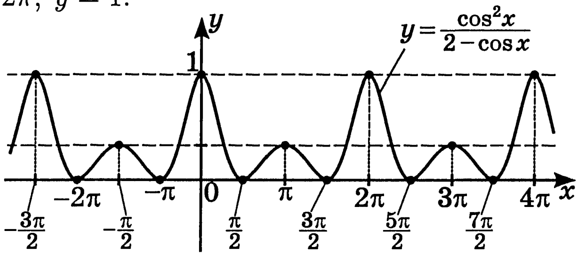
$$y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$y_{\max} = y(\pi) = \frac{1}{3}.$$

д) Контрольные точки:

$x = 0;\quad y = 1;$

$x = 2\pi;\ y = 1.$

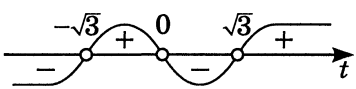


5. $e^{\frac{1}{x^3-3x}}$.

а) $D(f):\ \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}.$

Построим $t(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x}$.

б)



в) $(x \to -\sqrt{3} - 0) \Rightarrow (t \to -\infty);$

$(x \to -\sqrt{3} + 0) \Rightarrow (t \to \infty);$

$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (t \to \infty);$

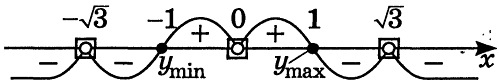
$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (t \to -\infty);$

$(x \to \sqrt{3} - 0) \Rightarrow (t \to -\infty);$

$(x \to \sqrt{3} + 0) \Rightarrow (t \to \infty);$

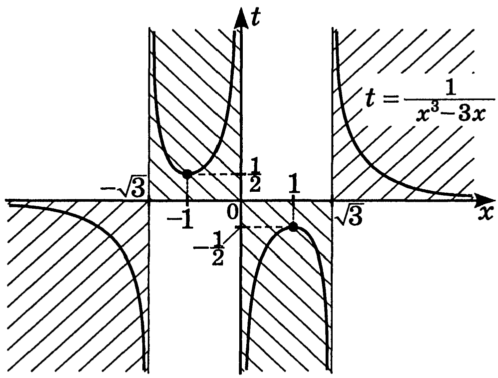
$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 0).$

г) $t' = \dfrac{-3(x^2-1)}{x^2(x^2-3)^2} = \dfrac{-3(x+1)(x-1)}{x^2(x^2-3)^2}$;



$t_{\min} = t(-1) = \dfrac{1}{2}$;

$t_{\max} = t(1) = -\dfrac{1}{2}$.



Теперь будем исследовать $y = e^{\frac{1}{x^3-3x}}$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$;

б) $y > 0 \quad \forall x \in D(f)$;

в) $(x \to -\sqrt{3} - 0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to -\sqrt{3} + 0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0 - 0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 0 + 0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to \sqrt{3} - 0) \Rightarrow (t \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to \sqrt{3} + 0) \Rightarrow (t \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 0) \Rightarrow (y \to 1)$.

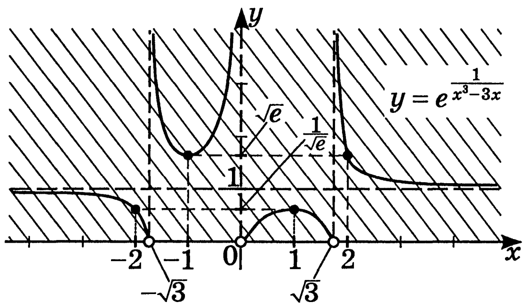
г) $y_{\min} = y(-1) = \sqrt{e}$;

$y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

д) Контрольные точки:

$x = 2;\quad y = \sqrt{e}$;

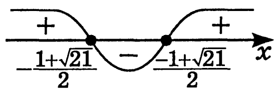
$x = -2;\ y = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.



Решение тренировочной карточки 6

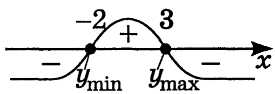
1. $y = e^{-x} \cdot (x^2 + x - 5)$.

а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;

б) 

в) $y' = (2x+1) \cdot e^{-x} + (x^2 + x - 5) \cdot (-1) \cdot e^{-x} =$

$= -e^{-x} \cdot (x^2 + x - 5 - 2x - 1) = -e^{-x} \cdot (x^2 - x - 6)$;

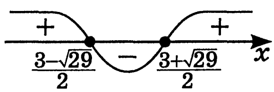


$y_{\min} = y(-2) = e^2 \cdot (4 - 2 - 5) = -3e^2 \approx -21$;

$y_{\max} = y(3) = e^{-3} \cdot (9 + 3 - 5) = 7e^{-3} \approx \frac{1}{3}$;

г) $y'' = e^{-x} \cdot (x^2 - x - 6) + (2x - 1) \cdot (-e^{-x}) =$

$= e^{-x} \cdot (x^2 - 3x - 5)$;



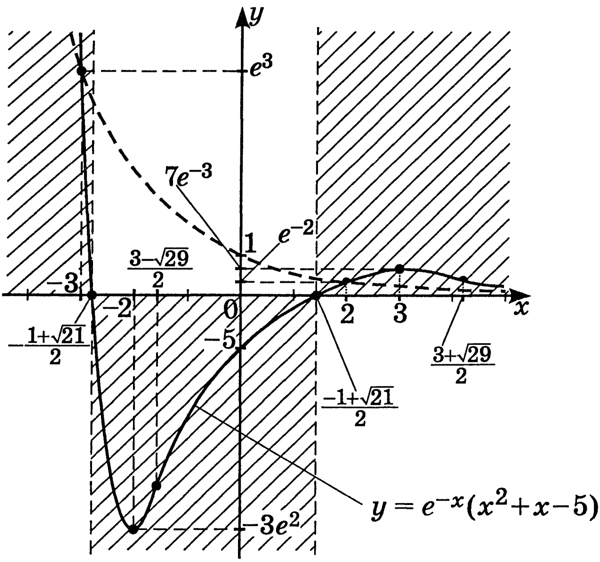
д) Контрольные точки:

$x = -3$; $y = e^3$

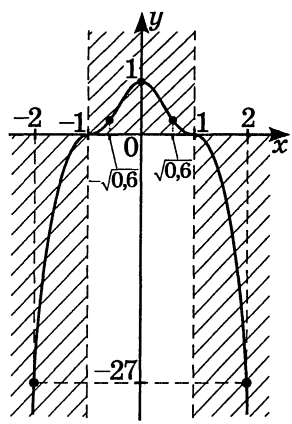
($x = -3$ — абсцисса точки пересечения асимптотической кривой $y = e^{-x}$ и графика функции);

$x = 2$; $y = e^{-2}$

($x = 2$ — абсцисса точки пересечения асимптотической кривой $y = e^{-x}$ и графика функции).

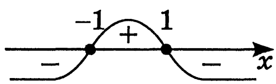


2. $y = (1 - x^2)^3$.

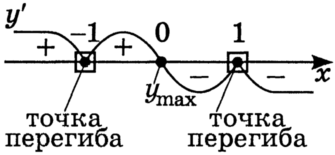


а) $D(f) = (-\infty; \infty)$;

б)



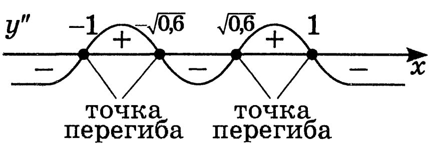
в) $y' = 3(1 - x^2) \cdot (-2x)$;



$y_{\max} = y(0) = 1$;

г) $y'' = 6(1 - x^2) \cdot (-2x)^2 + (-6) \cdot (1 - x^2)^2 =$

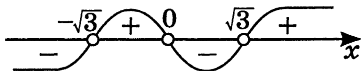
$= 6(1 - x^2) \cdot (4x^2 + 6x^2 - 6) = 12(1 - x^2)(5x^2 - 3)$;



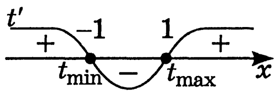
3. $y = \ln\left(x^3 - 3x\right)^2$.

а) $D(f): \begin{cases} x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -\sqrt{3} \\ x \neq 0 \end{cases}$.

б) Построим график вспомогательной функции $t(x) = x^3 - 3x$.



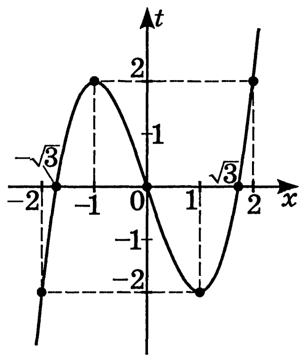
в) $t'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$;



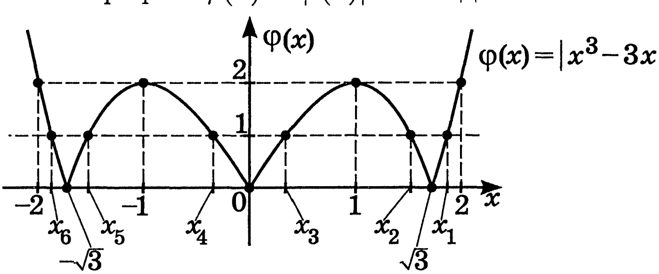
$t_{\max} = t(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = 2$;

$t_{\min} = t(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$.

г) Учтем, что $t(2) = 2$; $t(-2) = 2$.



д) Значит график $\varphi(x) = |t(x)|$ выглядит так:



$y = \ln x$ монотонно возрастает на $(0; \infty)$, а значит не меняет характера и $y = |\varphi(x)|$.

1. $y_{\max} = y(1) = 2\ln 2$.

   В силу четности $y(x) = 2\ln|x^3 - 3x|$ достаточно рассмотреть $y(x)$ только на $(0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$.

2. Рассмотрим уравнение $\varphi(x) = 1$.

   Корни $y(x)$ находятся на $(0; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$ так, что $x_3 \in (0; 1)$; $x_2 \in (1; \sqrt{3})$; $x_1 \in (-\sqrt{3}; 2)$ и далее учитывая четность $x_4 \in (-1; 0)$; $x_5 \in (-\sqrt{3}; -1)$; $x_6 \in (-2; -\sqrt{3})$.

е) $(x \to 0+0) \Rightarrow (\varphi \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$(x \to \sqrt{3}-0) \Rightarrow (\varphi \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

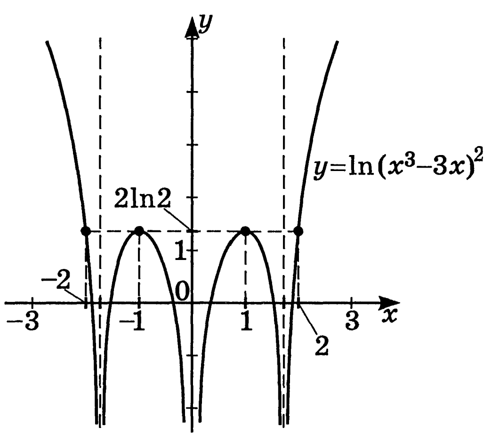
$(x \to \sqrt{3}+0) \Rightarrow (\varphi \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty)$.

Далее, используя симметрию, получим остальные вертикальные асимптоты.

ж) Контрольные точки:

$x = 2$; $y = 2\ln 2$;

$x = -2$; $y = 2\ln 2$.



4. $y = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$.

а) $D(f):\ \cos 2x \neq 0$;

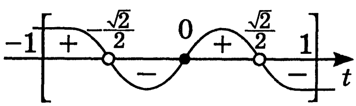
$x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k;\quad k \in \mathbb{Z}$;

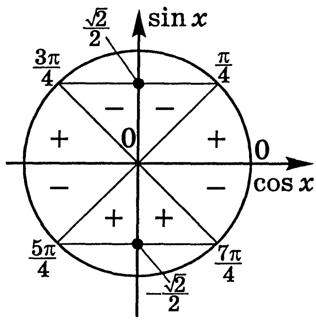
б) $y = f(x)$ — периодическая, $T = 2\pi$, поэтому достаточно рассмотреть ее только на $[0; 2\pi]$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{1 - 2\sin^2 x}$;

$y = 0;\qquad x = \pi k.$

Пусть $t = \sin x$.





г) $\left(x \to \dfrac{\pi}{4} - 0\right) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$\left(x \to \dfrac{\pi}{4} + 0\right) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$\left(x \to \dfrac{3\pi}{4} - 0\right) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

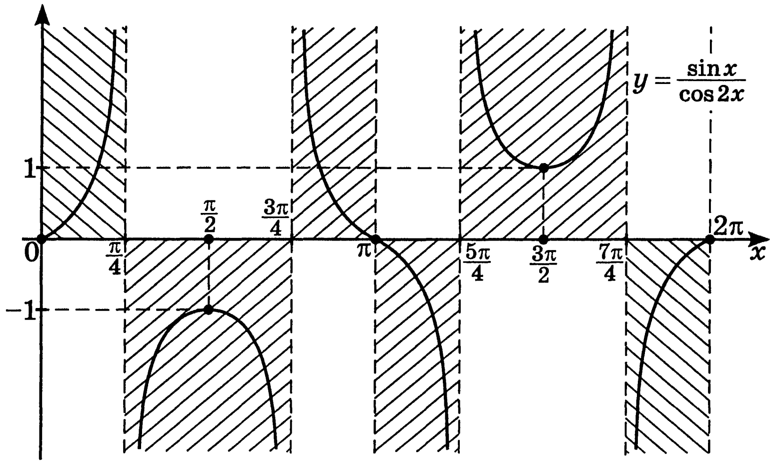
$\left(x \to \dfrac{3\pi}{4} + 0\right) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$\left(x \to \dfrac{5\pi}{4} - 0\right) \Rightarrow (y \to -\infty)$;

$\left(x \to \dfrac{5\pi}{4} + 0\right) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$\left(x \to \dfrac{7\pi}{4} - 0\right) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$\left(x \to \dfrac{7\pi}{4} + 0\right) \Rightarrow (y \to -\infty)$.



д) $f(-x) = -f(x)$ — нечетная, график центрально-симметричен относительно начала координат.

е) $$y' = \frac{\cos x(1 - 2\sin^2 x) - \sin x(-4\cos x \cdot \sin x)}{(1 - 2\sin^2 x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(1 - 2\sin^2 x + 4\sin^2 x)}{(1 - 2\sin^2 x)^2} = \frac{\cos x(1 + 2\sin^2 x)}{(1 - 2\sin^2 x)^2};$$

$$y' = 0; \quad \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

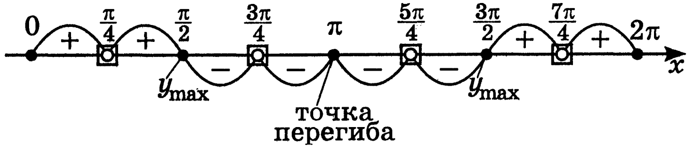
1. $y' > 0; \quad \cos x > 0; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k > x > -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$k = 0; \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2};$

$k = 1; \quad \frac{5\pi}{2} > x > \frac{3\pi}{2}.$

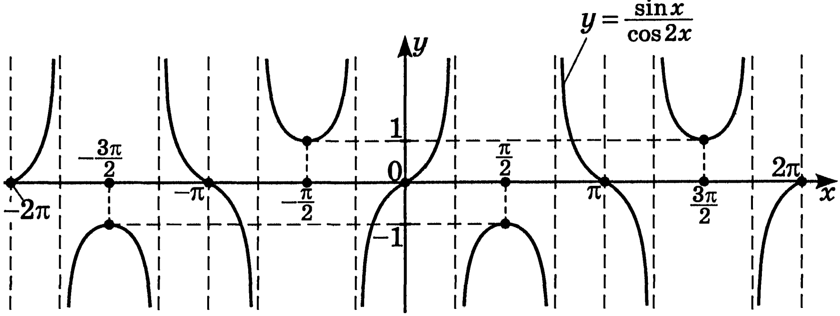
2. $y' < 0; \quad \cos x < 0; \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi k > x > \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$

$k = 0; \quad \frac{3\pi}{2} > x > \frac{\pi}{2};$



$$y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

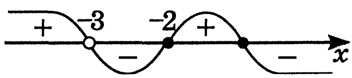
$$y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1.$$



5. $y = e^{\frac{4-x^2}{x+3}}$.

а) $D(f): x \neq -3$.

Построим сначала график $t(x) = \dfrac{4-x^2}{x+3}$.

б) 

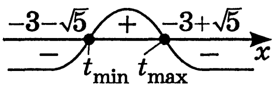
в) 1. $(x \to -3-0) \Rightarrow (t \to \infty)$;
$(x \to -3+0) \Rightarrow (t \to -\infty)$.

2. Разделим $-x^2+4$ на $x+3$ с остатком, получим: $y = -x+3-\dfrac{5}{x+3}$; $y = -x+3$ – наклонная асимптота без точек пересечения с графиком.

г) $t' = \dfrac{-2x \cdot (x+3) - (4-x) \cdot 1}{(x+3)^2} =$

$$= \frac{-2x^2 - 6x + x^2 - 4}{(x+3)^2} = \frac{-2x^2 - 6x - 4}{(x+3)^2} = -\frac{x^2 + 6x + 4}{(x+3)^2};$$

$t' = 0; \quad x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5};$



$$t_{\min} = \frac{4 - \left(-3 - \sqrt{5}\right)^2}{-3 - \sqrt{5} + 3} =$$

$$= \frac{4 - 9 - 6\sqrt{5} - 5}{-\sqrt{5}} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} + 6;$$

$$t_{\max} = \frac{4 - \left(-3 + \sqrt{5}\right)^2}{-3 + \sqrt{5} + 3} =$$

$$= \frac{4 - 9 + 6\sqrt{5} - 5}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5} - 10}{\sqrt{5}} = 6 - 2\sqrt{5}.$$

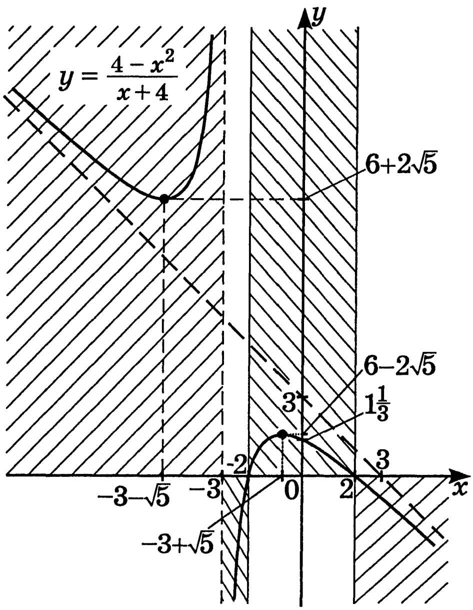
д) Теперь рассмотрим $y = e^{\frac{4-x^2}{x+3}}$.

$$\begin{array}{lll}
(x \to -3-0) \Rightarrow (t \to \infty) & & \Rightarrow (y \to \infty); \\
(x \to -3+0) \Rightarrow (t \to -\infty) & & \Rightarrow (y \to 0); \\
(x \to \infty) & \Rightarrow (t \to -x+3) & \Rightarrow (y \to e^{-x});
\end{array}$$

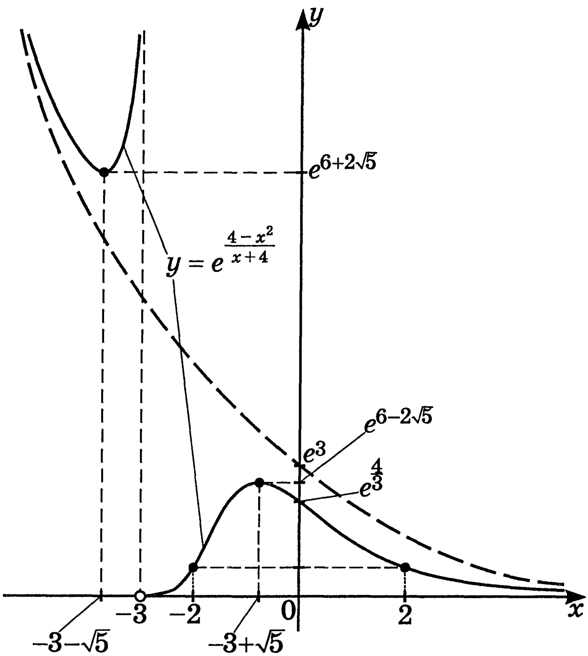
е) $y > 0 \quad \forall x \in D(f)$.

ж) Контрольные точки:

$$\begin{array}{ll}
x = -2; & y = 1; \\
x = 2; & y = 1; \\
x = 0; & y = e^{\frac{4}{3}}; \\
x = -3 - \sqrt{5}; & y = e^{2\sqrt{5}+6} = y_{\min}; \\
x = -3 + \sqrt{5}; & y = e^{6-2\sqrt{5}} = y_{\max}.
\end{array}$$



y
$y = \frac{4-x^2}{x+4}$
$6+2\sqrt{5}$
$6-2\sqrt{5}$
3
$1\frac{1}{3}$
-2
3
$-3-\sqrt{5}$
-3
0
2
x
$-3+\sqrt{5}$



y
$e^{6+2\sqrt{5}}$
$y = e^{\frac{4-x^2}{x+4}}$
$e^{6-2\sqrt{5}}$
e^3
$e^{\frac{4}{3}}$
-3
-2
0
2
x
$-3-\sqrt{5}$
$-3+\sqrt{5}$

Применение производных

Применение производных в элементарной математике весьма разнообразно. Рассмотрим еще несколько разделов математики, в которых это достаточно эффективно.

Доказательство тождеств

1. Докажем известное тригонометрическое тождество

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$; $\quad D(f) = (-\infty; \infty)$.

При $t(x) = \operatorname{arctg} x \quad t'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

При $g(x) = \operatorname{arcctg} x \quad g'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

$f'(x) = t'(x) + g'(x)$, тогда рассмотрим $f'(x) = 0$.

По следствию из теоремы 6 (стр. 233) $f(x) = c$.

Рассмотрим значение при $x = 0 \in D(f)$:

$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$,

т. е. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

2. $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = -\pi$ на $(-\infty; -1)$.

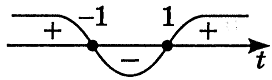
Пусть $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{1+x^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{|x^2-1|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0.$$

Пусть $t(x) = (x+1)(x-1)$



На $(-\infty; -1)$ $\quad |x^2 - 1| = x^2 - 1$,

т. е. $f'(x) = 0$, значит $f(x) = c$.

Выберем значение $x = -\sqrt{3} \in (-\infty; -1)$ (для этого значения известны значения arc-функций).

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = 2 \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin \frac{-2\sqrt{3}}{1+3} =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\pi,$$ что и требовалось доказать.

Примечание. На $(1; \infty)$ $\quad c = \pi$,

т. е. $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ на $(1; \infty)$.

Упрощение выражений

1. $s_n(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2}$.

Рассмотрим $f(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1}$.

$f_n(x) = \dfrac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2}$ (сумма первых n членов геометрической прогрессии, $x \neq 1$, где $g = x^2$).

Очевидно, что

$s_n(x) = f'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2}$,

т. е. $f_n'(x) = \left(\dfrac{x - x^{2x+1}}{1 - x^2}\right)' =$

$$= \frac{\left(1 - (2n+1)x^{2n}\right) \cdot \left((1 - x^2) + 2x \cdot (x - x^{2n+1})\right)}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 - (2n+1)x^{2n} - x^2 + (2n+1)x^{2n+2} + 2x^2 - 2x^{2n+2}}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1 + x^2) - (2n+1)x^{2n} + (2n-1)x^{2n+2}}{(1 - x^2)^2}.$$

Итак, $s_n(x) = \dfrac{(1 + x^2) - (2n+1)x^{2n} + (2n-1)x^{2n+2}}{(1 - x^2)^2}$.

Примечание. Из данного упрощения можно получить некоторые не очевидные числовые тождества.

Например, пусть $x = 2$. Тогда при $n = 50$

$s_{50}(2) = 1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2^6 \ldots + 99 \cdot 2^{98} =$

$$= \frac{(1 + 4) - 101 \cdot 2^{100} + 99 \cdot 2^{102}}{(1 - 4)^2} =$$

$$= \frac{5 + 2^{100} \cdot (396 - 101)}{9} = \frac{5 + 295 \cdot 2^{100}}{9} = \frac{5}{9} \cdot \left(1 + 59 \cdot 2^{100}\right).$$

Но s_{50} можно выразить иначе:

$s_{50} = 1 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4^3 + \ldots + 99 \cdot 4^{49} = \dfrac{5}{9} \cdot \left(1 + 59 \cdot 2^{100}\right)$ — получили интересное числовое тождество.

Доказательство неравенств

1. $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ на $[0; \infty)$.

Пусть $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$,

тогда $f'(x) = -\sin x + x$;

$f(x)$ непрерывная и имеет конечную производную.

Так как при рассмотрении замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ было доказано неравенство $\sin x < x$ на $(0; \infty)$, то $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0; \infty)$.

Этого достаточно для справедливости неравенства $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ (так как $f(0) = 0$ и $f(x) \uparrow$, то $f(x) \geqslant 0$).

2. $e^{x-1} \geqslant x$.

$f(x) = e^{x-1}$ — непрерывная и имеет конечную производную.

$f'(x) = e^{x-1} > 0$ при любом x.

При $x_0 = 1 \quad f'(x) = 1$.

Уравнение касательной

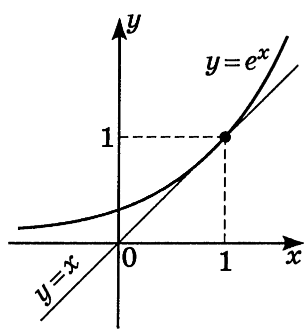
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

В данном случае

$y = 1 + 1 \cdot (x - 1) = x$,

т. е. в точке $(1; 1)$

$y = x$ — касательная к $y = e^{x-1}$.



Так как $f'(x) > 0$ для $\forall x$, то выясним выпуклость.

Найдем знак y'': $y'' = e^{x-1} > 0$ — значит, выпуклость вниз.

Тогда $e^{x-1} \geqslant x$, что и требовалось доказать.

Примечание. Из этого неравенства можно получить классическое неравенство Коши-Буняковского:
$\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ $(x_1,x_2,\ldots,x_n>0)$.

Пусть $s_n=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, тогда используя неравенство $e^{x-1}\geqslant x$ получим

$$\frac{x_1}{s_n}\leqslant e^{\frac{x_1}{s_n}-1} \quad \left(x=\frac{x_1}{s_n}\right);$$

$$\frac{x_2}{s_n}\leqslant e^{\frac{x_2}{s_n}-1} \quad \left(x=\frac{x_2}{s_n}\right);$$

$$\frac{x_n}{s_n}\leqslant e^{\frac{x_n}{s_n}-1} \quad \left(x=\frac{x_n}{s_n}\right).$$

Почленно перемножая эти неравенства, получим

$$\frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}{(s_n)^n}\leqslant e^{\frac{x_1}{s_n}+\frac{x_2}{s_n}+\ldots+\frac{x_n}{s_n}-n}.$$

Но $\dfrac{x_1}{s_n}+\dfrac{x_2}{s_n}+\ldots+\dfrac{x_n}{s_n}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{s_n}=n$,

тогда $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\leqslant s_n^n\cdot e^{n-n}$,

т. е. $s_n^n\geqslant x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$, значит

$s_n\geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$.

Получили $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$,

что и требовалось доказать.

3. Сравните числа $\log_{61}62$ и $\log_{62}63$.

Рассмотрим функцию $y=f(x)=\log_{x-1}x$ на $(2;\infty)$.

$f(x)$ можно представить как $y=\dfrac{\ln x}{\ln(x-1)}$.

$$y'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\cdot\ln x}{\ln^2(x-1)}=\frac{(x-1)\ln(x-1)-x\ln x}{x(x-1)\ln^2(x-1)}.$$

$x(x-1)\ln^2(x-1) > 0$ на $(2;\infty)$.

$\ln(x-1)^{x-1} - \ln x^x < 0$, так как $x > 2$.

Действительно, пусть $y = t(x) = x^x = e^{x\ln x}$.

$t'(x) = e^{x\ln x}\cdot(1\cdot\ln x + \dfrac{x}{x}) = e^{x\ln x}(1+\ln x) > 0$ на $(2;\infty)$, значит $y = t(x)$ — возрастающая.

Отсюда следует, что $\ln(x-1)^{x-1} - \ln x^x < 0$, тогда $y'(x) = f'(x) < 0$, т. е. $y = f(x) = \log_{x-1} x$ — убывающая на $(2;\infty)$.

Полагая $x = 62$, получаем $\log_{61} 62 > \log_{62} 63$, что и требовалось доказать.

Примечание. Есть и другие способы решения этого вопроса[20].

4. $36x^4 - 43x^2 + 25x - 4 = 0$.

Известно следующее истинное утверждение. Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ имеет своими корнями лишь корни $f(x)$, имеющие кратность большую или равную 2.

Каждый из кратных корней $f(x)$ является корнем наибольшего общего делителя с кратностью на единицу ниже.

Остальные некратные корни корнями наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ не являются.

Отсюда следует правило для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$.

Необходимо найти:

а) $f'(x)$;

б) наибольший общий делитель $f(x)$ и $f'(x)$;

в) корни наибольшего общего делителя для $f(x)$ и $f'(x)$.

Если наибольший общий делитель $f(x)$ и $f'(x)$ есть постоянная, то $f(x) = 0$ кратных корней не имеет.

---

[20] Подробнее см. книгу А. Х. Шахмейстер «Логарифмы», СПб, Петроглиф, 2005 г., стр. 85.

Посмотрим, как реализуется этот алгоритм.

Пусть $f(x) = 36x^4 - 43x^2 + 25x - 4$;

$f'(x) = 144x^3 - 86x + 25$.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 36x^4 - 43x^2 + 25x - 4 \\ 36x^4 - \dfrac{43}{2}x^2 + \dfrac{25}{4}x \end{array} & \begin{array}{l} 144x^3 - 86x + 25 \\ \hline \dfrac{1}{4}x \end{array} \\ \hline -\dfrac{43}{2}x^2 + \dfrac{25\cdot 3}{4}x - 4 & \end{array}$$

Далее деление невозможно — степень делителя выше степени остатка.

$-\dfrac{43}{2}x^2 + \dfrac{75}{4}x - 4 = -\dfrac{1}{4}(86x^2 - 75x + 16)$;

$86x^2 - 75x + 16 = (43x - 16)(2x - 1)$.

Тогда общий делитель — или $(43x - 16)$, или $(2x - 1)$. Проверим.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 144x^3 \qquad\quad - 86x + 25 \\ 144x^3 - 72x^2 \qquad\qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} 2x - 1 \\ \hline 72x^2 + 36x - 25 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 72x^2 - 86x + 25 \\ 72x^2 - 36x \qquad \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} -50x + 25 \\ -50x + 25 \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} 36x^4 \qquad\quad - 43x^2 + 25x - 4 \\ 36x^4 - 36x^3 + 9x^2 \qquad\qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} 4x^2 - 4x + 1 \\ \hline 9x^2 + 9x - 4 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} 36x^3 - 52x^2 + 25x - 4 \\ 36x^3 - 36x^2 + 9x \qquad \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{r} -16x^2 + 16x - 4 \\ -16x^2 + 16x - 4 \end{array} & \end{array}$$

Итак, $(2x - 1)$ — общий делитель, значит $(36x^4 - 43x^2 + 25x - 4)$ делится на $(2x - 1)^2$, но $9x^2 + 9x - 4 = (3x - 1)(3x + 4)$.

Ответ: $\left\{-1\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right\}$ — множество корней уравнения $36x^4 - 43x^2 + 25x - 4 = 0$.

Решение уравнений

1. $\sqrt{2^x+2}+\sqrt{2^x}+\sqrt{2^x-1}=1+\sqrt{3}.$

$D(y)=[0;\infty);$

Пусть $f(x)=\sqrt{2^x+2}+\sqrt{2^x}+\sqrt{2^x-1};$

$$f'(x)=\frac{(2^x+2)'}{2\sqrt{2^x+2}}+\frac{(2^x)'}{2\sqrt{2^x}}+\frac{(2^x-1)'}{2\sqrt{2^x-1}}=$$

$$=\frac{2^x\ln 2}{2\sqrt{2^x+2}}+\frac{2^x\ln 2}{2\sqrt{2^x}}+\frac{2^x\ln 2}{2\sqrt{2^x-1}}>0 \text{ на } (0;\infty).$$

Значит $f(x)$ — строго возрастающая на $[0;\infty)$, т. е. каждое свое значение она принимает только один раз.

Отсюда следует, что если исходное уравнение имеет решение, то оно единственное.

Так как $D(f)=[0;\infty)$, то

$f(0)=f_{\text{наим}}=\sqrt{2^0+2}+\sqrt{2^0}+\sqrt{2^0-1}=\sqrt{3}+1,$

но это значит, что $x=0$ — единственный корень исходного уравнения.

2. $\sqrt{3-2x}+\sqrt{2x-1}=4x^2-8x+6.$

$D(y)=[0{,}5;1{,}5].$

Пусть $f(x)=\sqrt{3-2x}+\sqrt{2x-1}.$

$$f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}+\frac{2}{2\sqrt{2x-1}};$$

$f'=0$, если $\sqrt{3-2x}=\sqrt{2x-1};$

$3-2x=2x-1; \quad x=1.$

При $1{,}5 > x > 1 \quad f'(x) < 0$;
при $1 > x > 0{,}5 \quad f'(x) > 0$.

$f_{\max} = f_{\text{наиб}} = f(1) = \sqrt{3 - 2 \cdot 1} + \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 2$.

Пусть $g(x) = 4x^2 - 8x + 6 = 4(x-1)^2 + 2$.

При $x > 1 \quad g(x)$ возрастающая;
при $x < 1 \quad g(x)$ убывающая;
при $x = 1 \quad g(x) = 2 = g_{\text{наим}}$

$\left(y = ax^2 + bx + c, \quad x_0 = -\dfrac{b}{2a}, \quad y_0 = ax_0^2 + bx^2 + c, \right.$ при $\left. a > 0 \quad y_0 = y_{\text{наим}} \right)$.

Итак, $\begin{cases} f(x) \leqslant 2 \\ g(x) \geqslant 2 \end{cases}$, при $x = 1 \quad f(x) = g(x)$.

Значит $x = 1$ — единственный корень уравнения.

3. $e^x - e^{-x} = 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Пусть $f(x) = e^x - e^{-x}$; $\quad g(x) = 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Функции определены и непрерывны для $\forall x$ и имеют конечные производные на $(-\infty; \infty)$.

$f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$ для $\forall x$;

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

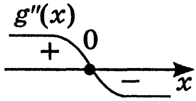
$$= \frac{2}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \text{ для } \forall x.$$

Заметим, что корнями исходного уравнения (если они есть) являются абсциссы точек пересечения или касания графика функций $f(x)$ и $g(x)$.

В данном случае эти функции экстремумов не имеют, и использовать их для решения уравнения нельзя.

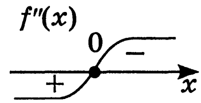
Перейдем к решению уравнения с других позиций.

$$g''(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{2x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$



Тогда $x = 0$ — точка перегиба. Так как $g'(x) > 0$, то при $x > 0$ выпуклость вверх (все точки графика ниже касательной);

при $x < 0$ выпуклость вниз (все точки графика выше касательной).



$$f''(x) = (e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x}.$$

Тогда $x = 0$ — точка перегиба, и так как $f'(x) > 0$, то при $x > 0$ выпуклость вниз, при $x < 0$ выпуклость вверх.

Напишем уравнение касательной для $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в точке $x = 0$.

Очевидно, что $y = 2x$ — касательная.

$g(0) = 0$; $g'(0) = \dfrac{2}{\sqrt{1+0}} = 2$, т. е. $y = 0 + 2(x - 0)$; $y = 2x$;

$f(0) = 0$; $f'(0) = e^0 + e^{-0} = 2$,

т. е. $y = 0 + 2(x - 0)$; $y = 2x$

(т. е. $y = 2x$ — их общая касательная в точке $x = 0$).

Кстати, отсюда следует, что $x = 0$ — корень уравнения.

При $x > 0$ точки графика $f(x)$ выше касательной, а точки $g(x)$ ниже, значит пересечения графиков нет.

При $x < 0$ точки графика $f(x)$ ниже касательной, а точки графика $g(x)$ выше, значит общих точек тоже нет.

Итак, уравнение имеет единственное решение — $x = 0$.

Тренировочная работа 10

1. Докажите тождества:

а) $2\operatorname{arcctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ на $[1; \infty)$;

б) $2\operatorname{arcctg} x - \arccos \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$ на $[-1; 1]$.

2. Найдите формулу суммы $s_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$ $(x \neq 1)$ и докажите числовое тождество

$3 + 18 + 81 + \ldots + 20 \cdot 3^{20} = \dfrac{1}{4} \cdot \left(13 \cdot 3^{22} + 3\right)$.

3. Докажите, что $e^x > 1 + x \quad (\forall x > 0)$.

4. Что больше: $\cos 2004$ или $1 + \cos 2005$?

5. Сравните $\log_{42} 41$ и $\log_{41} 40$.

6. Решите уравнение $72x^4 - 114x^3 + 29x^2 - 44x - 12 = 0$.

7. Что больше: $\lg^2 11 + \lg^2 9$ или $\lg 99$?

Решение тренировочной работы 10

1. Докажите тождества:

а) $2\operatorname{arcctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ на $[1;\infty)$;

Пусть $f(x) = 2\operatorname{arcctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ на $[1;\infty)$.

1. $f(1) = 2\operatorname{arcctg} 1 + \arcsin \dfrac{2\cdot 1}{1+1^2} =$

$= 2\operatorname{arcctg} 1 + \arcsin 1 = 2\cdot\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \pi.$

2. Пусть $x > 1$, тогда $(2\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{2}{1+x^2}$.

$$\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)\cdot 2\cdot(1-x^2)}{|1-x^2|\cdot(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|\cdot(1+x^2)} = -\frac{2}{1+x^2},$$

так как $|1-x^2| = \begin{cases} 1-x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2-1, & x > 1 \text{ или } x < -1 \end{cases}$.

Тогда $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} - \dfrac{2}{1+x^2} = 0.$

Раз $f'(x) = 0$ на $(1;\infty)$, значит $f(x) \equiv c$ (тождество).

Чтобы найти значение постоянной, необходимо вычислить значение функции в любой удобной точке области рассмотрения, т. е. $x > 1$.

Пусть $x = \sqrt{3}$, тогда

$$f\left(\sqrt{3}\right) = 2\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \arcsin\frac{2\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi,$$

значит $f(x) = 2\operatorname{arcctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$ для $\forall x \in [1;\infty)$, что и требовалось доказать.

б) $2\operatorname{arcctg} x - \arccos\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$ на $[-1;1]$.

Пусть $f(x) = 2\operatorname{arcctg} x - \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$ на $[-1;1]$.

1. $f(1) = 2\cdot\operatorname{arcctg} 1 - \arccos\dfrac{2\cdot 1}{1+1} =$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4} - \arccos 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $f(-1) = 2\cdot\operatorname{arcctg}(-1) - \arccos\dfrac{2\cdot(-1)}{1+(-1)^2} =$

$$= 2\cdot\frac{3\pi}{4} - \arccos(-1) = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

3. Пусть $-1 < x < 1$.

$$f'(x) = 2\cdot\frac{-1}{1+x^2} - \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1+x^2)}{|1-x^2|}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = 0,$$

так как $|1-x^2| = 1-x^2$ на $(-1;1)$.

4. $f'(x) = 0$ на $(-1;1)$, значит $f(x) \equiv c$ на $(-1;1)$. Возьмем любое значение из этого интервала, например, $x = 0$.
$f(0) = 2 \cdot \operatorname{arcctg} 0 - \arccos \dfrac{2 \cdot 0}{1 + 0^2} = 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
Итак, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ на $[-1;1]$, что и требовалось доказать.

2. Найдите формулу суммы $s_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$ $(x \neq 1)$ и докажите числовое тождество

$$3 + 18 + 81 + \ldots + 20 \cdot 3^{20} = \frac{1}{4} \cdot \left(13 \cdot 3^{22} + 3\right).$$

а) $s_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$.

Рассмотрим $g_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

$g_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Умножим обе части на $x \neq 0$:

$xg_n'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$, значит $s_n(x) = x \cdot g_n'(x)$.

Но $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Тогда

$$g_n'(x) = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{(n+1) \cdot x^n \cdot (x - 1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

$$x \cdot g_n'(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} = s_n(x)$$

(при $n \neq 1, \quad x \neq 0$).

При $x = 1$ $\quad s_n(1) = \dfrac{n+1}{2} \cdot n$; $\quad$ при $x = 0$ $\quad s_n(0) = 0$.

Итак, $s_n(x) = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.

б) Для доказательства числового тождества

$$3 + 18 + 81 + \ldots + 20 \cdot 3^{20} = \frac{1}{4} \cdot \left(13 \cdot 3^{22} + 3\right)$$

используем $s_n(x)$.

Положим $x = 3$, $n = 20$, тогда $s_n(x)$ будет иметь вид

$$x + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + 20 \cdot 20 \cdot 3^{20} = \frac{20 \cdot 3^{20+2} - 21 \cdot 3^{21} + 3}{(3-1)^2} =$$

$$= \frac{3^{21} \cdot (60 - 21) + 3}{4} = \frac{13 \cdot 3^{22} + 3}{4} = \frac{1}{4}\left(13 \cdot 3^{22} + 3\right),$$

что и требовалось доказать.

3. Докажите, что $e^x > 1 + x \quad (\forall x > 0)$.

Пусть $y = e^x$ на $[0; b]$.

По теореме Лагранжа $\left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\text{, где } c \in (a; b)\right)$:

$$\frac{e^b - e^0}{b - 0} = e^c.$$

Так как $e^c > 1$ для $\forall c > 0$, то $\dfrac{e^b - 1}{b} > 1$, т.е. $e^b > 1 + b$ для $\forall b > 0$.

Тогда $e^x > 1 + x$ для $\forall x \in (0; \infty)$, что и требовалось доказать.

4. Что больше: $\cos 2004$ или $1 + \cos 2005$?

Пусть $f(x) = x + \cos x$;

$f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0 \ (\forall x)$,

причем $f'(x) = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}$.

Значит $f(x)$ — возрастает на $(-\infty; \infty)$,

т. е. $f(2004) < f(2005)$;

$2004 + \cos 2004 < 2005 + \cos 2005$; $\quad \cos 2004 < 1 + \cos 2005$, что и требовалось доказать.

5. Сравните $\log_{42} 41$ и $\log_{41} 40$.

Пусть $f(x) = \log_x(x-1)$ на $(1;\infty)$.

$f(x)$ можно представить в виде $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-1}\cdot\ln x - \frac{1}{x}\cdot\ln(x-1)}{\ln^2 x} = \frac{x\ln x - (x-1)\cdot\ln(x-1)}{x(x-1)\ln^2 x}.$$

Так как $x(x-1)\ln^2 x > 0$ на $(1;\infty)$,

то $x\ln x > (x-1)\ln(x-1)$ на $(1;\infty)$.

Докажем это. Пусть $t(x) = x^x = x^{x\ln x}$;

$$t'(x) = e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + \frac{x}{x}\right) = e^{x\ln x}\cdot(1+\ln x) > 0 \text{ на } (1;\infty).$$

Тогда $t(x)$ возрастает на $(1;\infty)$, и $x\ln x > (x-1)\ln(x-1)$, значит $f'(x) > 0$, тогда $f(x)$ возрастает на $(1;\infty)$.

Значит $f(x) = \log_x(x-1)$ возрастает на $(1;\infty)$.

Пусть $x = 41$, тогда $\log_{42} 41 > \log_{41} 40$, что и требовалось доказать.

6. Решите уравнение $72x^4 - 114x^3 + 29x^2 - 44x - 12 = 0$.

а) Попытаемся найти общие корни для

$f(x) = 72x^4 - 114x^3 + 29x^2 - 44x - 12$ и

$f'(x) = 288x^3 - 342x^2 + 58x + 28 =$

$= 2\left(144x^3 - 171x^2 + 29x + 14\right)$.

б) Разделим многочлены

$$\begin{array}{r|l}
72x^4 - 114x^3 + 29x^2 + 28x - 12 & 144x^3-171x^2+29x+14 \\
-\ \ 72x^4 - \frac{171}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^2 + 7x & \hline \frac{1}{2}x - \frac{19}{96} \\
\hline
-\ \ -\frac{57}{2}x^3 + \frac{29}{2}x^2 + 21x - 12 & \\
-\frac{57}{2}x^3 + \frac{57\cdot19}{32}x^2 - \frac{29\cdot19}{96}x - \frac{7\cdot19}{48} & \\
\hline
-\frac{619}{32}x^2 + \frac{2567}{96}x - \frac{443}{48} &
\end{array}$$

$$-\frac{619}{32}x^2+\frac{2567}{96}x-\frac{443}{48}=-\frac{1}{96}\cdot\left(1857x^2-2567x+886\right).$$

Решим уравнение $1857x^2-2567x+886=0$;

$$x_{1,2}=\frac{2567\pm\sqrt{2567^2-4\cdot1857\cdot886}}{2\cdot1857};\quad \left[\begin{aligned}x&=\frac{2}{3}\\x&=\frac{443}{619}\end{aligned}\right.,$$

т. е. $1857x^2-2567x+886=(3x-2)(619x-443)$.

Либо $3x-2$, либо $619x-443$ является кратным делителем $f(x)$. Проверим $((3x-2)^2=9x^2-12x+4)$:

$$\begin{array}{r|l}
72x^4-114x^3+29x^2+28x-12 & 9x^2-12x+4\\
\underline{72x^4-96x^3+32x^2} & \overline{8x^2-2x-3}\\
-18x^3-3x^2+28x & \\
\underline{-18x^3+24x^2-8x} & \\
-27x^2+36x-12 & \\
\underline{-27x^2+36x-12} &
\end{array}$$

$8x^2-2x-3=0$;

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{8}=\frac{1\pm5}{8};\quad \left[\begin{aligned}x&=\frac{3}{4}\\x&=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right..$$

Итак, уравнение имеет множество корней $\left\{-\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right\}$, где $x=\frac{2}{3}$ — кратный корень.

7. Что больше: $\lg^2 11+\lg^2 9$ или $\lg 99$?

Пусть $\lg^2 11+\lg^2 9<\lg 99=\lg 11+\lg 9$;

$$\lg^2 11-\lg 11+\lg^2 9-\lg 9<0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\lg^2 11-\lg 11+\frac{1}{4}+\lg^2 9-\lg 9+\frac{1}{4}<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\lg 11-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\lg 9-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(\lg 11-\lg\sqrt{10}\right)^2+\left(\lg 9-\lg\sqrt{10}\right)^2<\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\lg^2\frac{11}{\sqrt{10}}+\lg^2 9\sqrt{10}<\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим $f(x) = \lg^2 x$.

$y' = \dfrac{2\lg x}{x} \cdot \lg e$, так как

$$y'' = \frac{\frac{2}{x}\lg e \cdot x - 2\lg x}{x^2}\lg e = \frac{2\lg\frac{e}{x}}{x^2} \cdot \lg e \quad \text{при } x > 3.$$

$y'' < 0$, т. е. $y'(x)$ — убывающая.

Докажем, что тогда $\forall a, b > 0 \ \ (a < b)$

$f(a) + f(b) < 2 \cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ (выпукла вверх).

По теореме Лагранжа

$$-\begin{array}{l|l} f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - f(a) = f'(\alpha)\cdot\dfrac{b-a}{2} & \left(a < \alpha < \dfrac{a+b}{2}\right) \\ f(b) - f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f'(\beta)\cdot\dfrac{b-a}{2} & \left(\dfrac{a+b}{2} < \beta < b\right) \\ \hline \end{array}$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - (f(a) + f(b)) = \frac{b-a}{2} \quad \Big(f'(\alpha - f'(\beta) > 0 \ \ (\alpha < \beta)\Big).$$

Тогда $2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > f(a) + f(b)$,

значит $\lg^2\dfrac{11}{\sqrt{10}} + \lg^2\dfrac{9}{\sqrt{10}} < 2\lg^2\dfrac{11+9}{2\sqrt{10}} = \dfrac{1}{2}$,

т. е. $\lg^2\dfrac{11}{\sqrt{10}} + \lg^2\dfrac{9}{\sqrt{10}} < \dfrac{1}{2}$.

Тогда $\lg^2 11 + \lg^2 9 < \lg 99$, что и требовалось выяснить.

Методы приближенного вычисления корней уравнения

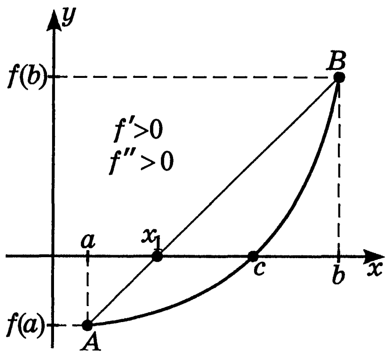
Метод хорд

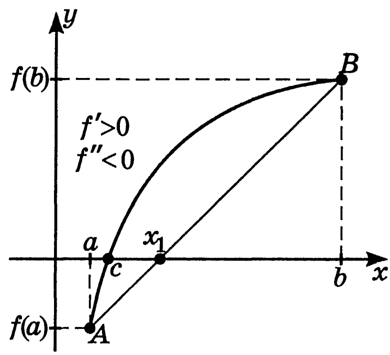
Пусть известно, что $f(c) = 0$, где $c \in [a; b]$.

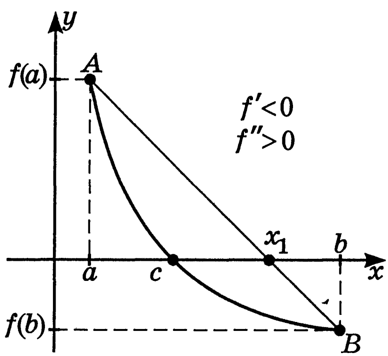
Пусть $y = f(x)$ на $[a; b]$ имеет непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$, причем постоянного знака, а $f(a) \cdot f(b) < 0$.

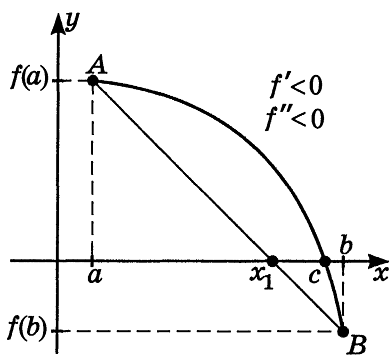
Постоянство знака $f'(x)$ указывает на монотонность $f(x)$, тогда ее график пересекает ось абсцисс только один раз.

Постоянство знака $f''(x)$ на $[a; b]$ указывает на постоянство направления выпуклости или вогнутости. При этом могут возникать следующие случаи:









Дугу кривой на $[a; b]$ заменим хордой AB. Примем за x_1 абсциссу точки пересечения хорды с осью Ox.

За первое приближение корня примем $|c - x_1| < b - a$.

Чтобы двигаться дальше, выведем уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ ($AB \not\parallel Oy$).
Общее уравнение прямой $y = ax + b$, тогда

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = y_1 - ax_1 \\ b = y_2 - ax_2 \end{cases};$$

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2; \quad a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1.$$

Для получения формулы приближения используем уравнение прямой, получим

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \text{ т. е. } \frac{y - f(a)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - a}{a - b}.$$

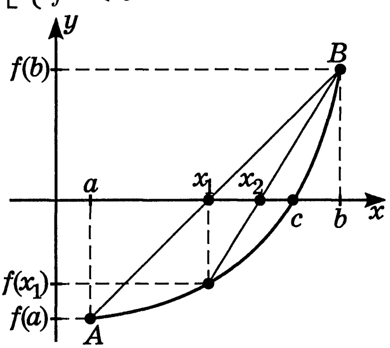
Тогда $y = f(a) + \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a)$.

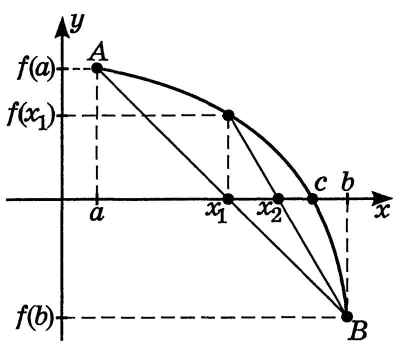
При $y = 0$ $\dfrac{x - a}{a - b} = -\dfrac{f(a)}{f(a) - f(b)}$, значит

$\boxed{x_1 = a - \dfrac{f(a) \cdot (a - b)}{f(a) - f(b)}}$ — основная расчетная формула.

Случай I

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f' > 0 \\ f'' > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f' < 0 \\ f'' < 0 \end{cases} \end{array}\right., \text{ тогда } f' \cdot f'' > 0; \quad x_1 \in [a; c].$$





В этом случае $x \in [x_1; b]$, далее

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} \cdot f(x_1); \quad x_2 \in (x_1; c), \text{ т.е. } x \in [x_2; b).$$

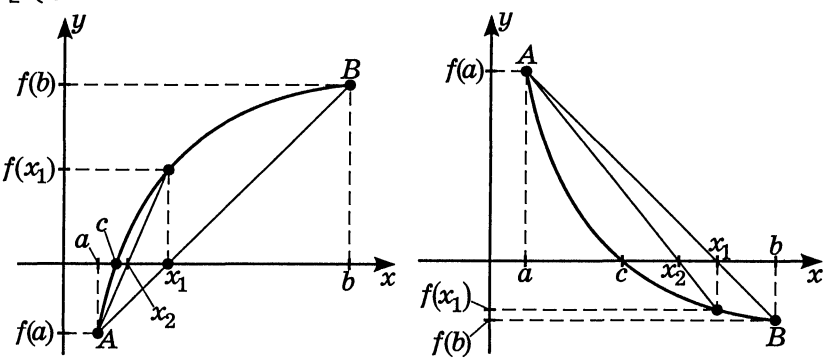
$$x_3 = x_2 - \frac{b - x_2}{f(b) - f(x_2)} \cdot f(x_2), \text{ в общем случае}$$

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_{n-1})},$$

где $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < c$ — приближения идут всегда слева и с недостатком.

Случай II

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f' < 0 \\ f'' > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f' > 0 \\ f'' < 0 \end{cases} \end{array}\right., \text{ тогда } f' \cdot f'' < 0; \quad x_1 \in [c; b].$$



В этом случае $c \in [a; x_1]$, далее $x_2 = a - \dfrac{a - x_1}{f(a) - f(x_1)} \cdot f(a)$.

Рассуждая аналогично, получим

$$\boxed{x_n = a - \frac{a - x_{n-1}}{f(a) - f(x_{n-1})} \cdot f(a)},$$

где $c < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < b$ — приближения идут всегда справа и с избытком.

По теореме Лагранжа $f(x_n) - f(c) = f'(x_0)(x_n - c)$,
где $x_0 \in [x_n; c)$ или $x_0 \in [c; x_n]$.

Полагая $f(c)=0$, получим $x_n - c = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$.

Пусть $\min f'(x)=m$, где $x\in[x_n;b]$. Тогда $|x_n - c| = \left|\dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}\right|$ — оценка степени точности приближения.

Пример. $f(x)=x^2-5$.

$f(1)=-4;\quad f(2)=-1;\quad f(3)=4,$

т. е. $f(2)\cdot f(3)<0$, значит $x\in[2;3]$.

$$x_1 = 2 - \frac{3-2}{4-(-1)}\cdot(-1) = 2+\frac{1}{5} = 2{,}2;$$

$y'=2x;\quad y'>0$ при $x>0$ (значит, и для $\forall x\in[2;3]$).

$y''=2>0$. Следовательно, реализуется случай I.

$$x_2 = 2{,}2 - \frac{3-2{,}2}{4-(-0{,}16)}\cdot(-0{,}16)\approx 2{,}23076.$$

$(f(2{,}2)=4{,}84-5=-0{,}16.)$

$$x_3 = 2{,}23076 + \frac{3-2{,}23076}{4+0{,}02373}\cdot 0{,}02372 \approx 2{,}23529;$$

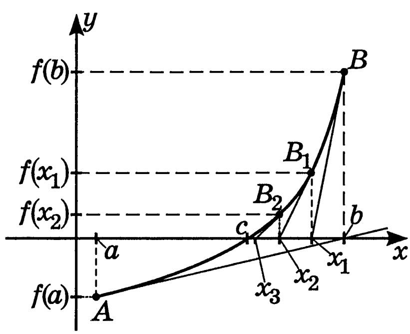
$m = f'(x_3) = 2\cdot x_3 = 4{,}47058$, тогда

$$|x_3 - c| \leqslant \frac{0{,}00348}{4{,}47058}\approx 0{,}0007 < 0{,}001.$$

В результате за три шага найден корень с точностью до $0{,}001$.

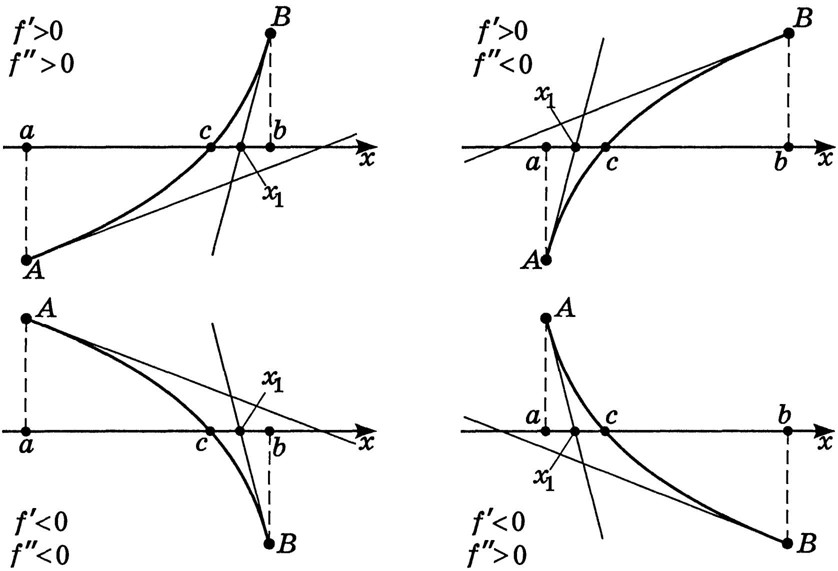
Метод касательных

Пусть на $[a;b]$ существуют непрерывные $f'(x)$ и $f''(x)$, и $f(a)\cdot f(b)<0$.

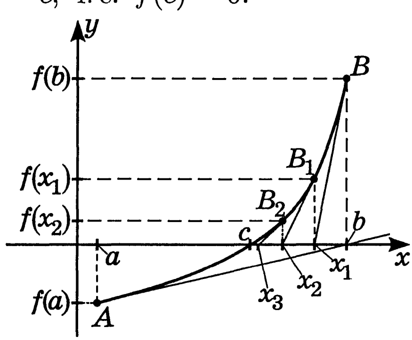


Идея метода И. Ньютона (1643–1727, Англия) состоит в том, что дуга кривой $y=f(x)$ на $[a;b]$ заменяется касательной к кривой, проведенной из точек $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$ и после этого абсциссы x_i — точек пересечения касательной с Ox принимаются за приближенное значение b. При этом касательную следует провести в ту из точек A или B, чтобы она пересекала ось Ox во внутренней точке $[a; b]$.

В зависимости от комбинации знаков f' и f'' рассмотрим четыре случая:



Пусть AcB — дуга кривой $y = f(x)$, которая пересекает ось абсцисс в точке $x = c$, т. е. $f(c) = 0$.



Пусть AcB обращена выпуклостью к оси Ox.

Проведем через точку $(b; f(b))$ касательную, уравнение которой $y = f(b) + f'(b) \cdot (x - b)$.

Найдем точку пересечения с осью Ox.

$y = 0; \quad f(b) + f'(b) \cdot (x_1 - b) = 0; \quad x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}.$

Через точку $B_1(x_1; f(x_1))$ проведем касательную $y = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ и так же найдем пересечение ее с осью Ox. Тогда $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ и так далее.

Получим формулу Ньютона $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$,

которая дает возможность шаг за шагом вычислять все более точные значения.

Выбор начальной точки — правее или левее корня — связан с соотношением знаков первой и второй производных:

при $\begin{cases} f' > 0 \\ f'' > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f' < 0 \\ f'' < 0 \end{cases}$ (т. е. $f' \cdot f'' > 0$) — справа;

при $\begin{cases} f' > 0 \\ f'' < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f' < 0 \\ f'' > 0 \end{cases}$ (т. е. $f' \cdot f'' < 0$) — слева.

Пример. Найдите наибольший корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ с точностью 0,01.

$y' = 3x^2 - 2; \quad y' > 0; \quad x > \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}; \quad y'' = 6x.$

$y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} - 5 < 0;$

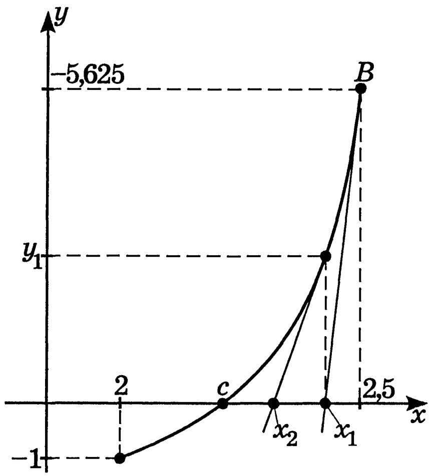
$y(2) = 8 - 4 - 5 < 0;$

$y(2{,}5) = \dfrac{125}{8} - 5 - 5 = 5\dfrac{5}{8} = 5{,}625$, т. е. $y(2) \cdot y(2{,}5) < 0$.

а) $y = y(2{,}5) + y'(2{,}5) \cdot (x - 2{,}5); \quad y'(2{,}5) = 3 \cdot \dfrac{25}{4} - 2 = 16{,}75;$

$y = 5{,}625 + 16{,}75 \cdot (x - 2{,}5)$. Пусть $y = 0$.

$x_1 = 2{,}5 - \dfrac{5{,}625}{16{,}75} \approx 2{,}5 - 0{,}33 = 2{,}17.$



б) $x_2 = 2{,}17 - \dfrac{f(2{,}17)}{f'(2{,}17)}$, где $f(2{,}17) \approx 0{,}8783$,

$f'(2{,}17) \approx 12{,}1267$;

$x_2 \approx 2{,}17 - \dfrac{0{,}8783}{12{,}1267} \approx 2{,}17 - 0{,}0732 = 2{,}0968.$

Получается, что уже второй шаг алгоритма привел к тому, что корень найден с точностью, превышающей 0,01.

Очевидно, что метод касательных в данном случае дает приближение с избытком, в то же время метод хорд дает приближение с недостатком (при $f' \cdot f'' < 0$). Среднее арифметическое этих приближений уменьшает погрешность вдвое. Поэтому комбинированный метод наиболее эффективен при поиске корней с наибольшей точностью и наименьшим количеством шагов.

Примечание. Этот пример рассматривал Дж. Валлис (1616–1703) в своей книге «Алгебра» (1685 г.) и вычислил корень с точностью до 10^{-12} ($x \approx 2{,}094551481542$), используя идею метода касательных Ньютона — Ревсона. Много позже был создан и метод хорд Больцано — Коши.

Известна формула Валлиса для нахождения π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1}.$$

Историческая справка

Пьер Ферма (1601–1665). Французский математик. Занимался теорией чисел. Известны две его теоремы, великая и малая, более 400 лет не поддававшиеся доказательству. Сейчас они доказаны. В математическом анализе теорема о нахождении максимумов и минимумов. Вместе с Р. Декартом (1596–1650) является основателем аналитической геометрии.

Мишель Ролль (1652–1719). Член Парижской академии наук. В «Трактате по алгебре» (1690 г.) развил метод отделения действительных корней алгебраическими методами, использованный в так называемой теореме Ролля, доказанной им для целого алгебраического многочлена. Был весьма жестким критиком анализа Р. Декарта и исчисления бесконечно малых Г. Лейбница, что заставило того более строго отнестись к обоснованию основ анализа.

Исаак Ньютон (1643–1727). Английский математик, механик, астроном и физик. В математике независимо от Лейбница и с несколько иных позиций разработал дифференциальное и интегральное исчисления. В силу высокой требовательности к своим выводам большинство его научных трудов было опубликовано на двадцать-тридцать лет позже их открытия.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Немецкий философ, математик, физик, один из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Джон Валлис (1616–1703). Английский математик, один из основателей исчисления бесконечно малых величин. Автор книги «Алгебра» (1685 г.), в которой развил идеи метода касательных для приближенного вычисления корней.

Гийоме Лопиталь (1661–1704). Французский математик. Автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696 г.)

Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Французский математик и механик. Разработал основы вариационного исчисления, автор многих трудов по математическому анализу, теории чисел и дифференциальным уравнениям.

Бернард Больцано (1781–1848). Чешский математик и философ. В XIX в. наряду с Коши дал определение предела, дифференциала и интеграла, а также дал строгое доказательство теоремы о непрерывной на отрезке функции. Был предшественником Г. Кантора в исследовании бесконечных множеств.

Луи Огюст Коши (1789–1857). Французский математик. Автор классических курсов математического анализа, основанных на систематическом понятии предела. Один из основоположников теории аналитических функций. Автор работ по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии.

Карл Вейерштрасс (1815–1897). Немецкий математик. Автор работ по математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, линейной алгебре. Разработал схему логического обоснования математического анализа.

Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (1831–1916). Немецкий математик. Дал строгое обоснование теории действительных чисел, автор трудов по теории алгебраических чисел.

7
Интегралы

Введение в интегральное исчисление

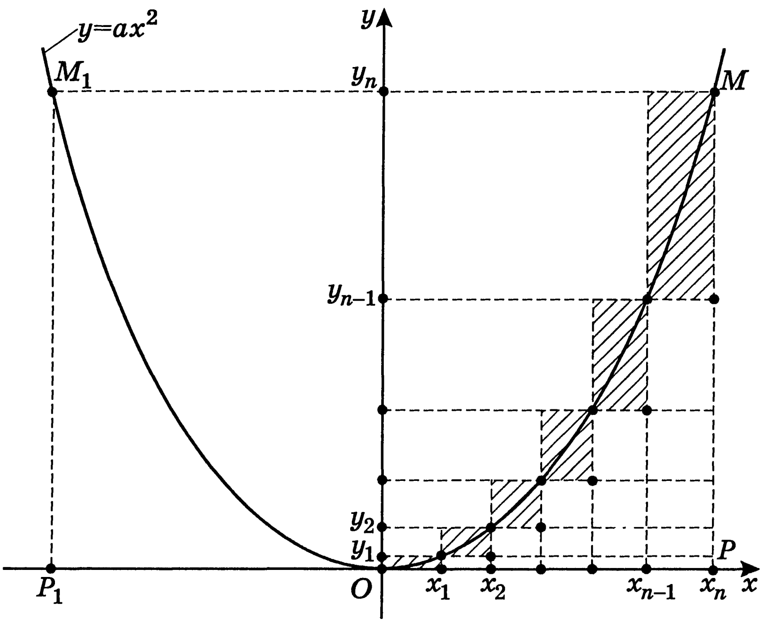
Задача 1. Вычислить площадь криволинейного треугольника OPM (см. чертеж), ограниченного Γ (графиком) $y = ax^2$, осью абсцисс и прямой $x = P$.

а) Разобьем $[OP]$ на n равных частей и построим на них ряд прямоугольников, находящихся внутри криволинейного треугольника и вне его (объемлющих). Q — площадь криволинейного треугольника OPM.

Фигура Q'_n состоит из ступенчатых фигур внутри криволинейного треугольника.

Q''_n состоит из ступенчатых фигур, объемлющих криволинейный треугольник. Ясно, что $Q'_n < Q < Q''_n$.

Далее $\dfrac{OP}{n} \cdot PM = \dfrac{x}{n} \cdot y \; (x_n = x;\; y_n = y)$ — площадь наибольшего прямоугольника. Она равна разности площадей $Q''_n - Q'_n = \dfrac{x \cdot y}{n}$, так как разность для каждого из прямоугольников отмечена заштрихованным прямоугольником и вкладывается в большой прямоугольник. При $(n \to \infty)$ следует $\left(\dfrac{xy}{n} \to 0\right)$, т. е. что $(Q''_n - Q'_n) \to 0$, значит $\lim\limits_{n\to\infty} Q''_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q'_n = Q$.



1. Рассмотрим абсциссы точек деления отрезка OP.

$$\frac{1}{n}x;\ \frac{2}{n}x;\ \frac{3}{n}x;\ldots\ \frac{k}{n}x;\ \ldots\ \frac{n}{n}x$$

$$\left(OP = x;\ x_1 = \frac{1}{n}x;\ x_2 = \frac{2}{n}x;\ldots\ x_n = \frac{n}{n}x\right).$$

2. Рассмотрим ординаты этих точек (высоты прямоугольников).

$$a\left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2;\ a\left(\frac{2}{n}\right)^2 x^2;\ a\left(\frac{3}{n}\right)^2 x^2;\ \ldots\ a\left(\frac{k}{n}\right)^2 x^2;\ \ldots$$
$$a\left(\frac{n}{n}\right)^2 x^2,$$ где

$$y_1 = ax_1^2 = a\left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2;\quad y_2 = ax_2^2 = a\left(\frac{2}{n}\right)^2 x^2;\ \ldots$$
$$y_k = a\left(\frac{k}{n}\right)^2 x^2;\ \ldots\ y_n = a\left(\frac{n}{n}\right)^2 x^2.$$

Тогда площадь Q''_n, как сумма прямоугольников, равна

$$Q''_n = a\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + a\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + a\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + \ldots$$

$$\ldots + a\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + \ldots + a\left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} =$$

$$= \frac{ax^3}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + n^2\right) =$$

$$= \frac{ax^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

на основании известного тождества Архимеда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

б) $Q = \lim\limits_{n\to\infty} Q''_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ax^3}{6} \cdot \dfrac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \dfrac{ax^3}{3} = \dfrac{y \cdot x}{3}$, где

Q — площадь криволинейного треугольника OPM;

ax^3 — постоянная, вынесенная за знак предела;

$ax^2 = y$.

Обозначим $S_{п.с}$ площадь параболического сегмента.

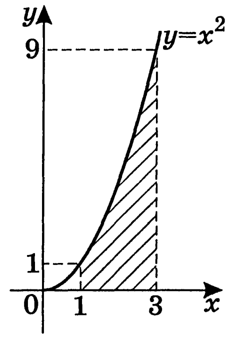
$S_{PMM_1P_1} = 2xy$.

Значит, $S_{п.с} = S_{PMM_1P_1} - 2S_{OPM} = 2xy - \dfrac{2xy}{3} = \dfrac{4}{3}xy$, тогда

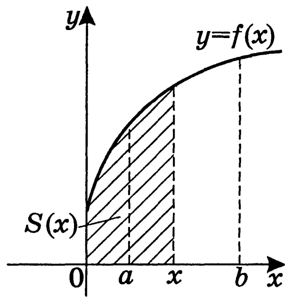
$S_{п.с} = \dfrac{2}{3} S_{PMM_1P_1}$.

Значит площадь параболического сегмента равна $\dfrac{2}{3}$ площади объемлющего его прямоугольника (теорема Архимеда, доказанная им самим).

Задача 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2$ и прямыми $x = 1$; $x = 3$; $y = 0$.



Для решения этой задачи можно применить теорему Архимеда. Для этого рассматривается процесс суммирования ступенчатых фигур, как в задаче 1. Здесь же мы рассмотрим несколько иной подход и в общем виде — как задачу нахождения площади криволинейной трапеции под кривой.



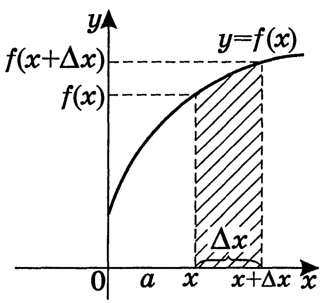
Пусть $y = f(x)$ — непрерывна и монотонна, имеет конечную производную на $[a; b]$; $y = f(x) \uparrow$.

Рассмотрим $S(x)$ как функцию площади криволинейной трапеции в зависимости от значения x, причем $S(x)$ — непрерывна и имеет конечную производную на $[a; b]$.

Тогда $S = S(b) - S(a)$, что очевидно.

Рассмотрим:

а) $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ — площадь криволинейной трапеции под кривой с основанием Δx (заштрихована на чертеже).



б) $f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$ — площадь прямоугольника с основанием Δx, внутри которого находится ограниченная криволинейная трапеция.

в) $f(x) \cdot \Delta x$ — площадь прямоугольника с основанием Δx, находящаяся внутри криволинейной трапеции. Здесь используется монотонность $y = f(x) \uparrow$ функции.

г) Тогда $f(x) \cdot \Delta x < \Delta S(x) < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$; так как $\Delta x > 0$, получим $f(x) < \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x)$.

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \leqslant \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leqslant \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x).$$

Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ в силу непрерывности $f(x)$, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x)$ в силу независимости $f(x)$ от Δx, то $f(x) \leqslant \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} \leqslant f(x)$, значит $S'(x) = f(x)$.

Теперь если знать, как по производной найти саму функцию, то можно найти $S(x)$. В данном случае $S'(x) = x^2$ $\left(f(x) = x^2\right)$. Можно догадаться и проверить, что

$S(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + c$ (c — произвольное число).

Действительно,

$$S'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + c' = x^2 + 0 = x^2.$$

Учитывая, что

$$S = S(b) - S(a) = \left(\frac{1}{3}b^3 + c\right) - \left(\frac{1}{3}a^3 + c\right) = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right),$$

и так как $a = 1$, $b = 3$, то получим

$$S = \frac{1}{3}\left(3^3 - 1^3\right) = \frac{1}{3}(27 - 1) = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Задача решена. Мы нашли площадь криволинейной трапеции, причем для этого необходимо было по производной функции находить саму функцию. Задача интегрального исчисления, обратная задаче дифференциального исчисления, как раз и состоит в определении фунции по её производной.

Неопределенный интеграл

Понятие неопределенного интеграла

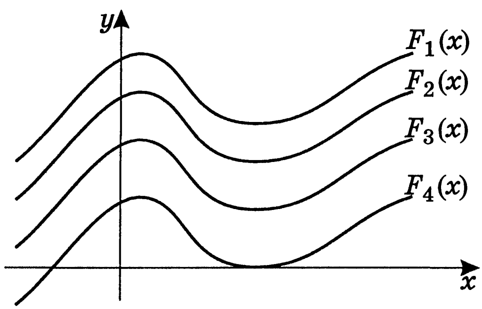
Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$, заданная на непрерывном числовом множестве M, во всех его точках является производной функции $F(x)$, также определенной на M: $F'(x) = f(x)$ на M. Тогда $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на M.

Теорема 1. У любой непрерывной на M функции имеется первообразная.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть, какая-либо из первообразных, то самое общее выражение для первообразной имеет вид $F(x) + c$, где c есть произвольная постоянная.

Доказательство:

Пусть $F_1(x)$ — есть функция, такая, что $F_1'(x) = f(x)$, с другой стороны $F'(x) = f(x)$, тогда
$F_1'(x) - F'(x) = [F_1(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0$, значит
$F_1(x) - F(x) = c$, т.е. $F_1(x) = F(x) + c$ (см. теорему о необходимости и достаточности условий постоянства функции, стр. 234).



Если производные (или дифференциалы) двух функций тождественно равны, то сами функции отличаются лишь на постоянную величину. Геометрический смысл в том, что графики любых двух первообразных для функции $f(x)$ получаются параллельным переносом вдоль оси OY относительно друг друга.

Определение 2. Если $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+c$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx = F(x)+c$.

Функция $f(x)$ — называется подынтегральной функцией; $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением; x — переменной интегрирования; $\int$ — знак интеграла.

Из определения неопределенного интеграла следуют:

Теорема 3. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Теорема 4. Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов слагаемых.

$$\int (f(x) + g(x) - t(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int t(x)\,dx.$$

Теорема 5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

Следствие 1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \quad (d(f) = f'(x)\,dx)$.

Следствие 2. $\int dF(x) = F(x) + c \quad (dF(x) = f(x)\,dx)$.

Основная таблица интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = c;$

2. $\int dx = x + c;$

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1;\quad n$ — постоянная величина).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Следствие 1. $\int \dfrac{dx}{x^n} = -\dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} + c$
$(n \neq 1;\quad n - \text{const})$.

Следствие 2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

5. $\int a^x dx = a^x \log_a e + c \qquad (a > 0;\quad a \neq 1);$

6. $\int e^x\, dx = e^x + c;$

7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c;$

8. $\int \cos x\, dx = \sin x + c;$

9. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + c;$

10. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + c;$

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$

12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, \qquad a \neq 0;$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, \qquad a > 0, \quad |x| < a;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + c, \qquad a \neq 0, \quad |x| \neq |a|;$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c, \qquad |x| > |a|.$

Все эти формулы можно доказать непосредственным дифференцированием правой и левой части формул.

Практикум 27

Найдите:

1. $\int (6x+3)\,dx$, если $F(-2)=4$;

2. $\int \left(9x^2+4x-10\right)dx$, если $F(-1)=10$;

3. $\int \left(4x-x^3\right)dx$, если точка $N(-2;3)\in\Gamma(F_1(x))$, а точка $M(-3;-1)\in\Gamma(F_2(x))$. График какой из функций $F_1(x)$ или $F_2(x)$ расположен выше?

4. $\int x^5\,dx$;

5. $\int \sqrt{x}\,dx$;

6. $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx \quad (x>0)$;

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad (x>0)$;

8. $\int 7x^4\,dx$;

9. $\int 3\sqrt[4]{x^3}\,dx$;

10. $\int \left(x^3-3x^2+5x-6\right)dx$;

11. $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

12. $\int \dfrac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

13. $\int \dfrac{(4+\sqrt{x})\left(x^3+5\right)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$;

14. $\int \dfrac{3+2x\sin x}{x}\,dx$;

15. $\displaystyle\int \left(\frac{\sin 2x}{3\sin x}\right) dx;$

16. $\displaystyle\int \frac{(5\sqrt{x}+4)^4}{\sqrt[3]{x}}\, dx;$

17. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2\,(1+x^2)}\, dx;$

18. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{2x^2+7}.$

Решение практикума 27

Найдите:

1. $\int (6x+3)\,dx$, если $F(-2)=4$.

$\int (6x+3)\,dx = \frac{1}{2}6x^2+3x+c$; так как $F(-2)=4$, то $3(-2)^2+3(-2)+c=4$, тогда $c=-2$.

Значит $F(x)=3x^2+3x-2$.

2. $\int \left(9x^2+4x-10\right)dx$, если $F(-1)=10$.

$\int \left(9x^2+4x-10\right)dx = \frac{1}{3}9x^3+\frac{1}{2}4x^2-10x+c$, но $F(-1)=10$, тогда $3(-1)^3+2(-1)^2-10(-1)+c=10$, $\quad c=1$.

$F(x)=3x^3+2x^2-10x+1$.

3. $\int \left(4x-x^3\right)dx$, если точка $N(-2;3)\in\Gamma(F_1(x))$, а точка $M(-3;-1)\in\Gamma(F_2(x))$. График какой из функций $F_1(x)$ или $F_2(x)$ расположен выше?

$\int \left(4x-x^3\right)dx = \frac{1}{2}4x^2-\frac{1}{4}x^4+c$.

а) Так как точка $N(-2;3)\in\Gamma(F_1(x))$, тогда

$2(-2)^2-\frac{1}{4}(-2)^4+c=3$; $\quad c=-1$,

т. е. $F_1(x)=2x^2-\frac{1}{4}x^4-1$.

б) Точка $M(-3;-1)\in\Gamma(F_2(x))$,

тогда $2(-3)^2-\frac{1}{4}(-3)^4+c=-1$; $\quad c=1{,}25$;

$F_2(x)=2x^2-\frac{1}{4}x^4+1{,}25$.

Значит график первообразной $F_2(x)$ выше графика $F_1(x)$.

4. $\int x^5 dx = \frac{1}{5+1}x^{5+1} + c = \frac{1}{6}x^6 + c.$

5. $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

6. $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{1}{\frac{2}{5}+1}x^{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c \quad (x > 0).$

Примечание. Иногда удобнее формула

$\int x^n dx = \frac{1}{1+n}x^{1+n} + c.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c \quad (x > 0).$

8. $\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = \frac{7}{4+1}x^{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c.$

9. $\int 3\sqrt[4]{x^3} dx = 3\int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{3}{\frac{3}{4}+1}x^{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} + c.$

10. $\int \left(x^3 - 3x^2 + 5x - 6\right) dx =$

$= \int x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int 5x\, dx - \int 6\, dx =$

$= \frac{1}{3+1}x^{3+1} - 3 \cdot \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{5}{2}x^2 - 6x + c =$

$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 6x + c.$

11. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx =$

$= \frac{1}{-\frac{3}{5}+1}x^{-\frac{3}{5}+1} + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} - \frac{3}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} +$

$+ \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1} + c = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{2}x^{-2} - 6x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + c.$

12. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}} dx =$

$$= \int \left(x^{4-\frac{1}{3}} - 3x^{2-\frac{1}{3}} + 5 - 7x^{1-\frac{1}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{11}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}} - 7x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}} + 5 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{11}{3}+1} x^{\frac{11}{3}+1} - \frac{3}{\frac{5}{3}+1} x^{\frac{5}{3}+1} - \frac{7}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} +$$

$$+ \frac{6}{-\frac{1}{3}+1} x^{-\frac{1}{3}+1} + 5x + c =$$

$$= \frac{3}{14} x^{\frac{14}{3}} - \frac{9}{8} x^{\frac{8}{3}} - \frac{21}{5} x^{\frac{5}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}} + 5x + c.$$

13. $\displaystyle\int \frac{(4+\sqrt{x})\left(x^3+5\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{4x^3 + x^3\sqrt{x} + 5\sqrt{x} + 20}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$

$$= \int \left(4x^{3-\frac{2}{3}} + x^{3+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} + 20x^{-\frac{2}{3}} \right) dx =$$

$$= \int \left(4x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{17}{6}} + 5x^{-\frac{1}{6}} + 20x^{-\frac{2}{3}} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{1+\frac{7}{3}} x^{1+\frac{7}{3}} + \frac{1}{1+\frac{17}{6}} x^{1+\frac{17}{6}} + \frac{5}{1-\frac{1}{6}} x^{1-\frac{1}{6}} + \frac{20}{1-\frac{2}{3}} x^{1-\frac{2}{3}} + c =$$

$$= \frac{6}{5} x^{\frac{10}{3}} + \frac{6}{23} x^{\frac{23}{6}} + 6x^{\frac{5}{6}} + 60x^{\frac{1}{3}} + c.$$

14. $\displaystyle\int \frac{3 + 2x\sin x}{x} dx = \int \left(\frac{3}{x} + 2\sin x \right) dx = 3\ln|x| - 2\cos x + c.$

15. $\displaystyle\int \left(\frac{\sin 2x}{3\sin x} \right) dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{3\sin x} dx = \frac{2}{3} \int \cos x dx = \frac{2}{3}\sin x + c.$

16. $\displaystyle\int \frac{(5\sqrt{x}+4)^4}{\sqrt[3]{x}}dx =$

$$= \int \frac{(5\sqrt{x})^4 + 4(5\sqrt{x})^3 \cdot 4 + 6(5\sqrt{x})^2 \cdot 4^2 + 4(5\sqrt{x}) \cdot 4^3 + 4^4}{\sqrt[3]{x}} dx =$$

$$= \int \Big(625x^{2-\frac{1}{3}} + 2000x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} + 2400x^{1-\frac{1}{3}} + 1280x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} +$$

$$+256x^{-\frac{1}{3}}\Big)dx =$$

$$= \int \left(625x^{\frac{5}{3}} + 2000x^{\frac{7}{6}} + 2400x^{\frac{2}{3}} + 1280x^{\frac{1}{6}} + 256x^{-\frac{1}{3}}\right) dx =$$

$$= \frac{625}{1+\frac{5}{3}}x^{1+\frac{5}{3}} + \frac{2000}{1+\frac{7}{6}}x^{1+\frac{7}{6}} + \frac{2400}{1+\frac{2}{3}}x^{1+\frac{2}{3}} + \frac{1280}{1+\frac{1}{6}}x^{1+\frac{1}{6}} +$$

$$+\frac{256}{1-\frac{1}{3}}x^{1-\frac{1}{3}} + c =$$

$$= \frac{1875}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{12000}{13}x^{\frac{13}{6}} + 1440x^{\frac{5}{3}} + \frac{7680}{7}x^{\frac{7}{6}} + 384x^{\frac{2}{3}} + c.$$

17. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{1-2}x^{1-2} + \operatorname{arctg}x + c = -x^{-1} + \operatorname{arctg}x + c.$$

18. $\displaystyle\int \frac{5dx}{2x^2+7} = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3{,}5}\right)^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3{,}5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3{,}5}} + c =$

$$= \frac{5\sqrt{14}}{14}\operatorname{arctg}\frac{x}{7}\sqrt{14} + c.$$

Тренировочная работа 11

Найдите:

1. $\int (3x^5 - 2x^2)\ dx;$

2. $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx;$

3. $\int (2\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x})\ dx;$

4. $\int (3\cos x - 4\sin x)\ dx;$

5. $\int (4e^x - 3\cos 2x)\ dx;$

6. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + (x+2)^3\right) dx;$

7. $\int \left(\sqrt[3]{x+2} + \frac{2}{\sqrt{x-3}} + \frac{4}{x-1}\right) dx;$

8. $\int \left(\left(\frac{1}{3}x - 1\right)^7 - (3x+2)^{\frac{3}{5}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}}\right) dx;$

9. $\int \left(e^{\frac{x+1}{3}} - \sin 2x + \sqrt[4]{\frac{x}{4}}\right) dx;$

10. $\int \left(\frac{4x^3 + 5x^4}{2x^2} + (2x+3)\sqrt[3]{x^2}\right) dx \quad (x > 0).$

Решение тренировочной работы 11

Найдите:

1. $\int\left(3x^5 - 2x^2\right)\,dx =$

$$\frac{3}{1+5}x^{1+5} - \frac{2}{1+2}x^{1+2} + c = \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^3 + c;$$

2. $\int\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\,dx =$

$$3\ln|x| - \tfrac{2}{1-2}x^{1-2} + c = 3\ln|x| + 2x^{-1} + c;$$

3. $\int\left(2\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}\right)\,dx = \frac{2}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}} + \frac{4}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}} + c =$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{4}{3}} + c;$$

4. $\int(3\cos x - 4\sin x)\,dx = 3\sin x + 4\cos x + c;$

5. $\int(4e^x - 3\cos 2x)\,dx = 4e^x - 1{,}5\sin 2x + c;$

6. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} + (x+2)^3\right)\,dx =$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}} + \frac{4}{1-\frac{1}{3}}x^{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+3}(x+2)^{1+3} + c =$$

$$= 4x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{2}{3}} + 0{,}25\,(x+2)^4 + c;$$

7. $\int\left(\sqrt[3]{x+2} + \frac{2}{\sqrt{x-3}} + \frac{4}{x-1}\right)\,dx =$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}}(x+2)^{1+\frac{1}{3}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}}(x-3)^{1-\frac{1}{2}} + 4\ln|x-1| + c =$$

$$= \frac{3}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}} + 4\,(x-3)^{\frac{1}{2}} + 4\ln(x-1) + c \qquad (x-3>0);$$

8. $$\int\left(\left(\frac{1}{3}x-1\right)^{7}-(3x+2)^{\frac{3}{5}}+\frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{1+7}\left(\frac{1}{3}x-1\right)^{1+7}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}-\frac{1}{1+\frac{3}{5}}\cdot\frac{1}{3}(3x+2)^{1+\frac{3}{5}}+$$

$$+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2}(2x-1)^{1-\frac{1}{3}}+c=$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}x-1\right)^{8}-\frac{5}{24}(3x+2)^{\frac{8}{5}}+\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{2}{3}}+c;$$

9. $$\int\left(e^{\frac{x+1}{3}}-\sin 2x+\sqrt[4]{\frac{x}{4}}\right)dx=$$

$$=e^{\frac{x+1}{3}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}\cdot 4\left(\frac{x}{4}\right)^{1+\frac{1}{4}}+c=$$

$$=\frac{1}{3}e^{\frac{x+1}{3}}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{16}{5}\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{5}{4}}+c;$$

10. $$\int\left(\frac{4x^3+5x^4}{2x^2}+(2x+3)\sqrt[3]{x^2}\right)dx= \qquad (x>0)$$

$$=\int\left(2x+2{,}5x^2+2x\cdot x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{2}{1+\frac{5}{3}}x^{1+\frac{5}{3}}+\frac{3}{1+\frac{2}{3}}x^{1+\frac{2}{3}}+c=$$

$$=x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+c.$$

Замена переменных

Весьма полезным методом приведения интегралов к табличным является метод замены переменной.

Так как $\boxed{\varphi'(x)dx = d\varphi(x)}$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x).$$

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Так как $\dfrac{1}{x} = (\ln x)'$ и $(\ln x)'\,dx = d\ln x$, то тогда

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int \frac{(\ln x)'\,dx}{\ln^2 x} = \int \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \qquad \left[\text{ Пусть } t = \ln x. \right]$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{1+(-2)}t^{1-2} + c = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\ln x} + c,$$

т. е. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + c.$

Пример 2. $\displaystyle\int \left(x^2+5\right)^7 2x\,dx.$

Так как $\left(x^2+5\right)' = 2x$, $2x\,dx = d\left(x^2+5\right)$, полагая $x^2+5=t$, получим $\displaystyle\int t^7 dt = \frac{1}{1+7}t^{1+7} + c = \frac{1}{8}\left(x^2+5\right)^8 + c.$

Пример 3. $\displaystyle\int \left(4x^3-12x^2-3\right)^5\left(x^2-2x\right)dx =$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Можно чуть иначе. Пусть } 4x^3-12x^2-3=t,\\ \text{тогда } d\left(4x^3-12x^2-3\right)=dt, \text{ но}\\ d\left(4x^3-12x^2-3\right) = \left(4x^3-12x^2-3\right)'dx \text{ значит}\\ \left(12x^2-24x\right)dx = dt, \text{ т. е. } 12\left(x^2-2x\right)dx = dt, \text{ тогда}\\ \left(x^2-2x\right)dx = \dfrac{1}{12}dt.\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\int t^5 dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+5}t^{1+5} + c = \frac{1}{72}t^6 + c =$$

$$= \frac{1}{72}\left(4x^3-12x^2-3\right)^6 + c.$$

Пример 4. $\int \sqrt[3]{x^3+8} \cdot x^2 dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } x^3+8=t, \text{ тогда } d\left(x^3+8\right)=dt \text{ и } \left(x^3+8\right)' dx = dt, \\ 3x^2 dx = dt, \text{ т. е. } x^2 dx = \frac{1}{3} dt. \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}} t^{1+\frac{1}{3}} + c = \frac{1}{4} t^{\frac{4}{3}} + c =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^3+8\right)^{\frac{4}{3}} + c.$$

Пример 5. $\int \sin^3 x \cos x \, dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } \sin x = t, \text{ тогда } d\sin x = dt \text{ и } (\sin x)' dx = dt, \\ \text{т. е. } \cos x\, dx = dt. \end{array} \right]$$

$$= \int t^3 dt = \frac{1}{1+3} t^{1+3} + c = \frac{1}{4}(\sin x)^4 + c.$$

Пример 6. $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3+9)^4} =$

$$\left[\text{Пусть } 4x^3+9=t, \text{ тогда } 12x^2dx = dt, \text{ т. е. } x^2dx = \frac{1}{12}\, dt. \right]$$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-4} t^{1-4} + c =$$

$$= -\frac{1}{36}\left(4x^3+9\right)^{-3} + c.$$

Пример 7. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\, dx =$

$$\left[\text{Пусть } \operatorname{arctg} x = t, \text{ тогда } \frac{dx}{1+x^2} = dt. \right]$$

$$= \int t^3 dt = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x + c.$$

Пример 8. $\int \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x\, dx =$

$$\left[\text{Пусть } \operatorname{tg} x = t, \text{ тогда } \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \right]$$

$$= \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + c = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c.$$

Пример 9. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } \sqrt{x} = t, \text{ тогда } x = t^2, \ \ dx = dt^2, \\ \text{т. е. } (x)'\,dx = \left(t^2\right)'\,dt;\ dx = 2t\,dt, \text{ значит} \end{array}\right].$$

$$= \int \frac{2tdt}{1+\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(t - \ln|1+t|\right) + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + c.$$

Пример 10. $\int (\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{tg} 8x)dx =$

$$= \int \operatorname{tg}x\,dx + \int 2\operatorname{tg}2x\,dx + \int 4\operatorname{tg}4x dx + \int 8\operatorname{tg}8x\,dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}x\,dx + \int \operatorname{tg}2x\,d2x + \int \operatorname{tg}4x d4x + \int \operatorname{tg}8x\,d8x =$$

$$= -\ln|\cos x| - \ln|\cos 2x| - \ln|\cos 4x| - \ln|\cos 8x| + c =$$

$$= -\ln|\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x| + c =$$

$$= -\ln\left|\frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot 16\sin x}{16\sin x}\right| + c =$$

$$= -\ln\left|\frac{8\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x}{16\sin x}\right| + c = \ldots =$$

$$= -\ln\left|\frac{\sin 16x}{16\sin x}\right| + c = -\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + c.$$

С другой стороны,

$$f(x) = \left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(-\ln|\sin 16x| + \ln|\sin x| + \ln 16 + c\right)' =$$

$$= -16\operatorname{ctg}16x + \operatorname{ctg}x.$$

Значит

$$f(x) = \operatorname{tg}x + 2\operatorname{tg}2x + 4\operatorname{tg}4x + 8\operatorname{tg}8x = -16\operatorname{ctg}16x + \operatorname{ctg}x.$$

Таким образом, мы доказали еще одно тригонометрическое тождество. Вот еще одно применение неопределенного интеграла.

Интегрирование по частям

Рассмотрим еще один способ преобразования неопределенного интеграла. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции на M, тогда по теореме о производной произведения

$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

С другой стороны, по теореме 2:

$\int (f(x)\,g(x))'\,dx = f(x)\,g(x) + c,$

т. е. $\int (f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x))\,dx = f(x)\,g(x) + c,$

т. е. $\int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) + c.$

Так как $f'(x)\,dx = df(x)$ и $g'(x)\,dx = dg(x)$, то

$$\boxed{\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x)}.$$

Здесь нет необходимости писать c, так как она присутствует в $\int g(x)\,df(x)$. Полученная формула называется формулой интегрирования по частям; по сути она есть некоторое тождественное преобразование одного интеграла в другой.

Иначе записывают $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$.

Пример 1. $\int xe^x\,dx$.

Пусть $\left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \end{array}\right| \begin{array}{c} du = dx \\ v = e^x \end{array}\right|$, тогда

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$

Пример 2. $\int x\cos x\,dx$.

Пусть $\left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \end{array}\right| \begin{array}{c} du = dx \\ v = \sin x \end{array}\right|$, тогда

$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$

Примечание. За u лучше принимать x в примерах 1 и 2, так как в этом случае du понижает его степень и легко получаются табличные интегралы, но видение того, что принимать за u приходит с опытом.

Пример 3. $\int \ln x\,dx = \left[\text{Пусть} \left| \begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| \right]$

$$= x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

Пример 4. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\text{Пусть} \left| \begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| \right]$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c,$$

так как $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c.$

Пример 5. $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть} \\ \left| \begin{array}{l|l} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = \displaystyle\int dv = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ & = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}(1-x^2)^{1-\frac{1}{2}} + c_1 = -\sqrt{1-x^2} + c_1 \end{array} \right| \end{array}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{1-x^2} + c_1\right)\arcsin x - \int\left(-\sqrt{1-x^2} + c_1\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + c_1\arcsin x - \int\left(-1 + \frac{c_1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + c_1\arcsin x + x - c_1\arcsin x + c =$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + c.$$

Очевидно, что c_1 можно было опустить изначально.

Итак, $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + c.$

Пример 6. $\displaystyle\int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx = \left[\begin{array}{|l|l|} u=\ln\sin x & du=\operatorname{ctg} x\,dx \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} & v=\operatorname{tg} x \end{array}\right]$

$= \operatorname{tg} x\ln\sin x - \displaystyle\int \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x\,dx = \operatorname{tg} x\ln\sin x - \int dx =$

$= \operatorname{tg} x\ln\sin x - x + c.$

Иногда метод интегрирования по частям необходимо применить несколько раз.

Пример 7. $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx = \left[\begin{array}{|l|l|} u=(\ln x)^2 & du=2\dfrac{1}{x}\ln x\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right]$

$= x\ln^2 x - \displaystyle\int x\cdot\frac{2}{x}\ln x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx =$

$= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c,$

так как $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$ (см. пример 3)

Здесь мы дважды применили интегрирование по частям.

Пример 8. $y = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \left[\begin{array}{|l|l|} u=e^{ax} & du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bx\,dx & v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{array}\right]$

$= \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \dfrac{a}{b}\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \left[\begin{array}{|l|l|} u=e^{ax} & du=ae^{ax}dx \\ dv=\sin bx\,dx & v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{array}\right]$

$= \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \dfrac{a}{b}\left(-\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \dfrac{a}{b}\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx\right).$

Увы, пришли к тому же интегралу, который нужно найти. После преобразования получим

$y = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \dfrac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \dfrac{a^2}{b^2}\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx,$

т. е. $y = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \dfrac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \dfrac{a^2}{b^2}y;$

$y + \dfrac{a^2}{b^2}y = \dfrac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx + \dfrac{a}{b}\cos bx\right)$, тогда

$$\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + c}.$$

Тренировочная работа 12

Вычислите:

1. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx;$

2. $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}\,dx;$

3. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[6]{x}}\,dx;$

4. $\displaystyle\int(9+7x^2)^5\,35x\,dx;$

5. $\displaystyle\int\sqrt{4x^2+8x}\,(2x+2)\,dx;$

6. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{7+x^3}};$

7. $\displaystyle\int\sqrt{1-x}\,dx;$

8. $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,dx;$

9. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

10. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,dx;$

11. $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx;$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x};$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

14. $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx;$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}};$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}};$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}};$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x};$

19. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx;$

20. $\displaystyle\int e^x\ln\left(e^x+1\right)dx.$

Решение тренировочной работы 12

Вычислите:

1. $$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx=$$

$$=\int\left(x^{-\frac{1}{3}}+x^{-3}-4x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{3}{5}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}x^{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-3}x^{1-3}-\frac{4}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{3}{1-\frac{3}{5}}x^{1-\frac{3}{5}}+c=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-2}-8x^{\frac{1}{2}}-\frac{15}{2}x^{\frac{2}{5}}+c.$$

2. $$\int\frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}\,dx=$$

$$=\int\left(x^{4-\frac{1}{3}}-3x^{2-\frac{1}{3}}+5-7x^{1-\frac{1}{3}}+6x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=$$

$$=\int\left(x^{3\frac{2}{3}}-3x^{1\frac{2}{3}}+5-7x^{\frac{2}{3}}+6x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{1+3\frac{2}{3}}x^{1+3\frac{2}{3}}-\frac{3}{1+1\frac{2}{3}}x^{1+1\frac{2}{3}}+5x-\frac{7}{1+\frac{2}{3}}x^{1+\frac{2}{3}}+$$

$$+\frac{6}{1-\frac{1}{3}}x^{1-\frac{1}{3}}+c=$$

$$=\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+5x-\frac{21}{5}x^{\frac{5}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}+c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[6]{x}}\,dx =$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2} - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[6]{x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - 3x^{1+\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} - x}{x^{\frac{1}{6}}}dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} - 3x^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} - x^{1-\frac{1}{6}}\right)dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{4}{3}} - 3x^{1\frac{1}{6}} + 3x - x^{\frac{5}{6}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{4}{3}}x^{1+\frac{4}{3}} - \frac{3}{1+1\frac{1}{6}}x^{1+1\frac{1}{6}} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{1+\frac{5}{6}}x^{1+\frac{5}{6}} + c =$$

$$= \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{18}{13}x^{\frac{13}{6}} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + c$$

4. $\displaystyle\int \left(9+7x^2\right)^5 35x\,dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Решим задачу способом замены переменной.} \\ \text{Учтем, что } \boxed{df(x) = f'(x)\,dx}. \\ \text{Пусть } t = 9+7x^2;\ \ dt = 14x\,dx;\ \ 2{,}5\,dt = 35x\,dx. \end{array}\right]$$

$$= \int t^5 2{,}5\,dt = \frac{1}{1+5}t^{1+5}\cdot 2{,}5 + c = \frac{5}{12}\left(9+7x^2\right)^6 + c.$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+8x}\,(2x+2)\,dx =$

$$\left[\ \text{Пусть } 4x^2+8x = t;\ \ dt = (8x+8)\,dx;\ \ \frac{1}{4}dt = 2\,(x+1)\,dx.\ \right]$$

$$= \int \frac{1}{4}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}t^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{6}\left(4x^2+8x\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{7+x^3}} =$

$$\left[\text{ Пусть } 7+x^3=t;\ \ dt=3x^2dx;\ \ \frac{1}{3}\,dt=x^2dx. \right]$$

$$=\int \frac{1}{3}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}t^{1-\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{7+x^3}+c.$$

7. $\displaystyle\int \sqrt{1-x}\,dx =$

$$\left[\text{ Пусть } 1-x=t;\ \ -dx=dt. \right]$$

$$=-\int\sqrt{t}\,dt=-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}t^{1+\frac{1}{2}}+c=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+c.$$

8. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx =$

$$\left[\text{ Пусть } t=\ln x;\ \ dt=\frac{1}{x}\,dx. \right]$$

$$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+c=\frac{1}{2}\ln^2 x+c.$$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$\left[\text{ Пусть } \arcsin x=t;\ \ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt. \right]$$

$$=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}t^{1+\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+c.$$

10. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,dx =$

$$\left[\text{ Пусть } 5+\cos x=t;\ \ -\sin x\,dx=dt. \right]$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}t^{1-\frac{1}{2}}+c=-2\sqrt{5+\cos x}+c.$$

11. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx =$

$\left[\ \text{Пусть } 3-\sin^2 x = t;\quad -2\sin x\cos x = dt.\ \right]$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}t^{1-\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{3-\sin^2 x} + c.$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} =$

$\left[\ \text{Пусть } \operatorname{arctg}x = t;\quad \dfrac{dx}{1+x^2} = dt.\ \right]$

$$= \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\operatorname{arctg}x| + c.$$

13. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$\left[\ \text{Пусть } \arcsin x = t;\quad dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ \right]$

$$= \int e^t dt = e^t + c = e^{\arcsin x} + c.$$

14. $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx =$

$\left[\ \text{Пусть } \sin x = t;\quad dt = \cos x\,dx\ \right]$

$$= \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c.$$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}} =$

$\left[\ \text{Пусть } \sqrt{x} = t;\quad dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}\quad (x = t^2).\ \right]$

$$= \int\frac{2\,dt}{5t^2+7} = \frac{2}{5}\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{7}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}\,t + c =$$

$$= \frac{2}{35}\sqrt{35}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{35x}}{7} + c.$$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\left(\frac{3}{x}\right)^2}} =$

$$\left[\text{ Пусть } x>0;\ t=\frac{3}{x}.\quad dt=-\frac{3}{x^2}\,dx;\ \ -\frac{1}{3}\,dt=\frac{dx}{x^2}.\ \right]$$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{x}+c.$$

Примечание. Если $x<0$, то решение аналогично.

17. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} =$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Пусть } x=2\sin t;\ \ dx=2\cos t\,dt\\ \left(t=\arcsin\dfrac{x}{2},\ \text{т. е. } t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right],\ \text{на котором } \cos t\geqslant 0\right).\end{array}\right]$$

$$=\int\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t\,dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\int\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t\,dt}{2\cos t}=\int 4\sin^2 t\,dt=$$

$$=2\int(1-\cos 2t)\,dt=2t-\sin 2t+c=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+c=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c.$$

18. $\displaystyle\int\frac{dx}{3+4\sin^2 x}=$

$$\left[\text{ Пусть } \operatorname{ctg} x=t;\ \ dt=-\frac{dx}{\sin^2 x},\ \text{но } \sin^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}.\ \right]$$

$$=\int\frac{dx}{3+4\sin^2 x}=\int\frac{dx}{3+\frac{4}{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=\int\frac{dx\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)}{7+3\operatorname{ctg}^2 x}=$$

$$=\int\frac{1}{7+3\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int\frac{dt}{7+3t^2}=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2+t^2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}t\right)+c=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{ctg} x\right)+c.$$

19. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx =$

$$\left[\;\begin{array}{|l|l|} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} & v = -\dfrac{1}{x} \end{array}\;\right]$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c.$$

20. $\displaystyle\int e^x \ln(e^x+1)\,dx =$

$$\left[\;\begin{array}{|l|l|} u = \ln(e^x+1) & du = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{array}\;\right]$$

$$= e^x\ln(e^x+1) - \int e^x\frac{e^x}{e^x+1}\,dx =$$

$$= e^x\ln(e^x+1) - \int\left(\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= e^x\ln(e^x+1) - \int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= e^x\ln(e^x+1) - \int\left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= e^x\ln(e^x+1) - e^x + \int\frac{de^x}{e^x+1} =$$

$$= e^x\ln(e^x+1) - e^x + \ln(e^x+1) + c =$$

$$= (e^x+1)\ln(e^x+1) - e^x + c.$$

Определенный интеграл

О понятии определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ — непрерывна на $[a;b]$, тогда для $\forall\, x \in [a;b]$ она непрерывна на $[a;x]$. Рассмотрим определенный интеграл как функцию от x, определенную на $[a;b]$:

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Имеет место основная теорема математического анализа

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Смысл теоремы в том, что она отвечает на главный вопрос интегрального исчисления — вопрос о существовании первообразной для данной непрерывной функции.

Пусть $S(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b$, тогда $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $y = f(t)$ и прямыми $y = 0$; $t = a$; $t = x$. Далее, смотря рассуждения в начале главы, получим $f(x) = S'(x)$, что равносильно основной теореме $f(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'$.

В задаче Архимеда было показано, что $S = F(b) - F(a)$.

С учетом основной теоремы, получаем $\boxed{\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$

Эта формула получила название формулы Ньютона — Лейбница, которая записывается так: $\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b$.

Примечание. Разные обозначения переменной интегрирования в определенном интеграле ничего не меняют, так как $\int\limits_a^b f(t)\,dt, \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_a^b f(u)\,du, \ldots$ это одно и то же. В неопределенном интеграле это, увы, не так.

Основные правила вычисления определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $k = \text{const}$;

2. $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x)$;

4. Пусть $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ — непрерывны на $[m;n]$, где $a = \varphi(m)$, $b = \varphi(n)$ и $E(\varphi) = [a;b]$. Тогда для любой непрерывной на $[a;b]$ функции $y = f(x)$ справедливо
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_m^n f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

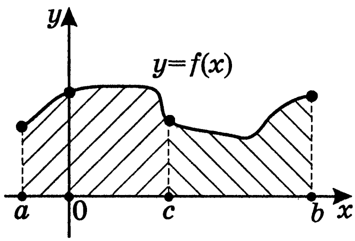
Следствие 1. $\int\limits_a^b f(kx+c)\,dx = \frac{1}{k}\int\limits_{ka+c}^{kb+c} f(x)\,dx$, где k, c — постоянные и $k \neq 0$.

Основные свойства определенного интеграла

Перечислим несколько важных свойств, которые впоследствии пригодятся нам при решении задач.

1. При $a = b$ $\quad \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, где $a < c < b$.

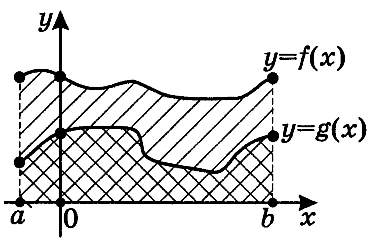


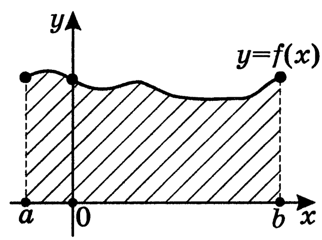
3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

4. Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и для $\forall x \in [a; b]$ справедливо $f(x) \geqslant g(x)$, тогда

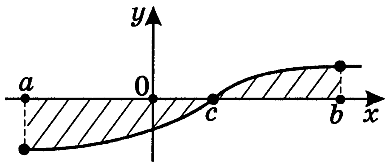
а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

б) если $f(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.





5. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

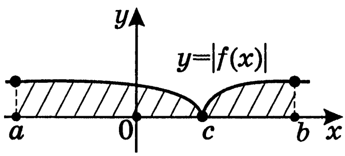
а) 

$f(c) = 0$

Отметим, что в этом случае

$f(x) \leqslant 0$ на $[a;c]$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[c;b]$, тогда

$$S_1 = \int\limits_a^c f(x)\,dx \leqslant 0, \quad S_2 = \int\limits_c^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad \Bigg| \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = S_2 - |S_1|.$$

б) 

В этом случае $f(c) = 0$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$, тогда

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = \int\limits_a^c |f(x)|\,dx + \int\limits_c^b |f(x)|\,dx = |S_1| + S_2.$$

Очевидно, что $|S_2 - |S_1|| \leqslant |S_1| + S_2$,

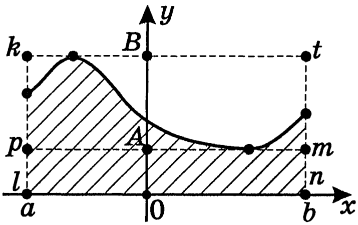
так как $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$, значит

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

в) При $f(x) \geqslant 0$ $|f(x)| = f(x)$, тогда

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|.$$

6. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, причем $y_{\min} = A$, $y_{\max} = B$ на $[a; b]$, тогда $A(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant B(b-a)$.



а) $lpmn$ — прямоугольник. $S_{lpmn} = ln \cdot lp = (b-a)A$;

б) $S_{lktn} = lk \cdot ln = B(b-a)$.

Очевидно, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant S_{lpmn} = A(b-a)$;

$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant S_{lktn} = B(b-a)$, значит

$$A(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant B(b-a).$$

7. Пусть $y = f(x)$ непрерывная и периодическая, где T — главный или основной период, тогда для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

8. Пусть $y = f(x)$:

а) непрерывна на $[-a; a]$;

б) $y = f(x)$ — четная, т. е. $\forall x \in [-a; a]$ $f(-x) = f(x)$,

то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.

9. Пусть $y = f(x)$:

а) непрерывна на $[-a; a]$;

б) $y = f(x)$ — нечетная, т. е. $\forall x \in [-a; a] \quad f(-x) = -f(x)$,

то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Примечание. Использование определенного интеграла вообще говоря значительно шире, чем просто вычисление площади криволинейной трапеции, поэтому здесь дана в основном только иллюстрация некоторых свойств через площадь под кривой, а не доказательство их.

Практикум 28

Вычислите:

1. $\int\limits_0^1 e^{kx}\,dx$;

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$;

3. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

6. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$;

7. $\int\limits_0^1 |1-3x|\,dx$;

8. $\int\limits_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x^2}\,dx$;

9. $\int\limits_{-1}^2 \frac{e^x dx}{1+e^x}$;

10. При каких положительных a

$$\int\limits_1^2 \left(a^2-(4-4a)\,x+4x^3\right)dx \leqslant 14?$$

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$;

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x\,dx$.

13. Докажите неравенство: $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \geqslant \cos x \geqslant 1-\frac{x^2}{2}$ на $[0;\infty)$;

14. Докажите неравенство: $\operatorname{tg} x+\sin x \geqslant 2x$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение практикума 28

Вычислите:

1. $\int\limits_0^1 e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx}\Big|_0^1 = \frac{1}{k}\left(e^k - e^0\right) = \frac{1}{k}\left(e^k - 1\right).$

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = (\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$

3. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3}.$

4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$

5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1.$

6. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}\sin x\,dx = -\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} =$

$= -\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - \cos 0\right) = 1 + \sqrt{2}.$

7. $\int\limits_0^1 |1-3x|\,dx =$ $\left[\ |1-3x| = \begin{cases} 1-3x; & x \leqslant \frac{1}{3} \\ 3x-1; & x \geqslant \frac{1}{3} \end{cases}\ \right]$

$= \int\limits_0^{\frac{1}{3}} (1-3x)\ dx + \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 (3x-1)\ dx = \left(x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{\frac{1}{3}}^1 =$

$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9} + \left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$

8. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x^2}\,dx =$ $\left[\text{ С учетом четности } y = \sqrt[3]{x^2}\ \right]$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{1}{8}} x^{\frac{2}{3}}\,dx = 2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}}x^{1+\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{8}} = 2\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{8}} =$$

$$= 2\left(\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} - 0\right) = \frac{3}{80}.$$

9. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}\frac{e^x dx}{1+e^x} = \int\limits_{-1}^{2}\frac{d\,(e^x+1)}{e^x+1} = \ln\left(1+e^x\right)\Big|_{-1}^{2} =$

$$= \ln\left(1+e^2\right) - \ln\left(1+e^{-1}\right) = \ln\frac{1+e^2}{1+e^{-1}} = \ln\frac{e+e^3}{1+e}.$$

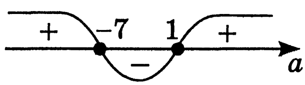
10. При каких положительных a

$$\int\limits_1^2\left(a^2-(4-4a)\,x+4x^3\right)dx \leqslant 14?$$

$$\left(a^2x-2(1-a)x^2+x^4\right)\Big|_1^2 \leqslant 14;$$

$$2a^2-8(1-a)+16-\left(a^2-2(1-a)+1\right) \leqslant 14;$$

$$2a^2-8+8a+16-a^2+2-2a-1 \leqslant 14;$$

$a^2+6a-7\leqslant 0;$ 

$a \in [-7;1]$.

11. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$

Вначале найдем $\displaystyle\int x\cos x\,dx =$

$$\left[\ \text{Пусть}\ \left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x\,dx\end{array}\right|\begin{array}{l} dx = du \\ v = \sin x\end{array}\right|\ \right]$$

$$= x\sin x - \int\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c, \text{ значит}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = (x\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0\cdot\sin 0 + \cos 0) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}.$$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x\,dx.$

Вначале найдем $\int e^x \sin 2x\,dx =$

$$\left[\ \left|\begin{matrix} \sin 2x = u \\ dv = e^x dx\end{matrix}\right| \begin{matrix} du = 2\cos 2x\,dx \\ v = e^x\end{matrix}\right|\ \right]$$

$$= e^x\sin 2x - 2\int e^x\cos 2x\,dx.$$

Затем найдем $\int e^x \cos 2x\,dx =$

$$\left[\ \left|\begin{matrix} \cos 2x = u \\ dv = e^x dx\end{matrix}\right| \begin{matrix} du = -2\sin 2x dx \\ v = e^x\end{matrix}\right|\ \right]$$

$= e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\,dx$, значит

$$\int e^x\sin 2x\,dx = e^x\sin 2x - 2\left(e^x\cos 2x + 2\int e^x\sin 2x\,dx\right);$$

$$5\int e^x\sin 2x\,dx = (\sin 2x - 2\cos 2x)\,e^x.$$

Таким образом $\int e^x\sin 2x\,dx = \frac{1}{5}e^x\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right).$

Теперь вычислим $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2x\,dx = \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\pi - 2\cos\pi\right) - \frac{1}{5}e^0\left(\sin 0 - 2\cos 0\right) =$$

$$= 0{,}4e^{\frac{\pi}{2}} + 0{,}4 = 0{,}4\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right).$$

13. Доказките неравенство:

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\geqslant\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}\quad\text{на}\quad[0;\infty).$$

а) Пусть $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1;\qquad f'(x)=-\sin x+x.$

Так как $\sin x<x$ на $(0;\infty)$ (см. доказательство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$), то $f'(x)>0$ на $(0;\infty)$; $f(0)=0$, значит $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1\geqslant 0$ на $[0;\infty)$, т. е. $\cos x\geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}$.

б) Пусть $\varphi(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}-1$ на $[0;\infty)$;

$\varphi'(x)=-\sin x+x-\dfrac{x^3}{6}.$

Положим $g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ на $[0;\infty)$),

тогда $g'(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1\geqslant 0$ (было уже доказано выше).

Значит $\varphi'(x)\leqslant 0$ на $[0;\infty)$, но тогда $\varphi(x)\leqslant 0$ на $[0;\infty)$, т. е. $\cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$, следовательно,

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\geqslant\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}.$$

14. Докажите неравенство: $\operatorname{tg}x+\sin x\geqslant 2x$ на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $f(x)=\operatorname{tg}x+2\sin x-3x;$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{(\cos x-1)^2(2\cos x+1)}{\cos^2 x}\quad\text{для}\quad\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),$$

значит $f'(x)>0$.

В силу непрерывности и так как

$f(0) = 0, \quad f(x) \geqslant 0$ на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$,

т. е. $\operatorname{tg} x + 2\sin x - 3x \geqslant 0$.

Тогда $\operatorname{tg} x + \sin x \geqslant 3x - \sin x \geqslant 3x - x = 2x$

$(\sin x < x$, а значит $-\sin x > -x)$.

Итак, $\operatorname{tg} x + \sin x \geqslant 2x$ на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Тренировочная работа 13

Вариант А

Вычислите:

1. $\int\limits_{1}^{2} x^3\,dx;$

2. $\int\limits_{-1}^{2} 3x\,dx;$

3. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx;$

4. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{x}\,dx;$

5. $\int\limits_{4}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}\,dx;$

6. $\int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx;$

7. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx;$

8. $\int\limits_{-2}^{-1} (4-3x)\,dx;$

9. $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x-3x^2\right)dx;$

10. $\int\limits_{-2}^{-1} \left(10-2x-6x^2\right)dx.$

Вариант Б

Вычислите:

1. $\int\limits_{-2}^{1} x\,(x-3)\,(2x+1)\,dx;$

2. $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx;$

3. $\int\limits_{1}^{4} \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx;$

4. $\int\limits_{-1}^{8} \frac{5x+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx;$

5. $\int\limits_{-3}^{1} \sqrt{3-2x}\,dx;$

6. $\int\limits_{0}^{5} \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,dx;$

7. $\int\limits_{0}^{2} 3e^{2x}\,dx;$

8. $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\,dx;$

9. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(3x-\frac{\pi}{2}\right)^3 dx;$

10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx.$

Решение тренировочной работы 13

Вариант А

Вычислите:

1. $$\int\limits_1^2 x^3 dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 1^4\right) = \frac{15}{4} = 3{,}75.$$

2. $$\int\limits_{-1}^2 3x\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^2 = \frac{3}{2}\left(2^2 - (-1)^2\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

3. $$\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left(\frac{1}{1-2}x^{1-2}\right)\Big|_{-1}^1 = -(x^{-1})\Big|_{-1}^1 =$$
$$= -(1-(-1)) = -2.$$

4. $$\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{x}\,dx = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^1 =$$
$$= \frac{2}{3}\left((1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{12}.$$

5. $$\int\limits_4^9 \frac{3}{2\sqrt{x}}\,dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_4^9 = 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_4^9 =$$
$$= 3\left(9^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}\right) = 3\,(3-2) = 3.$$

6. $$\int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = (\sin x)\Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1.$$

7. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\cos 2\pi - \cos(-\pi)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,(1-(-1)) = -1.$$

8. $\int\limits_{-2}^{-1}(4-3x)\,dx = \left(4x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{-1} =$

$= \left(4\cdot(-1) - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{3}{2}\cdot(-2)^2\right) =$

$= -4 - \frac{3}{2} + 8 + \frac{3}{2}\cdot 4 = 8{,}5.$

9. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x - 3x^2\right)dx = \left(x^2 - x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = (4-8) - (1+1) = -6.$

10. $\int\limits_{-2}^{-1}\left(10 - 2x - 6x^2\right)dx = \left(10x - x^2 - 2x^3\right)\Big|_{-2}^{-1} =$

$= (-10 - 1 + 2) - (-20 - 4 + 16) = -9 + 24 - 16 =$

$= -25 + 24 = -1.$

Вариант Б

Вычислите:

1. $\int\limits_{-2}^{1} x\,(x-3)\,(2x+1)\,dx =$

$$= \int\limits_{-2}^{1} \left(2x^3 - 5x^2 - 3x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 16 + \frac{5}{3}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 4\right) =$$

$$= -2\frac{2}{3} - 2 - 13\frac{1}{3} = -18.$$

2. $\int\limits_{-2}^{-1} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\limits_{-2}^{-1} \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x + \frac{1}{1-2}x^{1-2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2 + 1\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot 8 - 4 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{3} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2} = 4\frac{5}{6}.$$

3. $\int\limits_{1}^{4} \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx =$

$$= \left(x^2 - \frac{3}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{4} = \left(x^2 - 6x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{4} =$$

$$= (16 - 12) - (1 - 6) = 4 + 5 = 9.$$

4. $\int\limits_{-1}^{8}\frac{5x+2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\limits_{-1}^{8}\left(5x^{\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx =$

$$= \left(\frac{5}{1+\frac{2}{3}}x^{1+\frac{2}{3}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}}x^{1-\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{8} = \left(3x^{\frac{5}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{8} =$$

$$= 3\left(\left(8^{\frac{5}{3}}+8^{\frac{2}{3}}\right)-\left((-1)^{\frac{5}{3}}+(-1)^{\frac{2}{3}}\right)\right) =$$

$$= 3\left(2^5+2^2+1-1\right) = 3\,(32+4) = 3\cdot 36 = 108.$$

5. $\int\limits_{-3}^{1}\sqrt{3-2x}\,dx = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\,(3-2x)^{1+\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$

$$= \left(-\frac{1}{3}\,(3-2x)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = -\frac{1}{3}\left((3-2)^{\frac{3}{2}}-(3+2\cdot 3)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\,(1-27) = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

6. $\int\limits_{0}^{5}\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \left(\frac{6}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,(3x+1)^{1-\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{5} =$

$$= 4\left((3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{5} = 4\left((15+1)^{\frac{1}{2}}-(3\cdot 0+1)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 4\,(4-1) = 12.$$

7. $\int\limits_{0}^{2}3e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}\left(e^{2x}\right)\Big|_{0}^{2} = \frac{3}{2}\left(e^4-e^0\right) = 1,5\left(e^4-1\right).$

8. $\int\limits_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\cos 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} =$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot 2 = 0{,}5.$$

9. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)^3 dx = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)^{3+1}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} =$$
$$= \frac{1}{12}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)^4\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{12}\left(\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^4-\left(-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)^4\right) =$$
$$= \frac{1}{12}\left(\frac{\pi^4}{16}-16\pi^4\right) = -\frac{255}{12\cdot 16}\pi^4 = -\frac{85}{64}\pi^4.$$

10. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{4}.$$

Тренировочная работа 14

Вариант А

Вычислите:

1. $\int\limits_{-1}^{1}\left(2x^3-3x^2-4x+1\right)\,dx;$

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx;$

3. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[5]{x}}{x}\,dx;$

4. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 x\,dx;$

5. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\cos 3x\,dx;$

6. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 4x\sin 2x\,dx;$

7. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx;$

8. $\int\limits_{0}^{1}xe^{x^2}\,dx;$

9. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x+1)(x+3)(x+4)};$

10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\sin x\,dx.$

Вариант Б

Вычислите:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x - 1}\, dx;$

2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3x\, dx;$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\, dx;$

4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin 3x \sin x\, dx;$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos 2x \cos 4x\, dx;$

6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x\, dx;$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3x^2}{2x^3 + 3}\, dx;$

8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \left(2x^2 - 3x\right) \sin\left(4x^3 - 9x^2 + 5\right)\, dx;$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3\, dx}{(x-2)(x-1)(x+3)};$

10. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 6x \cos x\, dx.$

Решение тренировочной работы 14

Вариант А

Вычислите:

1. $$\int\limits_{-1}^{1}\left(2x^3-3x^2-4x+1\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^4-x^3-2x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-1-2+1\right)-\left(\frac{1}{2}+1-2-1\right)=-1{,}5+1{,}5=0.$$

2. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\cos\pi-\cos\left(-\pi\right)\right)=0.$$

3. $$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[5]{x}}{x}\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{4}{5}}\right)dx=$$
$$=\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}x^{1-\frac{2}{3}}-\frac{2}{1-\frac{4}{5}}x^{1-\frac{4}{5}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(3x^{\frac{1}{3}}-10x^{\frac{1}{5}}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$
$$=(3-10)-(-3+10)=-14.$$

Можно было воспользоваться и нечетностью функции.

4. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 x\,dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0\right)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

5. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 4x+\cos 2x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{2}\left(-1\right)\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

6. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x - \cos 6x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin 6x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\cdot 0\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6}\cdot 0\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

7. $$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= -\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right) = 0.$$

Здесь также можно использовать нечетность.

8. $$\int\limits_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1).$$

9. $$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+3)(x+4)}.$$

Решим задачу методом неопределенных коэффициентов.

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4} =$$
$$= \frac{A(x+3)(x+4) + B(x+1)(x+4) + C(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+4)} =$$
$$= \frac{A\left(x^2+7x+12\right) + B\left(x^2+5x+4\right) + C\left(x^2+4x+3\right)}{(x+1)(x+3)(x+4)} =$$
$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (7A+5B+4C)x + 12A+4B+3C}{(x+1)(x+3)(x+4)} =$$
$$= \frac{1}{(x+1)(x+3)(x+4)}.$$

Тогда

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 7A+5B+4C=0\,; \\ 12A+4B+3C=1 \end{cases} \begin{matrix} \\ 7\cdot\boxed{1}-\boxed{2} \\ 12\cdot\boxed{1}-\boxed{3} \end{matrix} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 0+2B+3C=0 \\ 0+8B+9C=-1 \end{cases};$$

$$4\cdot\boxed{2}-\boxed{3} \quad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 0+2B+3C=0\,; \\ 0+0+3C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\dfrac{1}{6} \\ B=-\dfrac{1}{2}\,. \\ C=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{6(x+1)}-\frac{1}{2(x+3)}+\frac{1}{3(x+4)},$$

значит

$$\int_0^2\frac{dx}{(x+1)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{6}\int_0^2\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{3}\int_0^2\frac{dx}{x+4}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x+1|\Big|_0^2-\frac{1}{2}\ln|x+3|\Big|_0^2+\frac{1}{3}\ln|x+4|\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{6}(\ln 3-\ln 1)-\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)+\frac{1}{3}(\ln 6-\ln 4)=$$

$$=\frac{1}{6}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 2=$$

$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 2=\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 2.$$

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\,dx.$ Пусть $\left|\begin{matrix} x=v \\ \sin x\,dx=du \end{matrix}\right|\begin{matrix} dx=dv \\ u=-\cos x \end{matrix}\right|$, тогда

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+c,$$

значит $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\,dx=(-x\cos x+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=$

$$=\left(-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

Вариант Б

Вычислите:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{4x^3-3x^2+x-3}{2x-1}\,dx=$

$$\left[\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -3x^2 & +x & -3 & 2x-1 \\ \cline{5-5}
4x^3 & -2x^2 & & & 2x^2-\frac12x+\frac14 \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & +x & & \\
 & -x^2 & +\frac12x & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac12x & -3 & \\
 & & \frac12x & -\frac14 & \\ \cline{3-4}
 & & & -2{,}75 &
\end{array}\right]$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(2x^2-\frac12x+\frac14\right)dx-\frac{11}{4}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{2x-1}=$$

$$=\left(\frac23x^3-\frac14x^2+\frac14x-\frac{11}{4}\cdot\frac12\ln|2x-1|\right)\Bigg|_{-1}^{0}=$$

$$=0-\left(-\frac23-\frac14-\frac14-\frac{11}{4}\cdot\frac12\ln3\right)=1\frac16+1\frac38\ln3.$$

2. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 3x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos6x}{2}dx=\frac12\left(x-\frac16\sin6x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$

$$=\frac12\left(\left(\frac{\pi}{3}-\frac16\cdot0\right)-\left(-\frac{\pi}{6}-\frac06\right)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

3. $\displaystyle\int_{-\frac34\pi}^{-\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx=\int_{-\frac34\pi}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos4x}{2}dx=\frac12\left(x+\frac14\sin4x\right)\Bigg|_{-\frac34\pi}^{-\frac{\pi}{4}}=$

$$=\frac12\left(\left(-\frac{\pi}{4}+\frac14\cdot0\right)-\left(-\frac34\pi+0\right)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

4. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \sin 3x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (\cos 2x - \cos 4x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{4}\sin\frac{8}{3}\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{4}\sin\frac{4}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

5. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos 2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\cos 6x + \cos 2x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{6}\cdot\sin 4,5\pi - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{6}\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x + \sin 2x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}(-1)\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

7. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{3x^2}{2x^3+3}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} \frac{d\left(2x^3+3\right)}{2x^3+3} =$

$= \frac{1}{2}\ln\left|2x^3+3\right|\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 3.$

8. $\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2-3x\right)\sin\left(4x^3-9x^2+5\right)\,dx =$

$\left[\begin{array}{l} 4x^3-9x^2+5=t; \quad \left(12x^2-18x\right)dx = dt, \\ \text{т. е.} \quad 6\left(2x^2-3x\right)dx = dt. \end{array}\right]$

$= -\frac{1}{6}\cos\left(4x^3-9x^2+5\right)\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{6}\left(\cos 0 - \cos 5\right) =$

$= \frac{1}{6}\left(\cos 5 - 1\right).$

9. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{3\,dx}{(x-2)(x-1)(x+3)}.$

Используем метод неопределенных коэффициентов.

$\frac{1}{(x-2)(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$

$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} =$

$= \frac{A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)(x+3)} =$

$= \frac{A\left(x^2+x-6\right)+B\left(x^2+2x-3\right)+C\left(x^2-3x+2\right)}{(x-2)(x-1)(x+3)} =$

$= \frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-3C)x-6A-3B+2C}{(x-2)(x-1)(x+3)} =$

$= \frac{1}{(x-2)(x-1)(x+3)}.$

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-3C=0 \\ -6A-3B+2C=1 \end{cases}; \quad \begin{array}{l} \\ \boxed{1}-\boxed{2} \\ \boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3} \end{array} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 0-B+4C=0 \\ -4A+0+0=1 \end{cases};$

$$\begin{cases} B+C=\dfrac{1}{4} \\ -B+4C=0 \\ A=-\dfrac{1}{4} \end{cases};\ \boxed{1}+\boxed{2}\quad \begin{cases} B+C=\dfrac{1}{4} \\ C=\dfrac{1}{20} \\ A=-\dfrac{1}{4} \end{cases};\quad \begin{cases} B=\dfrac{1}{5} \\ C=\dfrac{1}{20} \\ A=-\dfrac{1}{4} \end{cases},$$

тогда
$$\frac{1}{(x-2)(x-1)(x+3)}=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{5(x-2)}+\frac{1}{20(x+3)},$$

значит $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}\frac{3dx}{(x-2)(x-1)(x+3)}=$

$$=-3\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{4(x-1)}+3\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{5(x-2)}+3\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{20(x+3)}=$$

$$=-\frac{3}{4}\ln|x-1|\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{5}\ln|x-2|\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{20}\ln|x+3|\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{3}{4}(\ln 1-\ln 2)+\frac{3}{5}(\ln 2-\ln 3)+\frac{3}{20}(\ln 3-\ln 2)=$$

$$=\frac{3}{4}\ln 2+\frac{3}{5}\ln 2-\frac{3}{5}\ln 3+\frac{3}{20}\ln 3-\frac{3}{20}\ln 2=1{,}2\ln 2-0{,}45\ln 3.$$

10. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}6x\cos x\,dx.$

$$\left|\begin{array}{c|c} v=x & dv=dx \\ \cos x\,dx=du & \sin x=u \end{array}\right|;$$

$$\int x\cos x\,dx=\int v\,du=uv-\int u\,dv,\ \text{т. е.}$$

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+c.$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}6x\cos x\,dx=6(x\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=$$

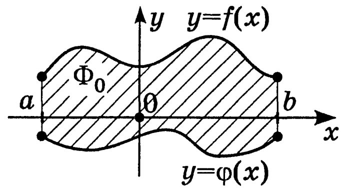
$$=6\left((0-1)-\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)=6\left(-1-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-9-\sqrt{3}\pi.$$

Вычисление площади

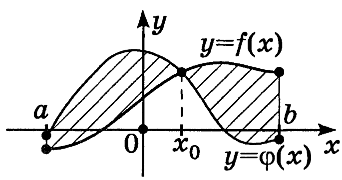
Одним из существенных приложений определенного интеграла является его использование для нахождения площадей фигур на плоскости.

Пример 1.



$y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ — непрерывны на $[a;b]$, причем $\forall\, x \in [a;b]$ $f(x) \geqslant \varphi(x)$, значит площадь фигуры Φ, ограниченной $\Gamma(y = f(x))$, $\Gamma(y = \varphi(x))$ и прямыми $x = a$; $x = b$, вычисляется по формуле $\boxed{S_\Phi = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))\, dx}$.

Пример 2.



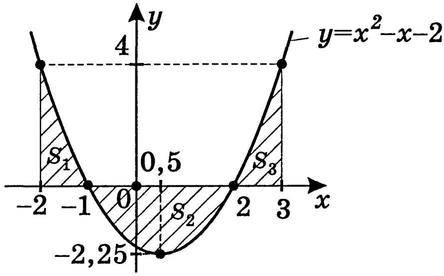
В данном случае формулой $S_\Phi = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))\, dx$ в чистом виде воспользоваться нельзя, так как на $[a;x_0]$ $f(x) \leqslant \varphi(x)$, а на $[x_0;b]$ $f(x) \geqslant \varphi(x)$, поэтому для того, чтобы воспользоваться формулой, нужно разбить $[a;b]$ на участки $[a;x_0]$ и $[x_0,b]$:

$$S_\Phi = \int\limits_a^{x_0} (\varphi(x) - f(x))\, dx + \int\limits_{x_0}^b (f(x) - \varphi(x))\, dx,$$

или $S_\Phi = \left| \int\limits_a^{x_0} (f(x) - \varphi(x))\, dx \right| + \left| \int\limits_{x_0}^b (f(x) - \varphi(x))\, dx \right|.$

Практикум 29

1. Вычислите площадь фигуры ограниченной: графиком $y=x^2-x-2$; прямыми $x=-2$, $x=3$ и $y=0$.



$$S_Ф=\left|\int_{-2}^{-1}\left(x^2-x-2\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx\right|+$$

$$+\left|\int_{2}^{3}\left(x^2-x-2\right)dx\right|;$$

$$S_1=\left|\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-2}^{-1}\right|=\left|\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-\frac{8}{3}-2+4\right)\right|=$$

$$=\left|-\frac{5}{6}+2+2\frac{2}{3}+2-4\right|=\left|2\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right|=\left|1\frac{5}{6}\right|=1\frac{5}{6};$$

$$S_2=\left|\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-1}^{2}\right|=$$

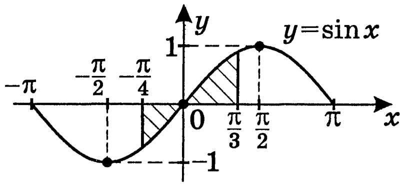
$$=\left|\left(2\frac{2}{3}-2-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right|=\left|3-6-2+\frac{1}{2}\right|=4\frac{1}{2};$$

$$S_3=\left|\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{2}^{3}\right|=\left|(9-4{,}5-6)-\left(2\frac{2}{3}-2-4\right)\right|=$$

$$=\left|3-4{,}5+6-2\frac{2}{3}\right|=\left|3-4{,}5+6-2\frac{2}{3}\right|=\left|4\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}\right|=1\frac{5}{6};$$

$$S_Ф=S_1+S_2+S_3=1\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+1\frac{5}{6}=8\frac{1}{6}\text{ (кв. ед.).}$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком $y=\sin x$ и прямыми $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$.



$$S_\Phi=\left|\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\sin x\,dx\right|+\left|\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx\right|=$$

$$=\left|(-\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\right|+\left|(-\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}\right|=$$

$$=\left|-\cos 0-\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right|+\left|\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)-(-\cos 0)\right|=$$

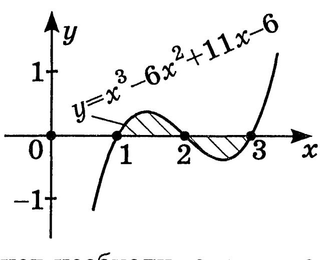
$$=\left|-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|+\left|-\frac{1}{2}+1\right|=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3-\sqrt{2}}{2}\ \text{(кв. ед.)}.$$

Далее по умолчанию мы не будем писать квадратных единиц.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной: графиком $y=x^3-6x^2+11x-6$ и прямой $y=0$.

Так как $y(1)=1-6+11-6=0$, то деля уголком и раскладывая на множители, получим $y=(x-1)(x-2)(x-3)$.

Построим эскиз графика.



В данном случае нет необходимости искать экстремумы.

$$S_\Phi = \int\limits_1^2 \left(x^3-6x^2+11x-6\right)\, dx + \left|\int\limits_2^3 \left(x^3-6x^2+11x-6\right)\, dx\right| =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)\Bigg|_1^2 + \left|\left(\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x\right)\Bigg|_2^3\right| =$$

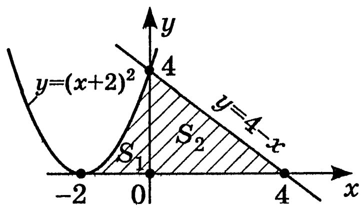
$$= |4-16+22-12-\frac{1}{4}+2-\frac{11}{2}+6| +$$

$$+ |\frac{81}{4}-27\cdot 2+\frac{99}{2}-18-4+16-22+12| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной:

графиком функции $y=(x+2)^2$; $y=4-x$ и $y=0$.

Из эскиза графиков следует, что отрезок интегрирования необходимо разбить на два $[-2;0]$ и $[0;4]$.



$$S_\Phi = S_1+S_2 = \int\limits_{-2}^{0} (x+2)^2\, dx + \int\limits_0^4 (4-x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x+2)^3\Big|_{-2}^{0} + \left(4x-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{8}{3}+16-8 = 10\frac{2}{3}.$$

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной:

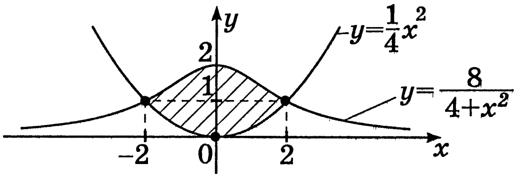
графиком $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ и $y=\dfrac{x^2}{4}$

(график $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ называется локоном Аньеди).

Найдем точки пересечения:

$$\frac{8}{4+x^2}=\frac{x^2}{4};\quad x^4+4x^2-32=0;\quad \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=-8\ \varnothing \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Построим эскиз графиков.



$$S_Ф = S_1 - S_2 = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{8}{4+x^2} - \frac{1}{4}x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2}\frac{8}{4+x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2}x^2\,dx = 4\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= 4(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1)) - \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\pi - \frac{4}{3} = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$$

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной: графиком $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = 0$ $(a > 0)$

С одной стороны, $S_Ф = \int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, поэтому сначала найдем неопределенный интеграл $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Пусть $x = a\sin t$, тогда

а) $dx = a\cos t\,dt$;

б) $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t$;

$$\int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + c.$$

Вернемся к переменной x, тогда $\sin t = \frac{x}{a}$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$;

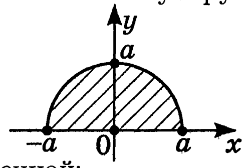
$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, значит

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + c =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c, \text{ тогда}$$

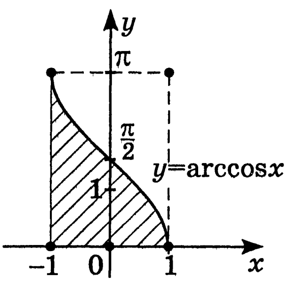
$$\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

С другой стороны, исходя из простейших геометрических соображений, заметим что $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ — полуокружность, так как $y^2 + x^2 = a^2$ — уравнение окружности. Значит в данном случае $S_\Phi = \frac{1}{2}\pi a^2$.



7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной: графиком $y = \arccos x$ и $y = 0$.

Так как $D(y) = [-1; 1]$, то учитывая, что $y = \arccos x \downarrow$, $\arccos 1 = 0$, получим $S_\Phi = \int\limits_{-1}^{1} \arccos x\,dx$, но вычислить напрямую такой интеграл довольно непросто. Попробуем его вычислить, исходя из геометрических соображений.



Действительно, этот определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции (см. эскиз). И если ее дополнить до прямоугольника со сторонами, определенными уравнениями $x = -1$; $x = 1$; $y = 0$; $y = \pi$, и площадь которого равна 2π, то учитывая центральную симметрию графика $y = \arccos x$ и прямоугольника относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, можно утверждать, что площадь криволинейной трапеции равна половине площади прямоугольника, т. е. π.

$$S_\Phi = \int\limits_{-1}^{1} \arccos x\,dx = \pi.$$

8. Вычислите площадь фигуры, ограниченной: графиком функции $y = 6x^2 - 11x + 5$; $y = \sin \pi x$; $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1\frac{1}{2}$.

а) $y = 6x^2 - 11x + 5$; $y = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{6} \end{array}\right.$.

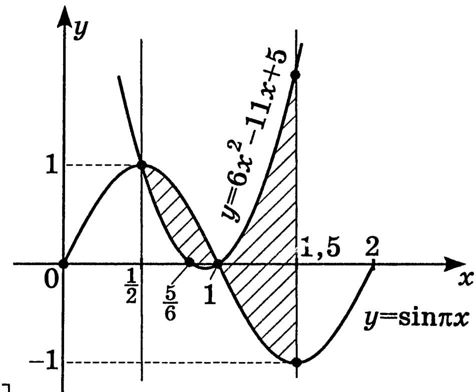
$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; $y(1) = 0$.

б) $y = \sin \pi x$.

$y(1) = 0$;

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

т. е. точки $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ и $(1; 0)$ — точки пересечения, с учетом интервалов монотонности. Тогда на $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right]$



$$S_\Phi = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sin \pi x - \left(6x^2 - 11x + 5\right)\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{1}^{1,5} \left(6x^2 - 11x + 5 - \sin \pi x\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} - \left(2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 5x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} +$$

$$+ \left(2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 5x\right)\Bigg|_{1}^{1,5} - \left(-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right)\Bigg|_{1}^{1,5} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} - 0\right) - \left(1,5 - \frac{11}{8}\right) + \left(\frac{15}{8} - 1,5\right) - \left(0 - \left(\frac{1}{\pi}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} = \frac{8 + \pi}{4}.$$

Тренировочная работа 15

I. Вычислите:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x \, dx$;

2. $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x^5} - x}{x^2} \, dx$;

3. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$;

4. $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$;

5. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$;

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x \, dx$.

7. Решите неравенство
$$\int\limits_0^a \left(2 - 4x + 3x^2\right) \, dx \leqslant a.$$

8. Найдите:
$$f(x) = A \cdot 2^x + B; \qquad \left.\begin{array}{l} f'(1) = 2 \\ \int\limits_0^3 f(x) \, dx = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} A = ? \\ B = ? \end{array}$$

9. Вычислите: $\int\limits_1^{\frac{7}{5}} \frac{x^{\frac{13}{4}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{9}{4}} - x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{1}{4}}} \, dx$;

10. Вычислите: $\int\limits_{-1}^{0} \left|2^x - 2^{-x}\right| \, dx$.

II. Вычислите площадь фигуры S_Φ, ограниченной:

1. $y = 6x - x^2; \quad y = x^2 - 4x + 8\,.$

2. $y = \sqrt{x}; \quad y = x^2;$ касательными в точке $x_0 = 1;$ прямыми $x = \dfrac{1}{2}; \quad x = 4\,.$

3. $y = x^2; \quad y = 4x^2; \quad y = 1; \quad y = 4.$

4. $y = x^2; \quad y = 6 - x; \quad y = \sqrt{x}.$

5. $y = \sqrt{3x - 2}; \quad y = \sqrt[3]{4x}; \quad y = 0.$

6. $y = 4 - x^2; \quad y = 2x - x^2; \quad x = 0.$

7. $y = \sqrt{x}; \quad y = |x - 2|.$

8. $y = x^3 - 9x; \quad y = 7x; \quad y = -5x.$

9. $y = \dfrac{2}{(2x - 1)^2};$ касательной в точке $x_0 = 1$ и прямой $x = 2.$

10. $y = \left|x^2 + 4x\right| - 2x; \quad y = 10 - x.$

11. $y = \left|4 - x^2\right| - 5; \quad y = 7.$

12. $(y - 1 + |x - 1|)(y - x^2 + 2x) \leqslant 0.$

Решение тренировочной работы 15

I. Вычислите:

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x\right)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{4}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{1}{4}.$

2. $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x^5} - x}{x^2}\, dx = \int\limits_1^9 \left(x^{\frac{5}{2}-2} - x^{1-2}\right)\, dx = \int\limits_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x}\right)\, dx =$

$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} - \ln x\right)\Bigg|_1^9 = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \ln x\right)\Bigg|_1^9 =$

$= \left(\frac{2}{3}\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} - \ln 9\right) - \left(\frac{2}{3} - \ln 1\right) =$

$= 18 - \ln 9 - \frac{2}{3} = 17\frac{1}{3} - 2\ln 3.$

3. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

Пусть $1 + \sqrt{x+1} = t;\quad \sqrt{x+1} = t - 1;\quad x + 1 = (t-1)^2;$
$x = (t-1)^2 - 1;\quad x = t^2 - 2t;\quad dx = (2t-2)\, dt$ и

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2(t-1)\, dt}{t} = \int \left(2 - \frac{2}{t}\right) dt = (2t - 2\ln t) + c.$$

Тогда $\int\limits_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \left(2\left(1+\sqrt{x+1}\right) - 2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)\Big|_0^3 =$

$= 6 - 2\ln 3 - 4 + 2\ln 2 = 2 + 2\ln\frac{2}{3}.$

4. $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 x\,dx.$

Вначале вычислим неопределенный интеграл

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\left(1-\cos^2 x\right)\,dx =$$

$$\left[\text{ Пусть } \cos x = t; \quad -\sin x\,dx = dt. \right]$$

$$= -\int \left(1-t^2\right)\,dt = -t + \frac{1}{3}t^3 + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$$

Значит $\int\limits_0^{\pi} \sin^3 x\,dx = \left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\Big|_0^{\pi} =$

$$= -\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi - \left(-\cos 0 + \frac{1}{3}\cos^3 0\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

5. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx.$

Найдем неопределенный интеграл $\int \sqrt{e^x-1}\,dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } \sqrt{e^x-1} = t; \quad \dfrac{e^x dx}{2\sqrt{e^x-1}} = dt; \quad dx = \dfrac{2t dt}{t^2+1}; \\ \text{где } e^x = t^2+1. \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2+1} = \int \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)\,dt = 2t - 2\operatorname{arctg} t + c =$$

$$= 2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + c.$$

Значит

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = 2\left(\sqrt{e^x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right)\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= 2\left(\sqrt{e^{\ln 2}-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{\ln 2}-1}\right) - 2(0 - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= 2(1 - \operatorname{arctg} 1) = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}.$$

6. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x\, dx.$

Вначале найдем неопределенный интеграл $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx =$

$$\left[\ \text{Положим} \left|\begin{matrix} x^2 = u \\ dv = \cos x\, dx \end{matrix}\right|\begin{matrix} du = 2x\, dx \\ v = \sin x \end{matrix}\right|.\ \right]$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx =$$

$$\left[\begin{matrix} \text{Пусть} \left|\begin{matrix} x = u \\ dv = \sin x\, dx \end{matrix}\right|\begin{matrix} du = dx \\ v = -\cos x \end{matrix}\right|\text{, тогда} \\ \displaystyle\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c_1. \end{matrix}\right]$$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$ Значит

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x\, dx = \left(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0 + 0 - 2 \cdot 0) =$$

$$= \frac{\pi^2\sqrt{3}}{18} + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

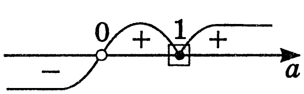
7. Решите неравенство:

$$\int\limits_0^a \left(2 - 4x + 3x^2\right)\, dx \leqslant a.$$

Так как $\displaystyle\int \left(2 - 4x + 3x^2\right)\, dx = 2x - 2x^2 + x^3 + c,$ то

$\left(2x - 2x^2 + x^3\right)\Big|_0^a \leqslant a,$ тогда

$2a - 2a^2 + a^3 \leqslant a; \qquad a^3 - 2a^2 + a \leqslant 0; \qquad a(a-1)^2 \leqslant 0.$



$a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}.$

8. Найдите: $f(x) = A \cdot 2^x + B$;

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 2 \\ \int\limits_0^3 f(x)\,dx = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} A = ? \\ B = ? \end{array}$$

$f'(x) = A \cdot 2^x \ln 2; \quad f'(1) = 2; \quad A \cdot 2\ln 2 = 2; \quad A = \log_2 e.$

$$\int\limits_0^3 \left(2^x \log_2 e + B\right)\,dx = \left(2^x \log_2^2 e + Bx\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 8\log_2^2 e + 3B - \log_2^2 e = 7; \qquad 7\log_2^2 e + 3B = 7;$$

$$3B = 7\left(1 - \log_2^2 e\right); \quad B = \frac{7}{3}\left(1 - \log_2^2 e\right).$$

Ответ: $A = \log_2 e$; $\quad B = \dfrac{7}{3}\left(1 - \log_2^2 e\right)$.

9. $\displaystyle\int\limits_1^{\frac{7}{5}} \frac{x^{\frac{13}{4}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{9}{4}} - x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{1}{4}}}\,dx.$

Преобразуем $\dfrac{x^{\frac{13}{4}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{9}{4}} - x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}}\left(x^3+1\right)}{x^{\frac{1}{4}}\left(x^2 - x + 1\right)}$,

тогда $\displaystyle\int\limits_1^{\frac{7}{5}} (x+1)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_1^{\frac{7}{5}} = \frac{1}{2}\left(\frac{49}{25} - 1\right) + \left(\frac{7}{5} - 1\right) =$

$$= \frac{12}{25} + \frac{2}{5} = \frac{22}{25} = 0{,}88.$$

10. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \left|2^x - 2^{-x}\right|\,dx.$

Так как $\left|2^x - 2^{-x}\right| = \begin{cases} 2^x - 2^{-x} & \text{если } x \geqslant 0 \\ 2^{-x} - 2^x & \text{если } x < 0 \end{cases}$, то получим

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left|2^x - 2^{-x}\right| dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(2^{-x} - 2^x\right) dx = \left(-2^{-x} - 2^x\right)\log_2 e\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \left(\left(-2^0 - 2^0\right) - \left(-2^1 - 2^{-1}\right)\right)\log_2 e =$$

$$= \left(-2 + \frac{1}{2} + 2\right)\log_2 e = \frac{1}{2}\log_2 e.$$

II. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиками.

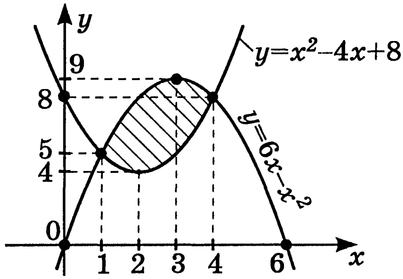
1. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиками $y = 6x - x^2$; $\quad y = x^2 - 4x + 8$.

$6x - x^2 = x^2 - 4x + 8;$

$2x^2 - 10x + 8 = 0;$

$x^2 - 5x + 4 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. .$$



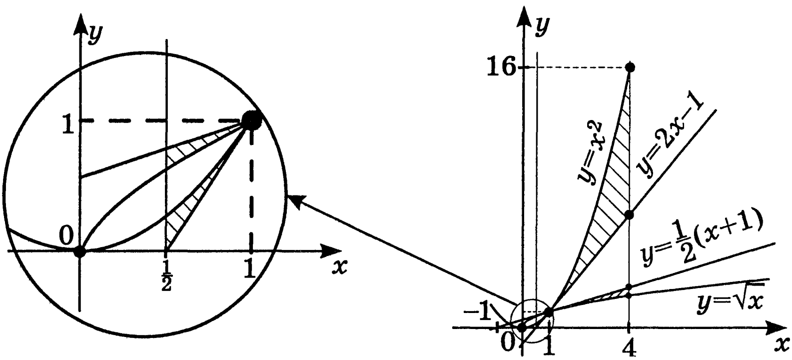
$$S_Ф = \int_1^4 \left((6x - x^2) - x^2 + 4x - 8\right)\,dx =$$

$$= \int_1^4 \left(-2x^2 + 10x - 8\right)\,dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right)\bigg|_1^4 =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 4^3 + 5\cdot 4^2 - 32 - \left(-\frac{2}{3} + 5 - 8\right) =$$

$$= -\frac{128}{3} + 80 - 32 + \frac{2}{3} + 3 = -42\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 51 = 9.$$

2. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиками $y = \sqrt{x}$; $\quad y = x^2$; касательными в точке $x_0 = 1$; прямыми $x = \frac{1}{2}$; $\quad x = 4$.



а) Для $y = x^2 \quad y'_x = 2x; \qquad y'_{x=1} = 2;$
$y = y(1) + y'_{x=1}(x-1).$
$y = 1 + 2(x-1) = 2x - 1. \qquad \boxed{y = 2x - 1}.$

б) Для $y = \sqrt{x} \quad y'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \; y'_{x=1} = \dfrac{1}{2}; \; y = y(1) + y'_{x=1}(x-1).$
$y = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}(x+1). \qquad \boxed{y = \dfrac{1}{2}(x+1)}.$

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$

$$S_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{12} - \left(\frac{5}{16} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\frac{11}{48} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2} - 11}{48}.$$

$$S_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^2\, dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}.$$

$$S_3 = \int\limits_{1}^{4} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{1}{3}(x-1)^3\Bigg|_{1}^{4} = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 0 = 9.$$

$$S_4 = \int\limits_{1}^{4} \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right) dx = \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{1}^{4} =$$

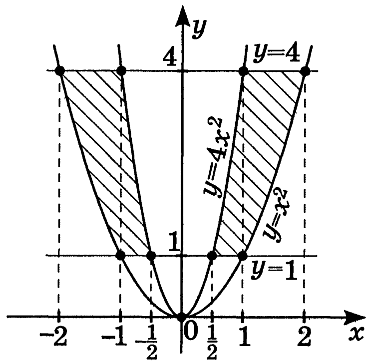
$$= \left(\frac{1}{4}\cdot 5^2 - \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 6\frac{1}{4} - 5\frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$S = \frac{8\sqrt{2} - 11}{48} + \frac{1}{24} + 9 + \frac{7}{12} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{24} + \frac{7}{12} - \frac{11}{48} + 9 =$$

$$= 9\frac{19}{48} + \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

3. Вычислите площадь фигуры S_Φ, ограниченной графиками $y = x^2$; $y = 4x^2$; $y = 1$; $y = 4$.

$S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.



Так как $\left.\begin{matrix} y = x^2 \\ y = 4x^2 \end{matrix}\right|$ — четные функции, то $S_\Phi = 2(S_1 + S_2)$

$$S_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(4x^2 - 1\right) dx = \left.\left(\frac{4}{3}x^3 - x\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(\frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

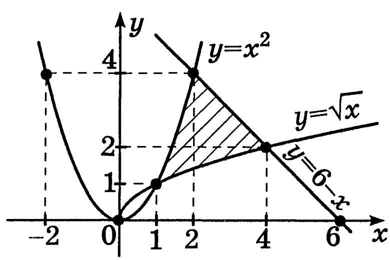
$$S_2 = \int\limits_{1}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left.\left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\right|_{1}^{2} =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{1}{3}\right) = 1\frac{2}{3}.$$

$$S_\Phi = 2\left(\frac{2}{3} + 1\frac{2}{3}\right) = 4\frac{2}{3}.$$

4. Вычислите площадь фигуры S_Φ, ограниченной графиками $y = x^2$; $y = 6 - x$; $y = \sqrt{x}$.

$S_\Phi = S_1 + S_2$.



$$S_1 = \int\limits_{1}^{2} \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx = \left.\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\right|_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 2\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} = 3 - \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

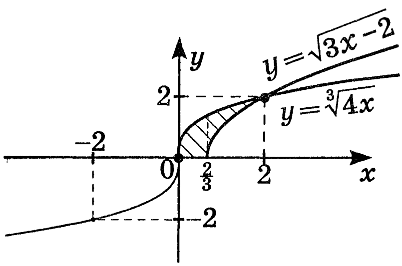
$$S_2 = \int\limits_2^4 (6 - x - \sqrt{x})\, dx = \left(6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \left(24 - 8 - \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{1}\right) - \left(12 - 2 - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}\right) =$$

$$= 16 - 5\frac{1}{3} - 10 + \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{3}.$$

$$S_Ф = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{3} + \frac{2 + 4\sqrt{2}}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}.$$

5. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиками $y = \sqrt{3x - 2}$; $y = \sqrt[3]{4x}$; $y = 0$.



Найдем абсциссы точек пересечения. $\sqrt{3x - 2} = \sqrt[3]{4x}$.

$(3x - 2)^3 = (4x)^2$;

$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - 16x^2 = 0$;

$27x^3 - 70x^2 + 36x - 8 = 0$;

$f(2) = 27 \cdot 8 - 70 \cdot 4 + 72 - 8 = 0$;

$$\begin{array}{r|l}
-\; 27x^3 - 70x^2 + 36x - 8 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{27x^3 - 54x^2} & 27x^2 - 16x + 4 \quad (D > 0) \\
-\; -16x^2 + 36x & \\
\underline{-16x^2 + 32x} & \\
-\; 4x - 8 & \\
\underline{4x - 8} &
\end{array}$$

$$S_Ф = \int\limits_0^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{4x}\, dx + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{2} \left(\sqrt[3]{4x} - \sqrt{3x-2}\right)\, dx =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}} x^{1+\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}} + \left(\sqrt[3]{4}\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}}^{2} =$$

$$= \sqrt[3]{4}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}} - 0\right) + \sqrt[3]{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{4}{3}} - \sqrt[3]{4}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}} - \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - 0\right) =$$

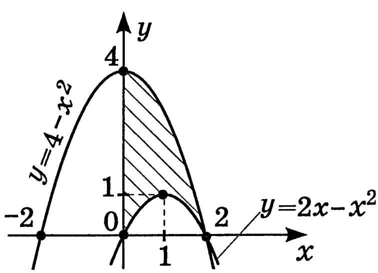
$$= \frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{3}\cdot 3^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 2^{2}\cdot 3^{-\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}\cdot 2^{2} - 3^{1-\frac{4}{3}}\cdot 2^{2-2} - 2^{4}\cdot 3^{\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}} =$$

$$= 3^{-\frac{1}{3}} + 3 - 3^{-\frac{1}{3}} - \frac{16}{9} = 1\frac{2}{9}.$$

6. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиками $y = 4 - x^2$; $y = 2x - x^2$; $x = 0$.

Начертим эскиз графиков.



$$S_Ф = \int\limits_0^{2} \left(4 - x^2 - (2x - x^2)\right)\, dx = \int\limits_0^{2} \left(4 - x^2 - 2x + x^2\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{2} (4 - 2x)\, dx = \left(4x - x^2\right)\Big|_0^{2} = 8 - 4 = 4.$$

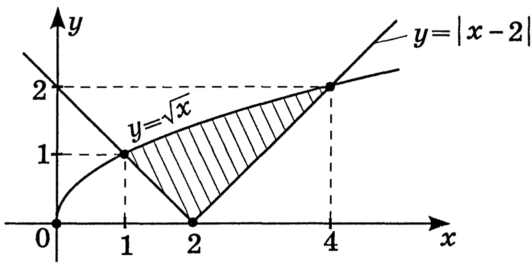
7. Вычислите площадь фигуры S_Φ, ограниченной графиками $y = \sqrt{x}$; $y = |x - 2|$.

Найдем точки пересечения и начертим эскиз графиков.

а) $\sqrt{x} = |x - 2|$;

$x = x^2 - 4x + 4$; $\quad x^2 - 5x + 4 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$;

б) $y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2; \ x \geqslant 2 \\ 2 - x; \ x \leqslant 2 \end{cases}$;



$$S_\Phi = \int\limits_1^2 (\sqrt{x} - (2 - x))\, dx + \int\limits_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2))\, dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 -$$

$$- \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 = 2\frac{1}{6}.$$

8. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиками $y = x^3 - 9x$; $y = 7x$; $y = -5x$.

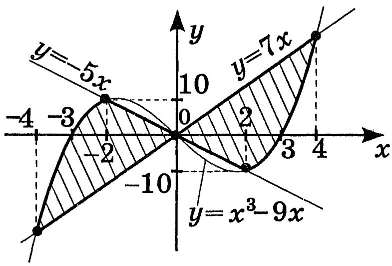
Найдем точки пересечения и начертим эскиз графиков.

а) $x^3 - 9x = -5x$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.;$$

б) $x^3 - 9x = 7x$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right..$$



Так как $f(x) = -f(x)$ для всех трех функций, то их графики центрально-симметричны относительно начала координат. Тогда $S_Ф = 2\left(S_1 + S_2\right)$.

$$S_1 = \int_0^2 (7x - (-5x))\,dx = \int_0^2 12x\,dx = \left(6x^2\right)\Big|_0^2 = 24;$$

$$S_2 = \int_2^4 \left(7x - x^3 + 9x\right)\,dx = \int_2^4 \left(16x - x^3\right)\,dx =$$

$$= \left(8x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_2^4 = 128 - 64 + 32 - 4 = 92;$$

$$S_Ф = 2(24 + 92) = 232.$$

9. Вычислите площадь фигуры $S_Ф$, ограниченной графиком $y = \dfrac{2}{(2x-1)^2}$; касательной в точке $x_0 = 1$ и прямой $x = 2$.

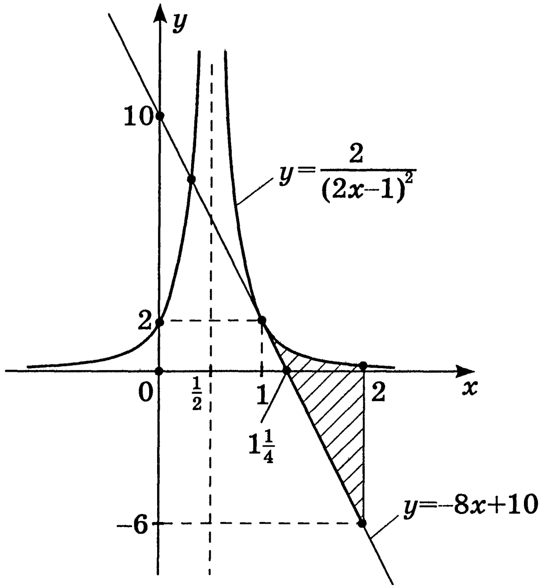
Найдем уравнение касательной.

$$y' = -4(2x-1)^{-2-1} \cdot 2 = -\frac{8}{(2x-1)^3};$$

$$y(1) = \frac{2}{(2 \cdot 1 - 1)^2} = 2; \quad y'(1) = -\frac{8}{(2 \cdot 1 - 1)^3} = -8;$$

$$y = 2 + (-8)(x - 1); \quad \boxed{y = -8x + 10}.$$

Построим эскиз графиков.



$$S_Ф = \int_1^2 \left(\frac{2}{(2x-1)^2} - (-8x+10)\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{(2x-1)^2} + 8x - 10\right) dx.$$

Найдем $\int \frac{2}{(2x-1)^2}\, dx$.

Пусть $2x - 1 = t$; $\quad 2\,dx = dt$, тогда

$$\int \frac{2}{(2x-1)^2}\, dx = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{1-2} t^{1-2} + c = -\frac{1}{2x-1} + c,$$

значит $S_Ф = \left(-\frac{1}{2x-1} + 4x^2 - 10x\right)\Big|_1^2 =$

$$= \left(-\frac{1}{4-1} + 16 - 20\right) - (-1 + 4 - 10) = 2\frac{2}{3}.$$

10. Вычислите площадь фигуры S_Φ, ограниченной графиками $y = \left|x^2 + 4x\right| - 2x;\quad y = 10 - x.$

Построим эскиз графиков, найдем точки их пересечения.

а) $y = \left|x^2 + 4x\right| - 2x = \begin{cases} x^2 + 4x - 2x; & x \leqslant -4;\ x \geqslant 0 \\ -x^2 - 4x - 2x; & -4 \leqslant x \leq 0 \end{cases};$

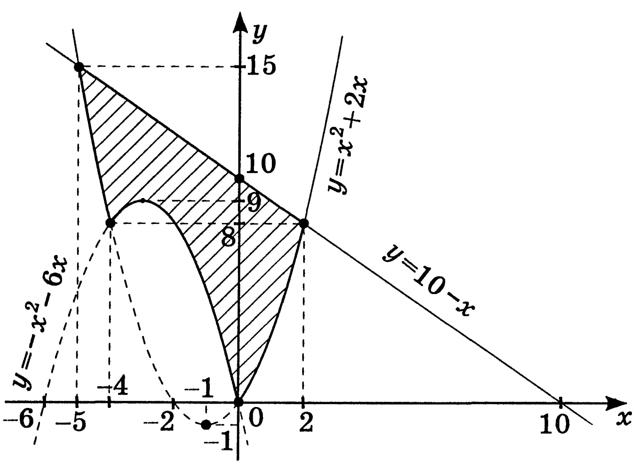
$$y = \begin{cases} x^2 + 2x; & x \leqslant -4; x \geqslant 0 \\ -x^2 - 6x; & -4 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases};$$

б) $\left|x^2 + 4x\right| - 2x = 10 - x$

$\left|x^2 + 4x\right| = 10 + x;\quad \left(x^2 + 4x\right)^2 = (10 + x)^2;$

$\left(x^2 + 4x - 10 - x\right)\left(x^2 + 4x + 10 + x\right) = 0;$

$\left(x^2 + 3x - 10\right)\left(x^2 + 5x + 10\right) = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 2 \end{array}\right..$
$D < 0$



$S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3;$

$$S_1 = \int\limits_{-5}^{-4} \left(10 - x - \left(x^2 + 2x\right)\right)\,dx = \int\limits_{-5}^{-4} \left(10 - 3x - x^2\right)\,dx =$$

$$= \left(10x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-5}^{-4} =$$

$$= \left(-40 - 24 + \frac{64}{3}\right) - \left(-50 - \frac{75}{2} + \frac{125}{3}\right) =$$

$$= -64 + 21\frac{1}{3} + 50 + 37\frac{1}{2} - 41\frac{2}{3} = -84\frac{1}{3} + 87{,}5 = 3\frac{1}{6};$$

$$S_2 = \int\limits_{-4}^{0} \left((10 - x) - \left(-x^2 - 6x\right)\right)dx = \int\limits_{-4}^{0} \left(x^2 + 5x + 10\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 10x\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 0 - \left(-\frac{64}{3} + 40 - 40\right) = 21\frac{1}{3};$$

$$S_3 = \int\limits_{0}^{2} \left((10 - x) - \left(x^2 + 2x\right)\right)\,dx = \int\limits_{0}^{2} \left(10 - 3x - x^2\right)\,dx =$$

$$= \left(10x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0}^{2} = 20 - 6 - \frac{8}{3} - 0 = 20 - 8\frac{2}{3} = 11\frac{1}{3};$$

$$S_\Phi = 3\frac{1}{6} + 21\frac{1}{3} + 11\frac{1}{3} = 35\frac{5}{6}.$$

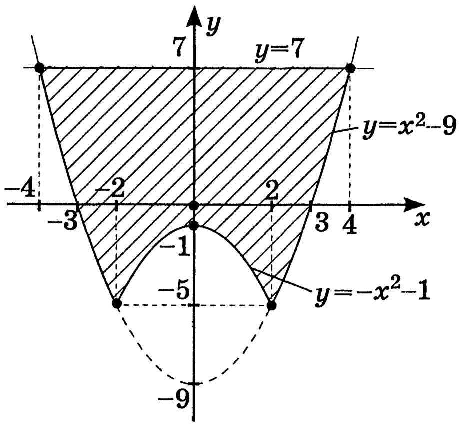
11. Вычислите площадь фигуры S_Φ, ограниченной графиками $y = \left|4 - x^2\right| - 5;\quad y = 7.$

Построим эскиз графиков, найдем точки их пересечения.

а) $\left|4 - x^2\right| - 5 = \begin{cases} 4 - x^2 - 5; & -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 4 - 5; & x \leqslant -2; x \geqslant 2 \end{cases};$

$$y = \begin{cases} -x^2 - 1; \ -2 \leqslant x \leq 2 \\ \ \ x^2 - 9; \ x \leqslant -2; \ x \geqslant 2 \end{cases};$$

$$x^2 - 9 = 7; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.;$$



$f(-x) = f(x)$ — четная, поэтому $S_\Phi = 2\left(S_1 + S_2\right)$.

$$S_1 = \int_0^2 \left(7 - \left(-x^2 - 1\right)\right)\, dx = \int_0^2 \left(8 + x^2\right)\, dx =$$

$$= \left(8x + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 16 + \frac{8}{3} - 0 = 18\frac{2}{3};$$

$$S_2 = \int_2^4 \left(7 - \left(x^2 - 9\right)\right)\, dx = \int_2^4 \left(16 - x^2\right)\, dx =$$

$$= \left(16x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_2^4 = 64 - \frac{64}{3} - \left(32 - \frac{8}{3}\right) = 32 - 21\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = 13\frac{1}{3};$$

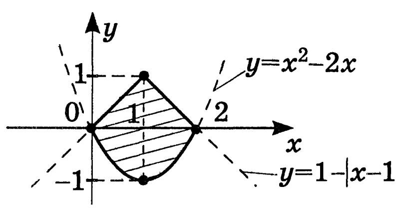
$$S_\Phi = 2\left(18\frac{2}{3} + 13\frac{1}{3}\right) = 64.$$

12. Найдите площадь фигуры, ограниченной заданным неравенством $(y - 1 + |x - 1|)(y - x^2 + 2x) \leqslant 0$.

Построим эскиз графиков и определим области ограничения.

а) $y = 1 - |x - 1| =$

$$= \begin{cases} 2 - x; & x \geqslant 1 \\ x; & x < 1 \end{cases}$$



б) Очевидно, что при $0 \leqslant x \leqslant 2$
$y = f(x) = 1 - |x - 1| \geqslant 0$, а $y = g(x) = x^2 - 2x \leqslant 0$, т. е. неравенство $(y - 1 + |x - 1|)(y - x + 2x) \leqslant 0$ верно.

в) При $x < 0$ или $x > 2$ ограничения нет. Замкнутая фигура не определена.

г) Так как обе кривые симметричны относительно $x = 1$, то $S_\Phi = 2\int\limits_0^1 \left(x - \left(x^2 - 2x\right)\right)\,dx = 2\int\limits_0^1 \left(-x^2 + 3x\right)\,dx =$
$$= 2\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) - 0\right) = 2\frac{1}{3}.$$

Решение задач

Тренировочная работа 16

I. Вычислите:

1. $\displaystyle\int \left(3x^{-5} + 2\cos^2 3x - \frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx;$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{3x^{-3} + \sqrt[3]{x^2} + x^2}{\sqrt[6]{x^5}} - \operatorname{ctg}^2 2x + 3^x\right) dx;$

3. $\displaystyle\int \left(\sin 2x \cos 4x + \frac{7}{x}\right) dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{8x^3\,dx}{x^8+1};$

5. $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x^2};$

6. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x};$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3};$

8. $\displaystyle\int \frac{(11x-4)\,dx}{x^2+2x-8};$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)} \quad (x>1);$

10. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1};$

11. $\displaystyle\int \left(\frac{4}{\sqrt{x+2}} + \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{3}{1+16x^2}\right) dx;$

12. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx;$

13. $\displaystyle\int \frac{3x-9}{\sqrt{x^2-2x-49}}\,dx;$

14. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1}$;

15. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 2x\, dx$;

16. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \left(|2x+1| - |x|\right)^2 dx$.

II. Название группы примеров:

1. Дано $f(x) = 9 - x^2$; $g(x) = 2x^2 - 6x$.

Найдите:

а) угол между кривыми;

б) S_Φ, ограниченную кривыми $f(x)$ и $g(x)$, касательными, проведенными в точке пересечения, и прямыми $x = -2$; $x = 1$.

2. Вычислите S_Φ, ограниченную $y = x^3 - 3x$ и касательными, параллельными прямой $y = 9x + 11$.

3. Вычислите площадь, ограниченную $y = x^2$ и касательными к кривой, проведенными через точку $A\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

4. Вычислите площадь, ограниченную $y = 6x - x^2$; $x = 1$; $x = 4$; касательной к кривой, проведенной в точке, лежащей на $[1; 4]$. Найдите: $S(x)$; $S_{\text{наиб}}$; $S_{\text{наим}}$.

5. Докажите:

а) $\displaystyle\frac{\pi}{2} \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} \leqslant \pi$;

б) $\displaystyle 3{,}5 \leqslant \int\limits_{0}^{2} \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2}\, dx \leqslant 4{,}5$.

6. Найдите область изменения площади фигуры, ограниченной графиком $y = x^2 + 6x + 10$, касательной к кривой и прямыми $x = -4$ и $x = -1$.

Решение тренировочной работы 16

I. Вычислите:

1. $$\int\left(3x^{-5}+2\cos^2 3x-\frac{2}{\sin^2 2x}+\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=$$
$$=\int 3x^{-5}\,dx+\int(1+\cos 6x)\,dx-2\int\frac{dx}{\sin^2 2x}+5\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx=$$
$$=\frac{3}{1-5}x^{1-5}+x+\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{2}{2}\operatorname{ctg}2x+\frac{5}{1-\frac{3}{4}}x^{1-\frac{3}{4}}+c=$$
$$=-\frac{3}{4}x^{-4}+\frac{1}{6}\sin 6x+\operatorname{ctg}2x+20x^{\frac{1}{4}}+x+c.$$

2. $$\int\left(\frac{3x^{-3}+\sqrt[3]{x^2}+x^2}{\sqrt[6]{x^5}}-\operatorname{ctg}^2 2x+3^x\right)dx=$$
$$=\int\left(3x^{-3-\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}+x^{2-\frac{5}{6}}+1-\frac{1}{\sin^2 2x}+3^x\right)dx=$$
$$=\frac{3}{1-3\frac{5}{6}}x^{1-3\frac{5}{6}}+\frac{1}{1-\frac{1}{6}}x^{1-\frac{1}{6}}+\frac{1}{1+2-\frac{5}{6}}x^{1+2-\frac{5}{6}}+$$
$$+x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x+3^x\log_3 e+c=$$
$$=-\frac{18}{17}x^{-2\frac{5}{6}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2x+3^x\log_3 e+c.$$

3. $$\int\left(\sin 2x\cos 4x+\frac{7}{x}\right)dx=\int\left(\frac{1}{2}(\sin 6x-\sin 2x)+\frac{7}{x}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+7\ln|x|+c=$$
$$=-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x+7\ln|x|+c.$$

4. $$\int\frac{8x^3\,dx}{x^8+1}=\quad\Big[\text{ Пусть } x^4=t;\quad 4x^3\,dx=dt.\Big]$$
$$=\int\frac{2\,dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+c=2\operatorname{arctg}x^4+c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x^2} =$ $\left[\ \text{Пусть } \ln x = t;\quad \frac{1}{x}\,dx = dt;\quad x = e^t.\ \right]$

$$= \int \frac{t\,dt}{e^t} = \left[\begin{array}{l}\text{(метод интегрирования по частям)}\\ \left|\begin{array}{l|l} t = u & dt = du \\ dv = e^{-t}dt & v = -e^{-t}\end{array}\right|\end{array}\right]$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -e^{-\ln x}\cdot\ln x - e^{-\ln x} + c = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c.$$

6. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} =$ $\left[\ \left|\begin{array}{l|l} x = u & dx = du \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x\end{array}\right|\ \right]$

$$= x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x + \int \frac{d\cos x}{\cos x} = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c.$$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3} =$

$\left[\ \text{Пусть } \sqrt{x+2} = t;\quad \dfrac{dx}{2\sqrt{x+2}} = dt;\quad dx = 2t\,dt\ \right]$

$$= \int \frac{2t\,dt}{t+3} = \int \left(2 - \frac{6}{t+3}\right) dt = 2t - 6\ln(t+3) + c =$$

$$= 2\sqrt{x+2} - 6\ln\left(\sqrt{x+2}+3\right) + c.$$

8. $\displaystyle\int \frac{(11x-4)\,dx}{x^2+2x-8} =$

$$= \int \left(\frac{11(x+1)}{x^2+2x-8} - \frac{15}{(x+1)^2-9}\right) dx =$$

$\left[\ \text{Пусть } x^2+2x-8 = t;\quad 2(x+1)\,dx = dt\ \right]$

$$= \frac{11}{2}\int \frac{dt}{t} - 15\int \frac{dx}{(x+1)^2-9} =$$

$$= \frac{11}{2}\ln|t| - \frac{15}{6}\cdot\ln\left|\frac{(x+1)-3}{(x+1)+3}\right| + c =$$

$$= \frac{11}{2}\ln\left|x^2+2x-8\right| - \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right| + c.$$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)} \quad (x>1).$

Применим известный метод неопределенных коэффициентов.

$$\frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} =$$
$$= \frac{A\left(x^2-1\right) + B\left(x^2-x\right) + C\left(x^2+x\right)}{x(x+1)(x-1)} =$$
$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (C-B)x - A}{x(x+1)(x-1)}.$$

Так как $1 = (A+B+C)x^2 + (C-B)x - A$,

то $\begin{cases} -A = 1 \\ C-B=0 \\ A+B+C=0 \end{cases}$, значит $\begin{cases} A=-1 \\ B=\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases}$,

т. е. $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$,

тогда $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x-1)} =$

$$= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}\right) dx =$$
$$= -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + c = \ln\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x} + c.$$

10. $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} =$

а) Пусть $\cos x = t$; $\quad -\sin x\, dx = dt$.

Тогда $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1} =$

$$= \int \frac{-dt}{2t^2 - 3t + 1} = -\int \frac{dt}{(t-1)(2t-1)};$$

б) $\dfrac{1}{(t-1)(2t-1)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{2t-1} = \dfrac{A(2t-1)+B(t-1)}{(t-1)(2t-1)} =$

$= \dfrac{2At - A + Bt - B}{(t-1)(2t-1)} = \dfrac{(2A+B)t - A - B}{(t-1)(2t-1)}$, значит

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A - B = 1 \end{cases} \qquad \boxed{1} + \boxed{2}$$

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ A + 0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -2 \\ A = 1 \end{cases},$$

т. е. $\dfrac{1}{(t-1)(2t-1)} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{2}{2t-1}$.

Итак, $-\displaystyle\int \frac{dt}{(t-1)(2t-1)} = \int \left(\frac{2}{2t-1} - \frac{1}{t-1}\right) dt =$

$= 2 \cdot \dfrac{1}{2} \ln|2t-1| - \ln|t-1| + c = \ln|2\cos x - 1| - \ln|\cos x - 1| + c =$

$= \ln\left|\dfrac{2\cos x - 1}{\cos x - 1}\right| + c. \quad \left(\begin{cases} \cos x \neq 1 \\ \cos x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}\right)$

11. $\displaystyle\int \left(\frac{4}{\sqrt{x+2}} + \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{3}{1+16x^2}\right) dx =$

$= 4\displaystyle\int (x+2)^{-\frac{1}{2}}\, dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + (x)^2} =$

$= 4 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}(x+2)^{1-\frac{1}{2}} + 5\arcsin\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{16} \cdot 4\,\mathrm{arctg}\, 4x + c =$

$= 8\sqrt{x+2} + 5\arcsin\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\, 4x + c.$

12. $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \quad \left[\ \text{Пусть } \arcsin 2x = t; \quad \frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = dt.\ \right]$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^t\, dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{\arcsin 2x} + c.$

13. $\displaystyle\int \frac{3x-9}{\sqrt{x^2-2x-49}}\,dx =$

$$= \int \frac{3(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-49}}\,dx - \int \frac{6\,dx}{\sqrt{(x-1)^2-50}}.$$

Пусть $x^2-2x-49=t;\quad 2(x-1)\,dx = dt,$

тогда $\displaystyle\int \frac{3(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-49}} =$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}t^{1-\frac{1}{2}} + c = 3t^{\frac{1}{2}} + c = 3\sqrt{x^2-2x-49} + c.$$

Так как

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-50}} = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-49}\right| + c, \text{ то}$$

$$\int \frac{3x-9}{\sqrt{x^2-2x-49}}\,dx = \int \frac{3(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-49}} - \int \frac{6\,dx}{\sqrt{(x-1)^2-50}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2-2x-49} - 6\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-49}\right| + c.$$

14. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1} = \int \frac{\operatorname{ctg} x\,dx}{\sin^2 x\left(3 + 2\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)} =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } \operatorname{ctg} x = t; \quad -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = dt. \\ \text{Учтем, что } \dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x. \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{-t\,dt}{3+2t^2-(1+t^2)} = -\int \frac{t\,dt}{t^2+2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|t^2+2\right| + c = -\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{ctg}^2 x + 2\right) + c.$$

15. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 2x\, dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Учтем, что} \\ \sin^3 2x = \frac{1}{2}\sin 2x(1-\cos 4x) = \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2x \cos 4x) = \\ = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 6x. \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (3\sin 2x - \sin 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{6}\cos 6x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{6}\cos 2\pi + \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\cos\frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{48}.$$

16. $\int\limits_{-1}^{1} (|2x+1| - |x|)^2\, dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } f(x) = (|2x+1| - |x|)^2 \text{, тогда} \\ \text{на } \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \quad f(x) = (-2x-1+x)^2 = (x+1)^2; \\ \text{на } \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \quad f(x) = (2x+1+x)^2 = (3x+1)^2; \\ \text{на } [0;1] \quad f(x) = (2x+1-x)^2 = (x+1)^2. \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{-0,5} + \frac{1}{9}(3x+1)^3\Big|_{-0,5}^{0} + \frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - 0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} + 2\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 2{,}5.$$

II. Название группы примеров:

1. Дано $f(x) = 9 - x^2$; $\quad g(x) = 2x^2 - 6x$.

а) Найдите угол между кривыми.

Выясним для этого наличие точек пересечения:

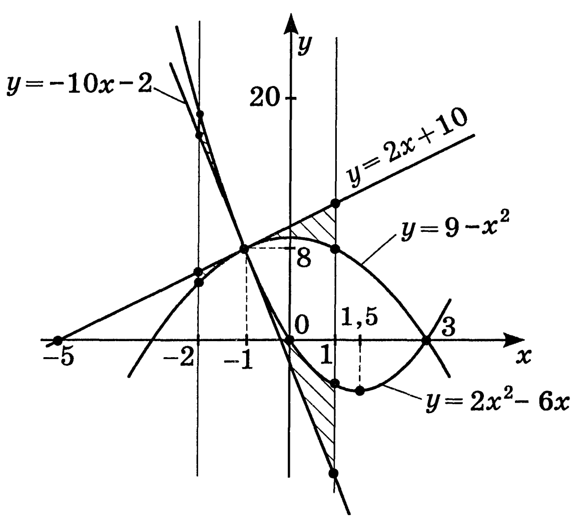
$g(x) = f(x)$; $\quad 9 - x^2 = 2x^2 - 6x$;

$3x^2 - 6x - 9 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

1. $f'(x) = -2x$; $\quad f'(3) = -6 = k_1$;
   $g'(x) = 4x - 6$; $\quad g'(3) = 6 = k_2$.
   $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, т. е. $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{-6-6}{1+6(-6)} = \dfrac{12}{35}$;
   $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{12}{35}$.

2. $x = -1$; $\quad f'(-1) = 2$; $\quad g'(-1) = -10$;
   $\operatorname{tg}\theta_2 = \dfrac{-10-2}{1+2(-10)} = \dfrac{12}{19}$; $\quad \theta_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{12}{19}$.

б) Вычислите S_Φ, ограниченную кривыми $f(x)$ и $g(x)$, касательными, проведенными в точке пересечения, и прямыми $x = -2$; $\quad x = 1$.



1. $f'(-1) = 2;\quad f(-1) = 8;\quad y = 8 + 2(x+1);$
$y = 2x + 10$ — касательная.

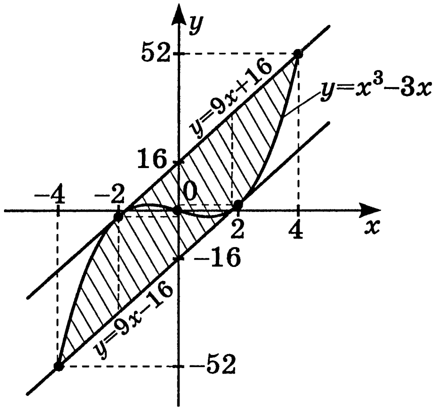
2. $g'(-1) = -10;\quad g(-1) = 8;\quad y = 8 - 10(x+1);$
$y = -10x - 2$ — касательная.

3. $S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$

4. $$S_1 = \int\limits_{-2}^{-1} \left(2x^2 - 6x + 10x + 2\right)\, dx =$$
$$= \int\limits_{-2}^{-1} \left(2x^2 + 4x + 2\right)\, dx = \frac{2}{3}(x+1)^3\Big|_{-2}^{-1} =$$
$$= \frac{2}{3}(0) - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3};$$
$$S_2 = \int\limits_{-2}^{-1} \left(2x + 10 + x^2 - 9\right)\, dx = \int\limits_{-2}^{-1} (x+1)^2\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$S_3 = \int\limits_{-1}^{1} \left(2x + 10 + x^2 - 9\right)\, dx = \frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= 2\frac{2}{3} - 0 = 2\frac{2}{3};$$
$$S_4 = \int\limits_{-1}^{1} \left(2x^2 - 6x + 10x + 2\right)\, dx = \frac{2}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 8 = 5\frac{1}{3}.$$

5. $S_\Phi = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 9.$

2. Вычислите S_Φ, ограниченную графиком $y = x^3 - 3x$ и касательными, параллельными прямой $y = 9x + 11$.



$y' = 3x^2 - 3; \quad y' = 9 \quad (k = 9 = \operatorname{tg}\varphi$ для $y = 9x + 11)$.

Значит $3x^2 - 3 = 9; \quad x^2 = 4;$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$ — точки касания.

а) $x = 2; \quad y'(2) = 9; \quad y(2) = 2;$

$y = 2 + 9(x - 2); \quad y = 9x - 16$ — касательная.

Найдем точки пересечения касательной с кривой.

$y = x^3 - 3x; \quad x^3 - 3x = 9x - 16;$

$\varphi(x) = x^3 - 12x + 16; \quad \varphi(2) = 0;$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 12x + 16 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - 2x^2 \quad\quad\quad & x^2 + 2x - 8 \\ \cline{1-1} 2x^2 - 12x \quad\ \ & \\ -\ 2x^2 - 4x \quad\ \ & \\ \cline{1-1} -8x + 16 & \\ -\ -8x + 16 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$\varphi(x) = (x - 2)^2(x + 4) \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ — касание;} \\ x = -4 \text{ — пересечение.} \end{array}\right.$

б) $x = -2;\quad y(-2) = -2;\quad y = -2 + 9(x+2);$

$y = 9x + 16$ — касательная.

Найдем точки пересечения.

$x^3 - 3x = 9x + 16$

$\varphi(x) = x^3 - 12x - 16;\quad \varphi(-2) = 0$

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3 - 12x - 16 & x+2 \\
 & \underline{x^3 + 2x^2} & \overline{x^2 - 2x - 8} \\
- & -2x^2 - 12x & \\
 & \underline{-2x^2 - 4x} & \\
- & -8x - 16 & \\
 & \underline{-8x - 16} &
\end{array}$$

$\varphi(x) = (x+2)^2(x-4);\quad \left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ — касание;} \\ x = 4 \text{ — пересечение.} \end{array}\right.$

$$S_\Phi = \int\limits_{-4}^{-2}\left(x^3 - 3x - 9x + 16\right)dx + \int\limits_{-2}^{2}(9x + 16 - 9x + 16)dx +$$

$$+ \int\limits_{2}^{4}\left(9x + 16 - x^3 + 3x\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-4}^{-2}\left(x^3 - 12x + 16\right)dx + \int\limits_{-2}^{2}32\,dx + \int\limits_{2}^{4}\left(-x^3 + 12x + 16\right)dx =$$

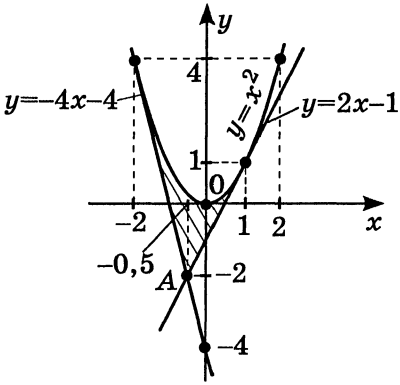
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x\right)\Bigg|_{-4}^{-2} + 32x\Big|_{-2}^{2} + \left(-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2 + 16x\right)\Bigg|_{2}^{4} =$$

$$= 4 - 24 - 32 - 64 + 96 + 64 + 64 + 64 -$$

$$- 64 + 96 + 64 + 4 - 24 - 32 =$$

$$= 216.$$

3. Вычислите площадь, ограниченную $y = x^2$ и касательными к кривой, проведенными через точку $A\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.



а) $y' = 2x; \quad y = ax + b.$

$A \in \Gamma(y = ax + b)$, где $A\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$.

$-2 = -\frac{1}{2}a + b; \quad a = 2b + 4. \quad y = (2b + 4)x + b;$

$x^2 = (2b + 4)x + b; \quad x^2 - 2(b + 2)x - b = 0;$

$D = (b + 2)^2 + b = 0$ — условие единственности корня, т. е. точки касания.

$b^2 + 5b + 4 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} b = -1;\ a = 2 \\ b = -4;\ a = -4 \end{array}\right.$, т. е.

$y = 2x - 1$ и $y = -4x - 4$ — касательные.

$x_0 = b + 2$ при $b = -1; \quad x_0 = 1;$ при $b = -4; \quad x_0 = -2.$

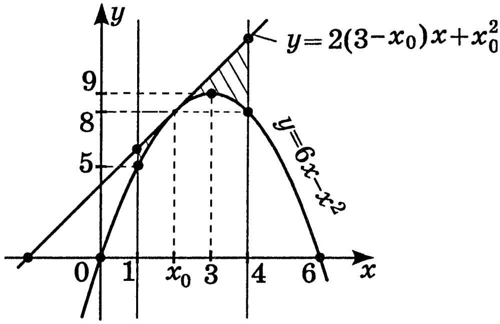
б) $$S_\Phi = \int\limits_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(x^2 + 4x + 4\right) dx + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x + 2)^3\Big|_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}(x - 1)^3\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{8} - 0\right) + \frac{1}{3}\left(0 - \left(-\frac{27}{8}\right)\right) = = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{18}{8} = 2{,}25.$$

4. Вычислите площадь, ограниченную графиком $y = 6x - x^2$; $x = 1$; $x = 4$ и касательной к кривой, проведенной в точке отрезка $[1;4]$.

Найти: $S(x_0)$; $S_{\text{наиб}}$; $S_{\text{наим}}$.



а) $y' = 6 - 2x = 2(3 - x)$; $y'(x_0) = 2(3 - x_0)$;
$y(x_0) = 6x_0 - x_0^2$; $y = 6x_0 - x_0^2 + 2(3 - x_0)(x - x_0)$;
$y = 2(3 - x_0)x + 6x_0 - x_0^2 - 6x_0 - 2x_0^2$;
$y = 2(3 - x_0)x + x_0^2$ — уравнение касательной.

б) $\int\limits_1^4 \left(2(3 - x_0)x + x_0^2 - 6x + x^2\right) dx =$

$= \left(x^2(3 - x_0) + x_0^2 x - 3x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 =$

$= 16(3 - x_0) + 4x_0^2 - 48 + \frac{64}{3} - \left(3 - x_0 + x_0^2 - 3 + \frac{1}{3}\right) =$

$= 48 - 16x_0 - 48 + 21\frac{1}{3} + 3x_0^2 + x_0 - \frac{1}{3} =$

$= 3x_0^2 - 15x_0 + 21$, т. е. $\boxed{S(x_0) = 3x_0^2 - 15x_0 + 21}$.

в) $S'(x_0) = 6x_0 - 15$; $S'(x_0) = 0$; $x_0 = 2{,}5$;

$S(2{,}5) = 3 \cdot 6{,}25 - 15 \cdot 2{,}5 + 21 = 2{,}25$;

$S(1) = 3 - 15 + 21 = 9$;

$S(4) = 48 - 60 + 21 = 9$,

т. е. $S_{\text{наим}} = 2,25$; $S_{\text{наиб}} = 9$.

5. Докажите:

а) $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \dfrac{dx}{1+\sin^2 x} \leqslant \pi.$

Известно, что $A(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant B(b-a)$,

где $A = y_{\text{наим}}$; а $B = y_{\text{наиб}}$.

$$y = \frac{1}{1+\sin^2 x}; \quad y' = -\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2} = -\frac{\sin 2x}{\left(1+\sin^2 x\right)^2};$$

$$y' = 0; \quad \sin 2x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2}k.$$

Так как $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5}{4}\pi\right]$, то

при $\begin{array}{l} k=1;\ x = \dfrac{\pi}{2};\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \\ k=2;\ x = \pi\,;\ y(\pi) = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} y_{\text{наим}} = \dfrac{1}{2}\,. \\ y_{\text{наиб}} = 1 \end{array} \right.$

Учитывая, что $b - a = \dfrac{5}{4}\pi - \dfrac{\pi}{4} = \pi$,

получим $\dfrac{1}{2}\cdot\pi \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \dfrac{dx}{1+\sin^2 x} \leqslant 1\cdot\pi$,

что и требовалось доказать.

б) $3{,}5 \leqslant \int\limits_0^2 \dfrac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 4{,}5.$

$$y = \frac{x^2+5}{x^2+2};$$

$$y' = \frac{2x\left(x^2+2\right) - 2x\left(x^2+5\right)}{\left(x^2+2\right)^2} = -\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

На $[0;2]$: $\begin{array}{l} y(0)=2{,}5 \\ y(2)=1{,}5 \end{array} \left| \begin{array}{l} y_{\text{наиб}}=2{,}5 \\ y_{\text{наим}}=1{,}5 \end{array} \right.$;

$b-a=2-0=2$, тогда

$$2\cdot 1{,}5 \leqslant \int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 2\cdot 2{,}5;\quad 3\leqslant \int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 5 -$$

слишком грубая оценка.

Разобьем отрезок $[0;2]$ на два — $[0;1]$ и $[1;2]$.

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx + \int\limits_1^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx.$$

На $[0;1]$ $\begin{array}{l} y(0)=2{,}5 \\ y(1)=2 \end{array}$; $b-a=1-0=1$, тогда

$$2\cdot 1 \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 2{,}5\cdot 1.$$

На $[1;2]$ $\begin{array}{l} y(1)=2=y_{\text{наиб}} \\ y(2)=1{,}5=y_{\text{наим}} \end{array}$; $b-a=2-1=1$, тогда

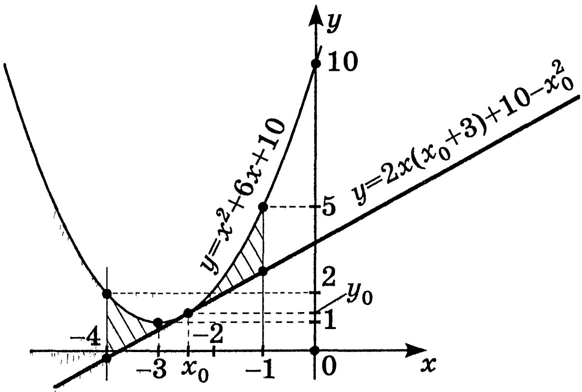
$$1\cdot 1{,}5 \leqslant \int\limits_1^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 2\cdot 1;\quad 1{,}5+2 \leqslant \int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 2{,}5+2$$

$$3{,}5 \leqslant \int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \leqslant 4{,}5$$ что и требовалось доказать

6. Найдите область изменения площади фигуры, ограниченной графиком $y=x^2+6x+10$, касательной к кривой, проведенной в точке, лежащей на $[-4;-1]$, и прямыми $x=-4$ и $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l} y'=2x+6; \\ y'_{x_0}=6+2x_0; \\ y_{x_0}=x_0^2+6x_0+10; \end{array}\right| \quad y=x_0^2+6x_0+10+(2x_0+6)(x-x_0),$$

т. е. $y=-x_0^2+2x(x_0+3)+10$ — уравнение касательной в точке x_0.



$$S(x_0) = \int\limits_{-4}^{-1} \left(x^2 + 6x + 10 - \left(-x_0^2 + 2x(x_0 + 3) + 10\right)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-4}^{-1} (x-x_0)^2 dx = \frac{1}{3}(x-x_0)^3 \Big|_{-4}^{-1} = \frac{1}{3}\left((-1-x_0)^3 - (-4-x_0)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-1 - 3x_0 - 3x_0^2 - x_0^3 + 64 + 48x_0 + 12x_0^2 + x_0^3\right) =$$

$$= 3\left(x_0^2 + 5x_0 + 7\right) = 3\left((x_0 + 2{,}5)^2 + 0{,}75\right).$$

$S'(x_0) = 3(2x_0 + 5)$; $\quad S'(x_0) = 0$; $\quad x_0 = -2{,}5$;

$S(-2{,}5) = 3(0 + 0{,}75) = 2{,}25$;

$S(-1) = 3(1 - 5 + 7) = 9$;

$S(-4) = 48 - 60 + 21 = 9$, т. е. $S_{\text{наим}} = 2{,}25$ и $S_{\text{наиб}} = 9$, значит $E(S) = [2{,}25; 9]$.

Ответ. Область изменения площади фигуры, ограниченной графиком $y = x^2 + 6x + 10$, касательной к кривой и прямыми $x = -4$ и $x = -1$, является $[2{,}25; 9]$.

Тренировочная работа 17

Вариант А

Вычислите:

1. $\displaystyle\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2}{x^3}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2 dx;$

3. $\displaystyle\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \frac{7\pi}{4}\right) dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{1+2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

5. $\displaystyle\int\limits_{0{,}5}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

6. Решите неравенство $\displaystyle\int\limits_0^1 \left(2t^3 z - t^2\right) dz \geqslant 0.$

7. Решите неравенство $\displaystyle\int\limits_1^2 \left(\frac{24x}{y^2} - 9x^2\right) dy \geqslant 4.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками:

8. $y = x^2;\quad y = \sqrt[3]{32x};$

9. $y = \cos^2 2x;\quad -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4};\quad y = 0;$

10. $y = \dfrac{x}{1+2x^2+x^4};\quad x = 0;\quad x = 1;\quad y = 0.$

Вариант Б

Вычислите:

1. $\displaystyle\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{1 + x^2}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x}\right)^2 dx;$

3. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx.$

Пользуясь геометрическим смыслом, вычислите:

4. $\displaystyle\int_0^6 |x - 3|\,dx;$

5. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{4x - x^2 - 3x}\,dx.$

6. Вычислите $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^6 + 64}.$

7. Решите неравенство $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2y^2}{x^2} + \frac{4}{3}yx\right) dx > -1.$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = -x^2 + x + 6;\quad y = 6 - 3x.$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $|y| = 2x - x^2.$

10. Найдите минимум функции $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right) dt;$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и постройте эскиз графика.

Решение тренировочной работы 17

Вариант А

Вычислите:

1. $$\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2}{x^3}\,dx = \int \frac{4-12\sqrt{x}+9x}{x^3}\,dx =$$
$$= \int \left(4x^{-3} - 12x^{-2,5} + 9x^{-2}\right)dx =$$
$$= 4\cdot\frac{1}{1-3}x^{1-3} - 12\cdot\frac{1}{1-2,5}x^{1-2,5} + 9\cdot\frac{1}{1-2}x^{1-2} + c =$$
$$= -2x^{-2} + 8x^{-1,5} - 9x^{-1} + c.$$

2. $$\int \left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\right)^2 dx =$$
$$= \int \left(\frac{2\sin x(\cos x - \sin x)}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}\right)^2 dx =$$
$$= \int (\sin 2x)^2\,dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c.$$

3. $$\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \frac{7\pi}{4}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4} + 4x + \frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(-2x - \frac{10\pi}{4}\right)\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos(6x+\pi) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int(-\cos 6x - \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c =$$
$$= -\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\cos 2x + c.$$

4. $\displaystyle\int \frac{1+2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{-d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x - \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{1-\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \arcsin x - 2\sqrt{(1-x^2)} + c.$$

5. $\displaystyle\int\limits_{0,5}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} =$

$$= \int\limits_{0,5}^{1}\frac{-d\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(4-x^2\right)^{1-\frac{1}{2}}\Bigg|_{0,5}^{1} =$$

$$= -2\sqrt{(4-x^2)}\Big|_{0,5}^{1} = -2\left(\sqrt{3}-\sqrt{3,75}\right) =$$

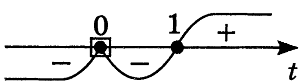
$$= 2\left(\sqrt{3,75}-\sqrt{3}\right).$$

Решите неравенство.

6. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\left(2t^3z - t^2\right)dz \geqslant 0;$

$$\int\limits_{0}^{1}\left(2t^3z - t^2\right)dz = \left(t^3z^2 - t^2z\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= t^3 - t^2 = t^2(t-1) \geqslant 0;$$



$t \in [1;\infty) \cup \{0\}$.

7. $\int\limits_1^2 \left(\frac{24x}{y^2} - 9x^2\right) dy \geqslant 4;$

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{24x}{y^2} - 9x^2\right) dy = \left(\frac{24x}{1-2}\cdot y^{1-2} - 9x^2 y\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(-24xy^{-1} - 9x^2y\right)\Big|_1^2 = \left(-\frac{24x}{2} - 9x^2\cdot 2\right) - \left(-24x - 9x^2\right) =$$

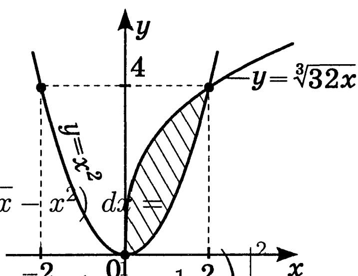
$$= -12x - 18x^2 + 24x + 9x^2 = 12x - 9x^2 = 3x(4-3x).$$

Значит $12x - 9x^2 \geqslant 4; \quad 9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$,

т. е. $(3x-2)^2 \leqslant 0; \quad x = \frac{2}{3}.$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = x^2; \quad y = \sqrt[3]{32x}.$

а) $x^2 = \sqrt[3]{32x}; \quad x^6 = 32x; \quad x\left(x^5 - 2^5\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.



б) $S_Ф = \int\limits_0^2 \left(\sqrt[3]{32x} - x^2\right) dx =$

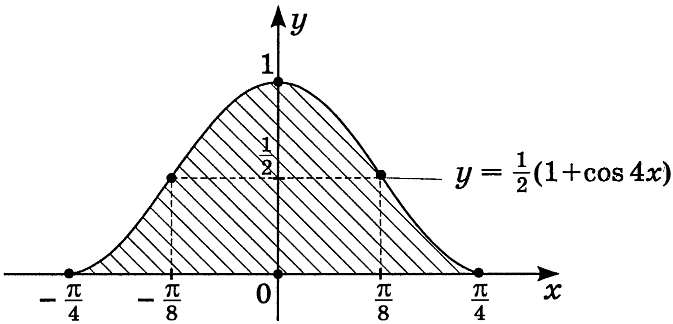
$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{32}(32x)^{1+\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{2^7}32^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 3\cdot 2^{-7}\cdot\left(2^5\cdot 2\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{8}{3} =$$

$$= 3\cdot 2 - 2\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = \cos^2 2x$; $\quad -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$; $\quad y = 0$.

а) $y = \cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 4x.$



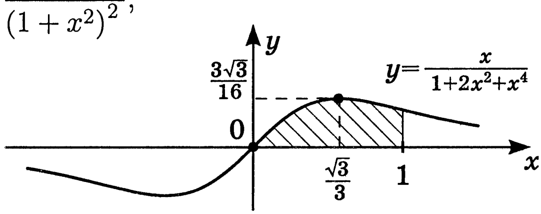
б) $S_Ф = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1 + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = \dfrac{x}{1 + 2x^2 + x^4}$; $\quad x = 0$; $\quad x = 1$; $\quad y = 0$.

а) $y = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$;



б) $y' = \dfrac{\left(1+x^2\right)^2 - 2\cdot 2x\left(1+x^2\right)x}{\left(1+x^2\right)^4} = \dfrac{1+x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \dfrac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$;

$$y' = \frac{1-3x^2}{\left(1+x^2\right)^3};$$

$$y' = 0; \qquad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin [0;1] \end{aligned}\right. ; \qquad y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

$$S_\Phi = \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-2}\left(1+x^2\right)^{1-2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}.$$

Вариант Б

Вычислите:

1. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2+2x+2}{1+x^2}\,dx =$

$$\left[\begin{array}{l|l} -\,2x^3+x^2+2x+2 & x^2+1 \\ \quad\underline{2x^3+2x} & \overline{2x+1} \\ \qquad -\,x^2+2 & \\ \qquad\quad \underline{x^2+1} & \\ \qquad\qquad 1 & \end{array}\right]$$

$$= \int \left(2x+1+\frac{1}{1+x^2}\right) dx = x^2+x+\operatorname{arctg} x + c.$$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x}\right)^2 dx =$

$$\left[\begin{aligned} &\left(\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}{\frac{\cos x\cdot\cos 2x+\sin x\cdot\sin 2x}{\cos x\cdot\cos 2x}}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x\cdot\cos 2x}}\right)^2 = \left(\frac{\cos 2x}{\sin x\cdot\cos x}\right)^2 = (2\operatorname{ctg} 2x)^2. \end{aligned}\right]$$

$$= 4\int \operatorname{ctg}^2 2x\,dx = 4\int\left(\frac{1}{\sin^2 2x}-1\right)dx =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}(-\operatorname{ctg} 2x) - 4x + c = -2\operatorname{ctg} 2x - 4x + c.$$

3. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

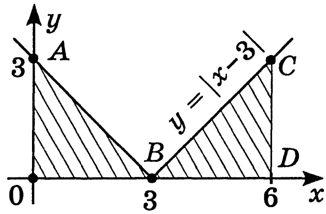
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

4. Пользуясь геометрическим смыслом, вычислите

$$\int\limits_0^6 |x-3|\,dx.$$

Построим график функции $y=|x-3|$.



$$S_\Phi = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB + \frac{1}{2}\cdot BD\cdot DC =$$

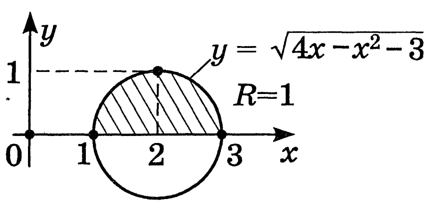
$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(6-3) = 9;\quad S_\Phi = 9.$$

5. $\displaystyle\int\limits_1^3 \sqrt{4x-x^2-3x}\,dx.$

Пусть $\sqrt{4x-x^2-3}=y$;

$$\begin{cases} y\geqslant 0\\ 4x-x^2-3=y^2\end{cases};\qquad \begin{cases} y\geqslant 0\\ y^2+(x-2)^2=1\end{cases};$$

$y^2+(x-2)^2=1$ — уравнение окружности $R=1$, сдвинутой на 2 единицы вдоль оси абсцисс. Таким образом, необходимо вычислить площадь полукруга.



$$S_\Phi = \int\limits_1^3 \sqrt{4x-x^3-3x}\,dx = \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Вычислите $\int\limits_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^6+64}$.

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^6+64} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+8^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{8}+c,$$

тогда $\int\limits_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^6+64} = \frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{8}\Big|_0^2 =$

$$= \frac{1}{24}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{\pi}{96}.$$

7. Решите неравенство $\int\limits_1^2 \left(\frac{2y^2}{x^2}+\frac{4}{3}yx\right)dx > -1$.

Так как $\int \left(\frac{2y^2}{x^2}+\frac{4}{3}yx\right)dx = 2\frac{1}{1-2}x^{-1}y^2+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2y+c=$

$= -2x^{-1}y^2 - \frac{2}{3}x^2y + c$, то

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{2y^2}{x^2}+\frac{4}{3}yx\right)dx = \left(-2x^{-1}y^2+\frac{2}{3}x^2y\right)\Big|_1^2 > -1,$$

значит $\left(-\frac{2}{2}y^2+\frac{2}{3}\cdot 4y\right) - \left(-2y^2+\frac{2}{3}y\right) > -1;$

$y^2+2y+1>0; \quad (y+1)^2>0; \quad \forall y \neq -1;$

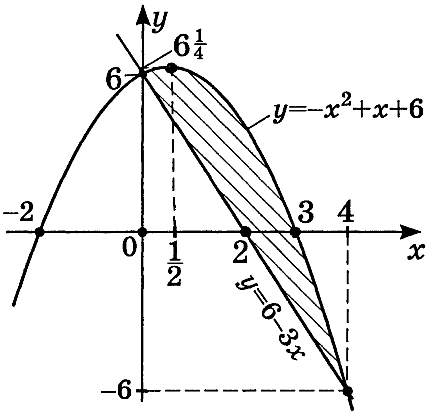
$y \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками

$y = -x^2+x+6; \quad y = 6-3x.$

Найдем точки пересечения:

$$-x^2+x+6 = 6-3x; \quad -x^2+4x=0; \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. .$$



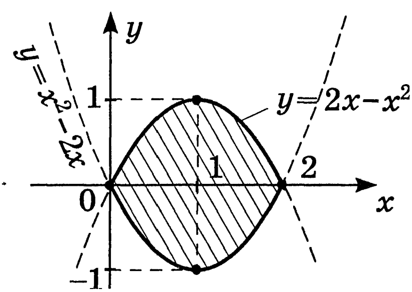
$$S_\Phi = \int\limits_0^4 \left(-x^2+x+6-6+3x\right)\,dx = \int\limits_0^4 \left(-x^2+4x\right)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right)\Big|_0^4 = -\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 - 0 = 10\frac{2}{3}.$$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $|y| = 2x - x^2$.

Построим график.

$$|y| = \begin{cases} y; & y \geqslant 0 \\ -y; & y < 0 \end{cases}, \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \end{array}\right. .$$



$$S_\Phi = 2\int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right)\,dx = 2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = 2\left(4 - \frac{8}{3}\right) = 2\frac{2}{3}.$$

10. Найдите минимум функции и постройте эскиз графика

$$f(x) = \int\limits_0^x \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right)\,dt; \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

Так как

$$\int \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right)\,dt = \int (1 + \cos 2t - \sin 2t)\,dt =$$

$$= t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t + c, \text{ то}$$

$$f(x) = \int\limits_0^x \left(2\cos^2 t - \sin 2t\right)\,dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\cos 0\right) =$$

$$= x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} = f(x).$$

$$f'(x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x;$$

$$f'(x) = 0; \qquad \cos 2x - \sin 2x = -1;$$

$$\boxed{\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1; \qquad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi k; \quad 2x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z};$$

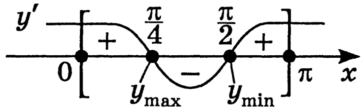
$$x = -\frac{\pi}{8} \pm \frac{3}{8}\pi + \pi k.$$

Так как $x \in [0;\pi]$, то

при $k = 0$, $\quad x = \dfrac{\pi}{4}$;

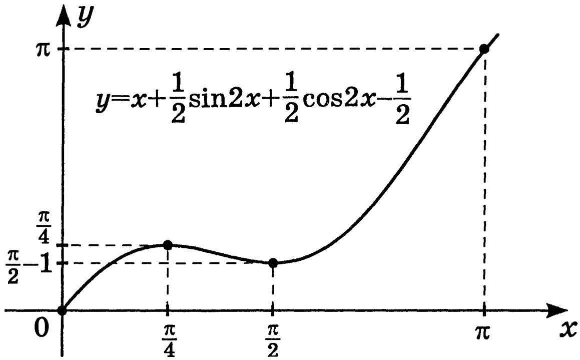
при $k = 1$, $\quad x = \dfrac{\pi}{2}$.

$f'(\pi) = 2 > 0$, значит



$$f(0) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1; \quad f(\pi) = \pi.$$

Эскиз графика выглядит так



Ответ: $y_{\min} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$

Проверочная работа 4

1. Вычислите:

а) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2}x^{-6}+2\sin^2 3x-\frac{3}{\cos^2 2x}+\frac{6}{\sqrt[5]{x^6}}\right)dx;$

б) $\displaystyle\int\left(\frac{2x^{-5}-\sqrt[5]{x^4}-x^2}{\sqrt[4]{x^3}}-\operatorname{tg}^2 2x+4^x\right)dx;$

в) $\displaystyle\int\left(\cos 4x\sin 2x-\frac{3}{x}\right)dx;$

г) $\displaystyle\int\frac{2x^{11}}{\sqrt{1+x^4}}\,dx;$

д) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos\frac{x}{3}};$

е) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{4}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{7}{x^2+2}\right)dx;$

ж) $\displaystyle\int\frac{3\,dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)};$

з) $\displaystyle\int\frac{2\,dx}{x^3-4x}\quad(x>2);$

и) $\displaystyle\int\frac{(11x+4)\,dx}{4\left(x^2-2x-8\right)}\quad(x>4);$

к) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 2x\,dx;$

л) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left(|2x-1|-|x|\right)^2\,dx.$

2. Дано: $f(x) = 4 - x^2$; $g(x) = x^2 + 2x$. Найдите:

а) угол между кривыми

б) $S_Ф$, ограниченную графиками $y = f(x)$; $y = g(x)$; касательными, проведенными в точках пересечения и прямыми $x = -1$; $x = 3$.

3. Вычислите $S_Ф$, ограниченную графиками $y = x^3 + 3x^2$ и касательными, параллельными прямой $y = 9x - 11$.

4. Вычислите $S_Ф$, ограниченную графиками $y = -x^2$ и касательными, проходящими через точку $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

5. Вычислите $S_Ф$, ограниченную графиком $y = 6x + x^2$; прямыми $x = -5$; $x = -1$ и касательной к кривой ($x_0 \in [-5; -1]$). Вычислите $E(S)$.

6. Докажите, что $8{,}25 < \int\limits_{1{,}5}^{3{,}5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 9{,}25$.

7. Найдите наименьшую площадь параболического сегмента, ограниченную $y = x^2$ и нормалью к касательной в точке касания $(x_0 > 0)$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$; $g(x) = \frac{3}{x^2-4x+5}$ и прямой $x = 1$.

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \sqrt[3]{2x-1}$, касательной к графику в точке $x_0 = 1$ и прямой $x = 4,5$.

10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = 2xe^{x^2}$ и касательной к кривой, проведенной в точке $x = 0$, а также прямыми $x = -1$ и $x = 1$.

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ и касательной к кривой, проведенной в точке $x_0 = 2$.

12. Найдите разность между площадью фигуры, ограниченной $y = -x^2 + 2x + 8$ и $y = 0$, и площадью наибольшего по площади прямоугольника, две вершины которого принадлежат оси абсцисс, а две другие графику $y = -x^2 + 2x + 8$.

Решение проверочной работы 4

1. Вычислите:

а) $$\int\left(\frac{1}{2}x^{-6}+2\sin^2 3x-\frac{3}{\cos^2 2x}+\frac{6}{\sqrt[5]{x^6}}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int x^{-6}\,dx+\int(1-\cos 6x)\,dx-$$
$$-3\int\frac{dx}{\cos^2 2x}+6\int x^{-\frac{6}{5}}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-6}x^{1-6}+x-\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{3}{2}\operatorname{tg}2x+\frac{6}{1-\frac{6}{5}}x^{1-\frac{6}{5}}+c=$$
$$=-\frac{1}{10}x^{-5}+x-\frac{1}{6}\sin 6x-\frac{3}{2}\operatorname{tg}2x-30x^{-\frac{1}{5}}+c.$$

б) $$\int\left(\frac{2x^{-5}-\sqrt[5]{x^4}-x^2}{\sqrt[4]{x^3}}-\operatorname{tg}^2 2x+4^x\right)dx=$$
$$=\int\left(2x^{-5-\frac{3}{4}}-x^{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}-x^{2-\frac{3}{4}}+1-\frac{1}{\cos^2 2x}+4^x\right)dx=$$
$$=\frac{2}{1-5\frac{3}{4}}x^{1-5\frac{3}{4}}-\frac{1}{1+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}x^{1+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}}-\frac{1}{1+2-\frac{3}{4}}x^{1+2-\frac{3}{4}}+$$
$$+x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+4^x\log_4 e+c=$$
$$=-\frac{8}{19}x^{-4\frac{3}{4}}-\frac{20}{21}x^{1\frac{1}{20}}-\frac{4}{9}x^{2\frac{1}{4}}+x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+4^x\log_4 e+c.$$

в) $$\int\left(\cos 4x\sin 2x-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 6x-\sin 2x-\frac{3}{x}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)-3\ln|x|+c=$$
$$=-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x-3\ln|x|+c.$$

г) $\displaystyle\int \frac{2x^{11}}{\sqrt{1+x^4}}\,dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } 1+x^4=t; \quad 4x^3\,dx=dt; \\ x^4=t-1; \quad x^8=(t-1)^2. \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t^{2-\frac{1}{2}} - 2t^{1-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(t^{1,5} - 2t^{0,5} + t^{-0,5}\right)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+1,5}t^{1+1,5} - \frac{2}{1+0,5}t^{1+0,5} + \frac{1}{1-0,5}t^{1-0,5}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{5}t^{2,5} - \frac{2}{3}t^{1,5} + t^{0,5} + c =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1+x^4\right)^{2,5} - \frac{2}{3}\left(1+x^4\right)^{1,5} + \left(1+x^4\right)^{0,5} + c.$$

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{3}} =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } \sin\dfrac{x}{3} = t; \\ \cos\dfrac{x}{3} = \pm\sqrt{1-t^2}; \quad \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\,dx = dt; \\ dx = \dfrac{3\,dt}{\pm\sqrt{1-t^2}}, \\ \text{тогда } \dfrac{dx}{\cos\frac{x}{3}} = \dfrac{3\,dt}{\left(\pm\sqrt{1-t^2}\right)^2} \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{3\,dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\frac{x}{3}}{1-\sin\frac{x}{3}}\right| + c.$$

е) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{4}{\sqrt{x^2-9}}+\frac{7}{x^2+2}\right)dx=$

$$\left[\begin{array}{l}
1)\ \dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}\right),\text{ значит}\\
\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+c_1=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+c_1\\
2)\ \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+c_2;\\
3)\ \displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c_3.
\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+\frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}x+c.$$

ж) $\displaystyle\int\frac{3\,dx}{x\left(1+\ln^2x\right)}=$ $\left[\text{Пусть } \ln x=t;\quad \dfrac{dx}{x}=dt.\right]$

$$=\int\frac{3\,dt}{1+t^2}=3\operatorname{arctg}t+c=3\operatorname{arctg}\ln x+c.$$

з) $\displaystyle\int\frac{2\,dx}{x^3-4x}\quad(x>2).$

$$\frac{1}{x^3-4x}=\frac{1}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-4\right)+B\left(x^2-2x\right)+C\left(x^2+2x\right)}{x(x+2)(x-2)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+2(C-B)x-4A}{x(x+2)(x-2)}.$$

$$\begin{cases}-4A=1\\ C=B\\ A+B+C\end{cases};\qquad \begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\ C=\dfrac{1}{8}\\ B=\dfrac{1}{8}\end{cases},\text{ значит}$$

$$\int\frac{2\,dx}{x^3-4x}=2\int\left(-\frac{1}{4x}+\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{8(x-2)}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\ln(x+2)+\frac{1}{4}\ln(x-2)+c=\ln\frac{\sqrt[4]{(x+2)(x-2)}}{\sqrt{x}}+c.$$

и) $\displaystyle\int \frac{(11x+4)\,dx}{4\,(x^2-2x-8)}$. $\qquad (x>4)$

Так как $\displaystyle\frac{1}{x^2-2x-8}=\frac{1}{(x-4)(x+2)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)$,

то $\displaystyle\int \frac{(11x+4)\,dx}{4\,(x^2-2x-8)}=\frac{1}{24}\int\left(\frac{11x+4}{x-4}-\frac{11x+4}{x+2}\right)dx=$

$$=\frac{1}{24}\int\left(11+\frac{48}{x-4}-11+\frac{18}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot 48\ln(x-4)+\frac{18}{24}\ln(x+2)+c=$$

$$=2\ln(x-4)+\frac{3}{4}\ln(x+2)+c.$$

к) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 2x\,dx=$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Учтем, что}\\ \cos^3 2x=\cos 2x\cdot\dfrac{1+\cos 4x}{2}=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x\cos 4x=\\ =\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{4}\cos 6x+\dfrac{1}{4}\cos 2x=\dfrac{3}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}\cos 6x.\end{array}\right]$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 6x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{1}{24}\sin 6x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\left(\frac{3}{8}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\sin\frac{3}{2}\pi\right)-\left(\frac{3}{8}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{24}\sin\pi\right)=$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{24}-\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{24}\cdot 0=\frac{1}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

л) $\int\limits_{-1}^{1} (|2x-1|-|x|)^2\,dx =$

$$\left[\text{Учтем, что } |2x-1|-|x| = \begin{cases} x-1, & \text{при } x \geqslant \frac{1}{2} \\ 1-3x, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}.\right]$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (1-x)^2\,dx + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} (1-3x)^2\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^2\,dx =$$

$$= \left(\frac{(1-x)^3}{-3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{(1-3x)^3}{-9}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{(x-1)^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}-\frac{8}{-3}\right) + \left(\frac{1}{72}-\left(-\frac{1}{9}\right)\right) + \left(0-\left(\frac{-1}{24}\right)\right) =$$

$$= 2\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = 2{,}5.$$

2. Дано: $f(x) = 4 - x^2$; $g(x) = x^2 + 2x$. Найдите:

а) угол между кривыми.

Найдем для этого точки пересечения $f(x) = g(x)$.

$4 - x^2 = x^2 + 2x$; $x^2 + x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Пусть $x = 1$.

1) $f'(x) = -2x$; $f'(1) = -2 = k_1$

2) $g'(x) = 2x+2$; $g'(1) = 4 = k_2$, тогда $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$,

т. е. $\operatorname{tg}\theta_1 = \dfrac{-2-4}{1+(-2)\cdot 4} = \dfrac{6}{7}$; $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{6}{7}$.

Пусть $x = -2$.

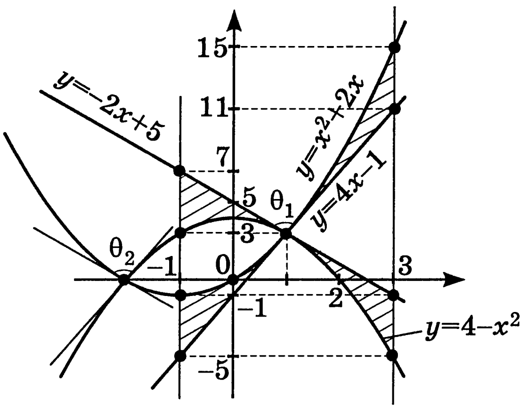
1) $f'(x) = -2x$; $f'(-2) = 4 = k_1$;

2) $g'(x) = 2x + 2$; $g'(-2) = -2 = k_2$, тогда

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \left|\frac{4+2}{1+(-2)\cdot 4}\right| = \frac{6}{7}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg}\frac{6}{7},$$

т. е. углы одинаковые на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

б) S_Φ, ограниченную графиками $y = f(x)$; $y = g(x)$; касательными, проведенными в точках пересечения, и прямыми $x = -1$; $x = 3$.



$f'(1) = -2$; $f(1) = 3$; $y = 3 - 2(x-1)$; $y = -2x + 5$;

$g'(1) = 4$; $g(1) = 3$; $y = 3 + (4(x-1))$; $y = 4x - 1$;

$S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (-2x + 5 + x^2 - 4)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right)\,dx =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = 0 - \left(-\frac{8}{3}\right) = 2\frac{2}{3};$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + 2x - (4x - 1)\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = 0 - \left(\frac{8}{3}\right) = 2\frac{2}{3};$$

$$S_3 = \int_{1}^{3} \left(x^2 + 2x - (4x - 1)\right) dx = \int_{1}^{3} (x-1)^2\, dx =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_{1}^{3} = \frac{8}{3} - 0 = 2\frac{2}{3};$$

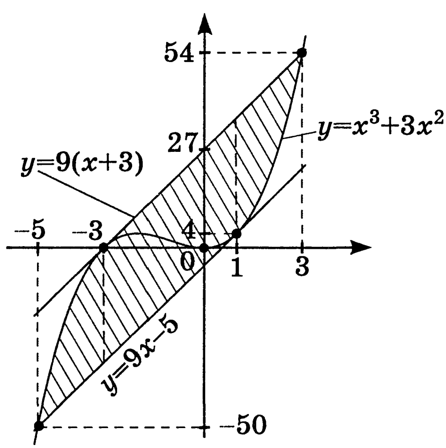
$$S_4 = \int_{1}^{3} \left(-2x + 5 + x^2 - 4\right) dx = \int_{1}^{3} (x-1)^2\, dx =$$

$$= \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_{1}^{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$S_\Phi = 4 \cdot 2\frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Подумайте, с чем связано равенство S_1; S_2; S_3; S_4.

3. Вычислите S_Φ, ограниченную графиками $y = x^3 + 3x^2$ и касательными, параллельными прямой $y = 9x - 11$.



а) $y' = 3x^2 + 6x;$

$y' = 9; \quad 3x^2 + 6x = 9; \quad x^2 + 2x - 3 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

б) $y(-3) = 0; \;\; y = 0 + 9(x + 3);$

$y = 9(x+3)$ — касательная.

Найдем точки пересечения касательной и кривой.

$x^3 + 3x^2 = 9(x+3); \quad (x+3)\left(x^2 - 9\right) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x = -3 \text{ — касание} \\ x = 3 \text{ — пересечение} \end{array}\right. .$$

$y(3) = 54.$

в) $y(1) = 4; \;\; y'(1) = 9; \;\; y = 4 + 9(x-1);$

$y = 9x - 5$ — касательная.

Найдем точки пересечения касательной с кривой.

$x^3 + 3x^2 = 9x - 5;$

$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5; \quad \varphi(1) = 0;$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 - 9x + 5 & x - 1 \\
\underline{x^3 - x^2 \phantom{{}-9x+5}} & x^2 + 4x - 5 \\
4x^2 - 9x \phantom{{}+5} & \\
\underline{4x^2 - 4x \phantom{{}+5}} & \\
-5x + 5 & \\
\underline{-5x + 5} &
\end{array}$$

$\varphi(x) = (x-1)^2(x+5); \qquad \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ — касание} \\ x = -5 \text{ — пересечение} \end{array}\right. ;$

$y(-5) = -50.$

г) $S_{\Phi} = \int\limits_{-5}^{-3} \left(x^3 + 3x^2 - 9x + 5\right) dx +$

$$+ \int\limits_{-3}^{1} (9(x+3) - 9x + 5)\, dx + \int\limits_{1}^{3} (9(x+3) - x^3 - 3x^2)\, dx =$$

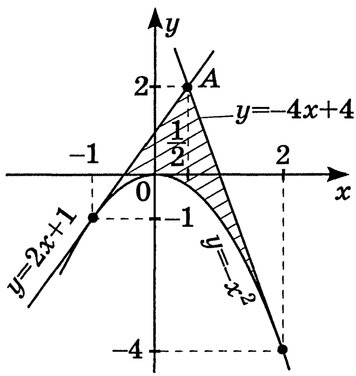
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x\right)\Bigg|_{-5}^{-3} + 32x\Big|_{-3}^{1} + \left(-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 27x\right)\Bigg|_{1}^{3} =$$

$$= \frac{81}{4} - 27 - \frac{81}{2} - 15 - \frac{625}{4} + 125 + \frac{225}{2} + 25 + 32 + 96 -$$

$$- \frac{81}{4} - 27 + \frac{81}{2} + 81 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{2} - 27 =$$

$$= 278 + 113{,}75 - 156{,}25 - 19{,}5 = 216.$$

4. Вычислите S_{Φ}, ограниченную графиками $y = -x^2$ и касательными, проходящими через точку $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.



а) $y = ax + b$ — касательная.

$A\left(\frac{1}{2}; 2\right) \in \Gamma(y = ax + b)$, тогда $2 = \frac{1}{2}a + b$; $a = 4 - 2b$, т. е. $y = (4 - 2b)x + b$. Для того чтобы данная прямая была касательной, необходимо, чтобы она с графиком $y = -x^2$ имела одну-единственную общую точку, т. е. уравнение $-x^2 = (4 - 2b)x + b$ должно иметь единственный корень.

б) $x^2-2(b-2)x+b=0 \qquad (a=4-2b)$;

$D=(b-2)^2-b=0; \quad b^2-5b+4=0; \quad \left[\begin{array}{l} b=4;\ a=-4 \\ b=1;\ a=2 \end{array}\right.$,

т. е. $y=-4x+4$ и $y=2x+1$ — касательные, проходящие через точку $A\left(\frac{1}{2};2\right)$. Найдем точки касания.

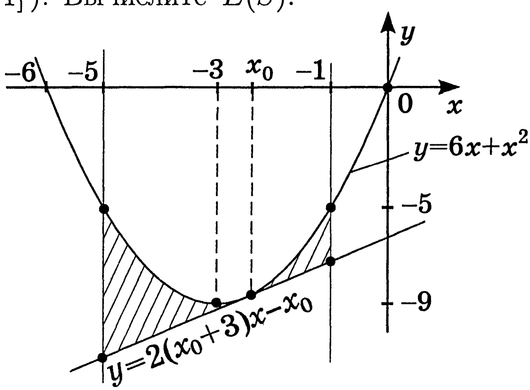
в) $x_0=b-2$; при $b=4$ $x_0=2$ и при $b=1$ $x_0=-1$.

г) $S_Ф=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(2x+1+x^2\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(-4x+4+x^2\right)dx=$

$=\frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(x-2)^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{27}{8}-0\right)+\frac{1}{3}\left(0-\left(-\frac{27}{8}\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{54}{8}=2{,}25.$

5. Вычислите $S_Ф$, ограниченную графиком $y=6x+x^2$; прямыми $x=-5$; $x=-1$ и касательной к кривой ($x_0\in[-5;-1]$). Вычислите $E(S)$.



а) $y'=6+2x$. Пусть касание в $(\cdot)$ x_0.

$y'(x_0)=2(x_0+3); \quad y(x_0)=6x_0+x_0^2$;

$y=6x_0+x_0^2+2(x_0+3)(x-x_0)$;

$y=2(x_0+3)x-x_0^2$ — касательная.

б) $S_\Phi = \int\limits_{-5}^{x_0} \left(6x + x^2 - 2(x_0+3)x + x_0^2\right) dx +$

$$+ \int\limits_{x_0}^{-1} \left(6x + x^2 - 2(x_0+3)x + x_0^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-5}^{-1} \left(6x + x^2 - 2(x_0+3)x + x_0^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - (x_0+3)x^2 + x_0^2 x\right)\Big|_{-5}^{-1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - x_0 - 3 - x_0^2\right) -$$

$$- \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25(x_0+3) - 5x_0^2\right) = 4x_0^2 + 24x_0 + 41\frac{1}{3}.$$

в) Исследуем $S(x_0) = 4x_0^2 + 24x_0 + 41\frac{1}{3}$ на наибольшие и наименьшие значения на $[-5; -1]$.

$S'(x_0) = 8x_0 + 24$; $S'(x_0) = 0$; $x_0 = -3$;

$S(-3) = 36 - 72 + 41\frac{1}{3} = 41\frac{1}{3} - 36 = 5\frac{1}{3}$;

$S(-5) = 4 \cdot 25 + 24(-5) + 41\frac{1}{3} = 21\frac{1}{3}$;

$S(-1) = 4 - 24 + 41\frac{1}{3} = 21\frac{1}{3}$.

x_0	-5	-3	-1
$S(x_0)$	$21\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$21\frac{1}{3}$

Итак, $S_\Phi = S_{\text{наиб}} = 21\frac{1}{3}$ при $x_0 = -5$ или $x_0 = -1$;

$S_\Phi = S_{\text{наим}} = 5\frac{1}{3}$ при $x_0 = -3$. $E(S) = \left[5\frac{1}{3}; 21\frac{1}{3}\right]$.

6. Докажите, что $8{,}25 < \int\limits_{1{,}5}^{3{,}5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 9{,}25$.

Если m — наименьшее, а M — наибольшее значение $y = f(x)$ на $[a; b]$, то по теореме о среднем

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Далее, если есть необходимость иметь более точную оценку, то разбив $[a; b]$ на несколько небольших отрезков, применяя к каждому из них теорему о среднем, получим более точные результаты.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1};$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1\cdot x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2};$$

$$f'(x) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1{,}5; 3{,}5] \\ x = 2 \end{array}\right.;$$

$$f(2) = 4; \quad f(1{,}5) = \frac{2{,}25}{0{,}5} = 4{,}5; \quad f(3{,}5) = \frac{12{,}25}{2{,}5} = 4{,}9.$$

x	1,5	2	3,5
$f(x)$	4,5	4	4,9

$f(2) = y_{\text{наим}}$; $\quad y(3{,}5) = y_{\text{наиб}}$.

$b - a = 3{,}5 - 1{,}5 = 2$, тогда

$$2\cdot 4 < \int\limits_{1{,}5}^{3{,}5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 4{,}9\cdot 2, \text{ т. е.}$$

$$8 < \int\limits_{1{,}5}^{3{,}5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 9{,}8.$$

Слишком грубая оценка.

Разобьем $[1{,}5; 3{,}5] = [1{,}5; 2] \cup [2; 3] \cup [3; 3{,}5]$.

$$\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int\limits_{1,5}^{2} \frac{x^2}{x-1}\,dx + \int\limits_{2}^{3} \frac{x^2}{x-1}\,dx + \int\limits_{3}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx.$$

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; $f(2) = 4$; $f(1{,}5) = 4{,}5$; тогда на $[1{,}5; 2]$

$f(x) = y_{\text{наим}} = 4$ и $f(1{,}5) = y_{\text{наиб}} = 4{,}5$;

$$0{,}5 \cdot 4 < \int\limits_{1,5}^{2} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 0{,}5 \cdot 4{,}5$$

т. е. $2 < \displaystyle\int\limits_{1,5}^{2} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 2{,}25$.

б) $f(2) = 4$; $f(3) = 4{,}5$, тогда на $[2; 3]$ $\begin{matrix} y(2) = 4 = y_{\text{наим}} \\ y(3) = 4{,}5 = y_{\text{наиб}} \end{matrix}$,

значит $1 \cdot 4 \leqslant \displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2}{x-1}\,dx \leqslant 1 \cdot 4{,}5$, т. е. $4 \leqslant \displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2}{x-1}\,dx \leqslant 4{,}5$.

в) $f(3{,}5) = 4{,}9$; $f(3) = 4{,}5$,

тогда на $[3; 3{,}5]$ $\begin{matrix} y(3) = 4{,}5 = y_{\text{наим}} \\ y(3{,}5) = 4{,}9 = y_{\text{наиб}} \end{matrix}$,

значит $0{,}5 \cdot 4{,}5 \leqslant \displaystyle\int\limits_{3}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx \leqslant 0{,}5 \cdot 4{,}9$,

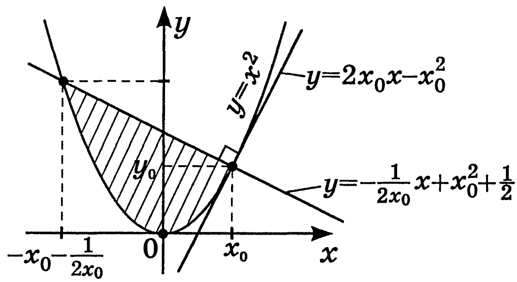
т. е. $2{,}25 \leqslant \displaystyle\int\limits_{3}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx \leqslant 2{,}45$.

Таким образом,

$$2+4+2{,}25 < \int\limits_{1,5}^{2} \frac{x^2}{x-1}\,dx + \int\limits_{2}^{3} \frac{x^2}{x-1}\,dx + \int\limits_{3}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 2{,}25+4{,}5+2{,}45;$$

$8{,}25 < \displaystyle\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 9{,}20 < 9{,}25$, что и требовалось доказать.

7. Найдите наименьшую площадь параболического сегмента, ограниченную $y = x^2$ и нормалью к касательной в точке касания $(x_0 > 0)$.



а) Напишем уравнение касательной в x_0

$y_0 = y(x_0) = x_0^2;$

$y'(x) = 2x;\ \ y'(x_0) = 2x_0;$

$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0);$

$\boxed{y = 2x_0x - x_0^2}$ — уравнение касательной к $y = x^2$ в точке $\left(x_0;x_0^2\right)$.

б) Напишем уравнение нормали (прямая $\perp$ касательной к $y = x^2$ в точке касания)

$$\begin{matrix} l_1 : y = a_1x + b_1 \\ l_2 : y = a_2x + b \end{matrix};\quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}.$$

Значит уравнение нормали $y = ax + b$; $a = -\frac{1}{2x_0}$, тогда

$y = -\frac{1}{2x_0}x + b.$

Так как точка $\left(x_0; x_0^2\right) \in \Gamma(y = ax + b)$, то

$x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}x_0 + b$; $b = x_0^2 + \frac{1}{2}$, т. е.

$\boxed{y = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}}$ — уравнение нормали.

в) Найдем точки пересечения нормали и $y = x^2$.

$$x^2 = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2};$$

$$2x_0x^2 + x - 2x_0^3 - x_0 = 0.$$

Так как $x = x_0$ — корень, то

$$\left[\ (2x_0x^2 + x - 2x_0^3 - x_0) \vdots (x - x_0)\ \right]$$

$$\begin{array}{r|l} -\ 2x_0x^2 + \qquad\qquad x - 2x_0^3 - x_0 & x - x_0 \\ \underline{2x_0x^2 - \qquad 2x_0^2x} \qquad\qquad\quad & 2x_0x + 2x_0^2 + 1 \\ -\ (2x_0^2+1)x - 2x_0^3 - x_0 & \\ \underline{(2x_0^2+1)x - 2x_0^3 - x_0} & \end{array}$$

Далее рассмотрим $2x_0x + 2x_0^2 + 1 = 0$.

$x = -x_0 - \dfrac{1}{2x_0}$ (используя теорему Виета второй корень уравнения можно было найти проще).

г) $$S_{\text{пар.сег}} = \int\limits_{-x_0-\frac{1}{2x_0}}^{x_0} \left(-\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2} - x^2\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x_0}x^2 + \left(x_0^2 + \frac{1}{2}\right)x\right)\Bigg|_{-x_0-\frac{1}{2x_0}}^{x_0} =$$

$$= -\frac{1}{3}x_0^3 - \frac{1}{4}x_0 + x_0^3 + \frac{1}{2}x_0 -$$

$$-\left(\frac{\left(2x_0^2+1\right)^3}{24x_0^3} - \frac{\left(2x_0^2+1\right)^2}{4x_0\cdot 4x_0^2} - \frac{(2x_0+1)^2}{4x_0}\right)$$

— это слишком сложно технически. Попробуем чуть иначе.

д) Пусть $\alpha = x_0$; $\beta = -x_0 - \dfrac{1}{2x_0}$.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha + \beta = -\frac{1}{2x_0} \\ &\alpha \cdot \beta = -\frac{2x_0^2 + 1}{2} \\ &\alpha - \beta = 2x_0 + \frac{1}{2x_0} \end{aligned}\right|, \text{ тогда}$$

$y = -\dfrac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \dfrac{1}{2} = (\alpha+\beta)x - \alpha\beta$ — уравнение нормали.

$$S_{\text{пар.сег}} = \int\limits_{\beta}^{\alpha} \left((\alpha + \beta)x - \alpha\beta - x^2\right)\, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 - \alpha\beta x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{\beta}^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\left(\alpha^2 - \beta^2\right) - \alpha\beta(\alpha - \beta) - \frac{1}{3}\left(\alpha^3 - \beta^3\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(\alpha - \beta)\left(3(\alpha + \beta)^2 - 6\alpha\beta - 2\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right)\right) =$$

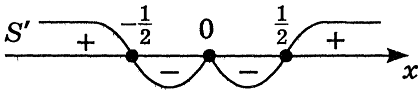
$$= \frac{1}{6}(\alpha - \beta)\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right) = \frac{1}{6}(\alpha - \beta)^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^3. \text{ Итак, } S(x_0) = \frac{1}{6}\left(2x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^3.$$

е) $S'(x_0) = \dfrac{1}{2}\left(2x_0 + \dfrac{1}{2x_0}\right)^2\left(2 - \dfrac{1}{2x_0^2}\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left(2x_0 + \frac{1}{2x_0}\right)^2 \frac{4x_0^2 - 1}{x_0^2};$$

$$S'(x_0) = 0; \qquad \left[\begin{aligned} &x_0 = \frac{1}{2} \\ &x_0 = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.;$$



$$S_{\min} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}(1+1)^3 = \frac{4}{3}.$$

В силу непрерывности $S_{\min} = S_{\text{наим}}$.

Ответ: наименьшая площадь параболического сегмента, ограниченного $y = x^2$ и нормалью к касательной в точке касания, равна $\frac{4}{3}$. Координаты точки касания $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4x+5}$ и прямой $x = 1$.

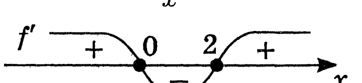
а) Вначале необходимо найти точку пересечения на $(0; \infty)$, так как если точка пересечения принадлежит $(-\infty; 0)$, то ограничений фигуры не будет, а значит площадь ее мы вычислить не можем.

Для этого решим уравнение $\dfrac{x^3+4}{x^2} = \dfrac{3}{x^2-4x+5}$

Получим уравнение $\left(x^3+4\right)\left(x^2-4x+5\right) = 3x^2$, которое, наверное, подбором целых чисел и возможно решить, но будут ли корни только целыми и единственными на $(0; \infty)$ неизвестно. Попробуем иначе, используя минимаксные значения.

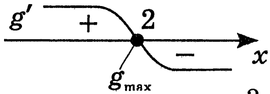
б) $f'(x) = \left(x + \dfrac{4}{x^2}\right)' = 1 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3-8}{x^3} =$

$= \dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x^3}.$



$$f_{\min} = f(2) = \frac{8+4}{4} = 3.$$

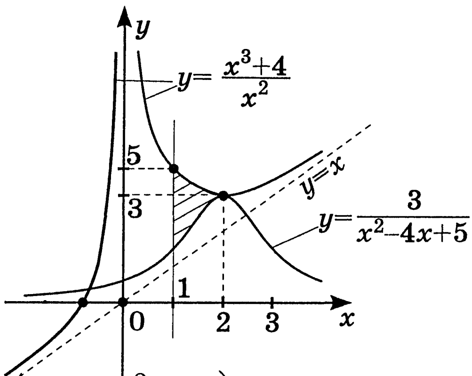
в) $g'(x) = \left(\dfrac{3}{x^2-4x+5}\right)' = -\dfrac{2x-4}{(x^2-4x+5)^2};$



$(\forall x\ x^2-4x+5 = (x-2)^2+1 > 0)$

$$g_{\max} = g(2) = \frac{3}{4-8+5} = 3.$$

Оказалось, что в точке $(2;3)$ графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют общую точку (касаются). В силу непрерывности $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на $(0;\infty)$ и с учетом кусочной монотонности на $(0;\infty)$ существует только одна общая точка $(2;3)$. При желании можно было бы подробно исследовать эти функции и построить их график. Эскизы же выглядят так.



$$S_\Phi = \int_1^2 \left(\frac{x^3+4}{x^2} - \frac{3}{x^2-4x+5}\right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) dx - \int_1^2 \left(\frac{3}{(x^2-4x+5)}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}\right)\Bigg|_1^2 - 3\,\mathrm{arctg}(x-2)\Big|_1^2 =$$

$$= (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 4\right) - 3\,\mathrm{arctg}(0) - \mathrm{arctg}(-1) =$$

$$= 3{,}5 - \frac{3\pi}{4} = \frac{14-3\pi}{4}.$$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \sqrt[3]{2x-1}$, касательной к графику в точке $x_0 = 1$ и прямой $x = 4,5$.

а) Найдем уравнение касательной в точке $x_0 = 1$.

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}};$$

$$y'(1) = \frac{2}{3}; \quad y(1) = 1;$$

$$y = 1 + \frac{2}{3}(x-1); \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

б) Найдем возможные точки пересечения касательной с графиком функции, т. е. решим уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

$$3^3(2x-1) = (2x+1)^3; \quad 54x - 27 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$8x^3 + 12x^2 - 48x + 28 = 0.$$

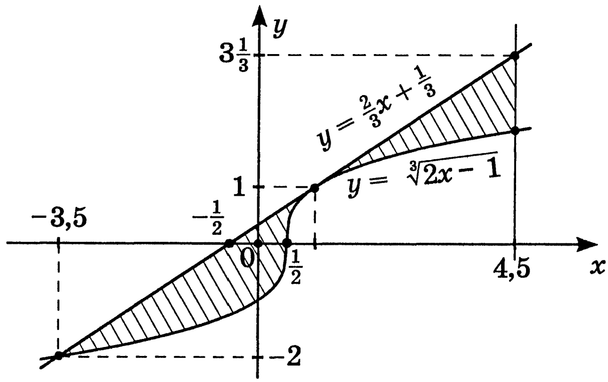
Так как $x_0 = 1$ абсцисса касания, то $x = 1$ также корень данного уравнения.

Значит $\left(8x^3 + 12x^2 - 48x + 28\right) \vdots (x-1)$, тогда

$$\begin{array}{r|l}
-\;8x^3 + 12x^2 - 48x + 28 & x - 1 \\
\underline{8x^3 - 8x^2} \qquad\qquad\quad & 8x^2 + 20x - 28 \\
-\;20x^2 - 48x \qquad & \\
\underline{20x^2 - 20x} \qquad & \\
-\;-28x + 28 & \\
\underline{-28x + 28} &
\end{array}$$

$$8x^2 + 20x - 28 = 4\left(2x^2 + 5x - 7\right) = 4(x-1)(2x+7).$$

Итак, $\left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (двойной корень) (точка касания)} \\ x = -3{,}5 \end{array}\right.$.



Итак, $S_Ф = \int\limits_{-3,5}^{4,5} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - \sqrt[3]{2x-1}\right) dx =$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(2x-1)^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_{-3,5}^{4,5} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{81}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2} - \frac{3}{8}\cdot 2^4 - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{49}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}2^4\right) =$$

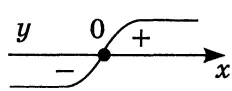
$$= \frac{81-49}{12} + \frac{9+7}{6} = 5\frac{1}{3}.$$

10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = 2xe^{x^2}$ и касательной к кривой, проведенной в точке $x = 0$, а также прямыми $x = -1$ и $x = 1$.

а) Построим график $y = 2xe^{x^2}$.

1) $D(y) = (-\infty; \infty)$;

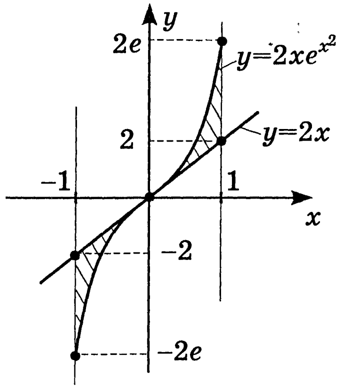
$y > 0$ на $(0; \infty)$;
$y = 0$ при $x = 0$;
$y < 0$ на $(-\infty; 0)$.



2) $y' = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2}2x = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$;
$y'(0) = 2\cdot e^0(1 + 2\cdot 0^2) = 2$; $y(0) = 0$;
$y = 0 + 2(x - 0)$; $y = 2x$ — уравнение касательной.

3) $y' > 0$ $\forall x$, т. е. $y = 2xe^{x^2}$ возрастающая.

б) так как $f(-x)=-f(x)$, то график $y=2e^{x^2}$ центрально-симметричен относительно начала координат. Значит



$$S_\Phi = 2\int\limits_0^1 \left(2xe^{x^2} - 2x\right)\,dx = 2\int\limits_0^1 e^{x^2}\,d(x^2) - 4\int\limits_0^1 x\,dx =$$

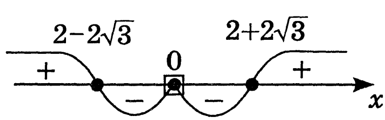
$$= 2\left(e^{x^2} - x^2\right)\Big|_0^1 = 2\left(\left(e^1 - 1\right) - \left(e^0 - 0\right)\right) = 2(e-2).$$

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ и касательной к кривой, проведенной в точке $x_0 = 2$.

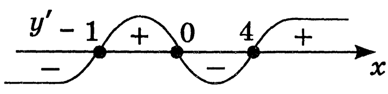
а) Построим график $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$

1) $y = 0;\quad x^2\left(x^2 - 4x - 8\right) = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 + 2\sqrt{3} \\ x = 2 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

2) $\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ y = 0 \\ y < 0 \end{array}\right|$



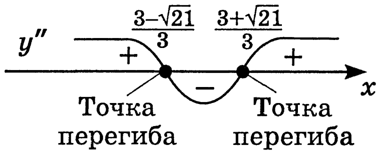
3) $y' = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 4x\left(x^2 - 3x - 4\right)$.



4) $y_{\min} = y(-1) = 1 + 4 - 8 = -3;$

$y_{\max} = y(0) = 0;$

$y_{\min} = y(4) = 256 - 256 - 8 \cdot 16 = -128.$



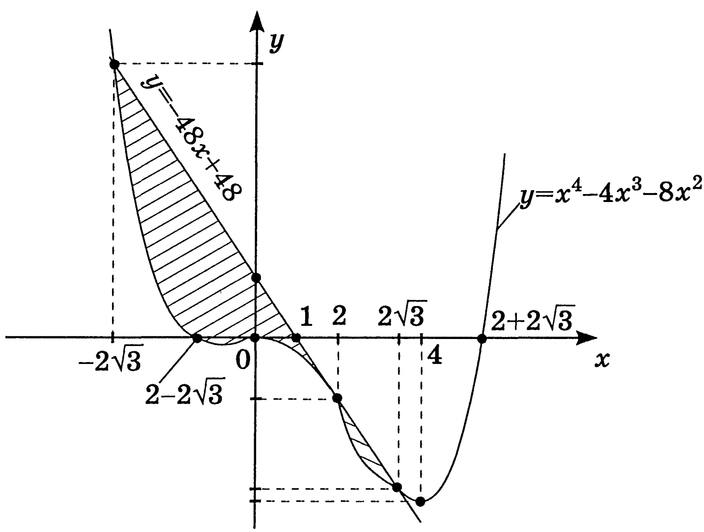
5) $y'' = 12x^2 - 24x - 16 = 4(3x^2 - 6x - 4).$

б) Найдем уравнение касательной.

$y(2) = 16 - 32 - 32 = -48;$

$y'(2) = 4 \cdot 2(4 - 6 - 4) = -48;$

$y = -48 - 48(x - 2); \quad y = -48x + 48.$



в) Найдем точки пересечения касательной

с кривой $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

$x^4 - 4x^3 - 8x^2 = -48x + 48;$

$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x - 48 = 0.$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4-4x^3 \quad -8x^2+48x-48 \\ x^4-4x^3 \quad +4x^2 \qquad\qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} x^2-4x+4 \\ \hline x^2-12 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} -12x^2+48x-48 \\ -12x^2+48x-48 \end{array} & \\
\hline
\end{array}
$$

г) $$S_{\Phi}=\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(-48x+48-x^4+4x^3+8x^2\right)dx=$$

$$=-\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(x^4-4x^3-8x^2+48x-48\right)dx=$$

$$=-\left(\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{8}{3}x^3+24x^2-48x\right)\Bigg|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=$$

$$=-\Big(\frac{1}{5}\cdot 32\cdot 9\sqrt{3}-16\cdot 9-\frac{8}{3}\cdot 8\cdot 3\sqrt{3}+$$

$$+24\cdot 4\cdot 9-48\cdot 2\sqrt{3}\Big)+$$

$$+\Big(-\frac{1}{5}\cdot 32\cdot 9\sqrt{3}-16\cdot 9+\frac{8}{3}\cdot 8\cdot 3\sqrt{3}+$$

$$+24\cdot 4\cdot 9+48\cdot 2\sqrt{3}\Big)=$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot 288\sqrt{3}+128\sqrt{3}+192\sqrt{3}=204{,}8\sqrt{3}.$$

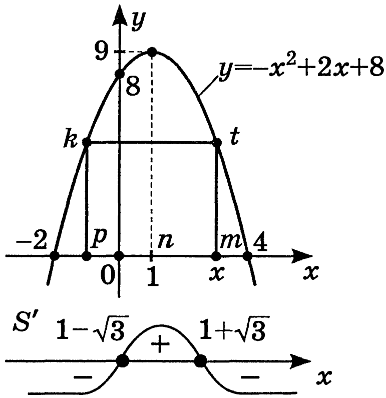
12. Найдите разность между площадью фигуры, ограниченной $y=-x^2+2x+8$ и $y=0$, и площадью наибольшего по площади прямоугольника, две вершины которого принадлежат оси абсцисс, а две другие графику $y=-x^2+2x+8$.

Рассмотрим график $y=-x^2+2x+8$;

$x=1$ — ось симметрии.

а) $nm=x-1$; $pm=2(x-1)$; $mt=-x^2+2x+8$;

б) $S_{pktm}=pm\cdot mt$; $S(x)=2(x-1)\left(-x^2+2x+8\right)$;
$S'(x)=-6\left(x^2-2x-2\right)$.



в) $S_{\max} = S_{\text{наиб}} = y\left(1+\sqrt{3}\right) =$

$= 2\left(1+\sqrt{3}-1\right)\left(-\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{3}\right)+8\right) =$

$= 2\sqrt{3}\cdot 6 = 12\sqrt{3} = S_{\text{пр}}$ — наибольшая площадь прямоугольника.

г) $S_{\text{параб}} = \int\limits_{-2}^{4}\left(-x^2+2x+8\right)dx = \left(-\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$

$= -\dfrac{1}{3}\cdot 64 + 16 + 32 - \left(\dfrac{8}{3} + 4 - 16\right) =$

$= -21\dfrac{1}{3} + 48 - 2\dfrac{2}{3} + 12 = 60 - 24 = 36.$

д) $S_{\Phi} = S_{\text{параб}} - S_{\text{пр}}.$

$S_{\Phi} = 36 - 12\sqrt{3} = 12\left(3-\sqrt{3}\right).$

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Вычислите:

$$\int_0^1 x^3 \sqrt[5]{x^4-2}\,dx.$$

2. Вычислите:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной

$y = x^3 - 9x$;
касательной в точке с абсциссой $x = 3$.

$S_Ф = ?$

4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + x^3$;
$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

$S_Ф = ?$

5. $f(x) = x^2$;
$g(x) = \sqrt{x}$;
касательными в точках пересечения.

$S_Ф = ?$

Карточка 2

1. Вычислите:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}.$$

2. Вычислите:

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx.$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной

$y = 2^x$;
$y = x^2$;
$x \geqslant 0$.

$S_Ф = ?$

4. $f(x) = x^3$;
$g(x) = \sqrt{x}$;
касательными в точках пересечения.

$S_Ф = ?$

5. $f(x) = x^4 - 2x^2 - x^3$;
$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

$S_Ф = ?$

Карточка 3

1. Найдите:
$$\int \frac{dx}{|\sin x|\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}.$$

2. Вычислите:
$$\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

$f(x) = x^3 + 2;$
$g(x) = x^2 + x + 1.$

$S_Ф = ?$

4. $x^3y^2 = 9;$
$|x-5| = 4.$

$S_Ф = ?$

5. $f(x) = \frac{1}{x};$
$g(x) = \sqrt{x};$
касательными в точках пересечения;
прямыми $x = \frac{1}{9}$; $x = 9.$

$S_Ф = ?$

Карточка 4

1. Найдите:
$$\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

2. Вычислите:
$$\int_1^2 \frac{dx}{x\,(x^2+4)}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

$f(x) = x^2 - 2x + 2;$
$g(x) = 2 + 4x - x^2;$
прямыми $x = -1$; $x = 4$.

$S_Ф = ?$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x;$
$g(x) = x^3 + x^2 - 6x;$
$t(x) = 6x.$

$S_Ф = ?$

5. $f(x) = x^2 - 4x + 3;$
$g(x) = x^2 - 2x + 3;$
общими касательными.

$S_Ф = ?$

Карточка 5

1. Вычислите:
$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

2. Вычислите:
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной
$f(x)=\dfrac{1}{x}$;
$g(x)=x^2$;
общей касательной;
прямой $x=2$.
$S_\Phi = ?$

4. $f(x)=x^3-3x^2-10x$;
$g(x)=x^3-2x^2-3x$;
касательными
в точке $(0;0)$;
прямой $x=4$.
$S_\Phi = ?$

5. $y=(x^2-1)e^{x^3-3x}$;
прямой $y=0$.
$S_\Phi = ?$

Карточка 6

1. Вычислите:
$$\int\limits_3^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$$

2. Вычислите:
$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной
$f(x)=3^x$;
$g(x)=x^2+5$;
касательными, проведенными в точках пересечения
с прямыми
$x=1$; $x=3$.
$S_\Phi = ?$

4. $y=4x-x^2$;
касательными
к кривой,
проходящими
через точку $(-3;-12)$.
$S_\Phi = ?$

5. $f(x)=x^2+4x+3$;
$g(x)=-x^2+4x-3$;
общими
касательными.
$S_\Phi = ?$

Решение тренировочных карточек

Решение тренировочной карточки 1

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3\sqrt[5]{x^4-2}\,dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1\sqrt[5]{x^4-2}\,d\left(x^4-2\right)=$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{5}}\left(x^4-2\right)^{1+\frac{1}{5}}\Bigg|_0^1=\frac{5}{24}\left(x^4-2\right)^{\frac{6}{5}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{5}{24}\left(\left(1^4-2\right)^{\frac{6}{5}}-(0-2)^{\frac{6}{5}}\right)=\frac{5}{24}(1-2\sqrt[5]{2}).$$

2. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}.$

Пусть $\sqrt[6]{x}=t$; $\quad\dfrac{1}{6}\dfrac{dx}{\sqrt[6]{x^5}}=dt$; $\quad dx=6\sqrt[6]{x^5}\,dt$, но $x=t^6$,

тогда $dx=6\cdot t^5\,dt$; $\quad\sqrt{x}=t^3$; $\quad\sqrt[3]{x}=t^2$ и неопределенный интеграл примет вид

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}=6\int\frac{t^8\,dt}{t^2+1}=$$

Разделим с остатком, чтобы выделить целую часть.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
t^8 & & & & & t^2+1 \\ \cline{6-6}
t^8 & +t^6 & & & & t^6-t^4+t^2-1 \\ \cline{1-2}
 & -t^6 & & & & \\
 & -t^6 & -t^4 & & & \\ \cline{2-3}
 & & t^4 & & & \\
 & & t^4 & +t^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -t^2 & & \\
 & & & -t^2 & -1 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 1 &
\end{array}$$

$$=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\operatorname{arctg}t\right)+c.$$

Тогда определенный интеграл будет равен

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1} = 6\left(\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{6}} - x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

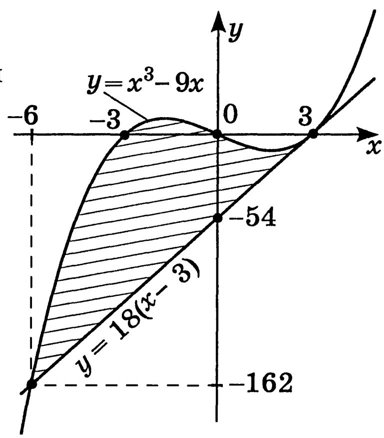
$$= 6\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0\right) = 1{,}5\pi - 4\frac{12}{35}.$$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной

$y = x^3 - 9x$;
касательной в точке
с абсциссой $x = 3$.

$S_Ф = ?$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 3x^2 - 9 \\ y'(3) = 18 \\ y(3) = 0 \end{array}\right| \quad y = 18(x-3)$$



а) Найдем точки пересечения касательной и графика $y = x^3 - 9x$

$x^3 - 9x = 18(x-3)$;

$(x-3)(x^2+3x-18) = 0$;

$(x-3)^2(x+6) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ — точка касания.} \\ x = -6 \end{array}\right.$$

б) $S_Ф = \int\limits_{-6}^{3} \left(x^3 - 9x - 18(x-3)\right)\,dx =$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 - 9(x-3)^2\right)\Bigg|_{-6}^{3} =$$

$$= \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} - 0\right) - \left(\frac{1296}{4} - \frac{324}{2} - 729\right) = 546{,}75.$$

4. $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 - 2x^2 + x^3 \\ g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \end{array}\right|$

$S_\Phi = ?$

Построим эскиз графиков и найдем точки их пересечения.

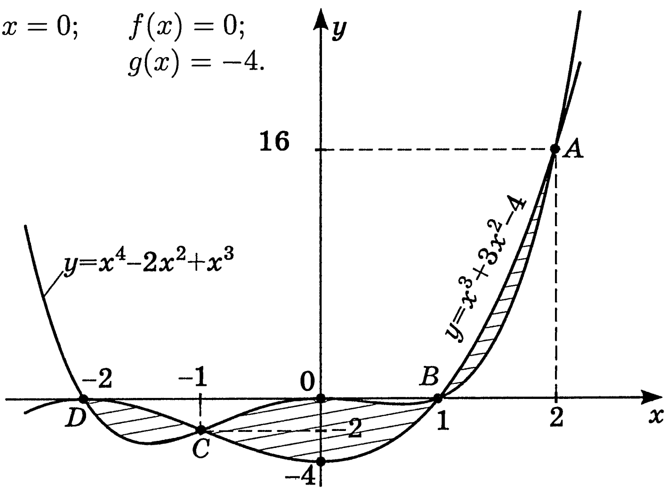
а) $x^4 - 2x^2 + x^3 = x^3 + 3x^2 - 4;$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$

$$\left[\begin{array}{lll} x = 2; & y = 16; & A(2;16) \\ x = 1; & y = 0; & B(1;0) \\ x = -1; & y = -2; & C(-1;-2) \\ x = -2; & y = 0; & D(-2;0) \end{array}\right.$$

б) Контрольные точки:

$x = 0; \quad f(x) = 0;$
$\qquad\quad\ g(x) = -4.$



в) $S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3.$

$$S_1 = \int\limits_{-2}^{-1} \left(x^3 + 3x^2 - 4 - \left(x^4 - 2x^2 + x^3\right)\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-1} \left(-x^4 + 5x^2 - 4\right)\,dx = \left(-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4\right) - \left(\frac{32}{5} - \frac{40}{3} + 8\right) = 1\frac{7}{15};$$

$$S_2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(x^4 - 2x^2 + x^3\right) - \left(x^3 + 3x^2 - 4\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4 - 5x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right) \Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 4 \right) = 5\frac{1}{15};$$

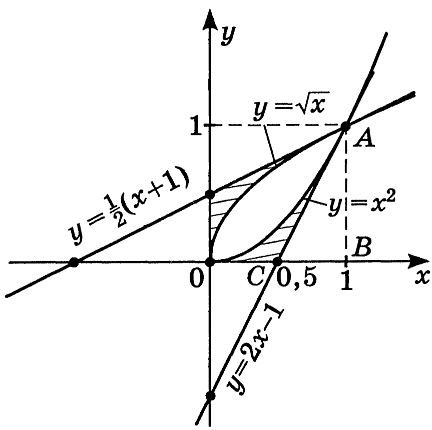
$$S_3 = \int\limits_{1}^{2} \left(\left(x^3 + 3x^2 - 4\right) - \left(x^4 - 2x^2 + x^3\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} \left(-x^4 + 5x^2 - 4\right) dx = \left(-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 4x \right) \Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= -\frac{32}{5} + \frac{40}{3} - 8 + \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 = 1\frac{7}{15}. \ S_{\Phi} = 1\frac{7}{15} + 5\frac{1}{15} + 1\frac{7}{15} = 8.$$

5. $f(x) = x^2$;
$g(x) = \sqrt{x}$;
касательными
в точках пересечения.

$S_{\Phi} = ?$



а) $\sqrt{x} = x^2$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

б) $f'(x) = 2x$;
$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

в) При $x = 0$ $\quad y = 0$ — касательная для $y = x^2$;
$x = 0$ — касательная для $y = \sqrt{x}$.

г) При $x = 1$; $f'(1) = 2$; $f(1) = 1$; $y = 1 + 2(x-1)$; $y = 2x - 1$ — касательная к $y = x^2$ в $(\cdot)$ $(1;1)$.

При $x = 1$ $g(1) = 1$; $g'(1) = \frac{1}{2}$;

$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)$ — касательная к $y = \sqrt{x}$ в точке $(1;1)$.

Так как $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ на $[0;\infty)$ взаимно обратимы и $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{2}(x+1)$ также взаимно обратимы, то их графики симметричны относительно $y = x$, тогда

$$S_\Phi = 2\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right) dx = 2\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Решение тренировочной карточки 2

1. Вычислите: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$.

Так как $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, то

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+x} = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \ln x \Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dx^2}{x^2+1} =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)\Big|_1^2\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 5 + \ln 2) = \ln\sqrt{10}.$$

2. $\int\limits_0^4 \sqrt{x^2+9}\, dx$.

Рассмотрим $\int \sqrt{x^2+9}\, dx$ и применим метод интегрирования по частям.

Пусть $\left| \begin{array}{l|l} u = \sqrt{x^2+9} & du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$, тогда

$$\int \sqrt{x^2+9}\, dx = x\sqrt{x^2+9} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+9}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+9} - \int \sqrt{x^2+9}\, dx + 9\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}.$$

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x^2+9} - \frac{9}{\sqrt{x^2+9}}\right).$$

Тогда $\int \sqrt{x^2+9}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} =$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right) + c.$$

Значит определенный интеграл

$$\int\limits_0^4 \sqrt{x^2+9}\, dx = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+9})\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \left(2\cdot 5 + \frac{9}{2}\ln 9\right) - \left(0 + \frac{9}{2}\ln 3\right) =$$

$$= 10 + 9\ln 3 - 4{,}5\ln 3 = 10 + 4{,}5\ln 3.$$

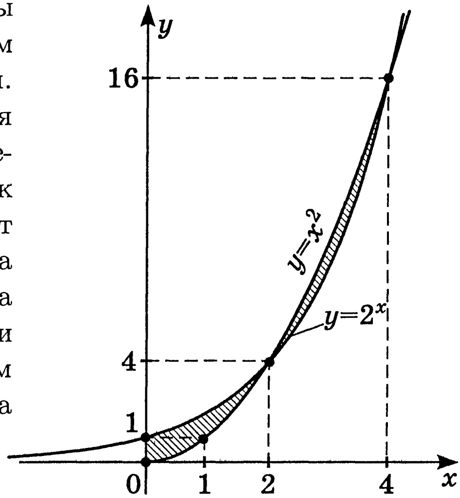
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2^x; \\ g(x) = x^2; \\ x \geqslant 0. \end{array}\right|$$

$S_Ф = ?$

а) Начертим эскизы графиков и найдем точки пересечения. $x = 2$ — очевидная абсцисса точки пересечения, но так как экспонента растет быстрее, то должна быть еще одна точка пересечения. При подборе находим $(4; 16)$ — точка пересечения.

$S_Ф = S_1 + S_2$.



б) $S_1 = \int\limits_0^2 (2^x - x^2)\, dx = \left(2^x \log_2 e - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 =$

$= \left(4\log_2 e - 2\frac{2}{3}\right) - (\log_2 e - 0) = 3\log_2 e - 2\frac{2}{3}$.

$S_2 = \int\limits_2^4 (x^2 - 2^x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2^x \log_2 e\right)\Big|_2^4 =$

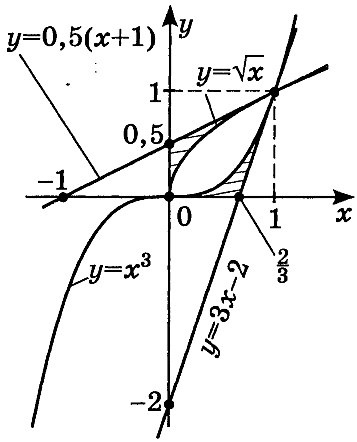
$= \left(21\frac{1}{3} - 16\log_2 e\right) - \left(2\frac{2}{3} - 4\log_2 e\right) =$

$= 18\frac{2}{3} - 12\log_2 e$.

$S_Ф = 3\log_2 e - 2\frac{2}{3} + 18\frac{2}{3} - 12\log_2 e = 16 - 9\log_2 e$.

4. $f(x) = x^3$;
$g(x) = \sqrt{x}$;
касательными
в точках пересечения.

$S_Ф = ?$



а) Найдем точки пересечения $x^3 = \sqrt{x}$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

б) $f'(x) = 3x^2$.

Пусть $x = 0$:

$f'(0) = 0; \quad f(0) = 0;$

$y = 0$ — касательная в точке $(0;0)$ для $y = x^3$.

Пусть $x = 1$: $\quad f'(1) = 3; \quad f(1) = 1;$

$y = 1 + 3(x-1); \quad y = 3x - 2$ — касательная в точке $(1;1)$ для $y = x^3$ $\quad \left(y = 0;\ x = \dfrac{2}{3}\right)$.

в) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; при $x = 0$ не существует $g'(0)$. В данном случае можно считать, что $x=0$ — касательная в точке $(0;0)$ для $y = \sqrt{x}$.

Пусть $x = 1$; $g'(1) = \dfrac{1}{2}; \quad g(1) = 1;$

$y = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1); \quad y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ — касательная в точке $(1;1)$ для $y = \sqrt{x}$.

г) $S_Ф = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right) dx = \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{12};$$

$$S_2 = \int\limits_0^{\frac{2}{3}} x^3\,dx + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} (x^3 - (3x-2))\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1},$$ но можно проще —

$$S_2 = \int\limits_0^1 x^3\,dx - S_{\triangle CAB} =$$

$$= \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12};$$

$$S_\Phi = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

5. $f(x) = x^4 - 2x^2 - x^3;$
$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4;$

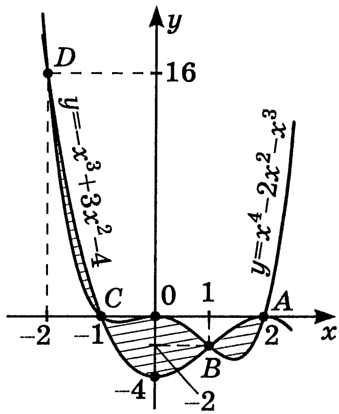
$S_\Phi = ?$

а) Найдем точки пересечения.

$x^4 - 2x^2 - x^3 = -x^3 + 3x^2 - 4;$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$

$$\left[\begin{array}{lll} x = 2; & y = 0; & A(2;0) \\ x = 1; & y = -2; & B(1;-2) \\ x = -1; & y = 0; & C(-1;0) \\ x = -2; & y = 16; & D(-2;16) \end{array}\right.$$



б) Контрольные точки:

$x = 0; \quad f(0) = 0;$

$\qquad\qquad g(0) = 4.$

в) $S_\Phi = S_1 + S_2 + S_3$

$$S_1 = \int\limits_{-2}^{-1} \left(\left(-x^3+3x^2-4\right)-\left(x^4-2x^2-x^3\right)\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{-1} \left(-x^4+5x^2-4\right)\,dx = \left(-\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3-4x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4\right)-\left(\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+8\right) = 1\frac{7}{15};$$

$$S_2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(x^4-2x^2-x^3\right)-\left(-x^3+3x^2-4\right)\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4-5x^2+4\right)\,dx = \left(\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4\right) = 5\frac{1}{15};$$

$$S_3 = \int\limits_{1}^{2} \left(\left(-x^3+3x^2-4\right)-\left(x^4-2x^2-x^3\right)\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} \left(-x^4+5x^2-4\right)\,dx = \left(-\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}x^3-4x\right)\Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{32}{5}+\frac{40}{3}-8\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{5}{3}-4\right) = 1\frac{7}{15}.$$

$$S_\Phi = 1\frac{7}{15}+5\frac{1}{15}+1\frac{1}{15} = 8.$$

Решение тренировочной карточки 3

1. Найдите: $\displaystyle\int \frac{dx}{|\sin|x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}} =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Используем замену переменной.} \\ \text{Пусть } \operatorname{ctg} x = t; \quad -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = dt. \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4 - 9\operatorname{ctg}^2 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4 - 9t^2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}t + c = -\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}\operatorname{ctg} x\right) + c.$$

2. Вычислите: $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

Используем метод интегрирования по частям.

Так как $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int\sqrt{x^2+16}\,dx - 16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$,

а $\displaystyle\int\sqrt{x^2+16}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + c_1$,

то неопределенный интеграл будет иметь вид (см. решение карточки 2): $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}} =$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) - 16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} + c_1 =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\ln(x+\sqrt{x^2+16}) - 16\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} - 8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right) + c.$$

Значит определенный интеграл будет равен:

$$\int\limits_0^3\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+16}} = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} - 8\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 1{,}5\sqrt{9+16} - 8\ln\left(3+\sqrt{9+16}\right) - (0 - 8\ln 4) =$$

$$= 7{,}5 - 8\ln 8 + 8\ln 4 = 7{,}5 - 8\ln 2.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + 2; \\ g(x) = x^2 + x + 1. \end{array}\right|$$

$S_Ф = ?$

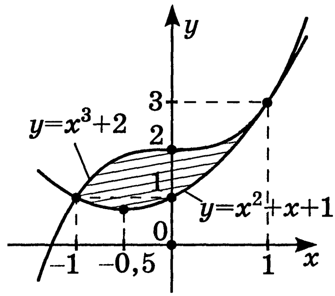
Вычислим точки пересечения и построим эскизы графиков.

$x^3 + 2 = x^2 + x + 1;$

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0;$

$(x-1)^2(x+1) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \text{ — точка касания} \\ x=-1 \end{array}\right.$.



$$S_Ф = \int\limits_{-1}^{1} \left((x^3+2) - (x^2+x+1)\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right)\, dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\right) = 1\frac{1}{3}.$$

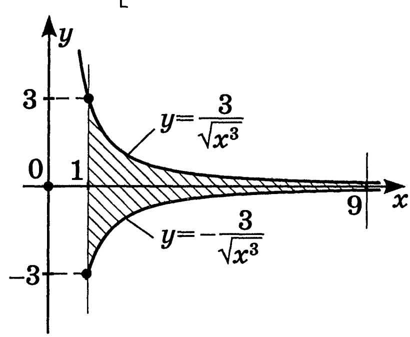
4. $\left.\begin{array}{l} x^3y^2 = 9; \\ |x-5| = 4. \end{array}\right|$

$S_Ф = ?$

$|x-5| = 4;\quad \left[\begin{array}{l} x-5=4 \\ x-5=-4 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=1 \end{array}\right.;$

$y^2 = \dfrac{9}{x^3}\quad (x>0);$

$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}; \\ y = -\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}. \end{array}\right.$



а) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3}} \quad (x \to 0+0) \Rightarrow (y \to \infty);$

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0);$

б) $y = -\dfrac{3}{\sqrt{x^3}} \quad (x \to 0+0) \Rightarrow (y \to -\infty);$

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0).$

Так как графики $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$ и $y = -\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$ симметричны относительно оси OX, то

$$S_\Phi = 2\int_1^9 \frac{3}{\sqrt{x^3}}\,dx = 6\left(\frac{1}{1-\frac{3}{2}}x^{1-\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^9 = 6\left(-2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^9 =$$

$$= 6\left(-\frac{2}{3} - (-2)\right) = 8.$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
$g(x) = \sqrt{x}$;
касательными
в точках пересечения;
прямыми $x = \dfrac{1}{9}$; $x = 9$

$S_\Phi = ?$

Построим эскизы графиков.

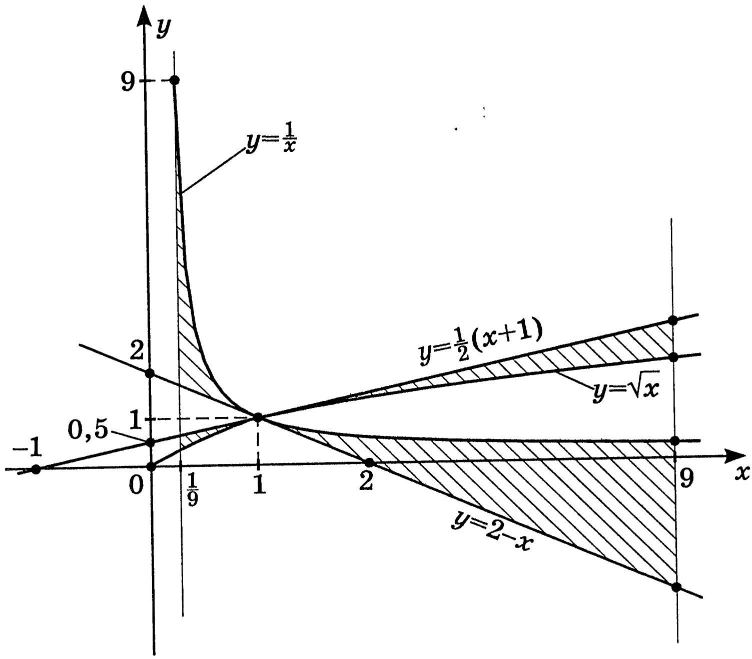
а) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}; \quad f'(1) = -1; \quad f(1) = 1;$

$y = 1 - (x-1);$

$y = -x + 2$ — касательная в точке $(1; 1)$ к $y = \dfrac{1}{x}$.

б) $g'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \quad g'(1) = \dfrac{1}{2}; \quad g(1) = 1;$

$y = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1)$; $\quad y = \dfrac{1}{2}(x+1)$ — касательная в точке $(1; 1)$ к $y = \sqrt{x}$.



в) $S_Ф = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$

$$S_1 = \int\limits_{\frac{1}{9}}^{1} \left(\frac{1}{x} - (2-x)\right) dx = \int\limits_{\frac{1}{9}}^{1} \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx =$$

$$= \left(\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{9}}^{1} = \left(0 + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\ln\frac{1}{9} + \frac{1}{162} - \frac{2}{9}\right) =$$

$$= -1{,}5 + 2\ln 3 + \frac{36-1}{162} = 2\ln 3 - 1\frac{23}{81};$$

$$S_2 = \int\limits_{\frac{1}{9}}^{1} \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right) dx = \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{9}}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{25}{81} - \frac{2}{81}\right) = \frac{4}{81};$$

$$S_3 = \int\limits_1^9 \left(\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}\right)\, dx = \left(\frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^9 =$$

$$= (25-18) - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 6\frac{2}{3};$$

$$S_4 = \int\limits_1^9 \left(\frac{1}{x} - (2-x)\right)\, dx = \left(\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_1^9 =$$

$$= \left(\ln 9 + \frac{81}{2} - 18\right) - \left(0 + \frac{1}{2} - 2\right) = 2\ln 3 + 24;$$

$$S_\Phi = 2\ln 3 - 1\frac{23}{81} + \frac{4}{81} + 6\frac{2}{3} + 2\ln 3 + 24 = 4\ln 3 + 29\frac{35}{81}.$$

Решение тренировочной карточки 4

1. Найдите:

$$\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Применим метод интегрирования по частям:} \\ \text{Пусть} \left| \begin{array}{l} u = \ln \sin x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \operatorname{ctg} x\, dx \\ v = \operatorname{tg} x \end{array} \right|. \end{array}\right]$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - \int dx = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - x + c.$$

2. Вычислите:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\,(x^2+4)}.$$

Вначале вычислим неопределенный интеграл, учтя, что

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+4)}\right).$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx = \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + c,$$

тогда определенный интеграл равен:

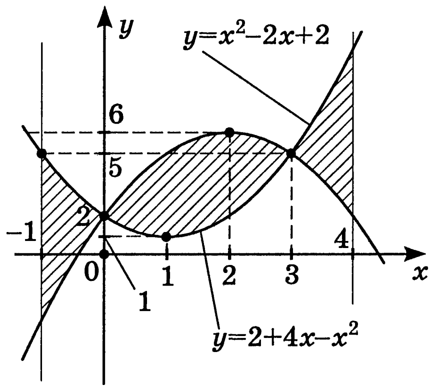
$$\int_1^2 \frac{dx}{x\,(x^2+4)} = \left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(x^2+4)\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{8}\ln 8\right) - \left(0 - \frac{1}{8}\ln 5\right) = \frac{1}{8}\ln 2{,}5.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

$f(x) = x^2 - 2x + 2;$
$g(x) = 2 + 4x - x^2.$
прямыми $x = -1;\ x = 4.$

$S_Ф = ?$



а) Найдем точки пересечения и построим эскизы графиков.

$x^2-2x+2=2+4x-x^2;$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

б) $S_Ф = S_1 + S_2 + S_3.$

$$S_1 = \int\limits_{-1}^{0} \left((x^2 - 2x + 2) - (2 + 4x - x^2)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (2x^2-6x)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^3-3x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} = 0-\left(-\frac{2}{3}-3\right) = 3\frac{2}{3};$$

$$S_2 = \int\limits_{0}^{3} \left((2 + 4x - x^2) - (x^2 - 2x + 2)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{3}(-2x^2 + 6x)\,dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right)\Bigg|_{0}^{3} =$$

$$= (-18 + 27) - 0 = 9;$$

$$S_3 = \int\limits_{3}^{4} \left((x^2 - 2x + 2) - (2 + 4x - x^2)\right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right)\Bigg|_{3}^{4} = \left(\frac{128}{3} - 48\right) - (18 - 27) =$$

$$= 42\frac{2}{3} - 48 + 9 = 3\frac{2}{3};$$

$$S_Ф = 3\frac{2}{3} + 9 + 3\frac{2}{3} = 16\frac{1}{3}.$$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x;$
$g(x) = x^3 + x^2 - 6x;$
$t(x) = 6x.$

$S_Ф = ?$

а) Найдем точки пересечения $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ и $g(x) = x^3 + x^2 - 6x$ и построим эскизы графиков.

$x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + x^2 - 6x;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-2)(x-1);$
$g(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2);$

в) $f(x) = t(x);$

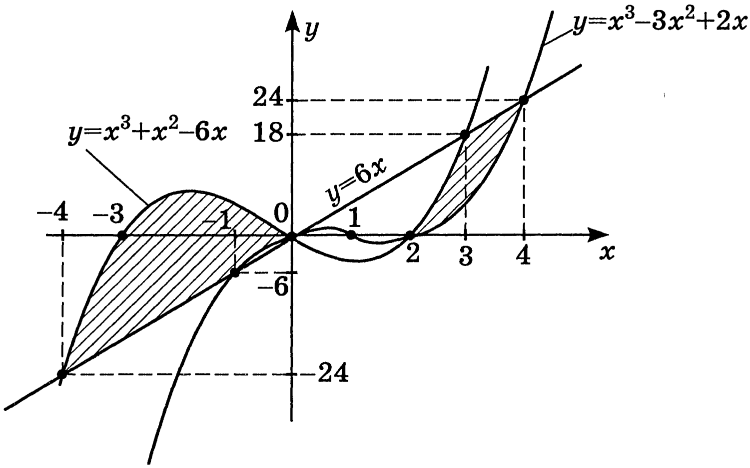
$x^3 - 3x^2 + 2x = 6x;\quad x^3 - 3x^2 - 4x = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -1 \end{array}\right.;$

$t(4) = 24;\quad t(-1) = -6;$

г) $g(x) = t(x);$

$x^3 + x^2 - 6x = 6x;\quad x(x^2 + x - 12) = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \\ x = 3 \end{array}\right.;$

$t(-4) = -24;\quad t(3) = 18.$



д) $S_Ф = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

$$S_1 = \int_{-4}^{-1} \left((x^3 + x^2 - 6x) - (6x)\right) dx =$$

$$= \int_{-4}^{-1} \left(x^3 + x^2 - 12x\right) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6x^2\right)\Bigg|_{-4}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 6\right) - \left(64 - \frac{64}{3} - 96\right) = 47\frac{1}{4};$$

$$S_2 = \int_{-1}^{0} \left((x^3 + x^2 - 6x) - (x^3 - 3x^2 + 2x)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(4x^2 - 8x\right) dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{4}{3} - 4\right) = 5\frac{1}{3};$$

$$S_3 = \int_{2}^{3} \left((x^3 + x^2 - 6x) - (x^3 - 3x^2 + 2x)\right) dx =$$

$$= \int_{2}^{3} (4x^2 - 8x)\, dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2\right)\Bigg|_{2}^{3} =$$

$$= (36 - 36) - \left(\frac{32}{3} - 16\right) = 16 - 10\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$S_4 = \int_{3}^{4} \left(6x - x^3 + 3x^2 - 2x\right) dx =$$

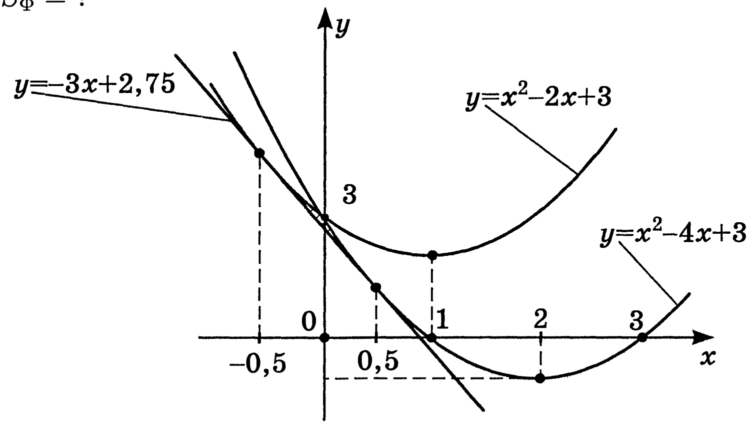
$$= \int_{3}^{4} (-x^3 + 3x^2 + 4x)\, dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2\right)\Bigg|_{3}^{4} =$$

$$= (-64 + 64 + 32) - \left(-\frac{81}{4} + 27 + 18\right) = 7\frac{1}{4};$$

$$S_Ф = 47\frac{1}{4} + 5\frac{1}{3} + 5\frac{1}{3} + 7\frac{1}{4} = 65\frac{1}{6}.$$

5. $f(x) = x^2 - 4x + 3;$
$g(x) = x^2 - 2x + 3;$
общими касательными.

$S_Ф = ?$



а) Найдем общую касательную.

Пусть $y = ax + b$ — общая касательная.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = ax + b \\ x^2 - 2x + 3 = ax + b \end{array}\right| .$$

Условие того, что $y = ax + b$ — общая касательная — наличие единственной точки пересечения.

$x^2 - (4 + a)x + 3 - b = 0;\quad D = (4 + a)^2 - 12 + 4b = 0;$
$x^2 - (2 + a)x + 3 - b = 0;\quad D = (2 + a)^2 - 12 + 4b = 0.$

Чтобы прямая была касательной одновременно к двум кривым, необходимо

$$\begin{cases} (4 + a)^2 - 12 + 4b = 0 \\ (2 + a)^2 - 12 + 4b = 0 \end{cases}.$$

$(a + 4 + a + 2)(a + 4 - a - 2) = 0;$

$\underline{a = -3}$, тогда $b = 2{,}75;$ $\underline{y = -3x + 2{,}75}$.

$x^2 - (4 + a)x + 3 - b = 0$ при $a = -3;$ $b = 2{,}75;$ $x = \dfrac{1}{2};$

$x^2 - (2 + a)x + 3 - b = 0$ при $a = -3;$ $b = 2{,}75;$ $x = -\dfrac{1}{2}.$

б) $S_\Phi = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int\limits_{-0,5}^{0} \left(3x - 2{,}75 + x^2 - 2x + 3\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-0,5}^{0} \left(x^2 + x + 0{,}25\right)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 0{,}25x\right)\Bigg|_{-0,5}^{0} =$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24};$$

$$S_2 = \int\limits_{0}^{0,5} \left(x^2 - 4x + 3 + 3x - 2{,}75\right)\, dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{0,5} \left(x^2 - x + 0{,}25\right)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 0{,}25x\right)\Bigg|_{0}^{0,5} =$$

$$= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - 0 = \frac{1}{24};$$

$$S_\Phi = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

Решение тренировочной карточки 5

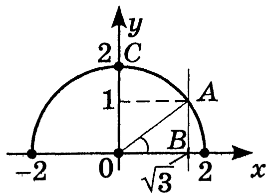
1. Вычислите: $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} =$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(-\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx =$$

$$= -\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx + 4\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Рассмотрим $\sqrt{4-x^2} = y$ — полуокружность.

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y \geqslant 0 \end{cases};$$



$\cos\angle AOB = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тогда

$\angle AOB = \dfrac{\pi}{6}$, а $\angle COA = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

а) $S_{\text{сек }(COA)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}r^2;$

$R = 2;\quad S_{\text{сек }(COA)} = \dfrac{2}{3}\pi;$

б) $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$$S_\Phi = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Но можно решить подстановкой:

$x = 2\sin t; \quad t = \arcsin\dfrac{x}{2}; \quad dx = 2\cos t\,dt;$

$\sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t$, тогда

$$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 2\int (1 + \cos 2t)\ dt =$$

$$= 2t + \sin 2t + c = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin(2\arcsin\frac{x}{2}) + c =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\sin(\arcsin\frac{x}{2}) \cdot \sqrt{1 - \sin^2\arcsin\frac{x}{2}} + c =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + c = 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + c.$$

Тогда $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\,dx = \left(2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$

$$= \left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{3}{4}}\right) - 0 = 2\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}} = -\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$

$$= -\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}}.$$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx.$

Сначала найдем неопределенный интеграл $\int e^x \sin x\, dx =$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Воспользуемся методом интегрирования по частям:} \\ \left| \begin{array}{l|l} \sin x = u & \cos x\, dx = du \\ e^x\, dx = dv & v = e^x \end{array} \right|. \end{array} \right]$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx =$$

$$\left[\text{Применим метод дважды: } \left| \begin{array}{l|l} \cos x = u & -\sin x\, dx = du \\ e^x \cdot dx = dv & e^x = v \end{array} \right|. \right]$$

$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx\right) + c_1,$ тогда

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} \left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + c.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}\right) - e^0 \left(\sin 0 - \cos 0\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\pi}{2}} (1 - 0) - 1 \cdot (-1)\right] = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right).$$

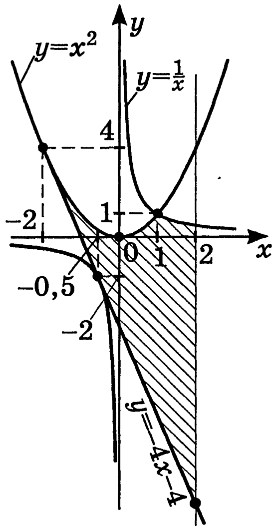
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

$f(x) = \dfrac{1}{x}$;
$g(x) = x^2$;
общей касательной;
прямой $x = 2$.

$S_Ф = ?$

Построим эскизы графиков.

Пусть $y = ax + b$ — общая касательная, тогда



а) $\dfrac{1}{x} = ax + b;$

$ax^2 + bx - 1 = 0;$

$D = b^2 + 4a = 0.$

б) $x^2 = ax + b;$

$x^2 - ax - b = 0;$

$D = a^2 + 4b = 0,$

причем это выполняется одновременно:

$$\begin{cases} b^2 + 4a = 0 \\ a^2 + 4b = 0 \end{cases};$$

$$(b^2 - a^2) - 4(b - a) = 0; \quad \begin{cases} (b-a)(b+a-4)=0 \\ a^2 + 4b = 0 \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ a(a+4) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 + 4(4-a) = 0;\ D < 0 \end{cases} \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -4 \end{cases} \end{array}\right.,$$

т. е. $\boxed{y = -4x - 4}$.

в) $\dfrac{1}{x} = -4x - 4; \quad x = -\dfrac{1}{2};$

г) $x^2 = -4x - 4; \quad x = -2.$

д) $$S_\Phi = \int\limits_{-2}^{1} \left(x^2 - (-4x - 4)\right) dx + \int\limits_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} + 4x + 4\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{1} + (\ln x + 2x^2 + 4x)\Big|_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}+2+4\right) - \left(-2\frac{2}{3}+8-8\right) + (\ln 2+8+8) - (\ln 1+2+4) =$$

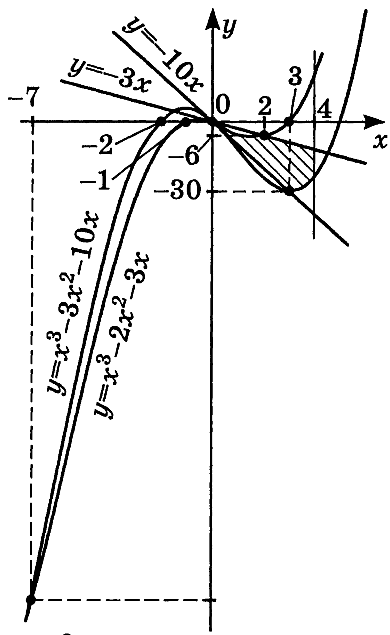
$$= 6 + 3 + \ln 2 + 16 - 6 = 19 + \ln 2.$$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x;$
$g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x;$
касательными в точке $(0; 0)$;
прямой $x = 4$.

$S_Ф = ?$

Построим эскизы графиков, найдем точки пересечения.

$x^3 - 3x^2 - 10x = x^3 - 2x^2 - 3x;$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -7 \end{array}\right.$.



а) $y = x^3 - 3x^2 - 10x =$
$= x(x-5)(x+2);$

б) $y = x^3 - 2x^2 - 3x =$
$= x(x-3)(x+1);$

в) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 10;$
$f'(0) = -10;$ $f(0) = 0;$
$y = 0 + (-10)(x-0) =$
$= -10x;$
$f(x) = -10x;$
$x^3 - 3x^2 - 10x = -10x;$
$x^2(x-3) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$;

г) $g'(x) = 3x^2 - 4x - 3;$
$g'(0) = -3;$ $g(0) = 0;$ $y = -3x$ — уравнение касательной;

д) $g(x) = -3x;$ $x^2(x-2) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$;

$f(x) = -3x;$ $x(x^2 - 3x - 7) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3+\sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$;

$g(x) = -10x;$ $x(x^2 - 2x + 7) = 0;$ $x = 0.$

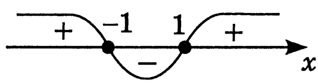
$$\text{е) } S_Ф = \int_0^2 \left(x^3 - 2x^2 - 3x + 10x\right)\,dx + \int_2^3 (-3x + 10x)\,dx +$$
$$+ \int_3^4 \left(-3x - x^3 + 3x^2 + 10x\right)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \left(x^3 - 2x^2 + 7x\right)\,dx + \int_2^3 7x\,dx + \int_3^4 \left(-x^3 + 3x^2 + 7x\right)\,dx =$$
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2 + \frac{7}{2}x^2\Bigg|_2^3 + \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{7}{2}x^2\right)\Bigg|_3^4 =$$
$$= \left(4 - 5\frac{1}{3} + 14 - 0\right) + \left(\frac{63}{2} - 14\right) +$$
$$+ (-64 + 64 + 56) - \left(-\frac{81}{4} + 27 + \frac{63}{2}\right) =$$
$$= 12\frac{2}{3} + 31{,}5 - 14 + 56 + 20\frac{1}{4} - 58{,}5 = 47\frac{11}{12}.$$

5. $y = (x^2 - 1)e^{x^3 - 3x}$;
прямой $y = 0$.

$S_Ф = ?$

Построим эскиз графиков.

а) $y > 0$
$y = 0$
$y < 0$



б) $y' = 2xe^{x^3-3x} + \left(3x^2 - 3\right)e^{x^3-3x}(x^2 - 1) =$
$= e^{x^3-3x}\left(3x^4 - 6x^2 + 2x + 3\right).$

Уравнение $y' = 0$ решить весьма сложно, но в данном случае можно обойтись без графика.

$$\text{в) } S_Ф = -\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right) e^{x^3-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} e^{x^3-3x}\,d(x^3 - 3x) =$$
$$= -\frac{1}{3}e^{x^3-3x}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\left(e^{1-3} - e^{-1+3}\right) = -\frac{1}{3}\left(e^{-2} - e^{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{e^4 - 1}{e^2}.$$

Примечание. Для вычисления площади не так существенно значение максимума и минимума.

Решение тренировочной карточки 6

1. Вычислите:

$$\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$$

Пусть $\sqrt{x+1}=t;\quad \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}}=dt;\quad dx=2t\,dt,$

тогда $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx=\int\frac{(t+1)2t\,dt}{t-1}=$

$$\left[\begin{array}{rl} -\,2t^2+2t & \underline{|\,t-1\quad} \\ \underline{2t^2-2t\quad} & \ 2t+4 \\ -\ 4t & \\ \underline{4t-4} & \\ 4 & \end{array}\right]$$

$$=\int\left(2t+4+\frac{4}{t-1}\right)dt=t^2+4t+4\ln(t-1)+c=$$

$$=x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}-1)+c.$$

Значит

$$\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx=\left(x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}-1)\right)\Big|_3^8=$$

$$=(9+4\cdot 3+4\ln(3-1))-(4+8+4\ln 1)=9+4\ln 2.$$

2. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}.$

Пусть $\operatorname{tg} x=t;\quad \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt;$

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x};$$

$$t^2(1-\sin^2 x)=\sin^2 x;\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{t^2+1}{t^2} = 1 + \frac{1}{t^2}, \text{ тогда}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2 dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt =$$

$$= t + \frac{2}{1-2} t^{1-2} + \frac{1}{1-4} t^{1-4} + c = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + c.$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} = \left(\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(1 - 2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1\right) = \frac{8}{27}\sqrt{3} + 1\frac{1}{3}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

$f(x) = 3^x$;
$g(x) = x^2 + 5$;
касательными, проведенными
в точках пересечения с прямыми
$x = 1$; $x = 3$.

$S_Ф = ?$

Построим эскизы графиков.

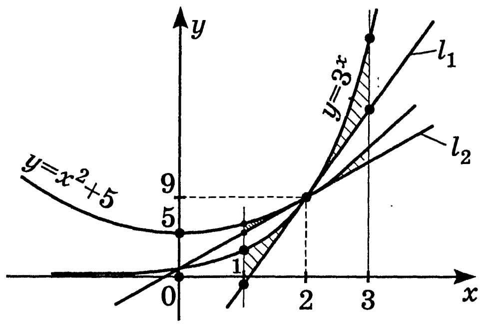
а) $3^x = x^2 + 5$; $\quad x = 2$;

б) $f(x) = 3^x$; $\quad f'(x) = 3^x \ln 3$;

$f'(2) = 9 \ln 3$; $\quad f(2) = 9$;

l_1 — $y = 9 + 9 \ln 3 \cdot (x - 2)$;

$y = 9 \ln 3 \cdot x - 18 \ln 3 + 9$ — l_1 — касательная.



в) $g(x) = x^2 + 5; \quad g'(x) = 2x;$

$g'(2) = 4; \quad g(2) = 9;$

$y = 9 + 4(x-2) = 4x + 1$ — l_2 — касательная.

г) $$S_\Phi = \int\limits_1^2 (3^x - (9x\ln 3 - 18\ln 3 + 9))\,dx + \int\limits_1^2 \left(x^2 + 5 - (4x+1)\right)\,dx +$$

$$+ \int\limits_2^3 (3^x - (9x\ln 3 - 18\ln 3 + 9))\,dx + \int\limits_2^3 \left(x^2 + 5 - (4x+1)\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^3 (3^x - (9x\ln 3 - 18\ln 3 - 9))\,dx + \int\limits_2^3 \left(x^2 + 5 - (4x+1)\right)dx =$$

$$= \left(3^x\log_3 e - \frac{9}{2}x^2\ln 3 + (18\ln 3 - 9)x\right)\Bigg|_1^3 + \frac{1}{3}(x-2)^3\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(27\log_3 e - \frac{81}{2}\ln 3 + 54\ln 3 - 27\right) -$$

$$- \left(3\log_3 e - \frac{9}{2}\ln 3 + 18\ln 3 - 9\right) + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 24\log_3 e - 17\frac{1}{3}.$$

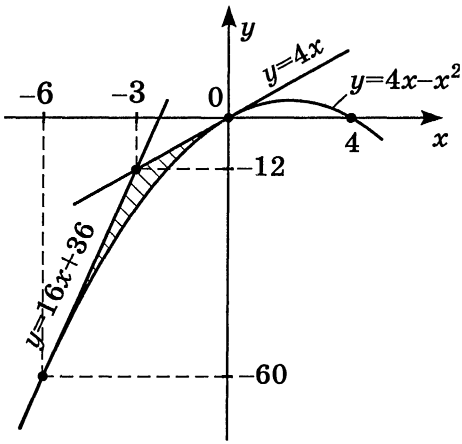
4. $y = 4x - x^2$;
касательными к кривой,
проходящими через точку $(-3; -12)$.
$S_Ф = ?$

Пусть $y = ax + b$ — касательная к $y = 4x - x^2$.

$-12 = -3a + b$; $\quad b = 3a - 12$, тогда $y = ax + 3a - 12$.

Найдем единственную точку пересечения касательной и $y = 4x - x^2$.

$ax + 3a - 12 = 4x - x^2$; $\quad x^2 + (a - 4)x + 3a - 12 = 0$;



$$D = (a-4)^2 - 4(3a - 12) = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} a = 4; \quad b = 0 \\ a = 16; \ b = 36 \end{array}\right.,$$
$$(a - 4)(a - 4 - 12) = 0;$$

т. е. $\left.\begin{array}{l} y = 4x \\ y = 16x + 36 \end{array}\right\|$ — касательные к $y = 4x - x^2$, проходящие через точку $(-3; -12)$.

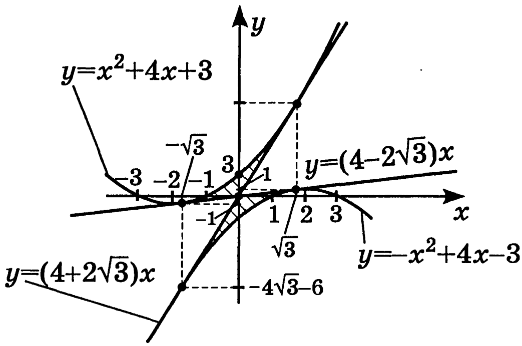
$$S_Ф = \int_{-6}^{-3} (16x + 36 + x^2 - 4x)\,dx + \int_{-3}^{0} (4x + x^2 - 4x)\,dx =$$

$$= \int_{-6}^{-3} (x^2 + 12x + 36)\,dx + \int_{-3}^{0} x^2\,dx = \frac{1}{3}(x+6)^3\Big|_{-6}^{-3} + \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{0} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3^3 - 0^3\right) + \frac{1}{3}\left(0 - (-3)^3\right) = 9 + 9 = 18.$$

5. $f(x) = x^2 + 4x + 3;$
$g(x) = -x^2 + 4x - 3;$
общими касательными.

$S_Ф = ?$



Пусть $y = ax + b$ — касательная.

$ax + b = x^2 + 4x + 3; \quad ax + b = -x^2 + 4x - 3;$

$x^2 + (4 - a)x + 3 - b = 0; \quad x^2 + (a - 4)x + b + 3 = 0;$

$$\begin{cases} D = (4-a)^2 - 4(3-b) = 0 \\ D = (a-4)^2 - 4(b+3) = 0 \end{cases}; \quad b - 3 + b + 3 = 0.$$

$\underline{b = 0}$; тогда $(a-4)^2 = 12$, т. е. $\left[\begin{array}{l} a = 4 + 2\sqrt{3} \\ a = 4 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$,

т. е. $\begin{array}{l} y = (4+2\sqrt{3})x \\ y = (4-2\sqrt{3})x \end{array}\Bigg|$ — касательные

к кривым $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = -x^2 + 4x - 3$.

$x_0 = -\dfrac{a-4}{2}$; при $a = 4 - 2\sqrt{3}$; $x_0 = \sqrt{3}$ для $y = -x^2 + 4x - 3$;
при $a = 4 + 2\sqrt{3}$; $x_0 = -\sqrt{3}$ для $y = -x^2 + 4x - 3$;

$x_0 = -\dfrac{4-a}{2}$; при $a = 4 - 2\sqrt{3}$; $x_0 = -\sqrt{3}$ для $y = x^2 + 4x + 3$;
при $a = 4 + 2\sqrt{3}$; $x_0 = \sqrt{3}$ для $y = x^2 + 4x + 3$.

$$S_\Phi = 2\left[\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^2+4x+3-\left(4-2\sqrt{3}\right)x\right)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \left(x^2+4x+3-\left(4+2\sqrt{3}\right)x\right)\,dx\right]=$$

$$=2\left[\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^2+2\sqrt{3}x+3\right)\,dx+\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \left(x^2-2\sqrt{3}x+3\right)\,dx\right]=$$

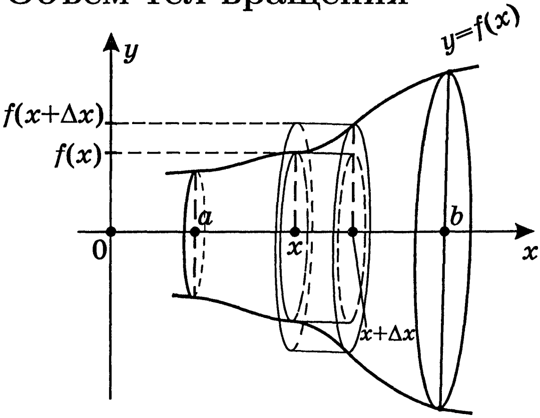
$$=2\left[\left(\frac{1}{3}x^3+\sqrt{3}x^2+3x\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{0}+\left(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{3}x^2+3x\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{3}}\right]=$$

$$=2\left[0-\left(-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-0\right]=$$

$$=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

Примечание. Так как графики центрально-симметричны относительно начала координат $(0;0)$, то площади фигур, ограниченных касательными и кривыми, равны между собой.

Объем тел вращения



Пусть $y = f(x)$ — непрерывна, монотонно возрастает и неотрицательна на $[a;b]$. $V(x)$ — функция зависимости объема тела вращения от расстояния от точки $(0;0)$ до точки $(x;0)$. $\Delta V(x) = V(x+\Delta x) - V(x)$ находится между объемами двух цилиндров радиуса $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$ и высотой Δx, причем $\pi f^2(x)\Delta x < \Delta V(x) < \pi f^2(x+\Delta x)\Delta x$ (при условии $\Delta x > 0$).

$$\pi f^2(x) < \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} < \pi f^2(x+\Delta x).$$

(Аналогично можно рассматривать случай убывания.)

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \pi f^2(x) \leqslant \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \leqslant \lim_{\Delta x\to 0} \pi f^2(x+\Delta x).$$

В силу непрывности $y = f(x)$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \pi f^2(x+\Delta x) = \pi f^2(x)$,

а $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \pi f^2(x) = \pi f^2(x)$, так как функция не зависит от Δx.

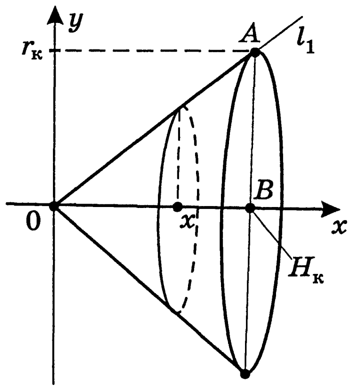
Тогда $\pi f^2(x) \leqslant \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta V(x)}{\Delta x} \leqslant \pi f^2(x)$, значит $V'(x) = \pi f^2(x)$.

Учитывая, что $V_{\text{т.вр}} = V(b) - V(a)$ на $[a;b]$, $\boxed{V_{\text{т.вр}} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$.

Если $y = f(x)$ кусочно-монотонная, то ее просто можно разбить на участки монотонности. В дальнейшем по умолчанию мы это специально оговаривать не будем.

Практикум 30

1. Выведем формулу объема конуса через $r_к$ и $H_к$. ($r_к$ — радиус основания, $H_к$ — высота конуса).



$\operatorname{tg}(\angle AOB) = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{r_к}{H_к}$.

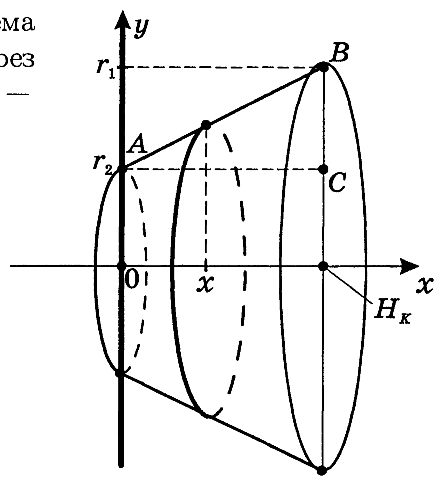
$OA \subset l_1$;

l_1: $y = \dfrac{r_к}{H_к}x = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$.

$$V_k = \pi \int\limits_0^{H_k} (x \operatorname{tg} \alpha)^2 \, dx = \frac{\pi}{3} \left(x^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \Big|_0^{H_k} = \frac{\pi}{3} H_k^3 \operatorname{tg}^2 \alpha =$$

$$= \frac{\pi}{3} H_k^3 \frac{r_k^2}{H_k^2} = \frac{1}{3}\pi r_k^2 H_k \text{ (куб. ед).} \qquad \boxed{V_k = \frac{1}{3}\pi r_k^2 H_k}$$

2. Выведем формулу объема усеченного конуса через $H_к, r_1, r_2$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований.



$k = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{r_1 - r_2}{H_к}$;

$b = r_2$;

$AB \subset l_1$;

l_1: $y = kx + b$;

$$V_{ус.к} = \pi \int\limits_0^{H_k} (kx + b)^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi \, (kx + b)^3 \, \frac{1}{k}\Big|_0^{H_k} =$$

$$= \frac{\pi}{3k} \left((kH_k + b)^3 - b^3 \right) = \frac{\pi}{3k} \left(k^3 H_k^3 + 3k^2 H_k^2 b + 3kH_k b^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H_k \left(k^2 H_k^2 + 3kH_k b + 3b^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H_k \left(\left(\frac{r_1 - r_2}{H_k}\right)^2 H_k^2 + 3\frac{r_1 - r_2}{H_k} H_k r_2 + 3r_2^2\right) =$$

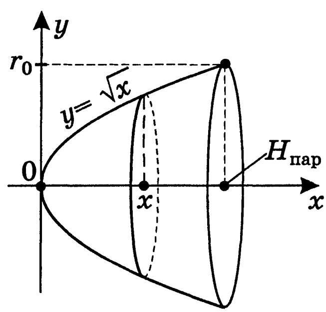
$$= \frac{1}{3}\pi H_k \left(r_1^2 - 2r_1 r_2 + r_2^2 + 3r_1 r_2 - 3r_2^2 + 3r_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H_k \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right),$$

т. е. $\boxed{V_{\text{ус.к}} = \frac{1}{3}\pi H_k \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}$.

3. Найдем объем тела, ограниченного кривой $y = \sqrt{x}$, вращающейся вокруг оси OX.

Это тело — параболоид, где r_0 — радиус основания, $H_{\text{пар}}$ — высота параболоида.



$r_0 = \sqrt{H_{\text{пар}}}$;

$$V = \pi \int_0^{H_{\text{пар}}} (\sqrt{x})^2\,dx =$$

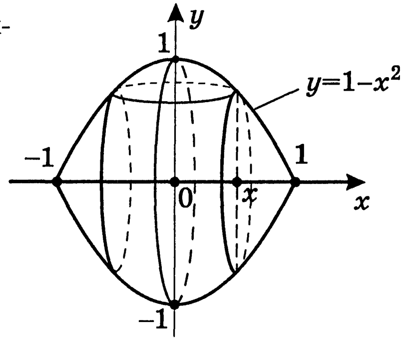
$$= \pi \int_0^{H_{\text{пар}}} x\,dx = \frac{1}{2}\pi x^2 \Big|_0^{H_{\text{пар}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\pi H_{\text{пар}}^2 = \frac{1}{2}\pi H_{\text{пар}} r_0^2 \text{ (куб. ед).}$$

Объем параболоида равен половине площади основания, умноженной на высоту:

$\boxed{V_{\text{пар}} = \frac{1}{2}\pi H_{\text{пар}} r_0^2}$.

4. Найдем объем тела, полученного вращением параболического сегмента $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$ вокруг оси OX.



Учтем, что на $[-1; 1]$ функция четная.

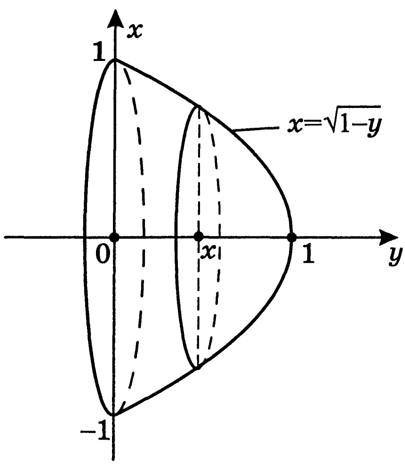
$$V = \pi \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

5. Найдем объем тела полученного вращением параболического сегмента $0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$ вокруг оси ординат.

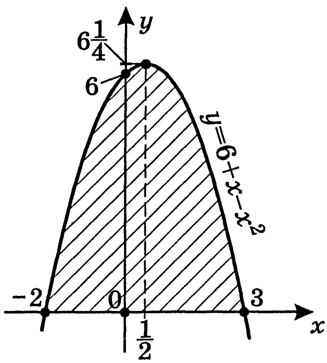


Так как $y \leqslant 1 - x^2$, то $x^2 \leqslant 1 - y$.

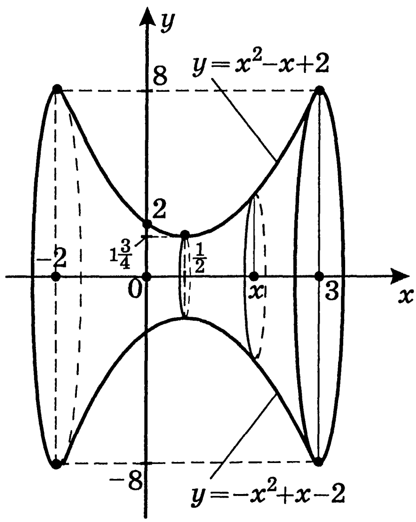
$$V_{\text{т.вр}} = \pi \int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt{1 - y}\right)^2 dy = \pi \int\limits_{0}^{1} (1 - y)\, dy = \pi \left(y - \frac{1}{2}y^2 \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ (куб. ед.).}$$

6. Найдем объем тела, полученного вращением вокруг прямой $y = 8$ фигуры, заданной условием $0 \leqslant y \leqslant 6 + x - x^2$.



Сместим кривую так, чтобы ось вращения совпала с осью абсцисс. Получим кривую $y = -2 + x - x^2$.



Из условия $0 \leqslant y \leqslant 6 + x - x^2$ следует, что $-x^2 + x + 6 \geqslant 0$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Так как кривая $y = -x^2 + x - 2$ симметрична относительно оси OX кривой $y = x^2 - x + 2$, то удобнее рассмотреть ее.

$0 \leqslant y \leqslant x^2 - x + 2; \quad -2 \leqslant x \leqslant 3;$

$f(3) = 8; \quad f(-2) = 8.$

$V = \pi \cdot 8^2 (3 - (-2)) = 320\pi$ (куб. ед.) — объем цилиндра.

$$V_{\text{т.вр}} = 320\pi - \pi \int\limits_{-2}^{3} \left(x^2 - x + 2\right)^2 dx =$$

$$= 320\pi - \pi \int\limits_{-2}^{3} \left(x^4 + x^2 + 4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x\right) dx =$$

$$= 320\pi - \pi \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{3} =$$

$$= 320\pi - \pi\left(\frac{243}{5} + 45 - \frac{1}{2} \cdot 81 - 18 + 12 - \left(-\frac{32}{5} - \frac{40}{3} - 8 - 8 - 8\right)\right) =$$

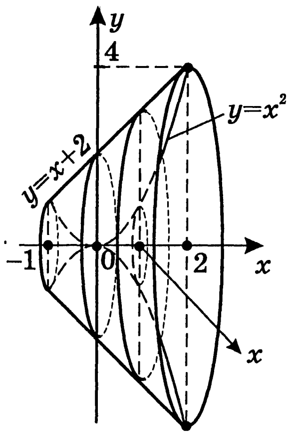
$$= 320\pi - 90\frac{5}{6}\pi = 229\frac{1}{6}\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

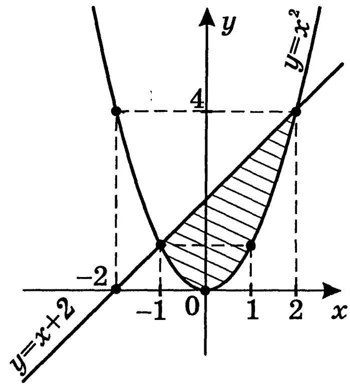
Примечание. По сути мы нашли объем детали, полученной при обработке цилиндра на токарном станке резцом, режущая поверхность которого задается кривой $y = 6 + x - x^2$ на $[-2; 3]$ (глубина погружения $6\frac{1}{4}$ от поверхности, где $R = 8$, $H = 5$).

7. Найдем объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной $y = x^2$ и $y = x + 2$, вокруг оси OX.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}; \quad x^2 = x + 2; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.,$$

т. е. $x^2 \leqslant y \leqslant x + 2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 2$.



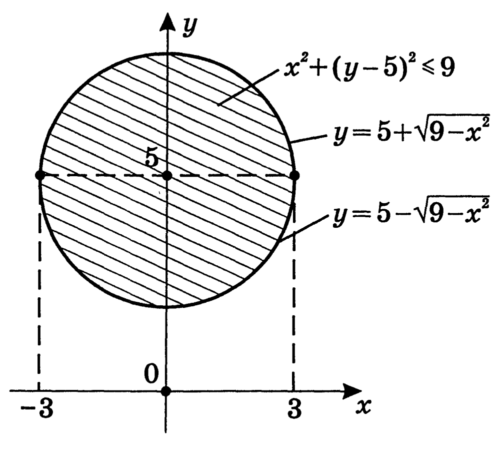


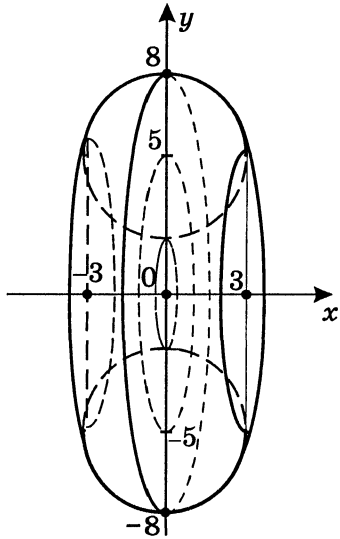
Итак, $V_{\text{т.вр}} = \pi \int\limits_{-1}^{2} (x+2)^2\,dx - \pi \int\limits_{-1}^{2} \left(x^2\right)^2 dx =$

$= \pi \left(\frac{1}{3}(x+2)^3 - \frac{1}{5}x^5 \right)\Big|_{-1}^{2} = \pi \left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \right) =$

$= 14{,}4\pi$ (куб. ед.).

8. Найдем объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс круга $x^2 + (y-5)^2 \leqslant 9$ (такое тело называется тор, или бублик).





Из условия следует, что $5-\sqrt{9-x^2}\leqslant y\leqslant 5+\sqrt{9-x^2}$, $D(y)=[-3;3]$.

$$V=\pi\int_{-3}^{3}\left(5+\sqrt{9-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-3}^{3}\left(5-\sqrt{9-x^2}\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_{-3}^{3}\left(25+10\sqrt{9-x^2}+9-x^2-25+10\sqrt{9-x^2}-9+x^2\right)^2dx=$$

$$=20\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=40\pi\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Пусть $x=3\sin t$; $dx=3\cos t\,dt$,

тогда $\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=\int 9\cos^2 t\,dt=$

$=\dfrac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\dfrac{9}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)+c,$

так как при $x\in[0;3]$ $\quad t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad\cos t\geqslant 0$

и $\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\cos t$.

Так как $t = \arcsin\dfrac{x}{3}$,

то $\sin 2t = 2\sin\left(\arcsin\dfrac{x}{3}\right)\cos\left(\arcsin\dfrac{x}{3}\right) =$

$$= 2\cdot\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{2x}{9}\sqrt{9-x^2},$$

тогда $\displaystyle\int\sqrt{9-x^2}dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c.$

$$V = 20\pi\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx =$$

$$= 20\,\pi\left(\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}\right)\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= 20\pi\left(\frac{9}{2}\arcsin 1 + \frac{3}{2}\cdot 0 - \frac{9}{2}\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\cdot 0\right) =$$

$$= 90\pi^2 \ \text{(куб. ед.)}.$$

Примечание. Можно проще, если учесть, что при замене переменных интервалы интегрирования в определенном интеграле меняются.

Пусть $x = 0$, тогда $t = 0$; а если $x = 3$, то $t = \dfrac{\pi}{2}$, значит

$$V = 40\pi\int\limits_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = 40\pi\cdot\frac{9}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 180\pi\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 180\pi\left(\frac{\pi}{2} + 0 - (0+0)\right) =$$

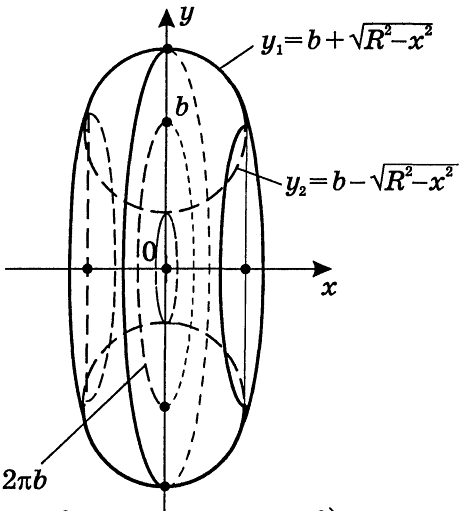
$$= 90\pi^2 \ \text{(куб. ед.)}.$$

9. Объем тора.

$x^2 + (y - b)^2 = R^2;$

$y_1 = b + \sqrt{R^2 - x^2};$

$y_2 = b - \sqrt{R^2 - x^2};$



$$V_{\text{тора}} = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(\left(b + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 \right) dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{R} \left(b^2 + 2b\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - x^2 - b^2 + 2b\sqrt{R^2 - x^2} - R^2 + x^2 \right) dx =$$

$$= 8b\pi \int\limits_{0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 8b\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t\, dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } x = R\sin t; \quad dx = R\cos t\, dt; \\ \text{Заменим } x = R\sin t, \text{ если } x = 0, \text{ то } t = 0, \\ \text{а если } x = R, \text{ то } t = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right]$$

$$= 8b\pi R^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4b\pi R^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

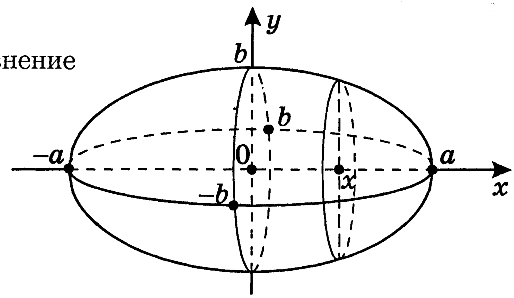
$$= 4b\pi R^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 4b\pi R^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 + (0 + 0) \right) =$$

$= \boxed{2\pi^2 bR^2 = V_{\text{тора}}}$, т. е. объем тора равен площади вращения круга, умноженной на длину окружности, описанную ее центром.

$\boxed{V_{\text{тора}} = \pi R^2 \cdot 2\pi b}$

10. Объем эллипсоида.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — уравнение эллипса.



$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$;

$V_{\text{эл}}=\int\limits_{-a}^{a}\pi y^2\,dx=$

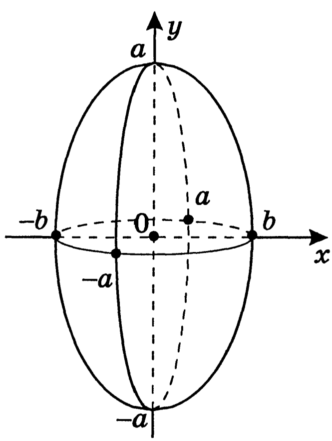
$=\pi\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=$

$=\frac{2b^2}{a^2}\pi\int\limits_{0}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{2b^2}{a^2}\pi\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=$

$=\frac{2b^2}{a^2}\pi\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)=\frac{4}{3}ab^2\pi$ (куб. ед.).

При $a=b$ получаем объем шара. Шар есть частный случай эллипсоида.

Примечание. В данном случае рассматривается вытянутый эллипсоид $a>b$ (вращение вокруг большей оси). Если вращать вокруг малой оси — то это сжатый эллипсоид, и $V_{\text{сж.эл}}=\frac{4}{3}ba^2\pi$. Можно доказать, что $V_{\text{сж.эл}}>V_{\text{выт.эл}}$.



Тренировочная работа 18

1. Выведите формулу объема шара.

2. Выведите формулу объема шарового сегмента как тела, ограниченного плоскостью сечения и шаровой поверхностью, через радиус основания и его высоту.

3. Выведите формулу объема шарового сектора как тела, образованного вращением кругового сектора радиуса R с центральным углом в 2α (радиан) вокруг своей оси симметрии.

4. Выведите формулу объема шарового сектора как тела, образованного вращением кругового сектора радиуса R с центральным углом в 2α (радиан) вокруг оси OX, перпендикулярной его оси симметрии ($2\alpha \leqslant \pi$).

5. Выведите формулу объема шарового сектора как тела, образованного вращением кругового сектора с центральным углом в 2α (радиан) вокруг оси OX под углом β ($2\alpha + \beta \leqslant \pi$).

6. Выведите формулу объема шарового слоя как части шара, ограниченной двумя параллельными плоскостями, через радиусы оснований и высоту.

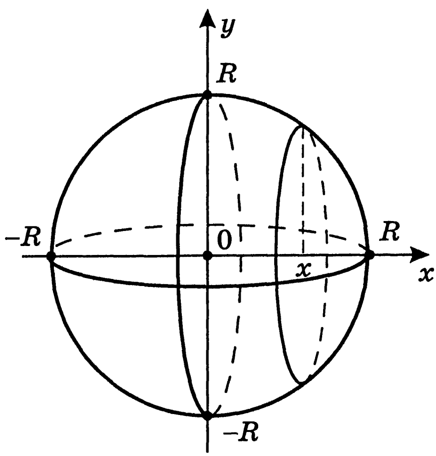
Решение тренировочной работы 18

1. Выведите формулу объема шара.

$y^2 + x^2 = R^2$ — формула окружности с центром в начале координат.

Так как формула $x^2+y^2 \leqslant R^2$ определяет круг, то полкруга определяет формула

$0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$; $D(x) = [-R; R]$.



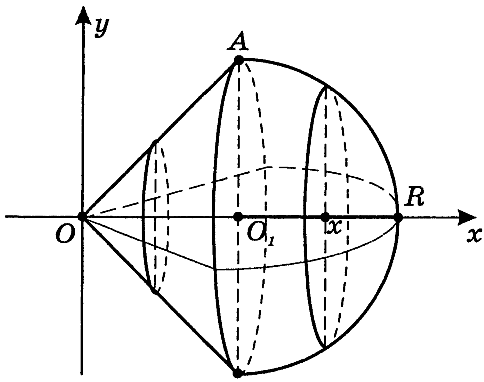
Шар будем рассматривать как тело вращения полукруга вокруг диаметра. Тогда, используя формулу объема тел вращения $\boxed{V(x) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$, получим

$$V_{ш} = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$\boxed{V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ куб. ед.}}$.

2. Выведите формулу объема шарового сегмента как тела, ограниченного плоскостью сечения и шаровой поверхностью, через радиус основания и его высоту (шаровым сегментом называется часть шара, ограниченная плоскостью сечения и шаровой поверхностью).



а) Пусть $O_1R = H_{\text{сег}}$ — высота шарового сегмента.
$R - H_{\text{сег}} \leqslant x \leqslant R$, где $OA = R_{\text{сег}} = R$.
$O_1A = r_c$ — радиус основания шарового сегмента.
$r_c^2 = OA^2 - OO_1^2$, тогда $r_c^2 = R^2 - (R - H_{\text{сег}})^2 =$
$= 2RH_{\text{сег}} - H_{\text{сег}}^2$, значит $R = \dfrac{r_c^2 + H_{\text{сег}}^2}{2H_{\text{сег}}}$.

б) $$V_{\text{ш.сег}} = \pi \int\limits_{R-H_{\text{сег}}}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int\limits_{R-H_{\text{сег}}}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx =$$
$$= \pi \left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{R-H_{\text{сег}}}^{R} =$$
$$= \pi \left[\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - \left(R^2(R - H_{\text{сег}}) - \frac{1}{3}(R - H_{\text{сег}})^3\right)\right] =$$
$$= \pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 - R^3 + R^2H_{\text{сег}} + \frac{1}{3}R^3 - R^2H_{\text{сег}} + RH_{\text{сег}}^2 - \frac{1}{3}H_{\text{сег}}^3\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}(3R - H_{\text{сег}})H_{\text{сег}}^2.$$

1) Итак, $\boxed{V_{\text{ш.сег}} = \dfrac{\pi H_{\text{сег}}^2}{3}\left(3R - H_{\text{сег}}\right)}$ — формула объема шарового сегмента через радиус шара и высоту шарового сегмента.

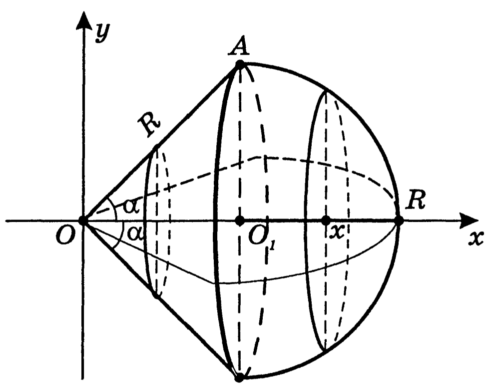
2) Так как $R = \dfrac{r_c^2 + H_{\text{сег}}^2}{2H_{\text{сег}}}$,

то $V_{\text{ш.сег}} = \dfrac{\pi H_{\text{сег}}^2}{3}\left(3\dfrac{r_c^2 + H_{\text{сег}}^2}{2H_{\text{сег}}} - H_{\text{сег}}\right) =$

$= \dfrac{\pi H_{\text{сег}}}{6}\left(3r_c^2 + H_{\text{сег}}^2\right)$,

т. е. $\boxed{V_{\text{ш.сег}} = \dfrac{\pi H_{\text{сег}}}{6}\left(3r_c^2 + H_{\text{сег}}^2\right)}$ — формула объема шарового сегмента через радиус основания шарового сегмента и его высоту.

3. Выведите формулу объема шарового сектора как тела, образованного вращением кругового сектора радиуса R с центральным углом в 2α (радиан) вокруг своей оси симметрии.



Уравнение прямой (OA):

$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$; $OA = R$.

$OO_1 = R\cos\alpha$;

$H_{\text{ш.сект}} = R\left(1 - \cos\alpha\right)$;

$$V_{\text{ш.сег}} = \pi \int\limits_0^{R\cos\alpha} (x \operatorname{tg}\alpha)^2\, dx + \pi \int\limits_{R\cos\alpha}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(x^3 \operatorname{tg}^2\alpha\right)\Big|_0^{R\cos\alpha} + \pi\left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{R\cos\alpha}^{R} =$$

$$= \frac{\pi}{3}R^3\cos^3\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 - \left(R^3\cos\alpha - \frac{1}{3}R^3\cos^3\alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}R^3\cos^3\alpha \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{2\pi}{3}R^3 - \pi R^3\cos\alpha + \frac{\pi}{3}R^3\cos^3\alpha =$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}\left(\cos^3\alpha\left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right) - 3\cos\alpha + 2\right) = \left[\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}\left(\cos^3\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} - 3\cos\alpha + 2\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\alpha).$$

Итак, $V_{\text{ш.сект}} = \frac{2}{3}\pi R^3 (1 - \cos\alpha)$ (куб. ед.).

Можно несколько иначе, если использовать формулы объема конуса и шарового сегмента.

$r_{\text{к}} = AO_1 = R\sin\alpha$; $\quad H_{\text{к}} = OO_1 = R\cos\alpha$;

$H_{\text{ш.сект}} = R(1 - \cos\alpha)$;

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r_{\text{к}}^2 H_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \sin^2\alpha R\cos\alpha = \frac{1}{3}\pi R^3\left(1 - \cos^2\alpha\right)\cos\alpha;$$

$$V_{\text{ш.сег}} = \frac{\pi}{3}\left(3R - H_{\text{ш.сег}}\right)H_{\text{ш.сег}}^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(3R - R(1 - \cos\alpha)\right)R^2(1 - \cos\alpha)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}R^3(2 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)^2.$$

Тогда $V_{\text{ш.сект}} = V_k + V_{\text{ш.сег}} =$

$$= \frac{\pi}{3}R^3\left(\cos\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right) + (2 + \cos\alpha)\left(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha\right)\right) =$$

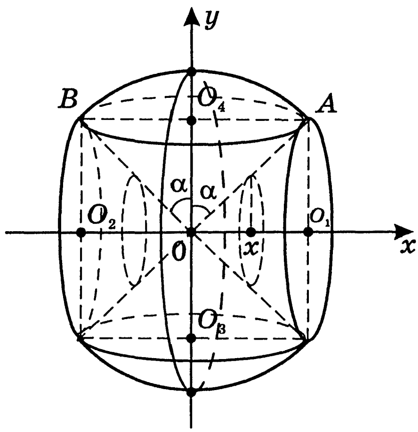
$$= \frac{\pi}{3}R^3\left(\cos\alpha - \cos^3\alpha + 2 - 4\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 2\cos^2\alpha + \cos^3\alpha\right) = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\alpha).$$

Примечание. Между делом мы вывели еще одну формулу шарового сегмента через радиус шара и половину центрального угла осевого сечения шарового сегмента.

$$\boxed{V_{\text{ш.сег}} = \frac{\pi R^3}{3}(2+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)^2}.$$

4. Выведите формулу объема шарового сектора как тела, образованного вращением кругового сектора радиуса R с центральным углом в 2α (радиан) вокруг оси OX, перпендикулярной его оси симметрии ($2\alpha \leqslant \pi$).



$$OO_1 = R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = R\sin\alpha.$$

(OA) — прямая, ее уравнение:

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot x = \operatorname{ctg}\alpha\cdot x.$$

Уравнение (OB): $y = -\operatorname{ctg}\alpha\cdot x$.

$$V_{\text{ш.сект}} = \pi\int\limits_{-R\sin\alpha}^{R\sin\alpha}(R^2-x^2)\,dx - \pi\int\limits_{0}^{R\sin\alpha}(\operatorname{ctg}\alpha\cdot x)^2\,dx -$$

$$-\pi\int\limits_{-R\sin\alpha}^{0}(-\operatorname{ctg}\alpha\cdot x)^2\,dx =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{R\sin\alpha} \left(R^2 - x^2\right) dx - 2\pi \int\limits_0^{R\sin\alpha} \left(\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot x^2\right) dx =$$

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \operatorname{ctg}^2\alpha\right)\Bigg|_0^{R\sin\alpha} =$$

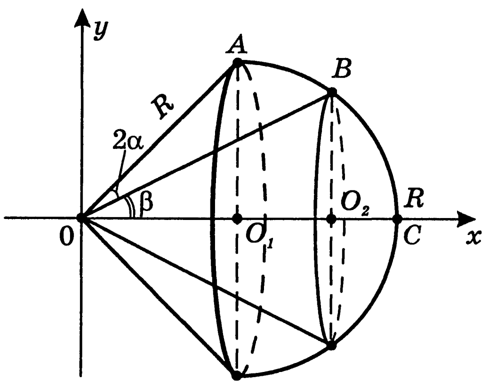
$$= \frac{2\pi R^3}{3}\left(3\sin\alpha - \sin^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}(3\sin\alpha - \sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)) = \left[1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}\left(3\sin\alpha - \sin^3\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{4\pi}{3}R^3\sin\alpha,$$

т. е. $\boxed{V_{\text{ш.сект}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin\alpha}$ (куб. ед.).

5. Выведите формулу объема шарового сектора как тела, образованного вращением кругового сектора с центральным углом в 2α (радиан) вокруг оси OX под углом β $(2\alpha + \beta \leqslant \pi)$.



$OO_1 = R\cos\beta$;

$OO_2 = R\cos(2\alpha + \beta)$;

(OA): $y = \operatorname{tg}(2\alpha + \beta)\, x$;

(OB): $y = \operatorname{tg}\beta \cdot x$.

$$V_{\text{т.вр}}=\pi\int\limits_0^{R\cos(2\alpha+\beta)}(\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)\cdot x)^2dx+\pi\int\limits_{R\cos(2\alpha+\beta)}^{R\cos\beta}\left(R^2-x^2\right)dx-\pi\int\limits_0^{R\cos\beta}(\operatorname{tg}\beta\cdot x)^2dx=$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(x^3\operatorname{tg}^2(2\alpha+\beta)\right)\Big|_0^{R\cos(2\alpha+\beta)}+$$

$$+\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{R\cos(2\alpha+\beta)}^{R\cos\beta}-\frac{\pi}{3}tg^2\beta\cdot x^3\Bigg|_0^{R\cos\beta}=$$

$$=\frac{\pi R^3}{3}\left(\cos^3(2\alpha+\beta)\operatorname{tg}^2(2\alpha+\beta)+3\cos\beta-\cos^3\beta\right)-$$

$$-\frac{\pi R^3}{3}\left(3\cos(2\alpha+\beta)-\cos^3(2\alpha+\beta)+\operatorname{tg}^2\beta\cos^3\beta\right)=$$

$$=\frac{\pi R^3}{3}\left(\cos^3(2\alpha+\beta)\left(\operatorname{tg}^2(2\alpha+\beta)+1\right)-\cos^3\beta\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)\right)+$$

$$+\frac{\pi R^3}{3}(3\cos\beta-3\cos(2\alpha+\beta))=$$

$$=\frac{\pi R^3}{3}(\cos(2\alpha+\beta)-\cos\beta+3\cos\beta-3\cos(2\alpha+\beta))=$$

$$=\frac{2\pi R^3}{3}(\cos\beta-\cos(\alpha+\beta))=\frac{4}{3}\pi R^3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha.$$

$$\boxed{V_{\text{т.вр}}=\frac{4}{3}\pi R^3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\ \text{(куб. ед.)}}.$$

Примечания.

1. Пусть $\beta=0$; $2\alpha=\gamma$, тогда
$$V_{\text{ш.сект}}=\frac{4}{3}\pi R^3\sin\left(\frac{\gamma}{2}+0\right)\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\gamma)$$
(см. задачу 3).

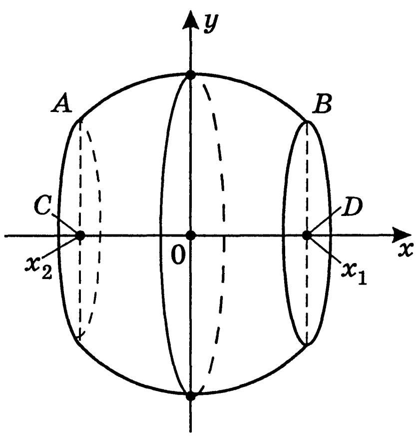
2. Пусть $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, тогда
$$V_{\text{ш.сект}}=\frac{4}{3}\pi R^3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha=\frac{4}{3}\pi R^3\sin\alpha$$
(см. задачу 4).

Следовательно, эта задача более общая, а задачи 3 и 4 — ее частные случаи.

3. Задача 5 может быть решена более просто, если учесть результаты задачи 3, как разность объемов шаровых секторов с центральными углами в $2\alpha+\beta$ и β. Итак,
$$V_{\text{ш.сект}} = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1-\cos\left(2\alpha+\beta\right)\right) - \frac{2}{3}\pi R^3\left(1-\cos\beta\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^3\left(\cos\beta - \cos\left(2\alpha+\beta\right)\right) = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\alpha\right)$$
т. е. $\boxed{V_{\text{ш.сект}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin(\alpha+\beta)\sin\alpha \text{ куб. ед.}}$,

что и требовалось доказать.

6. Выведите формулу объема шарового слоя как части шара, ограниченной двумя параллельными плоскостями, через радиусы оснований и высоту.



$r_1 = BD; \quad r_1^2 = OB^2 - OD^2 = R^2 - x_1^2;$
$r_2 = AC; \quad r_2^2 = OA^2 - OC^2 = R^2 - x_2^2;$
$x_1^2 + x_2^2 = 2R^2 - \left(r_1^2 + r_2^2\right); \quad |x_1 - x_2| = H_{\text{ш.с}}.$
$$V_{\text{ш.с}} = \pi\int_{x_2}^{x_1}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{x_2}^{x_1} =$$
$$= \pi\left(R^2\left(x_1 - x_2\right) - \frac{1}{3}\left(x_1^3 - x_2^3\right)\right).$$

Выразим формулу через $(x_1 - x_2)$ и $x_1 \cdot x_2$.

Так как $x_1^2 + x_2^2 = 2R^2 - \left(r_1^2 + r_2^2\right)$,

а, с другой стороны,

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_1x_2 = H_{\text{ш.с}}^2 + 2x_1x_2$,

то $H_{\text{ш.с}}^2 + 2x_1x_2 = 2R^2 - \left(r_1^2 + r_2^2\right)$.

Значит $x_1x_2 = R^2 - \dfrac{r_1^2 + r_2^2 + H_{\text{ш.с}}^2}{2}$.

В связи с этим формула примет вид

$$V_{\text{ш.с}} = \frac{\pi (x_1 - x_2)}{3}\left(3R^2 - (x_1 - x_2)^2 - 3x_1x_2\right) =$$

$$= \frac{\pi H_{\text{ш.с}}}{3}\left(3R^2 - H_{\text{ш.с}}^2 - 3x_1x_2\right) =$$

$$= \frac{\pi H_{\text{ш.с}}}{3}\left(3R^2 - H_{\text{ш.с}}^2 - 3\left(R^2 - \frac{r_1^2 + r_2^2 + H_{\text{ш.с}}^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi H_{\text{ш.с}}}{3}\left(\frac{3\left(r_1^2 + r_2^2\right) + H_{\text{ш.с}}^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi H_{\text{ш.с}} r_1^2}{2} + \frac{\pi H_{\text{ш.с}} r_2^2}{2} + \frac{\pi H_{\text{ш.с}}^3}{6} \text{ (куб. ед.)},$$

т. е. $\boxed{V_{\text{ш.с}} = \dfrac{\pi H_{\text{ш.с}} r_1^2}{3} + \dfrac{\pi H_{\text{ш.с}} r_2^2}{3} + \dfrac{\pi H_{\text{ш.с}}}{6}}$.

Примечание. Шаровой сегмент можно рассматривать как частный случай шарового слоя, если один из радиусов оснований равен нулю, тогда

$$V_{\text{ш.сег}} = \frac{1}{6}\pi H_{\text{ш.сег}}^3 + \frac{1}{2}\pi H_{\text{ш.сег}} r_c^2 = \frac{\pi H_{\text{ш.сег}}}{6}\left(3r_c^2 + H_{\text{ш.сег}}^2\right),$$

что и требовалось доказать.

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. Для функции $y = \dfrac{1}{-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8}$, заданной на $[-3; 3]$, найдите $E(y)$ (область изменения функции).

2. Дана функция $y = e^{\frac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}}$. Найдите $E(y)$.

3. Найдите расстояние между прямой $y = 2x$ и кривой $y = -x^2 + x - 2$.

4. Дана четырехугольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, сумма смежных сторон которого равна 6 (ед). Высота пирамиды проецируется на вершину основания и равна одной из его сторон. Найдите наибольший объем такой пирамиды.

5. Около сферы радиуса R описан конус наименьшего объема. Найдите его.

Карточка 2

1. Дана функция $y = \dfrac{10}{x^2 + 4\pi x + 41} + \cos x$. Найдите $y_{\text{наиб}}$.

2. Для функции $y = \left(x^3 - x - 2\right) e^x$, заданной на $[-2; 2]$, Найдите $E(y)$.

3. Дана правильная треугольная пирамида, апофема боковой грани которой равна $2\sqrt{3}$ (ед). Найдите наибольший объем такой пирамиды.

4. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма наибольшего объема. Найдите площадь полной поверхности такой призмы и ее объем.

5. Найдите наименьшее расстояние между точками пересечения кривых $y = -x^2 + 2x$ и $y = x^2 + 5x + 6$ с прямой $y = -x + b$.

Карточка 3

1. Дана функция $y = \dfrac{x}{\ln x}$. Найдите $E(y)$.
2. Дана функция $y = \left|x^2 + x - 2\right| - \ln\dfrac{1}{x}$, заданная на $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$. Найдите $E(y)$.
3. В прямом параллелепипеде наибольшая сторона основания образует с диагональю основания угол в 30°, и в 2 раза больше другой стороны. Наибольшая диагональ параллелепипеда равна $3\sqrt{3}$ (ед). Найдите наибольший объем такой призмы.
4. В конус с радиусом основания R и высотой H вписана правильная треугольная призма наибольшего объема. Найдите объем такой призмы, если ее основания параллельны основанию конуса.
5. В фигуру, ограниченную кривыми $y = x^2$ и $y = -x^2 + 4x + 6$, вписан параллелограмм, две стороны которого параллельны оси OY. Найдите область изменения площади такого параллелограмма.

Карточка 4

1. Для функции $y = \ln\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 3}$, заданной на $[-2; 2]$, найдите $E(y)$.
2. Дана функция $y = e^{\frac{\cos^2 x}{2 + \cos x}}$. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции.
3. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями $5a$ и $3a$ (ед). Из нее вырезали прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь такого прямоугольника.
4. Дана пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами 6 и 8 (ед). Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей. Через диагональ основания проведено сечение наименьшей площади. Вычислите эту площадь, если высота пирамиды $H = 2$.
5. Решите уравнение $\dfrac{\ln x}{x} = e^{\cos y}$.

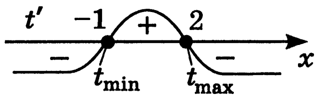
Решение тренировочных карточек

Решение тренировочной карточки 1

1. Для функции $y = \dfrac{1}{-2x^3+3x^2+12x+8}$, заданной на $[-3;3]$, найдите $E(y)$ (область изменения функции).

а) Чтобы выяснить интервалы монотонности, необходимо выяснить, нет ли на $[-3;3]$ корней уравнения $t(x) = -2x^3+3x^2+12x+8$ (важно чтобы на $[-3;3]$ функция $y(x)$ была непрерывна).

$t'(x) = -6x^2+6x+12 = -6(x-2)(x+1)$;



$t_{\min} = t(-1) = +2+3-12+8 = 1$;

$t_{\max} = t(2) = -16+12+24+8 = 28$;

$t(3) = -54+27+36+8 = 17$;

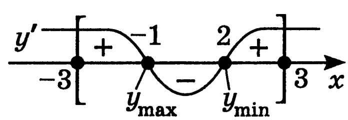
$t(-3) = 54+27-36+8 = 53$.

Итак, $\left.\begin{array}{l} t_{\min} = 1 > 0 \\ t(3) = 17 > 0 \end{array}\right|$ тогда $t(x) > 0$ на $[-3;3]$,

а значит корней у $t(x) = 0$ на $[-3;3]$ нет.

б) $y' = -\dfrac{-6x^2+6x+12}{(-2x^3+3x^2+12x+8)^2} =$

$= \dfrac{6(x-2)(x+1)}{(-2x^3+3x^2+12x+8)^2}$;



$y(-3) = \dfrac{1}{53}$; $y(3) = \dfrac{1}{17}$; $y(-1) = 1$; $y(2) = \dfrac{1}{28}$.

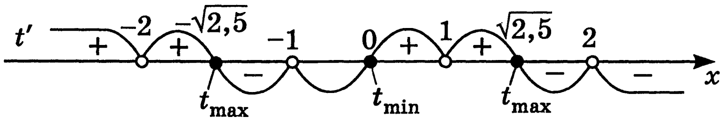
x	-3	-1	2	3
y	$\dfrac{1}{53}$	1	$\dfrac{1}{28}$	$\dfrac{1}{17}$

$E(y) = \left[\dfrac{1}{53}; 1\right]$ на $[-3;3]$.

2. Дана функция $y = e^{\frac{1}{x^4-5x^2+4}}$. Найдите $E(y)$.

а) Рассмотрим $t(x) = \dfrac{1}{x^4-5x^2+4}$.

$$t'(x) = \frac{-\left(4x^3-10x\right)}{\left(x^4-5x^2+4\right)^2} = \frac{-2x\left(2x^2-5\right)}{(x-1)^2(x+1)^2(x-2)^2(x+2)^2};$$



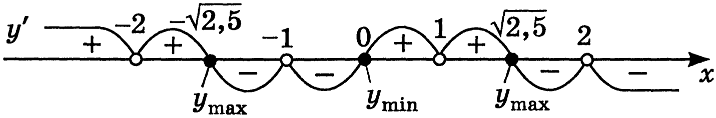
$$t_{\max} = t\left(-\sqrt{2{,}5}\right) = \frac{1}{6\frac{1}{4} - 12\frac{1}{2} + 4} = -\frac{1}{2\frac{1}{4}} = -\frac{4}{9};$$

$$t_{\min} = t(0) = \frac{1}{4}; \quad t_{\max} = t\left(\sqrt{2{,}5}\right) = -\frac{4}{9}.$$

б) $(x \to -2-0) \Rightarrow (t \to \infty)$; $\quad (x \to 2-0) \Rightarrow (t \to -\infty)$;
$(x \to -2+0) \Rightarrow (t \to -\infty)$; $(x \to 2+0) \Rightarrow (t \to \infty)$;
$(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to -\infty)$; $(x \to -1-0) \Rightarrow (t \to \infty)$;
$(x \to -1+0) \Rightarrow (t \to \infty)$; $\quad (x \to 1+0) \Rightarrow (t \to -\infty)$
$(x \to \infty) \Rightarrow (t \to 0)$

в) $y'(x) = \left(e^{\frac{1}{x^4-5x+4}}\right)' = e^{\frac{1}{x^4-5x+4}} \left(\dfrac{1}{x^4-5x+4}\right)' =$

$$= \frac{-2x\left(2x^2-5\right)}{\left(x^2-4\right)^2\left(x^2-1\right)^2} e^{\frac{1}{x^4-5x+4}}.$$



$y_{\max} = y\left(-\sqrt{2{,}5}\right) = e^{-\frac{4}{9}}$;

$y_{\min} = y(0) = e^{\frac{1}{4}}$;

$y_{\max} = y\left(\sqrt{2{,}5}\right) = e^{-\frac{4}{9}}$;

$(x \to -2-0) \Rightarrow (t(x) \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$;

$(x \to -2+0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;

$(x \to -1-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;

$(x \to -1+0) \Rightarrow (t(x) \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$.

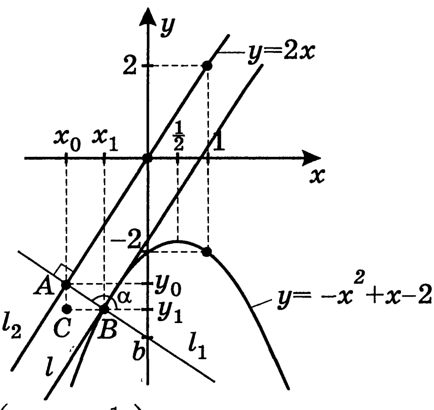
Учитывая четность, аналогично получаем:
$(x \to 2+0) \Rightarrow (t(x) \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 2-0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to 1-0) \Rightarrow (t(x) \to \infty) \Rightarrow (y \to \infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (t(x) \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0)$;
$(x \to \infty) \Rightarrow (t(x) \to 0) \Rightarrow (y \to 1)$.

Проанализируем изменения значений функции $y(x)$ на следующих промежутках:

1) на $(-\infty; -2)$ $f(x)\uparrow$; $y \in (1; \infty)$;
2) на $(-2; -1)$ $y_{\max} = e^{-\frac{4}{9}}$; $y \in \left(0; e^{-\frac{4}{9}}\right]$;
3) на $(-1; 1)$ $y_{\min} = e^{\frac{1}{4}}$; $y \in \left[e^{\frac{1}{4}}; \infty\right)$;
4) на $(1; 2)$ $y_{\max} = e^{-\frac{4}{9}}$; $y \in \left(0; e^{-\frac{4}{9}}\right]$;
5) на $(2; \infty)$ $f(x)\downarrow$; $y \in (1; \infty)$.

Ответ: $E(y) = \left(0; e^{-\frac{4}{9}}\right] \cup (1; \infty)$.

3. Найдите расстояние между прямой $y = 2x$ и кривой $y = -x^2 + x - 2$.



Пусть $l_1 \perp l$ $\left(k_1 = -\dfrac{1}{k_2}\right)$ (l — касательная к кривой $y = -x^2 + x - 2$, параллельная прямой $y = 2x$ $(k_2 = 2)$.) Уравнение l_1 — $y = k_1 x + b$, тогда $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, т. е. $y = -\dfrac{1}{2}x + b$.

а) Найдем точку пересечения прямой l_1

с $\Gamma(y=-x^2+x-2)$: $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+b \\ y=-x^2+x-2 \end{cases}$;

$-x^2+x-2=-\frac{1}{2}x+b;$

$x^2-1{,}5x+2+b=0;$

$2x^2-3x+4+2b=0;$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8(4+2b)}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{-23-16b}}{4}.$$

б) Найдем точку пересечения прямых l_1 и l_2:

$\begin{cases} y=2x \\ y=-\frac{1}{2}x+b \end{cases}$;

$2x=-\frac{1}{2}x+b$; $x_0=\frac{2}{5}b$ (абсцисса точки A).

в) Из $\triangle ABC$ $AB=\dfrac{CB}{|\cos\alpha|}$; так как $k_1=\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$, то

$$|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$|\cos\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}=|\cos(\pi-\alpha)|=\cos(\angle ABC);$$

$CB=|x_1-x_0|$;

$$CB=\frac{3-\sqrt{-23-16b}}{4}-\frac{2}{5}b \qquad (x_0<x_1<0);$$

$AB=\dfrac{CB}{\cos(\angle ABC)}$, т. е.

$$S(l_1;\Gamma(y=-x^2+x-2))=$$

$$=\left(\frac{3-\sqrt{-23-16b}}{4}-\frac{2}{5}b\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=S(b);$$

$$D(S)=\left(-\infty;-1\frac{7}{16}\right].$$

г) $S'(b) = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{2\sqrt{-23-16b}} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{5}\left(10 - 2\sqrt{-23-16b}\right)}{2\sqrt{-23-16b}};$

$S'(b) = 0; \quad 5 = \sqrt{-23-16b};$

$25 = -23 - 16b; \quad b = -3 \in \left(-\infty; -1\frac{7}{16}\right].$

Из эскизов графиков очевидно следует,

что наибольшего значения CB не имеет, так как при $b \to -\infty \Rightarrow S(b) \to \infty$. Значит при $b = -3$

$\exists S_{\min} = S(-3) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3 - \sqrt{-23+48}}{4} - \frac{2}{5}(-3)\right) =$

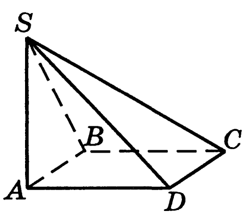
$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{3-5}{4} + \frac{6}{5}\right) = \frac{7\sqrt{5}}{20}.$

В силу непрерывности на $\left(-\infty; -1\frac{7}{16}\right]$ $S_{\min} = S_{\text{наим}}$, значит расстояние между графиком $y = 2x$ и $y = -x^2 + x - 2$ равно $\frac{7\sqrt{5}}{20}$.

4. Дана четырехугольная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник, сумма смежных сторон которого равна 6 (ед). Высота пирамиды проектируется на вершину основания и равна одной из его сторон. Найдите наибольший объем такой пирамиды.

Дано:
$AS \perp ABCD$
$ABCD$ — прямоугольник
$AB + AD = 6$
$AS = AB$

$V_{\text{наиб}} = ?$



а) Пусть $AB = x$; $AD = 6 - AB$, т. е. $AD = 6 - x$;

б) $S_{ABCD} = x(6 - x)$;

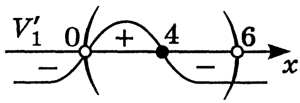
в) $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot H_{SABCD}$, т. е.

1) если $H_{SABCD} = AB = x$,

то $V_1(x) = V(x) = \frac{1}{3}x^2(6 - x)$;

$D(V) = (0; 6)$.

2) $V_1'(x) = 4x - x^2$;



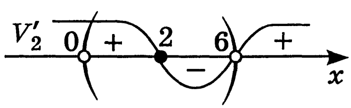
3) $(V_1)_{\max} = V_1(4) = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2 = 10\frac{2}{3}$ (куб. ед.).

В силу непрерывности $(V_1)_{\max} = (V_1)_{\text{наиб}} = 10\frac{2}{3}$.

г) При $H_{SABCD} = 6 - x$:

1) $V_2(x) = \frac{1}{3}x(6 - x)^2$; $\quad D(V_2) = (0; 6)$;

2) $V_2'(x) = (x - 6)(x - 2)$;



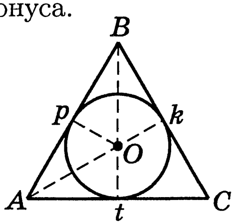
3) $(V_2)_{\max} = V_2(2) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4^2 = 10\frac{2}{3}$;

$(V_2)_{\max} = (V_2)_{\text{наиб}} = 10\frac{2}{3}$.

Вывод: как мы видим, полученный результат не зависит от вводимых в задаче обозначений.

Ответ: наибольший объем пирамиды равен $10\frac{2}{3}$.

5. Около сферы радиуса R описан конус наименьшего объема. Найдите объем такого конуса.



Дано:
$R_{сф} = R$
$Op = Ok = Ot = R$
$At = r_к$
$Bt = H_к$

$V_к$ — наим?

Рассмотрим осевое сечение конуса и шара.

а) Пусть $At = r_к = x$, AO — биссектриса.

Положим $\angle OAt = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{Ot}{At} = \dfrac{R}{x}$ $(2\alpha = \angle BAC)$.

б) $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, т. е. $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{R}{x}}{1-\frac{R^2}{x^2}} = \dfrac{2Rx}{x^2-R^2}$.

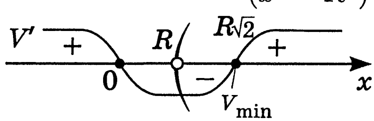
в) $Bt = At\cdot\operatorname{tg}2\alpha$, значит $Bt = \dfrac{2Rx^2}{x^2-R^2}$

г) $V_к = \dfrac{1}{3}S_{основ}H_к$; $V_к = \dfrac{1}{3}\pi\cdot r_к^2\cdot Bt$, т. е.

$V(x) = \dfrac{\pi}{3}x^2\dfrac{2Rx^2}{x^2-R^2}$; $V(x) = \dfrac{2}{3}\pi R\dfrac{x^4}{x^2-R^2}$;

$D(V) = (R;\infty)$.

д) $V'(x) = \dfrac{2}{3}\pi R\dfrac{4x^3\left(x^2-R^2\right)-x^4\cdot 2x}{\left(x^2-R^2\right)^2} = \dfrac{4}{3}\pi R\dfrac{x^3\left(x^2-2R^2\right)}{\left(x^2-R^2\right)^2}$.



$V_{\min} = V\left(R\sqrt{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{2R^2\cdot 2R\cdot 2R^2}{2R^2-R^2} = \dfrac{8}{3}\pi R^3$ (куб. ед.).

$V_{\min} = V_{наим}$ (в силу непрерывности).

Ответ: наименьший объем конуса, описанного около сферы радиуса R, равен $\dfrac{8}{3}\pi R^3$.

Решение тренировочной карточки 2

1. Дана функция $y = \dfrac{10}{x^2+4\pi x+41} + \cos x$. Найдите $y_{\text{наиб}}$.

а) Так как $t(x) = x^2 + 4\pi x + 41 > 0$

$(\forall x)$ $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ D = 4\pi^2 - 41 < 0 \end{cases}$, то $f(x)$ — непрерывна на $(-\infty; \infty)$, и существует $f'(x)$.

б) $f'(x) = \dfrac{10(2x+4\pi)}{(x^2+4\pi x+41)^2} - \sin x$.

Увы, применение производной здесь не помогает (технически очень сложно). Попробуем иначе.

в) $t(x) = x^2 + 4\pi x + 41$ — квадратичная функция, ветви параболы $(a = 1 > 0)$ направлены вверх. При $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

$t(x_0)$ — наименьшее, т. е. при $x_0 = -2\pi$

$t_0 = 4\pi^2 - 8\pi^2 + 41 = 41 - 4\pi^2$,

где $t_0 = t_{\min} = t_{\text{наим}}$. Тогда при $x_0 = -2\pi$

$\exists\ y_0 = y_{\text{наиб}} = \dfrac{10}{41-4\pi^2}\ \left(y = \dfrac{10}{x^2+4\pi x+41}\right)$.

Пусть $p(x) = \cos x$.

При $x = -2\pi$ $\quad \cos(-2\pi) = p(-2\pi) = p_{\text{наиб}} = 1$.

Итак, $f(x) = y(x) + p(x)$, значит при $x = -2\pi$

$f_{\text{наиб}} = f(-2\pi) = y(-2\pi) + p(-2\pi) = \dfrac{10}{41-4\pi^2} + 1 =$

$= \dfrac{51-4\pi^2}{41-4\pi^2}$.

Ответ: наибольшее значение функции

$f(x) = \dfrac{10}{x^2+4\pi x+41} + \cos x$ равно $\dfrac{51-4\pi^2}{41-4\pi^2}$ и она принимает его при $x = -2\pi$.

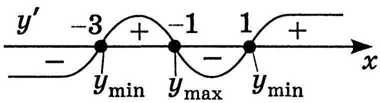
2. Для функции $y=\left(x^3-x-2\right)e^x$, заданной на $[-2;2]$, найдите $E(y)$.

а) $y'=\left(3x^2-1\right)e^x+e^x\left(x^3-x-2\right)=\left(x^3+3x^2-x-3\right)e^x$;

$y'=0;\quad x^3+3x^2-x-3=0$ при $x=1$. Тогда

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-x-3 & x-1 \\ \cline{2-2} -\;\underline{x^3-x^2} & x^2+4x+3 \\ 4x^2-x & \\ -\;\underline{4x^2-4x} & \\ 3x-3 & \\ -\;\underline{3x-3} & \end{array}$$

$(x^3+3x^2-x-3)\;\vdots\;(x-1)$;



б) $-3\notin[-2;2]$; $f(-2)=(-8+2-2)e^{-2}=\dfrac{-8}{e^2}$;

$f(-1)=f_{\max}=(-1+1-2)e^{-1}=-\dfrac{2}{e}$;

$f(1)=f_{\min}=(1-1-2)e=-2e$;

$f(2)=(8-2-2)e^2=4e^2$.

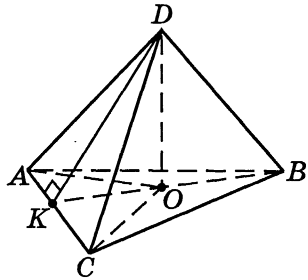
Составим таблицу.

x	-2	-1	1	2
y	$-\dfrac{8}{e^2}$	$-\dfrac{2}{e}$	$-2e$	$4e^2$

Значит $f_{\text{наиб}}=4e^2$; $\quad f_{\text{наим}}=-2e$.

Ответ: для функции $y=\left(x^3-x-2\right)e^x$, заданной на $[-2;2]$, $E(y)=\left[-2e;4e^2\right]$.

3. Дана правильная треугольная пирамида, апофема боковой грани которой равна $2\sqrt{3}$ (ед). Найдите наибольший объем такой пирамиды.



Дано:

$DABC$ — правильная пирамида.

$AD = BD = CD$

$AB = AC = BC$

$DK \perp AC$

$DK = 2\sqrt{3}$

$V_{DABC_{\text{наиб}}} = ?$

Пусть $OD = x$, где $OD \perp ABC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $OK \perp AC$.

а) $OK = \sqrt{KD^2 - OD^2}$; $OK = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$.

б) $AK = OK \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{12 - x^2} \cdot \sqrt{3}$ ($\angle OAK = 30^\circ$, тогда $\angle AOK = 60^\circ$).

в) $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AOC}$ (O — центр вписанной и описанной около $\triangle ABC$ окружности, значит O — точка пересечения медиан, высот и биссектрис $\triangle ABC$).

$S_{\triangle AOC} = AK \cdot OK$;

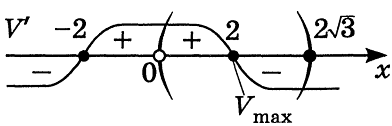
$S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{12 - x^2} \cdot \sqrt{12 - x^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}(12 - x^2)$.

г) $V(x) = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot H_{DABC}$;

$V(x) = \frac{1}{3} x \cdot 3\sqrt{3}(12 - x^2) = \sqrt{3}(12x - x^3)$;

$D(V) = \left(0; 2\sqrt{3}\right)$.

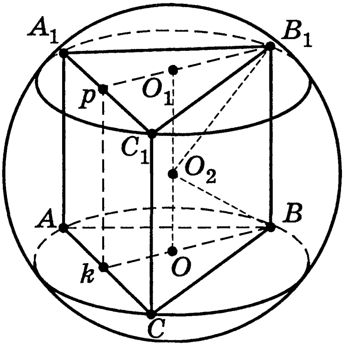
д) $V'(x) = \sqrt{3}\left(12 - 3x^2\right) = 3\sqrt{3}\left(4 - x^2\right)$.



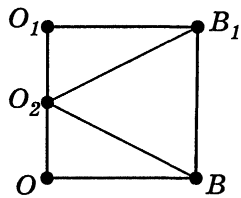
е) $V_{\max} = V(2) = 16\sqrt{3}$ (куб. ед.).

В силу непрерывности $V_{\max} = V_{\text{наиб}}$.

4. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма наибольшего объема. Найдите площадь полной поверхности такой призмы и ее объем.



$O_2B_1 = O_2B = R.$
Пусть $OO_2 = x.$



а) $OB = \sqrt{(O_2B)^2 - (OO_2)^2}$, т. е. $OB = \sqrt{R^2 - x^2}$,
но $OB = r$ — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

б) $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AOB} = 3 \cdot \frac{1}{2} OB^2 \sin 120°$;

$$S_{\triangle ABC} = 3 \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - x^2\right).$$

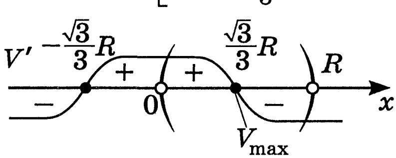
в) $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot 2O_1O_2$;

$$V(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - x^2\right) \cdot 2x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(R^2x - x^3\right);$$

$D(V) = (0; R)$.

г) $V'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(R^2 - 3x^2\right)$;

$$V'(x) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{R}{3}\sqrt{3} \\ x = -\frac{R}{3}\sqrt{3} \notin (0; R) \end{array}\right. .$$



д) $V_{\max} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(R^2\frac{\sqrt{3}}{3}R - \frac{\sqrt{3}}{9}R^3\right) =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}\left(3R^3 - R^3\right) = R^3$. Наибольший объем треугольной призмы, которую можно вписать в сферу, равен R^3.

е) 1) $OO_1 = H_{\text{пр.}} = 2x$, т. е. $OO_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}R$;

2) $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 R^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$;

3) $AB = 2 \cdot OB \cdot \cos 30°$; $AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{1}{3}R^2} = \sqrt{2}R$;

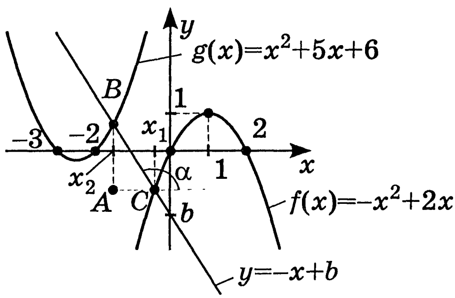
4) $P_{\triangle ABC} = 3\sqrt{2}R$;

5) $S_{\text{п.п}} = 2S_{\triangle ABC} + S_{\text{б.п}}$; $S_{\text{б.п}} = P_{\triangle ABC} \cdot OO_1$;

$S_{\text{п.п}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 + 3\sqrt{2}R \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}R = \sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{6}R^2 =$

$= \left(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\right)R^2$.

5. Найдите наименьшее расстояние между точками пересечения кривых $y = -x^2 + 2x$ и $y = x^2 + 5x + 6$ с прямой $y = -x + b$.



Так как $\operatorname{tg}\alpha = -1$ (для $y = -x + b$), то $\alpha = 135°$, тогда $\angle ACB = 180° - 135° = 45°$.

а) $BC = \dfrac{AC}{\cos 45^\circ}$; $\quad BC = \dfrac{|x_1 - x_2|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\,|x_1 - x_2|$.

1) $\begin{cases} y = -x + b \\ g(x) = x^2 + 5x + 6 \end{cases}$;

$-x + b = x^2 + 5x + 6; \quad x^2 + 6x + 6 - b = 0;$

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 6 + b} = -3 \pm \sqrt{3 + b}.$

Подходит только $x_2 = -3 + \sqrt{3 + b}$

(абсцисса точки B).

2) $\begin{cases} y = -x + b \\ f(x) = -x^2 + 2x \end{cases}$;

$-x^2 + 2x = -x + b; \quad x^2 - 3x + b = 0;$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4b}}{2}.$

Подходит только $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4b}}{2}$

(абсцисса точки C),

тогда $|x_1 - x_2| = \dfrac{3 - \sqrt{9 - 4b}}{2} - \left(-3 + \sqrt{3 + b}\right) =$

$= \dfrac{9 - \sqrt{9 - 4b} - 2\sqrt{3 + b}}{2}.$

$|x_1 - x_2| = AC; \quad BC = \dfrac{AC}{\cos 45^\circ} = AC\sqrt{2}.$

Пусть $S(b) = BC$, тогда

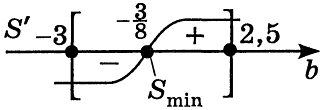
$$S(b) = \frac{9 - \sqrt{9 - 4b} - 2\sqrt{3 + b}}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

б) $S'(b) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{-4}{2\sqrt{9 - 4b}} - \dfrac{2}{2\sqrt{3 + b}}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{3 + b} - \sqrt{9 - 4b}}{\sqrt{9 - 4b}\sqrt{3 + b}};$

$S'(b) = 0; \;\; 2\sqrt{3 + b} = \sqrt{9 - 4b}; \;\; 4(3 + b) = 9 - 4b;$

$$8b = -3;\ b = -\frac{3}{8}.$$



$$S_{\min} = S\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(9 - \sqrt{9 + \frac{12}{8}} - 2\sqrt{3 - \frac{3}{8}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(9 - \sqrt{\frac{21}{2}} - 2\sqrt{\frac{21}{8}}\right) = 4{,}5\sqrt{2} - \sqrt{21}.$$

В силу непрерывности $S_{\min} = S_{\text{наим}}$.

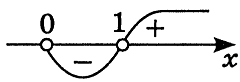
Ответ: наименьшее расстояние между точками пересечения прямой $y = -x + b$ с кривыми $f(x) = -x^2 + 2x$ и $g(x) = x^2 + 5x + 6$ равно $4{,}5\sqrt{2} - \sqrt{21}$ при $b = -\dfrac{3}{8}$.

Решение тренировочной карточки 3

1. Дана функция $y = \dfrac{x}{\ln x}$. Найдите $E(y)$.

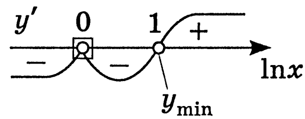
а) $D(y)$; $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$, т. е. $D(y) = (0;1) \cup (1;\infty)$

б) $y > 0$;
$y = 0$;
$y < 0$.

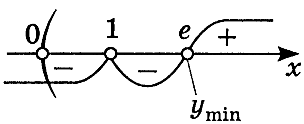


в) $y' = \dfrac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$;

$y' = 0$; $\ln x = 1$; $x = e$;

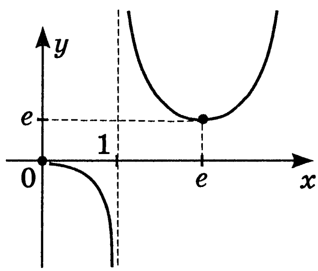


Так как $f(x) = \ln x$ на $(0;\infty)$ возрастает, то для $y(x)$ интервалы монотонности сохраняются.



$y_{\min} = y(e) = \dfrac{e}{\ln e} = e.$

г) $(x \to 0+0) \Rightarrow (\ln x \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0-0)$;



$(x \to 1-0) \Rightarrow (\ln x \to 0-0) \Rightarrow (y \to -\infty)$;
$(x \to 1+0) \Rightarrow (\ln x \to 0+0) \Rightarrow (y \to \infty)$.

Итак, на $(0;1)$ $y \in (-\infty;0)$, а на $(1;\infty)$ $y \in [e;\infty)$.

Таким образом, $E(y) = (-\infty;0) \cup [e;\infty)$

Примечания:

1. $y=f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ на $\underline{(0;1)}$ *убывает,* т. е. если $0<x<y<1$, то $\dfrac{y}{\ln y}<\left.\dfrac{x}{\ln x}\right|$ $(\ln x\cdot\ln y>0)$, значит $y\ln x<x\ln y$, тогда $\boxed{x^y<y^x}$.

   Учитывая, что $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}<\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, получим серию неочевидных неравенств
   $$\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\frac{\pi}{4}}<\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\sin\frac{\pi}{6}};\ \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sin\frac{\pi}{3}}<\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\sin\frac{\pi}{6}},$$
   которые другим способом доказываются сложно.

2. $y=f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ на $\underline{(1;e]}$ *убывает.* Рассуждая аналогично, получим $\boxed{x^y<y^x}$.

3. $y=f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ на $\underline{[e;\infty)}$ *возрастает.* Рассуждая аналогично, получим $\boxed{x^y>y^x}$, что применимо для доказательства ряда неравенств. Используя все случаи получим, что

   $(2001)^{2002}>(2002)^{2001}$; $\quad e^{\pi}>\pi^{e}$;

   $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}<(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ $\quad(1<\sqrt{2}<\sqrt{3}<e)$;

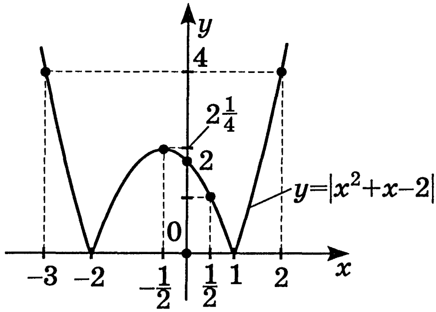
   $(\lg 5)^{0{,}9}<0{,}9^{\lg 5}$ $\quad(0<\lg 5<0{,}9<1)$ и т. д.

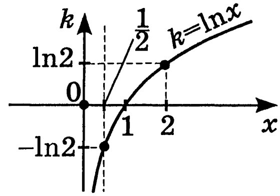
2. Для функции $y=|x^2+x-2|-\ln\dfrac{1}{x}$, заданной на $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$, найдите $E(y)$.

а) Построим $t(x)=|x^2+x-2|=\left|\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-2{,}25\right|$.

б) $k(x)=-\ln\dfrac{1}{x}=\ln x$.

Так как на $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ $t(x)$ -- кусочно-непрерывная, то судить о $E(y)$, исходя из геометрических соображений, трудно.

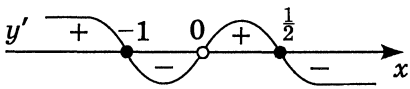




а) Пусть $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, тогда $y = -x^2 - x + 2 - \ln\frac{1}{x}$;

$y' = -2x - 1 + \frac{1}{x} = -\frac{2x^2 + x - 1}{x}$, т. е.

$y' = -\frac{2(x+1)(x-\frac{1}{2})}{x}$,



т. е. на $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ $y \downarrow$.

Значит $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}25 - \ln 2 = y_{\text{наиб}} > 0$;

$y(1) = y_{\text{наим}} = 0$, т. е. $E(y) = [0; 1{,}25 - \ln 2]$.

б) Пусть $x \in [1; 2]$, тогда $y = x^2 + x - 2 + \ln x$;

$y' = 2x + 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x + 1}{x}$,

т. е. на $[1; 2]$ $y' > 0$, тогда $y \uparrow$.

Значит $y(2) = 4 + \ln 2 = y_{\text{наиб}}$;

$y(1) = y_{\text{наим}} = 0$, т. е. $E(y) = [0; 4 + \ln 2]$ на $[1; 2]$.

Подводя итоги, получим $E(y) = [0; 4 + \ln 2]$.

3. В прямом параллелепипеде наибольшая сторона основания образует с диагональю основания угол в 30° и в 2 раза больше другой стороны. Наибольшая диагональ параллелепипеда равна $3\sqrt{3}$ (ед). Найдите наибольший объем такой призмы.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед

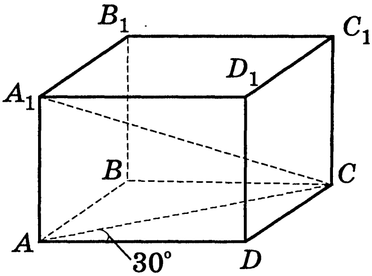
$AA_1 \perp ABCD$

$\angle CAD = 30^\circ$

$AD = 2AB$

$A_1C = 3\sqrt{3}$(ед)

$V_{\text{наиб}} = ?$

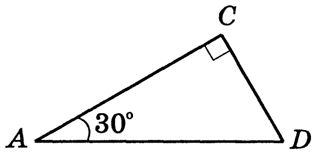


а) Пусть $AB = x$ и по теореме синусов

$$\frac{DC}{\sin(\angle CAD)} = \frac{AD}{\sin(\angle ACD)}, \text{ т. е. } \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{2x}{\sin(\angle ACD)},$$

Тогда $\sin(\angle ACD) = 2 \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\sin(\angle ACD) = 1$,

значит $\angle ACD = 90^\circ$.



б) $AC = AD \cos 30^\circ$;

$AC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x = \sqrt{3}x$.

в) $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2}$;

$AA_1 = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 3x^2} = \sqrt{27 - 3x^2} = \sqrt{3\,(9 - x^2)}$;

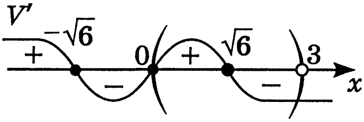
$D(V) = (0; 3)$.

г) $S_{ABCD} = AC \cdot CD$; $\quad S(x) = \sqrt{3}x^2$.

д) $V = S_{ABCD} \cdot AA_1$;

$V(x) = \sqrt{3\,(9 - x^2)} \cdot \sqrt{3}x^2 = 3\sqrt{9x^4 - x^6}$.

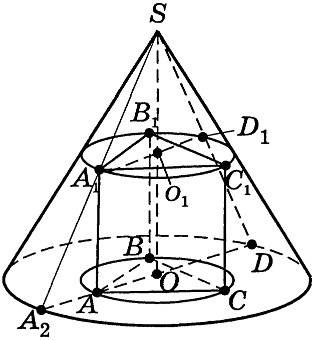
е) $V'(x) = \dfrac{3\left(36x^3 - 6x^5\right)}{2\sqrt{9x^4 - x^6}} = \dfrac{6 \cdot 3x^3\left(6 - x^2\right)}{2x^2\sqrt{9 - x^2}} = \dfrac{9x\left(6 - x^2\right)}{\sqrt{9 - x^2}}$;



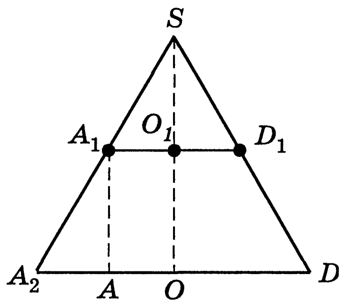
$V_{\max} = V(\sqrt{6}) = 3 \cdot 6\sqrt{9 - 6} = 18\sqrt{3}$ (куб. ед.).

Ответ: наибольший объем параллелепипеда при данных условиях равен $18\sqrt{3}$ (куб. ед.).

4. В конус с радиусом основания R и высотой H вписана правильная треугольная призма наибольшего объема. Найдите объем такой призмы, если ее основания параллельны основанию конуса.



Рассмотрим осевое сечение.



$OA_2 = R$ конуса.

а) Пусть $AO = x$; $AA_2 = R - x$;

б) $\triangle AA_1A_2 \sim \triangle OSA_2$, тогда $\dfrac{OS}{OA_2} = \dfrac{AA_1}{AA_2}$, т. е. $\dfrac{H}{R} = \dfrac{AA_1}{R - x}$,

значит $H_{\text{пр}} = AA_1 = \dfrac{H(R - x)}{R}$.

в) AO — радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной призмы, тогда

$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AOB}$, но $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}AO^2 \cdot \sin 120°$;

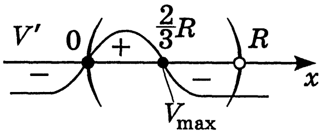
$S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}x^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

г) $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1$,

т. е. $V(x) = 3x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{H(R-x)}{R}$; $\quad D(V) = (0; R)$.

д) $V'(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{3} \cdot \dfrac{3H(R-x)}{R} + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3H}{R}(-1) =$

$= \dfrac{3H\sqrt{3}}{4R}(2R - 2x - x)x = \dfrac{3Hx\sqrt{3}}{4R}(2R - 3x)$.



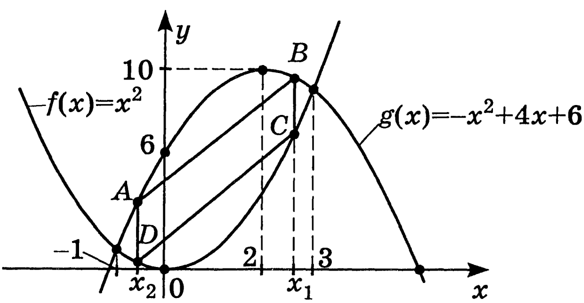
$V_{\max} = V\left(\dfrac{2}{3}R\right) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9}R^2\sqrt{3} \cdot \dfrac{H\left(R - \frac{2}{3}R\right)}{R} =$

$= \dfrac{HR^2}{9}\sqrt{3}$ (куб. ед.)

Ответ: наибольший объем правильной треугольной призмы, вписанной в конус с радиусом R и высотой H, равен $\dfrac{HR^2}{R}\sqrt{9}$ (куб. ед.).

5. В фигуру, ограниченную кривыми $y = x^2$ и $y = -x^2 + 4x + 6$, вписан параллелограмм, две стороны которого параллельны оси OY. Найдите область изменения площади такого параллелограмма.

Построим графики таких кривых.



а) $BC = g(x_1) - f(x_1) = -x_1^2 + 4x_1 + 6 - x_1^2 = -2x_1^2 + 4x_1 + 6.$

б) $S_{ABCD} = (x_1 - x_2)BC \quad (x_1 - x_2 = H_{ABCD} = H_{AD});$

$S_{ABCD} = (x_1 - x_2)\left(-2x_1^2 + 4x_1 + 6\right)$, но $BC = AD$,

значит (так как $AD = g(x_2) - f(x_2) = -2x_2^2 + 4x_2 + 6$)

$-2x_1^2 + 4x_1 + 6 = -2x_2^2 + 4x_2 + 6.$

$2\left(x_1^2 - x_2^2\right) - 4(x_1 - x_2) = 0; \quad 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0.$

При $x_1 \neq x_2$ получим $x_1 + x_2 = 2$, т. е. $x_2 = 2 - x_1$,

тогда $S_{ABCD} = (x_1 - (2 - x_1))(-2x_1^2 + 4x_1 + 6).$

Итак, $S(x) = 4(x_1 - 1)(-x_1^2 + 2x_1 + 3); \quad D(S) = (-1; 3).$

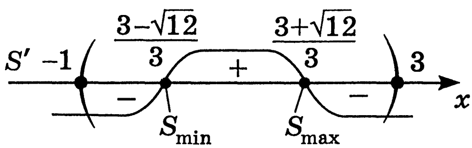
в) $S'(x) = 4\left(-x_1^2 + 2x_1 + 3\right) + 4(x_1 - 1)(-2x_1 + 2) =$

$= 4\left(-x_1^2 + 2x_1 + 3 - 2x_1^2 + 4x_1 - 2\right) =$

$= 4\left(-3x_1^2 + 6x_1 + 1\right);$

$S'(x) = 0; \quad -3x_1^2 + 6x_1 + 1 = 0; \quad 3x_1^2 - 6x_1 - 1 = 0;$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+3}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{12}}{3}.$$



г) $S_{\min} = S\left(\dfrac{3 - \sqrt{12}}{3}\right) =$

$$= 4\left(\frac{3 - \sqrt{12}}{3} - 1\right)\left(-\left(\frac{3 - \sqrt{12}}{3} - 1\right)^2 + 4\right),$$ так как

$S(x) = 4(x_1 - 1)\left(-(x_1 - 1)^2 + 4\right).$

$$S_{\min} = 4\left(-\frac{\sqrt{12}}{3}\right)\left(-\left(\frac{\sqrt{12}}{3}\right)^2 + 4\right) =$$

$$= -\frac{4\sqrt{12}}{3}\left(-\frac{12}{9} + 4\right) = -\frac{32}{9}\sqrt{12} = -\frac{64}{9}\sqrt{3};$$

$$S_{\max} = S\left(\frac{3+\sqrt{12}}{3}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{3+\sqrt{12}}{3} - 3\right)\left(-\left(\frac{3+\sqrt{12}-3}{3}\right)^2 + 4\right) = \frac{64}{9}\sqrt{3}.$$

Ответ: Так как площадь $S(x)$ число неотрицательное, то $S_{\text{наим}} = 0$. В силу непрерывности $S_{\max} = S_{\text{наиб}}$, значит $E(S) = \left[0; \frac{64}{9}\sqrt{3}\right]$.

Решение тренировочной карточки 4

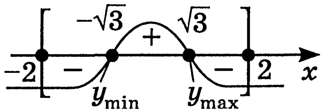
1. Для функции $y = \ln\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-2x+3}$, заданной на $[-2;2]$, найдите $E(y)$.

а) $y' = \dfrac{1}{\frac{x^2+2x+3}{x^2-2x+3}} \cdot \dfrac{(2x+2)(x^2-2x+3)-(2x-2)(x^2+2x+3)}{(x^2-2x+3)^2} =$

$= \dfrac{2\left(x^3-x^2+x+3-x^3-x^2-x+3\right)}{(x^2+2x+3)\,(x^2-2x+3)} =$

$= \dfrac{2\left(-2x^2+6\right)}{(x^2+2x+3)\,(x^2-2x+3)}$;

$y' = \dfrac{4\left(3-x^2\right)}{(x^2+2x+3)\,(x^2-2x+3)}$.



б) $y_{\min} = y\left(-\sqrt{3}\right) = \ln\dfrac{3-2\sqrt{3}+3}{3+2\sqrt{3}+3} = \ln\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$

$= \ln\dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} = \ln\dfrac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$;

$y_{\max} = y\left(\sqrt{3}\right) = \ln\dfrac{3+2\sqrt{3}+3}{3-2\sqrt{3}+3} = \ln\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$

$= \ln\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)} = \ln\dfrac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Вычислим значения на концах отрезка $[-2;2]$:

$y(2) = \ln\dfrac{4+4+3}{4-4+3} = \ln\dfrac{11}{3}$;

$y(-2) = \ln\dfrac{4-4+3}{4+4+3} = \ln\dfrac{3}{11}$.

x	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2
y	$\ln\dfrac{3}{11}$	$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$	$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$	$\ln\dfrac{11}{3}$

Сравним значения $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ и $\ln\frac{11}{3}$.

Так как $\frac{11}{3} < 2+\sqrt{3}$, $\quad \frac{5}{3} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{25}{9} < 3$ — истина, то в силу монотонности возрастания $y = \ln x$ на $(0;\infty)$ следует, что $\ln\left(2+\sqrt{3}\right) > \ln\frac{11}{3}$. Аналогично рассуждая, получим, что $\ln\left(2-\sqrt{3}\right) < \ln\frac{3}{11}$,

значит для $y = \ln\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-2x+3}$ на $[-2;2]$

$E(y) = \left[\ln\left(2-\sqrt{3}\right); \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$.

2. Дана функция $y = e^{\frac{\cos^2 x}{2+\cos x}}$. Найдите наибольшее и наименьшее значения этой функции.

Пусть $t(x) = \dfrac{\cos^2 x}{2+\cos x}$.

а) $$t' = \frac{-2\sin x\cos x(2+\cos x) - \cos^2 x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} =$$

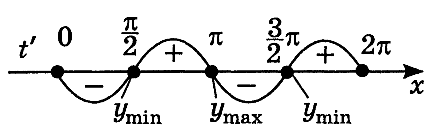
$$= \frac{-\sin x\cos x(4+2\cos x-\cos x)}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x\cos x(4+\cos x)}{(2+\cos x)^2};$$

$$t' = 0; \quad \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right.; \quad x = \frac{\pi}{2} \mid k \in Z.$$

б) Учтем, что $t(x)$ — периодическая функция[21], поэтому рассмотрим $t(x)$ на $[0;2\pi]$ и вычислим на нем значение функции в стационарных точках.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$



[21] См. книгу Шахмейстер А.Х. «Тригонометрия», 2008 г.

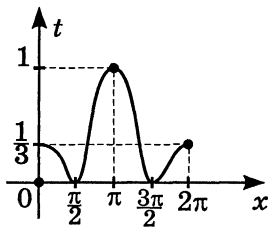
Тогда, с учетом монотонности возрастания $y(t) = e^t$, сохраняется характер минимаксных отношений.

$f(0) = e^{\frac{1}{2+1}} = e^{\frac{1}{3}}$; $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^0 = 1$;

$f(\pi) = e^{\frac{1}{2-1}} = e^1 = e$; $\quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = e^0 = 1$;

$f(2\pi) = e^{\frac{1}{2+1}} = e^{\frac{1}{3}}$;

Эскиз графика иллюстрирует характер изменения функции.



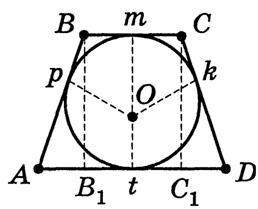
Значит $y_{\text{наим}} = 1$; $\quad y_{\text{наиб}} = e$.

3. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями $5a$ и $3a$ (ед). Из нее вырезали прямоугольник наибольшей площади. Найдите площадь такого прямоугольника.

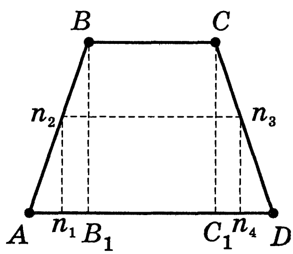
Дано:

$BC \parallel AD$
$AD = 5a$
$BC = 3a$
$BB_1 \perp AD$
$CC_1 \perp AD$
$AB = CD$

$S_{n_1n_2n_3n_4} = S_{\text{наиб}}$



Впишем в трапецию прямоугольник $n_1n_2n_3n_4$.



а) Трапеция описана около окружности,

значит $AB+CD=BC+AD$. Учитывая, что $AB=CD$, имеем $2AB = 3a+5a$, $AB = 4a$.

б) $AB_1 = \dfrac{AD-BC}{2}$; $AB_1 = \dfrac{5a-3a}{2} = a$;

$BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2}$; $BB_1 = \sqrt{16a^2-a^2} = a\sqrt{15}$;

$\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{BB_1}{AB_1}$; $\operatorname{tg}(\angle A) = \dfrac{a\sqrt{15}}{a} = \sqrt{15}$.

в) Положим $An_1 = x$. Так как $n_1n_2 = An_1\operatorname{tg}(\angle A)$, то $n_1n_2 = x\sqrt{15}$;

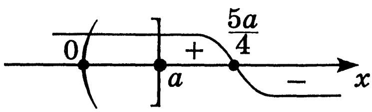
$n_1n_4 = AD - 2An_1 = 5a - 2x$; $(An_1 = Dn_4)$;

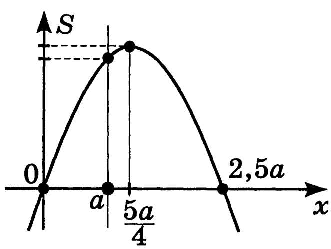
$S_{n_1n_2n_3n_4} = n_2n_1 \cdot n_1n_4$;

$S_{n_1n_2n_3n_4} = \sqrt{15}x(5a-2x) = \sqrt{15}\left(5ax - 2x^2\right) = S(x)$;

$D(S) = (0; a]$.

$S'(x) = \sqrt{15}(5a-4x)$; $S'(x) = 0$;





$x = \dfrac{5a}{4} \notin (0; a]$.

$S(a) = \sqrt{15}\left(5a^2 - 2a^2\right) = 3a^2\sqrt{15}$; $S(x) \uparrow$ на $(0; a]$, значит $S_{\text{наиб}} = S(a) = 3a^2\sqrt{15}$.

Так как при $x = a$ $An_1 = AB_1$, то BB_1C_1C имеет наибольшую площадь.

Ответ: $S_{\text{наиб}} = S(a) = 3a^2\sqrt{15}$ (кв. ед.).

4. Дана пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами 6 и 8 (ед). Высота пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей. Через диагональ основания проведено сечение наименьшей площади. Вычислите эту площадь, если высота пирамиды $H = 2$.

Дано:

$ABCD$ — прямоугольник.

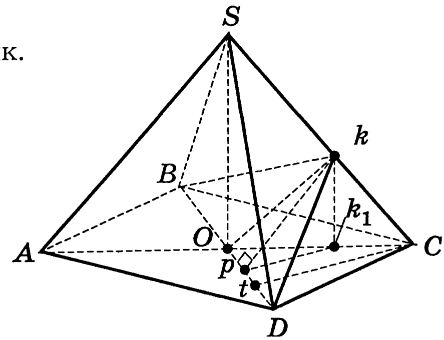
$AB = 6$

$BC = 8$

$SO = 2$

$SO \perp ABCD$

$S_{\triangle BkD} = S_{\text{наим}}$



а) Пусть $tC \perp BD$.

б) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2}BC \cdot DC \\ S_{\triangle BDC} = \dfrac{1}{2}BD \cdot tC \end{array}\right|$, тогда $BC \cdot DC = BD \cdot tC$.

$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2}$; $BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; и учитывая, что $tC = \dfrac{BC \cdot DC}{BD}$, получим, что $tC = \dfrac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8$.

в) Очевидно, что $\triangle OSC \sim \triangle k_1kC$, тогда $\triangle OtC \sim \triangle Opk_1$

$$\begin{cases} \dfrac{OS}{kk_1} = \dfrac{OC}{k_1C} \\ \dfrac{tC}{pk_1} = \dfrac{OC}{Ok_1} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{2}{kk_1} = \dfrac{5}{k_1C} \\ \dfrac{4{,}8}{pk_1} = \dfrac{5}{5 - k_1C} \end{cases};$$

$$\begin{cases} k_1C = 2{,}5kk_1 \\ 24 - 4{,}8k_1C = 5pk_1 \end{cases};$$

$24 - 2{,}4 \cdot 5kk_1 = 5pk_1$; $\quad 24 - 12kk_1 = 5pk_1$.

Пусть $kk_1 = x$; $x \in [0; 2]$, тогда $D(S) = [0; 2]$.

г) $pk_1 = \dfrac{12(2-x)}{5}$;

$$pk = \sqrt{pk_1^2 + kk_1^2} = \sqrt{x^2 + \frac{144(2-x)^2}{25}} =$$

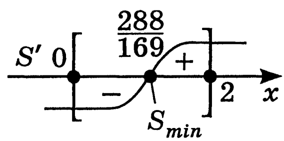
$$= \frac{\sqrt{169x^2 - 576x + 576}}{5}.$$

д) $S_{\triangle BkD} = \dfrac{1}{2} \cdot BD \cdot pk$,

т. е. $S_{\triangle BkD} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot pk = \sqrt{169x^2 - 576x + 576} = S(x)$.

е) $S'(x) = \dfrac{338x - 576}{2\sqrt{169x^2 - 576x + 576}}$;

$S'(x) = 0$; $\quad x_1 = \dfrac{288}{169} \in [0; 2]$.



$$S_{\min} = S\left(\frac{288}{169}\right) = \sqrt{169\left(\frac{288}{169}\right)^2 - \frac{576 \cdot 288}{169} + 576} =$$

$$= \frac{\sqrt{288^2 - 576 \cdot 288 + 576 \cdot 169}}{13} =$$

$$= \frac{12}{13}\sqrt{576 - 576 \cdot 2 + 4 \cdot 169} = \frac{12}{13}\sqrt{4 \cdot 169 - 576} =$$

$$= \frac{12}{13}\sqrt{26^2 - 24^2} = \frac{12 \cdot 10}{13} = 9\frac{3}{13}.$$

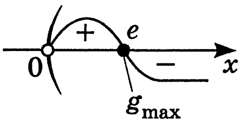
В силу непрерывности на $[0; 2]$ $S_{\min} = S_{\text{наим}}$.

Ответ: наименьшее значение площади сечения равно $9\dfrac{3}{13}$ (кв. ед).

5. Решите уравнение $\dfrac{\ln x}{x} = e^{\cos y}$.

а) Пусть $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $D(g) = (0; \infty)$.

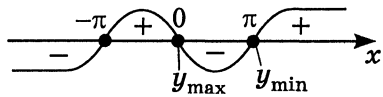
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$



$g'(x) = 0$; $\ln x = 1$; $x = e$; $g_{\max} = g(e) = \dfrac{1}{e}$.

б) $f(y) = e^{\cos y}$;

$f'(y) = -\sin y \cdot e^{\cos y}$;



$f'(y) = 0$; $-\sin y = 0$; $y = \pi k$;

$f_{\min} = f(\pi) = e^{\cos \pi} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, значит в силу периодичности $f(y)$ при $y = \pi + 2\pi n$; $f_{\min} = f(\pi + 2\pi n) = \dfrac{1}{e}$;

$g_{\max} = f_{\min}$.

Итак, при $x = e$ и $y = \pi + 2\pi n$ $\dfrac{\ln x}{x} = e^{\cos y}$.

Ответ: $\{(e; \pi + 2\pi n) | n \in Z\}$.

8

Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 1

Вариант А

1	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-3x+1}{5x^3+6x^2-7}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-7x-6}{4x^4+x^2-1}$
3	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+(-1)^n+1}{n^2+1}$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6}{2n-5}-\dfrac{1-3n^2}{n^2+5n}\right)$
5	$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3}$
6	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-3x^3+1}{(1-x)^2}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{(n+2)(n^2+2n+4)}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x^2)^{10}}{(1+3x^{10})^2}$
10	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_1=1$; $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)$

Вариант Б

1	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)(n+2)(2n-1)(2n+3)}$
2	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right)$
3	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+1}{a^n-1}$, где $0<\lvert a\rvert<1$
4	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2(-1)^n n+2}{2n^2-(-1)^{n+1}n-3}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2}{6n-1+n^3}+\dfrac{1+n^2+n^4}{3+4n-n^4}\right)$
6	$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5+3x+x^2}{x^3+3x^2+2}$
7	$\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3x^2+x}{(x-2)\left(x^2+x+1\right)}-\dfrac{2}{x-2}\right)$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2+3+\ldots+n)^2}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_1=1;\quad x_{n+1}=\dfrac{x_n\left(x_n^3+2a\right)}{2x_n^3+a}$
10	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ \ldots\ \cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

Самостоятельная работа 2

Вариант А

1	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^3 + x^2 - 10x + 3}{6x^3 - 7x^2 - x + 2}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x\right)$
3	$\lim\limits_{x\to 11} \dfrac{9 - 3\sqrt{x-2}}{x^2 - 12x + 11}$
4	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt[3]{x} - 1}$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3)}{3n+1} - \dfrac{4n+1}{6}\right)$
6	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + 6 + 18 + \ldots + 2\cdot 3^{n-1}}{4\cdot 3^{n+1} + 5}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 16} + \ldots + \dfrac{1}{(7n-5)(7n+2)}\right)$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \ldots + (2n)^2 - (2n+1)^2}{3n - 2n^2}$
9	$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{13} - 2x - 1}{x^7 - 2x - 1}$
10	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^2 + x - 2\right)^{10}}{\left(x^4 + 2x^3 - 2x - 1\right)^{10}}$

Вариант Б

1	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-18x^2+7x+3}{15x^3-22x+5x+2}$
2	$\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-8x+7}$
3	$\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}-1}\right)$
4	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2-8}-x\right)$
5	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+4+7+\ldots+3n-2}{2n+3}-\dfrac{3n+1}{4}\right)$
6	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1}}{4\cdot 2^{n+1}+5}$
7	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+\ldots\right)$, где n — количество слагаемых
8	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(2n-1)^2-(2n)^2}{4n^2-3n}$
9	$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{11}-2x-1}{x^5-2x-1}$
10	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^3-3x^2+4)^{50}}{(x^2-3x+2)^{100}}$

Самостоятельная работа 3

Вариант А

1	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$
2	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x$
6	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\cos \pi x}{2x-1}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\ln(1+2x)}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin x}-1}{\operatorname{arctg} x}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+x^2+3}{5^x-4x^2-7}$

Вариант Б

1	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{x}-2}$
2	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3+2x}}{\sqrt[4]{2-14x}-2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 5x}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
6	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\sin x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\arcsin 3x)}{\ln(1+\arcsin 2x)}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{27(1-\cos x)}$
9	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}\right)$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x+\ln x+2x^3}{\ln^3 x+3\ln x-3x^3}$

Самостоятельная работа 4

Найдите производную.

Вариант А **Вариант Б**

1	$(2x-3)^4$	1	$3\sqrt[3]{(4x+5)^2}$
2	$(3x-1)^5$	2	$0{,}2\sqrt[5]{\dfrac{3-5x}{3}}$
3	$3(5-3x)^4$	3	$3\sqrt[3]{(2x-1)^2}$
4	$(2x-1)^4-(3x+1)^6$	4	$\sqrt[3]{(1-2x)^2}-\sqrt{5x+2}$
5	$(2x+3)^4(2x-3)^3$	5	$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$
6	$\dfrac{1}{(0{,}5x-3)^3}$	6	$(2-3x)^3\sqrt{3x+4}$
7	$\dfrac{2}{(2-3x)^5}$	7	$\dfrac{\sqrt[3]{(1-0{,}5x)^2}}{4+3x}$
8	$\dfrac{1}{2-5x}-\dfrac{1}{3(6x+1)}$	8	$\dfrac{(5+2x)^7}{\sqrt[4]{(3x-1)^3}}$
9	$\sqrt{3x-2}$	9	$\sqrt[3]{x^2-2x}\cdot\sqrt{x^3+2x}$
10	$\sqrt[3]{2-5x}$	10	$\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-x-1}}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

Самостоятельная работа 5

Найдите производную.

Вариант А		Вариант Б	
1	$(x^3-1)^4$	1	$\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$
2	$\left(3x^2+\dfrac{8}{x}-1\right)^6$	2	$\dfrac{4}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^3}$
3	$\left(x^4-x^3+5x^2-2\right)^8$	3	$\dfrac{\sqrt{(1-x)^3}}{\sqrt{x+1}}$
4	$\left(\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)\right)^3$	4	$\dfrac{x}{x+\sqrt{4+x^2}}$
5	$\dfrac{2}{(2x^2-1)^3}$	5	$\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$
6	$\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-2}\right)^2$	6	$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
7	$\sqrt{3-x^2}$	7	$\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^{10}}{1-x}$
8	$\sqrt[3]{2x^3+2x-1}$	8	$\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$
9	$x\sqrt{1-x^2}$	9	$\sqrt[4]{\left(3+4\sqrt[3]{2x}\right)^3}$
10	$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$	10	$\left(\dfrac{2}{3x^3}+\dfrac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}$

Самостоятельная работа 6

Вариант А

	$y = f(x)$	$f'(x_0)$
1	$y = 2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	$x_0 = 4$
2	$y = \sin x - \dfrac{\pi}{2}x^2 + 1$	$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$
3	$y = 3^x \dfrac{2}{\ln 3} + x^2 - 1$	$x_0 = 1$
4	$y = -\sqrt{2}\cos x - \sqrt{\pi x} + 1$	$x_0 = \dfrac{\pi}{4}$
5	$y = \operatorname{tg} x + \dfrac{x^2}{\pi} - \pi$	$x_0 = \pi$
6	$y = \dfrac{2}{x^2} + 4x + \dfrac{3}{x} + 2$	$x_0 = -1$
7	$y = \left(2x^2 + 3x + 1\right)\cos x$	$x_0 = 0$
8	$y = \dfrac{2x - 1}{3 + x}$	$x_0 = -2$
9	$y = \left(1 - 2x - 3x^2\right)\left(5x^2 + 4x - 1\right)$	$x_0 = -1$
10	$y = \dfrac{x^2}{x - 1}$	$x_0 = -1$

Вариант Б

	$y = f(x)$	$f'(x_0)$
1	$y = \left(x^2 + 4x + 4\right) \operatorname{ctg} x$	$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$
2	$y = \left(x^2 - 3x + 1\right) e^x$	$x_0 = -1$
3	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}$	$x_0 = 9$
4	$y = \dfrac{3x^2 - 2}{x - 1}$	$x_0 = 2$
5	$y = \dfrac{x + 1}{4x^2 - 1}$	$x_0 = -1$
6	$y = \left(x^2 - 2x - 3\right) \sqrt{x}$	$x_0 = 2$
7	$y = \left(x^2 + 2x + 3\right) \sqrt[3]{x}$	$x_0 = -8$
8	$y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}}$	$x_0 = 64$
9	$y = \dfrac{(2\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + 2)}{\sqrt[3]{x}}$	$x_0 = 1$
10	$y = \sin^2 x \cos x$	$x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Самостоятельная работа 7

Вариант А

Найдите для функции $y = f(x)$:

а) угловой коэффициент $\boxed{k}$ и свободный член $\boxed{b}$ касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0;

б) абсциссу $\boxed{x_0}$ точки касания и $\boxed{b}$ — свободный член касательной к кривой с угловым коэффициентом k;

в) в уравнении касательной $y = kx + b$ к кривой $y = f(x)$ абсциссу точки касания $\boxed{x_0}$ и коэффициент $\boxed{k}$, если известно b.

	$y = f(x)$	а) x_0	б) k	в) b
1	$y = x^2 - 4$	1		
2	$y = 1 - 2x^2$		-1	
3	$y = \frac{1}{4}x^2 + 3$	2		
4	$y = 2x^2 - x - 3$			-5
5	$y = -x^3 + 3x + 4$	$\frac{1}{3}$		
6	$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2$		-2	
7	$y = x - \frac{1}{x}$	0,5		
8	$y = x^2 - \frac{1}{x}$		3	
9	$y = x^2(x-2)^2$	1		
10	$y = (x+4)^3(2x-1)$		0	

Вариант Б

Найдите для функции $y = f(x)$:

а) угловой коэффициент $\boxed{k}$ и свободный член $\boxed{b}$ касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0;

б) абсциссу $\boxed{x_0}$ точки касания и $\boxed{b}$ — свободный член касательной к кривой с угловым коэффициентом k;

в) в уравнении касательной $y = kx + b$ к кривой $y = f(x)$ абсциссу точки касания $\boxed{x_0}$ и коэффициент $\boxed{k}$, если известно b.

	$y = f(x)$	а) x_0	б) k	в) b
1	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$			1
2	$y = \dfrac{1}{x^4} - 2$		$\dfrac{1}{8}$	
3	$y = \dfrac{x-2}{x+3}$		$\dfrac{5}{4}$	
4	$y = \dfrac{3-x}{x+4}$			-1
5	$y = x + 2\sqrt{x}$		5	
6	$y = 1 - \sqrt{x^3}$	0,25		
7	$y = (x-1)\sqrt{x}$		1	
8	$y = \sqrt{1-x^2}$			$\sqrt{2}$
9	$y = x \sin x$	$\dfrac{\pi}{2}$		
10	$y = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x$		0	

Самостоятельная работа 8

Найдите промежутки монотонности для функции $y = f(x)$.

Вариант А **Вариант Б**

1	$x^2 - 5x + 6$	1	$\dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$
2	$-3x^2 + 6x$	2	$\sqrt{x^2 - 6x}$
3	$(2x+3)^2$	3	$x\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$
4	$2x^3 - 6x^2 + 3$	4	$\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
5	$x^3 + 9x^2 + 15x - 2$	5	$\sqrt{x(10-x)}$
6	$x^5 - 5x^3 + 20x - 3$	6	$x\sqrt[4]{5-x}$
7	$\dfrac{1}{3}\left(x^2+9\right)(x+9)$	7	$\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}$
8	$\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x-2}$	8	$\dfrac{(2x+1)^5}{(x-1)^2}$
9	$\dfrac{4}{9}x(3+x)^3$	9	$\left(x^2-x-2\right)^3(2x+3)^2$
10	$\dfrac{x^2-2x+2}{2x-x^2}$	10	$\left(x^4-5x^2+4\right)^2$

Самостоятельная работа 9

Найдите промежутки монотонности для функции $y = f(x)$.

Вариант А **Вариант Б**

1	$\dfrac{1}{x} + 4x^2$	1	$\dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2}$
2	$3x^3 + \dfrac{1}{x}$	2	$\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
3	$\dfrac{-x+2}{x^3}$	3	$(x+2)\sqrt{x-1}$
4	$\dfrac{x-2}{x^2-1}$	4	$1 - 2\sqrt[3]{(x-3)^2}$
5	$\dfrac{3}{6x^3 - 9x^2 + 4x}$	5	$x^2\sqrt{1-2x}$
6	$\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$	6	$x\sqrt[3]{5-3x^2}$
7	$(x-3)\sqrt{x}$	7	$(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}$
8	$36x - 3x^2 + 4\sqrt{x^3}$	8	$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{1+2x+x^2}$
9	$\sqrt{2x-x^2}$	9	$\dfrac{\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}{x^2}$
10	$\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-1}$	10	$\dfrac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$

Самостоятельная работа 10

Найдите экстремумы функций.

Вариант А **Вариант Б**

1	$y = x^4 - 4x^2 - 2$	1	$y = \sqrt[3]{-3x - 2e^{-x}}$ на $[-1; 0]$
2	$y = \sqrt{2x^2 - 5x - 7}$	2	$y = \sqrt[5]{(x^3-3x^2-9x+20)^4}$, точки экстремумов
3	$y = \left(2x^2 - x - 1\right)^2$, точки экстремумов	3	$y = 2x \ln x - x \ln 49$ на $[1; 7]$
4	$y = \sqrt[4]{x^4 - 5x^2 + 4}$	4	$y = xe^{x^3-4x}$, точки экстремумов
5	$y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2}$	5	$y = \sqrt[3]{\left(e^{x^3-12x} - e^{-11}\right)^4}$, точки экстремумов
6	$y = \left(x^2 - 5x + 10\right) \sqrt{x}$	6	$y = 2\cos x + \cos 2x$ на $[0; 2\pi]$
7	$y = \dfrac{3}{\sqrt{3 + x - \frac{1}{4}x^2}}$	7	$y = \cos x \cos 2x$ на $[0; 2\pi]$
8	$y = \sqrt[3]{(2x^2 - 5x - 7)^2}$, точки экстремумов	8	$y=2\sqrt{3}\sin x-2\cos x-2\sqrt{3}x+11$ на $[0; 2\pi)$
9	$y = (3x + 2)^2 (2x - 1)^3$, точки экстремумов	9	$y = e^{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}$ на $\left[-\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$
10	$y = \dfrac{x - 5}{\sqrt[3]{x} - 1}$	10	$y = \lvert x\rvert \left(4 - x^2\right)$

Самостоятельная работа 11

Определите по графику функции $y = f(x)$:

1. Область определения функции.

2. Промежутки монотонности.

3. Точки экстремума.

4. Какие значения функция принимает только один раз?

5. Область изменения функции.

6. Решите уравнение $f(x) = a$.

7. Решите неравенство $f(x) < b$.

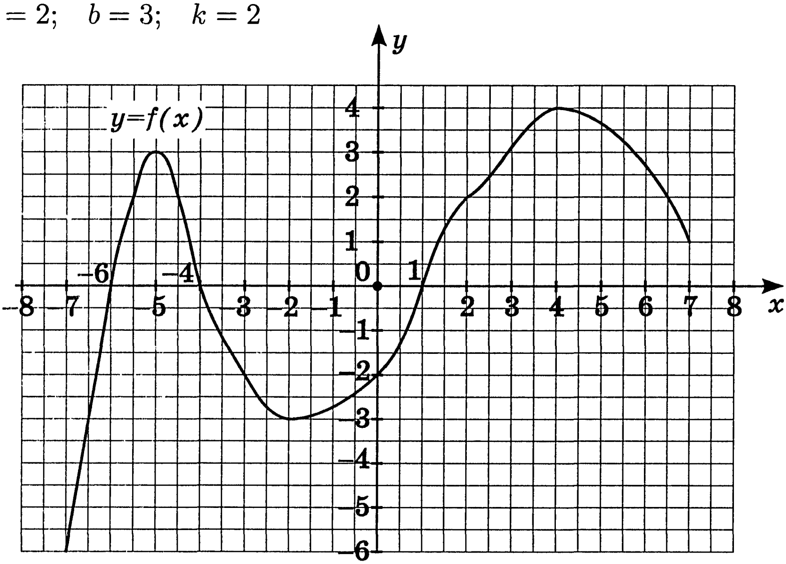
8. При каких значениях m уравнение $f(x) = m$ имеет k корней?

9. При каких значениях t неравенство $f(x) < t$ выполняется для всех $x \in [0; 1]$?

10. При каких значениях x справедливо неравенство $a \leqslant f(x) < b$?

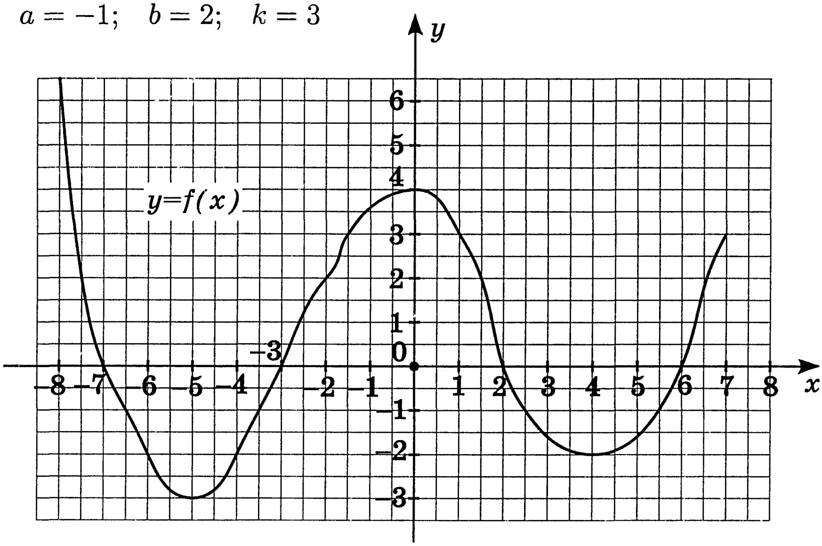
Вариант А

$a = 2; \quad b = 3; \quad k = 2$



Вариант Б

$a = -1; \quad b = 2; \quad k = 3$



Самостоятельная работа 12

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции, и область изменения.

Вариант А

1	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$ на $[-2; 1]$	
2	$y = \dfrac{x^2}{x+5}$ на $[-4; 1]$	
3	$y = 7 + 4x^3 - x^4$ на $[-1; 3]$	
4	$y = \sqrt[3]{x^2}$ на $[-0,001; 1]$	
5	$y = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x}{2}$ на $[0; 2,5]$	
6	$y = 2x - \sqrt{x}$ на $[0; 4]$	
7	$y = -x^2 + 3\|x-1\| + 2$ на $[-2; 2]$	$E(y) = ?$
8	$y = (x+2)\sqrt[3]{x^2}$ на $[-1; 8]$	$E(y) = ?$
9	$y = \dfrac{2}{1 + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$ на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$	$E(y) = ?$
10	$y = \sqrt{x^3}\left(\dfrac{\sqrt{x^3}}{3} - \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{6}{\sqrt{x}}\right)$ на $[1; 4]$	$E(y) = ?$

$E(y)$ — область изменения функции или множество всех значений функции.

Вариант Б

1	$y = \dfrac{2x^2 - 9x - 2}{x^2 - 5x - 6}$ на $[0; 5]$	$E(y) = ?$
2	$y = \dfrac{7x^2 - 8}{x^2 + x + 1}$ на $[-1; 3]$	$E(y) = ?$
3	$y = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{5 - x}$	$E(y) = ?$
4	$y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2 + 9}$ на $[-2; 4]$	$E(y) = ?$
5	$y = \cos 2x - x$ на $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$	$E(y) = ?$
6	$y = \sin x \sin 2x$	$E(y) = ?$
7	$y = \begin{cases} 2x^2 - x^3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 8x - x^2, & \text{если } 4 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$	$E(y) = ?$
8	$y = \lvert x^3 - 1\rvert - \lvert x^2 - 2x\rvert - x$ на $[-2; 3]$	$E(y) = ?$
9	$a_n = n^4 - n^3 - 3n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите наименьший член последовательности.	
10	$y = \sin x\,(a - \cos 2x)$ $E(y) = [-1; 1]$, $a \geqslant 1$	$a = ?$

$E(y)$ — область изменения функции или множество всех значений функции.

Самостоятельная работа 13

Вариант А

Найдите множество всех значений $E(y)$ функции на $[a;b]$.

1	$y=\frac{4}{3}x^3-4x$ на $[0;2]$	$E(y)=?$
2	$y=3x^3-9x+2$ на $[-1;4]$	$E(y)=?$
3	$y=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ на $[-3;6]$	$E(y)=?$
4	$y=x^4-8x^2-9$ на $[-2;1]$	$E(y)=?$
5	$y=\frac{1}{2x^2-x^4-3}$ на $\left[-\sqrt{2};1\right]$	$E(y)=?$
6	$y=\sin x+\cos 2x$ на $[0;\pi]$	$E(y)=?$
7	$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ на $[-0,5;0,5]$	$E(y)=?$
8	$y=(5+\sin x)\cos x-3x$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	$E(y)=?$
9	$y=2\cdot 3^{3x}-4\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x$ на $[-1;1]$	$E(y)=?$
10	$y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}}$ на $[0,75;2]$	$E(y)=?$

Вариант Б

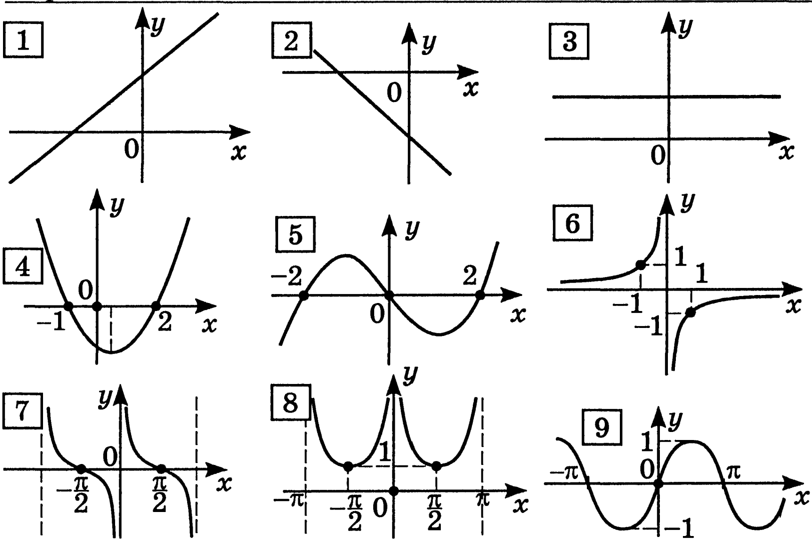
Найдите множество всех значений $E(y)$ функции на $[a; b]$.

1	$y = \left\|x^3 - 3x^2 + 5\right\|$ на $[0; 3]$	$E(y) = ?$
2	$y = \cos 3x - 15\cos x + 8$ на $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3}{2}\pi\right]$	$E(y) = ?$
3	$y = \cos^2 x \sin x$ на $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$	$E(y) = ?$
4	$y = (2^x + 2^{-x}) \log_2 e$ на $[-1; 2]$	$E(y) = ?$
5	$y = 2x \sin 2x + \cos 2x - \sqrt{3}$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{8}\right]$	$E(y) = ?$
6	$y = 10 + 4x \ln 9 - 3^{x-1} - 3^{3-x}$ на $[2; 4]$	$E(y) = ?$
7	$y = 5^{2-x} + 5^{x-1} - 2x \ln 25 - 7$ на $[0; 3]$	$E(y) = ?$
8	$y = 2^{x^2} - 1 + \frac{2}{2^{x^2} + 2}$ на $[-1; 1]$	$E(y) = ?$
9	$y = x^3 - 2x\left\|x - 2\right\|$ на $[0; 3]$	$E(y) = ?$
10	Найдите наименьшее значение a, при котором уравнение $\frac{4}{\cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = a$ имеет корни на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.	

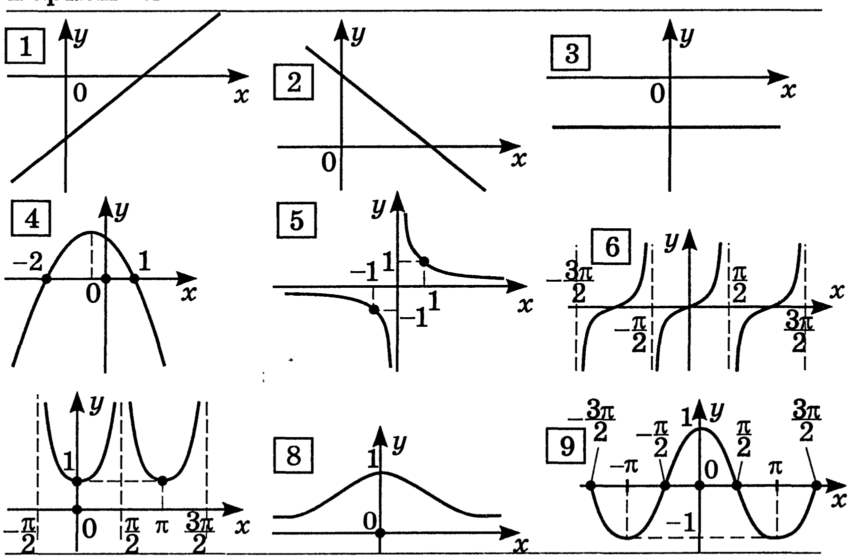
Самостоятельная работа 14

По графику производной функции выберите графики возможных функций.

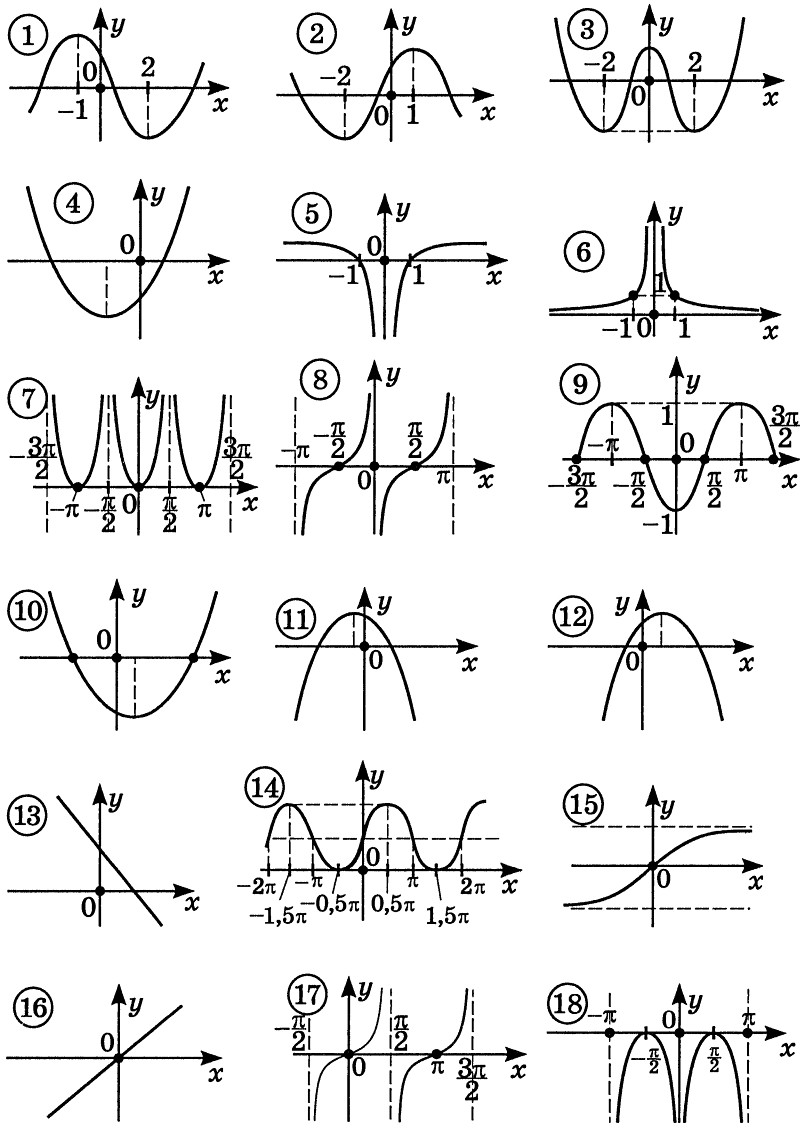
Вариант А



Вариант Б



Графики возможных функций, $f(x)$



Самостоятельная работа 15

Найдите.

	Вариант А	**Вариант Б**
1	$\int \left(3x^4 + x^{-3}\right)\, dx$, где $F(-1) = 2$	$\int \left(9 - 7x^2\right)^6 35x\, dx$
2	$\int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{6}{x}\right) dx$, где $F(1) = -3$	$\int \sqrt{4x^2 - 8x}(2x-2)\, dx$
3	$\int \left(\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right) dx$	$\int \frac{\ln 4x}{4x}\, dx$
4	$\int (2\cos x + 5\sin x)\, dx$	$\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\, dx$
5	$\int \left(2e^{2x} + 3\cos x \sin x\right) dx$	$\int \frac{\cos x}{\sqrt{5+\sin x}}\, dx$
6	$\int \left(\sqrt[3]{x-3} - \frac{2}{\sqrt{2x+1}} - (x+2)^4\right) dx$	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}\, dx$
7	$\int \left(\left(\frac{1}{3}x+1\right)^2 + (2x-3)^{\frac{3}{5}} - \frac{3}{\sqrt[4]{4x-1}}\right) dx$	$\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$
8	$\int \sin x \cos 3x\, dx$	$\int \frac{dx}{\|x\|\sqrt{x^2-9}}$
9	$\int \left(e^{\frac{2x+1}{3}} - \sin^2 x + \sqrt[8]{\frac{2x}{3}}\right) dx$	$\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$
10	$\int \left(\frac{2\sqrt{x} - x}{3x^2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx$	$\int e^x \ln\left(e^x - 1\right) dx$

Самостоятельная работа 16

Вычислите.

	Вариант А	Вариант Б
1	$\int\limits_{-1}^{1}\left(5x^4-2x+1\right)\,dx$	$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx$
2	$\int\limits_{1}^{2}\left(x^2-\dfrac{3x^3-2x}{4}\right)\,dx$	$\int\limits_{-1}^{0}3\,(2-3x)^2\,dx$
3	$\int\limits_{-2}^{1}\left(1-\dfrac{2x-3x^2}{3}\right)dx$	$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\sqrt{2}\cos 2x+3\sin x\right)dx$
4	$\int\limits_{1}^{e}\left(4x^3-\dfrac{5}{x}\right)dx$	$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx$
5	$\int\limits_{0{,}25}^{1}\left(2\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$	$\int\limits_{0}^{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x}}-3\,(2x+3)^2\right)dx$
6	$\int\limits_{1}^{2}\left(\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x^2}\right)dx$	$\int\limits_{-1}^{0{,}125}\left(\dfrac{2}{x}+\sqrt[3]{8x}\right)^2dx$
7	$\int\limits_{8}^{27}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-2\sqrt[3]{x}\right)dx$	$\int\limits_{-1}^{1}\left(e^{2x+2}\right)dx$
8	$\int\limits_{\frac{9}{4}}^{6}\dfrac{dx}{\sqrt{x-2}}$	$\int\limits_{0}^{1}\left(2^{x+2}\cdot 3^{2x+1}\right)dx$
9	$\int\limits_{-3{,}5}^{1}\sqrt[3]{2x-1}dx$	$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{5}{2}x\right)dx$
10	$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos 3x+3\sin x\right)dx$	$\int\limits_{-1}^{1}(x+1)\,(x+2)\,(x-3)\,dx$

Самостоятельная работа 17

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

	Вариант А	Вариант Б
1	$y = x^2; \quad y = x + 2$	$y = -x^2; \quad y = 2e^x;$ $0 \leqslant x \leqslant 1$
2	$y = x^2 - 2x + 3; \quad y = 3x - 1$	$y = \frac{5}{x}; \quad y = 6 - x; \quad x = 6$
3	$y = x^2; \quad y = 1 + \frac{3}{4}x^2$	$y = \sin\frac{\pi x}{2}; \quad y = x^2$
4	$y = x^2 - 2x + 2;$ $y = 2 + 4x - x^2$	$y = \operatorname{tg} x; \quad y = \sin x;$ $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$
5	$y = \frac{4}{x^2}; \quad y = x - 1; \quad x = 1$	$y = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{9}};$ $0 \leqslant x \leqslant 3\pi; \quad y = 0$
6	$y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt{4 - 3x};$ $y = 0$	$y = \frac{\lvert x^2 - 2x - 3\rvert}{4};$ $y = 7 - \lvert x - 1\rvert$
7	$y = x^2; \quad y = \sqrt{x}$	$y = 6x^2 - 5x + 1;$ $y = \cos\pi x$
8	$y = \frac{6x^2 - x^4}{9}; \quad y = 1$	$y = -\cos^2 x\left(1 + \sin^2 x\right);$ $0 \leqslant x \leqslant 2\pi; \quad y = 0$
9	$y = x^3 - 3x; \quad y = x; \quad y = 2$	$y = x^2; \quad y = \frac{x^2}{x - 2};$ $x = 4; \quad y = 0$
10	$y = \frac{\lvert 4 - x^2\rvert}{4}; \quad y = 7 - \lvert x\rvert$	$y = \operatorname{tg} x; \quad y = \frac{2}{3}\cos x;$ $x = 0$

Самостоятельная работа 18

Вариант А

Вычислите.

1	$\int\limits_{-3}^{-1} \left(x^3 - 2x^2\right)\, dx$
2	$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\, dx$
3	$\int\limits_{-0{,}125}^{0} \frac{2\,dx}{4x+1}$
4	$\int\limits_{-1}^{0} \frac{2x^2}{x^6+1}\, dx$
5	$\int\limits_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{3}\, dx$
6	$\int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin 3x\, dx$
7	$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$
8	$\int\limits_{-2}^{3} \left(\lvert x+1\rvert - \lvert x-2\rvert\right) dx$
9	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x + 4$, касательной к кривой в точке $x_0 = 2$, прямыми $x = -1$ и $x = 3$.
10	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt[3]{2x-1}$ и касательной к кривой в точке $x_0 = 1$.

Вариант Б

Вычислите.

1	$\int\limits_{-2}^{-1}\left(2x^3+3x^2\right)\,dx$
2	$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos\frac{x}{3}\,dx$
3	$\int\limits_{0{,}75}^{1}\frac{3\,dx}{2x-1}$
4	$\int\limits_{0}^{1}\frac{4x\,dx}{1+4x^4}$
5	$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2\frac{x}{3}\,dx$
6	$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 x\cos 3x\,dx$
7	$\int\limits_{-2}^{0}\sqrt{4-x^2}\,dx$
8	$\int\limits_{-3}^{2}\left(\lvert x-1\rvert-\lvert x+2\rvert\right)\,dx$
9	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+4x+5$, касательной к кривой в точке $x_0=-1$, прямыми $x=-2$ и $x=1$.
10	Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt[3]{2x+1}$ и касательной к кривой в точке $x_0=-1$.

Самостоятельная работа 19

Вариант А

Найдите.

1	$\int \left(5e^x + \frac{2}{x} + \sin 2x\right) dx$
2	$\int \left(-(x-2)^2\right) \ln 4x \, dx$
3	$\int \frac{18 \sin 9x \, dx}{\sqrt{\cos 9x}}$
4	$\int \frac{-2x^2 + 12x + 20}{(2-x)(x+1)^2} \, dx$
5	$\int \frac{3x^2 + 20x - 47}{(2-x)(x^2 - 8x + 17)} \, dx$
6	$\int 2\sqrt{48 - x^2 - 2x} \, dx$
7	$\int \frac{143x + 15x^3 + 123x^2 - 31}{\sqrt{-16 - x^2 - 10x}} \, dx$
8	$\int (2 + 2x) \operatorname{arcctg} 3x \, dx$
9	$\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{-\cos^2 x + 5\sin^2 x + 3}$
10	$\int \frac{(-4\cos x - 6\sin x + 2) \, dx}{\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 3\cos x + 4\sin x - 4}$

Вариант Б

Найдите.

1	$\int\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+6e^{3x}+\frac{5}{x}\right)\,dx$
2	$\int\left(-44-57x-30x^2\right)e^{5x}\,dx$
3	$\int\frac{56e^{\operatorname{arctg}7x}}{1+49x^2}\,dx$
4	$\int\frac{18x^2-4x-14}{(3-2x)(x^2+2x+5)}\,dx$
5	$\int\frac{x^2+13x-82}{(x+3)(x-4)(x-5)}\,dx$
6	$\int 2\sqrt{15-x^2+2x}\,dx$
7	$\int\frac{-9x^3+58x^2-91x-11}{\sqrt{x^2-8x+17}}\,dx$
8	$\int(-2-3x)\sin 4x\,dx$
9	$\int\frac{\operatorname{tg}x\,dx}{-\cos^2 x+\sin^2 x+3}\,dx$
10	$\int\frac{(-11\cos x-4\sin x+1)\,dx}{\cos^2 x+4\sin x\cdot\cos x+4\cos x+3+3\sin x}$

Самостоятельная работа 20

Вариант А

1	Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 2x$, прямой $x = 3$ и осью OX.
2	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $y = 1$, $y = 4$ и осью OY.
3	Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми $y = \pm 2b$.
4	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $2y^2 = x^3$ и прямой $x = 4$.
5	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x^2 + y^4 = y^2$.
6	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
7	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $xe^x = y$ и прямыми $y = 0$ и $x = 1$.
8	Вычислите объем тела, полученного при вращении кривой $x^2 + xy + y^2 = 3$ вокруг оси OX.

Вариант Б

1	Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 2y$, прямой $y = 3$ и осью OY.
2	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$ и прямыми $x = 1$, $x = 4$ и осью OX.
3	Вычислите объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OY.
4	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y^3 = 4x^2$ и $y = 2$.
5	Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y^2 + x^4 = x^2$.
6	Вычислите объем тела, полученного при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x^2 + y^{\frac{2}{3}} = 1$.
7	Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, кривой $y = e^x$, прямыми $x = 0$ и $x = 2$.
8	Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и кривой $y = x(4 - x)$.

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	$\boxed{0{,}8}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$\boxed{\sqrt[3]{a}}$
Б	$\boxed{0{,}25}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{\frac{7}{6}}$	$\boxed{\frac{3}{7}}$	$\boxed{1}$	$\boxed{\sqrt[3]{a}}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$

Самостоятельная работа 2

	А		**Б**
1	$\boxed{\frac{10}{3}}$	1	$\boxed{\frac{8}{15}}$
2	$\boxed{-1}$	2	$\boxed{-\frac{1}{24}}$
3	$\boxed{-\frac{1}{20}}$	3	$\boxed{1}$
4	$\boxed{\frac{9}{8}}$	4	$\boxed{\frac{2}{3}}$
5	$\boxed{-\frac{13}{18}}$	5	$\boxed{-\frac{13}{8}}$
6	$\boxed{\frac{1}{12}}$	6	$\boxed{\frac{3}{8}}$
7	$\boxed{\frac{1}{14}}$	7	$\boxed{\frac{1}{6}}$
8	$\boxed{1}$	8	$\boxed{-\frac{1}{2}}$
9	$\boxed{\frac{11}{5}}$	9	$\boxed{3}$
10	$\boxed{\left(\frac{3}{8}\right)^{10}}$	10	$\boxed{3^{50}}$

Самостоятельная работа 3

	А		**Б**
1	$\boxed{12}$	1	$\boxed{3}$
2	$\boxed{4\frac{4}{27}}$	2	$\boxed{\frac{8}{21}}$
3	$\boxed{1{,}5}$	3	$\boxed{\frac{1}{2}}$
4	$\boxed{2}$	4	$\boxed{-0{,}4}$
5	$\boxed{e^2}$	5	$\boxed{e}$
6	$\boxed{-\frac{\pi}{2}}$	6	$\boxed{-1}$
7	$\boxed{-1{,}5}$	7	$\boxed{-1{,}5}$
8	$\boxed{1}$	8	$\boxed{\frac{2}{27}}$
9	$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	9	$\boxed{1}$
10	$\boxed{0}$	10	$\boxed{-\frac{2}{3}}$

Самостоятельная работа 4

	А	Б
1	$8(2x-3)^3$	$\dfrac{8}{\sqrt[3]{4x+5}}$
2	$15(3x-1)^4$	$-\dfrac{1}{15\sqrt[5]{\left(\frac{3-5x}{3}\right)^4}}$
3	$-36(5-3x)^3$	$\dfrac{4}{\sqrt[3]{2x-1}}$
4	$8(2x-1)^3-18(3x+1)^5$	$-\dfrac{4}{3}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{5}{2}(5x+2)^{-\frac{1}{2}}$
5	$2(2x+3)^3(2x-3)^2(14x-3)$	$-\dfrac{4}{\sqrt[3]{(1-2x)^5}}+\dfrac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}}$
6	$\dfrac{3}{2(0{,}5x-3)^4}\left(-\dfrac{24}{(x-6)^4}\right)$	$-3(2-3x)^2\dfrac{21x+22}{2\sqrt{3x+4}}$
7	$\dfrac{30}{(2-3x)^6}$	$\dfrac{3x-26}{6(4+3x)^2\sqrt[3]{1-0{,}5x}}$
8	$\dfrac{5}{(2-5x)^2}+\dfrac{2}{(6x+1)^2}$	$\dfrac{(5+2x)^6(150x-101)}{4\sqrt[4]{(3x-1)^7}}$
9	$\dfrac{1{,}5}{\sqrt{3x-2}}$	$\dfrac{13x^3-22x^2+14x-20}{6\sqrt[6]{x(x-2)^4(x^2+2)^3}}$
10	$-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{(2-5x)^2}}$	$\dfrac{-4x^3+10x^2+25x+5}{6\sqrt{(x^2+3x+2)^3}\sqrt[3]{(2x^2-x-1)^2}}$

Самостоятельная работа 5

А

1	$12x^2\left(x^3-1\right)^3$
2	$12\left(3x^2+\frac{8}{x}-1\right)^5\left(3x-\frac{4}{x^2}\right)$
3	$8\left(x^4-x^3+5x^2-2\right)^7\left(4x^3-3x^2+10x\right)$
4	$6\left(\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+1\right)\right)^2\left(2x^3-x+1\right)$
5	$\frac{-24x}{\left(2x^2-1\right)^4}$
6	$\frac{-4x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-2\right)^3}$
7	$-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$
8	$\frac{6x^2+2}{3}\left(2x^3+2x-1\right)^{-\frac{2}{3}}$
9	$\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
10	$-\frac{1}{6\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\sqrt{x}}$

Б

1	$\dfrac{2x}{\sqrt{(1+x^2)\,(1-x^2)^3}}$
2	$-\dfrac{12x}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^4\sqrt{1+x^2}}$
3	$-\dfrac{\sqrt{1-x}(x+2)}{\sqrt{(x+1)^3}}$
4	$\dfrac{4}{\sqrt{4+x^2}\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)}$
5	$\dfrac{4-2\sqrt{4-x^2}}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
6	$\dfrac{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$
7	$\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^9\left(15\sqrt[3]{x^2}-12x\sqrt[3]{x^2}+7x\sqrt{x}-10\sqrt{x}\right)}{3(1-x)^2\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}$
8	$\dfrac{1}{3\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^2\,(1-\sqrt{x})^2}}$
9	$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$
10	$\dfrac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$

Самостоятельная работа 6

	А	Б
1	$6\frac{3}{64}$	$\left(\frac{\pi+4}{2}\right)^2$
2	$-\frac{\pi^2}{4}$	0
3	8	$-\frac{1}{75}$
4	0	2
5	3	$\frac{1}{3}$
6	5	$\frac{5}{4}\sqrt{2}$
7	3	$32\frac{1}{2}$
8	7	$-\frac{1}{3072}$
9	0	$\frac{3}{4}$
10	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$

Самостоятельная работа 7

Найдите для функции $y = f(x)$:

а) угловой коэффициент $\boxed{k}$ и свободный член $\boxed{b}$ касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0;

б) абсциссу $\boxed{x_0}$ точки касания и $\boxed{b}$ — свободный член касательной к кривой с угловым коэффициентом k;

в) в уравнении касательной $y = kx + b$ к кривой $y = f(x)$ абсциссу точки касания $\boxed{x_0}$ и коэффициент $\boxed{k}$, если известно b.

А

	$y = f(x)$	а) x_0	б) k	в) b
1	$y = x^2 - 4$	1	$\mathbf{2}$	$\mathbf{-5}$
2	$y = 1 - 2x^2$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	-1	$\mathbf{1\frac{1}{8}}$
3	$y = \frac{1}{4}x^2 + 3$	2	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
4	$y = 2x^2 - x - 3$	$\mathbf{1; -1}$	$\mathbf{3; -5}$	-5
5	$y = -x^3 + 3x + 4$	$\frac{1}{3}$	$\mathbf{2\frac{2}{3}}$	$\mathbf{4\frac{2}{27}}$
6	$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2$	$\mathbf{-1}$	-2	$\mathbf{-3\frac{5}{12}}$
7	$y = x - \frac{1}{x}$	$0{,}5$	5	-4
8	$y = x^2 - \frac{1}{x}$	$\mathbf{-\frac{1}{2}; 1}$	3	$\mathbf{3\frac{3}{4}; -3}$
9	$y = x^2(x-2)^2$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
10	$y = (x+4)^3(2x-1)$	$\mathbf{-4; -\frac{5}{8}}$	0	$\mathbf{0; -\left(\frac{3}{2}\right)^{11}}$

Найдите для функции $y = f(x)$:

а) угловой коэффициент $\boxed{k}$ и свободный член $\boxed{b}$ касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0;

б) абсциссу $\boxed{x_0}$ точки касания и $\boxed{b}$ — свободный член касательной к кривой с угловым коэффициентом k;

в) в уравнении касательной $y = kx + b$ к кривой $y = f(x)$ абсциссу точки касания $\boxed{x_0}$ и коэффициент $\boxed{k}$, если известно b.

Б

	$y = f(x)$	а) x_0	б) k	в) b
1	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbf{-1; 0; 1}$	$\mathbf{\dfrac{1}{2}; 0; -\dfrac{1}{2}}$	1
2	$y = \dfrac{1}{x^4} - 2$	$\mathbf{-2}$	$\dfrac{1}{8}$	$\mathbf{-1\dfrac{11}{16}}$
3	$y = \dfrac{x-2}{x+3}$	$\mathbf{-5; -1}$	$\dfrac{5}{4}$	$\mathbf{9{,}75; -0{,}25}$
4	$y = \dfrac{3-x}{x+4}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1{,}75}$	-1
5	$y = x + 2\sqrt{x}$	$\mathbf{\dfrac{1}{16}}$	5	$\mathbf{\dfrac{1}{4}}$
6	$y = 1 - \sqrt{x^3}$	$0{,}25$	$\mathbf{-0{,}75}$	$\mathbf{1\dfrac{1}{16}}$
7	$y = (x-1)\sqrt{x}$	$\mathbf{1}$	1	$\mathbf{-1}$
8	$y = \sqrt{1-x^2}$	$\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$	$\mathbf{-1; 1}$	$\sqrt{2}$
9	$y = x\sin x$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
10	$y = \left(x^2-2x-2\right)e^x$	$\mathbf{2; -2}$	0	$\mathbf{-2e^2; 6e^{-2}}$

Самостоятельная работа 8

	А	Б
1	$y\uparrow$ на $[2,5;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;2,5]$	$y\uparrow$ на $[-1;3]$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-1]$; $[3;\infty)$
2	$y\uparrow$ на $(-\infty;1]$; $y\downarrow$ на $[1;\infty)$	$y\uparrow$ на $[6;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;0]$
3	$y\uparrow$ на $[-1,5;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-1,5]$	$y\uparrow$ на $[2;\infty)$; $y\downarrow$ на $[0;2]$
4	$y\uparrow$ на $(-\infty;0]$; $[2;\infty)$; $y\downarrow$ на $[0;2]$	$y\uparrow$ на $[3;\infty)$; $y\downarrow$ на $(0;3]$
5	$y\uparrow$ на $(-\infty;-5]$; $[-1;\infty)$; $y\downarrow$ на $[-5;-1]$	$y\uparrow$ на $[0;5]$; $y\downarrow$ на $[5;10]$
6	$y\uparrow$ на $(-\infty;\infty)$	$y\uparrow$ на $(-\infty;4]$; $y\downarrow$ на $[4;5]$
7	$y\uparrow$ на $\left(-\infty;-3-\sqrt{6}\right]$; $\left[-3+\sqrt{6};\infty\right)$; $y\downarrow$ на $\left[-3-\sqrt{6};-3+\sqrt{6}\right]$	$y\uparrow$ на $[0;1]$; $[2;\infty)$; $y\downarrow$ на $[1;2]$; $(-\infty;0]$
8	$y\uparrow$ на $(-\infty;-1)$; $(-1;0,5]$; $y\downarrow$ на $[0,5;2)$; $(2;\infty)$	$y\uparrow$ на $(-\infty;1)$; $y\downarrow$ на $(1;2]$; $[2;\infty)$
9	$y\uparrow$ на $[-0,75;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-0,75]$	$y\uparrow$ на $\left[-1,5;-\frac{1+3\sqrt{2}}{4}\right]$; $\left[\frac{-1+3\sqrt{2}}{4};\infty\right)$ $y\downarrow$ на $(-\infty;-1,5]$; $\left[-\frac{1+3\sqrt{2}}{4};\frac{-1+3\sqrt{2}}{4}\right]$;
10	$y\uparrow$ на $(-\infty;0)$; $(0;1]$; $y\downarrow$ на $[1;2)$; $(2;\infty)$	$y\uparrow$ на $\left[-2;-\sqrt{2,5}\right]$; $[-1;0]$; $\left[1;\sqrt{2,5}\right]$; $[2;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-2]$; $\left[-\sqrt{2,5};-1\right]$; $[0;1]$; $\left[\sqrt{2,5};2\right]$

Самостоятельная работа 9

	А	Б
1	$y\uparrow$ на $[0,5;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;0)$; $(0;0,5]$	$y\uparrow$ на $\left[4;5\frac{1}{3}\right]$; $y\downarrow$ на $\left[5\frac{1}{3};\infty\right)$
2	$y\uparrow$ на $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right];\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\infty\right)$; $y\downarrow$ на $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	$y\uparrow$ на $(4;\infty)$; $[0;4)$; $y\downarrow$ на $\emptyset$
3	$y\uparrow$ на $[3;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;0)$; $(0;3]$	$y\uparrow$ на $[1;\infty)$; $y\downarrow$ на $\emptyset$
4	$y\uparrow$ на $[2-\sqrt{3};1)(1;2+\sqrt{3}]$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-1);(-1;2-\sqrt{3}];[2+\sqrt{3};\infty)$	$y\uparrow$ на $(-\infty;3]$; $y\downarrow$ на $[3;\infty)$
5	$y\uparrow$ на $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$; $y\downarrow$ на $(-\infty;0);\left(0;\frac{1}{3}\right];\left[\frac{2}{3};\infty\right)$	$y\uparrow$ на $[0;0{,}4]$; $y\downarrow$ на $(-\infty;0]$; $[0{,}4;0{,}5]$
6	$y\uparrow$ на $(-\infty;-1]$; $[1;\infty)$; $y\downarrow$ на $[-1;1]$	$y\uparrow$ на $[-1;1]$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-1]$; $[1;\infty)$
7	$y\uparrow$ на $[1;\infty)$; $y\downarrow$ на $[0;1]$	$y\uparrow$ на $[1;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;1]$
8	$y\uparrow$ на $[0;9]$; $y\downarrow$ на $[9;\infty)$	$y\uparrow$ на $[1;\infty)$; $y\downarrow$ на $(-\infty;-1]$
9	$y\uparrow$ на $[0;1]$; $y\downarrow$ на $[1;2]$	$y\uparrow$ на $(-\infty;-2\sqrt{3}];[-2;0);[2;2\sqrt{3}]$; $y\downarrow$ на $[-2\sqrt{3};-2];(0;2);[2\sqrt{3};\infty)$
10	$y\uparrow$ на $[-3;-1);\left(-1;\frac{-6+\sqrt{33}}{3}\right]$; $y\downarrow$ на $\left[\frac{-6+\sqrt{33}}{3};1\right);(1;\infty)$;	$y\uparrow$ на $\left[-\frac{3+\sqrt{17}}{2};-1\right);\left(-1;\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$ $y\downarrow$ на $\left(-\infty;-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right];\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{2};1\right]$

Самостоятельная работа 10

	А	Б
1	$-6; -2$	$-\sqrt[3]{3\ln\left(\frac{2}{3}e\right)}$
2	Нет	$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; -1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; 3; 4$
3	$-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 1$	$-\frac{14}{e}$
4	$\sqrt{2}$	$\frac{-3-\sqrt{21}}{6}; \frac{-3+\sqrt{21}}{6}; 1$
5	$\sqrt{2}$	$-\frac{1+3\sqrt{5}}{2}; -2; 1; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}; 2$
6	$4\sqrt{2};\ 6$	$-1{,}5; -1; 3$
7	$1{,}5$	$-1; -\frac{\sqrt{6}}{9}; \frac{\sqrt{6}}{9}; 1$
8	$-1; 1{,}25; 3{,}5$	$\frac{39-2\pi\sqrt{3}}{3}; 9$
9	$-\frac{2}{3}; -\frac{1}{5}$	1
10	3	$0; \frac{16}{9}\sqrt{3}$

Самостоятельная работа 11

А

1	$D(f) = [-7; 7]$
2	на $[-7; -5]; [-2; 4]$ $y \uparrow$; на $[-5; -2]; [4; 7]$ $y \downarrow$
3	$x = -5$; $x = -2$; $x = 4$
4	$[-6; -3) \cup 4$
5	$E(y) = [-6; 4]$
6	$x = -5{,}5$; $x = -4{,}5$; $x = 2$; $x = 6{,}5$
7	$[-7; -5) \cup (-5; 3) \cup (6; 7]$
8	$(3; 4) \cup -3$
9	$(0; \infty)$
10	$[-5{,}5; -5) \cup (-5; -4{,}5] \cup [2; 3) \cup (6; 6{,}5]$

Б

1	$D(f) = [-8; 7]$
2	на $[-8; -5]; [0; 4]$ $\downarrow$; на $[-5; 0]; [4; 7]$ $\uparrow$
3	$x = -5$; $x = 0$; $x = 4$
4	$(4; 6]; 3$
5	$[-3; 6]$
6	$x = -6{,}5$; $x = -3{,}5$; $x = 2{,}5$; $x = 5{,}5$
7	$(-7{,}5; -2); (1{,}5; 6{,}5)$
8	$(3; 4); -2$
9	$(4; \infty)$
10	$(-7{,}5; -6{,}5] \cup [-3{,}5; -2) \cup (1{,}5; 2{,}5] \cup [5{,}5; 2{,}5] \cup [5{,}5; 6{,}5)$

Самостоятельная работа 12

	А	Б
1	$y_{\text{наим}} = y(1) = -15;$ $y_{\text{наиб}} = y(-1) = 5$	$E(y) = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$
2	$y_{\text{наим}} = y(0) = 0;$ $y_{\text{наиб}} = y(-4) = 16$	$E(y) = \left[-9\frac{1}{3}; 4\frac{3}{13}\right]$
3	$y_{\text{наим}} = y(-1) = 2;$ $y_{\text{наиб}} = y(3) = 34$	$E(y) = [\sqrt{3}; 3]$
4	$y_{\text{наим}} = y(0) = 0;$ $y_{\text{наиб}} = y(1) = 1$	$E(y) = \left[0; \frac{\sqrt[3]{9}}{13}\right]$
5	$y_{\text{наим}} = y(1) = 1{,}5;$ $y_{\text{наиб}} = y(0) = 2$	$E(y) = \left[-\frac{\pi+2}{2}; \frac{6\sqrt{3}+\pi}{12}\right]$
6	$y_{\text{наим}} = -\frac{1}{8};\ y_{\text{наиб}} = 6$	$E(y) = \left[-\frac{4\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$
7	$E(y) = [1; 7{,}25]$	$E(y) = [-9; 3] \cup [15; 16]$
8	$E(y) = [0; 40]$	$E(y) = [-2; 20]$
9	$E(y) = \left[2\left(\sqrt{2}-1\right); 1\right]$	a_2 — наименьший член последовательности
10	$E(y) = \left[-13,5; -6\frac{1}{6}\right]$	$a = 2$

Самостоятельная работа 13

	А	Б
1	$E(y)=\left[-2\frac{2}{3};2\frac{2}{3}\right]$	$E(y)=[1;5]$
2	$E(y)=[-4;158]$	$E(y)=[-0{,}5;22]$
3	$E(y)=[-57;132]$	$E(y)=\left[0;\frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$
4	$E(y)=[-25;-9]$	$E(y)=[2\log_2 e;4,25\log_2 e]$
5	$E(y)=\left[-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right]$	$E(y)=[-\sqrt{3}-1;0{,}5\pi-\sqrt{3}]$
6	$E(y)=\left[0;1\frac{1}{8}\right]$	$E(y)=\left[-17\frac{1}{3}+32\ln 3;24\ln 3\right]$
7	$E(y)=[0{,}2;5]$	$E(y)=[-1-8\ln 5;18{,}2]$
8	$E(y)=[-1{,}5\pi;5]$	$E(y)=\left[\frac{2}{3};1\frac{1}{2}\right]$
9	$E(y)=[0;24]$	$E(y)=\left[-1\frac{13}{27};21\right]$
10	$E(y)=\left[1;\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right]$	$a=9$

Самостоятельная работа 14

А		Б	
$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
$\boxed{1}$	4	$\boxed{1}$	10
$\boxed{2}$	11	$\boxed{2}$	12
$\boxed{3}$	16	$\boxed{3}$	13
$\boxed{4}$	1	$\boxed{4}$	2
$\boxed{5}$	3	$\boxed{5}$	5
$\boxed{6}$	6	$\boxed{6}$	7
$\boxed{7}$	18	$\boxed{7}$	17
$\boxed{8}$	8	$\boxed{8}$	15
$\boxed{9}$	9	$\boxed{9}$	14

Самостоятельная работа 15

А

1	$0{,}6x^5 - 0{,}5x^{-2} + 3{,}1$
2	$-\frac{3}{x} - 6\ln\|x\|$
3	$\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$
4	$2\sin x - 5\cos x + c$
5	$e^{2x} - 0{,}75\cos 2x + c$
6	$\frac{3}{4}(x-3)^{\frac{4}{3}} - 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}(x+2)^5 + c$
7	$\left(\frac{1}{3}x+1\right)^3 + \frac{5}{16}(2x-3)^{\frac{8}{5}} - (4x-1)^{\frac{3}{4}} + c$
8	$-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$
9	$\frac{3}{2}e^{\frac{2x+1}{3}} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{9}{8}} + c$
10	$-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\ln\|x\| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c$

Б

1	$-\frac{5}{14}\left(9-7x^2\right)^7+c$
2	$\frac{4}{3}\left(x^2-2x\right)^{\frac{3}{2}}+c$
3	$\frac{1}{8}\ln^2 4x+c$
4	$-\frac{2}{3}(\arccos x)^{\frac{3}{2}}+c$
5	$2(5+\sin x)^{\frac{1}{2}}+c$
6	$2(3-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}+c$
7	$\frac{2}{35}\sqrt{35}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{35}}{7}x+c$
8	$-\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{x}+c$
9	$-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+c$
10	$(e^x-1)\ln(e^x-1)-x+c$

Самостоятельная работа 16

	А	Б
1	4	$\dfrac{\pi}{12}$
2	$\dfrac{13}{48}$	39
3	7	$\sqrt{2}$
4	$e^4 - 6$	$\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
5	$-1\dfrac{5}{6}$	$-158 + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$
6	$-1\dfrac{1}{4}$	$2\dfrac{19}{40}$
7	-90	$\dfrac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$
8	3	$\dfrac{204}{\ln 18}$
9	$-5\dfrac{5}{8}$	$\dfrac{2}{3}$
10	$-2\dfrac{2}{3}$	-12

Самостоятельная работа 17

	А	Б
1	$4{,}5$	$\dfrac{6e - 5}{3}$
2	$4{,}5$	$5\ln\dfrac{6}{5} - 0{,}5$
3	$2\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{3}$
4	9	$\sqrt{2} + \ln 2 - 2$
5	$1,5$	$9\sqrt{3}$
6	$\dfrac{8}{9}$	32
7	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{8}$
8	$\dfrac{16\sqrt{3}}{15}$	$\dfrac{5}{4}\pi$
9	$12\dfrac{3}{4}$	$6\dfrac{5}{6} - 4\ln 2$
10	32	$-\ln\dfrac{2}{3}\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}$

Самостоятельная работа 18

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	$-37\dfrac{1}{3}$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$\dfrac{1}{2}\ln 2$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{\pi}{4}$	0	$9\dfrac{1}{3}$	$3{,}375$
Б	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$	$\dfrac{3}{2}\ln 2$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{7}{15}$	π	0	3	$3{,}375$

Самостоятельная работа 19

А

1	$5e^x + 2\ln\|x\| - \frac{1}{2}\cos 2x + c$
2	$-\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\ln 4x + \frac{x^3}{9} - x^2 + 4x + c$
3	$-4\sqrt{\cos 9x} + c$
4	$-4\ln\|2 - x\| - \frac{2}{x+1} + 6\ln\|x+1\| + c$
5	$-\ln\|2 - x\| - \ln\left\|x^2 - 8x + 17\right\| - 40\,\mathrm{arctg}(x - 4) + c$
6	$(x+1)\sqrt{48 - x^2 - 2x} + 49\arcsin\frac{x+1}{7} + c$
7	$\left(-5x^2 + x + 2\right)\sqrt{-16 - x^2 - 10x} - 5\arcsin\frac{x+5}{3} + c$
8	$\left(x^2 + 2x + \frac{1}{9}\right)\mathrm{arcctg}\,3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln(1 + 9x^2) + c$
9	$\frac{1}{16}\ln\left\|8\,\mathrm{tg}^2\,x + 2\right\| + c$
10	$2\ln\left\|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1\right\| + 4\ln\left\|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 3\right\| - \frac{4}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1} + c$

Б

1	$-4\sqrt{x}+2e^{3x}+5\ln\lvert x\rvert+c$
2	$-\left(6x^2+9x+7\right)e^{5x}+c$
3	$8e^{\operatorname{arctg}7x}+c$
4	$-\ln\lvert 3-2x\rvert-4\ln\left\lvert x^2+2x+5\right\rvert+c$
5	$-2\ln\lvert x+3\rvert+2\ln\lvert x-4\rvert+\ln\lvert x-5\rvert+c$
6	$(x-1)\sqrt{15-x^2+2x}+16\arcsin\dfrac{x-1}{4}+c$
7	$\left(-3x^2-x-1\right)\sqrt{x^2-8x+17}-2\ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right)+c$
8	$\dfrac{2+3x}{4}\cos 4x-\dfrac{3}{16}\sin 4x+c$
9	$\dfrac{1}{8}\ln\left\lvert 4\operatorname{tg}^2 x+2\right\rvert+c$
10	$-6\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right\rvert-6\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-4\right\rvert-\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+c$

Самостоятельная работа 20

	А	Б
1	9π	9π
2	12π	12π
3	$\frac{28}{3}\pi a^2 b$	$\frac{4}{3}\pi a^2 b$
4	32π	π
5	$\frac{4\pi}{15}$	$\frac{4}{15}\pi$
6	$\frac{32\pi a^2}{105}$	$\frac{4}{5}\pi$
7	$2\pi(e-2)$	$2\pi\left(e^2+1\right)$
8	$8\pi\sqrt{3}$	$\frac{128}{3}\pi$

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник обложки *Е.И. Герасимчук*
Компьютерная верстка *С. С. Афонин*
Компьютерная графика *А. П. Широкий*
Компьютерный набор *Е. А. Жданов, К. В. Шевяков*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

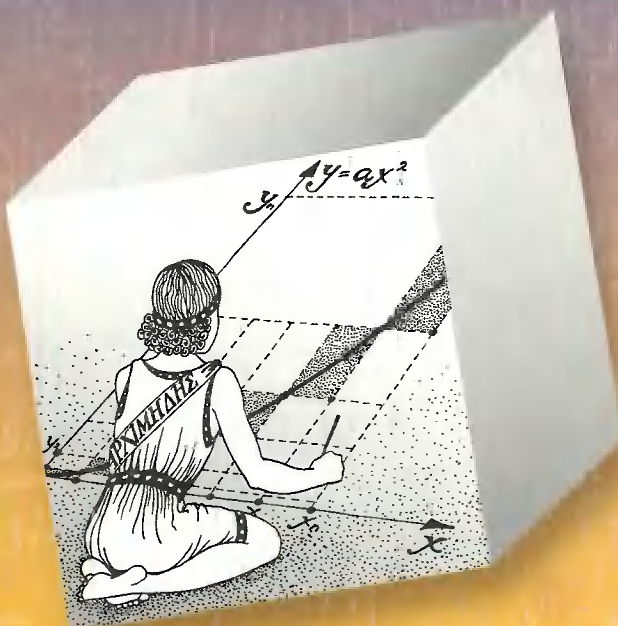
Подписано к печати 24.08.2010 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 49,5 печ. л. Тираж 1500 экз. Заказ № 362

Отпечатано в ГУП «Первая Академическая типография «Наука».
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия В.О., дом 12/28.
Телефон: (812) 323-65-69, факс: (812) 323-50-27, E-mail: tipnauka@peterstar.ru

МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Введение в математический анализ



Практикум

Тренинг

Контроль

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами на экзаменах.
13. Введение в математический анализ.
14. Комплексные числа.
15. Введение в теорию вероятности.

ISBN 978-5-98712-044-6

9 785987 120446