

А. Х. Шахмейстер

ДРОБИ



Практикум
Тренинг
Контроль

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
заслуженный учитель РФ О. С. Сергеева,
заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц,
Учитель высшей квалификации Л. В. Бухарина,
Учитель высшей квалификации Д. Ф. Вайсберг,
Учитель высшей квалификации Г. П. Волченкова.

Рекомендовано

Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для
школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.

Ш32 Дроби : Учеб. пособие / А.Х. Шахмейстер. — 4-е изд., —
М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф» : «Викто-
рия плюс», 2013. — 152 с.: илл. — ISBN 978-5-4439-0067-4,
ISBN 978-5-98712-028-6, ISBN 978-5-91673-005-0.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьно-
го курса математики, содержит большое количество разноуровневого
тренировочного материала. В книге представлена программа для про-
ведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов,
студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-4439-0067-4 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-028-6 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-005-0 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

© Шахмейстер А. Х., 2008
© Герасимчук Е. И., обложка, 2008
© ООО «Петроглиф», 2008

*Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таусии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 7-8 классов (25 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 4	Алгебраические выражения и действия над ними (стр. 5–25) Практикумы 1, 2, 3, 4. Тренировочные работы 1, 2 (по выбору преподавателя). Тренировочная работа 3 (2, 8, 12, 14, 16). Проверочная работа 1 (3, 6, 8, 10).
5 – 9	Разложение на множители (стр. 26–39) Практикумы 5, 6. Тренировочная работа 4 (1(1, 3, 5, 7, 8); 2(3, 6, 8)). Практикум 7. Тренировочная работа 5 (1(2, 5); 2(2, 4); 3(3, 4, 5); 4(4, 6)). Проверочная работа 2 (1(4, 5, 6); 2(1, 5); 3(4, 6)).
10 – 17	Действия с дробями (стр. 40–79) Практикум 8. Тренировочная работа 6 (1(3, 5); 2(4, 6)). Тренировочная работа 7 (по выбору преподавателя). Практикум 9. Тренировочная работа 8 (2, 4, 8, 10). Практикум 10. Тренировочная работа 9 (1, 6, 9, 10). Тренировочные работа 10, (по выбору преподавателя). Практикум 11. Тренировочная работа 12 (1(1, 4); 2(3); 3(4, 5); 4(2, 6)). Тренировочная работа 13 (1(4, 7, 8); 2(4, 8); 3(1, 5, 8)). Практикум 12. Тренировочная работа 14 (1, 4, 7, 10).
18 – 25	Решение более сложных примеров (стр. 80–118) Практикум 13. Тренировочные карточки: 2 (4, 8); 3 (1, 6, 7); 4 (2, 5, 8); 6 (3, 8, 10); 7 (1, 6, 9, 10). Зачетные карточки: 1 (2, 5, 9); 3 (2, 10); 7 (1, 6); 8 (2, 3, 7, 8).

Программа разработана по материалам книги и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Алгебраические выражения и действия над ними

Определение 1

Числовым выражением называется соединение чисел знаками действий и скобками.

Если, соблюдая принятый порядок, выполнить указанные действия, то получится число. Это число называется числовым значением этого числового выражения.

Пример 1. $\frac{83}{130} + 2,4 \cdot \left(\frac{9}{13} - \frac{7}{12} \right)$ — есть числовое выражение, а число 0,9 — значение числового выражения.

Определение 2

Алгебраическим выражением называется соединение чисел и букв знаками действий и скобками.

Пример 2. $2a - \frac{a}{3}(a + 3) - 4$ — алгебраическое выражение.

Если вместо буквы подставить число и вычислить значение числового выражения, получившегося при этом, то значение числового выражения и есть значение алгебраического выражения при данном значении букв.

В примере 2 пусть $a = 3$, тогда $2 \cdot 3 - \frac{3}{3} \cdot (3 + 3) - 4 = -4$, т. е. если $a = 3$, то -4 — значение алгебраического выражения.

Практикум 1

1. Дано выражение $2a - 3a(4 - a) + 15$.

Вычислите его значение при:

а) $a = -1$;

б) $a = 0,5$.

Решение. а) Пусть $a = -1$, тогда

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)(4 - (-1)) + 15 = -2 + 3 \cdot 5 + 15 = 28.$$

б) Пусть $a = 0,5$, тогда

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,5 \cdot (4 - 0,5) + 15 = \\ = 1 - 1,5 \cdot 3,5 + 15 = 16 - 5,25 = 10,75. \end{aligned}$$

2. Вычислите значение алгебраических выражений:

а) $(p + 0,6)(p - 0,6)$. При $p = 0,2$

Решение. При $p = 0,2$ имеем

$$(0,2 + 0,6) \cdot (0,2 - 0,6) = 0,8 \cdot (-0,4) = -0,32.$$

Итак, $-0,32$ — значение алгебраического выражения при $p = 0,2$.

б) $k + \frac{2}{3} \left(k - \frac{2}{3} \right)$. При $k = \frac{1}{6}$.

Решение. При $k = \frac{1}{6}$ имеем

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6},$$

но записывать это можно иначе, полагая

$$f(k) = k + \frac{2}{3} \left(k - \frac{2}{3} \right), \text{ где } f(k) \text{ — обозначение}$$

алгебраического выражения, в котором использована буква k ;

$$f\left(\frac{1}{6}\right) \text{ — значение алгебраического выражения}$$

при $k = \frac{1}{6}$.

в) $2x + 3y - 5$. При $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{3}$.

Решение. При $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{3}$ имеем

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 5 = -1 - 1 - 5 = -7.$$

Записать это можно тоже иначе: так как здесь две буквы (переменные), то

$$f(x; y) = 2x + 3y - 5, \text{ значит, } f\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) = -7.$$

Здесь $f(x; y)$ — обозначение алгебраического выражения, в котором использованы буквы x и y .

г) $f(x; y) = 2x^2 - 3y^2$. При $x = -1$; $y = 2$.

Решение. При $x = -1$; $y = 2$ имеем

$$f(-1; 2) = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 2^2 = 2 \cdot 1 - 12 = -10.$$

$f(-1; 2) = -10$ — значение алгебраического выражения при $x = -1$ и $y = 2$.

д) $f(x) = (2x - x^2) \cdot (x + 3)$. При $x = 3$.

Решение. При $x = 3$ получим

$$f(3) = (2 \cdot 3 - 3^2)(3 + 3) = (6 - 9) \cdot 6 = -18,$$

т.е. $f(3) = -18$.

е) $f(t) = (t + 3)(t - 2)(t + 2)$. При $t = -1$.

Решение. При $t = -1$

$$f(-1) = (-1 + 3)(-1 - 2)(-1 + 2) = 2 \cdot (-3) \cdot 1 = -6,$$

т.е. $f(-1) = -6$.

Тренировочная работа 1

1. Дано выражение $3b - 2b(3 - b) + 12$.

Вычислите его значение при:

а) $b = -2$; б) $b = 1,5$; в) $b = -\frac{3}{4}$.

2. Вычислите значение алгебраических выражений:

а) $(2k - 0,3)(2k + 0,3) + 0,9k$ при $k = -0,4$;

б) $t + \frac{4}{5} \left(\frac{3}{4} - 2t \right)$ при $t = 0,25$;

в) $(3a + 4) \cdot 2a - 6(a + 2)(a + 1)$ при $a = -1,2$;

г) $3x - 4y + 5$ при $x = 1\frac{2}{3}$, $y = -2\frac{1}{2}$;

д) $4z^2 - 5y^2$ при $z = -1,5$, $y = 1,4$.

Решение тренировочной работы 1

1. Дано выражение $3b - 2b(3 - b) + 12$. Обозначим это выражение $f(b) = 3b - 2b(3 - b) + 12$.

а) Вычислим его значение при $b = -2$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2) - 2(-2)(3 - (-2)) + 12 = -6 + 4(3 + 2) + 12 = \\ &= -6 + 4 \cdot 5 + 12 = 32 - 6 = 26. \end{aligned}$$

б) При $b = 1,5$

$$\begin{aligned} f(1,5) &= 3 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1,5(3 - 1,5) + 12 = 4,5 - 3 \cdot 1,5 + 12 = \\ &= 4,5 - 4,5 + 12 = 12. \end{aligned}$$

в) При $b = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{4}\right) &= 3\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\left(-\frac{3}{4}\right)\left(3 - \left(-\frac{3}{4}\right)\right) + 12 = \\ &= -\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(3 + \frac{3}{4}\right) + 12 = -2\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{4} + 12 = 9\frac{3}{4} + \frac{45}{8} = \\ &= 9\frac{3}{4} + 5\frac{5}{8} = 14\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = 14\frac{6+5}{8} = 14\frac{11}{8} = 15\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

2. Вычислите значение алгебраических выражений:

а) Дано выражение $(2k - 0,3)(2k + 0,3) + 0,9k$. Обозначим это выражение $f(k) = (2k - 0,3)(2k + 0,3) + 0,9k$. Вычислим его значение при $k = -0,4$

$$\begin{aligned} f(-0,4) &= (2(-0,4) - 0,3)(2(-0,4) + 0,3) + 0,9(-0,4) = \\ &= (-0,8 - 0,3)(-0,8 + 0,3) - 0,36 = -1,1(-0,5) - 0,36 = \\ &= 0,55 - 0,36 = 0,19. \end{aligned}$$

б) Дано выражение $t + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4} - 2t\right)$. Обозначим это выражение $f(t) = t + \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4} - 2t\right)$.

Вычислим его значение при $t = 0,25$

$$\begin{aligned} f(0, 25) &= 0, 25 + 0, 8(0, 75 - 2 \cdot 0, 25) = \\ &= 0, 25 + 0, 8(0, 75 - 0, 5) = \\ &= 0, 25 + 0, 8 \cdot 0, 25 = 0, 25 + 0, 2 = 0, 45. \end{aligned}$$

в) Дано выражение $(3a + 4) \cdot 2a - 6(a + 2)(a + 1)$.

Обозначим это выражение

$$f(a) = (3a + 4) \cdot 2a - 6(a + 2)(a + 1).$$

Вычислим его значение при $a = -1, 2$

$$\begin{aligned} f(-1, 2) &= (3(-1, 2) + 4) \cdot 2(-1, 2) - 6(-1, 2 + 2)(-1, 2 + 1) = \\ &= (-3, 6 + 4)(-2, 4) - 6 \cdot 0, 8(-0, 2) = \\ &= 0, 4(-2, 4) - 4, 8(0, 2) = -0, 96 + 0, 96 = 0. \end{aligned}$$

г) Дано выражение $3x - 4y + 5$.

Обозначим это выражение $f(x; y) = 3x - 4y + 5$.

Вычислим его значение при $x = 1 \frac{2}{3}$ и $y = -2 \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f\left(1 \frac{2}{3}; -2 \frac{1}{2}\right) &= 3 \cdot 1 \frac{2}{3} - 4 \cdot \left(-2 \frac{1}{2}\right) + 5 = 3 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot \frac{5}{2} + 5 = \\ &= 5 + 2 \cdot 5 + 5 = 20. \end{aligned}$$

д) Дано выражение $4z^2 - 5y^2$.

Обозначим это выражение $f(z; y) = 4z^2 - 5y^2$.

Вычислим его значение при $z = -1, 5$ и $y = 1, 4$

$$\begin{aligned} f(-1, 5; 1, 4) &= 4(-1, 5)^2 - 5(1, 4)^2 = 4 \cdot 2, 25 - 5 \cdot 1, 96 = \\ &= 9 - 9, 8 = -0, 8. \end{aligned}$$

Понятие дроби

Определение 3

Запись вида $\frac{a}{b}$, в которой a и b — числа или выражения, называется **дробью**. Причем выражение a называется **числителем** дроби, а выражение b — **знаменателем** этой дроби.

Примечания:

Если a и b — числовые выражения, то $\frac{a}{b}$ — числовая дробь.

Пример 3. $\frac{2^2 - 3 \cdot 4}{3^2 \cdot 2 \cdot 5}$ — числовая дробь.

Если a и b — алгебраические выражения (или хотя бы одно из них), то $\frac{a}{b}$ — алгебраическая дробь.

Пример 4. $\frac{3a - a(a + 2)}{5a^2 + 4}$ — алгебраическая дробь.

Внимание! Если значение знаменателя дроби равно нулю, то дробь не определена или не имеет значения, или не существует.

Пример 5. $\frac{4x - 3}{2x + 6}$. Выясните, при каких x дробь существует.

Так как при $x = -3$; $2 \cdot (-3) + 6 = 0$; $2x + 6 = 0$,

то при $x = -3$ дробь $\frac{4x - 3}{2x + 6}$ не определена или не существует.

Практикум 2

Вычислите значение дроби:

$$1. f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1} \text{ при } x = 1.$$

$$f(1) = \frac{4 \cdot 1 - 3}{2 \cdot 1 + 1}, \text{ т.е. } f(1) = \frac{1}{3}.$$

Здесь $f(x)$ — обозначение алгебраической дроби, в котором использована буква x ; $f(1)$ — значение алгебраической дроби при $x = 1$.

$$2. \frac{2a - 3b}{2a + 4b} :$$

а) при $a = 2$, $b = 3$;

б) при $a = 6$, $b = -3$.

Итак, $f(a; b) = \frac{2a - 3b}{2a + 4b}$, где $f(a; b)$ — обозначение алгебраической дроби, в которой использованы буквы a и b ; $f(2; 3)$ — значение дроби при $a = 2$ и $b = 3$.

$$а) f(2; 3) = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 + 4 \cdot 3}, \text{ т.е. } f(2; 3) = -\frac{5}{16};$$

$$б) f(6; -3) = \frac{2 \cdot 6 - 3 \cdot (-3)}{2 \cdot 6 + 4 \cdot (-3)}, \text{ т.е. } f(6; -3) = \frac{21}{0}.$$

Итак, при $a = 6$ и $b = -3$ дробь не определена или не существует.

$$3. f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}, \text{ где } f(x) \text{ — обозначение}$$

алгебраической дроби, в которой использована буква x .

Вычислите значение дроби при

а) $x = 1$;

в) $x = 2$;

б) $x = 0$;

г) $x = -3$.

$$\text{а) } f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1}{1^2 - 4} = \frac{0}{-3} = 0; \quad f(1) = 0.$$

Определение 4

Значение переменной или неизвестного, при которой (котором) выражение обращается в ноль или равно нулю, называется **корнем (или нулем) выражения**.

В данном случае $x = 1$ — корень выражения, т. е.

$$\text{а) } f(1) = 0;$$

$$\text{б) } f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1}{0^2 - 4} = -\frac{1}{4};$$

$$\text{в) } f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1}{2^2 - 4} = \frac{3}{0}, \text{ т. е. при } x = 2 \text{ дробь}$$

не определена или не существует;

$$\text{г) } f(-3) = \frac{2 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 1}{(-3)^2 - 4} = \frac{28}{5} = 5,6.$$

Определение 5

Дробь равна нулю, если числитель ее равен нулю, а знаменатель дроби не равен нулю, т. е.

$$\frac{a}{b} = 0, \text{ если } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Пример 6. } \frac{2x + 3}{x - 1} = 0, \text{ если } \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x = -3 \\ x \neq 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -1,5 \\ x \neq 1 \end{cases}, \text{ т. е. при } x = -1,5 \text{ дробь равна нулю.}$$

$$\text{Пример 7. } \frac{4x + 4}{3(x + 2) - 3} = 0, \text{ если } \begin{cases} 4x + 4 = 0 \\ 3(x + 2) - 3 \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x = -4 \\ 3(x + 2) \neq 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -1 \\ x \neq -1 \end{cases}, \text{ т. е. решения нет.}$$

Практикум 3

Вычислите значение дроби $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{4 - x^2}$

и выясните, при каких значениях x дробь:

равна нулю;

не определена;

меньше нуля (или отрицательна),

если x принимает значения 0; -0,5; 2; 3; -2; 0,5.

1) Пусть $x = 0$;

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 - 2}{4 - 0^2} = -\frac{1}{2}.$$

2) Пусть $x = -0,5$, тогда

$$f(-0,5) = \frac{2 \cdot (-0,5)^2 - 3 \cdot (-0,5) - 2}{4 - (-0,5)^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{0}{3\frac{3}{4}} = 0,$$

т. е. $x = -\frac{1}{2}$ — **корень** выражения, или значение

неизвестного x , при котором дробь обращается

в ноль (или равна нулю), т. е. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

3) Пусть $x = 2$;

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2}{4 - 2^2} = \frac{0}{0}.$$

Значит, при $x = 2$ дробь не определена или не существует.

4) Пусть $x = 3$; $f(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 2}{4 - 3^2} = -\frac{7}{5} = -1,4$.

5) Пусть $x = -2$; $f(-2) = \frac{2(-2)^2 - 3(-2) - 2}{4 - (-2)^2} = -\frac{8+6-2}{4-4} = -\frac{12}{0}$,

значит, при $x = -2$ дробь не определена.

6) Пусть $x = 0,5$;

$$\begin{aligned} f(0,5) &= \frac{2 \cdot 0,5^2 - 3 \cdot 0,5 - 2}{4 - 0,5^2} = \frac{2 \cdot 0,25 - 1,5 - 2}{4 - 0,25} = \\ &= \frac{0,5 - 3,5}{3,75} = -\frac{3}{3,75} = -\frac{300}{375} = -\frac{12}{15} = -0,8. \end{aligned}$$

Ответ: дробь $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{4 - x^2}$.

1) При $x = 0$
равна $-0,5$ (отрицательна).

2) При $x = -0,5$
равна 0 (т. е. $x = -0,5$ — есть корень выражения),
т. е. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

3) При $x = 2$
не определена (не существует).

4) При $x = 3$
равна $-1,4$ (отрицательна).

5) При $x = -2$
не определена (не существует).

6) При $x = 0,5$
равна $-0,8$ (отрицательна).

Возможна иная форма ответа: дробь $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{4 - x^2}$

а) $f(x) = 0$ при $x = -0,5$.

б) $f(x)$ — не определена при $x = 2$; $x = -2$.

в) $f(x) < 0$ при $x = 0$; $x = 3$; $x = 0,5$.

Тренировочная работа 2

1. Вычислите значение дроби $f(x) = \frac{3x-4}{4x+1}$ при:

а) $x = -2$; б) $x = -1\frac{1}{4}$; в) $x = 2\frac{1}{3}$.

2. $f(x) = \frac{(2x+3)(2x-3)}{4-9x}$ при:

а) $x = -1$; б) $x = 0,8$;

в) $x = \frac{4}{9}$; г) $x = 3\frac{1}{18}$.

3. $f(a; b) = \frac{4b-3a}{2b-5a}$ при:

а) $a = -2$, $b = 3$;

б) $a = -1,4$, $b = -4,5$.

4. Вычислите значение дроби $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{1-x^2}$

при x равном: 2 ; $\frac{1}{3}$; -1 ; $0,25$.

Выясните, при каких из этих значений x дробь:

а) равна нулю;

б) не определена;

в) меньше нуля (отрицательна);

г) больше нуля (положительна).

Решение тренировочной работы 2

1. Вычислите значение дроби $f(x) = \frac{3x-4}{4x+1}$ при:

а) $x = -2$; б) $x = -1\frac{1}{4}$; в) $x = 2\frac{1}{3}$.

а) $x = -2$

$$f(-2) = \frac{3(-2)-4}{4(-2)+1} = \frac{-6-4}{-8+1} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}; \quad f(-2) = 1\frac{3}{7}.$$

б) $x = -1\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f\left(-1\frac{1}{4}\right) &= \frac{3\left(-1\frac{1}{4}\right)-4}{4\left(-1\frac{1}{4}\right)+1} = \frac{3\left(-\frac{5}{4}\right)-4}{4\left(-\frac{5}{4}\right)+1} = \frac{-\frac{15}{4}-4}{-5+1} = \\ &= \frac{-15-4\cdot 4}{4(-4)} = \frac{-31}{-16} = 1\frac{15}{16}; \quad f\left(-1\frac{1}{4}\right) = 1\frac{15}{16}. \end{aligned}$$

в) $x = 2\frac{1}{3}$

$$f\left(2\frac{1}{3}\right) = \frac{3\left(2\frac{1}{3}\right)-4}{4\left(2\frac{1}{3}\right)+1} = \frac{3\cdot\frac{7}{3}-4}{4\cdot\frac{7}{3}+1} = \frac{7-4}{\frac{28+3}{3}} = \frac{3\cdot 3}{31} = \frac{9}{31}; \quad f\left(2\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{31}.$$

2. Вычислите значение дроби $f(x) = \frac{(2x+3)(2x-3)}{4-9x}$

при: а) $x = -1$; б) $x = 0,8$; в) $x = \frac{4}{9}$; г) $x = 3\frac{1}{18}$.

а) $x = -1$

$$f(-1) = \frac{(2(-1)+3)(2(-1)-3)}{4-9\cdot(-1)} = \frac{(-2+3)(-2-3)}{4+9} = \frac{1\cdot(-5)}{13} = -\frac{5}{13};$$

$$f(-1) = -\frac{5}{13}.$$

б) $x = 0,8$

$$\begin{aligned} f(0,8) &= \frac{(2\cdot 0,8+3)(2\cdot 0,8-3)}{4-9\cdot 0,8} = \frac{(1,6+3)(1,6-3)}{4-7,2} = \frac{4,6\cdot(-1,4)}{-3,2} = \\ &= \frac{4,6\cdot 1,4}{3,2} = \frac{46\cdot 14}{320} = \frac{23\cdot 7}{80} = \frac{161}{80} = 2\frac{1}{80}; \quad f(0,8) = 2\frac{1}{80}. \end{aligned}$$

$$в) x = \frac{4}{9}$$

$$f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{\left(2 \cdot \frac{4}{9} + 3\right)\left(2 \cdot \frac{4}{9} - 3\right)}{4 - 9 \cdot \frac{4}{9}} = \frac{\left(\frac{8}{9} + 3\right)\left(\frac{8}{9} - 3\right)}{4 - 4} = \frac{\left(\frac{8}{9} + 3\right)\left(\frac{8}{9} - 3\right)}{0}.$$

Значит при $x = \frac{4}{9}$ дробь не определена или не существует.

$$г) x = 3 \frac{1}{18}$$

$$\begin{aligned} f\left(3 \frac{1}{18}\right) &= \frac{\left(2 \cdot 3 \frac{1}{18} + 3\right)\left(2 \cdot 3 \frac{1}{18} - 3\right)}{4 - 9 \cdot 3 \frac{1}{18}} = \frac{\left(2 \cdot \frac{55}{18} + 3\right)\left(2 \cdot \frac{55}{18} - 3\right)}{4 - 9 \cdot \frac{55}{18}} = \\ &= \frac{\left(\frac{55}{9} + 3\right)\left(\frac{55}{9} - 3\right)}{4 - \frac{55}{2}} = \frac{(55+27)(55-27)}{9 \cdot 9 \cdot \frac{8-55}{2}} = \frac{82 \cdot 28 \cdot 2}{81 \cdot (-47)} = -\frac{4992}{3807} = \\ &= -1 \frac{785}{3807}; \quad f\left(3 \frac{1}{18}\right) = -1 \frac{785}{3807}. \end{aligned}$$

3. Вычислите значение дроби $f(a; b) = \frac{4b-3a}{2b-5a}$ при:

а) $a = -2$, $b = 3$; б) $a = -1, 4$, $b = -4, 5$.

а) $a = -2$, $b = 3$

$$f(-2; 3) = \frac{4 \cdot 3 - 3(-2)}{2 \cdot 3 - 5(-2)} = \frac{12+6}{6+10} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} = 1 \frac{1}{8}; \quad f(-2; 3) = 1 \frac{1}{8}.$$

б) $a = -1, 4$, $b = -4, 5$

$$f(-1, 4; -4, 5) = \frac{4(-4,5) - 3(-1,4)}{2(-4,5) - 5(-1,4)} = \frac{-18+4,2}{-9+7} = \frac{-13,8}{-2} = 6,9;$$

$$f(-1, 4; -4, 5) = 6,9.$$

4. Вычислите значение дроби $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{1-x^2}$

при x равном: 2; $\frac{1}{3}$; -1; 0,25.

Выясните, при каких из этих значений x дробь:

а) равна нулю;

б) не определена;

в) меньше нуля (отрицательна);

г) больше нуля (положительна).

1) $x = 2$

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1}{1 - 2^2} = \frac{12 - 8 + 1}{1 - 4} = -\frac{5}{3} = -1 \frac{2}{3}.$$

$$f(2) = -1 \frac{2}{3} \text{ — дробь меньше нуля (отрицательна)}$$

2) $x = \frac{1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{4}{3} + 1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{3} - 1 \frac{1}{3} + 1}{-\frac{8}{9}} = \frac{0}{-\frac{8}{9}}.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \text{ т.е. } x = \frac{1}{3} \text{ — корень выражения — дробь равна нулю.}$$

3) $x = -1$

$$f(-1) = \frac{3(-1)^2 - 4(-1) + 1}{1 - (-1)^2} = \frac{3 + 4 + 1}{1 - 1} = \frac{8}{0}.$$

при $x = -1$ дробь не определена или дробь не существует.

4) $x = 0,25$

$$f(0,25) = \frac{3(0,25)^2 - 4(0,25) + 1}{1 - (0,25)^2} = \frac{3 \cdot 0,0625 - 1 + 1}{1 - 0,0625} = \frac{0,1875}{0,9375}$$

$$= \frac{1875}{9375} = \frac{25 \cdot 75}{25 \cdot 375} = \frac{75}{375} = \frac{25 \cdot 3}{25 \cdot 15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$f(0,25) = 0,2 \text{ — дробь больше нуля (положительна).}$$

Ответ:

а) дробь равна нулю при $x = \frac{1}{3}$;

б) дробь не определена или дробь не существует при $x = -1$;

в) дробь меньше нуля и равна $-1 \frac{2}{3}$ при $x = 2$;

г) дробь больше нуля и равна $0,2$ при $x = 0,25$.

Упражнения на умножение многочлена на одночлен или многочлен

Практикум 4

Выполните действия и упростите:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (3a^2b - 5ab^2)(-2a^3b) = \\
 & = 3a^2b \cdot (-2a^3b) - 5ab^2 \cdot (-2a^3b) = \\
 & = -6a^2 \cdot a^3 \cdot b \cdot b - 5(-2) a^3 \cdot a \cdot b^2b = -6a^5b^2 + 10a^4b^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & (2a^2 + 3a - 2)(4a + 1) = \\
 & = 2a^2 \cdot 4a + 3a \cdot 4a - 2 \cdot 4a + 2a^2 + 3a - 2 = \\
 & = 8a^3 + 14a^2 - 5a - 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & (2x - 1)(3x + 2) - 6x(2x + 3) + 6x^2 = \\
 & = 2x \cdot 3x - 3x + 2x \cdot 2 - 2 - 6x \cdot 2x - 3 \cdot 6x + 6x^2 = -17x - 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & 2ax(a - x) - \left(a^3 - \left(x^2(a - 3x) - a^2(2ax - a) \right) \right) = \\
 & = 2a^2x - 2ax^2 - \left(a^3 - \left(ax^2 - 3x^3 - 2a^3x + a^3 \right) \right) = \\
 & = 2a^2x - 2ax^2 - \left(a^3 - ax^2 + 3x^3 + 2a^3x - a^3 \right) = \\
 & = 2a^2x - 2ax^2 - \left(-ax^2 + 3x^3 + 2a^3x \right) = \\
 & = 2a^2x - 2ax^2 + ax^2 - 3x^3 - 2a^3x = 2a^2x - ax^2 - 2a^3x - 3x^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & (4a + 5)(4a - 5) = \\
 & = 16a^2 + 20a - 20a - 25 = 16a^2 - 25.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9) = \\
 & = 8a^3 - 12a^2 + 12a^2 - 18a + 18a - 27 = \\
 & = 8a^3 - 27.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & (3a + 4)(3a + 4) = \\
 & = 9a^2 + 12a + 12a + 16 = 9a^2 + 24a + 16.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & (a + 2b)(a + 2b)(a + 2b) = \\
 & = (a + 2b)(a^2 + 2ab + 2ab + 4b^2) = \\
 & = (a + 2b)(a^2 + 4ab + 4b^2) = \\
 & = a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + 2a^2b + 8ab^2 + 8b^3 = \\
 & = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & (3 - 2b)(3 - 2b)(3 - 2b) = \\
 & = (3 - 2b)(9 - 6b - 6b + 4b^2) = \\
 & = (3 - 2b)(9 - 12b + 4b^2) = \\
 & = 27 - 36b + 12b^2 - 18b + 24b^2 - 8b^3 = \\
 & = 27 - 54b + 36b^2 - 8b^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) = \\
 & = a^4 - \underline{a^3} + \underline{a^2} + \underline{a^3} - \underline{a^2} + \underline{a} + \underline{a^2} - \underline{a} + 1 = \\
 & = a^4 + a^2 + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad & (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3) = \\
 & = x^4 + \underline{2x^3} + \underline{3x^2} - \underline{2x^3} - \underline{4x^2} - 6x + \underline{3x^2} + 6x + 9 = \\
 & = x^4 + 2x^2 + 9.
 \end{aligned}$$

Тренировочная работа 3

Выполните действия:

1. $3a^2b(4ab - 2a^3)$.
2. $(5a + 4)(5a - 4)$.
3. $(6a + 5)(6a + 5)$.
4. $(2a + 3)(a - 1) + (a + 1)(3 - 2a)$.
5. $(3x + 2)(2x - 1) - 3x(2x + 3) + 2x$.
6. $3b(1 - 6b) - (2b + 5)(2b - 5) + 11b(2b - 1)$.
7. $(3a - 2)(2a^2 - a - 2)$.
8. $(3a - 2)(9a^2 + 6a + 4)$.
9. $-xy(x + y) - y(3y^2 - x(5y + 2x) - y(3y - 4))$.
10. $(4 - t)t^2 - (3 - t^2)(t + 1)$.
11. $(x + 2)(x^2 + 2) - x^2(3 - x) - 2x(x^2 + 0, 5)$.
12. $(2a + b)(2a + b)(2a + b)$.
13. $(2b - 3a)(2b - 3a)(2b - 3a)$.
14. $(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9)$.
15. $(x^3 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2 - 1)$.
16. $(a + b + c)(a + b + c)$.

Решение тренировочной работы 3

1. $3a^2b(4ab - 2a^3) = 12a^3b^2 - 6a^5b.$
2. $(5a + 4)(5a - 4) = 25a^2 + 20a - 20a - 16 = 25a^2 - 16.$
3. $(6a + 5)(6a + 5) = 36a^2 + 30a + 30a + 25 = 36a^2 + 60a + 25.$
4. $(2a + 3)(a - 1) + (a + 1)(3 - 2a) =$
 $= 2a^2 + 3a - 2a - 3 + 3a + 3 - 2a^2 - 2a = 2a.$
5. $(3x + 2)(2x - 1) - 3x(2x + 3) + 2x =$
 $= 6x^2 + 4x - 3x - 2 - 6x^2 - 9x + 2x = -6x - 2.$
6. $3b(1 - 6b) - (2b + 5)(2b - 5) + 11b(2b - 1) =$
 $= 3b - 18b^2 - (4b^2 + 10b - 10b - 25) + 22b^2 - 11b =$
 $= 4b^2 - 4b^2 - 8b + 25 = 25 - 8b.$
7. $(3a - 2)(2a^2 - a - 2) = 6a^3 - 3a^2 - 6a - 4a^2 + 2a + 4 = 6a^3 - 7a^2 - 4a + 4.$
8. $(3a - 2)(9a^2 + 6a + 4) = 27a^3 + 18a^2 + 12a - 18a^2 - 12a - 8 = 27a^3 - 8.$
9. $-xy(x + y) - y(3y^2 - x(5y + 2x) - y(3y - 4)) =$
 $= -x^2y - xy^2 - y(3y^2 - 5xy - 2x^2 - 3y^2 + 4y) =$
 $= -x^2y - xy^2 - y(-5xy - 2x^2 + 4y) =$
 $= -x^2y - xy^2 + 5xy^2 + 2x^2y - 4y^2 = x^2y + 4xy^2 - 4y^2.$
10. $(4 - t)t^2 - (3 - t^2)(t + 1) = 4t^2 - t^3 - (3t - t^3 + 3 - t^2) =$
 $= 4t^2 - t^3 - 3t + t^3 - 3 + t^2 = 5t^2 - 3t - 3.$
11. $(x + 2)(x^2 + 2) - x^2(3 - x) - 2x(x^2 + 0,5) =$
 $= x^3 + 2x^2 + 2x + 4 - 3x^2 + x^3 - 2x^3 - x = -x^2 + x + 4.$

12. $(2a + b)(2a + b)(2a + b) =$
 $= (2a + b)(4a^2 + 2ab + 2ab + b^2) = (2a + b)(4a^2 + 4ab + b^2) =$
 $= 8a^3 + 8a^2b + 2ab^2 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3.$
13. $(2b - 3a)(2b - 3a)(2b - 3a) = (2b - 3a)(4b^2 - 6ab - 6ab + 9a^2) =$
 $= 8b^3 - 24ab^2 + 18a^2b - 12ab^2 + 36a^2b - 27a^3 =$
 $= 8b^3 - 36ab^2 + 54a^2b - 27a^3.$
14. $(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9) =$
 $= x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 3x^3 - 9x^2 - 27x + 9x^2 + 27x + 81 = x^4 + 9x^2 + 81.$
15. $(x^3 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2 - 1) =$
 $= x^6 - 2x^4 + x^3 + 2x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x^3 + 2x - 1 =$
 $= x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x - 1.$
16. $(a + b + c)(a + b + c) =$
 $a^2 + ba + ca + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 =$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$
т.е. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Проверочная работа 1

Выполните действия:

1. $(-5a^2 + 3a^3b)(-2ab^2)$.

2. $(3a^2 - a + 2)(2a - 3)$.

3. $(4x - 3) \cdot 2x - (2x + 1)(3x - 2) - 2x^2$.

4. $a^2(c - 3a) - (c^2(a + 3c) - c(3c^2 + ac - a^2) + 2a^3)$.

5. $(6x - 7)(6x + 7)$.

6. $(4x + 5)(16x^2 - 20x + 25)$.

7. $(7x + 3)(7x + 3)$.

8. $(3x + 1)(3x + 1)(3x + 1)$.

9. $(2x - 5)(2x - 5)(2x - 5)$.

10. $(4 + 6x + 3x^2)(4 - 6x + 3x^2)$.

2

Разложение на множители

Определение 6

Разложить на множители алгебраическое выражение – это значит представить алгебраическое выражение в виде произведения каких-то сомножителей отличных от 1.

Метод вынесения общего множителя

Практикум 5

Разложите на множители:

1. $4ab + 2bc = 2b(2a + c)$.

2. $3ax^2 + 6xb + 9x^3c =$
 $= 3x(ax + 2b + 3x^2c)$.

3. $x^2a^2 - 3ax - 2a^3x =$
 $= ax(ax - 2a^2 - 3)$.

4. $x^2y + x^2y^2 + x^3y^3 =$
 $= x^2y(1 + y + xy^2)$.

$$\begin{aligned} 5. \quad a(x+c) - b(x+c) &= \underline{a(x+c)} - \underline{b(x+c)} = \\ &= (x+c)(a-b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad 5(b-4) + x(4-b) &= \boxed{- (a-b) = b-a} \\ &= 5\underline{(b-4)} - x\underline{(b-4)} = (b-4)(5-x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad 5(4-a) + b(a-4) - c(4-a) &= 5\underline{(4-a)} - \underline{b(4-a)} - \underline{c(4-a)} = \\ &= (4-a)(5-b-c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad 5a^2(a-b+c) - a(b-a-c) &= \\ &= 5a^2(a-b+c) + a(a-b+c) = \\ &= (a-b+c)(5a^2+a) = a(a-b+c)(5a+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad 3x(2x+1) - (2-x)(2x+1) + 2(2x^2+x) &= \\ &= 3x\underline{(2x+1)} - (2-x)\underline{(2x+1)} + 2x\underline{(2x+1)} = \\ &= (2x+1)(3x - (2-x) + 2x) = (2x+1)(3x - 2 + x + 2x) = \\ &= (2x+1)(6x-2) = 2(2x+1)(3x-1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad 9a(2a-b-1) + 3a^2(b+1-2a) - 12ab^2(1-2a+b) &= \\ &= 3a \cdot 3\underline{(2a-b-1)} - 3a \cdot a\underline{(2a-b-1)} + 3a \cdot 4b^2\underline{(2a-b-1)} = \\ &= 3a \cdot (2 \cdot a - b - 1)(3 - a + 4b^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad (xy+y^2)(x^2+4x) - (x^2+xy)(y^2+4y) &= \\ &= \underline{y(x+y)} \underline{x(x+4)} - \underline{x(x+y)} \underline{y(y+4)} = \\ &= xy(x+y)(x+4) - (y+4)xy(x+y) = xy(x+y)(x+4-y-4) = \\ &= xy(x+y)(x-y). \end{aligned}$$

Метод группировки

Практикум 6

Разложите на множители:

- $2x + ac + cx + 2a =$
 $= (2x + 2a) + (ac + cx) =$
 $= 2(x + a) + c(a + x) = (x + a)(2 + c).$
- $ab + ac - 4b - 4c =$
 $= (ab + ac) + (-4b - 4c) =$
 $= a(b + c) - 4(b + c) = (b + c)(a - 4).$
- $2ax + 3by + 6ay + bx =$
 $= (2ax + bx) + (3by + 6ay) =$
 $= x(2a + b) + 3y(b + 2a) = (2a + b)(x + 3y).$
- $3c + 3c^2 - a - ac =$
 $= 3c(1 + c) - a(1 + c) = (1 + c)(3c - a).$
- $ab - a^2b^2 + a^3b^3 - c + abc - ca^2b^2 =$
 $= ab(1 - ab + a^2b^2) - c(1 - ab + a^2b^2) = (1 - ab + a^2b^2)(ab - c).$
- $x^2 + 6x + 8 =$
 $= x^2 + 4x + 2x + 8 = (x^2 + 4x) + (2x + 8) =$
 $= x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2).$
- $4x^2 - 9 =$
 $= 4x^2 - 6x + 6x - 9 = (4x^2 - 6x) + (6x - 9) =$
 $= 2x(2x - 3) + 3(2x - 3) = (2x - 3)(2x + 3).$
- $25x^2 - 10x + 1 =$
 $= 25x^2 - 5x - 5x + 1 = 5x(5x - 1) - (5x - 1) =$
 $= (5x - 1)(5x - 1) = (5x - 1)^2.$

Тренировочная работа 4

1. Разложите на множители методом вынесения общего множителя:

1) $8a^2b + 4ab$.

2) $6a^2x + 12x^2b + 9x^3c$.

3) $a^2b^2 - 5a^3b^3 + 10a^4b^4$.

4) $5a^2b + 10ab^2 + 15a^3b^3$.

5) $2a(b + y) + 3b(b + y)$.

6) $4(x - y) - x(x - y)$.

7) $a(x - 5) - (5 - x)$.

8) $4x^2(x - 4 + y) - 6x(4 - x - y)$.

2. Разложите на множители методом группировки:

1) $5a + 5y + pa + py$.

2) $3a - 3m - ay + my$.

3) $ay - 12bx + 3ax - 4by$.

4) $a^2b^2 + ab + abc + c$.

5) $ax + bx + cx + ay + by + cy$.

6) $32xz^2 - 10z^3 + 16xy^2 - 5y^2z$.

7) $15k^2m - 14t^3m + 6ktm^2 - 35kt^2$.

8) $x^2 - 6x + 8$.

9) $9x^2 - 4$.

10) $25x^2 + 10x + 1$.

Решение тренировочной работы 4

1. Разложите на множители методом вынесения общего множителя:

$$1) 8a^2b + 4ab = 4ab(2a + 1).$$

$$2) 6a^2x + 12x^2b + 9x^3c = 3x(2a^2 + 4xb + 3x^2c).$$

$$3) a^2b^2 - 5a^3b^3 + 10a^4b^4 = a^2b^2(1 - 5ab + 10a^2b^2).$$

$$4) 5a^2b + 10ab^2 + 15a^3b^3 = 5ab(a + 2b + 3a^2b^2).$$

$$5) 2a(b + y) + 3b(b + y) = (b + y)(2a + 3b).$$

$$6) 4(x - y) - x(x - y) = (x - y)(4 - x).$$

$$7) a(x - 5) - (5 - x) = a(x - 5) + (x - 5) = (x - 5)(a + 1).$$

$$8) 4x^2(x - 4 + y) - 6x(4 - x - y) = \\ = 4x^2(x - 4 + y) + 6x(x - 4 + y) = 2x(2x + 3)(x - 4 + y).$$

2. Разложите на множители методом группировки:

$$1) 5a + 5y + pa + py = 5(a + y) + p(a + y) = (a + y)(5 + p).$$

$$2) (3a - 3m) + (-ay + my) = \\ = 3(a - m) + y(-a + m) = 3(a - m) - y(a - m) = (a - m)(3 - y).$$

$$3) ay - 12bx + 3ax - 4by = (ay + 3ax) + (-12bx - 4by) = \\ = a(y + 3x) - 4b(3x + y) = (y + 3x)(a - 4b).$$

$$4) a^2b^2 + ab + abc + c = (a^2b^2 + ab) + (abc + c) = \\ = ab(ab + 1) + c(ab + 1) = (ab + 1)(ab + c).$$

$$\begin{aligned} 5) \quad ax + bx + cx + ay + by + cy &= \\ &= (ax + bx + cx) + (ay + by + cy) = \\ &= x(a + b + c) + y(a + b + c) = (a + b + c)(x + y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad 32xz^2 - 10z^3 + 16xy^2 - 5y^2z &= \\ &= (32xz^2 + 16xy^2) + (-10z^3 - 5y^2z) = \\ &= 16x(2z^2 + y^2) - 5z(2z^2 + y^2) = (2z^2 + y^2)(16x - 5z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad 15k^2m - 14t^3m + 6ktm^2 - 35kt^2 &= \\ &= (15k^2m + 6ktm^2) + (-14t^3m - 35kt^2) = \\ &= 3km(5k + 2tm) - 7t^2(2tm + 5k) = \\ &= (5k + 2tm)(3km - 7t^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad x^2 - 6x + 8 &= x^2 - 4x - 2x + 8 = (x^2 - 4x) + (-2x + 8) = \\ &= x(x - 4) - 2(x - 4) = (x - 4)(x - 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad 9x^2 - 4 &= 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 3x(3x - 2) + 2(3x - 2) = \\ &= (3x - 2)(3x + 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad 25x^2 + 10x + 1 &= 25x^2 + 5x + 5x + 1 = \\ &= 5x(5x + 1) + (5x + 1) = \\ &= (5x + 1)(5x + 1) = (5x + 1)^2. \end{aligned}$$

Использование формул сокращенного умножения при разложении на множители

$$1. (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$3. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$4. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$5. (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$6. (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

$$7. (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Если читать эти формулы справа налево, то это будет использованием формул сокращенного умножения для разложения многочленов на множители.

$$1. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$2. a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

$$3. a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

$$4. a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

$$5. a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

$$6. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$7. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Практикум 7

1. Выполните действия, используя формулы:

$$1) (a - 2b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2b + 4b^2 = a^2 - 4ab + 4b^2.$$

$$2) (3x + 5y^2)^2 = 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y^2 + 25y^4 = 9x^2 + 30xy^2 + 25y^4.$$

$$3) \left(2xy^2 - \frac{1}{3}x^2\right)^2 = 4x^2y^4 - 2 \cdot 2xy^2 \cdot \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x^4 = 4x^2y^4 - \frac{4}{3}x^3y^2 + \frac{1}{9}x^4.$$

$$\begin{aligned} 4) (3a - b)^2 - (9a + 5b)(a - 3b) &= \\ &= 9a^2 - 6ab + b^2 - (9a^2 + 5ab - 27ab - 15b^2) = \\ &= 9a^2 - 6ab + b^2 - 9a^2 - 5ab + 27ab + 15b^2 = 16ab + 16b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (3a - 2x)^2 (4a + x) - a(4x^2 + 3a(12a - 13x)) &= \\ &= (9a^2 - 12ax + 4x^2)(4a + x) - a(4x^2 + 36a^2 - 39ax) = \\ &= 36a^3 - 48a^2x + 16ax^2 + 9a^2x - 12ax^2 + 4x^3 - \\ &\quad - 4ax^2 - 36a^3 + 39a^2x = 4x^3. \end{aligned}$$

$$6) (2a - 1)^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2a \cdot 1^2 - 1^3 = 8a^3 - 12a^2 + 6a - 1.$$

$$7) (2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 3^2 + 3^3 = 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27.$$

$$\begin{aligned} 8) (x - 2)^3 - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) &= x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 - (x^3 - 2^3) = \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 8 = -6x^2 + 12x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) (3x + 2)^3 - (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) &= \\ &= (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 + 2^3 - ((3x)^3 + 2^3) = \\ &= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 - 27x^3 - 8 = 54x^2 + 36x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) (4x - 3)^3 - (4x + 3)^3 &= (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 4x \cdot 3^2 - 3^3 - \\ &\quad - ((4x)^3 + 3 \cdot (4x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 4x \cdot 3^2 + 3^3) = \\ &= 64x^3 - 144x^2 + 108x - 27 - 64x^3 - 144x^2 - 108x - 27 = -288x^2 - 54. \end{aligned}$$

2. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$$1) 9a^2 - 16 = (3a)^2 - 4^2 = (3a - 4)(3a + 4).$$

$$2) x^2 - 8ax + 16a^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4a + (4a)^2 = (x - 4a)^2.$$

$$3) -4 - 4a - a^2 = -(4 + 4a + a^2) = -(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot a + a^2) = -(2 + a)^2.$$

$$4) (a + 2b)^2 - (3a - b)^2 = \\ = (a + 2b + 3a - b)(a + 2b - 3a + b) = (4a + b)(3b - 2a).$$

$$5) x^4 - x^2 + 12xy - 36y^2 = x^4 - (x^2 - 12xy + 36y^2) = \\ = (x^2)^2 - (x - 6y)^2 = (x^2 + x - 6y)(x^2 - x + 6y).$$

$$6) 125 + a^3 = 5^3 + a^3 = (5 + a)(5^2 - 5a + a^2) = (5 + a)(25 - 5a + a^2).$$

$$7) 64 - (3c - 1)^3 = 4^3 - (3c - 1)^3 = (4 - (3c - 1))(4^2 + 4(3c - 1) + (3c - 1)^2) = \\ = (4 - 3c + 1)(16 + 12c - 4 + 9c^2 - 6c + 1) = (5 - 3c)(13 + 6c + 9c^2).$$

$$8) (a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b = \\ = ((a + b) - (a - b)) \left((a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2 \right) - 2b = \\ = 2b (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2) - 2b = \\ = 2b (3a^2 + b^2) - 2b = 2b (3a^2 + b^2 - 1).$$

$$9) a^4 + a^3 - a - 1 = \\ = a^3(a + 1) - (a + 1) = (a + 1)(a^3 - 1) = (a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1).$$

$$10) a^3 + a^2x - 3ax + 9x + 27 = (a^3 + 27) + (a^2x - 3ax + 9x) = \\ = (a + 3)(a^2 - 3a + 9) + x(a^2 - 3a + 9) = (a^2 - 3a + 9)(a + 3 + x).$$

Тренировочная работа 5

1. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(3a + b)^2$;

2) $(2x - 3y^3)^2$;

3) $\left(3x^2y + \frac{1}{2}x^2\right)^2$;

4) $(5a - 4b)(2a - 4b) - (a + 4b)^2$;

5) $(x - 2y)^2(3x + 4y) - x(3(x^2 - 4y^2) + 8y(y - x))$.

2. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(2x + 1)^3$;

4) $(3x - 2)^3 - (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$;

2) $(3 - 2x)^3$;

5) $(5x + 4)^3 - (5x - 4)^3$.

3) $(x + 2)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$;

3. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

1) $25 - 16x^2$;

4) $(2a - 3b)^2 - (a + 2b)^2$;

2) $9x^2 + 6x + 1$;

5) $81 - 4x^2 - 4xy - y^2$.

3) $-16a^2 + 8a - 1$;

4. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

1) $64 + 27x^3$;

4) $x^4 - x^3 - x + 1$;

2) $125 - (4x - 3)^3$;

5) $(a + 2)^2 - 8 + a^3 - 2a$.

3) $(x - y)^3 + (x + y)^3 - 2x$;

Решение тренировочной работы 5

1. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

$$1) (3a + b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot b + b^2 = 9a^2 + 6ab + b^2.$$

$$2) (2x - 3y^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y^3 + (3y^3)^2 = 4x^2 - 12xy^3 + 9y^6.$$

$$3) \left(3x^2y + \frac{1}{2}x^2\right)^2 = (3x^2y)^2 + 2 \cdot 3x^2y \cdot \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \\ = 9x^4y^2 + 3x^4y + \frac{1}{4}x^4.$$

$$4) (5a - 4b)(2a - 4b) - (a + 4b)^2 = \\ = 10a^2 - 8ab - 20ab + 16b^2 - a^2 - 8ab - 16b^2 = 9a^2 - 36ab.$$

$$5) (x - 2y)^2 (3x + 4y) - x \left(3(x^2 - 4y^2) + 8y(y - x)\right) = \\ = (x^2 - 4xy + 4y^2)(3x + 4y) - x(3x^2 - 12y^2 + 8y^2 - 8xy) = \\ = 3x^3 + 4x^2y - 12x^2y - 16xy^2 + 12xy^2 + 16y^3 - 3x^3 + 12xy^2 - \\ - 8xy^2 + 8x^2y = 16y^3.$$

2. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

$$1) (2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 = \\ = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1.$$

$$2) (3 - 2x)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 2x + 3 \cdot 3 \cdot (2x)^2 - (2x)^3 = \\ = 27 - 54x + 36x^2 - 8x^3.$$

$$3) (x + 2)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = \\ = x^3 + 6x^2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 - (x^3 + 2^3) = \\ = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 8 = 6x^2 + 12x.$$

$$\begin{aligned} 4) (3x - 2)^3 - (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4) &= \\ &= (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 - \left((3x)^3 - 2^3 \right) = \\ &= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - 27x^3 + 8 = -54x^2 + 36x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) (5x + 4)^3 - (5x - 4)^3 &= \\ &= (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 5x \cdot 4^2 + 4^3 - \\ &- \left((5x)^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 5x \cdot 4^2 - 4^3 \right) = \\ &= 125x^3 + 300x^2 + 240x + 64 - 125x^3 + 300x^2 - 240x + 64 = \\ &= 600x^2 + 128. \end{aligned}$$

3. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$$1) 25 - 16x^2 = 5^2 - (4x)^2 = (5 - 4x)(5 + 4x).$$

$$2) 9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x + 1 = (3x + 1)^2.$$

$$3) -16a^2 + 8a - 1 = -\left((4a)^2 - 2 \cdot 4a + 1 \right) = -(4a - 1)^2.$$

$$\begin{aligned} 4) (2a - 3b)^2 - (a + 2b)^2 &= (2a - 3b - a - 2b)(2a - 3b + a + 2b) = \\ &= (a - 5b)(3a - b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) 81 - 4x^2 - 4xy - y^2 &= 81 - (4x^2 + 4xy + y^2) = \\ &= 9^2 - (2x + y)^2 = (9 - 2x - y)(9 + 2x + y). \end{aligned}$$

4. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned} 1) 64 + 27x^3 &= 4^3 + (3x)^3 = (4 + 3x)\left(4^2 - 4 \cdot 3x + (3x)^2\right) = \\ &= (4 + 3x)(16 - 12x + 9x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad & 125 - (4x - 3)^3 = \\ & = 5^3 - (4x - 3)^3 = \\ & = (5 - 4x + 3) \left(5^2 + 5(4x - 3) + (4x - 3)^2 \right) = \\ & = (8 - 4x) (25 + 20x - 15 + 16x^2 - 24x + 9) = \\ & = (8 - 4x) (19 - 4x + 16x^2) = 4(2 - x) (19 - 4x + 16x^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad & (x - y)^3 + (x + y)^3 - 2x = \\ & = (x - y + x + y) \left((x - y)^2 - (x - y)(x + y) + (x + y)^2 \right) - 2x = \\ & = 2x (x^2 - 2xy + y^2 - x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2) - 2x = \\ & = 2x (3y^2 + x^2 - 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \quad & x^4 - x^3 - x + 1 = \\ & = x^3(x - 1) - (x - 1) = \\ & = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5) \quad & (a + 2)^2 - 8 + a^3 - 2a = \\ & = (a^3 - 8) + (a + 2)^2 - 2a = \\ & = (a - 2)(a^2 + 2a + 4) + a^2 + 4a + 4 - 2a = \\ & = (a - 2)(a^2 + 2a + 4) + (a^2 + 2a + 4) = \\ & = (a^2 + 2a + 4)(a - 2 + 1) = (a^2 + 2a + 4)(a - 1).\end{aligned}$$

Проверочная работа 2

1. Разложите на множители, используя метод вынесения общего множителя:

1) $3ab^2 + b^3$.

2) $4x^2y^3 - 6x^3y^2$.

3) $a(2x - 3y) - c(2x - 3y)$.

4) $6(p - 2g) + 3p(2g - p)$.

5) $6x^2(x - 2y)^2 - 9x(2y - x)^3$.

6) $x(x + z - y) + y(y - x - z) + z(x - y + z)$.

2. Разложите на множители, используя метод группировки:

1) $m - a(m + n) + n$.

2) $ab + 5b - 2a - 10$.

3) $4a(x - 2) - 3x + 6$.

4) $2ax + 2xy - ay - 4x^2$.

5) $6x^3 + 12y^2 - 9x^2y - 8xy$.

6) $a^2b + b^2c + ac^2 - ab^2 - bc^2 - a^2c$.

3. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

1) $25a^2 - 4a^4b^2$.

2) $9a^4 - 12a^3x^2 + 16a^2x^4$.

3) $24x^3 + 3y^3$.

4) $27c^3 - 3c^2 + 2c - 8$.

5) $4x^2 - 4x^3 + 12x^2y - 9y^2 - 9xy^2$.

6) $(2c + 1)^3 - 27$.

3

Действия с дробями

Основное свойство дробей

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \text{ если } \begin{cases} b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}.$$

Это есть условие возможности сокращения дроби.

Практикум 8

1. $\frac{2ax}{3ay} = \frac{2x}{3y}$ ($a \neq 0$). Очевидно, что для того чтобы сократить дробь, необходимо предварительно разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

$$2. \frac{2a-2b}{a-b} = \frac{2(a-b)}{a-b} = 2 \quad (a \neq b).$$

$$3. \frac{44(2x-y)}{55(y-2x)} = \frac{4 \cdot 11(2x-y)}{5 \cdot 11(-(2x-y))} = -\frac{4}{5} = -0,8 \quad (2x \neq y).$$

$$4. \frac{ax-4bx}{ay-4by} = \frac{x(a-4b)}{y(a-4b)} = \frac{x}{y} \quad (a \neq 4b).$$

В будущем, если об этом не спрашивается специально, будем полагать, что сокращение возможно, не акцентируя свое внимание при каких условиях.

Тренировочная работа 6

1. Сократите дроби:

$$1) \frac{8xy}{12xb}.$$

$$2) \frac{33(x-3y)}{77(3y-x)}.$$

$$3) \frac{-6pg+20p}{3g-10}.$$

$$4) \frac{5xy-5x^2}{xy^2-x^2y}.$$

$$5) \frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}.$$

2. Выполните действия:

$$1) xy(x-y) - (x^2 - y^2)(x+2y).$$

$$2) (8a+3b)(3a-8b) - (3a+8b)(8a-3b).$$

$$3) (p^3-3k)(p^2+3k) - (p^3+3k)(p^2-3k).$$

$$4) (4a^2+6a+9)(2a-3),$$

используя формулу разности кубов.

$$5) (4x^2+10x+25)(4x^2-10x+25),$$

используя формулу разности квадратов.

Решение тренировочной работы 6

1. Сократите дроби:

1)
$$\frac{8xy}{12xb} = \frac{2y}{3b}.$$

2)
$$\frac{33(x-3y)}{77(3y-x)} = \frac{-33(3y-x)}{77(3y-x)} = -\frac{33}{77} = -\frac{3}{7}.$$

3)
$$\frac{-6pg+20p}{3g-10} = \frac{-2p(3g-10)}{3g-10} = -2p.$$

4)
$$\frac{5xy-5x^2}{xy^2-x^2y} = \frac{5x(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{5}{y}.$$

5)
$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^3} = \frac{1}{x-y}.$$

2. Выполните действия:

1)
$$\begin{aligned} & xy(x-y) - (x^2-y^2)(x+2y) = \\ & = x^2y - xy^2 - x^3 + xy^2 - 2x^2y + 2y^3 = \\ & = 2y^3 - x^2y - x^3. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} & (8a+3b)(3a-8b) - (3a+8b)(8a-3b) = \\ & = 24a^2 + 9ab - 64ab - 24b^2 - 24a^2 - 64ab + 9ab + 24b^2 = \\ & = -110ab. \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} & (p^3-3k)(p^2+3k) - (p^3+3k)(p^2-3k) = \\ & = p^5 - 3kp^2 + 3kp^3 - 9k^2 - p^5 - 3kp^2 + 3kp^3 + 9k^2 = 6kp^3 - 6kp^2. \end{aligned}$$

4)
$$(4a^2+6a+9)(2a-3) = 8a^3 - 27.$$

5)
$$\begin{aligned} & (4x^2+10x+25)(4x^2-10x+25) = \\ & = ((4x^2+25)+10x)((4x^2+25)-10x) = \\ & = (4x^2+25)^2 - (10x)^2 = 16x^4 + 200x^2 + 625 - 100x^2 = \\ & = 16x^4 + 100x^2 + 625. \end{aligned}$$

Тренировочная работа 7**I**

Сократите дробь:

1. $\frac{3a^2b}{4ab^2}$.
2. $\frac{3xy^2-xy}{6y-2}$.
3. $\frac{7t^2(b-a)}{14t(b-a)^2}$.
4. $\frac{4xy^2-xy}{1-16y^2}$.
5. $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.
6. $\frac{66xy+77y^2}{36x^2+84xy+49y^2}$.
7. $\frac{x^2+2x+1}{1-x^2}$.
8. $\frac{x^2-4y^2}{4y^2-4xy+x^2}$.
9. $\frac{4a^2b-25b^3}{2a^2-5ab}$.
10. $\frac{42mn-49n^2}{49n^2-84mn+36m^2}$.
11. $\frac{8-27b^3}{4-12b+9b^2}$.
12. $\frac{3x^3y-3x^2y^2+3xy^3}{12xy^4+12yx^4}$.
13. $\frac{(x-3)^2-16}{x^2-49}$.
14. $\frac{(9a^2-6a+4)(3a+2)-9}{1+3a+9a^2}$.
15. $\frac{4x^2-12xy+9y^2}{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$.

II

Сократите дробь:

1. $\frac{az+at-bz-bt}{az-at-bz+bt}$.
2. $\frac{xc-yc+xk-yk}{xc+yc+xk+yk}$.
3. $\frac{pb+pc+b^2+bc}{pb+px+b^2+bx}$.
4. $\frac{x^2+ax-xy-ay}{x^2-xy-ax+ay}$.
5. $\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$.
6. $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}$.
7. $\frac{z-zy+x-xy}{z-z^2+x-xz}$.
8. $\frac{ab-b-ac+c}{a^3-3a^2+3a-1}$.
9. $\frac{-15x^2+4yz-10xz+6xy}{15x^2+2yz-5xz-6xy}$.
10. $\frac{9x^3-2bc^2-xc^2+18x^2b}{3x^2-2bc-xc+6xb}$.
11. $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$.
12. $\frac{y^2-6y+8}{y^2-3y+2}$.

Решение тренировочной работы 7

I

Сократите дробь:

$$1. \frac{3a^2b}{4ab^2} = \frac{3a}{4b}.$$

$$2. \frac{3xy^2 - xy}{6y - 2} = \frac{xy(3y - 1)}{2(3y - 1)} = \frac{xy}{2}.$$

$$3. \frac{7t^2(b-a)}{14t(b-a)^2} = \frac{t}{2(b-a)}.$$

$$4. \frac{4xy^2 - xy}{1 - 16y^2} = \frac{xy(4y - 1)}{(1 - 4y)(1 + 4y)} = -\frac{xy}{1 + 4y}.$$

$$5. \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}.$$

$$6. \frac{66xy + 77y^2}{36x^2 + 84xy + 49y^2} = \frac{11y(6x + 7y)}{(6x + 7y)^2} = \frac{11y}{6x + 7y}.$$

$$7. \frac{x^2 + 2x + 1}{1 - x^2} = \frac{(x+1)^2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x+1}{1-x}.$$

$$8. \frac{x^2 - 4y^2}{4y^2 - 4xy + x^2} = \frac{(x-2y)(x+2y)}{(2y-x)^2} = \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x-2y)^2} = \frac{x+2y}{x-2y}.$$

$$9. \frac{4a^2b - 25b^3}{2a^2 - 5ab} = \frac{b(4a^2 - 25b^2)}{a(2a - 5b)} = \frac{b(2a - 5b)(2a + 5b)}{a(2a - 5b)} = \frac{b(2a + 5b)}{a}.$$

$$10. \frac{42mn - 49n^2}{49n^2 - 84mn + 36m^2} = \frac{7n(6m - 7n)}{(7n - 6m)^2} = \frac{7n}{6m - 7n}.$$

$$11. \frac{8 - 27b^3}{4 - 12b + 9b^2} = \frac{2^3 - (3b)^3}{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3b + (3b)^2} = \frac{(2 - 3b)(2^2 + 2 \cdot 3b + (3b)^2)}{(2 - 3b)^2} =$$

$$= \frac{4 + 6b + 9b^2}{2 - 3b}.$$

$$12. \frac{3x^3y - 3x^2y^2 + 3xy^3}{12xy^4 + 12yx^4} = \frac{3xy(x^2 - xy + y^2)}{12xy(y^3 + x^3)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{4(y+x)(y^2 - xy + y^2)} = \frac{1}{4(y+x)}.$$

$$13. \frac{(x-3)^2-16}{x^2-49} = \frac{(x-3+4)(x-3-4)}{(x+7)(x-7)} = \frac{(x+1)(x-7)}{(x+7)(x-7)} = \frac{x+1}{x+7}.$$

$$14. \frac{(9a^2-6a+4)(3a+2)-9}{1+3a+9a^2} = \frac{(3a)^3+2^3-9}{1+3a+9a^2} = \frac{(3a)^3-1}{1+3a+9a^2} = \\ = \frac{(3a-1)(9a^2+3a+1)}{1+3a+9a^2} = 3a-1.$$

$$15. \frac{4x^2-12xy+9y^2}{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3} = \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)^3} = \frac{1}{2x-3y}.$$

II

Сократите дробь:

$$1. \frac{az+at-bz-bt}{az-at-bz+bt} = \frac{(az-bz)+(at-bt)}{(az-bz)-(at-bt)} = \frac{z(a-b)+t(a-b)}{z(a-b)-t(a-b)} = \\ = \frac{(a-b)(z+t)}{(a-b)(z-t)} = \frac{z+t}{z-t}.$$

$$2. \frac{xc-yc+xk-yk}{xc+yc+xk+yk} = \frac{(xc-yc)+(xk-yk)}{(xc+yc)+(xk+yk)} = \frac{c(x-y)+k(x-y)}{c(x+y)+k(x+y)} = \\ = \frac{(x-y)(c+k)}{(x+y)(c+k)} = \frac{x-y}{x+y}.$$

$$3. \frac{pb+pc+b^2+bc}{pb+px+b^2+bx} = \frac{(pb+pc)+(b^2+bc)}{(pb+px)+(b^2+bx)} = \frac{p(b+c)+b(b+c)}{p(b+x)+b(b+x)} = \\ = \frac{(b+c)(p+b)}{(b+x)(p+b)} = \frac{b+c}{b+x}.$$

$$4. \frac{x^2+ax-xy-ay}{x^2-xy-ax+ay} = \frac{(x^2+ax)-(xy+ay)}{(x^2-xy)-(ax-ay)} = \frac{x(x+a)-y(x+a)}{x(x-y)-a(x-y)} = \\ = \frac{(x+a)(x-y)}{(x-y)(x-a)} = \frac{x+a}{x-a}.$$

$$5. \frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz} = \frac{(x^2+y^2-2xy)-z^2}{(x^2+z^2+2xz)-y^2} = \frac{(x-y)^2-z^2}{(x+z)^2-y^2} = \\ = \frac{(x-y-z)(x-y+z)}{(x+z-y)(x+z+y)} = \frac{x-y-z}{x+z+y}.$$

6.
$$\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1} = \frac{a^2(a-1) - (a-1)}{(a^2-1)^2} = \frac{(a^2-1)(a-1)}{(a^2-1)^2} = \frac{a-1}{a^2-1} =$$

$$= \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a+1}.$$
7.
$$\frac{z - zy + x - xy}{z - z^2 + x - xz} = \frac{z(1-y) + x(1-y)}{z(1-z) + x(1-z)} = \frac{(1-y)(z+x)}{(1-z)(z+x)} = \frac{1-y}{1-z}.$$
8.
$$\frac{ab - b - ac + c}{a^3 - 3a^2 + 3a - 1} = \frac{(ab-b) - (ac-c)}{(a-1)^3} = \frac{b(a-1) - c(a-1)}{(a-1)^3} =$$

$$= \frac{(a-1)(b-c)}{(a-1)^3} = \frac{b-c}{(a-1)^2}.$$
9.
$$\frac{-15x^2 + 4yz - 10xz + 6xy}{15x^2 + 2yz - 5xz - 6xy} = \frac{(-15x^2 - 10xz) + (4yz + 6xy)}{(15x^2 - 5xz) - (6xy - 2yx)} =$$

$$= \frac{-5x(3x+2z) + 2y(2z+3x)}{5x(3x-z) - 2y(3x-z)} = \frac{(3x+2z)(2y-5x)}{(3x-z)(5x-2y)} =$$

$$= -\frac{3x+2z}{3x-z} = \frac{3x+2z}{z-3x}.$$
10.
$$\frac{9x^3 - 2bc^2 - xc^2 + 18x^2b}{3x^2 - 2bc - xc + 6xb} = \frac{(9x^3 - xc^2) + (18x^2b - 2bc^2)}{(3x^2 - xc) + (6xb - 2bc)} =$$

$$= \frac{x(9x^2 - c^2) + 2b(9x^2 - c^2)}{x(3x-c) + 2b(3x-c)} = \frac{(9x^2 - c^2)(x+2b)}{(3x-c)(x+2b)} =$$

$$= \frac{(3x+c)(3x-c)}{3x-c} = 3x+c.$$
11.
$$\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 6x + 9} = \frac{x^2 - 3x - 4x + 12}{(x-3)^2} = \frac{x(x-3) - 4(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{x-4}{x-3}.$$
12.
$$\frac{y^2 - 6y + 8}{y^2 - 3y + 2} = \frac{y^2 - 2y - 4y + 8}{y^2 - 2y - y + 2} = \frac{y(y-2) - 4(y-2)}{y(y-2) - (y-2)} = \frac{(y-2)(y-4)}{(y-2)(y-1)} =$$

$$= \frac{y-4}{y-1}.$$

Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

Известно правило, по которому складываются дроби

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Практикум 9

Сложите дроби:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{3x-2}{x-1} + \frac{4x+3}{x-1} = \\ & = \frac{3x-2+4x+3}{x-1} = \frac{7x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{3x}{x+2} + \frac{6}{x+2} = \\ & = \frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{a}{a-3} + \frac{a+1}{3-a} = \\ & = \frac{a}{a-3} - \frac{a+1}{a-3} = \frac{a-a-1}{a-3} = \frac{-1}{a-3} = \frac{1}{3-a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \frac{2x}{3x-9} - \frac{4x+1}{9-3x} + \frac{7-3x}{3x-9} = \\ & = \frac{2x}{3(x-3)} - \frac{4x+1}{3(3-x)} + \frac{7-3x}{3(x-3)} = \\ & = \frac{2x}{3(x-3)} + \frac{4x+1}{3(x-3)} + \frac{7-3x}{3(x-3)} = \quad (-(3-x) = x-3) \\ & = \frac{2x+4x+1+7-3x}{3(x-3)} = \frac{3x+8}{3(x-3)}. \end{aligned}$$

Тренировочная работа 8

Выполните действия:

1. $\frac{2a+4}{ab} - \frac{3a}{ab} + \frac{a+5}{ab}$.

2. $\frac{t}{t-1} + \frac{2}{1-t} + \frac{1}{t-1}$.

3. $\frac{m}{m-n} + \frac{3n}{n-m} + \frac{2m}{m-n}$.

4. $\frac{3a+2b}{2a-b} + \frac{4a-b}{2a-b} + \frac{a+4b}{b-2a}$.

5. $xy(x+y) - (x^2+y^2)(x-2y)$.

6. $(5c-7p)(7c+5p) - (7c-5p)(5c+7p)$.

7. $(x^3+2y)(x^2-2y) - (x^2+2y)(x^3-2y)$.

8. $(4a^2-6a+9)(2a+3)$.

9. $(9a^2+6a+4)(9a^2-6a+4)$.

10. $(2a^2+3a+1)^2$.

11. $(a^2-a+2)^3$.

Решение тренировочной работы 8

Выполните действия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{2a+4}{ab} - \frac{3a}{ab} + \frac{a+5}{ab} = \\ & = \frac{2a+4-3a+a+5}{ab} = \frac{9}{ab}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{t}{t-1} + \frac{2}{1-t} + \frac{1}{t-1} = \left(\frac{1}{1-t} = -\frac{1}{t-1} \right) \\ & = \frac{t}{t-1} - \frac{2}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{t-2+1}{t-1} = \frac{t-1}{t-1} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{m}{m-n} + \frac{3n}{n-m} + \frac{2m}{m-n} = \\ & = \frac{m}{m-n} - \frac{3n}{m-n} + \frac{2m}{m-n} = \frac{m-3n+2m}{m-n} = \frac{3m-3n}{m-n} = \frac{3(m-n)}{m-n} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \frac{3a+2b}{2a-b} + \frac{4a-b}{2a-b} + \frac{a+4b}{b-2a} = \\ & = \frac{3a+2b}{2a-b} + \frac{4a-b}{2a-b} - \frac{a+4b}{2a-b} = \\ & = \frac{3a+2b+4a-b-a-4b}{2a-b} = \frac{6a-3b}{2a-b} = \frac{3(2a-b)}{2a-b} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & xy(x+y) - (x^2+y^2)(x-2y) = \\ & = x^2y + xy^2 - (x^3 + y^2x - 2yx^2 - 2y^3) = \\ & = x^2y + xy^2 - x^3 - y^2x + 2yx^2 + 2y^3 = 2y^3 + 3yx^2 - x^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & (5c-7p)(7c+5p) - (7c-5p)(5c+7p) = \\ & = 35c^2 - 49pc + 25pc - 35p^2 - 35c^2 + 25pc - 49cp + 35p^2 = -48pc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad & (x^3+2y)(x^2-2y) - (x^2+2y)(x^3-2y) = \\ & = x^5 + 2yx^2 - 2yx^3 - 4y^2 - x^5 - 2yx^3 + 2yx^2 + 4y^2 = 4yx^2 - 4yx^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & (4a^2 - 6a + 9)(2a + 3) = \\
 & = 8a^3 - 12a^2 + 18a + 12a^2 - 18a + 27 = 8a^3 + 27.
 \end{aligned}$$

Можно умножить сразу, если помнить, что

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & (9a^2 + 6a + 4)(9a^2 - 6a + 4) = \\
 & = (9a^2 + 4 + 6a)(9a^2 + 4 - 6a) = \\
 & = (9a^2 + 4)^2 - (6a)^2 = 81a^4 + 72a^2 + 16 - 36a^2 = \\
 & = 81a^4 + 36a^2 + 16.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & (2a^2 + 3a + 1)^2 = ((2a^2 + 1) + 3a)^2 = \\
 & = (2a^2 + 1)^2 + 6a(2a^2 + 1) + 9a^2 = \\
 & 4a^4 + 4a + 1 + 12a^3 + 6a + 9a^2 = 4a^4 + 12a^3 + 13a^2 + 6a + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad & (a^2 - a + 2)^3 = \boxed{(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} \\
 & = ((a^2 + 2) - a)^3 = (a^2 + 2)^3 - 3(a^2 + 2)^2 a + 3(a^2 + 2)a^2 - a^3 = \\
 & = (a^2)^3 + 3(a^2)^2 \cdot 2 + 3a^2 \cdot 2^2 + 2^3 - \\
 & - 3a(a^4 + 4a^2 + 4) + 3a^4 + 6a^2 - a^3 = \\
 & = a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8 - 3a^5 - 12a^3 - 12a + 3a^4 + 6a^2 - a^3 = \\
 & = a^6 - 3a^5 + 9a^4 - 13a^3 + 18a^2 - 12a + 8.
 \end{aligned}$$

Умножение и деление дробей

Известно, что умножение и деление алгебраических дробей выполняются по тем же правилам, что и умножение и деление обыкновенных числовых дробей.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{p} = \frac{a \cdot c}{b \cdot p}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{p} = \frac{a \cdot p}{b \cdot c}.$$

Практикум 10

$$1. \frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^2}{5ab^2} = \frac{8 \cdot 36 \cdot a^2 \cdot b \cdot c^2}{9 \cdot 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot c} = \frac{32ac}{5b}.$$

$$2. \frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{y^2+xy}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)y(y+x)}{x(x+y)(x-y)^2} = \frac{y}{x(x-y)}.$$

Ясно, что для того чтобы наиболее рационально перемножить две дроби, необходимо **разложить** на множители числитель и знаменатель каждой дроби. В дальнейшем это поможет упростить получившуюся дробь.

$$3. \frac{46x^2c}{15a} : \frac{23xc^2}{5a^2} = \frac{46x^2c}{15a} \cdot \frac{5a^2}{23xc^2} = \frac{46 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot c \cdot a^2}{15 \cdot 23 \cdot a \cdot x \cdot c^2} = \frac{2xa}{3c}.$$

Очевидно, чтобы разделить дробь на дробь, необходимо умножить первую дробь на дробь, обратную второй дроби, предварительно разложив на множители числитель и знаменатель каждой дроби.

$$4. \frac{a+b}{9a^2b^3} : \frac{a^2-b^2}{27ab^2} = \frac{a+b}{9a^2b^3} \cdot \frac{27ab^2}{a^2-b^2} = \frac{a+b}{9a^2b^3} \cdot \frac{27ab^2}{(a+b)(a-b)} = \\ = \frac{(a+b) \cdot 27ab^2}{9a^2b^3(a+b)(a-b)} = \frac{3}{ab(a-b)}.$$

Тренировочная работа 9

Выполните действия:

1. $\frac{7b^4}{9c^5y} \cdot \frac{18c^4y^3}{35b^4c}$.

2. $\left(\frac{xy}{tz}\right)^2 \cdot \frac{xtz}{y^2}$.

3. $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1}$.

4. $\frac{3(a+b)}{4b^2(a^2+b^2)} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

5. $\frac{16t^2z}{7x} : \frac{10tz^3}{21x^2}$.

6. $\frac{xy+y^2}{9x^2} : \frac{y^2}{3x}$.

7. $\frac{x^2-y^2}{9y^2} : \frac{(x-y)^2}{27y^3}$.

8. $\frac{5a}{a^2-b^2} : \frac{25a^3}{(a-b)^2}$.

9. $\frac{2a}{2a-9} + \frac{24-a}{9-2a} - \frac{a+6}{9-2a}$.

10. $\frac{2(3x-1)}{2(3x-1)-9} + \frac{25-3x}{11-6x} - \frac{3x+5}{11-6x}$.

Решение тренировочной работы 9

Выполните действия:

1. $\frac{7b^4}{9c^5y} \cdot \frac{18c^4y^3}{35b^4c} = \frac{7b^4 \cdot 18c^4y^3}{9c^5y \cdot 35b^4c} = \frac{2y^2}{5c^2}$.
2. $\left(\frac{xy}{tz}\right)^2 \cdot \frac{xtz}{y^2} = \frac{x^2y^2}{t^2z^2} \cdot \frac{xtz}{y^2} = \frac{x^2y^2xtz}{t^2z^2y^2} = \frac{x^3}{tz}$.
3. $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1} = \frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{(a-1)(a+1)} = \frac{(a+1)4b^2}{b(a-1)(a+1)} = \frac{4b}{a-1}$.
4. $\frac{3(a+b)}{4b^2(a^2+b^2)} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{3(a+b)}{4b^2(a^2+b^2)} \cdot \frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)} =$
 $= \frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{4b^2(a^2+b^2)(a+b)(a-b)} = \frac{3}{4b^2(a-b)}$.
5. $\frac{16t^2z}{7x} : \frac{10tz^3}{21x^2} = \frac{16t^2z}{7x} \cdot \frac{21x^2}{10tz^3} = \frac{16t^2z \cdot 21x^2}{7x \cdot 10tz^3} = \frac{24tx}{5z^2}$.
6. $\frac{xy+y^2}{9x^2} : \frac{y^2}{3x} = \frac{y(x+y)}{9x^2} \cdot \frac{3x}{y^2} = \frac{y(x+y) \cdot 3x}{9x^2y^2} = \frac{x+y}{3xy}$.
7. $\frac{x^2-y^2}{9y^2} : \frac{(x-y)^2}{27y^3} = \frac{(x+y)(x-y)}{9y^2} \cdot \frac{27y^3}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)(x-y) \cdot 27y^3}{9y^2(x-y)^2} = \frac{3y(x+y)}{x-y}$.
8. $\frac{5a}{a^2-b^2} : \frac{25a^3}{(a-b)^2} = \frac{5a}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)^2}{25a^3} = \frac{5a(a-b)^2}{(a+b)(a-b)25a^3} = \frac{a-b}{5a^2(a+b)}$.
9. $\frac{2a}{2a-9} + \frac{24-a}{9-2a} - \frac{a+6}{9-2a} = \frac{-2a}{9-2a} + \frac{24-a}{9-2a} - \frac{a+6}{9-2a} =$
 $= \frac{-2a+24-a-a-6}{9-2a} = \frac{-4a+18}{9-2a} = 2$.
10. $\frac{2(3x-1)}{2(3x-1)-9} + \frac{25-3x}{11-6x} - \frac{3x+5}{11-6x} = \frac{2(3x-1)}{6x-2-9} - \frac{25-3x}{6x-11} + \frac{3x+5}{6x-11} =$
 $= \frac{6x-2-25+3x+3x+5}{6x-11} = \frac{12x-22}{6x-11} = 2$.

Тренировочная работа 10**I.**

Выполните действия и сократите получившуюся дробь:

$$1. \frac{8b^5c^6}{33x^4} \cdot \frac{55c^2x^5}{12b^4}.$$

$$2. \frac{-6m^3n^2}{35p^4} \cdot \frac{49n^4}{m^6p^3} \cdot \frac{5m^4p^7}{-42n^6}.$$

$$3. \frac{32a^8b^5}{45c^{10}} \cdot \frac{55a^2c^6}{24b^4} \cdot \frac{27c^4}{22a^9b}.$$

$$4. \frac{51a^6x^9}{56y^{11}} \cdot \frac{40xy^8}{9a^5} \cdot \frac{21y^3}{85ax^{10}}.$$

$$5. \frac{36x^3}{35y^2t^3} : \frac{54x}{49yt^5}.$$

$$6. \frac{15a^2z}{y^7} : (5az^3).$$

$$7. 11ab^3c : \frac{121a^3b^2c}{x^3y^2}.$$

$$8. \frac{3-a}{x+y} \cdot \frac{x-y}{3-a}.$$

$$9. \frac{x-y}{3b} : \frac{y-x}{6b^2}.$$

$$10. \frac{t+1}{x} \cdot \frac{4x^2}{t^2-1}.$$

II.

Выполните действия и сократите получившуюся дробь:

$$1. \frac{6y}{y^2-a^2} : \frac{18y^2}{a-y}.$$

$$2. \frac{25-y^2}{24xy} \cdot \frac{48x^3}{y^2-10y+25}.$$

$$3. \frac{27+y^3}{0,2x^4} \cdot \frac{0,4x^2}{y^2-3y+9}.$$

$$4. \frac{0,008-x^3}{5,6x^2} \cdot \frac{2,8x}{x^2+0,2x+0,04}.$$

$$5. \frac{2xy-3y-10x+15}{2xy-8y} \cdot \frac{x^2-16}{y^2-25}.$$

$$6. \frac{3ay+6y-5a-10}{7ay-14y} \cdot \frac{a^2-4}{9y^2-25}.$$

$$7. \frac{3t-9t^2}{t^2+9+6t} : \frac{1-9t^2}{t^2-9}.$$

$$8. \frac{8a+a^2+16}{15x^2+3x} : \frac{16-a^2}{25x^2-1}.$$

$$9. \frac{y^2+5y+4}{y^2+5y+6} : \frac{y^2-1}{y^2-9}.$$

$$10. \frac{6xy-5y+6x-5}{5y-5xy+2-2x} : \frac{1-y^2}{1-x^2}.$$

Решение тренировочной работы 10**I.**

Выполните действия и сократите получившуюся дробь:

$$1. \frac{8b^5c^6}{33x^4} \cdot \frac{55c^2x^5}{12b^4} = \frac{8 \cdot 55b^5c^6c^2x^5}{33 \cdot 12x^4b^4} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 11b^5c^8x^5}{3 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 4x^4b^4} = \frac{10}{9} c^8bx.$$

$$2. \frac{-6m^3n^2}{35p^4} \cdot \frac{49n^4}{m^6p^3} \cdot \frac{5m^4p^7}{-42n^6} = \frac{-6 \cdot 49 \cdot 5m^3m^4n^2n^4p^7}{35 \cdot (-42)m^6n^6p^7} = \\ = \frac{-6 \cdot 7^2 \cdot 5m^7n^6p^7}{5 \cdot 7 \cdot (-6) \cdot 7m^6n^6p^7} = m.$$

$$3. \frac{32a^8b^5}{45c^{10}} \cdot \frac{55a^2c^6}{24b^4} \cdot \frac{27c^4}{22a^9b} = \frac{32 \cdot 55 \cdot 27a^8a^2c^6c^4b^5}{45 \cdot 24 \cdot 22a^9b^4bc^{10}} = \\ = \frac{2^5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 3^3 a^{10} c^{10} b^5}{5 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 11 a^9 b^5 c^{10}} = 2a.$$

$$4. \frac{51a^6x^9}{56y^{11}} \cdot \frac{40xy^8}{9a^5} \cdot \frac{21y^3}{85ax^{10}} = \frac{51 \cdot 40 \cdot 21a^6x^9xy^8y^3}{56 \cdot 9 \cdot 85y^{11}a^5ax^{10}} = \\ = \frac{3 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 7a^6x^{10}y^{11}}{7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 5y^{11}a^6x^{10}} = 1.$$

$$5. \frac{36x^3}{35y^2t^3} : \frac{54x}{49yt^5} = \frac{36x^3}{35y^2t^3} \cdot \frac{49yt^5}{54x} = \frac{36 \cdot 49x^3yt^5}{35 \cdot 54y^2t^3x} = \\ = \frac{6^2 \cdot 7^2 x^2 t^2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 6y} = \frac{6 \cdot 7 x^2 t^2}{5 \cdot 9y} = \frac{14x^2 t^2}{15y}.$$

$$6. \frac{15a^2z}{y^7} : (5az^3) = \frac{15a^2z}{y^7} \cdot \frac{1}{5az^3} = \frac{15a^2z}{5y^7az^3} = \frac{3a}{y^7z^2}.$$

$$7. 11ab^3c : \frac{121a^3b^2c}{x^3y^2} = 11ab^3c \cdot \frac{x^3y^2}{121a^3b^2c} = \frac{11ab^3cx^3y^2}{121a^3b^2c} = \frac{x^3by^2}{11a^2}.$$

$$8. \frac{3-a}{x+y} \cdot \frac{x-y}{3-a} = \frac{(3-a)(x-y)}{(x+y)(3-a)} = \frac{x-y}{x+y}.$$

$$9. \frac{x-y}{3b} : \frac{y-x}{6b^2} = \frac{(x-y)6b^2}{3b(y-x)} = -2b.$$

$$10. \frac{t+1}{x} \cdot \frac{4x^2}{t^2-1} = \frac{4x^2(t+1)}{x(t+1)(t-1)} = \frac{4x}{t-1}.$$

II.

Выполните действия и сократите получившуюся дробь:

$$1. \frac{6y}{y^2-a^2} : \frac{18y^2}{a-y} = \frac{6y}{y^2-a^2} \cdot \frac{a-y}{18y^2} = \frac{6y(a-y)}{(y+a)(y-a)18y^2} = -\frac{1}{3y(y+a)}.$$

$$2. \frac{25-y^2}{24xy} \cdot \frac{48x^3}{y^2-10y+25} = \frac{(5+y)(5-y)48x^3}{24xy(y-5)^2} = \frac{2x^2(5+y)(5-y)}{y(5-y)^2} = \\ = \frac{2x^2(5+y)}{y(5-y)}.$$

$$3. \frac{27+y^3}{0,2x^4} \cdot \frac{0,4x^2}{y^2-3y+9} = \frac{(3+y)(9-3y+y^2) \cdot 0,4x^2}{0,2x^4(y^2-3y+y^2)} = \frac{2(3+y)}{x^2}.$$

$$4. \frac{0,008-x^3}{5,6x^2} \cdot \frac{2,8x}{x^2+0,2x+0,04} = \frac{(0,2-x)(0,04+0,2x+x^2) \cdot 2,8x}{5,6x^2(x^2+0,2x+0,04)} = \\ = \frac{0,2-x}{2x}.$$

$$5. \frac{2xy-3y-10x+15}{2xy-8y} \cdot \frac{x^2-16}{y^2-25} = \frac{2xy-10x-(3y-15)}{2y(x-4)} \cdot \frac{(x+4)(x-4)}{(y+5)(y-5)} = \\ = \frac{(2x(y-5)-3(y-5))(x+4)(x-4)}{2y(x-4)(y+5)(y-5)} = \frac{(y-5)(2x-3)(x+4)}{2y(y+5)(y-5)} = \\ = \frac{(2x-3)(x+4)}{2y(y+5)}.$$

$$6. \frac{3ay+6y-5a-10}{7ay-14y} \cdot \frac{a^2-4}{9y^2-25} = \frac{(3ay+6y)-(5a+10)}{7y(a-2)} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{(3y-5)(3y+5)} = \\ = \frac{(3y(a+2)-5(a+2))(a+2)(a-2)}{7y(a-2)(3y-5)(3y+5)} = \frac{(3y-5)(a+2)(a+2)}{7y(3y-5)(3y+5)} = \\ = \frac{(a+2)^2}{7y(3y+5)}.$$

7. $\frac{3t-9t^2}{t^2+9+6t} : \frac{1-9t^2}{t^2-9} = \frac{3t(1-3t)}{(t+3)^2} \cdot \frac{(t+3)(t-3)}{(1-3t)(1+3t)} =$
 $= \frac{3t(1-3t)(t+3)(t-3)}{(t+3)^2(1-3t)(1+3t)} = \frac{3t(t-3)}{(t+3)(1+3t)}.$
8. $\frac{8a+a^2+16}{15x^2+3x} : \frac{16-a^2}{25x^2-1} = \frac{(a+4)^2}{3x(5x+1)} \cdot \frac{(5x+1)(5x-1)}{(4+a)(4-a)} = \frac{(a+4)(5x-1)}{3x(4-a)}.$
9. $\frac{y^2+5y+4}{y^2+5y+6} : \frac{y^2-1}{y^2-9} = \frac{y(y+1)+4(y+1)}{y(y+3)+2(y+3)} \cdot \frac{(y+3)(y-3)}{(y+1)(y-1)} =$
 $= \frac{(y+1)(y+4)(y+3)(y-3)}{(y+3)(y+2)(y+1)(y-1)} = \frac{(y+4)(y-3)}{(y+2)(y-1)}.$
10. $\frac{6xy-5y+6x-5}{5y-5xy+2-2x} : \frac{1-y^2}{1-x^2} = \frac{y(6x-5)+(6x-5)}{5y(1-x)+2(1-x)} \cdot \frac{1-x^2}{1-y^2} =$
 $= \frac{(6x-5)(y+1)(1+x)(1-x)}{(1-x)(5y+2)(1-y)(1+y)} = \frac{(6x-5)(1+x)}{(5y+2)(1-y)}.$

Сложение дробей с различными знаменателями

Известно, что для того чтобы сложить алгебраические дроби с различными знаменателями, необходимо:

1. Вначале разложить на множители знаменатели каждой из дробей.
2. Затем осуществить поиск и нахождение наименьшего общего знаменателя для этих дробей.
3. И только после этого найти дополнительный множитель для каждой из этих дробей.

Примечания:

а) *Наименьшим общим знаменателем* называется такое алгебраическое выражение, которое является наименьшим из тех, что нацело делятся на знаменатель каждой дроби.

б) Дополнительный множитель для каждой из дробей определяется как результат деления наименьшего общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Простейшие случаи сложения дробей с различными знаменателями:

$$1. \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{a^{\lfloor n \rfloor}}{b} + \frac{m^{\lfloor b \rfloor}}{n} = \frac{an + bm}{bn}.$$

$$2. \frac{a}{bc} + \frac{k}{cn} = \frac{a^{\lfloor n \rfloor}}{bc} + \frac{k^{\lfloor b \rfloor}}{cn} = \frac{an + kb}{bcn}.$$

$$3. \frac{a}{bk} + \frac{n}{bt} + m = \frac{a^{\lfloor t \rfloor}}{bk} + \frac{n^{\lfloor k \rfloor}}{bt} + m^{\lfloor bkt \rfloor} = \frac{at + kn + mbkt}{bkt}.$$

Дополнительные множители над числителями слагаемых дробей можно не писать, если вы понимаете, о чем идет речь.

Практикум 11

Выполните действия:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{a-2}{2a} + \frac{2a+1}{3a} = \\ & = \frac{3(a-2) + 2(2a+1)}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{3a-6+4a+2}{6a} = \frac{7a-4}{6a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \frac{1}{a^2+ab} + \frac{1}{ab+b^2} = \\ & = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{b+a}{ab(a+b)} = \frac{1}{ab}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{4}{3(x-y)} + \frac{5}{2(y-x)} = \\ & = \frac{4}{3(x-y)} - \frac{5}{2(x-y)} = \frac{4 \cdot 2 - 5 \cdot 3}{3 \cdot 2(x-y)} = \frac{-7}{6(x-y)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \frac{2x}{ab+b} + \frac{3y}{ac+c} = \\ & = \frac{2x}{b(a+1)} + \frac{3y}{c(a+1)} = \frac{2x \cdot c + 3y \cdot b}{b \cdot c(a+1)} = \frac{2xc + 3yb}{bc(a+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & \frac{x-2y}{xy^2} - \frac{2x-y}{x^2y} = \\ & = \frac{x(x-2y) - y(2x-y)}{x^2y^2} = \frac{x^2-2xy-2xy+y^2}{x^2y^2} = \frac{x^2-4xy+y^2}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad & \frac{1}{a^2-ab} - \frac{1}{ab-b^2} + \frac{2}{ab} = \\ & = \frac{1}{a(a-b)} - \frac{1}{b(a-b)} + \frac{2}{ab} = \\ & = \frac{b-a+2a-2b}{ab(a-b)} = \frac{a-b}{ab(a-b)} = \frac{2}{ab}. \end{aligned}$$

Тренировочная работа 11

Выполните действия:

1. $\frac{5x+1}{5x-20} + \frac{x+17}{20-5x}$.

2. $\frac{x-y}{xy} - \frac{x-z}{xz}$.

3. $x + \frac{1}{y}$.

4. $(m-n) + \frac{n^2}{m+n}$.

5. $\frac{x^2-3xy}{(x+y)(x-y)} + \frac{y}{x+y}$.

6. $\frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a}$.

7. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y-2} + \frac{12}{y^2-4}$.

8. $\frac{b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{b^2-ab}$.

9. $\frac{2a+b}{2a^2-ab} - \frac{16a}{4a^2-b^2} + \frac{2a-b}{2a^2+ab}$.

10. $\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{a^2-9} + \frac{1}{(a+3)^2}$.

Решение тренировочной работы 11

Выполните действия:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{5x+1}{5x-20} + \frac{x+17}{20-5x} = \\
 & = \frac{5x+1}{5x-20} - \frac{x+17}{5x-20} = \frac{5x+1-x-17}{5x-20} = \frac{4x-16}{5x-20} = \frac{4(x-4)}{5(x-4)} = 0,8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{x-y}{xy} - \frac{x-z}{xz} = \\
 & = \frac{z(x-y) - y(x-z)}{xyz} = \frac{zx - zy - yx + yz}{xyz} = \\
 & = \frac{zx - yx}{xyz} = \frac{x(z-y)}{xyz} = \frac{z-y}{yz} \quad (x \neq 0).
 \end{aligned}$$

$$3. \quad x + \frac{1}{y} = \frac{xy}{y} + \frac{1}{y} = \frac{xy+1}{y}.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & (m-n) + \frac{n^2}{m+n} = \\
 & = \frac{(m-n)(m+n)}{m+n} + \frac{n^2}{m+n} = \\
 & = \frac{m^2 - n^2 + n^2}{m+n} = \frac{m^2}{m+n}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \frac{x^2 - 3xy}{(x+y)(x-y)} + \frac{y}{x+y} = \\
 & = \frac{x^2 - 3xy + y(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - 3xy + xy - y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x+y)(x-y)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a} = \\
 & = \frac{a+3}{(a+1)(a-1)} - \frac{1}{a(a+1)} = \frac{a(a+3) - (a-1)}{(a+1)(a-1)a} = \frac{a^2+3a-a+1}{(a+1)(a-1)a} = \\
 & = \frac{a^2+2a+1}{(a+1)(a-1)a} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)a} = \frac{(a+1)}{a(a-1)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \frac{4}{y+2} - \frac{3}{y-2} + \frac{12}{y^2-4} = \\
 & = \frac{4}{y+2} - \frac{3}{y-2} + \frac{12}{(y+2)(y-2)} = \frac{4(y-2) - 3(y+2) + 12}{(y+2)(y-2)} = \frac{4y-8-3y-6+12}{(y+2)(y-2)} = \\
 & = \frac{y-2}{(y+2)(y-2)} = \frac{1}{y+2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \frac{b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{b^2-ab} = \\
 & = \frac{b}{(a-b)^2} - \frac{a+b}{b(b-a)} = \frac{b}{(a-b)^2} + \frac{a+b}{b(a-b)} = \\
 & = \frac{b^2 + (a+b)(a-b)}{(a-b)^2 b} = \frac{b^2 + a^2 - b^2}{(a-b)^2 b} = \frac{a^2}{(a-b)^2 b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \frac{2a+b}{2a^2-ab} - \frac{16a}{4a^2-b^2} + \frac{2a-b}{2a^2+ab} = \\
 & = \frac{2a+b}{a(2a-b)} - \frac{16a}{(2a+b)(2a-b)} + \frac{2a-b}{a(2a+b)} = \\
 & = \frac{(2a+b)(2a+b) - 16a \cdot a + (2a-b)(2a-b)}{a(2a+b)(2a-b)} = \\
 & = \frac{4a^2 + 4ab + b^2 - 16a^2 + 4a^2 - 4ab + b^2}{a(2a+b)(2a-b)} = \frac{2b^2 - 8a^2}{a(2a+b)(2a-b)} = \\
 & = \frac{2(b^2 - 4a^2)}{a(2a+b)(2a-b)} = \frac{2(b-2a)(b+2a)}{a(2a+b)(2a-b)} = \frac{2(b-2a)}{a(2a-b)} = -\frac{2}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{a^2-9} + \frac{1}{(a+3)^2} = \\
 & = \frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{(a-3)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)^2} = \\
 & = \frac{(a+3)^2 - 2(a-3)(a+3) + (a-3)^2}{(a-3)^2(a+3)^2} = \frac{((a-3) - (a+3))^2}{(a-3)^2(a+3)^2} = \frac{36}{(a-3)^2(a+3)^2}.
 \end{aligned}$$

Обобщающая тренировочная работа 12

Выполните действия:

1. Сложите дроби:

1) $\frac{x}{9y} + \frac{x^2}{6y^2};$

3) $\frac{5-2a}{4a+2} + \frac{2a^2+7a-1}{4a^2-1};$

2) $\frac{3a}{16-4a} + \frac{3}{a-4};$

4) $\frac{1}{2x^2+5x} - \frac{4}{4x^2-25} - \frac{2}{25-10x}.$

2. Умножьте или разделите дроби:

1) $\frac{-15c}{4x^2y^2} : \left(-\frac{54c^3}{6y^2} \right);$

3) $\frac{2a^2-8}{a^3-8} : \frac{a^2+4a+4}{3a^2+6a+12};$

2) $\frac{4x+12y}{15x^2} \cdot \frac{5x^3}{6x+18y};$

4) $\frac{2x^3-2y^3}{4x^2-1} : \frac{2x^2+2xy+2y^2}{6x+3} \cdot (1-2x).$

3. Разложите на множители наиболее рациональным способом:

1) $8ax^2 - 18ay^2;$

4) $27x^3 + 3x^2 + 2x + 8;$

2) $32x^3 + 4y^6;$

5) $4y^2+4y^3+12xy^2-9x^2+9x^2y;$

3) $18x^5 - 12x^3y + 2xy^2;$

6) $(2c-1)^3 - 64(2c+1)^3.$

4. Сократите дроби:

1) $\frac{9x^2-12x+4}{9x^2-4};$

4) $\frac{xy-y-xz+z}{x^3-3x^2+3x-1};$

2) $\frac{3ax-ay+3bx-by}{ax-3ay+bx-3by};$

5) $\frac{a^3-2a^2+4a-3}{a^2-7a+6};$

3) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4};$

6) $\frac{x+y+x^2-y^2}{x-y+x^2-2xy+y^2}.$

Решение обобщающей тренировочной работы 12

Выполните действия:

1. Сложите дроби:

$$1) \frac{x}{9y} + \frac{x^2}{6y^2} = \frac{2y \cdot x + 3x^2}{18y^2} = \frac{2xy + 3x^2}{18y^2}.$$

$$2) \frac{3a}{16-4a} + \frac{3}{a-4} = \\ = \frac{3a}{4(4-a)} + \frac{3}{a-4} = \frac{3a}{4(4-a)} - \frac{3}{4-a} = \frac{3a-12}{4(4-a)} = \frac{3(a-4)}{4(4-a)} = -\frac{3}{4}.$$

$$3) \frac{5-2a}{4a+2} + \frac{2a^2+7a-1}{4a^2-1} = \\ = \frac{5-2a}{2(2a+1)} + \frac{2a^2+7a-1}{(2a+1)(2a-1)} = \frac{(5-2a)(2a-1) + 2(2a^2+7a-1)}{2(2a+1)(2a-1)} = \\ = \frac{10a - 4a^2 - 5 + 2a + 4a^2 + 14a - 2}{2(2a+1)(2a-1)} = \frac{26a-7}{2(2a+1)(2a-1)}.$$

$$4) \frac{1}{2x^2+5x} - \frac{4}{4x^2-25} - \frac{2}{25-10x} = \frac{1}{x(2x+5)} - \frac{4}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{2}{5(5-2x)} = \\ = \frac{1}{x(2x+5)} - \frac{4}{(2x-5)(2x+5)} + \frac{2}{5(2x-5)} = \\ = \frac{5(2x-5) - 4 \cdot 5x + 2(2x+5)x}{5x(2x-5)(2x+5)} = \frac{10x - 25 - 20x + 4x^2 + 10x}{5x(2x-5)(2x+5)} = \\ = \frac{4x^2 - 25}{5x(2x-5)(2x+5)} = \frac{(2x-5)(2x+5)}{5x(2x-5)(2x+5)} = \frac{1}{5x}.$$

2. Умножьте или разделите дроби:

$$1) \frac{-15c}{4x^2y^2} : \left(-\frac{54c^3}{6y^2} \right) = \frac{-15c}{4x^2y^2} \cdot \frac{-6y^2}{54c^3} = \frac{15c \cdot 6y^2}{4x^2y^2 \cdot 54c^3} = \frac{5}{12x^2c^2}.$$

$$2) \frac{4x+12y}{15x^2} \cdot \frac{5x^3}{6x+18y} = \frac{4(x+3y)}{15x^2} \cdot \frac{5x^3}{6(x+3y)} = \frac{4(x+3y) \cdot 5x^3}{15x^2 \cdot 6(x+3y)} = \frac{2x}{9}.$$

$$3) \frac{2a^2 - 8}{a^3 - 8} : \frac{a^2 + 4a + 4}{3a^2 + 6a + 12} =$$

$$= \frac{2(a^2 - 4)}{(a-2)(a^2 + 2a + 4)} \cdot \frac{3(a^2 + 2a + 4)}{(a+2)^2} = \frac{2(a-2)(a+2) \cdot 3(a^2 + 2a + 4)}{(a-2)(a^2 + 2a + 4)(a+2)^2} = \frac{6}{a+2}.$$

$$4) \frac{2x^3 - 2y^3}{4x^2 - 1} : \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{6x + 3} \cdot (1 - 2x) =$$

$$= \frac{2(x^3 - y^3)}{(2x+1)(2x-1)} \cdot \frac{3(2x+1)}{2(x^2 + xy + y^2)} \cdot (1 - 2x) =$$

$$= \frac{2(x-y)(x^2 + xy + y^2) \cdot 3(2x+1)(1-2x)}{(2x+1)(2x-1) \cdot 2(x^2 + xy + y^2)} = \frac{-3(x-y)(2x-1)}{(2x-1)} =$$

$$= -3(x-y) = 3(y-x).$$

3. Разложите на множители наиболее рациональным способом:

$$1) 8ax^2 - 18ay^2 = 2a(4x^2 - 9y^2) = 2a(2x+3y)(2x-3y).$$

$$2) 32x^3 + 4y^6 = 4(8x^3 + (y^2)^3) = 4(2x+y^2)(4x^2 - 2xy^2 + y^4).$$

$$3) 18x^5 - 12x^3y + 2xy^2 = 2x(9x^4 - 6x^2y + y^2) = 2x(3x^2 - y)^2.$$

$$4) 27x^3 + 3x^2 + 2x + 8 = (27x^3 + 8) + (3x^2 + 2x) =$$

$$= (3x+2)(9x^2 - 6x + 4) + x(3x+2) = (3x+2)(9x^2 - 5x + 4).$$

$$5) 4y^2 + 4y^3 + 12xy^2 - 9x^2 + 9x^2y =$$

$$= (4y^2 - 9x^2) + (4y^3 + 12xy^2 + 9x^2y) =$$

$$= (2y - 3x)(2y + 3x) + y(4y^2 + 12xy + 9x^2) =$$

$$= (2y - 3x)(2y + 3x) + y(2y + 3x)^2 =$$

$$= (2y + 3x)(2y - 3x + y(2y + 3x)) =$$

$$= (2y + 3x)(2y - 3x + 2y^2 + 3xy).$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & (2c-1)^3 - 64(2c+1)^3 = (2c-1)^3 - (4(2c+1))^3 = \\
 & = (2c-1-4(2c+1)) \cdot \left((2c-1)^2 + 4(2c-1)(2c+1) + (4(2c+1))^2 \right) = \\
 & = (2c-1-8c-4) \left(4c^2 - 4c + 1 + 16c^2 - 4 + 4^2(4c^2 + 4c + 1) \right) = \\
 & = (-6c-5) \left(4c^2 - 4c + 1 + 16c^2 - 4 + 64c^2 + 64c + 16 \right) = \\
 & = (-6c-5) \left(84c^2 + 60c + 13 \right).
 \end{aligned}$$

4. Сократите дроби:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{9x^2 - 12x + 4}{9x^2 - 4} = \frac{(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2}{(3x)^2 - 2^2} = \frac{(3x-2)^2}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{3x-2}{3x+2}. \\
 2) \quad & \frac{3ax - ay + 3bx - by}{ax - 3ay + bx - 3by} = \\
 & = \frac{(3ax-ay)+(3bx-by)}{(ax-3ay)+(bx-3by)} = \frac{a(3x-y)+b(3x-y)}{a(x-3y)+b(x-3y)} = \frac{(3x-y)(a+b)}{(x-3y)(a+b)} = \frac{3x-y}{x-3y}. \\
 3) \quad & \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \\
 & = \frac{x^2 + 2x + 3x + 6}{x^2 + 2 \cdot 2x + 4} = \frac{x(x+2) + 3(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{x+2}. \\
 4) \quad & \frac{xy - y - xz + z}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{y(x-1) - z(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(y-z)}{(x-1)^3} = \frac{y-z}{(x-1)^2}. \\
 5) \quad & \frac{a^3 - 2a^2 + 4a - 3}{a^2 - 7a + 6} = \frac{a^3 - 2a^2 + 4a - 2 - 1}{a^2 - a - 6a + 6} = \frac{(a^3 - 1) - 2(a^2 - 2a + 1)}{a(a-1) - 6(a-1)} = \\
 & = \frac{(a-1)(a^2 + a + 1) - 2(a-1)^2}{(a-1)(a-6)} = \frac{(a-1)(a^2 + a + 1 - 2(a-1))}{(a-1)(a-6)} = \frac{a^2 - a + 3}{a-6}. \\
 6) \quad & \frac{x + y + x^2 - y^2}{x - y + x^2 - 2xy + y^2} = \\
 & = \frac{(x+y) + (x+y)(x-y)}{(x-y) + (x-y)^2} = \frac{(x+y)(1+x-y)}{(x-y)(1+x-y)} = \frac{x+y}{x-y}.
 \end{aligned}$$

Проверочная работа 3

Выполните действия.

1. Сложите дроби:

1) $\frac{x^2}{9y^2} - \frac{x}{12y}$;

3) $\frac{5a-12}{5a-5} - \frac{a^2-4a+3}{a^2-2a+1}$;

2) $\frac{4}{6-a} + \frac{2a}{3a-18}$;

4) $\frac{1}{x^2+3xy} + \frac{2}{9y^2-x^2} + \frac{1}{2x-6y}$.

2. Умножьте или разделите дроби:

1) $\frac{20a}{9b^2y^2} : \frac{-15a^2b}{27y^3}$;

3) $\frac{5+5x}{4-x^2} \cdot \frac{4-4x+x^2}{1+x^3}$;

2) $\frac{5x-10y}{4y^4} : \frac{3x-6y}{6y^3}$;

4) $\frac{5x^2+5xy+5y^2}{6x-3y} : \frac{15x^3-15y^3}{3y^2-12x^2} \cdot (6x-6y)$.

3. Разложите на множители наиболее рациональным способом:

1) $5 - 20y^2$;

4) $a^3 - 4a^2 + 20a - 125$;

2) $64a^3b + b^4$;

5) $(p-2)^3 + 27p^3$;

3) $18a^4x + 12a^2x + 2x$; 6) $16z^2 - 16z^3 + 24z^2y - 9zy^2 - 9y^2$.

4. Сократите дроби:

1) $\frac{25x^2-60x+36}{25x^2-36}$;

4) $\frac{ab+b+az+z}{a^3+3a^2+3a+1}$;

2) $\frac{3yz+yb+3xz+xb}{yz+3yb+xz+3xb}$;

5) $\frac{x^3+2x^2+4x+3}{x^2+7x+6}$;

3) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$;

6) $\frac{x-y+x^2-y^2}{x+y+x^2+2xy+y^2}$.

Тренировочная работа 13

1. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(y^2 + 4)^2 - 16y^2$; 5) $64x^3 - 125y^3$;

2) $(3x - 4)^2 - (5x + 6)^2$; 6) $a^6 + 27b^3$;

3) $64a^2 - 9x^2 + 6x - 1$; 7) $x^2 - 6x - 7$;

4) $25 - m^2 - 8mn - 16n^2$; 8) $a^6 + 1 + 3a^2 + 3a^4$.

2. Сократите дроби:

1) $\frac{16a - 4b}{12a - 3b}$; 5) $\frac{3a^4 - 3a^2b^2}{15(a^2 - b^2)}$;

2) $\frac{4x^5y - 12x^3y}{2x^5y^2 - 6x^3y^2}$; 6) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{1 - x^4}$;

3) $\frac{6x^2 - 24xy + 24y^2}{4y^2 - x^2}$; 7) $\frac{15a^3b + 15ab^3}{a^4 - b^4}$;

4) $\frac{(2x^2 + 4x)^2}{(4x + 8)^2}$; 8) $\frac{x^2 - y^2}{3x - 2x^2 + 3y - 2xy}$.

3. Выполните действия:

1) $\frac{b^2 + 1}{b^2(b - 1)} - \frac{2}{b(b - 1)}$; 5) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} + \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$;

2) $\frac{4}{x^2 - 25} - \frac{2}{x + 5} - \frac{x + 2}{5 - x}$; 6) $\frac{2}{y^2 - 4y + 3} - \frac{1}{y^2 - 5y + 4}$;

3) $\frac{5 - 3x}{64 - x^2} - \frac{2 - x}{x^2 - 16x + 64}$; 7) $\frac{4 - x}{25 - 10x + x^2} - \frac{3}{x^2 + 10x + 25} - \frac{x + 4}{25 - x^2}$;

4) $\frac{a + 1}{25 - a^2} - \frac{4}{a + 5} + 2$; 8) $\frac{3 - a}{6 - 5a + a^2} + \frac{a - 4}{6a - a^2 - 8}$.

Решение тренировочной работы 13**1. Разложите на множители:**

$$\begin{aligned} 1) (y^2 + 4)^2 - 16y^2 &= \\ &= (y^2 + 4)^2 - (4y)^2 = (y^2 + 4 - 4y)(y^2 + 4 + 4y) = (y - 2)^2(y + 2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (3x - 4)^2 - (5x + 6)^2 &= \\ &= (3x - 4 + 5x + 6)(3x - 4 - 5x - 6) = \\ &= (8x + 2)(-2x - 10) = -4(4x + 1)(x + 5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) 64a^2 - 9x^2 + 6x - 1 &= (8a)^2 - (9x^2 - 6x + 1) = \\ &= (8a)^2 - (3x - 1)^2 = (8a - 3x + 1)(8a + 3x - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) 25 - m^2 - 8mn - 16n^2 &= \\ &= 5^2 - (m^2 + 8mn + 16n^2) = 5^2 - (m + 4n)^2 = (5 + m + 4n)(5 - m - 4n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) 64x^3 - 125y^3 &= \\ &= (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) a^6 + 27b^3 &= \\ &= (a^2)^3 + (3b)^3 = (a^2 + 3b)(a^4 - 3a^2b + 9b^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) x^2 - 6x - 7 &= x^2 - 7x + x - 7 = x(x - 7) + (x - 7) = \\ &= (x - 7)(x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) a^6 + 1 + 3a^2 + 3a^4 &= \\ &= (a^2)^3 + 3 \cdot (a^2)^2 + 3 \cdot (a^2) + 1^3 = (a^2 + 1)^3. \end{aligned}$$

2. Сократите дроби:

$$1) \frac{16a - 4b}{12a - 3b} = \frac{4(4a - b)}{3(4a - b)} = \frac{4}{3}.$$

$$2) \frac{4x^5y - 12x^3y}{2x^5y^2 - 6x^3y^2} = \frac{4x^3y(x^2 - 3)}{2x^3y^2(x^2 - 3)} = \frac{2}{y}.$$

$$3) \frac{6x^2 - 24xy + 24y^2}{4y^2 - x^2} = \frac{6(x^2 - 4xy + 4y^2)}{(2y - x)(2y + x)} = \frac{6(x - 2y)^2}{(2y - x)(2y + x)} = \\ = \frac{6(2y - x)^2}{(2y - x)(2y + x)} = \frac{6(2y - x)}{2y + x}.$$

$$4) \frac{(2x^2 + 4x)^2}{(4x + 8)^2} = \frac{(2x(x + 2))^2}{(4(x + 2))^2} = \frac{4x^2(x + 2)^2}{16(x + 2)^2} = \frac{x^2}{4}.$$

$$5) \frac{3a^4 - 3a^2b^2}{15(a^2 - b^2)} = \frac{3a^2(a^2 - b^2)}{15(a^2 - b^2)} = \frac{a^2}{5}.$$

$$6) \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{1 - x^4} = \frac{(x^2 - 1)^2}{(1 - x^2)(1 + x^2)} = \frac{(1 - x^2)^2}{(1 - x^2)(1 + x^2)} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

$$7) \frac{15a^3b + 15ab^3}{a^4 - b^4} = \frac{15ab(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)} = \frac{15ab}{a^2 - b^2}.$$

$$8) \frac{x^2 - y^2}{3x - 2x^2 + 3y - 2xy} = \frac{(x + y)(x - y)}{x(3 - 2x) + y(3 - 2x)} = \frac{(x + y)(x - y)}{(3 - 2x)(x + y)} = \frac{x - y}{3 - 2x}.$$

3. Выполните действия:

$$1) \frac{b^2 + 1}{b^2(b - 1)} - \frac{2}{b(b - 1)} = \frac{b^2 + 1 - 2b}{b^2(b - 1)} = \frac{(b - 1)^2}{b^2(b - 1)} = \frac{b - 1}{b^2}.$$

$$2) \frac{4}{x^2 - 25} - \frac{2}{x + 5} - \frac{x + 2}{5 - x} = \frac{4}{(x - 5)(x + 5)} - \frac{2}{x + 5} + \frac{x + 2}{x - 5} = \\ = \frac{4 - 2(x - 5) + (x + 2)(x + 5)}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{4 - 2x + 10 + x^2 + 2x + 5x + 10}{(x - 5)(x + 5)} = \frac{x^2 + 5x + 24}{(x - 5)(x + 5)}.$$

$$3) \frac{5 - 3x}{64 - x^2} - \frac{2 - x}{x^2 - 16x + 64} = \frac{5 - 3x}{(8 - x)(8 + x)} - \frac{2 - x}{(8 - x)^2} = \frac{(5 - 3x)(8 - x) - (2 - x)(8 + x)}{(8 - x)^2(8 + x)} = \\ = \frac{40 - 24x - 5x + 3x^2 - 2x + x^2 + 8x - 16}{(x - 8)^2(x + 8)} = \frac{4x^2 - 23x + 24}{(x - 8)^2(x + 8)}.$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{a+1}{25-a^2} - \frac{4}{a+5} + 2 &= \frac{a+1}{(5-a)(5+a)} - \frac{4}{a+5} + 2 = \\
 &= \frac{a+1-4(5-a)+2(5-a)(5+a)}{(5-a)(5+a)} = \frac{a+1-20+4a+50-2a^2}{(5-a)(5+a)} = \frac{-2a^2+5a+31}{(5-a)(5+a)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{x^2-5x+4}{x-1} + \frac{x^2+4x+3}{x+1} &= \frac{x^2-x-4x+4}{x-1} + \frac{x^2+x+3x+3}{x+1} = \\
 &= \frac{x(x-1)-4(x-1)}{x-1} + \frac{x(x+1)+3(x+1)}{x+1} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)} + \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)} = \\
 &= x-4+x+3 = 2x-1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \frac{2}{y^2-4y+3} - \frac{1}{y^2-5y+4} &= \frac{2}{y^2-y-3y+3} - \frac{1}{y^2-y-4y+4} = \\
 &= \frac{2}{y(y-1)-3(y-1)} - \frac{1}{y(y-1)-4(y-1)} = \frac{2}{(y-1)(y-3)} - \frac{1}{(y-1)(y-4)} = \\
 &= \frac{2(y-4)-(y-3)}{(y-1)(y-3)(y-4)} = \frac{2y-8-y+3}{(y-1)(y-3)(y-4)} = \frac{y-5}{(y-1)(y-3)(y-4)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \frac{4-x}{25-10x+x^2} - \frac{3}{x^2+10x+25} - \frac{x+4}{25-x^2} &= \\
 &= \frac{4-x}{(5-x)^2} - \frac{3}{(x+5)^2} - \frac{x+4}{(5+x)(5-x)} = \\
 &= \frac{(4-x)(5+x)^2 - 3(x-5)^2 - (x+4)(5+x)(5-x)}{(5-x)^2(5+x)^2} = \\
 &= \frac{100-25x+40x-10x^2+4x^2-x^3-3x^2+30x-75-25x-100+x^3+4x^2}{(5-x)^2(5+x)^2} = \\
 &= \frac{-5x^2+20x-75}{(5-x)^2(5+x)^2} = \frac{-5(x^2-4x+15)}{(5-x)^2(5+x)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \frac{3-a}{6-5a+a^2} + \frac{a-4}{6a-a^2-8} &= \frac{3-a}{a^2-3a-2a+6} - \frac{a-4}{a^2-4a-2a+8} = \\
 &= \frac{3-a}{a(a-3)-2(a-3)} - \frac{a-4}{a(a-4)-2(a-4)} = \frac{3-a}{(a-3)(a-2)} - \frac{a-4}{(a-4)(a-2)} = \\
 &= -\frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-2} = -\frac{2}{a-2} = \frac{2}{2-a}.
 \end{aligned}$$

Проверочная работа 4

1. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$;

5) $x^9 + y^9$;

2) $(3x + 4)^2 - (7x + 8)^2$;

6) $64x^6y^3 - 8x^3y^6$;

3) $16^2 - y^2 + 10xy - 25x^2$;

7) $x^2 - 3x - 4$;

4) $10x + 4b^2 - 25x^2 - 1$;

8) $x^6 - 1$.

2. Сократите дроби:

1) $\frac{4x + 16y}{3x + 12y}$;

5) $\frac{6x^4 - 6x^2y^2}{4y^4 - 4x^4}$;

2) $\frac{8a^3z - 4a^2z^2}{12a^2z^4 - 6az^5}$;

6) $\frac{y^4 - 1}{1 + 2y^2 + y^4}$;

3) $\frac{1 - 9z^2}{18z^3 + 12z^2 + 2z}$;

7) $\frac{7x^2y^4 + 7x^4y^2}{x^6 + y^6}$;

4) $\frac{(4y^2 - 8y)^2}{(8y - 16)^2}$;

8) $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 - xy + y^2}$.

3. Выполните действия:

1) $\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 1)} + \frac{2}{x(x + 1)}$;

5) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} - \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$;

2) $\frac{3}{b + 2} + \frac{2b - 5}{4 - b^2} + \frac{5}{b - 2}$;

6) $\frac{2}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$;

3) $\frac{x - 2}{3x + 6} + \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{x - 6}{6 - 3x}$;

7) $\frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{6}{x^2 - 1} - \frac{3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$;

4) $\frac{y + 2}{25 - (y + 1)^2} - \frac{4}{y + 6} + 2$;

8) $\frac{x - 5}{-12 + 7x - x^2} + \frac{x - 3}{x^2 - 9x + 20}$.

Совместные действия с дробями (алгебраическое сложение, умножение и деление)

Практикум 12

Упростите выражения:

$$1. \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{5xy^2}{x-y}.$$

Можно решить данный пример по действиям. Например:

$$а) \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2 - y^2}{xy};$$

$$б) \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{5xy^2}{x-y} = \frac{(x+y)(x-y) \cdot 5xy^2}{xy(x-y)} = 5y(x+y).$$

Но можно решать через знак равенства, т.е.

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{5xy^2}{x-y} = \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{5xy^2}{x-y} = \frac{(x+y)(x-y) \cdot 5xy^2}{xy(x-y)} = 5y(x+y).$$

Это дело вкуса, главное, чтобы было верным решение.

$$2. \left(\frac{3x+7y}{6x} + \frac{8x-3y}{6y} \right) \cdot \frac{12x^2y}{7y^2+8x^2} = \frac{y(3x+7y)+x(8x-3y)}{6xy} \cdot \frac{12x^2y}{7y^2+8x^2} =$$

$$= \frac{3xy + 7y^2 + 8x^2 - 3xy}{6xy} \cdot \frac{12x^2y}{7y^2+8x^2} = \frac{(7y^2+8x^2) \cdot 2x}{(7y^2+8x^2)} = 2x.$$

$$3. \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \cdot \frac{x^2 - y^2}{4xy} = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x^2 - y^2}{4xy} =$$

$$= \frac{(x+y-x+y)(x+y+x-y)}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{(x-y)(x+y)}{4xy} = \frac{4xy(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)4xy} = 1.$$

$$4. \left(\frac{5t}{4t+2} - \frac{t}{2-4t} \right) : \frac{9t^2-3t}{1-4t+4t^2} = \left(\frac{5t}{2(2t+1)} + \frac{t}{2(2t-1)} \right) \cdot \frac{(1-2t)^2}{3t(3t-1)} =$$

$$= \frac{t}{2} \cdot \frac{5(2t-1)+(2t+1)}{(2t+1)(2t-1)} \cdot \frac{(2t-1)^2}{3t(3t-1)} = \frac{t(10t-5+2t+1)(2t-1)^2}{2(2t+1)(2t-1) \cdot 3t(3t-1)} =$$

$$= \frac{(12t-4)(2t-1)}{6(2t+1)(3t-1)} = \frac{4(3t-1)(2t-1)}{6(2t+1)(3t-1)} = \frac{2(2t-1)}{3(2t+1)}.$$

5. $\left(\frac{3a}{a-1} + 1\right) : \left(a - \frac{3a^2}{1-a}\right) =$
 $= \frac{3a+a-1}{a-1} : \frac{a-a^2-3a^2}{1-a} = \frac{-(4a-1)(1-a)}{(1-a)(a-4a^2)} = \frac{(4a-1)(a-1)}{a(a-1)(4a-1)} = \frac{1}{a}.$
6. $\left(\frac{1}{ax+a^2} - \frac{6}{x^2+ax} + \frac{9a}{x^3+x^2a}\right) : \left(\frac{x}{a^2} - \frac{6}{a} + \frac{9}{x}\right) =$
 $= \left(\frac{1}{a(x+a)} - \frac{6}{x(a+x)} + \frac{9a}{x^2(x+a)}\right) : \frac{x^2-6ax+9a^2}{a^2x} =$
 $= \frac{x^2-6ax+9a^2}{ax^2(a+x)} \cdot \frac{a^2x}{(x-3a)^2} = \frac{(x-3a)^2 \cdot a^2x}{ax^2(x-3a)^2} = \frac{a}{x}.$
7. $\left(\frac{x(x-3)}{x^3+3x^2+3x+1} + \frac{1}{1+2x+x^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3-x}{x^2-2x+1}\right) =$
 $= \left(\frac{x(x-3)}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3-x}{(x-1)^2}\right) = \frac{x(x-3)+(x+1)}{(x+1)^3} \cdot \frac{2(x-1)+(3-x)}{(x-1)^2} =$
 $= \frac{x^2-3x+x+1}{(x+1)^3} \cdot \frac{2x-2+3-x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1}{(x+1)^3} \cdot \frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+1)^3(x-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$
8. $\left(\frac{x^2-x}{x^3+1} + \frac{x+1}{x+(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{4-x^2}{x+1} =$
 $= \left(\frac{x^2-x}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{(2-x)(2+x)}{x+1} =$
 $= \frac{x^2-x+(x+1)^2-(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x+1}{(2-x)(2+x)} =$
 $= \frac{x^2-x+x^2+2x+1-x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x+1}{(2-x)(2+x)} =$
 $= \frac{(x^2+2x)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)(2-x)(2+x)} =$
 $= \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)(2-x)(2+x)} = \frac{x}{(x^2-x+1)(2-x)}.$

$$\begin{aligned}
9. \quad & \frac{x^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{8x^2-32}{x^3-2x^2} + \frac{x^5-8x^2}{x} : (x^2-4) = \\
& = \frac{x^2}{(x+2)^2} \cdot \frac{8(x^2-4)}{x^2(x-2)} + \frac{x^2(x^3-8)}{x} \cdot \frac{1}{x^2-4} = \\
& = \frac{x^2 \cdot 8(x-2)(x+2)}{x^2(x+2)^2(x-2)} + \frac{x^2(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)(x+2)} = \\
& = \frac{8}{x+2} + \frac{(x^2+2x+4)x}{x+2} = \frac{8+x^3+2x^2+4x}{x+2} = \\
& = \frac{(8+4x)+(x^3+2x^2)}{x+2} = \frac{4(x+2)+x^2(x+2)}{x+2} = \\
& = \frac{(x+2)(x^2+4)}{x+2} = x^2+4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & \left(\left(\frac{y^2-y+2}{2} \right)^2 - (y^2-y+2) \cdot \frac{y^2-y+18}{3} + \left(\frac{y^2-y+18}{3} \right)^2 \right) \frac{36}{y^2-12y+36} = \\
& = \left(\left(\frac{y^2-y+2}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{y^2-y+2}{2} \right) \cdot \frac{y^2-y+18}{3} + \left(\frac{y^2-y+18}{3} \right)^2 \right) \cdot \frac{36}{(y-6)^2} = \\
& = \left(\frac{y^2-y+2}{2} - \frac{y^2-y+18}{3} \right)^2 \cdot \frac{36}{(y-6)^2} = \\
& = \left(\frac{3y^2-3y+6-2y^2+2y-36}{6} \right)^2 \cdot \frac{36}{(y-6)^2} = \\
& = \left(\frac{y^2-y-30}{6} \right)^2 \cdot \frac{36}{(y-6)^2} = \frac{(y^2-y-30)^2}{(y-6)^2} = \\
& = \frac{(y(y-6)+5(y-6))^2}{(y-6)^2} = \\
& = \frac{((y-6)(y+5))^2}{(y-6)^2} = \frac{(y-6)^2(y+5)^2}{(y-6)^2} = (y+5)^2.
\end{aligned}$$

Тренировочная работа 14

Упростите выражения:

1.
$$\left(\frac{2x}{1-3y} + \frac{2x}{3y+1} \right) : \frac{4x^2+14x}{9y^2+1-6y}.$$

2.
$$\left(\frac{1+n}{n^2-mn} - \frac{1-m}{m^2-mn} \right) : \frac{m+n}{m^2n-n^2m}.$$

3.
$$\frac{x^3-9xy^2}{9y^2+x^2} \cdot \left(\frac{x+3y}{x^2-3xy} + \frac{x-3y}{3xy+x^2} \right).$$

4.
$$\frac{(3a-2b)^2}{b-3a} + \frac{9a^2}{3a-b}.$$

5.
$$\frac{k^2-p^2}{k^2-p^2+12kn+36n^2} + \frac{12n(3n+p)}{p^2-k^2-12kn-36n^2}.$$

6.
$$\frac{12bc^2+b^3}{(b-2c)^2} - \frac{6b^2c+5c^3}{(2c-b)^2} + \frac{3c^3}{4bc-4c^2-b^2}.$$

7.
$$(1-b)^2 \left(\frac{1}{(1-b)^2} - \frac{1}{1-b^2} \right) + \frac{3+b}{1+b}.$$

8.
$$\left(\frac{5x}{x-9} + \frac{42x}{x^2-18x+81} \right) : \frac{5x-3}{x^2-81} - \frac{9(x+9)}{x-9}.$$

9.
$$\frac{(5x-1)^3}{5x-2} + \frac{-1+5x}{2-5x}.$$

10.
$$\frac{(2y+3z)^2}{2y-3z} - \frac{(2y-3z)^2}{2y+3z}.$$

Решение тренировочной работы 14

Упростите выражения:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \left(\frac{2x}{1-3y} + \frac{2x}{3y+1} \right) : \frac{4x^2+14x}{9y^2+1-6y} = \\
 & = 2x \left(\frac{1}{1-3y} + \frac{1}{3y+1} \right) \cdot \frac{(3y-1)^2}{2x(2x+7)} = \\
 & = 2x \cdot \frac{3y+1+1-3y}{(1-3y)(1+3y)} \cdot \frac{(3y-1)^2}{2x(2x+7)} = \frac{2x \cdot 2 \cdot (3y-1)^2}{(1-3y)(1+3y) \cdot 2x(2x+7)} = \\
 & = \frac{2x \cdot 2 \cdot (1-3y)^2}{(1-3y)(1+3y) \cdot 2x(2x+7)} = \frac{2 \cdot (1-3y)}{(1+3y)(2x+7)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \left(\frac{1+n}{n^2-mn} - \frac{1-m}{m^2-mn} \right) : \frac{m+n}{m^2n-n^2m} = \\
 & = \left(\frac{1+n}{n(n-m)} + \frac{1-m}{m(n-m)} \right) : \frac{m+n}{mn(m-n)} = \\
 & = \frac{(1+n)m + (1-m)n}{nm(n-m)} \cdot \frac{mn(m-n)}{m+n} = \frac{m+mn+n-mn}{mn(n-m)} \cdot \frac{mn(m-n)}{m+n} = \\
 & = \frac{(m+n)(m-n)mn}{mn(n-m)(m+n)} = -\frac{m-n}{m-n} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \frac{x^3-9xy^2}{9y^2+x^2} \cdot \left(\frac{x+3y}{x^2-3xy} + \frac{x-3y}{3xy+x^2} \right) = \\
 & = \frac{x(x^2-9y^2)}{9y^2+x^2} \cdot \left(\frac{x+3y}{x(x-3y)} + \frac{x-3y}{x(3y+x)} \right) = \\
 & = \frac{x(x-3y)(x+3y)}{9y^2+x^2} \cdot \frac{(x+3y)^2+(x-3y)^2}{x(x-3y)(x+3y)} = \\
 & = \frac{x(x-3y)(x+3y)}{9y^2+x^2} \cdot \frac{x^2+6xy+9y^2+x^2-6xy+9y^2}{x(x-3y)(x+3y)} = \\
 & = \frac{x(x-3y)(x+3y) \cdot 2(x^2+9y^2)}{x(x^2+9y^2)(x-3y)(x+3y)} = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \frac{(3a-2b)^2}{b-3a} + \frac{9a^2}{3a-b} = \\
 & = \frac{(3a-2b)^2}{b-3a} - \frac{9a^2}{b-3a} = \frac{(3a-2b)^2 - 9a^2}{b-3a} = \\
 & = \frac{(3a-2b-3a)(3a-2b+3a)}{b-3a} = \frac{2b \cdot 2(3a-b)}{3a-b} = 4b.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \frac{k^2-p^2}{k^2-p^2+12kn+36n^2} + \frac{12n(3n+p)}{p^2-k^2-12kn-36n^2} = \\
 & = \frac{k^2-p^2}{(k+6n)^2-p^2} + \frac{12n(3n+p)}{p^2-(k+6n)^2} = \\
 & = \frac{k^2-p^2}{(k+6n-p)(k+6n+p)} - \frac{12n(3n+p)}{(k+6n+p)(k+6n-p)} = \\
 & = \frac{k^2-(p+6n)^2}{(k+6n+p)(k+6n-p)} = \frac{(k-p-6n)(k+p+6n)}{(k+6n+p)(k+6n-p)} = \frac{k-6n-p}{k+6n-p}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \frac{12bc^2+b^3}{(b-2c)^2} - \frac{6b^2c+5c^3}{(2c-b)^2} + \frac{3c^3}{4bc-4c^2-b^2} = \\
 & = \frac{12bc^2+b^3}{(b-2c)^2} - \frac{6b^2c+5c^3}{(b-2c)^2} - \frac{3c^3}{b^2-4bc+4c^2} = \\
 & = \frac{12bc^2+b^3}{(b-2c)^2} - \frac{6b^2c+5c^3}{(b-2c)^2} - \frac{3c^3}{(b-2c)^2} = \frac{12bc^2+b^3-6b^2c-5c^3-3c^3}{(b-2c)^2} = \\
 & = \frac{b^3-6b^2c+12bc^2-8c^3}{(b-2c)^2} = \frac{(b-2c)^3}{(b-2c)^2} = b-2c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & (1-b)^2 \left(\frac{1}{(1-b)^2} - \frac{1}{1-b^2} \right) + \frac{3+b}{1+b} = \\
 & = (1-b)^2 \left(\frac{1}{(1-b)^2} - \frac{1}{(1-b)(1+b)} \right) + \frac{3+b}{1+b} = \\
 & = (1-b)^2 \frac{1+b-1+b}{(1-b)^2(1+b)} + \frac{3+b}{1+b} = \frac{2b}{1+b} + \frac{3+b}{1+b} = \frac{2b+3+b}{1+b} = \frac{3b+3}{1+b} = \frac{3(b+1)}{1+b} = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \left(\frac{5x}{x-9} + \frac{42x}{x^2-18x+81} \right) : \frac{5x-3}{x^2-81} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \\
& = \left(\frac{5x}{x-9} + \frac{42x}{(x-9)^2} \right) \cdot \frac{x^2-81}{5x-3} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \\
& = \frac{5x(x-9) + 42x}{(x-9)^2} \cdot \frac{(x-9)(x+9)}{5x-3} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \\
& = \frac{x(5(x-9) + 42)(x-9)(x+9)}{(x-9)^2(5x-3)} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \\
& = \frac{x(5x-45+42)(x-9)(x+9)}{(x-9)^2(5x-3)} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \frac{x(x^2-81)}{(x-9)^2} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \\
& = \frac{x(x-9)(x+9)}{(x-9)^2} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \frac{x(x+9)}{x-9} - \frac{9(x+9)}{x-9} = \frac{(x+9)(x-9)}{x-9} = x + 9.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & \frac{(5x-1)^3}{5x-2} + \frac{-1+5x}{2-5x} = \\
& = \frac{(5x-1)^3}{5x-2} - \frac{5x-1}{5x-2} = \frac{(5x-1)^3 - (5x-1)}{5x-2} = \frac{(5x-1)((5x-1)^2 - 1)}{5x-2} = \\
& = \frac{(5x-1)(5x-1-1)(5x-1+1)}{5x-2} = \frac{(5x-1)(5x-2)5x}{5x-2} = 5x(5x-1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad & \frac{(2y+3z)^2}{2y-3z} - \frac{(2y-3z)^2}{2y+3z} = \\
& = \frac{(2y+3z)^3 - (2y-3z)^3}{(2y-3z)(2y+3z)} = \\
& = \frac{(2y+3z-2y+3z)((2y+3z)^2 + (2y-3z)^2 + (2y-3z)(2y+3z))}{(2y-3z)(2y+3z)} = \\
& = \frac{6z(4y^2 + 12yz + 9z^2 + 4y^2 - 12yz + 9z^2 + 4y^2 - 9z^2)}{(2y-3z)(2y+3z)} = \\
& = \frac{6z(12y^2 + 9z^2)}{(2y-3z)(2y+3z)} = \frac{18z(4y^2 + 3z^2)}{4y^2 - 9z^2}.
\end{aligned}$$

Решение более сложных примеров

Практикум 13

Упростите выражения:

$$1. \frac{y^3 - 9x^2y + x}{xy^2 - 9x^3} + (1 - 3x - y) \cdot \left(\frac{3x + y + 1}{9x^2 - y^2} - \frac{3x + y}{9x^2 - 3x + y - y^2} \right) =$$

$$\begin{aligned} \text{а) } 9x^2 - 3x + y - y^2 &= (9x^2 - y^2) - (3x - y) = \\ &= (3x - y)(3x + y - 1); \end{aligned}$$

$$\text{б) } xy^2 - 9x^3 = x(y^2 - 9x^2) = x(y - 3x)(y + 3x).$$

$$\begin{aligned} &= \frac{y^3 - 9x^2y + x}{x(y + 3x)(y - 3x)} + (1 - 3x - y) \cdot \left(\frac{3x + y + 1}{(3x + y)(3x - y)} - \frac{3x + y}{(3x - y)(3x + y - 1)} \right) = \\ &= \frac{y^3 - 9x^2y + x}{x(y + 3x)(y - 3x)} + (1 - 3x - y) \frac{(3x + y + 1)(3x + y - 1) - (3x + y)^2}{(3x + y)(3x - y)(3x + y - 1)} = \\ &= \frac{y^3 - 9x^2y + x}{x(y + 3x)(y - 3x)} - \frac{(3x + y - 1)((3x + y)^2 - 1 - (3x + y)^2)}{(3x + y)(3x - y)(3x + y - 1)} = \\ &= \frac{y^3 - 9x^2y + x}{x(y + 3x)(y - 3x)} - \frac{-1}{(3x + y)(3x - y)} = \frac{y^3 - 9x^2y + x - x}{x(y + 3x)(y - 3x)} = \\ &= \frac{y(y - 3x)(y + 3x)}{x(y + 3x)(y - 3x)} = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \left(\frac{ab + b^2}{5a^2 - 5ab} + ab + b^2 \right) \cdot \frac{5a}{a + b} - \frac{b}{a - b} &= \\ = (ab + b^2) \left(\frac{1}{5a^2 - 5ab} + 1 \right) \cdot \frac{5a}{a + b} - \frac{b}{a - b} &= \\ = \frac{b(a + b)(1 + 5a^2 - 5ab)}{5a(a - b)} \cdot \frac{5a}{(a + b)} - \frac{b}{a - b} &= \\ = \frac{b(1 + 5a^2 - 5ab)}{a - b} - \frac{b}{a - b} = \frac{b(1 + 5a^2 - 5ab - 1)}{a - b} = \frac{b \cdot 5a(a - b)}{a - b} &= 5ab. \end{aligned}$$

$$3. \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^4 - x^2 + 4x - 4} - \frac{x^2}{x^2 + x - 2} + \frac{x^2}{x^2 - x + 2} - 1 =$$

$$\text{а) } x^4 - x^2 + 4x - 4 = x^4 - (x^2 - 4x + 4) = \\ = x^4 - (x-2)^2 = (x^2 + x - 2)(x^2 - x + 2) = (x+2)(x-1)(x^2 - x + 2);$$

$$\text{б) } x^2 + x - 2 = x^2 + x + x - x - 2 = \\ = (x^2 + 2x) - (x+2) = x(x+2) - (x+2) = (x+2)(x-1).$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{(x+2)(x-1)(x^2 - x + 2)} - \frac{x^2}{(x+2)(x-1)} + \frac{x^2}{x^2 - x + 2} - 1 = \\ = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x^2(x^2 - x + 2) + x^2(x^2 + x - 2) - x^4 + x^2 - 4x + 4}{(x^2 - x + 2)(x+2)(x-1)} = \\ = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x^4 + x^3 - 2x^2 + x^4 + x^3 - 2x^2 - x^4 + x^2 - 4x + 4}{(x^2 + x - 2)(x+2)(x-1)} = \\ = \frac{-4x + 4}{(x^2 - x + 2)(x+2)(x-1)} = \frac{-4(x-1)}{(x^2 - x + 2)(x+2)(x-1)} = \frac{-4}{(x^2 - x + 2)(x+2)}.$$

$$4. \left(\frac{x^2 + 4}{4x^2 + 2x} - \frac{2x}{2x^3 + x^2 + 8x + 4} \right) \cdot \frac{4x^2 + 2x}{x^6 - 64} - \frac{x^2 - 3}{x^4 - 16} =$$

$$\text{а) } 2x^3 + x^2 + 8x + 4 = x^2(2x + 1) + 4(2x + 1) = (2x + 1)(x^2 + 4).$$

$$\text{б) } x^6 - 64 = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16).$$

$$= \left(\frac{x^2 + 4}{2x(2x + 1)} - \frac{2x}{(2x + 1)(x^2 + 4)} \right) \cdot \frac{2x(2x + 1)}{(x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16)} - \frac{x^2 - 3}{x^4 - 16} = \\ = \frac{(x^2 + 4)^2 - (2x)^2}{2x(2x + 1)(x^2 + 4)} \cdot \frac{2x(2x + 1)}{(x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16)} - \frac{x^2 - 3}{x^4 - 16} =$$

$$\text{в) } x^4 + 4x^2 + 16 = x^4 + 8x^2 + 16 - 4x^2 = (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 = \\ = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4).$$

$$= \frac{1}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} - \frac{x^2 - 3}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = \frac{1 - x^2 + 3}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = \frac{4 - x^2}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = -\frac{1}{x^2 + 4}.$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \frac{\frac{a-b}{1+ab} - \frac{a-c}{1+ac}}{1 + \frac{(a-b)(a-c)}{(1+ab)(1+ac)}} &= \frac{\frac{(a-b)(1+ac) - (a-c)(1+ab)}{(1+ab)(1+ac)}}{\frac{(1+ab)(1+ac) + (a-b)(a-c)}{(1+ab)(1+ac)}} = \frac{(a-b)(1+ac) - (a-c)(1+ab)}{(1+ab)(1+ac) + (a-b)(a-c)} = \\
 &= \frac{a-b+a^2c-bac-a+c+abc-a^2b}{1+ab+ac+a^2bc+a^2-ba-ac+bc} = \frac{(c-b)+a^2(c-b)}{1+a^2+bc(1+a^2)} = \frac{(1+a^2)(c-b)}{(1+a^2)(1+bc)} = \frac{c-b}{1+bc}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^3 - \frac{x+4}{x+1} &= \frac{(x+3)^3(x+1) - (x+2)^3(x+4)}{(x+2)^3(x+1)} = \\
 &= \frac{(x^3+9x^2+27x+27)(x+1) - (x+4)(x^3+6x^2+12x+8)}{(x+2)^3(x+1)} = \\
 &= \frac{x^4+9x^3+27x^2+27x+x^3+9x^2+27x+27-x^4-6x^3-12x^2-8x-4x^3-24x^2-48x-32}{(x+2)^3(x+1)} = \\
 &= \frac{-(2x+5)}{(x+2)^3(x+1)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad \left(\frac{4n+1}{2n^2+n-10} - \frac{4}{n^2-4} \right) \cdot \frac{4n^2+10n}{4n+9} + \frac{4}{n+2} &= \\
 &= \frac{(4n+1)(n+2) - 4(2n+5)}{(n-2)(n+2)(2n+5)} \cdot \frac{2n(2n+5)}{(4n+9)} + \frac{4}{n+2} = \\
 &= \frac{(4n^2+n+8n+2-8n-20)}{(n-2)(n+2)} \cdot \frac{2n}{(4n+9)} - \frac{4}{n+2} = \\
 &= \frac{(4n^2+n-18)2n}{(n+2)(n-2)(4n+9)} + \frac{4}{n+2} = \frac{(4n+9)(n-2)2n}{(n+2)(n-2)(4n+9)} + \frac{4}{n+2} = \\
 &= \frac{2n}{n+2} + \frac{4}{n+2} = \frac{2n+4}{n+2} = 2, \text{ так как}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } 2n^2 + n - 10 &= 2n^2 + n + 4n - 4n - 10 = \\
 &= n(2n+5) - 2(2n+5) = (2n+5)(n-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } 4n^2 + n - 18 &= 4n^2 - 16 + n - 2 = \\
 &= 4(n^2-4) + (n-2) = (n-2)(4(n+2)+1) = (n-2)(4n+9).
 \end{aligned}$$

$$8. \left(\frac{36}{\frac{7a-17b}{11a-19b} - \frac{11a-19b}{7a-17b}} + \frac{77a-166b}{2a-b} \right) : \frac{45b^2}{2a^2-5ab+2b^2} =$$

$$\text{Так как } 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 2a^2 - 4ab - ab + 2b^2 =$$

$$= 2a(a-2b) - b(a-2b) = (a-2b)(2a-b).$$

$$= \left(\frac{36(11a-19b)(7a-17b)}{(7a-17b)(7a-17b) - (11a-19b)(11a-19b)} + \frac{77a-166b}{2a-b} \right) \cdot \frac{2a^2-5ab+2b^2}{45b^2} =$$

$$= \left(\frac{36(77a^2-187ab-133ab+323b^2)}{(7a-17b+11a-19b)(7a-17b-11a+19b)} + \frac{77a-166b}{2a-b} \right) \cdot \frac{2a^2-5ab+2b^2}{45b^2} =$$

$$= \left(\frac{36(77a^2-320ab+323b^2)}{36(a-2b)(b-2a)} - \frac{77a-166b}{b-2a} \right) \cdot \frac{2a^2-5ab+2b^2}{45b^2} =$$

$$= \frac{77a^2 - 320ab + 323b^2 - (77a - 166b)(a-2b)}{(a-2b)(b-2a)} \cdot \frac{2a^2-5ab+2b^2}{45b^2} =$$

$$= \frac{77a^2 - 320ab + 323b^2 - 77a^2 + 166ba + 154ab - 332b^2}{(a-2b)(b-2a)} \cdot \frac{(a-2b)(2a-b)}{45b^2} =$$

$$= \frac{-9b^2}{b-2a} \cdot \frac{2a-b}{45b^2} = \frac{1}{5}.$$

$$9. \left(\frac{2}{a^2-6a} + \frac{1}{2a+8} + \frac{5}{a^2-2a-24} \right) : \frac{4a+a^2}{2a-12} =$$

$$= \left(\frac{2}{a(a-6)} + \frac{1}{2(a+4)} + \frac{5}{(a-6)(a+4)} \right) \cdot \frac{2(a-6)}{a(a+4)} =$$

$$= \frac{4(a+4) + a(a-6) + 5 \cdot 2a}{2a(a-6)(a+4)} \cdot \frac{2(a-6)}{a(a+4)} = \frac{a^2+8a+16}{a^2(a+4)^2} =$$

$$= \frac{(a+4)^2}{a^2(a+4)^2} = \frac{1}{a^2}.$$

$$\begin{aligned}
 10. & \left(\frac{1}{x+2} + \frac{9}{2x^2-x-10} + \frac{8}{2x^2-5x} \right) \cdot \left(\frac{52}{x+4} + 2x - 13 \right) = \\
 & = \left(\frac{1}{x+2} + \frac{9}{(2x-5)(x+2)} + \frac{8}{x(2x-5)} \right) \cdot \frac{52+(2x-13)(x+4)}{x+4} = \\
 & = \frac{x(2x-5)+9 \cdot x+8(x+2)}{x(x+2)(2x-5)} \cdot \frac{52+2x^2-13x+8x-52}{x+4} = \\
 & = \frac{2x^2-5x+9x+8x+16}{x(2x-5)(x+2)} \cdot \frac{52+2x^2-13x+8x-52}{x+4} = \\
 & = \frac{2x^2+12x+16}{x(2x-5)(x+2)} \cdot \frac{2x^2-5x}{x+4} = \frac{2(x^2+6x+8)}{(x+2)(x+4)} = 2,
 \end{aligned}$$

так как

$$а) \quad x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 =$$

$$= x(x+4) + 2(x+4) = (x+4)(x+2);$$

$$б) \quad 2x^2 - x - 10 = 2x^2 - 8 - x - 2 = 2(x^2 - 4) - (x+2) =$$

$$= 2(x+2)(x-2) - (x+2) =$$

$$= (x+2)(2(x-2)-1) = (x+2)(2x-4-1) = (x+2)(2x-5).$$

Тренировочная карточка 1

1. $\left(x + \frac{3 - x^2}{x + 1}\right) : \frac{x + 3}{1 - x^2}$.
2. $\frac{1}{a - 2} - \frac{4a}{a^2 - 4} \cdot \left(\frac{1}{a - 1} - \frac{1}{a^2 - a}\right)$.
3. $\left(a + 1 + \frac{1}{a - 1}\right) : \frac{a^2}{a^2 - 2a + 1}$.
4. $\frac{-5x - 6}{x^2 - 4} + \frac{x}{x^2 - 4} : \frac{x}{x - 2} + \frac{x + 2}{x - 2}$.
5. $\left(\frac{10}{25 - b^2} + \frac{-1}{5 + b} + \frac{1}{5 - b}\right) (25 - 10b + b^2)$.
6. $\left(\frac{5m}{m + 3} - \frac{14m}{m^2 + 6m + 9}\right) : \frac{5m + 1}{m^2 - 9} + \frac{3(m - 3)}{m + 3}$.
7. $\left(\frac{4a}{a^2 - 1} + \frac{a - 1}{a + 1}\right) \cdot \frac{a}{a + 1} - \frac{a}{a - 1}$.
8. $\left(\frac{1}{2 - 4b} + \frac{b + 1}{8b^3 - 1} \cdot \frac{4b^2 + 2b + 1}{1 + 2b}\right) : \frac{1}{4b - 2}$.
9. $\left(\frac{2}{(a - 2)^2} - \frac{a}{4 - a^2}\right) : \frac{4 + a^2}{4 - a^2} + \frac{2}{a - 2}$.
10. $\frac{x + 12}{x^3 - 9x} : \left(\frac{x - 3}{2x^2 + 5x - 3} - \frac{9}{9 - x^2}\right) + \frac{1}{x^2}$.

Тренировочная карточка 2

$$1. \left(x + \frac{3 - x^3}{1 + x^2} \right) \cdot \frac{1 + x^2}{x^2 + 6x + 9}.$$

$$2. \left(\frac{x + 6}{3x + 9} - \frac{1}{x + 3} \right) \cdot \frac{3}{x - 3} - \frac{6}{x^2 - 9}.$$

$$3. \left(a - 5 + \frac{15}{a + 5} \right) : \frac{a^2 - 10}{a^2 + 10a + 25}.$$

$$4. \frac{3y - 2}{y^2 - 4} + \frac{3}{y^2 - 4} \cdot \frac{y + 2}{3} + \frac{y}{y + 2}.$$

$$5. \left(\frac{-1}{x - 4} + \frac{16}{x^2 - 16} + \frac{2}{x + 4} \right) \cdot (x^2 - 8x + 16).$$

$$6. \left(\frac{5a}{a + 1} - \frac{3a}{a^2 + 2a + 1} \right) : \frac{5a + 2}{a^2 - 1} + \frac{a - 1}{a + 1}.$$

$$7. \left(\frac{36x}{x^2 - 81} + \frac{x - 9}{x + 9} \right) \cdot \frac{x}{x + 9} - \frac{x}{x - 9}.$$

$$8. \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2} + 2x \right) : (4 - x^2) + \frac{x - 1}{x - 2}.$$

$$9. \left(\frac{2}{4 - x^2} - \frac{2}{(x - 2)^2} \right) : \frac{4}{(2 - x)^2} - \frac{2 - x}{x + 2}.$$

$$10. \left(\frac{2x}{x + 3} + \frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \right) \cdot \frac{x}{2x + 1} + \frac{3(x + 4)}{x + 3}.$$

Тренировочная карточка 3

1. $\left(a + \frac{6 - a^2}{1 + a}\right) : \frac{6 + a}{a^2 - 1}$.
2. $\frac{3a}{a^2 - 9} - \frac{3}{a^2 - 9} : \left(\frac{a + 2}{3a - 3} - \frac{1}{a - 1}\right)$.
3. $\left(a + 6 + \frac{6}{a - 6}\right) \cdot \frac{a^2 - 12a + 36}{a^2 - 30}$.
4. $\frac{3a - 4}{a + 1} + \frac{a}{a + 1} : \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{5 - 2a}{a + 1}$.
5. $\left(\frac{2}{a - 5} - \frac{20}{a^2 - 25} + \frac{-1}{a + 5}\right) (a^2 + 10a + 25)$.
6. $\left(\frac{5x}{x - 9} + \frac{42x}{x^2 - 18x + 81}\right) \cdot \frac{x^2 - 81}{5x - 3} - \frac{9(x + 9)}{x - 9}$.
7. $\left(\frac{32a}{64 - a^2} + \frac{8 - a}{8 + a}\right) : \frac{8 + a}{8} - \frac{8}{8 - a}$.
8. $\left(\frac{a^3 + 1}{a + 1} - a\right) : \left(1 - a^2\right) + \frac{2a}{a + 1}$.
9. $\frac{3 - 2m}{m + 5} + \frac{(5 - m)^2}{m} \cdot \left(\frac{m}{(m - 5)^2} - \frac{m}{25 - m^2}\right)$.
10. $\left(\frac{3}{x - 3} + \frac{4}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2x}{x - 2}\right) : \frac{2x + 1}{3} + \frac{3(x - 2)}{3 - x}$.

Тренировочная карточка 4

$$1. \left(b + \frac{3 - b^2}{b - 2} \right) : \frac{3 - 2b}{b^2 - 4b + 4}.$$

$$2. \left(\frac{1}{b - 1} - \frac{1}{b^2 - b} \right) \cdot \frac{b}{b + 2} + \frac{4}{b^2 - 4}.$$

$$3. \left(x + 5 + \frac{50}{x - 5} \right) : \frac{x^2 + 25}{x^2 - 10x + 25}.$$

$$4. \frac{5a - 6}{a + 2} + \frac{a}{a + 2} \cdot \frac{a^2 - 4}{a} + \frac{10 - 3a}{a + 2}.$$

$$5. \left(\frac{4b}{b + 8} - \frac{9b}{b^2 + 16b + 64} \right) \cdot \frac{b^2 - 64}{4b + 23} + \frac{8(b - 8)}{b + 8}.$$

$$6. \left(\frac{2}{3 - b} - \frac{4b}{9 - b^2} + \frac{-1}{3 + b} \right) (9 + 6b + b^2).$$

$$7. \left(\frac{28b}{b^2 - 49} + \frac{b - 7}{b + 7} \right) \cdot \frac{b}{b + 7} - \frac{b}{b - 7}.$$

$$8. \frac{a^2}{3 + a} \cdot \frac{9 - a^2}{a^2 - 3a} + \frac{27 + a^3}{3 - a} : \left(3 + \frac{a^2}{3 - a} \right).$$

$$9. \left(\frac{9}{y^2 - 9} + \frac{3}{(3 - y)^2} \right) : \frac{6}{(y - 3)^2} + \frac{1 - 2y}{3 + y}.$$

$$10. \left(\frac{2}{x + 1} + \frac{10}{x^2 - 3x - 4} + \frac{3x}{x - 4} \right) : \frac{3x + 2}{3} + \frac{x - 1}{4 - x}.$$

Тренировочная карточка 5

$$1. \left(2x - y - \frac{2x - y^2}{y} \right) \cdot \frac{a}{3xy - 3x} - \frac{a - 1}{y}.$$

$$2. \frac{m}{m^2 - 2m + 1} - \frac{1}{1 - m} \cdot \frac{m}{m + 1} - \frac{2}{m + 1}.$$

$$3. \left(\frac{1}{1 - a} - \frac{1}{1 + a} - 1 \right) \cdot (a^2 - 1).$$

$$4. \left(\frac{a}{b(b + a)} - \frac{a - b}{a^2 + ab} \right) : \left(\frac{b^2}{a^3 - ab^2} + \frac{1}{a + b} \right).$$

$$5. \left(\frac{4y^2 + 21}{2y + 2} - 6 \right) : \frac{2xy + 4y - 3x - 6}{2 - 2y^2}.$$

$$6. \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{4x^2 - 1} \cdot \frac{2x^2 + x}{x^3 + 8} - \frac{x + 2}{2x^2 - x} \right) : \frac{4}{x^2 + 2x} - \frac{x + 4}{3 - 6x}.$$

$$7. \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{3x + 4}{3x + 3} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{3}.$$

$$8. \left(\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b} + \frac{2ab}{b^2 - a^2} \right) \cdot \frac{a}{a + b} - \left(\frac{b}{b - a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a - b}{a + b}.$$

$$9. ab + \frac{ab}{a + b} \cdot \left(\frac{a + b}{a - b} - a - b \right).$$

$$10. \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} - \frac{3x^2 + 7x - 10}{3x + 10} - \frac{5 - 4x - 9x^2}{x + 1}.$$

Тренировочная карточка 6

- $$1. \left(3a - 1 - \frac{3a - 1}{x} \right) \cdot \frac{x}{2x - 2} - 2a.$$
- $$2. \left(\frac{1 + x}{1 - 2x + x^2} - \frac{1}{x + 1} \right) : \frac{x}{x - 1} + \frac{2}{x + 1}.$$
- $$3. \left(1 - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) : \frac{1}{x^2 - 1}.$$
- $$4. \left(\frac{y}{2x^2 + xy} - \frac{x}{2xy + y^2} \right) \cdot \left(\frac{x}{x^2 - y^2} - \frac{x + y}{x^2 - xy} \right).$$
- $$5. \left(4 - \frac{9x^2 - 8}{3x - 3} \right) : \frac{2a + 6x - 3ax - 9x^2}{2x^2 - 2}.$$
- $$6. \left(\frac{c + 5}{5c - 1} + \frac{c + 5}{c + 1} \right) : \frac{c^2 + 5c}{1 - 5c} + \frac{c^2 + 5}{c + 1}.$$
- $$7. \left(\frac{3x^2 + 8x - 7}{3x^2 - 3} - \frac{x + 3}{x + 1} \right) : \frac{2}{x^2 - 2x + 1}.$$
- $$8. \left(\frac{2}{2 + m} - \frac{m}{m - 2} - \frac{4}{4 - m^2} \right) : \left(\frac{2}{2 + m} + \frac{4}{m^2 - 4} + \frac{m}{2 - m} \right).$$
- $$9. \frac{3}{x + y} - \frac{3x - 3y}{2x - 3y} \cdot \left(\frac{2x - 3y}{x^2 - y^2} - 2x + 3y \right).$$
- $$10. \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} - \frac{7x^2 + 3x - 10}{7x + 10} - \frac{4 - 5x - 9x^2}{x + 1}.$$

Тренировочная карточка 7

1. $\frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{m^2 + n^2}{(m - n)^2}$.
2. $\left(\frac{5x^2 - 15xy}{x^2 - 9y^2} - \frac{3xy + 9y^2}{x^2 + 6xy + 9y^2} \right) : \left(\frac{5}{y} - \frac{3}{x} \right)$.
3. $\left(\frac{1}{(2a - b)^2} + \frac{2}{4a^2 - b^2} + \frac{1}{(2a + b)^2} \right) \cdot \frac{4a^2 + 4ab + b^2}{16a}$.
4. $\left(x - \frac{4xy}{x + y} + y \right) \cdot \left(x + \frac{4xy}{x - y} - y \right)$.
5. $\left(\frac{0,5b - 1,5}{0,5b^2 - 1,5b + 4,5} - \frac{2b - 6}{\frac{1}{3}b^3 + 9} \right) : \frac{b - 3}{0,8b^3 + 21,6}$.
6. $\frac{x - \frac{yz}{y - z}}{y - \frac{xz}{x - z}}$.
7. $\frac{\frac{3}{2}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2} + \frac{6b}{\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b}$.
8. $\frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{1}{2c - 3} : \left(\frac{4}{4c^2 - 9} - \frac{6c - 9}{8c^3 + 27} \right)$.
9. $\left(\frac{3x^2 + 5x - 14}{3x^2 - 12} - \frac{x + 3}{x + 2} \right) : \frac{2}{x^2 - 4x + 4}$.
10. $\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} + \frac{(3x - x^2 - 2)^2}{x^2 - 4x + 4}$.

Тренировочная карточка 8

$$1. \left(\frac{4a^2 - 6ac}{4a^2 - 12ac + 9c^2} - \frac{6ac + 9c^2}{4a^2 + 12ac + 9c^2} \right) \cdot \frac{6a + 9c}{4a^2 + 9c^2}.$$

$$2. \frac{4c^2}{(c-2)^4} : \left(\frac{1}{(c+2)^2} + \frac{1}{(c-2)^2} + \frac{2}{c^2-4} \right).$$

$$3. \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1 \right) : \left(1 - \frac{1}{1-a} \right).$$

$$4. \left(\frac{a}{0,5a+1} + \frac{\frac{2}{3}a}{2-a} + \frac{2a}{\frac{1}{4}a^2-1} \right) \cdot \frac{0,5a-1}{0,5a-2}.$$

$$5. \left(\frac{a-x}{a} + \frac{x}{a-x} \right) : \left(\frac{a+x}{a} - \frac{x}{a+x} \right).$$

$$6. \left(\frac{2x^2+3x-5}{x^2-2x+1} - \frac{4x+5}{2x-2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{5}.$$

$$7. \left(\frac{4}{a^2-4a} - \frac{3a+32}{a^3-64} \right) : \frac{a-8}{a^3+4a^2+16a} - \frac{4}{4-a}.$$

$$8. \frac{y}{x+y} + \left(\frac{2x+1}{x+y} - \frac{2xy+y}{y^2-x^2} \right) : \frac{2x+1}{x-y}.$$

$$9. \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}.$$

$$10. \frac{2x^2-3x+1}{x-1} + \frac{(4x-x^2-3)^2}{x^2-6x+9}.$$

Решение тренировочной карточки 1

$$1. \left(x + \frac{3-x^2}{x+1}\right) : \frac{x+3}{1-x^2} = \frac{x^2+x+3-x^2}{x+1} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} \cdot \frac{(1-x)}{1} = 1-x.$$

$$2. \frac{1}{a-2} - \frac{4a}{a^2-4} \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-a}\right) = \frac{1}{a-2} - \frac{4a}{(a+2)(a-2)} \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a(a-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{a-2} - \frac{4a}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a-2} - \frac{4}{(a+2)(a-2)} = \frac{a+2-4}{(a+2)(a-2)} =$$

$$= \frac{a-2}{(a+2)(a-2)} = \frac{1}{a+2}.$$

$$3. \left(a+1 + \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a^2}{a^2-2a+1} = \frac{a^2-1+1}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2} = \frac{a^2(a-1)}{a^2} = a-1.$$

$$4. \frac{-5x-6}{x^2-4} + \frac{x}{x^2-4} : \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{-5x-6}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{x-2} =$$

$$= \frac{-5x-6+x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{-4}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{x+2-4}{x-2} = 1.$$

$$5. \left(\frac{10}{25-b^2} + \frac{-1}{5+b} + \frac{1}{5-b}\right) (25-10b+b^2) =$$

$$= \frac{10 - (5-b) + 5+b}{(5-b)(5+b)} \cdot (5-b)^2 = \frac{10-5+b+5+b}{(5-b)(5+b)} \cdot (5-b)^2 =$$

$$= \frac{10+2b}{(5-b)(5+b)} \cdot (5-b)^2 = \frac{2(5+b)}{5+b} \cdot (5-b) = 2(5-b).$$

$$6. \left(\frac{5m}{m+3} - \frac{14m}{m^2+6m+9}\right) : \frac{5m+1}{m^2-9} + \frac{3(m-3)}{m+3} =$$

$$= \frac{m[5(m+3)-14]}{(m+3)^2} \cdot \frac{(m+3)(m-3)}{5m+1} + \frac{3(m-3)}{m+3} =$$

$$= \frac{m(5m+1)}{m+3} \cdot \frac{m-3}{5m+1} + \frac{3(m-3)}{m+3} = \frac{m(m-3)+3(m-3)}{m+3} =$$

$$= \frac{(m-3)(m+3)}{m+3} = m-3.$$

7.
$$\left(\frac{4a}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1} \right) \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{a}{a-1} =$$

$$= \frac{4a + (a-1)^2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a}{a+1} - \frac{a}{a-1} = \frac{(a+1)^2 a}{(a+1)^2 (a-1)} - \frac{a}{a-1} = 0.$$
8.
$$\left(\frac{1}{2-4b} + \frac{b+1}{8b^3-1} \cdot \frac{4b^2+2b+1}{1+2b} \right) : \frac{1}{4b-2} =$$

$$= \frac{-2b-1+2b+2}{2(2b-1)(2b+1)} \cdot \frac{2(2b-1)}{1} = \frac{1}{2b+1}.$$
9.
$$\left(\frac{2}{(a-2)^2} - \frac{a}{4-a^2} \right) : \frac{4+a^2}{4-a^2} + \frac{2}{a-2} =$$

$$= \frac{2(2+a) - 2a + a^2}{(2-a)^2(2+a)} \cdot \frac{(2-a)(2+a)}{4+a^2} + \frac{2}{a-2} =$$

$$= \frac{(4+a^2)}{(2-a)^2} \cdot \frac{(2-a)(2+a)}{(2+a)(4+a^2)} + \frac{2}{a-2} = \frac{1}{2-a} + \frac{2}{a-2} = \frac{-1}{a-2} + \frac{2}{a-2} = \frac{1}{a-2}.$$
10.
$$\frac{x+12}{x^3-9x} : \left(\frac{x-3}{2x^2+5x-3} - \frac{9}{9-x^2} \right) + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{x+12}{x(x+3)(x-3)} : \left(\frac{x-3}{(2x-1)(x+3)} + \frac{9}{(x+3)(x-3)} \right) + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{x+12}{x(x+3)(x-3)} : \frac{(x-3)^2 + 9(2x-1)}{(2x-1)(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{x+12}{x(x+3)(x-3)} \cdot \frac{(2x-1)(x+3)(x-3)}{(x-3)^2 + 9(2x-1)} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{x+12}{x(x+3)(x-3)} \cdot \frac{(2x-1)(x+3)(x-3)}{x^2-6x+9+18x-9} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{(x+12)(2x-1)}{x \cdot x(x+12)} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x}, \quad \text{так как}$$

$$2x^2+5x-3 = 2x^2+6x-x-3 = 2x(x+3)-(x+3) = (x+3)(2x-1).$$

Решение тренировочной карточки 2

1.
$$\left(x + \frac{3-x^3}{1+x^2}\right) \cdot \frac{1+x^2}{x^2+6x+9} = \frac{x+x^3+3-x^3}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{(x+3)^2} = \frac{x+3}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3}.$$
2.
$$\begin{aligned} 2. \left(\frac{x+6}{3x+9} - \frac{1}{x+3}\right) \cdot \frac{3}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} &= \left(\frac{x+6}{3(x+3)} - \frac{1}{x+3}\right) \cdot \frac{3}{x-3} - \frac{6}{(x+3)(x-3)} = \\ &= \left(\frac{x+6-3}{3(x+3)}\right) \cdot \frac{3}{x-3} - \frac{6}{(x+3)(x-3)} = \frac{x+3-6}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x+3}. \end{aligned}$$
3.
$$3. \left(a-5 + \frac{15}{a+5}\right) : \frac{a^2-10}{a^2+10a+25} = \frac{a^2-25+15}{a+5} \cdot \frac{(a+5)^2}{a^2-10} = \frac{(a^2-10)(a+5)^2}{(a+5)(a^2-10)} = a+5.$$
4.
$$\begin{aligned} 4. \frac{3y-2}{y^2-4} + \frac{3}{y^2-4} \cdot \frac{y+2}{3} + \frac{y}{y+2} &= \frac{3y-2}{(y+2)(y-2)} + \frac{y+2}{(y+2)(y-2)} + \frac{y}{y+2} = \\ &= \frac{3y-2+y+2+y(y-2)}{(y+2)(y-2)} = \frac{y(y+2)}{(y+2)(y-2)} = \frac{y}{y-2}. \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} 5. \left(\frac{-1}{x-4} + \frac{16}{x^2-16} + \frac{2}{x+4}\right) \cdot (x^2-8x+16) &= \\ &= \frac{-(x+4)+16+2(x-4)}{(x+4)(x-4)} (x-4)^2 = \frac{(x+4)}{x+4} \cdot (x-4) = x-4. \end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned} 6. \left(\frac{5a}{a+1} - \frac{3a}{a^2+2a+1}\right) : \frac{5a+2}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1} &= \frac{a[5(a+1)-3](a+1)(a-1)}{(a+1)^2(5a+2)} + \frac{a-1}{a+1} = \\ &= \frac{a(5a+2)(a-1)}{(a+1)(5a+2)} + \frac{a-1}{a+1} = \frac{a(a-1)}{a+1} + \frac{a-1}{a+1} = \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a-1. \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} 7. \left(\frac{36x}{x^2-81} + \frac{x-9}{x+9}\right) \cdot \frac{x}{x+9} - \frac{x}{x-9} &= \\ &= \frac{[36x+(x-9)^2]x}{(x+9)(x-9)(x+9)} - \frac{x}{x-9} = \frac{(x+9)^2x}{(x+9)^2(x-9)} - \frac{x}{x-9} = \frac{x}{x-9} - \frac{x}{x-9} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2} + 2x \right) : \left(4 - x^2 \right) + \frac{x - 1}{x - 2} = \\
 & = \left(x^2 + 2x + 4 + 2x \right) : \left(4 - x^2 \right) + \frac{x - 1}{x - 2} = \\
 & = \frac{(x + 2)^2}{(2 + x)(2 - x)} + \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{x + 2}{2 - x} + \frac{x - 1}{x - 2} = \frac{x + 2 - x + 1}{2 - x} = \frac{3}{2 - x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \left(\frac{2}{4 - x^2} - \frac{2}{(x - 2)^2} \right) : \frac{4}{(2 - x)^2} - \frac{2 - x}{x + 2} = \\
 & = \frac{2(2 - x) - 2(2 + x)}{(2 + x)(2 - x)^2} \cdot \frac{(2 - x)^2}{4} - \frac{2 - x}{x + 2} = \\
 & = \frac{-4x}{4(2 + x)} - \frac{2 - x}{x + 2} = \frac{-x}{2 + x} - \frac{2 - x}{x + 2} = \frac{-x - 2 + x}{x + 2} = -\frac{2}{x + 2}.
 \end{aligned}$$

$$10. \quad \left(\frac{2x}{x + 3} + \frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \right) \cdot \frac{x}{2x + 1} + \frac{3(x + 4)}{x + 3} =$$

$$\begin{aligned}
 \text{Так как } x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 3x - x - 3 = \\
 &= x(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x - 1),
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x(x - 1) + x + 3 - 4}{(x + 3)(x - 1)} \cdot \frac{x}{2x + 1} + \frac{3(x + 4)}{x + 3} = \\
 &= \frac{x}{x + 3} + \frac{3(x + 4)}{x + 3} = \frac{4(x + 3)}{x + 3} = 4.
 \end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 3

1. $\left(a + \frac{6 - a^2}{1 + a}\right) : \frac{6 + a}{a^2 - 1} =$
 $= \frac{a + a^2 + 6 - a^2}{1 + a} \cdot \frac{(a + 1)(a - 1)}{6 + a} = \frac{(a + 6)}{(a + 6)} (a - 1) = a - 1.$
2. $\frac{3a}{a^2 - 9} - \frac{3}{a^2 - 9} : \left(\frac{a + 2}{3a - 3} - \frac{1}{a - 1}\right) =$
 $= \frac{3a}{a^2 - 9} - \frac{3}{a^2 - 9} : \frac{a + 2 - 3}{3(a - 1)} = \frac{3a}{a^2 - 9} - \frac{9}{a^2 - 9} = \frac{3a - 9}{a^2 - 9} = \frac{3(a - 3)}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{3}{a + 3}.$
3. $\left(a + 6 + \frac{6}{a - 6}\right) \cdot \frac{a^2 - 12a + 36}{a^2 - 30} = \frac{a^2 - 36 + 6}{a - 6} \cdot \frac{(a - 6)^2}{a^2 - 30} = \frac{a^2 - 30}{a^2 - 30} \cdot (a - 6) = a - 6.$
4. $\frac{3a - 4}{a + 1} + \frac{a}{a + 1} : \frac{a}{a^2 - 1} + \frac{5 - 2a}{a + 1} =$
 $= \frac{3a - 4}{a + 1} + \frac{a}{a + 1} \cdot \frac{a^2 - 1}{a} + \frac{5 - 2a}{a + 1} = \frac{3a - 4}{a + 1} + \frac{a}{a + 1} \cdot \frac{(a + 1)(a - 1)}{a} + \frac{5 - 2a}{a + 1} =$
 $= \frac{3a - 4 + 5 - 2a}{a + 1} + a - 1 = \frac{a + 1}{a + 1} + a - 1 = 1 + a - 1 = a.$
5. $\left(\frac{2}{a - 5} - \frac{20}{a^2 - 25} + \frac{-1}{a + 5}\right) (a^2 + 10a + 25) = \frac{2(a + 5) - 20 - (a - 5)}{(a - 5)(a + 5)} \cdot (a + 5)^2 =$
 $= \frac{2a + 10 - 20 - a + 5}{(a - 5)(a + 5)} \cdot (a + 5)^2 = \frac{(a - 5)}{(a - 5)} \cdot (a + 5) = a + 5.$
6. $\left(\frac{5x}{x - 9} + \frac{42x}{x^2 - 18x + 81}\right) \cdot \frac{x^2 - 81}{5x - 3} - \frac{9(x + 9)}{x - 9} =$
 $= \frac{x[5(x - 9) + 42](x + 9)(x - 9)}{(x - 9)^2(5x - 3)} - \frac{9(x + 9)}{x - 9} = \frac{x(5x - 3)(x + 9)}{(x - 9)(5x - 3)} - \frac{9(x + 9)}{x - 9} =$
 $= \frac{x(x + 9)}{x - 9} - \frac{9(x + 9)}{x - 9} = \frac{(x + 9)(x - 9)}{x - 9} = x + 9.$

$$\begin{aligned}
 7. \left(\frac{32a}{64-a^2} + \frac{8-a}{8+a} \right) : \frac{8+a}{8} - \frac{8}{8-a} &= \\
 &= \frac{32a+(8-a)^2}{(8-a)(8+a)} \cdot \frac{8}{8+a} - \frac{8}{8-a} = \frac{(32a+64-16a+a^2)8}{(8-a)(8+a)(8+a)} - \frac{8}{8-a} = \\
 &= \frac{(8+a)^2 8}{(8-a)(8+a)^2} - \frac{8}{8-a} = \frac{8}{8-a} - \frac{8}{8-a} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \left(\frac{a^3+1}{a+1} - a \right) : (1-a^2) + \frac{2a}{a+1} &= \\
 &= (a^2 - a + 1 - a) : (1-a^2) + \frac{2a}{a+1} = \frac{(a-1)^2}{(1-a)(1+a)} + \frac{2a}{a+1} = \\
 &= \frac{1-a}{1+a} + \frac{2a}{a+1} = \frac{1-a+2a}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} = 1. \quad [(a-1)^2 = (1-a)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \frac{3-2m}{m+5} + \frac{(5-m)^2}{m} \cdot \left(\frac{m}{(m-5)^2} - \frac{m}{25-m^2} \right) &= \\
 &= \frac{3-2m}{m+5} + \frac{(5-m)^2 m [m+5+m-5]}{(m-5)^2 (m+5)m} = \frac{3-2m}{m+5} + \frac{2m}{m+5} = \frac{3-2m+2m}{m+5} = \frac{3}{m+5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \left(\frac{3}{x-3} + \frac{4}{x^2-5x+6} + \frac{2x}{x-2} \right) : \frac{2x+1}{3} + \frac{3(x-2)}{3-x} &= \\
 &= \frac{3(x-2)+4+2x(x-3)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{3}{2x+1} + \frac{3(x-2)}{3-x} = \frac{3(2x^2-3x-2)}{(x-3)(x-2)(2x+1)} + \frac{3(x-2)}{3-x} =
 \end{aligned}$$

Так как $2x^2 - 3x - 2 = 2x^2 - 4x + x - 2 =$

$$= 2x(x-2) + (x-2) = (x-2)(2x+1), \text{ то}$$

$$= \frac{3(2x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)(2x+1)} + \frac{3(x-2)}{3-x} = \frac{3}{x-3} - \frac{3(x-2)}{x-3} =$$

$$= \frac{3-3x+6}{x-3} = \frac{-3(x-3)}{x-3} = -3.$$

Решение тренировочной карточки 4

$$1. \left(b + \frac{3-b^2}{b-2} \right) : \frac{3-2b}{b^2-4b+4} = \frac{b^2-2b+3-b^2}{b-2} \cdot \frac{(b-2)^2}{3-2b} = \frac{3-2b}{3-2b} (b-2) = b-2.$$

$$2. \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b^2-b} \right) \cdot \frac{b}{b+2} + \frac{4}{b^2-4} = \frac{b-1}{b(b-1)} \cdot \frac{b}{b+2} + \frac{4}{(b-2)(b+2)} = \\ = \frac{1}{b+2} + \frac{4}{(b-2)(b+2)} = \frac{b-2+4}{(b-2)(b+2)} = \frac{b+2}{(b-2)(b+2)} = \frac{1}{b-2}.$$

$$3. \left(x + 5 + \frac{50}{x-5} \right) : \frac{x^2+25}{x^2-10x+25} = \\ = \frac{x^2-25+50}{x-5} : \frac{x^2+25}{(x-5)^2} = \frac{x^2+25}{x-5} \cdot \frac{(x-5)^2}{x^2+25} = x-5.$$

$$4. \frac{5a-6}{a+2} + \frac{a}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a} + \frac{10-3a}{a+2} = \\ = \frac{5a-6+10-3a}{a+2} + a-2 = \frac{2(a+2)}{a+2} + a-2 = 2+a-2 = a.$$

$$5. \left(\frac{4b}{b+8} - \frac{9b}{b^2+16b+64} \right) \cdot \frac{b^2-64}{4b+23} + \frac{8(b-8)}{b+8} = \\ = b \left(\frac{4}{b+8} - \frac{9}{(b+8)^2} \right) \cdot \frac{(b-8)(b+8)}{4b+23} + \frac{8(b-8)}{b+8} = \\ = \frac{b[4(b+8)-9](b-8)(b+8)}{(b+8)^2(4b+23)} + \frac{8(b-8)}{b+8} = \\ = \frac{b(4b+23)(b-8)}{(b+8)(4b+23)} + \frac{8(b-8)}{b+8} = \frac{(b-8)(b+8)}{b+8} = b-8.$$

$$6. \left(\frac{2}{3-b} - \frac{4b}{9-b^2} + \frac{-1}{3+b} \right) (9+6b+b^2) = \\ = \frac{2(3+b)-4b-(3-b)}{(3-b)(3+b)} \cdot (3+b)^2 = \frac{3-b}{3-b} (3+b) = 3+b.$$

$$\begin{aligned}
 7. \left(\frac{28b}{b^2-49} + \frac{b-7}{b+7} \right) \cdot \frac{b}{b+7} - \frac{b}{b-7} &= \frac{28b + (b-7)^2}{(b-7)(b+7)} \cdot \frac{b}{b+7} - \frac{b}{b-7} = \\
 &= \frac{(28b + b^2 - 14b + 49)b}{(b-7)(b+7)^2} - \frac{b}{b-7} = \frac{(b+7)^2 b}{(b-7)(b+7)^2} - \frac{b}{b-7} = \frac{b}{b-7} - \frac{b}{b-7} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \frac{a^2}{3+a} \cdot \frac{9-a^2}{a^2-3a} + \frac{27+a^3}{3-a} : \left(3 + \frac{a^2}{3-a} \right) &= \\
 &= \frac{a^2(3-a)(a+3)}{(3+a)a(a-3)} + \frac{(27+a^3)}{3-a} : \frac{9-3a+a^2}{3-a} = \\
 &= -a + \frac{(3+a)(9-3a+a^2)}{3-a} \cdot \frac{3-a}{9-3a+a^2} = -a + 3 + a = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \left(\frac{9}{y^2-9} + \frac{3}{(3-y)^2} \right) : \frac{6}{(y-3)^2} + \frac{1-2y}{3+y} &= \\
 &= \frac{9(y-3)+3(y+3)}{(y+3)(y-3)^2} \cdot \frac{(y-3)^2}{6} + \frac{1-2y}{3+y} = \frac{9y-27+3y+9}{6(y+3)} + \frac{1-2y}{y+3} = \\
 &= \frac{6(2y-3)}{6(y+3)} + \frac{1-2y}{y+3} = \frac{2y-3+1-2y}{y+3} = -\frac{2}{y+3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \left(\frac{2}{x+1} + \frac{10}{x^2-3x-4} + \frac{3x}{x-4} \right) : \frac{3x+2}{3} + \frac{x-1}{4-x} &= \\
 &= \frac{2(x-4)+10+3x(x+1)}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{3}{(3x+2)} - \frac{x-1}{x-4} = \\
 &= \frac{2(x+1)+3x(x+1)}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{3}{(3x+2)} - \frac{x-1}{x-4} = \frac{(2+3x)(x+1)3}{(x+1)(x-4)(3x+2)} - \frac{x-1}{x-4} = \\
 &= \frac{3}{x-4} - \frac{x-1}{x-4} = \frac{4-x}{x-4} = -1, \text{ так как}
 \end{aligned}$$

$$x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + x - 4 = x(x-4) + (x-4) = (x-4)(x+1).$$

Решение тренировочной карточки 5

$$1. \left(2x - y - \frac{2x - y^2}{y} \right) \cdot \frac{a}{3xy - 3x} - \frac{a - 1}{y} = \frac{2xy - y^2 - 2x + y^2}{y} \cdot \frac{a}{3x(y - 1)} - \frac{a - 1}{y} =$$

$$= \frac{2x(y - 1)}{y} \cdot \frac{a}{3x(y - 1)} - \frac{a - 1}{y} = \frac{2a}{3y} - \frac{a - 1}{y} = \frac{2a - 3a + 3}{3y} = \frac{3 - a}{3y}.$$

$$2. \frac{m}{m^2 - 2m + 1} - \frac{1}{1 - m} \cdot \frac{m}{m + 1} - \frac{2}{m + 1} = \frac{m}{(m - 1)^2} + \frac{m}{(m - 1)(m + 1)} - \frac{2}{m + 1} =$$

$$= \frac{m(m + 1) + m(m - 1) - 2(m - 1)^2}{(m - 1)^2(m + 1)} = \frac{m^2 + m + m^2 - m - 2m^2 + 4m - 2}{(m - 1)^2(m + 1)} = \frac{4m - 2}{(m - 1)^2(m + 1)}.$$

$$3. \left(\frac{1}{1 - a} - \frac{1}{1 + a} - 1 \right) \cdot (a^2 - 1) = \frac{1 + a - (1 - a) - (1 - a^2)}{(1 - a)(1 + a)} \cdot (a^2 - 1) = -a^2 - 2a + 1.$$

$$4. \left(\frac{a}{b(b + a)} - \frac{a - b}{a^2 + ab} \right) : \left(\frac{b^2}{a^3 - ab^2} + \frac{1}{a + b} \right) = \frac{a^2 - ab + b^2}{ab(a + b)} : \frac{b^2 - ab + a^2}{a(a - b)(a + b)} = \frac{a - b}{b}.$$

$$5. \left(\frac{4y^2 + 21}{2y + 2} - 6 \right) : \frac{2xy + 4y - 3x - 6}{2 - 2y^2} = \frac{4y^2 + 21 - 12y - 12}{2(y + 1)} \cdot \frac{2(1 - y)(1 + y)}{(x + 2)(2y - 3)} =$$

$$= \frac{(2y - 3)^2}{2(y + 1)} \cdot \frac{2(1 + y)(1 - y)}{(x + 2)(2y - 3)} = \frac{(2y - 3)(1 - y)}{x + 2}.$$

$$6. \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{4x^2 - 1} \cdot \frac{2x^2 + x}{x^3 + 8} - \frac{x + 2}{2x^2 - x} \right) : \frac{4}{x^2 + 2x} - \frac{x + 4}{3 - 6x} =$$

$$= \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{(2x - 1)(2x + 1)} \cdot \frac{x(2x + 1)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} - \frac{x + 2}{x(2x - 1)} \right) \cdot \frac{x(x + 2)}{4} + \frac{x + 4}{3(2x - 1)} =$$

$$= \left(\frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} - \frac{x + 2}{x(2x - 1)} \right) \cdot \frac{x(x + 2)}{4} + \frac{x + 4}{3(2x - 1)} = \frac{x^2 - (x + 2)^2}{4(2x - 1)} + \frac{x + 4}{3(2x - 1)} =$$

$$= \frac{(x + x + 2)(x - x - 2)}{4(2x - 1)} + \frac{x + 4}{3(2x - 1)} = \frac{-4(x + 1)}{4(2x - 1)} + \frac{x + 4}{3(2x - 1)} =$$

$$= \frac{-3x - 3 + x + 4}{3(2x - 1)} = \frac{1 - 2x}{3(2x - 1)} = -\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} - \frac{3x + 4}{3x + 3} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{3} = \\
 & = \left(\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)^2} - \frac{3x+4}{3(x+1)} \right) \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{3} = \\
 & = \frac{3(x+2) - 3x - 4}{3(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{2}{9} (x-1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2 - a^2} \right) \cdot \frac{a}{a+b} - \left(\frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a-b}{a+b} = \\
 & = \frac{a(a-b) + b(a+b) - 2ab}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a}{(a+b)} - \frac{-b(a+b) - 2ab}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{a-b}{a+b} = \\
 & = \frac{a^2 - ab + ab + b^2 - 2ab}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a}{(a+b)} + \frac{ab + b^2 + 2ab}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2 a}{(a+b)^2 (a-b)} + \frac{b^2 + 3ab}{(a+b)^2} = \\
 & = \frac{a^2 - ab + b^2 + 3ab}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & ab + \frac{ab}{a+b} \cdot \left(\frac{a+b}{a-b} - a-b \right) = \\
 & = ab + \frac{ab(a+b)}{a+b} \cdot \frac{1-a+b}{a-b} = ab \left(1 + \frac{1-a+b}{a-b} \right) = ab \cdot \frac{a-b+1-a+b}{a-b} = \frac{ab}{a-b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} - \frac{3x^2 + 7x - 10}{3x+10} - \frac{5-4x-9x^2}{x+1} = x-2 - (x-1) - (-9x+5) = \\
 & = x-2-x+1+9x-5 = 9x-6.
 \end{aligned}$$

Необходимо учесть, что:

а) $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)$;

б) $3x^2 + 7x - 10 = 3x^2 - 3x + 10x - 10 = 3x(x-1) + 10(x-1) = (x-1)(3x+10)$;

в) $5 - 4x - 9x^2 = -9x^2 - 4x + 5 = -9x^2 - 9x + 5x + 5 = -9x(x+1) + 5(x+1) = (x+1)(-9x+5)$.

Решение тренировочной карточки 6

$$1. \left(3a-1-\frac{3a-1}{x}\right) \cdot \frac{x}{2x-2} - 2a = \frac{(3a-1)(x-1)x}{x \cdot 2(x-1)} - 2a = \frac{3a-1}{2} - 2a = -\frac{1+a}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2. & \left(\frac{1+x}{1-2x+x^2} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \\ & = \left(\frac{1+x}{(1-x)^2} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \\ & = \frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)^2(x+1)} \cdot \frac{(x-1)}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{4x(x-1)}{(x-1)^2(x+1)x} + \frac{2}{x+1} = \\ & = \frac{4}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{2(2+x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \left(1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+1) - (x+1) + x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{1} = \\ & = \frac{x^2-1-x-1+x-1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{1} = \frac{(x^2-3)(x^2-1)}{x^2-1} = x^2 - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. & \left(\frac{y}{2x^2+xy} - \frac{x}{2xy+y^2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2-y^2} - \frac{x+y}{x^2-xy}\right) = \\ & \frac{y^2-x^2}{(2x+y)xy} \cdot \left(\frac{x}{(x-y)(x+y)} - \frac{x+y}{x(x-y)}\right) = \frac{y^2-x^2}{(2x+y)xy} \cdot \frac{x^2-(x+y)^2}{(x-y)x(x+y)} = \\ & = \frac{(y-x)(y+x)(x^2-x^2-2xy-y^2)}{xy(2x+y)(x-y)x(x+y)} = \frac{-(-2xy-y^2)}{x^2y(2x+y)} = \frac{y(2x+y)}{x^2y(2x+y)} = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. & \left(4 - \frac{9x^2-8}{3x-3}\right) : \frac{2a+6x-3ax-9x^2}{2x^2-2} = \\ & = \frac{12x-12-9x^2+8}{3(x-1)} : \frac{2(a+3x)-3x(a+3x)}{2(x-1)(x+1)} = \\ & = \frac{-(9x^2-12x+4)}{3(x-1)} : \frac{(a+3x)(2-3x)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{-(3x-2)^2}{3(x-1)} \cdot \frac{2(x-1)(x+1)}{(a+3x)(2-3x)} = -\frac{2(3x-2)(x+1)}{3(a+3x)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & \left(\frac{c+5}{5c-1} + \frac{c+5}{c+1} \right) : \frac{c^2+5c}{1-5c} + \frac{c^2+5}{c+1} = \\
 & = \frac{(c+1)(c+5) + (c+5)(5c-1)}{(c+1)(5c-1)} \cdot \frac{1-5c}{c(c+5)} + \frac{c^2+5}{c+1} = \frac{-(c+5)(c+1+5c-1)}{(c+1)c(c+5)} + \frac{c^2+5}{c+1} = \\
 & = \frac{-6c}{c(c+1)} + \frac{c^2+5}{c+1} = \frac{-6}{c+1} + \frac{c^2+5}{c+1} = \frac{c^2-1}{c+1} = \frac{(c+1)(c-1)}{c+1} = c-1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & \left(\frac{3x^2+8x-7}{3x^2-3} - \frac{x+3}{x+1} \right) : \frac{2}{x^2-2x+1} = \\
 & = \frac{3x^2+8x-7 - (x+3)(x-1) \cdot 3}{3(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} = \\
 & = \frac{3x^2+8x-7-3x^2-6x+9}{3(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{2(x+1)(x-1)^2}{3(x-1)(x+1) \cdot 2} = \frac{x-1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \left(\frac{2}{2+m} - \frac{m}{m-2} - \frac{4}{4-m^2} \right) : \left(\frac{2}{2+m} + \frac{4}{m^2-4} + \frac{m}{2-m} \right) = \\
 & = \frac{2(m-2) - m(m+2) + 4}{(2+m)(m-2)} : \frac{2(m-2) + 4 - m(m+2)}{(2+m)(m-2)} = \\
 & = \frac{2m-4-m^2-2m+4}{(2+m)(m-2)} \cdot \frac{(2+m)(m-2)}{-m^2-2m+2m-4+4} = \frac{-m^2}{-m^2} = 1.
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \frac{3}{x+y} - \frac{3(1-x^2+y^2)}{x+y} = \frac{3-3+3x^2-3y^2}{x+y} = \frac{3(x-y)(x+y)}{x+y} = 3(x-y).$$

$$10. \quad \frac{x^2+7x-8}{x-1} - \frac{7x^2+3x-10}{7x+10} - \frac{4-5x-9x^2}{x+1} = x+8 - (x-1) - (4-9x) = 9x+5.$$

так как

$$\text{а) } x^2+7x-8 = x^2+8x-x-8 = x(x+8)-(x+8) = (x+8)(x-1);$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } 7x^2+3x-10 &= 7x^2-7x+10x-10 = \\
 &= 7x(x-1)+10(x-1) = (x-1)(7x+10);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } 4-5x-9x^2 &= -9x^2-5x+4 = -9x^2-9x+4x+4 = \\
 &= -9x(x+1)+4(x+1) = (x+1)(-9x+4).
 \end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 7

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{m^2 + n^2}{(m-n)^2} = \\
 & = \frac{2}{mn} : \left(\frac{m-n}{mn} \right)^2 - \frac{m^2 + n^2}{(m-n)^2} = \frac{2mn}{(m-n)^2} - \frac{m^2 + n^2}{(m-n)^2} = \\
 & = -\frac{m^2 + n^2 - 2mn}{(m-n)^2} = -\frac{(m-n)^2}{(m-n)^2} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \left(\frac{5x^2 - 15xy}{x^2 - 9y^2} - \frac{3xy + 9y^2}{x^2 + 6xy + 9y^2} \right) : \left(\frac{5}{y} - \frac{3}{x} \right) = \\
 & = \left(\frac{5x(x-3y)}{(x+3y)(x-3y)} - \frac{3y(x+3y)}{(x+3y)^2} \right) : \frac{5x-3y}{xy} = \\
 & = \left(\frac{5x}{x+3y} - \frac{3y}{x+3y} \right) \cdot \frac{xy}{5x-3y} = \\
 & = \frac{5x-3y}{(x+3y)} \cdot \frac{xy}{(5x-3y)} = \frac{xy}{x+3y}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \left(\frac{1}{(2a-b)^2} + \frac{2}{4a^2-b^2} + \frac{1}{(2a+b)^2} \right) \cdot \frac{4a^2+4ab+b^2}{16a} = \\
 & = \frac{(2a+b)^2 + 2(4a^2-b^2) + (2a-b)^2}{(2a-b)^2(2a+b)^2} \cdot \frac{(2a+b)^2}{16a} = \\
 & = \frac{(2a+b+2a-b)^2}{(2a-b)^2(2a+b)^2} \cdot \frac{(2a+b)^2}{16a} = \\
 & = \frac{16a^2}{(2a-b)^2 16a} = \frac{a}{(2a-b)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \left(x - \frac{4xy}{x+y} + y \right) \cdot \left(x + \frac{4xy}{x-y} - y \right) = \\
 & = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x+y} \cdot \frac{(x-y)^2 + 4xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = x^2 - y^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. & \left(\frac{0,5b - 1,5}{0,5b^2 - 1,5b + 4,5} - \frac{2b - 6}{\frac{1}{3}b^3 + 9} \right) : \frac{b - 3}{0,8b^3 + 21,6} = \\
 & = \left(\frac{0,5(b - 3)}{0,5(b^2 - 3b + 9)} - \frac{2(b - 3)}{\frac{1}{3}(b^3 + 27)} \right) : \frac{b - 3}{0,8(b^3 + 27)} = \\
 & = (b - 3) \left(\frac{1}{b^2 - 3b + 9} - \frac{6}{b^3 + 27} \right) \cdot \frac{0,8(b^3 + 27)}{b - 3} = \\
 & = \frac{b + 3 - 6}{b^3 + 27} \cdot \frac{0,8(b^3 + 27)}{1} = 0,8(b - 3).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. & \frac{x - \frac{yz}{y-z}}{y - \frac{xz}{x-z}} = \\
 & = \frac{xy - xz - yz}{y - z} : \frac{yx - yz - xz}{x - z} = \frac{xy - xz - yz}{yx - yz - xz} \cdot \frac{x - z}{y - z} = \frac{x - z}{y - z}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. & \frac{\frac{3}{2}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2} + \frac{6b}{\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b} = \\
 & = \frac{\frac{1}{6}(9a^2 - 12ab + 4b^2)}{\frac{1}{36}(9a^2 - 4b^2)} + \frac{6b}{\frac{1}{4}(3a + 2b)} = \\
 & = \frac{6(3a - 2b)^2}{(3a - 2b)(3a + 2b)} + \frac{24b}{3a + 2b} = \\
 & = \frac{6(3a - 2b)}{3a + 2b} + \frac{24b}{3a + 2b} = \\
 & = \frac{18a - 12b + 24b}{3a + 2b} = \frac{6(3a + 2b)}{3a + 2b} = 6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. & \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{1}{2c - 3} : \left(\frac{4}{4c^2 - 9} - \frac{6c - 9}{8c^3 + 27} \right) = \\
 & = \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{1}{2c - 3} : \left(\frac{4}{(2c + 3)(2c - 3)} - \frac{6c - 9}{(2c + 3)(4c^2 - 6c + 9)} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{1}{2c - 3} : \frac{4(4c^2 - 6c + 9) - 3(2c - 3)^2}{(2c - 3)(2c + 3)(4c^2 - 6c + 9)} = \\
&= \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{1}{2c - 3} \cdot \frac{(2c - 3)(2c + 3)(4c^2 - 6c + 9)}{16c^2 - 24c + 36 - 12c^2 + 36c - 27} = \\
&= \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{1}{2c - 3} \cdot \frac{(2c - 3)(2c + 3)(4c^2 - 6c + 9)}{4c^2 + 12c + 9} = \\
&= \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{(2c + 3)(4c^2 - 6c + 9)}{(2c + 3)^2} = \\
&= \frac{12c - 4c^2}{2c + 3} + \frac{4c^2 - 6c + 9}{2c + 3} = \frac{6c + 9}{2c + 3} = \frac{3(2c + 3)}{2c + 3} = 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad &\left(\frac{3x^2 + 5x - 14}{3x^2 - 12} - \frac{x + 3}{x + 2} \right) : \frac{2}{x^2 - 4x + 4} = \\
&\frac{3x^2 + 5x - 14 - 3(x - 2)(x + 3)}{3(x - 2)(x + 2)} : \frac{2}{x^2 - 4x + 4} = \\
&= \frac{3x^2 + 5x - 14 - 3x^2 - 3x + 18}{3(x - 2)(x + 2)} : \frac{2}{2x^2 - 4x + 4} = \frac{2x + 4}{3(x - 2)(x + 2)} = \\
&= \frac{2}{3(x - 2)} : \frac{2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2}{3(x - 2)} \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} = \frac{x - 2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \quad &\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} + \frac{(3x - x^2 - 2)^2}{x^2 - 4x + 4} = \\
&= 2x - 1 + (-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 1 = x^2, \text{ так как}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{а) } &2x^2 + x - 1 = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x(x + 1) - (x + 1) = \\
&= (x + 1)(2x - 1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } &3x - x^2 - 2 = -(x^2 - 3x + 2) = -(x^2 - 2x - x + 2) = \\
&= -(x(x - 2) - (x - 2)) = -(x - 2)(x - 1).
\end{aligned}$$

Решение тренировочной карточки 8

$$\begin{aligned}
 1. & \left(\frac{4a^2 - 6ac}{4a^2 - 12ac + 9c^2} - \frac{6ac + 9c^2}{4a^2 + 12ac + 9c^2} \right) \cdot \frac{6a + 9c}{4a^2 + 9c^2} = \\
 & = \left(\frac{4a^2 - 6ac}{(2a - 3c)^2} - \frac{6ac + 9c^2}{(2a + 3c)^2} \right) \cdot \frac{6a + 9c}{4a^2 + 9c^2} = \\
 & = \left(\frac{2a(2a - 3c)}{(2a - 3c)^2} - \frac{3c(2a + 3c)}{(2a + 3c)^2} \right) \cdot \frac{3(2a + 3c)}{4a^2 + 9c^2} = \\
 & = \left(\frac{2a}{2a - 3c} - \frac{3c}{2a + 3c} \right) \cdot \frac{3(2a + 3c)}{4a^2 + 9c^2} = \\
 & = \frac{2a(2a + 3c) - 3c(2a - 3c)}{(2a - 3c)(2a + 3c)} \cdot \frac{3(2a + 3c)}{4a^2 + 9c^2} = \\
 & = \frac{4a^2 + 6ac - 6ac + 9c^2}{(2a - 3c)} \cdot \frac{3}{(4a^2 + 9c^2)} = \frac{3}{2a - 3c}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. & \frac{4c^2}{(c-2)^4} : \left(\frac{1}{(c+2)^2} + \frac{1}{(c-2)^2} + \frac{2}{c^2-4} \right) = \\
 & = \frac{4c^2}{(c-2)^4} : \frac{(c-2)^2 + (c+2)^2 + 2(c^2-4)}{(c+2)^2(c-2)^2} = \\
 & = \frac{4c^2}{(c-2)^4} \cdot \frac{(c+2)^2(c-2)^2}{c^2-4c+4+c^2+4c+4+2c^2-8} = \\
 & = \frac{4c^2(c+2)^2}{(c-2)^2 4c^2} = \frac{(c+2)^2}{(c-2)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. & \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1 \right) : \left(1 - \frac{1}{1-a} \right) = \\
 & = \frac{a - a^2 - 1 + 2a^2 + 1 - a}{1-a} : \frac{1-a-1}{1-a} = \frac{a^2}{1-a} \cdot \frac{1-a}{-a} = -a.
 \end{aligned}$$

$$4. \left(\frac{a}{0,5a+1} + \frac{\frac{2}{3}a}{2-a} + \frac{2a}{\frac{1}{4}a^2-1} \right) \cdot \frac{0,5a-1}{0,5a-2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{a}{0,5(a+2)} + \frac{2a}{3(2-a)} + \frac{2a}{\frac{1}{4}(a^2-4)} \right) \cdot \frac{0,5(a-2)}{0,5(a-4)} = \\
&= \left(\frac{2a}{a+2} + \frac{2a}{3(2-a)} + \frac{8a}{a^2-4} \right) \cdot \frac{a-2}{a-4} = \\
&= 2a \left(\frac{3(a-2) - (a+2) + 12}{3(a-2)(a+2)} \right) \cdot \frac{a-2}{a-4} = \\
&= 2a \frac{(2a+4)(a-2)}{3(a-2)(a+2)(a-4)} = \frac{4a}{3(a-4)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \left(\frac{a-x}{a} + \frac{x}{a-x} \right) : \left(\frac{a+x}{a} - \frac{x}{a+x} \right) &= \\
&= \frac{(a-x)^2 + ax}{a(a-x)} : \frac{(a+x)^2 - ax}{a(a+x)} = \frac{a(a^2 - ax + x^2)(a+x)}{a(a^2 + ax + x^2)(a-x)} = \frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \left(\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 2x + 1} - \frac{4x + 5}{2x - 2} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{5} &= \\
&= \frac{2(2x^2 + 3x - 5) - (4x + 5)(x - 1)}{2(x - 1)^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{5} = \\
&= \frac{4x^2 + 6x - 10 - 4x^2 - x + 5}{2(x - 1)^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{5} = \\
&= \frac{5x - 5}{2(x - 1)^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{5} = \frac{5(x - 1)(x - 1)(x + 1)}{10(x - 1)^2} = \frac{x + 1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \left(\frac{4}{a^2 - 4a} - \frac{3a + 32}{a^3 - 64} \right) : \frac{a - 8}{a^3 + 4a^2 + 16a} - \frac{4}{4 - a} &= \\
&= \frac{4(a^2 + 4a + 16) - 3a^2 - 32a}{a(a - 4)(a^2 + 4a + 16)} \cdot \frac{a(a^2 + 4a + 16)}{a - 8} - \frac{4}{4 - a} = \\
&= \frac{a(a^2 - 16a + 64)}{a(a - 4)(a - 8)} - \frac{4}{4 - a} = \frac{(a - 8)^2 a}{a(a - 4)(a - 8)} - \frac{4}{4 - a} = \\
&= \frac{a - 8}{a - 4} - \frac{4}{4 - a} = \frac{a - 8 + 4}{a - 4} = \frac{a - 4}{a - 4} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & \frac{y}{x+y} + \left(\frac{2x+1}{x+y} - \frac{2xy+y}{y^2-x^2} \right) : \frac{2x+1}{x-y} = \\
 & = \frac{y}{x+y} + \frac{(2x+1)(y-x) - 2xy - y}{(y+x)(y-x)} \cdot \frac{x-y}{2x+1} = \frac{y}{x+y} + \frac{(2x+1)(y-x) - y(2x+1)}{(y+x)(y-x)} = \\
 & = \frac{y}{x+y} - \frac{(2x+1)(y-x-y)}{(y+x)(2x+1)} = \frac{y}{x+y} - \frac{-x}{x+y} = \frac{y+x}{x+y} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} = \\
 & = \frac{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \\
 & = \frac{x^2y - x^2z - y^2x + y^2z + z^2x - z^2y}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \\
 & = \frac{x^2(y-z) - x(y-z)(y+z) + yz(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \\
 & = \frac{(y-z)(x^2 - x(y+z) + yz)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \frac{x^2 - xy - xz + yz}{(x-y)(x-z)} = \\
 & = \frac{x(x-y) - z(x-y)}{(x-y)(x-z)} = \frac{(x-y)(x-z)}{(x-y)(x-z)} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1} + \frac{(4x - x^2 - 3)^2}{x^2 - 6x + 9} = \\
 & = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1} + \left(\frac{4x - x^2 - 3}{x-3} \right)^2 = 2x - 1 + (-x + 1)^2 = \\
 & = 2x - 1 + x^2 - 2x + 1 = x^2, \quad \text{так как}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & 2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1 = \\
 & = 2x(x-1) - (x-1) = (x-1)(2x-1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } & 4x - x^2 - 3 = -(x^2 - 4x + 3) = -(x^2 - 3x - x + 3) = \\
 & = -(x(x-3) - (x-3)) = -(x-3)(x-1).
 \end{aligned}$$

Зачетная карточка 1

1. $\left(m^2 + \frac{6 - m^4}{m^2 - 1}\right) \cdot \frac{1 + m}{6 - m^2}$.
2. $\frac{2m}{m^2 - 4} - \frac{2}{m^2 - 4} : \left(\frac{m + 1}{2m - 2} - \frac{1}{m - 1}\right)$.
3. $\left(m - 4 + \frac{32}{m + 4}\right) \cdot \frac{m^2 + 8m + 16}{m^2 + 16}$.
4. $\frac{3 - x^2}{x^2 - 1} + \frac{3x}{x^2 - 1} : \frac{x}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1}$.
5. $\left(\frac{-1}{a - 2} + \frac{8}{a^2 - 4} + \frac{2}{a + 2}\right) (a^2 - 4a + 4)$.
6. $\left(\frac{2x}{x - 7} + \frac{7x}{x^2 - 14x + 49}\right) : \frac{2x - 7}{x^2 - 49} - \frac{7(x + 7)}{x - 7}$.
7. $\left(\frac{20x}{25 - x^2} + \frac{5 - x}{5 + x}\right) : \frac{5 + x}{5} - \frac{5}{5 - x}$.
8. $\frac{8 - n^3}{2 + n} : \left(2 + \frac{n^2}{n + 2}\right) - \frac{n^2}{n - 2} \cdot \frac{4 - n^2}{n^2 + 2n}$.
9. $\left(\frac{2}{(1 - x)^2} + \frac{1}{x^2 - 1}\right) \cdot (x - 1)^2 - \frac{3x}{x + 1}$.
10. $\left(\frac{1}{x + 2} + \frac{5}{x^2 - x - 6} + \frac{2x}{x - 3}\right) \cdot \frac{x}{2x + 1} - \frac{x - 9}{2(3 - x)}$.

Зачетная карточка 2

1. $\left(a + \frac{2 + a^2}{1 - a} \right) \cdot \frac{1 - 2a + a^2}{a + 2}$.
2. $\frac{b^2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} : \left(\frac{2}{2b - b^2} - \frac{1}{2 - b} \right)$.
3. $\left(b + 3 + \frac{18}{b - 3} \right) \cdot \frac{b^2 - 6b + 9}{b^2 + 9}$.
4. $\frac{7 - 5m}{m - 4} + \frac{4m}{m + 4} \cdot \frac{m^2 - 16}{4m} + \frac{9m - 23}{m - 4}$.
5. $\left(\frac{1}{3 + a} - \frac{6}{9 - a^2} + \frac{2}{3 - a} \right) \cdot (9 - 6a + a^2)$.
6. $\left(\frac{3a}{a + 6} - \frac{2a}{a^2 + 12a + 36} \right) : \frac{3a + 16}{a^2 - 36} + \frac{6(a - 6)}{a + 6}$.
7. $\left(\frac{16b}{16 - b^2} + \frac{4 - b}{4 + b} \right) : \frac{4 + b}{4} - \frac{4}{4 - b}$.
8. $\left(\frac{a - 1}{a + 1} + \frac{a^3 + 1}{a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{a - 1}{a^2 - a + 1} \right) : \frac{a^2 + 1}{a + 1}$.
9. $\left(\frac{4}{4 - x^2} - \frac{4}{(x - 2)^2} \right) : \frac{2}{(2 - x)^2} + \frac{4x + 1}{x + 2}$.
10. $\frac{a + 4}{5(a - 1)} : \left(\frac{9(a - 1)}{3a + 4} - \frac{(2a - 7)^2}{3a^2 + a - 4} \right) + \frac{2}{5(2 - a)}$.

Зачетная карточка 3

$$1. \left(x + \frac{5 - x^2}{1 + x} \right) : \frac{x + 5}{x^2 + 2x + 1}.$$

$$2. \left(\frac{x + 10}{5x + 25} - \frac{1}{x + 5} \right) \cdot \frac{5}{x - 5} - \frac{10}{x^2 - 25}.$$

$$3. \left(a - 1 + \frac{2}{a + 1} \right) : \frac{a^2 + 1}{a^2 + 2a + 1}.$$

$$4. \frac{-a - 24}{a - 5} + \frac{a}{a + 5} : \frac{a}{a^2 - 25} + \frac{6a - 1}{a - 5}.$$

$$5. \left(\frac{2}{a - 2} - \frac{8}{a^2 - 4} + \frac{-1}{a + 2} \right) \cdot (a^2 + 4a + 4).$$

$$6. \left(\frac{2m}{m - 5} + \frac{m}{m^2 - 10m + 25} \right) \cdot \frac{m^2 - 25}{2m - 9} - \frac{5(m + 5)}{m - 5}.$$

$$7. \left(\frac{8a}{a^2 - 4} + \frac{a - 2}{a + 2} \right) \cdot \frac{a}{a + 2} - \frac{a}{a - 2}.$$

$$8. \left(\frac{m + 2}{m + 1} - \frac{8m^2 - 8}{m^3 - 1} : \frac{4m + 4}{m^2 + m + 1} \right) \cdot \frac{1}{m}.$$

$$9. \frac{(1 - b)^2}{2b} \cdot \left(\frac{1}{(b - 1)^2} - \frac{1}{1 - b^2} \right) - \frac{2}{1 + b}.$$

$$10. \left(\frac{4}{5a^2 + a - 4} - \frac{a + 1}{9(5a - 4)} \right) \cdot \frac{15a - 12}{a + 7} - \frac{2}{a + 1}.$$

Зачетная карточка 4

$$1. \left(x + \frac{3 - x^2}{x + 1} \right) : \frac{x + 3}{1 - x^2}.$$

$$2. \left(\frac{x + 4}{3x + 3} - \frac{1}{x + 1} \right) : \frac{x + 1}{3} + \frac{2}{x^2 - 1}.$$

$$3. \left(a - 2 + \frac{8}{a + 2} \right) \cdot \frac{a^2 + 4a + 4}{a^2 + 4}.$$

$$4. \frac{5m - 21}{m^2 - 9} + \frac{m}{m^2 - 9} \cdot \frac{m + 3}{m} + \frac{m - 3}{m + 3}.$$

$$5. \left(\frac{4}{a + 1} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{-1}{a - 1} \right) \cdot (a^2 + 2a + 1).$$

$$6. \left(\frac{3a}{a - 4} + \frac{10a}{a^2 - 8a + 16} \right) \cdot \frac{a^2 - 16}{3a - 2} + \frac{4(a + 4)}{4 - a}.$$

$$7. \left(\frac{12b}{9 - b^2} + \frac{3 - b}{3 + b} \right) : \frac{3 + b}{3} - \frac{3}{3 - b}.$$

$$8. \left(\frac{1}{2 - 6a} + \frac{1}{27a^3 - 1} : \frac{1 + 3a}{1 + 3a + 9a^2} \right) \cdot \frac{2 + 6a}{a}.$$

$$9. \frac{2}{x - 1} + \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \left(\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{x}{1 - x^2} \right).$$

$$10. \left(\frac{3a - 1}{a^2 - 4} - \frac{9a}{3a^2 + 5a - 2} \right) \cdot \frac{15a^3 - 60a}{12a + 1} + \frac{5}{1 - 3a}.$$

Зачетная карточка 5

1. $\frac{(2a - b)^2}{a - b} + \frac{b^2}{b - a}$.
2. $\frac{x^3 + y^3}{(x - y)^2} + \frac{3xy^2 - y^3}{(y - x)^2} + \frac{3x^2y + y^3}{2xy - x^2 - y^2}$.
3. $\frac{a^3}{a - 3} - \frac{3a^3 + 81}{a^2 - 9}$.
4. $\frac{a - 1}{2a + 2} + \frac{a + 1}{3 - 3a} + \frac{5a^3 - 1}{3a^2 - 3}$.
5. $\frac{a^2 - bc}{a^2 - ab + bc - ac} + \frac{3b - a}{2b - 2a} + \frac{a + 2c}{3a - 3c}$.
6. $\frac{x - 2}{(2x + 4)^2} : \left(\frac{x}{2x - 4} - \frac{x^2 + 4}{2x^2 - 8} - \frac{2}{x^2 + 2x} \right)$.
7. $1 : \left(\frac{a}{a - b} + \frac{4a^2b - ab^2}{b^3 - a^3} + \frac{b^2}{a^2 + ab + b^2} \right) - \frac{3ab}{(a - b)^2}$.
8. $\left(\frac{2a - 3b}{a - 7b} - 2 + \frac{a - 7b}{2a - 3b} \right) \cdot \left(\frac{23a - 29b}{a^2 + 8ab + 16b^2} - \frac{15a - 21b}{a^2 + 4ab} \right)$.
9. $\frac{ab + cd}{(a + c)(b - c)} + \frac{ac + bd}{(a + b)(c - b)} + \frac{ad + bc}{(a + b)(a + c)}$.
10. $\frac{2}{3 - a} + \frac{a + 3}{a - 2} : \left(\frac{9(a - 2)}{3a + 1} - \frac{(2a - 9)^2}{3a^2 - 5a - 2} \right)$.

Зачетная карточка 6

$$1. \frac{(3a - 2b)^2}{b - 3a} + \frac{9a^2}{3a - b}.$$

$$2. \frac{12bc^2 + b^3}{(b - 2c)^2} - \frac{6b^2c + 5c^3}{(2c - b)^2} + \frac{3c^3}{4bc - 4c^2 - b^2}.$$

$$3. \frac{4 + 10x + 25x^2}{2 + 5x} - \frac{4 - 10x + 25x^2}{2 - 5x}.$$

$$4. \frac{(2y + 3z)^2}{2y - 3z} - \frac{(2y - 3z)^2}{2y + 3z}.$$

$$5. \frac{1}{c^2 - cd} - \frac{1}{d^2 - cd} - \frac{4}{c^2 - d^2}.$$

$$6. \frac{1}{y - 5z} - \frac{z}{x^2 + 2xy} - \frac{x + y + 5z}{xy - 10yz - 5xz + 2y^2}.$$

$$7. \left(\frac{b^2 + 9}{27 - 3b^2} + \frac{b}{3b + 9} - \frac{3}{b^2 - 3b} \right) : \frac{(3b + 9)^2}{3b^2 - b^3}.$$

$$8. \left(\frac{2x + 5y}{x^2 - 2xy} - \frac{9y}{x^2 - 4xy + 4y^2} \right) \cdot \left(\frac{x - 5y}{x + y} + 2 + \frac{x + y}{x - 5y} \right).$$

$$9. \left(\left(\frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{y^2}{(y+1)^2} \right) : \left(\frac{x}{(x+1)^2} - \frac{y}{(y+1)^2} \right) + 1 \right) \cdot \frac{1 - xy}{(x+y)(y+1)}.$$

$$10. \left(\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x^2 - 3x - 4} + \frac{2x - 2}{x - 4} \right) \cdot \frac{x - 1}{2x - 1} - \frac{x - 10}{2(4 - x)}.$$

Зачетная карточка 7

1. $\frac{(3a - b)^3}{a - b} - \frac{b^3 - 9ab^2}{b - a}$.
2. $\frac{a^2 + 5a}{a^2 - 18a + 81} - \frac{50 - 3a}{18a - 81 - a^2} - \frac{131 + 2a}{(9 - a)^2}$.
3. $\frac{ad - bc}{2cd(c + d)} + \frac{ad + bc}{2cd(c - d)}$.
4. $\frac{(5v + 2t)^2}{5v - 2t} + \frac{(5v - 2t)^2}{5v + 2t}$.
5. $\frac{4b}{4b^2 - 1} + \frac{2b + 1}{3 - 6b} + \frac{2b - 1}{4b + 2}$.
6. $\frac{c + 6b}{ac + 2bc - 6ab - 3a^2} + \frac{2b}{a^2 + 2ab} - \frac{b}{ac - 3a^2}$.
7. $\frac{t^2(x - y)(y - z) + y^2(z - t)(x - t)}{z^2(x - y)(x - t) + x^2(y - z)(z - t)}$.
8. $\left(\left(\frac{4a}{(a - b)^3} - \frac{a}{a^3 - b^3} \right) \cdot \left(\frac{a - b}{a + b} \right)^3 - \frac{3}{a^2 - b^2} \right) : \frac{3b^2}{a^6 - b^6}$.
9. $\left(\frac{x - 2y}{3xy + 6y^2} - x^2 + 2xy \right) \cdot \frac{x + 2y}{x^2 - 2xy} + \frac{6xy^2 - 1}{3xy}$.
10. $\frac{a + 7}{a + 2} : \left(\frac{9(a + 2)}{3a + 13} - \frac{(2a - 1)^2}{3a^2 + 19a + 26} \right) - \frac{2}{a + 1}$.

Зачетная карточка 8

$$1. \frac{(5x-1)^3}{5x-3} + \frac{-1+15x}{3-5x}.$$

$$2. \frac{x^3+50}{10x-x^2-25} + \frac{2x^2}{(x-5)^2} + \frac{25x}{(5-x)^2}.$$

$$3. \frac{9m^2-12mn+16n^2}{3m-4n} + \frac{9m^2+12mn+16n^2}{3m+4n}.$$

$$4. \frac{(4v-q)^2}{4q-v} + \frac{(4q-v)^2}{4v-q}.$$

$$5. \frac{2a+3c}{4a+2c} - \frac{2b-3a}{9a+3b} + \frac{6a^2-bc}{6a^2+2ab+3ac+bc}.$$

$$6. \frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{(a-c)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(b-c)}.$$

$$7. \left(\frac{4z^3}{(z+2)^3} - \frac{z^3}{z^3+8} \right) : \left(\frac{z-2}{z+2} \right)^2 - \frac{2(z^3-4)}{z^3+8}.$$

$$8. \left(\frac{x+4y}{\frac{16x^2}{4y-x} + 4y+7x} - \frac{1}{1 + \frac{8x(x+4y)}{(x-4y)^2}} \right) : \frac{4y-x}{(3x+4y)^2}.$$

$$9. \frac{y+1}{x^2-x+2xy-y+y^2} + \frac{x+y}{xy-x+y^2-2y+1} - \frac{y^2}{(x+y)(y-1)(x+y-1)}.$$

$$10. \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+11}{x^3-3x^2-6x+8} : \left(\frac{x-4}{2x^2+x-6} - \frac{9}{8+2x-x^2} \right).$$

4

Решения

Решение проверочной работы 1

Выполните действия:

$$1. (-5a^2 + 3a^3b)(-2ab^2) = 10a^3b^2 - 6a^4b^3.$$

$$2. (3a^2 - a + 2)(2a - 3) = \\ = 6a^3 - 2a^2 + 4a - 9a^2 + 3a - 6 = 6a^3 - 11a^2 + 7a - 6$$

$$3. (4x - 3)2x - (2x + 1)(3x - 2) - 2x^2 = \\ = 8x^2 - 6x - 6x^2 - 3x + 4x + 2 - 2x^2 = -5x + 2.$$

$$4. a^2(c - 3a) - (c^2(a + 3c) - c(3c^2 + ac - a^2) + 2a^3) = \\ = a^2c - 3a^3 - (c^2a + 3c^3 - (3c^3 + ac^2 - a^2c) + 2a^3) = \\ = a^2c - 3a^3 - (c^2a + 3c^3 - 3c^3 - ac^2 + a^2c + 2a^3) = \\ = a^2c - 3a^3 - c^2a + a^2c - 2a^3 + ac^2 - a^2c = -5a^3.$$

$$5. (6x - 7)(6x + 7) = \\ = 36x^2 - 42x + 42x - 49 = 36x^2 - 49.$$

$$\begin{aligned} 6. (4x + 5)(16x^2 - 20x + 25) &= \\ &= 64x^3 - 80x^2 + 100x + 80x^2 - 100x + 125 = 64x^3 + 125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. (7x + 3)(7x + 3) &= \\ &= 49x^2 + 21x + 21x + 9 = 49x^2 + 42x + 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. (3x + 1)(3x + 1)(3x + 1) &= \\ &= (3x + 1)(9x^2 + 3x + 3x + 1) = (3x + 1)(9x^2 + 6x + 1) = \\ &= 27x^3 + 18x^2 + 3x + 9x^2 + 6x + 1 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. (2x - 5)(2x - 5)(2x - 5) &= \\ &= (2x - 5)(4x^2 - 10x - 10x + 25) = (2x - 5)(4x^2 - 20x + 25) = \\ &= 8x^3 - 40x^2 + 50x - 20x^2 + 100x - 125 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. (4 + 6x + 3x^2)(4 - 6x + 3x^2) &= \\ &= 16 - 24x + 12x^2 + 24x - 36x^2 + 18x^3 + 12x^2 - 18x^3 + 9x^4 = \\ &= 9x^4 - 12x^2 + 16. \end{aligned}$$

Решение проверочной работы 2

1. Разложите на множители методом вынесения общего множителя:

$$1) 3ab^2 + b^3 = b^2 (3a + b).$$

$$2) 4x^2y^3 - 6x^3y^2 = 2x^2y^2 (2y - 3x).$$

$$3) a(2x - 3y) - c(2x - 3y) = (2x - 3y)(a - c).$$

$$4) 6(p - 2g) + 3p(2g - p) = 6(p - 2g) - 3p(p - 2g) = \\ = (p - 2g)(6 - 3p) = 3(p - 2g)(2 - p).$$

$$5) 6x^2(x - 2y)^2 - 9x(2y - x)^3 = 6x^2(2y - x)^2 - 9x(2y - x)^3 = \\ = (2y - x)^2(6x^2 - 9x(2y - x)) = 3x(2y - x)^2(2x - 6y + 3x) = \\ = 3x(2y - x)^2(5x - 6y).$$

$$6) x(x + z - y) + y(y - x - z) + z(x - y + z) = \\ = x(x + z - y) - y(x + z - y) + z(x + z - y) = \\ = (x + z - y)(x - y + z) = (x + z - y)^2.$$

2. Разложите на множители методом группировки:

$$1) m - a(m + n) + n = (m + n) - a(m + n) = (m + n)(1 - a).$$

$$2) ab + 5b - 2a - 10 = b(a + 5) - 2(a + 5) = (a + 5)(b - 2).$$

$$3) 4a(x - 2) - 3x + 6 = 4a(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(4a - 3).$$

$$4) 2ax + 2xy - ay - 4x^2 = 2x(a - 2x) - y(a - 2x) = (a - 2x)(2x - y).$$

$$5) 6x^3 + 12y^2 - 9x^2y - 8xy = 3x^2(2x - 3y) + 4y(3y - 2x) = \\ = 3x^2(2x - 3y) - 4y(2x - 3y) = (2x - 3y)(3x^2 - 4y).$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & a^2b + b^2c + ac^2 - ab^2 - bc^2 - a^2c = \\
 & = a^2(b-c) + bc(b-c) + a(c^2 - b^2) = \\
 & = (b-c)(a^2 + bc) - a(b+c)(b-c) = (b-c)(a^2 + bc - ab - ac) = \\
 & = (b-c)(a(a-b) + c(b-a)) = (b-c)(a(a-b) - c(a-b)) = \\
 & = (b-c)(a-b)(a-c).
 \end{aligned}$$

3. Разложите на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$$1) \quad 25a^2 - 4a^4b^2 = a^2(25 - 4a^2b^2) = a^2(5 + 2ab)(5 - 2ab).$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 9a^4 - 24a^3x^2 + 16a^2x^4 = \\
 & = a^2\left((3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4x^2 + 4^2x^4\right) = a^2(3a - 4x^2)^2.
 \end{aligned}$$

$$3) \quad 24x^3 + 3y^3 = 3(8x^3 + y^3) = 3(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2).$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & 27c^3 - 3c^2 + 2c - 8 = (27c^3 - 8) - (3c^2 - 2c) = \\
 & = (3c-2)(9c^2 + 6c + 4) - c(3c-2) = (3c-2)(9c^2 + 5c + 4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & 4x^2 - 4x^3 + 12x^2y - 9y^2 - 9xy^2 = \\
 & = (4x^2 - 9y^2) - (4x^3 - 12x^2y + 9xy^2) = \\
 & = (2x - 3y)(2x + 3y) - x(4x^2 - 12xy + 9y^2) = \\
 & = (2x - 3y)(2x + 3y) - x(2x - 3y)^2 = \\
 & = (2x - 3y)(2x + 3y - x(2x - 3y)) = \\
 & = (2x - 3y)(2x + 3y - 2x^2 + 3xy).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & (2c + 1)^3 - 27 = (2c + 1)^3 - 3^3 = \\
 & = (2c + 1 - 3)\left((2c + 1)^2 + (2c + 1) \cdot 3 + 3^2\right) = \\
 & = (2c - 2)(4c^2 + 4c + 1 + 6c + 3 + 9) = 2(c - 1)(4c^2 + 10c + 13).
 \end{aligned}$$

Решение проверочной работы 3

Выполните действия.

1. Сложите дроби:

$$1) \frac{x^2}{9y^2} - \frac{x}{12y} = \frac{4x^2 - 3xy}{36y^2}.$$

$$2) \frac{4}{6-a} + \frac{2a}{3a-18} = \\ = \frac{4}{6-a} + \frac{2a}{3(a-6)} = \frac{-4}{a-6} + \frac{2a}{3(a-6)} = \frac{-12+2a}{3(a-6)} = \frac{2(a-6)}{3(a-6)} = \frac{2}{3}.$$

$$3) \frac{5a-12}{5a-5} - \frac{a^2-4a+3}{a^2-2a+1} = \\ = \frac{5a-12}{5(a-1)} - \frac{a^2-4a+3}{(a-1)^2} = \frac{(5a-12)(a-1) - 5(a^2-4a+3)}{5(a-1)^2} = \\ = \frac{5a^2-12a-5a+12-5a^2+20a-15}{5(a-1)^2} = \frac{3a-3}{5(a-1)^2} = \frac{3(a-1)}{5(a-1)^2} = \frac{3}{5(a-1)}.$$

$$4) \frac{1}{x^2+3xy} + \frac{2}{9y^2-x^2} + \frac{1}{2x-6y} = \\ = \frac{1}{x(x+3y)} + \frac{2}{(3y+x)(3y-x)} + \frac{1}{2(x-3y)} = \\ = \frac{1}{x(x+3y)} + \frac{2}{(3y+x)(3y-x)} - \frac{1}{2(3y-x)} = \frac{2(3y-x)+2x \cdot 2-x(3y+x)}{2x(3y+x)(3y-x)} = \\ = \frac{6y-2x+4x-3xy-x^2}{2x(3y+x)(3y-x)} = \frac{6y+2x-x(3y+x)}{2x(3y+x)(3y-x)} = \frac{2(3y+x)-x(3y+x)}{2x(3y+x)(3y-x)} = \\ = \frac{(3y+x)(2-x)}{2x(3y+x)(3y-x)} = \frac{2-x}{2x(3y-x)}.$$

2. Умножьте или разделите дроби:

$$1) \frac{20a}{9b^2y^2} : \frac{-15a^2b}{27y^3} = \\ = \frac{20a}{9b^2y^2} \cdot \frac{27y^3}{-15a^2b} = \frac{20a \cdot 27y^3}{-9b^2y^2 \cdot 15a^2b} = -\frac{4y}{ab^3}.$$

$$2) \frac{5x - 10y}{4y^4} : \frac{3x - 6y}{6y^3} =$$

$$= \frac{5(x - 2y)}{4y^4} \cdot \frac{6y^3}{3(x - 2y)} = \frac{5(x - 2y) \cdot 6y^3}{4y^4 \cdot 3(x - 2y)} = \frac{5}{2y}.$$

$$3) \frac{5+5x}{4-x^2} \cdot \frac{4-4x+x^2}{1+x^3} = \frac{5(1+x)(2-x)^2}{(2-x)(2+x)(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{5(2-x)}{(2+x)(1-x+x^2)}.$$

$$4) \frac{5x^2 + 5xy + 5y^2}{6x - 3y} : \frac{15x^3 - 15y^3}{3y^2 - 12x^2} \cdot (6x - 6y) =$$

$$= \frac{5(x^2 + xy + y^2)}{3(2x - y)} : \frac{15(x^3 - y^3)}{3(y^2 - 4x^2)} \cdot 6(x - y) =$$

$$= \frac{5(x^2 + xy + y^2) \cdot 3(y - 2x)(y + 2x) \cdot 6(x - y)}{3(2x - y) \cdot 15(x - y)(x^2 + xy + y^2)} =$$

$$= \frac{-2(y + 2x)(2x - y)}{(2x - y)} = -2(y + 2x).$$

3. Разложите на множители:

$$1) 5 - 20y^2 = 5(1 - 4y^2) = 5(1 - 2y)(1 + 2y).$$

$$2) 64a^3b + b^4 = b(64a^3 + b^3) = b(4a + b)(16a^2 - 4ab + b^2).$$

$$3) 18a^4x + 12a^2x + 2x = 2x(9a^4 + 6a^2 + 1) = 2x(3a^2 + 1)^2.$$

$$4) a^3 - 4a^2 + 20a - 125 =$$

$$= (a^3 - 125) - (4a^2 - 20a) = (a - 5)(a^2 + 5a + 25) - 4a(a - 5) =$$

$$= (a - 5)(a^2 + 5a + 25 - 4a) = (a - 5)(a^2 + a + 25).$$

$$5) (p - 2)^3 + 27p^3 =$$

$$= (p - 2 + 3p) \left((p - 2)^2 - (p - 2) \cdot 3p + 9p^2 \right) =$$

$$= (4p - 2) (p^2 - 4p + 4 - 3p^2 + 6p + 9p^2) =$$

$$= (4p - 2) (7p^2 + 2p + 4) = 2(2p - 1) (7p^2 + 2p + 4).$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 16z^2 - 16z^3 + 24z^2y - 9zy^2 - 9y^2 = \\
 & = (16z^2 - 9y^2) - z(16z^2 - 24zy + 9y^2) = \\
 & = (4z - 3y)(4z + 3y) - z(4z - 3y)^2 = \\
 & = (4z - 3y)(4z + 3y - z(4z - 3y)) = (4z - 3y)(4z + 3y - 4z^2 + 3zy).
 \end{aligned}$$

4. Сократите дроби:

$$1) \quad \frac{25x^2 - 60x + 36}{25x^2 - 36} = \frac{(5x - 6)^2}{(5x + 6)(5x - 6)} = \frac{5x - 6}{5x + 6}.$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{3yz + yb + 3xz + xb}{yz + 3yb + xz + 3xb} = \\
 & = \frac{y(3z + b) + x(3z + b)}{y(z + 3b) + x(z + 3b)} = \frac{(3z + b)(x + y)}{(z + 3b)(x + y)} = \frac{(3z + b)}{(z + 3b)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \\
 & = \frac{x^2 - 3x + 2x - 6}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x(x - 3) + 2(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x + 3}.
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \frac{ab + b + az + z}{a^3 + 3a^2 + 3a + 1} = \frac{b(a + 1) + z(a + 1)}{(a + 1)^3} = \frac{(a + 1)(b + z)}{(a + 1)^3} = \frac{b + z}{(a + 1)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 7x + 6} = \\
 & = \frac{(x^3 + 1) + (2x^2 + 4x + 2)}{x^2 + 6x + x + 6} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1) + 2(x + 1)^2}{x(x + 6) + (x + 6)} = \\
 & = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x + 2)}{(x + 6)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 3}{x + 6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{x - y + x^2 - y^2}{x + y + x^2 + 2xy + y^2} = \\
 & = \frac{(x - y) + (x - y)(x + y)}{(x + y) + (x + y)^2} = \frac{(x - y)(1 + x + y)}{(x + y)(1 + x + y)} = \frac{x - y}{x + y}.
 \end{aligned}$$

Решение проверочной работы 4

1. Разложите на множители:

$$\begin{aligned} 1) \quad & (x^2 + 9)^2 - 36x^2 = \\ & = (x^2 + 9 + 6x)(x^2 + 9 - 6x) = (x + 3)^2 (x - 3)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & (3x + 4)^2 - (7x + 8)^2 = \\ & = (3x + 4 + 7x + 8)(3x + 4 - 7x - 8) = \\ & = (10x + 12)(-4x - 4) = -8(5x + 6)(x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 16^2 - y^2 + 10xy - 25x^2 = \\ & = 16^2 - (y^2 - 10xy + 25x^2) = \\ & = 16^2 - (y - 5x)^2 = (16 - y + 5x)(16 + y - 5x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 10x + 4b^2 - 25x^2 - 1 = (2b)^2 - (25x^2 - 10x + 1) = \\ & = (2b)^2 - (5x - 1)^2 = (2b - 5x + 1)(2b + 5x - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & x^9 + y^9 = (x^3 + y^3)(x^6 - x^3y^3 + y^6) = \\ & = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^6 - x^3y^3 + y^6). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 64x^6y^3 - 8x^3y^6 = \\ & = 8x^3y^3(8x^3 - y^3) = 8x^3y^3(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2). \end{aligned}$$

$$7) \quad x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + x - 4 = x(x - 4) + (x - 4) = (x - 4)(x + 1).$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = \\ & = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1), \text{ с другой стороны,} \\ & x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = \\ & = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = \\ & = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Удивительно, но мы нашли еще одну формулу сокращенного умножения:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

2. Сократите дроби:

$$1) \frac{4x + 16y}{3x + 12y} = \frac{4(x + 4y)}{3(x + 4y)} = \frac{4}{3}.$$

$$2) \frac{8a^3z - 4a^2z^2}{12a^2z^4 - 6az^5} = \frac{4a^2z(2a - z)}{6az^4(2a - z)} = \frac{2a}{3z^3}.$$

$$3) \frac{1 - 9z^2}{18z^3 + 12z^2 + 2z} = \frac{(1 - 3z)(1 + 3z)}{2z(9z^2 + 6z + 1)} = \frac{(1 - 3z)(1 + 3z)}{2z(3z + 1)^2} = \frac{(1 - 3z)}{2z(3z + 1)}.$$

$$4) \frac{(4y^2 - 8y)^2}{(8y - 16)^2} = \frac{(4y(y - 2))^2}{(8(y - 2))^2} = \frac{16y^2(y - 2)^2}{64(y - 2)^2} = \frac{y^2}{4}.$$

$$5) \frac{6x^4 - 6x^2y^2}{4y^4 - 4x^4} = \frac{6x^2(x^2 - y^2)}{4(y^4 - x^4)} = \frac{6x^2(x^2 - y^2)}{4(y^2 - x^2)(y^2 + x^2)} = -\frac{3x^2}{2(x^2 + y^2)}.$$

$$6) \frac{y^4 - 1}{1 + 2y^2 + y^4} = \frac{(y^2 - 1)(y^2 + 1)}{(y^2 + 1)^2} = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

$$7) \frac{7x^2y^4 + 7x^4y^2}{x^6 + y^6} = \frac{7x^2y^2(y^2 + x^2)}{(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)} = \frac{7x^2y^2}{x^4 - x^2y^2 + y^4}.$$

$$\begin{aligned} 8) \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 - xy + y^2} &= \\ &= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2}{x^2 - xy + y^2} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)}{(x^2 + y^2 - xy)} = x^2 + xy + y^2. \end{aligned}$$

3. Выполните действия:

$$1) \frac{x^2+1}{x^2(x+1)} + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{x^2+1+2x}{x^2(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{x^2(x+1)} = \frac{x+1}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{3}{b+2} + \frac{2b-5}{4-b^2} + \frac{5}{b-2} &= \\ &= \frac{3}{b+2} - \frac{2b-5}{(b-2)(b+2)} + \frac{5}{b-2} = \frac{3(b-2) - 2b + 5 + 5(b+2)}{(b-2)(b+2)} = \\ &= \frac{3b - 6 - 2b + 5 + 5b + 10}{(b-2)(b+2)} = \frac{6b + 9}{(b-2)(b+2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{x-2}{3x+6} + \frac{1}{x^2-4} + \frac{x-6}{6-3x} &= \\ &= \frac{x-2}{3(x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-6}{3(2-x)} = \\ &= \frac{x-2}{3(x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-6}{3(x-2)} = \frac{(x-2)^2 + 3 - (x-6)(x+2)}{3(x-2)(x+2)} = \\ &= \frac{x^2 - 4x + 4 + 3 - x^2 + 6x - 2x + 12}{3(x-2)(x+2)} = \frac{19}{3(x-2)(x+2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{y+2}{25-(y+1)^2} - \frac{4}{y+6} + 2 &= \frac{y+2}{(5-y-1)(5+y+1)} - \frac{4}{y+6} + 2 = \\ &= \frac{y+2}{(4-y)(6+y)} - \frac{4}{y+6} + 2 = \frac{y+2-4(4-y)+2(4-y)(y+6)}{(4-y)(6+y)} = \\ &= \frac{y+2-16+4y+8y-2y^2+48-12y}{(4-y)(6+y)} = \frac{-2y^2+y+34}{(4-y)(6+y)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{x^2+5x+4}{x+1} - \frac{x^2-4x+3}{x-1} &= \\ &= \frac{x^2+4x+x+4}{x+1} - \frac{x^2-x-3x+3}{x-1} = \frac{x(x+1)+4(x+1)}{x+1} - \frac{x(x-1)-3(x-1)}{x-1} = \\ &= \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} - \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = x+4-x+3 = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-6x+5} = \\
 & = \frac{2}{x^2-x-2x+2} - \frac{1}{x^2-x-5x+5} = \frac{2}{x(x-1)-2(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)-5(x-1)} = \\
 & = \frac{2}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{2(x-5) - (x-2)}{(x-1)(x-2)(x-5)} = \\
 & = \frac{2x-10-x+2}{(x-1)(x-2)(x-5)} = \frac{x-8}{(x-1)(x-2)(x-5)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1} = \\
 & = \frac{3x+2}{(x-1)^2} - \frac{6}{(x-1)(x+1)} - \frac{3x-2}{(x+1)^2} = \\
 & = \frac{(3x+2)(x+1)^2 - 6(x-1)(x+1) - (3x-2)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \\
 & = \frac{(3x+2)(x^2+2x+1) - 6x^2+6 - (3x-2)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} = \\
 & = \frac{3x^3+2x^2+6x^2+4x+3x+2-6x^2+6-3x^3+2x^2+6x^2-4x-3x+2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \\
 & = \frac{10x^2+10}{(x-1)^2(x+1)^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \frac{x-5}{-12+7x-x^2} + \frac{x-3}{x^2-9x+20} = \\
 & = \frac{5-x}{x^2-7x+12} + \frac{x-3}{x^2-4x-5x+20} = \frac{5-x}{x^2-3x-4x+12} + \frac{x-3}{x^2-4x-5x+20} = \\
 & = \frac{5-x}{x(x-3)-4(x-3)} + \frac{x-3}{x(x-4)-5(x-4)} = \\
 & = \frac{5-x}{(x-3)(x-4)} + \frac{x-3}{(x-4)(x-5)} = \frac{(5-x)(x-5) + (x-3)^2}{(x-3)(x-4)(x-5)} = \\
 & = \frac{(x-3)^2 - (x-5)^2}{(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{(x-3-x+5)(x-3+x-5)}{(x-3)(x-4)(x-5)} = \\
 & = \frac{2(2x-8)}{(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{4(x-4)}{(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{4}{(x-3)(x-5)}.
 \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 1

$$\begin{aligned}
 1. \left(m^2 + \frac{6 - m^4}{m^2 - 1} \right) \cdot \frac{1 + m}{6 - m^2} &= \\
 &= \frac{(m^4 - m^2 + 6 - m^4)(1 + m)}{(m^2 - 1)(6 - m^2)} = \frac{(6 - m^2)(1 + m)}{(m - 1)(m + 1)(6 - m^2)} = \frac{1}{m - 1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \frac{2m}{m^2 - 4} - \frac{2}{m^2 - 4} : \left(\frac{m + 1}{2m - 2} - \frac{1}{m - 1} \right) &= \\
 &= \frac{2m}{m^2 - 4} - \frac{2}{m^2 - 4} : \frac{m + 1 - 2}{2(m - 1)} = \frac{2m}{(m - 2)(m + 2)} - \frac{4}{(m - 2)(m + 2)} = \\
 &= \frac{2(m - 2)}{(m - 2)(m + 2)} = \frac{2}{m + 2}.
 \end{aligned}$$

$$3. \left(m - 4 + \frac{32}{m + 4} \right) \cdot \frac{m^2 + 8m + 16}{m^2 + 16} = \frac{(m^2 - 16 + 32)}{m + 4} \cdot \frac{(m + 4)^2}{m^2 + 16} = m + 4.$$

$$\begin{aligned}
 4. \frac{3 - x^2}{x^2 - 1} + \frac{3x}{x^2 - 1} : \frac{x}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} &= \\
 &= \frac{3 - x^2}{x^2 - 1} + \frac{3x}{(x^2 - 1)} \cdot \frac{(x - 1)}{x} + \frac{(x - 1)}{x + 1} = \frac{3 - x^2 + 3(x - 1) + (x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \\
 &= \frac{3 - x^2 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \left(\frac{-1}{a - 2} + \frac{8}{a^2 - 4} + \frac{2}{a + 2} \right) (a^2 - 4a + 4) &= \\
 &= \frac{-(a + 2) + 8 + 2(a - 2)}{(a + 2)(a - 2)} \cdot (a - 2)^2 = \frac{(a + 2)(a - 2)}{a + 2} = a - 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \left(\frac{2x}{x - 7} + \frac{7x}{x^2 - 14x + 49} \right) : \frac{2x - 7}{x^2 - 49} - \frac{7(x + 7)}{x - 7} &= \\
 &= \frac{2x(x - 7) + 7x}{(x - 7)^2} \cdot \frac{x^2 - 49}{(2x - 7)} - \frac{7(x + 7)}{x - 7} = \frac{x(2x - 14 + 7)}{(x - 7)^2} \cdot \frac{(x - 7)(x + 7)}{(2x - 7)} - \frac{7(x + 7)}{x - 7} = \\
 &= \frac{x(x + 7)}{x - 7} - \frac{7(x + 7)}{x - 7} = \frac{(x + 7)(x - 7)}{x - 7} = x + 7.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \left(\frac{20x}{25-x^2} + \frac{5-x}{5+x} \right) &: \frac{5+x}{5} - \frac{5}{5-x} = \\
 &= \frac{20x+(5-x)^2}{(5-x)(5+x)} \cdot \frac{5}{5+x} - \frac{5}{5-x} = \frac{20x+25-10x+x^2}{(5-x)(5+x)} \cdot \frac{5}{5+x} - \frac{5}{5-x} = \\
 &= \frac{(x+5)^2}{(5-x)(5+x)} \cdot \frac{5}{(5+x)} - \frac{5}{5-x} = \frac{5}{5-x} - \frac{5}{5-x} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \frac{8-n^3}{2+n} &: \left(2 + \frac{n^2}{n+2} \right) - \frac{n^2}{n-2} \cdot \frac{4-n^2}{n^2+2n} = \\
 &= \frac{(2-n)(n^2+2n+4)}{2+n} : \left(\frac{4+2n+n^2}{n+2} \right) - \frac{n^2}{n-2} \cdot \frac{(2-n)(2+n)}{n(n+2)} = \\
 &= \frac{(2-n)(n^2+2n+4)(n+2)}{(2+n)(4+2n+n^2)} + n = 2 - n + n = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \left(\frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2-1} \right) \cdot (x-1)^2 &- \frac{3x}{x+1} = \\
 &= \left(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right) (x-1)^2 - \frac{3x}{x+1} = \frac{2(x+1)+x-1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot (x-1)^2 - \frac{3x}{x+1} = \\
 &= \frac{2x+2+x-1}{x+1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{3x+1-3x}{x+1} = \frac{1}{x+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \left(\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2-x-6} + \frac{2x}{x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} &- \frac{x-9}{2(3-x)} = \\
 &= \frac{x-3+5+2x(x+2)}{(x-3)(x+2)} \cdot \frac{x}{2x+1} + \frac{x-9}{2(x-3)} = \\
 &= \frac{(x+2)+2x(x+2)}{(x-3)(x+2)} \cdot \frac{x}{(2x+1)} + \frac{x-9}{2(x-3)} = \frac{(x+2)(1+2x)x}{(x-3)(x+2)(2x+1)} + \frac{x-9}{2(x-3)} = \\
 &= \frac{x}{x-3} + \frac{x-9}{2(x-3)} = \frac{2x+x-9}{2(x-3)} = \frac{3(x-3)}{2(x-3)} = 1,5, \text{ так как} \\
 x^2 - x - 6 &= x^2 - 3x + 2x - 6 = x(x-3) + 2(x-3) = \\
 &= (x-3)(x+2).
 \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 2

$$1. \left(a + \frac{2 + a^2}{1 - a} \right) \cdot \frac{1 - 2a + a^2}{a + 2} =$$

$$= \frac{a - a^2 + 2 + a^2}{1 - a} \cdot \frac{(1 - a)^2}{a + 2} = \frac{a + 2}{a + 2} \cdot (1 - a) = 1 - a.$$

$$2. \frac{b^2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} : \left(\frac{2}{2b - b^2} - \frac{1}{2 - b} \right) = \frac{b^2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} : \frac{2 - b}{b(2 - b)} =$$

$$= \frac{b^2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - 1} \cdot \frac{b(2 - b)}{2 - b} = \frac{b^2}{b^2 - 1} + \frac{b}{b^2 - 1} = \frac{b^2 + b}{b^2 - 1} = \frac{(b + 1)b}{(b + 1)(b - 1)} = \frac{b}{b - 1}.$$

$$3. \left(b + 3 + \frac{18}{b - 3} \right) \cdot \frac{b^2 - 6b + 9}{b^2 + 9} =$$

$$= \frac{b^2 - 9 + 18}{b - 3} \cdot \frac{(b - 3)^2}{b^2 + 9} = \frac{(b^2 + 9)(b - 3)}{b^2 + 9} = b - 3.$$

$$4. \frac{7 - 5m}{m - 4} + \frac{4m}{m + 4} \cdot \frac{m^2 - 16}{4m} + \frac{9m - 23}{m - 4} =$$

$$= \frac{7 - 5m + 9m - 23}{m - 4} + m - 4 = \frac{4m - 16}{m - 4} + m - 4 =$$

$$= \frac{4(m - 4)}{m - 4} + m - 4 = 4 + m - 4 = m.$$

$$5. \left(\frac{1}{3 + a} - \frac{6}{9 - a^2} + \frac{2}{3 - a} \right) \cdot (9 - 6a + a^2) =$$

$$= \frac{3 - a - 6 + 2(3 + a)}{(3 - a)(3 + a)} \cdot (3 - a)^2 = \frac{a + 3}{3 + a} \cdot (3 - a) = 3 - a.$$

$$6. \left(\frac{3a}{a + 6} - \frac{2a}{a^2 + 12a + 36} \right) : \frac{3a + 16}{a^2 - 36} + \frac{6(a - 6)}{a + 6} =$$

$$= \frac{a(3(a + 6) - 2)}{(a + 6)^2} \cdot \frac{(a + 6)(a - 6)}{3a + 16} + \frac{6(a - 6)}{a + 6} =$$

$$= \frac{a(3a + 16)(a - 6)}{(a + 6)(3a + 16)} + \frac{6(a - 6)}{a + 6} = \frac{a(a - 6)}{a + 6} + \frac{6(a - 6)}{a + 6} = \frac{(a - 6)(a + 6)}{a + 6} = a - 6.$$

$$\begin{aligned}
 7. \left(\frac{16b}{16-b^2} + \frac{4-b}{4+b} \right) : \frac{4+b}{4} - \frac{4}{4-b} &= \frac{16b+(4-b)^2}{(4-b)(4+b)} \cdot \frac{4}{(b+4)} - \frac{4}{4-b} = \\
 &= \frac{(16b+16-8b+b^2) \cdot 4}{(4-b)(4+b)^2} - \frac{4}{4-b} = \frac{(b+4)^2 \cdot 4}{(4-b)(4+b)^2} - \frac{4}{4-b} = \frac{4}{4-b} - \frac{4}{4-b} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{a^3+1}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a^2-a+1} \right) : \frac{a^2+1}{a+1} &= \\
 &= \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)}{(a-1)^2(a^2-a+1)} \right) \cdot \frac{a+1}{a^2+1} = \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \frac{a+1}{a^2+1} = \\
 &= \frac{(a-1)^2+(a+1)^2}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a+1}{a^2+1} = \frac{a^2-2a+1+a^2+2a+1}{(a-1)(a^2+1)} = \frac{2(a^2+1)}{(a-1)(a^2+1)} = \frac{2}{a-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \left(\frac{4}{4-x^2} - \frac{4}{(x-2)^2} \right) : \frac{2}{(2-x)^2} + \frac{4x+1}{x+2} &= \\
 &= \left(\frac{4}{(2-x)(2+x)} - \frac{4}{(2-x)^2} \right) \cdot \frac{(2-x)^2}{2} + \frac{4x+1}{x+2} = \\
 &= \frac{4(2-x)-4(2+x)}{(2-x)^2(2+x)} \cdot \frac{(2-x)^2}{2} + \frac{4x+1}{x+2} = \frac{-4x}{2+x} + \frac{4x+1}{x+2} = \frac{-4x+4x+1}{x+2} = \frac{1}{x+2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \frac{a+4}{5(a-1)} : \left(\frac{9(a-1)}{3a+4} - \frac{(2a-7)^2}{3a^2+a-4} \right) + \frac{2}{5(2-a)} &= \\
 &= \frac{a+4}{5(a-1)} : \frac{9(a-1)^2 - (2a-7)^2}{(3a+4)(a-1)} + \frac{2}{5(2-a)} = \\
 &= \frac{(a+4)}{5(a-1)} \cdot \frac{(3a+4)(a-1)}{(3(a-1)+2a-7)(3(a-1)-2a+7)} + \frac{2}{5(2-a)} = \\
 &= \frac{(a+4)(3a+4)(a-1)}{5(a-1)5(a-2)(a+4)} + \frac{2}{5(2-a)} = \frac{3a+4}{25(a-2)} - \frac{2}{5(a-2)} = \\
 &= \frac{3a+4-10}{25(a-2)} = \frac{3(a-2)}{25(a-2)} = \frac{3}{25}, \quad \text{так как}
 \end{aligned}$$

$$3a^2+a-4 = 3a^2-3a+4a-4 = 3a(a-1)+4(a-1) = (a-1)(3a+4).$$

Решение зачетной карточки 3

$$\begin{aligned}
 1. \left(x + \frac{5-x^2}{1+x} \right) : \frac{x+5}{x^2+2x+1} &= \\
 = \frac{x+x^2+5-x^2}{1+x} \cdot \frac{(x+1)^2}{x+5} &= \frac{x+5}{x+5} \cdot (x+1) = x+1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \left(\frac{x+10}{5x+25} - \frac{1}{x+5} \right) \cdot \frac{5}{x-5} - \frac{10}{x^2-25} &= \\
 = \frac{x+10-5}{5(x+5)} \cdot \frac{5}{(x-5)} - \frac{10}{(x-5)(x+5)} &= \frac{x+5}{(x+5)} \cdot \frac{1}{x-5} - \frac{10}{(x-5)(x+5)} = \\
 = \frac{x+5-10}{(x-5)(x+5)} = \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} &= \frac{1}{x+5}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \left(a-1 + \frac{2}{a+1} \right) : \frac{a^2+1}{a^2+2a+1} &= \\
 = \frac{a^2-1+2}{a+1} \cdot \frac{(a+1)^2}{a^2+1} = \frac{(a^2+1)}{a^2+1} \cdot (a+1) &= a+1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \frac{-a-24}{a-5} + \frac{a}{a+5} : \frac{a}{a^2-25} + \frac{6a-1}{a-5} &= \\
 = \frac{-a-24+6a-1}{a-5} + \frac{a}{a+5} \cdot \frac{a^2-25}{a} = \frac{5(a-5)}{a-5} + \frac{(a-5)(a+5)}{a+5} &= 5+a-5 = a.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \left(\frac{2}{a-2} - \frac{8}{a^2-4} + \frac{-1}{a+2} \right) \cdot (a^2+4a+4) &= \\
 = \frac{2(a+2)-8-(a-2)}{(a-2)(a+2)} \cdot (a+2)^2 = \frac{(a-2)}{a-2} \cdot (a+2) &= a+2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \left(\frac{2m}{m-5} + \frac{m}{m^2-10m+25} \right) \cdot \frac{m^2-25}{2m-9} - \frac{5(m+5)}{m-5} &= \\
 = \frac{m(2(m-5)+1)}{(m-5)^2} \cdot \frac{(m-5)(m+5)}{2m-9} - \frac{5(m+5)}{m-5} = \frac{m(2m-9)(m+5)}{(m-5)(2m-9)} - \frac{5(m+5)}{m-5} &= \\
 = \frac{m(m+5)}{m-5} - \frac{5(m+5)}{m-5} = \frac{(m+5)(m-5)}{m-5} &= m+5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. & \left(\frac{8a}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2} \right) \cdot \frac{a}{a+2} - \frac{a}{a-2} = \\
 & = \frac{8a+(a-2)^2}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a}{(a+2)} - \frac{a}{a-2} = \frac{8a+a^2-4a+4}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{a}{(a+2)} - \frac{a}{a-2} = \\
 & = \frac{(a+2)^2 a}{(a-2)(a+2)^2} - \frac{a}{a-2} = \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a-2} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. & \left(\frac{m+2}{m+1} - \frac{8m^2-8}{m^3-1} : \frac{4m+4}{m^2+m+1} \right) \cdot \frac{1}{m} = \\
 & = \left(\frac{m+2}{m+1} - \frac{8(m+1)(m-1)(m^2+m+1)}{(m-1)(m^2+m+1)4(m+1)} \right) \cdot \frac{1}{m} = \\
 & = \left(\frac{m+2}{m+1} - 2 \right) \cdot \frac{1}{m} = \frac{(m+2-2m-2)}{m+1} \cdot \frac{1}{m} = \frac{-m}{m+1} \cdot \frac{1}{m} = -\frac{1}{m+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. & \frac{(1-b)^2}{2b} \cdot \left(\frac{1}{(b-1)^2} - \frac{1}{1-b^2} \right) - \frac{2}{1+b} = \\
 & = \frac{(1-b)^2}{2b} \cdot \left(\frac{1}{(b-1)^2} + \frac{1}{(b-1)(b+1)} \right) - \frac{2}{1+b} = \\
 & = \frac{(b-1)^2}{2b} \cdot \frac{b+1+b-1}{(b-1)^2(b+1)} - \frac{2}{1+b} = \frac{1}{1+b} - \frac{2}{1+b} = -\frac{1}{1+b}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. & \left(\frac{4}{5a^2+a-4} - \frac{a+1}{9(5a-4)} \right) \cdot \frac{15a-12}{a+7} - \frac{2}{a+1} = \\
 & = \frac{36-(a+1)^2}{9(5a-4)(a+1)} \cdot \frac{3(5a-4)}{a+7} - \frac{2}{a+1} = \frac{(6+a+1)(6-a-1)}{3(a+1)(a+7)} - \frac{2}{a+1} = \\
 & = \frac{(a+7)(5-a)}{3(a+1)(a+7)} - \frac{2}{a+1} = \frac{5-a}{3(a+1)} - \frac{2}{a+1} = \frac{5-a-6}{a+1} = \frac{-(a+1)}{a+1} = -1,
 \end{aligned}$$

так как $5a^2 + a - 4 = 5a^2 + 5a - 4a - 4 =$

$$= 5a(a+1) - 4(a+1) = (a+1)(5a-4).$$

Решение зачетной карточки 4

$$1. \left(x + \frac{3-x^2}{x+1} \right) : \frac{x+3}{1-x^2} = \frac{x^2+x+3-x^2}{x+1} \cdot \frac{1-x^2}{x+3} = \frac{(x+3)(1-x)(1+x)}{(x+1)(x+3)} = 1-x.$$

$$2. \left(\frac{x+4}{3x+3} - \frac{1}{x+1} \right) : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x+4-3}{3(x+1)} \cdot \frac{3}{(x+1)} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

$$3. \left(a-2 + \frac{8}{a+2} \right) \cdot \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} =$$

$$= \frac{a^2-4+8}{a+2} \cdot \frac{(a+2)^2}{a^2+4} = \frac{(a^2+4)}{a^2+4} \cdot (a+2) = a+2.$$

$$4. \frac{5m-21}{m^2-9} + \frac{m}{m^2-9} \cdot \frac{m+3}{m} + \frac{m-3}{m+3} =$$

$$= \frac{5m-21}{m^2-9} + \frac{m+3}{m^2-9} + \frac{m-3}{m+3} = \frac{5m-21+m+3+(m-3)^2}{(m+3)(m-3)} =$$

$$= \frac{5m-21+m+3+m^2-6m+9}{(m+3)(m-3)} = \frac{6m-18+m^2-6m+9}{(m+3)(m-3)} = \frac{m^2-9}{(m+3)(m-3)} = 1.$$

$$5. \left(\frac{4}{a+1} + \frac{2a}{a^2-1} + \frac{-1}{a-1} \right) \cdot (a^2+2a+1) =$$

$$= \frac{4(a-1)+2a-(a+1)}{(a+1)(a-1)} \cdot (a+1)^2 = \frac{5(a-1)}{(a+1)(a-1)} \cdot (a+1)^2 = 5(a+1).$$

$$6. \left(\frac{3a}{a-4} + \frac{10a}{a^2-8a+16} \right) \cdot \frac{a^2-16}{3a-2} + \frac{4(a+4)}{4-a} =$$

$$= \frac{a(3(a-4)+10)}{(a-4)^2} \cdot \frac{(a-4)(a+4)}{(3a-2)} - \frac{4(a+4)}{a-4} = \frac{a(3a-2)(a+4)}{(a-4)(3a-2)} - \frac{4(a+4)}{a-4} =$$

$$= \frac{(a+4)(a-4)}{a-4} = a+4.$$

$$7. \left(\frac{12b}{9-b^2} + \frac{3-b}{3+b} \right) : \frac{3+b}{3} - \frac{3}{3-b} = \frac{12b+(3-b)^2}{(3-b)(3+b)} \cdot \frac{3}{(3+b)} - \frac{3}{3-b} =$$

$$= \frac{9-6b+b^2+12b}{(3-b)(3+b)} \cdot \frac{3}{3+b} - \frac{3}{3-b} = \frac{(3+b)^2 \cdot 3}{(3-b)(3+b)^2} - \frac{3}{3-b} = \frac{3}{3-b} - \frac{3}{3-b} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 8. & \left(\frac{1}{2-6a} + \frac{1}{27a^3-1} : \frac{1+3a}{1+3a+9a^2} \right) \cdot \frac{2+6a}{a} = \\
 & = \left(\frac{1}{2(1-3a)} + \frac{1}{(3a-1)} \cdot \frac{(1+3a+9a^2)}{(9a^2+3a+1)(1+3a)} \right) \cdot \frac{2(1+3a)}{a} = \\
 & = \left(\frac{1}{2(1-3a)} - \frac{1}{(1-3a)(1+3a)} \right) \cdot \frac{2(1+3a)}{a} = \\
 & = \frac{(1+3a-2) \cdot 2(1+3a)}{2(1-3a)(1+3a)a} = -\frac{1}{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. & \frac{2}{x-1} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x}{1-x^2} \right) = \\
 & = \frac{2}{x-1} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} \right) = \\
 & = \frac{2}{x-1} + \frac{(1-x)(1+x)}{1+x^2} \cdot \frac{x+1+x(x-1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1+x}{1+x^2} \cdot \frac{x+1+x^2-x}{(1-x)(x+1)} = \\
 & = \frac{2}{x-1} + \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. & \left(\frac{3a-1}{a^2-4} - \frac{9a}{3a^2+5a-2} \right) \cdot \frac{15a^3-60a}{12a+1} + \frac{5}{1-3a} = \\
 & = \left(\frac{3a-1}{(a-2)(a+2)} - \frac{9a}{(3a-1)(a+2)} \right) \cdot \frac{15a(a^2-4)}{12a+1} + \frac{5}{1-3a} = \\
 & = \frac{(3a-1)^2-9a(a-2)}{(a-2)(a+2)(3a-1)} \cdot \frac{15a(a-2)(a+2)}{12a+1} + \frac{5}{1-3a} = \\
 & = \frac{9a^2-6a+1-9a^2+18a}{(a-2)(a+2)(3a-1)} \cdot \frac{15a(a-2)(a+2)}{12a+1} + \frac{5}{1-3a} = \\
 & = \frac{(12a+1) \cdot 15a}{(3a-1)(12a+1)} + \frac{5}{1-3a} = \frac{15a}{3a-1} - \frac{5}{3a-1} = \frac{5(3a-1)}{3a-1} = 5,
 \end{aligned}$$

так как $3a^2 + 5a - 2 = 3a^2 + 6a - a - 2 =$

$$= 3a(a+2) - (a+2) = (a+2)(3a-1).$$

Решение зачетной карточки 5

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{(2a-b)^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a} = \\
 & = \frac{(2a-b)^2 - b^2}{a-b} = \frac{(2a-b+b)(2a-b-b)}{a-b} = \frac{2a \cdot 2(a-b)}{a-b} = 4a.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{x^3+y^3}{(x-y)^2} + \frac{3xy^2-y^3}{(y-x)^2} + \frac{3x^2y+y^3}{2xy-x^2-y^2} = \\
 & = \frac{x^3+y^3+3xy^2-y^3-3x^2y-y^3}{(x-y)^2} = \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^3}{(x-y)^2} = x-y.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \frac{a^3}{a-3} - \frac{3a^3+81}{a^2-9} = \\
 & = \frac{a^3(a+3) - 3a^3 - 81}{(a+3)(a-3)} = \frac{a^4 + 3a^3 - 3a^3 - 81}{(a+3)(a-3)} = \\
 & = \frac{a^4 - 81}{a^2 - 9} = \frac{(a^2-9)(a^2+9)}{a^2-9} = a^2 + 9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \frac{a-1}{2a+2} + \frac{a+1}{3-3a} + \frac{5a^3-1}{3a^2-3} = \\
 & = \frac{3(a-1)^2 - 2(a+1)^2 + 2(5a^3-1)}{6(a+1)(a-1)} = \frac{3a^2 - 6a + 3 - 2a^2 - 4a - 2 + 10a^3 - 2}{6(a+1)(a-1)} = \\
 & = \frac{a^2 + 10a^3 - 10a - 1}{6(a+1)(a-1)} = \frac{a^2(10a+1) - (10a+1)}{6(a+1)(a-1)} = \frac{(a^2-1)(10a+1)}{6(a+1)(a-1)} = \frac{10a+1}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \frac{a^2-bc}{a^2-ab+bc-ac} + \frac{3b-a}{2b-2a} + \frac{a+2c}{3a-3c} = \frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)} - \frac{3b-a}{2(a-b)} + \frac{a+2c}{3(a-c)} = \\
 & = \frac{6(a^2-bc) - 3(3b-a)(a-c) + 2(a+2c)(a-b)}{6(a-b)(a-c)} = \\
 & = \frac{6a^2 - 6bc - 9ab + 3a^2 + 9bc - 3ac + 2a^2 + 4ac - 2ab - 4cb}{6(a-b)(a-c)} = \frac{11a^2 - bc - 11ab + ac}{6(a-b)(a-c)} = \\
 & = \frac{11a^2 - 11ab - bc + ac}{6(a-b)(a-c)} = \frac{11a(a-b) + c(a-b)}{6(a-b)(a-c)} = \frac{(a-b)(11a+c)}{6(a-b)(a-c)} = \frac{11a+c}{6(a-c)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & \frac{x-2}{(2x+4)^2} : \left(\frac{x}{2x-4} - \frac{x^2+4}{2x^2-8} - \frac{2}{x^2+2x} \right) = \\
& = \frac{x-2}{4(x+2)^2} : \left(\frac{x}{2(x-2)} - \frac{x^2+4}{2(x^2-4)} - \frac{2}{x(x+2)} \right) = \\
& = \frac{x-2}{4(x+2)^2} : \frac{x(x+2)x - x(x^2+4) - 4(x-2)}{2x(x-2)(x+2)} = \\
& = \frac{x-2}{4(x+2)^2} : \frac{x^3+2x^2-x^3-4x-4x+8}{2x(x-2)(x+2)} = \\
& = \frac{x-2}{4(x+2)^2} \cdot \frac{2x(x-2)(x+2)}{8-8x+2x^2} = \frac{(x-2)x(x-2)}{2 \cdot 2(x-2)^2(x+2)} = \frac{x}{4(x+2)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & 1 : \left(\frac{a}{a-b} + \frac{4a^2b-ab^2}{b^3-a^3} + \frac{b^2}{a^2+ab+b^2} \right) - \frac{3ab}{(a-b)^2} = \\
& = 1 : \frac{a(a^2+ab+b^2) - 4a^2b + ab^2 + b^2(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} - \frac{3ab}{(a-b)^2} = \\
& = 1 \cdot \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^3+a^2b+ab^2-4a^2b+ab^2+ab^2-b^3} - \frac{3ab}{(a-b)^2} = \frac{a^3-b^3}{(a-b)^3} - \frac{3ab}{(a-b)^2} = \\
& = \frac{a^3-b^3-3ab(a-b)}{(a-b)^3} = \frac{(a-b)^3}{(a-b)^3} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \left(\frac{2a-3b}{a-7b} - 2 + \frac{a-7b}{2a-3b} \right) \cdot \left(\frac{23a-29b}{a^2+8ab+16b^2} - \frac{15a-21b}{a^2+4ab} \right) = \\
& = \frac{(2a-3b)^2 - 2(a-7b)(2a-3b) + (a-7b)^2}{(a-7b)(2a-3b)} \cdot \left(\frac{23a-29b}{(a+4b)^2} - \frac{15a-21b}{a(a+4b)} \right) = \\
& = \frac{(2a-3b-a+7b)^2}{(a-7b)(2a-3b)} \cdot \frac{23a^2-29ab-(15a-21b)(a+4b)}{a(a+4b)^2} = \\
& = \frac{(a+4b)^2(8a^2-68ab+84b^2)}{(a-7b)(2a-3b)a(a+4b)^2} = \frac{4}{a}, \quad \text{так как} \\
& 8a^2-68ab+84b^2 = 4(2a^2-17ab+21b^2) \\
& \text{и } (a-7b)(2a-3b) = 3a^3-17ab+21b^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \frac{ab+cd}{(a+c)(b-c)} + \frac{ac+bd}{(a+b)(c-b)} + \frac{ad+bc}{(a+b)(a+c)} = \\
 & = \frac{(ab+cd)(a+b) - (ac+bd)(a+c) + (ad+bc)(b-c)}{(a+c)(b-c)(a+b)} = \\
 & = \frac{a^2b+acd+ab^2+cdb-a^2c-bda-ac^2-bdc+adb+b^2c-adc-bc^2}{(a+c)(a+b)(b-c)} = \\
 & = \frac{(ab-ac+cb-c^2)(a+b)}{(a+c)(b-c)(a+b)} = \frac{(a+c)(b-c)}{(a+c)(b-c)} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{2}{3-a} + \frac{a+3}{a-2} : \left(\frac{9(a-2)}{3a+1} - \frac{(2a-9)^2}{3a^2-5a-2} \right) = \\
 & = \frac{-2}{a-3} + \frac{a+3}{a-2} : \frac{9(a-2)^2 - (2a-9)^2}{(3a+1)(a-2)} = \\
 & = \frac{-2}{a-3} + \frac{a+3}{a-2} \cdot \frac{(3a+1)(a-2)}{(3(a-2) + (2a-9))(3(a-2) - (2a-9))} = \\
 & = \frac{-2}{a-3} + \frac{(a+3)(3a+1)}{5(a-3)(a+3)} = \frac{-2}{a-3} + \frac{3a+1}{5(a-3)} = \\
 & = \frac{-10+3a+1}{5(a-3)} = \frac{3(a-3)}{5(a-3)} = \frac{3}{5},
 \end{aligned}$$

так как $3a^2 - 5a - 2 = 3a^2 - 6a + a - 2 =$
 $= 3a(a-2) + (a-2) = (a-2)(3a+1).$

Решение зачетной карточки 6

1.
$$\frac{(3a-2b)^2}{b-3a} + \frac{9a^2}{3a-b} =$$

$$= \frac{(3a-2b)^2 - 9a^2}{b-3a} = \frac{(3a-2b-3a)(3a-2b+3a)}{b-3a} = \frac{-2b(3a-b) \cdot 2}{b-3a} = 4b.$$
2.
$$\frac{12bc^2 + b^3}{(b-2c)^2} - \frac{6b^2c + 5c^3}{(2c-b)^2} + \frac{3c^3}{4bc - 4c^2 - b^2} =$$

$$= \frac{12bc^2 + b^3 - 6b^2c - 5c^3 - 3c^3}{(b-2c)^2} = \frac{b^3 - 6b^2c + 12bc^2 - 8c^3}{(b-2c)^2} = \frac{(b-2c)^3}{(b-2c)^2} = b-2c.$$
3.
$$\frac{4+10x+25x^2}{2+5x} - \frac{4-10x+25x^2}{2-5x} = \frac{8-125x^3 - (8+125x^3)}{(2+5x)(2-5x)} = \frac{-250x^3}{(2+5x)(2-5x)}.$$
4.
$$\frac{(2y+3z)^2}{2y-3z} - \frac{(2y-3z)^2}{2y+3z} = \frac{(2y+3z)^3 - (2y-3z)^3}{(2y-3z)(2y+3z)} =$$

$$= \frac{(2y+3z-2y+3z)((2y+3z)^2 + (2y+3z)(2y-3z) + (2y-3z)^2)}{(2y-3z)(2y+3z)} =$$

$$= \frac{6z(12y^2 + 9z^2)}{(2y-3z)(2y+3z)} = \frac{18z(4y^2 + 3z^2)}{(2y-3z)(2y+3z)}.$$
5.
$$\frac{1}{c^2-cd} - \frac{1}{d^2-cd} - \frac{4}{c^2-d^2} = \frac{d(c+d) + c(c+d) - 4cd}{cd(c-d)(c+d)} = \frac{(c-d)^2}{cd(c-d)(c+d)} = \frac{c-d}{cd(c+d)}.$$
6.
$$\frac{1}{y-5z} - \frac{z}{x^2+2xy} - \frac{x+y+5z}{xy-10yz-5xz+2y^2} =$$

$$= \frac{1}{y-5z} - \frac{z}{x(x+2y)} - \frac{x+y+5z}{(x+2y)(y-5z)} = \frac{x^2+2xy-yz+5z^2-x^2-xy-5zx}{x(x+2y)(y-5z)} =$$

$$= \frac{xy-yz-5z^2-5zx}{x(x+2y)(y-5z)} = \frac{(x-z)(y-5z)}{x(x+2y)(y-5z)} = \frac{x-z}{x(x+2y)}.$$
7.
$$\left(\frac{b^2+9}{27-3b^2} + \frac{b}{3b+9} - \frac{3}{b^2-3b} \right) \cdot \frac{(3b+9)^2}{3b^2-b^3} = \frac{b(b^2+9) + b^2(3-b) + 9(3+b)}{3(3-b)(3+b)b} \cdot \frac{b^2(3-b)}{9(b+3)^2} =$$

$$= \frac{b^3+9b+3b^2-b^3+27+9b}{3b(3-b)(3+b)} \cdot \frac{b^2(3-b)}{9(b+3)^2} = \frac{3(b^2+6b+9) \cdot b^2(3-b)}{3(3-b)(b+3) \cdot 9b(b+3)^2} = \frac{b}{9(b+3)}.$$

$$\begin{aligned}
 8. & \left(\frac{2x+5y}{x^2-2xy} - \frac{9y}{x^2-4xy+4y^2} \right) \cdot \left(\frac{x-5y}{x+y} + 2 + \frac{x+y}{x-5y} \right) = \\
 & = \frac{(2x+5y)(x-2y)-9yx}{x(x-2y)^2} \cdot \frac{(x-5y)^2+2(x+y)(x-5y)+(x+y)^2}{(x+y)(x-5y)} = \\
 & = \frac{2x^2+xy-10y^2-9xy}{x(x-2y)^2} \cdot \frac{(x-5y+x+y)^2}{(x+y)(x-5y)} = \frac{2(x^2-4xy-5y^2)}{x(x-2y)^2} \cdot \frac{(2x-4y)^2}{(x+y)(x-5y)} = \\
 & = \frac{2(x+y)(x-5y)4(x-2y)^2}{x(x-2y)^2(x+y)(x-5y)} = \frac{8}{x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. & \left(\left(\frac{x^2}{(x+1)^2} - \frac{y^2}{(y+1)^2} \right) : \left(\frac{x}{(x+1)^2} - \frac{y}{(y+1)^2} \right) + 1 \right) \cdot \frac{1-xy}{(x+y)(y+1)} = \\
 & = \left(\frac{x^2(y+1)^2 - y^2(x+1)^2}{(x+1)^2(y+1)^2} : \frac{x(y+1)^2 - y(x+1)^2}{(x+1)^2(y+1)^2} + 1 \right) \cdot \frac{1-xy}{(x+y)(y+1)} = \\
 & = \left(\frac{(x(y+1)-y(x+1))(x(y+1)+y(x+1))}{(x+1)^2(y+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^2(y+1)^2}{xy^2+2xy+x-yx^2-2xy-y} + 1 \right) \cdot \frac{1-xy}{(x+y)(y+1)} = \\
 & = \left(\frac{(x+y+2xy)(x-y)}{(1-xy)(x-y)} + 1 \right) \cdot \frac{1-xy}{(x+y)(y+1)} = \left(\frac{x+y+2xy}{1-xy} + 1 \right) \cdot \frac{1-xy}{(x+y)(y+1)} = \\
 & = \frac{x+y+2xy+1-xy}{1-xy} \cdot \frac{1-xy}{(x+y)(y+1)} = \frac{x+y+xy+1}{(x+y)(y+1)} = \frac{(x+1)(y+1)}{(x+y)(y+1)} = \frac{x+1}{x+y}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. & \left(\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x^2-3x-4} + \frac{2x-2}{x-4} \right) \cdot \frac{x-1}{2x-1} - \frac{x-10}{2(4-x)} = \\
 & = \frac{x-4+5+2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{x-1}{2x-1} + \frac{x-10}{2(x-4)} = \\
 & = \frac{((x+1)+2(x+1)(x-1))(x-1)}{(x+1)(x-4)(2x-1)} + \frac{x-10}{2(x-4)} = \\
 & = \frac{(x+1)(1+2x-2)(x-1)}{(x+1)(x-4)(2x-1)} + \frac{x-10}{2(x-4)} = \frac{(2x-1)(x-1)}{(x-4)(2x-1)} + \frac{x-10}{2(x-4)} = \\
 & = \frac{x-1}{x-4} + \frac{x-10}{2(x-4)} = \frac{2x-2-10+x}{2(x-4)} = \frac{3x-12}{2(x-4)} = \frac{3(x-4)}{2(x-4)} = 1,5, \text{ так как} \\
 & x^2-3x-4 = x^2-4x+x-4 = x(x-4)+(x-4) = (x-4)(x+1).
 \end{aligned}$$

Решение зачетной карточки 7

$$1. \frac{(3a-b)^3}{a-b} - \frac{b^3-9ab^2}{b-a} = \frac{27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3+b^3-9ab^2}{a-b} = \frac{27a^2(a-b)}{a-b} = 27a^2.$$

$$2. \frac{a^2+5a}{a^2-18a+81} - \frac{50-3a}{18a-81-a^2} - \frac{131+2a}{(9-a)^2} = \\ = \frac{a^2+5a+50-3a-131-2a}{(a-9)^2} = \frac{a^2-81}{(a-9)^2} = \frac{(a+9)(a-9)}{(a-9)^2} = \frac{a+9}{a-9}.$$

$$3. \frac{ad-bc}{2cd(c+d)} + \frac{ad+bc}{2cd(c-d)} = \frac{(ad-bc)(c-d)+(ad+bc)(c+d)}{2cd(c+d)(c-d)} = \\ = \frac{adc-bc^2-ad^2+bcd+adc+bc^2+ad^2+bcd}{2cd(c+d)(c-d)} = \frac{2bcd+2adc}{2cd(c+d)(c-d)} = \frac{a+b}{(c+d)(c-d)}.$$

$$4. \frac{(5v+2t)^2}{5v-2t} + \frac{(5v-2t)^2}{5v+2t} = \frac{(5v+2t)^3+(5v-2t)^3}{(5v-2t)(5v+2t)} = \\ = \frac{(5v+2t+5v-2t)\left((5v+2t)^2-(5v+2t)(5v-2t)+(5v-2t)^2\right)}{(5v-2t)(5v+2t)} = \\ = \frac{10v(25v^2+20vt+4t^2-25v^2+4t^2+25v^2-20vt+4t^2)}{(5v-2t)(5v+2t)} = \frac{10v(25v^2+12t^2)}{(5v-2t)(5v+2t)}.$$

$$5. \frac{4b}{4b^2-1} + \frac{2b+1}{3-6b} + \frac{2b-1}{4b+2} = \frac{24b-8b^2-8b-2+12b^2-12b+3}{6(2b+1)(2b-1)} = \\ = \frac{4b^2+4b+1}{6(2b+1)(2b-1)} = \frac{(2b+1)^2}{6(2b+1)(2b-1)} = \frac{2b+1}{6(2b-1)}.$$

$$6. \frac{c+6b}{ac+2bc-6ab-3a^2} + \frac{2b}{a^2+2ab} - \frac{b}{ac-3a^2} = \\ = \frac{c+6b}{(a+2b)(c-3a)} + \frac{2b}{a(a+2b)} - \frac{b}{a(c-3a)} = \frac{a(c+6b)+2b(c-3a)-b(a+2b)}{a(a+2b)(c-3a)} = \\ = \frac{ac+6ba+2bc-6ab-ba-2b^2}{a(a+2b)(c-3a)} = \frac{(c-b)(a+2b)}{a(a+2b)(c-3a)} = \frac{c-b}{a(c-3a)}.$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & \frac{t^2(x-y)(y-z) + y^2(z-t)(x-t)}{z^2(x-y)(x-t) + x^2(y-z)(z-t)} = \\
& = \frac{t^2(xy - y^2 - xz + yz) + y^2(zx - tx - zt + t^2)}{z^2(x^2 - yx - tx + yt) + x^2(yz - z^2 - ty + zt)} = \\
& = \frac{t^2xy - t^2y^2 - t^2xz + t^2yz + y^2zx - y^2tx - y^2zt + y^2t^2}{z^2x^2 - z^2yx - z^2tx + z^2yt + x^2yz - x^2z^2 - x^2ty + x^2zt} = \\
& = \frac{txy(t-y) - zx(t^2 - y^2) + tyz(t-y)}{xyz(x-z) + xzt(x-z) - ty(x^2 - z^2)} = \frac{(t-y)(txy - zx(t+y) + tyz)}{(x-z)(xyz + xzt - ty(x+z))} = \\
& = \frac{(t-y)(txy - zxt - zxy + tyz)}{(x-z)(xyz + xzt - tyx - tyz)} = \frac{t-y}{z-x}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & \left(\left(\frac{4a}{(a-b)^3} - \frac{a}{a^3 - b^3} \right) \cdot \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 - \frac{3}{a^2 - b^2} \right) : \frac{3b^2}{a^6 - b^6} = \\
& = \left(\frac{a(4(a^2 + ab + b^2) - (a-b)^2)(a-b)^2}{(a-b)^3(a^2 + ab + b^2)(a+b)^2} - \frac{3}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a^6 - b^6}{3b^2} = \\
& = \left(\frac{a(4a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 + 2ab - b^2)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)^2} - \frac{3}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a^6 - b^6}{3b^2} = \\
& = \left(\frac{3a(a+b)^2}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)^2} - \frac{3}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a^6 - b^6}{3b^2} = \\
& = \left(\frac{3a}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} - \frac{3}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a^6 - b^6}{3b^2} = \\
& = \frac{3(a(a+b) - a^2 - ab - b^2)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)} \cdot \frac{(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)}{3b^2} = \\
& = \frac{-3b^2(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)}{(a^3 - b^3)(a+b)3b^2} = \frac{-(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a+b} = \\
& = -a^2 + ab - b^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \left(\frac{x-2y}{3xy+6y^2} - x^2 + 2xy \right) \cdot \frac{x+2y}{x^2-2xy} + \frac{6xy^2-1}{3xy} = \\
 & = \frac{(x-2y)(1-x(3xy+6y^2))}{3y(x+2y)} \cdot \frac{(x+2y)}{x(x-2y)} + \frac{6xy^2-1}{3xy} = \\
 & = \frac{1-3x^2y-6y^2x}{3yx} + \frac{6xy^2-1}{3xy} = \\
 & = \frac{1-3x^2y-6y^2x+6xy^2-1}{3xy} = \frac{-3x^2y}{3xy} = -x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{a+7}{a+2} : \left(\frac{9(a+2)}{3a+13} - \frac{(2a-1)^2}{3a^2+19a+26} \right) - \frac{2}{a+1} = \\
 & = \frac{a+7}{a+2} : \frac{9(a+2)^2 - (2a-1)^2}{(3a+13)(a+2)} - \frac{2}{a+1} = \\
 & = \frac{a+7}{a+2} \cdot \frac{(3a+13)(a+2)}{(3(a+2)+(2a-1))(3(a+2)-(2a-1))} - \frac{2}{a+1} = \\
 & = \frac{(a+7)(3a+13)}{5(a+1)(a+7)} - \frac{2}{a+1} = \frac{3a+13-10}{5(a+1)} = \frac{3a+3}{5(a+1)} = \frac{3}{5},
 \end{aligned}$$

так как $3a^2 + 19a + 26 = 3a^2 + 6a + 13a + 26 =$
 $3a(a+2) + 13(a+2) = (a+2)(3a+13).$

Решение зачетной карточки 8

$$1. \frac{(5x-1)^3}{5x-3} + \frac{-1+15x}{3-5x} = \frac{125x^3-75x^2+15x-1+1-15x}{5x-3} = \frac{25x^2(5x-3)}{5x-3} = 25x^2.$$

$$2. \frac{x^3+50}{10x-x^2-25} + \frac{2x^2}{(x-5)^2} + \frac{25x}{(5-x)^2} = \frac{-x^3-50+2x^2+25x}{(x-5)^2} =$$

$$= \frac{x^2(2-x)-25(2-x)}{(x-5)^2} = \frac{(x-5)(x+5)(2-x)}{(x-5)^2} = \frac{(x+5)(2-x)}{x-5}.$$

$$3. \frac{9m^2-12mn+16n^2}{3m-4n} + \frac{9m^2+12mn+16n^2}{3m+4n} =$$

$$= \frac{27m^3+64n^3+27m^3-64n^3}{(3m-4n)(3m+4n)} = \frac{54m^3}{9m^2-16n^2}.$$

$$4. \frac{(4v-q)^2}{4q-v} + \frac{(4q-v)^2}{4v-q} = \frac{(4v-q)^3+(4q-v)^3}{(4q-v)(4v-q)} =$$

$$= \frac{(4v-q+4q-v)((4v-q)^2-(4v-q)(4q-v)+(4q-v)^2)}{(4q-v)(4v-q)} =$$

$$= \frac{(3v+3q)(16v^2-8vq+q^2-16vq+4q^2+4v^2-qv+16q^2-8vq+v^2)}{(4q-v)(4v-q)} =$$

$$= \frac{9(v+q)(7v^2-11vq+7q^2)}{(4q-v)(4v-q)}.$$

$$5. \frac{2a+3c}{4a+2c} - \frac{2b-3a}{9a+3b} + \frac{6a^2-bc}{6a^2+2ab+3ac+bc} = \frac{2a+3c}{2(2a+c)} - \frac{2b-3a}{3(3a+b)} +$$

$$+ \frac{6a^2-bc}{(2a+c)(3a+b)} = \frac{3(2a+3c)(3a+b)-2(2b-3a)(2a+c)+6(6a^2-bc)}{6(2a+c)(3a+b)} =$$

$$= \frac{18a^2+27ca+6ab+9bc-8ab-4bc+12a^2+6ac+36a^2-6bc}{6(2a+c)(3a+b)} =$$

$$= \frac{66a^2+33ac-2ab-bc}{6(2a+c)(3a+b)} = \frac{33a(2a+c)-b(2a+c)}{6(2a+c)(3a+b)} = \frac{(2a+c)(33a-b)}{6(2a+c)(3a+b)} =$$

$$= \frac{33a-b}{6(3a+b)}.$$

6.
$$\begin{aligned} & \frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{(a-c)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(b-c)} = \frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ & = \frac{(b-c+c-a)((b-c)^2 - (b-c)(c-a) + (c-a)^2) + (a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ & = \frac{(b-a)(b^2 - 2bc + c^2 - bc + c^2 + ab - ac + c^2 - 2ac + a^2) - (b-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ & = \frac{(b-a)(b^2 - 3bc + ab - 3ac + 3c^2 + a^2 - b^2 + 2ab - a^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-a)(3ab - 3bc - 3ac + 3c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ & = \frac{(b-a)(3b(a-c) - 3c(a-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{3(b-a)(a-c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 3. \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} & \left(\frac{4z^3}{(z+2)^3} - \frac{z^3}{z^3+8} \right) : \left(\frac{z-2}{z+2} \right)^2 - \frac{2(z^3-4)}{z^3+8} = \\ & = \frac{z^3(4(z^2-2z+4) - (z+2)^2)}{(z+2)^3(z^2-2z+4)} \cdot \frac{(z+2)^2}{(z-2)^2} - \frac{2(z^3-4)}{z^3+8} = \\ & = \frac{z^3(4z^2-8z+16-z^2-4z-4)}{(z^3+8)(z-2)^2} - \frac{2(z^3-4)}{z^3+8} = \frac{3z^3(z-2)^2}{(z^3+8)(z-2)^2} - \frac{2(z^3-4)}{z^3+8} = \\ & = \frac{3z^3 - 2z^3 + 8}{z^3+8} = \frac{z^3+8}{z^3+8} = 1. \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} & \left(\frac{x+4y}{\frac{16x^2}{4y-x} + 4y+7x} - \frac{1}{1 + \frac{8x(x+4y)}{(x-4y)^2}} \right) : \frac{4y-x}{(3x+4y)^2} = \\ & = \left(\frac{(x+4y)(4y-x)}{16x^2 + (4y+7x)(4y-x)} - \frac{(x-4y)^2}{(x-4y)^2 + 8x(x+4y)} \right) \cdot \frac{(3x+4y)^2}{4y-x} = \\ & = \left(\frac{(x+4y)(4y-x)}{16x^2 + 16y^2 + 24xy - 7x^2} - \frac{(x-4y)^2}{x^2 - 8xy + 16y^2 + 8x^2 + 32xy} \right) \cdot \frac{(3x+4y)^2}{4y-x} = \\ & = \left(\frac{16y^2 - x^2}{(3x+4y)^2} - \frac{x^2 - 8xy + 16y^2}{(3x+4y)^2} \right) \cdot \frac{(3x+4y)^2}{4y-x} = \\ & = \frac{16y^2 - x^2 - x^2 + 8xy - 16y^2}{(3x+4y)^2} \cdot \frac{(3x+4y)^2}{4y-x} = \frac{2x(4y-x)}{4y-x} = 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \quad & \frac{y+1}{x^2-x+2xy-y+y^2} + \frac{x+y}{xy-x+y^2-2y+1} - \frac{y^2}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \\
& = \frac{y+1}{(x+y)^2-(x+y)} + \frac{x+y}{x(y-1)+(y-1)^2} - \frac{y^2}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \\
& = \frac{y+1}{(x+y)(x+y-1)} + \frac{x+y}{(y-1)(x+y-1)} - \frac{y^2}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \\
& = \frac{(y+1)(y-1)+(x+y)^2-y^2}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \frac{y^2-1+x^2+2xy+y^2-y^2}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \\
& = \frac{x^2+2xy+y^2-1}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \frac{(y+x)^2-1}{(x+y)(y-1)(x+y-1)} = \\
& = \frac{(y+x+1)(y+x-1)}{(x+y)(y-1)(y+x-1)} = \frac{y+x+1}{(x+y)(y-1)}.
\end{aligned}$$

$$10. \quad \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+11}{x^3-3x^2-6x+8} : \left(\frac{x-4}{2x^2+x-6} - \frac{9}{8+2x-x^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
a) \quad & x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x^3 + 8) - 3x(x+2) = \\
& = (x+2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x+2) = \\
& = (x+2)(x^2 - 5x + 4) = (x+2)((x^2 - 4x) - (x-4)) = \\
& = (x+2)(x(x-4) - (x-4)) = \\
& = (x+2)(x-4)(x-1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
б) \quad & 8 + 2x - x^2 = 4 - x^2 + 4 + 2x = (2-x)(2+x) + 2(2+x) = \\
& = (2+x)(4-x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
в) \quad & 2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = \\
& = 2x(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(2x-3).
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+11}{(x+2)(x-4)(x-1)} : \left(\frac{x-4}{(x+2)(2x-3)} - \frac{9}{(2+x)(4-x)} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+11}{(x+2)(x-4)(x-1)} \cdot \frac{(x-4)^2 + 9(2x-3)}{(x+2)(2x-3)(x-4)} = \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+11}{(x+2)(x-4)(x-1)} \cdot \frac{(x+2)(2x-3)(x-4)}{x^2-8x+16+18x-27} = \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{(x+11)(2x-3)}{(x-1)(x^2+10x-11)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{(x+11)(2x-3)}{(x-1)(x+11)(x-1)} = \\ &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x-3}{(x-1)^2} = \frac{1+2x-3}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1}, \end{aligned}$$

так как $x^2 + 10x - 11 = x^2 + 11x - x - 11 =$
 $= x(x+11) - (x+11) = (x+11)(x-1).$

Содержание

1. Алгебраические выражения	
и действия над ними	5
Практикум 1	6
Тренировочная работа 1	8
Понятие дроби	11
Практикум 2	12
Практикум 3	14
Тренировочная работа 2	16
Упражнения на умножение	
многочлена на одночлен или многочлен	20
Практикум 4	20
Тренировочная работа 3	22
Проверочная работа 1	25
2. Разложение на множители	26
Метод вынесения общего множителя	26
Практикум 5	26
Метод группировки	28
Практикум 6	28
Тренировочная работа 4	29
Использование формул сокращенного	
умножения при разложении на множители	32
Практикум 7	33
Тренировочная работа 5	35
Проверочная работа 2	39
3. Действия с дробями	40
Основное свойство дробей	40
Практикум 8	40
Тренировочная работа 6	41
Тренировочная работа 7	43
Сложение и вычитание дробей	
с одинаковыми знаменателями	47
Практикум 9	47
Тренировочная работа 8	49
Умножение и деление дробей	51
Практикум 10	51
Тренировочная работа 9	52
Тренировочная работа 10	54

Сложение дробей	
с различными знаменателями	58
Практикум 11	59
Тренировочная работа 11	60
Обобщающая тренировочная работа 12	63
Проверочная работа 3	67
Тренировочная работа 13	68
Проверочная работа 4	72
Совместные действия с дробями	73
Практикум 12	73
Тренировочная работа 14	76
Решение более сложных примеров	80
Практикум 13	80
Тренировочные карточки	85
Решения тренировочных карточек	93
Зачетные карточки	111
4. Решения	119
Решение проверочной работы 1	119
Решение проверочной работы 2	121
Решение проверочной работы 3	123
Решение проверочной работы 4	126
Решение зачетной карточки 1	130
Решение зачетной карточки 2	132
Решение зачетной карточки 3	134
Решение зачетной карточки 4	136
Решение зачетной карточки 5	138
Решение зачетной карточки 6	141
Решение зачетной карточки 7	143
Решение зачетной карточки 8	146