МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Иррациональные уравнения и неравенства

Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Иррациональные уравнения и неравенства

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ, АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

VICTORY

ПЕТРОГЛИФ МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2011

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Ливщиц.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Иррациональные уравнения и неравенства. — 4-е издание — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО 2011. — 216 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-024-8, ISBN 978-5-91281-052-7, ISBN 978-5-94057-795-9.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов, преподавателей.

ISBN 978-5-94057-795-9 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-024-8 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-052-7 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов (25 уроков).

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий
1 – 4	**Иррациональные уравнения (стр. 5–44)** Практикум 1. Тренировочная работа 1 (2, 5, 7, 12, 13). Практикум 2. Тренировочная работа 2 (1, 5, 7, 10, 24).
5 – 8	**Примеры нестандартных способов решения иррациональных уравнений (стр. 46–77)** Практикум 3. Тренировочная работа 3 (1, 2, 5, 12, 17).
9 – 11	**Иррациональные неравенства (стр. 78–94)** Практикум 4. Тренировочная работа 4 (2, 3, 7, 9, 12).
12 – 16	**Примеры решения более сложных иррациональных неравенств (стр. 95–130)** Практикум 5. Тренировочная работа 5 (1, 3, 4, 7, 8, 14, 17 (рассмотреть также способ подстановки), 20).
17 – 20	**Системы иррациональных неравенств (стр. 131–150)** Практикум 6. Тренировочная работа 6 (3, 7, 10).
21 – 25	**Обобщение опыта решения иррациональных уравнений и неравенств (стр. 151-210)** Тренировочная карточка 1 (2, 4). Тренировочная карточка 2 (1, 2, 3, 4). Тренировочная карточка 3 (2, 5). Тренировочная карточка 4 (2, 3, 4). Тренировочная карточка 5 (4, 5). Тренировочная карточка 6 (1, 2, 4, 5). Можно взять часть зачетных карточек.

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Иррациональные уравнения

Введение

К сожалению, корректного определения иррационального уравнения нет. Хотя ясно, что в иррациональном уравнении мы имеем дело с корнями n-й степени ($n \geqslant 2$).

В этом разделе мы будем рассматривать различные уравнения, содержащие корни, и анализировать различные подходы к их решению.

Примеры решения простейших иррациональных уравнений

Практикум 1

В этом разделе мы рассмотрим приемы решения типовых иррациональных уравнений.

1. $\sqrt{x-13} - \sqrt{10-x} = 2$.

Найдем область определения уравнения, которую будем обозначать D(У): подкоренные выражения должны быть больше или равны нулю.

Полученная система не имеет решения, значит, исходное уравнение не определено.

$$D(У)\colon \begin{cases} x - 13 \geqslant 0 \\ 10 - x \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 13 \\ x \leqslant 10 \end{cases};$$

$$D(У) \doteq \varnothing.$$

Ответ: решений нет.

2. $\sqrt{3-x} = x-3.$

D(У): $3 - x \geqslant 0$.
D(У) $= (-\infty;\ 3]$.

Необходимо учесть, что при решении рассматривается только арифметический корень. Поэтому должно выполняться условие $x - 3 \geqslant 0$.
С учетом D(у) получим систему

$$\begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}; \qquad x = 3.$$

После проверки ясно, что $x = 3$ — корень уравнения.
Но можно решать это уравнение на уровне равносильности, используя свойство: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2 \end{cases}$.

Тогда имеем:

$$\sqrt{3-x} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ 3 - x = (x-3)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 3 \\ (x-3)(x-3+1) = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x \geqslant 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3; \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \qquad x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 - x.$

D(У): $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$.
D(У) $= [2;\ \infty)$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому должно выполняться неравенство $1 - x \geqslant 0$.
Составим систему условий (неравенств):

$$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ x \geqslant 2 \end{cases} \qquad \varnothing.$$

Полученная система неравенств не имеет решения.
Ответ: решений нет.

4. $\sqrt{x+2} = x.$

Так как $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 2 = x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $x = 2$.

5. $\sqrt{x+3} = -x - 4$.

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -x - 4 \geqslant 0 \\ x + 3 = (-x - 4)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant -4 \\ x^2 + 8x + 16 = x + 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leqslant -4 \\ x^2 + 7x + 13 = 0 \end{cases}.$$

У входящего в систему квадратного уравнения дискриминант $D = 7^2 - 52 < 0$, следовательно, действительных корней оно не имеет.

Примечание. Можно сразу заметить, что решений нет, если рассмотреть D(У) исходного уравнения и E(y). E(y) — область изменения функции, стоящей в левой части уравнения.

В данном случае $y = \sqrt{x+3}$, $E(y) = [0;\ \infty)$.

$$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ -x - 4 \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ответ: решений нет.

6. $\sqrt{5x+6} = -x$.

Так как $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ x^2 = 5x + 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $x = -1$.

Замечание. В ходе неравносильных преобразований возможно появление посторонних решений, тогда нужно производить отбор полученных решений проверкой, т. е. подстановкой их в исходное уравнение.

7. $\sqrt{3x-2} = 3 - \sqrt{x-1}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат (неравносильное преобразование):

$$3x - 2 = 9 - 6\sqrt{x-1} + x - 1; \quad 6\sqrt{x-1} = 10 - 2x;$$

$$3\sqrt{x-1} = 5 - x; \quad 9(x-1) = 25 - 10x + x^2;$$

$$x^2 - 19x + 34 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 17. \end{array}\right.$$

Так как при решении были использованы неравносильные преобразования, то нужна проверка.

П р о в е р к а.

1. $x = 2$.

$\sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 3 - \sqrt{2-1}$; $\sqrt{4} = 3 - 1$; $2 = 2$ — истина.

2. $x = 17$.

$\sqrt{3 \cdot 17 - 2} = 3 - \sqrt{17-1}$; $\sqrt{49} = 3 - 4$; $7 = -1$ — ложь.

О т в е т: $x = 2$.

8. $\dfrac{2x-6}{\sqrt{5-x}} + \sqrt{5-x} = 3\sqrt{x-3}$.

Выполним необходимые преобразования, а затем проверим:

$$2x - 6 + \left(\sqrt{5-x}\right)^2 = 3\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{5-x};$$

$$2x - 6 + 5 - x = 3\sqrt{-x^2 + 8x - 15}; \quad x - 1 = 3\sqrt{-x^2 + 8x - 15};$$

$$x^2 - 2x + 1 = 9\left(-x^2 + 8x - 15\right); \quad 10x^2 - 74x + 136 = 0;$$

$$5x^2 - 37x + 68 = 0; \quad \Bigg|\; x_{1,\,2} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 1360}}{10} = \frac{37 \pm 3}{10};$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 3{,}4. \end{array}\right.$$

П р о в е р к а.

1. $x = 4$.

$\dfrac{2 \cdot 4 - 6}{\sqrt{5-4}} + \sqrt{5-4} = 3\sqrt{4-3}$; $2 + 1 = 3 \cdot 1$ — истина.

2. $x = 3,4$.

$\frac{6,8-6}{\sqrt{1,6}} + \sqrt{1,6} = 3\sqrt{0,4}$.

Умножим обе части на $\sqrt{1,6}$:

$0,8 + 1,6 = 3\sqrt{0,64}$; $\quad 2,4 = 3 \cdot 0,8$ — истина.

Ответ: $\{4;\ 3,4\}$.

9. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-5}$.

D(У): $x \geqslant 2$.
D(У) $= [2;\ \infty)$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 1 = 3x - 5;$

$2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - 2;$

$4\left(x^2 - 3x + 2\right) = x^2 - 4x + 4;\ \ 3x^2 - 8x + 4 = 0.$

Напомним, что для квадратного уравнения $nx^2 + 2kx + m = 0$ (с четным коэффициентом при x) корни определяются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - mn}}{n}.$$

В нашем случае

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3};\quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \in \text{D(У)} \\ x = \frac{2}{3} \notin \text{D(У)} \end{array}\right..$$

Проверка. $x = 2$.

$\sqrt{2-2} + \sqrt{2-1} = \sqrt{3 \cdot 2 - 5}$; $\quad 0 + 1 = 1$ — истина.

Ответ: $x = 2$.

10. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x - 1$.

Так как $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a = b^2 \end{cases}$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ 1 + x\sqrt{x^2 - 24} = x^2 - 2x + 1 \end{cases};\quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x\left(\sqrt{x^2 - 24} - (x - 2)\right) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x^2 - 24} = x - 2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x - 2 \geqslant 0 \\ x^2 - 4x + 4 = x^2 - 24 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x = 7 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 7$.

11. $\sqrt{x^2 + 12x + 36} = x^2 - 36$.

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении, правую часть уравнения разложим на множители:

$\sqrt{(x+6)^2} = (x-6)(x+6)$; $|x+6| = (x-6)(x+6)$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -6 \\ (x+6) - (x+6)(x-6) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6 \\ -(x+6) - (x+6)(x-6) = 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -6 \\ (x+6)(1 - x + 6) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -6 \\ -(x+6)(1 + x - 6) = 0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geqslant -6 \\ \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 7 \end{array}\right. \end{cases} & \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 7 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x < -6 \\ \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} & \varnothing \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{-6;\ 7\}$.

12. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x - 7 = 0$.

Положим $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t,\ t \geq 0$.

Тогда $x^2 - 3x + 5 = t^2$, а $x^2 - 3x - 7 = t^2 - 12$.

Исходное уравнение примет вид $t^2 + t - 12 = 0$.

Из двух его решений лишь одно попадает в область задания t $(t \geqslant 0)$:

$$\left[\begin{array}{l} t = -4 \notin [0, \infty) \\ t = 3 \end{array}\right. .$$

Зная, чему равно t, решаем уравнение относительно x:

$\sqrt{x^2-3x+5}=3$; $x^2-3x+5=9$; $x^2-3x-4=0$;

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Решение, найденное таким способом, дополнительной проверки не требует.

Этот способ решения называется *подстановкой.*

Ответ: $\{-1;\ 4\}$.

13. $(16-x^2)\sqrt{3+x}=0$.

Равносильная система имеет вид

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 16-x^2=0 \\ 3+x=0 \end{array}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} x\geqslant -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-4 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\{-3;\ 4\}$.

14. $\frac{8}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{10-x}=2$. D(У): $10-x>0$.

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{10-x}$. Дополнив полученное уравнение требованиями D(у), составим систему:

$$\begin{cases} 8-\left(\sqrt{10-x}\right)^2=2\sqrt{10-x} \\ 10-x>0 \end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases} 8-10+x=2\sqrt{10-x} \\ x<10 \end{cases};\quad \begin{cases} x-2=2\sqrt{10-x} \\ x<10 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\geqslant 2 \\ x<10 \\ x^2-4x+4=40-4x \end{cases};\quad \begin{cases} 2\leqslant x<10 \\ x^2=6^2 \end{cases};\quad \begin{cases} 2\leqslant x<10 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-6 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $x=6$.

15. $\sqrt{|x-5|}=x-3.$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} x-3\geqslant 0 \\ |x-5|=(x-3)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x\geqslant 3 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 5, \text{ тогда } |x-5|=x-5 \\ x-5=x^2-6x+9 \end{cases} \\ \begin{cases} x<5, \text{ тогда } |x-5|=5-x \\ 5-x=x^2-6x+9 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geqslant 3 \\ x\geqslant 5 \\ x^2-7x+14=0 \ \ (\text{D}<0 \text{ — решений нет}) \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 3 \\ x<5 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\begin{cases} x\geqslant 3 \\ x<5 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}; \qquad x=4.$$

Существует другой способ решения системы:

$$\begin{cases} x\geqslant 3 \\ |x-5|=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3 \\ (|x-5|)^2=(x-3)^4 \end{cases}.$$

Так как $|a|^2=a^2$, имеем

$$\begin{cases} x\geqslant 3 \\ \left((x-3)^2+x-5\right)\left((x-3)^2-x+5\right)=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\geqslant 3 \\ (x^2-5x+4)(x^2-7x+14)=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\geqslant 3 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=0 \\ x^2-7x+14=0 \text{ — решений нет} \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x\geqslant 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}; \qquad x=4.$$

О т в е т: $x=4$.

Тренировочная работа 1

Решите уравнения 1–15.

1. $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1.$

2. $\sqrt{5x-6}=-x.$

3. $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=2.$

4. $2\sqrt{x-1}+2=\sqrt{3x+1}.$

5. $\sqrt{4x^2-\sqrt{x-1}}=4-2x.$

6. $x=1-\sqrt{1-x\sqrt{16+x^2}}.$

7. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1.$

8. $\sqrt{\frac{x-3}{2}}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+3}.$

9. $\sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}}=2x.$

10. $2x^2-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3x+3=0.$

11. $\frac{3}{\sqrt{3-x}+1}+2\sqrt{3-x}=5.$

12. $\sqrt{|x-8|}=x-2.$

13. $(9-x^2)\sqrt{2+x}=0.$

14. $\sqrt{1-x-x^2}=x-|x-1|.$

15. $\sqrt{3x-x^2+2}=4-x.$

Решение тренировочной работы 1

1. $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1;\ \ 3+\sqrt{x-1}=1;\ \ \sqrt{x-1}=-2.$

Отметим, что $-2 \notin [0,\ \infty)$.

Ответ: решений нет.

2. $\sqrt{5x-6}=-x.$

Составим систему, равносильную данному уравнению, и решим ее:

$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ 5x-6=(-x)^2 \end{cases};\ \ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases};\ \ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}\qquad \varnothing.$

Ответ: решений нет.

3. $\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}=2.$ | D(y): $\begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases};\ \ \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x \leqslant 3 \end{cases};\ \ x=3.$

Проверим подстановкой, является ли $x=3$ решением:

$\sqrt{3-3}+\sqrt{3-3}=2;\ \ 0+0=2$ — ложь.

Ответ: решений нет.

4. $2\sqrt{x-1}+2=\sqrt{3x+1}.$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$4(x-1)+8\sqrt{x-1}+4=3x+1;\ \ 8\sqrt{x-1}=1-x;$

$64(x-1)=(1-x)^2.$

Учтем, что $(x-1)^2=(1-x)^2$.

$(x-1)(64-x+1)=0;\ \ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=65 \end{array}\right..$

Проверка.

1. $x=1$.

   $2\sqrt{1-1}+2=\sqrt{3\cdot 1+1};\ \ 2=2$ — истина.

2. $x=65$.

   $2\sqrt{65-1}+2=\sqrt{65\cdot 3+1};\ \ 2\cdot 8+2=\sqrt{196};$

   $18=14$ — ложь.

Ответ: $x=1$.

5. $\sqrt{4x^2 - \sqrt{x-1}} = 4 - 2x.$

Составим систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} 4 - 2x \geqslant 0 \\ 4x^2 - \sqrt{x-1} = (4-2x)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant 2 \\ 4x^2 - \sqrt{x-1} = 16 - 16x + 4x^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16(x-1) = \sqrt{x-1} \\ x \leqslant 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 2 \\ 256(x-1)^2 = x - 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 1 = \frac{1}{256} \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \geqslant x \geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 + \frac{1}{256} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\left\{1;\ 1\frac{1}{256}\right\}$.

6. $x = 1 - \sqrt{1 - x\sqrt{16 + x^2}}.$

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2+16}} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ 1 - x\sqrt{x^2+16} = x^2 - 2x + 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x\sqrt{x^2+16} - 2x + x^2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+16} = 2 - x \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ x^2 + 16 = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x = -3 \end{cases} \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\{0;\ -3\}$.

7. $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x - 3} = x + 1.$

Возведение в нечетную степень не нарушает равносильности.

$x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = (x+1)^3;$

$x^3 + 4x^2 + 3x - 3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1;\quad x^2 = 4;\quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$

Ответ: $\{2;\ -2\}$.

8. $\sqrt{\frac{x-3}{2}}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+3}.$

D(y): $\begin{cases}\frac{x-3}{2}\geqslant 0\\ 2x\geqslant 0\\ x+3\geqslant 0\end{cases}$; D(y) = $[3;\ \infty)$.

Рассмотрим комбинированный способ:

$\frac{x-3}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{x-3}{2}}\cdot\sqrt{2x}+2x=x+3;$

$x-3+4\sqrt{(x-3)x}+4x=2x+6;$

$4\sqrt{x(x-3)}=9-3x;$

$16x(x-3)=3^2(3-x)^2;$

$(x-3)(16x-9x+27)=0;\quad \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-3\frac{6}{7}\end{array}\right..$

П р о в е р к а. Решение $-3\frac{6}{7}\notin[3;\ \infty)$.
Остается проверить решение $x=3$:

$\sqrt{\frac{3-3}{2}}+\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{3+3},\quad 0+\sqrt{6}=\sqrt{6}$ — истина.

О т в е т: $x=3$.

9. $\sqrt{4-2\sqrt{x^2-1}}=2x.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geqslant 0\\ 4-2\sqrt{x^2-1}=4x^2\end{cases};\quad \begin{cases}x\geqslant 0\\ 2(1-x^2)=\sqrt{x^2-1}\end{cases}.$

С учетом требований к арифметическому корню и подкоренному выражению составим систему:

$\begin{cases}x\geqslant 0\\ 1-x^2\geqslant 0.\\ x^2-1\geqslant 0\end{cases}$

Этим требованиям удовлетворяет лишь $x=1$.

П р о в е р к а. Подставим $x=1$ в уравнение:

$\sqrt{4-2\sqrt{1-1}}=2\cdot 1;\quad 2=2$ — истина.

О т в е т: $x=1$.

10. $2x^2 - 5\sqrt{2x^2+3x+9} + 3x + 3 = 0.$

Используем подстановку $\sqrt{2x^2+3x+9} = t,\quad t \geqslant 0$.

Тогда $2x^2+3x+9 = t^2$ и $2x^2+3x+3 = t^2-6$.

Решим уравнение $t^2 - 5t - 6 = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -1 \notin [0;\ \infty) \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\sqrt{2x^2+3x+9} = 6 \Leftrightarrow 2x^2+3x+9 = 36;$$

$$2x^2+3x-27 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -4,5 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-4,5;\ 3\}$.

11. $\frac{3}{\sqrt{3-x}+1} + 2\sqrt{3-x} = 5.$ | D(y): $3 - x \geqslant 0$. D(y) $= (-\infty;\ 3]$.

$$3 + 2\sqrt{3-x}\left(\sqrt{3-x}+1\right) = 5\left(\sqrt{3-x}+1\right);$$

$$3 + 2(3-x) + 2\sqrt{3-x} = 5\sqrt{3-x} + 5;\quad 3\sqrt{3-x} = 4 - 2x.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат — это неравносильный переход:

$$9(3-x) = 16 - 16x + 4x^2;\quad 4x^2 - 16x + 9x - 11 = 0;$$

$$4x^2 - 7x - 11 = 0;\ \Big|\ x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+176}}{8} = \frac{7 \pm 15}{8};\left[\begin{array}{l} x = 2\frac{3}{4} \\ x = -1 \end{array}\right..$$

Проверить истинность найденных решений подстановкой технически очень сложно, поэтому выясним, при каких условиях вышеупомянутый переход равносилен.

Нужно, чтобы выполнялось условие $4 - 2x \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant 2$. Этому требованию удовлетворяет лишь $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Примечание. Возможен другой путь решения с использованием подстановки $\sqrt{3-x} = t$, где $t > 0$.

12. $\sqrt{|x-8|} = x-2.$

В ходе решения используем свойство $|a|^2 = a^2$.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ |x-8| = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ (|x-8|)^2 = (x-2)^4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ \left((x-2)^2 - (x-8)\right)\left((x-2)^2 + x - 8\right) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & x^2 - 4x + 4 - x + 8 = 0 \\ & x^2 - 4x + 4 + x - 8 = 0 \end{aligned}\right. \\ x \geqslant 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} & x^2 - 5x + 12 = 0 \quad (D < 0) \\ & x^2 - 3x - 4 = 0 \end{aligned}\right. \\ x \geqslant 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & x = 4 \\ & x = -1 \end{aligned}\right. \\ x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 4$.

13. $(9 - x^2)\sqrt{2+x} = 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ \left[\begin{aligned} & 9 - x^2 = 0 \\ & \sqrt{x+2} = 0 \end{aligned}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -2 \\ \left[\begin{aligned} & x = 3 \\ & x = -3 \\ & x = -2 \end{aligned}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\{-2;\ 3\}$.

14. $\sqrt{1 - x - x^2} = x - |x-1|.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \quad (|x-1| = x - 1) \\ \sqrt{1 - x - x^2} = x - x + 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - 1 < 0 \quad (|x-1| = 1 - x) \\ \sqrt{1 - x - x^2} = x + x - 1 \end{cases} \end{aligned}\right.; \quad \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \sqrt{1 - x - x^2} = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{1 - x - x^2} = 2x - 1 \end{cases} \end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 1\\ 1-x-x^2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ 2x-1\geqslant 0\\ 1-x-x^2=4x^2-4x+1\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 1\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right. \quad \varnothing\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ x\geqslant \frac{1}{2}\\ 5x^2-3x=0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x<1\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{3}{5}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Ответ: $x = \frac{3}{5}$.

15. $\sqrt{3x - x^2 + 2} = 4 - x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4-x\geqslant 0\\ 3x-x^2+2=(4-x)^2\end{cases};\quad \begin{cases}x\leqslant 4\\ 3x-x^2+2=16-8x+x^2\end{cases};$$

$$\begin{cases}x\leqslant 4\\ 2x^2-11x+14=0\end{cases};\ \Big|\ x_{1,\,2} = \frac{11\pm\sqrt{121-112}}{4} = \frac{11\pm 3}{4}$$

$$\begin{cases}x\leqslant 4\\ \left[\begin{array}{l}x=3{,}5\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}.$$

Ответ: $\{2;\ 3{,}5\}$.

Вывод. Для решения иррациональных уравнений необходимо учесть, что:

а) $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases}b \geqslant 0\\ a = b^2\end{cases};$

б) $b\sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}a \geqslant 0\\ a\cdot b = 0\end{cases};$

в) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases}a \geqslant 0\\ a = b\end{cases};$

г) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} \Leftrightarrow \begin{cases}a \geqslant 0\\ b \geqslant 0\\ c \geqslant 0\\ a + b + 2\sqrt{ab} = c\end{cases};$

д) $|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases}b \geqslant 0\\ a^2 = b^2\end{cases};$

е) $|a|^2 = a^2$.

Примеры решения более сложных иррациональных уравнений

Практикум 2

1. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4.$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = t > 0$, тогда уравнение примет вид $t + \frac{3}{t} = 4.$

Находим: $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 1 \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 3 \\ \sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 1 \end{array}\right.$.

Возведем в квадрат обе части каждого из уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3-x}{2+x} = 9 \\ \frac{3-x}{2+x} = 1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 3-x = 18+9x \\ 3-x = 2+x \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = -1{,}5 \\ x = 0{,}5 \end{array}\right..$$

Проверка показывает, что найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{-1{,}5;\ 0{,}5\}$.

2. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$x + 5 + 3\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x+6} + {}$$
$$+ 3\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{x+5} + x + 6 = 2x + 11;$$

$$3\sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{x+6} \cdot \left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 0.$$

Решим систему $\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+5} = 0 \\ \sqrt[3]{x+6} = 0 \\ \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = 0 \end{array}\right.$.

Для решения третьего уравнения ($\sqrt[3]{x+5} = -\sqrt[3]{x+6}$) возведем обе его части в куб.

Получим: $x+5=-x-6$; $2x=-11$.

Запишем решение системы: $\left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-6 \\ x=-5,5 \end{array}\right.$.

П р о в е р к а.

1) $x=-5$.

$\sqrt[3]{-5+5}+\sqrt[3]{-5+6}=\sqrt[3]{2(-5)+11}$; $\quad 0+\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}$ — истина.

2) $x=-6$.

$\sqrt[3]{-6+5}+\sqrt[3]{-6+6}=\sqrt[3]{2(-6)+11}$; $\quad -\sqrt[3]{1}+0=-\sqrt[3]{1}$ — истина

3) $x=-5,5$.

$\sqrt[3]{-5,5+5}+\sqrt[3]{-5,5+6}=\sqrt[3]{2(-5,5)+11}$;

$\sqrt[3]{-0,5}+\sqrt[3]{0,5}=0$ — истина.

О т в е т: $\{-5;\ -5,5;\ -6\}$.

Примечание. Проверка в этом случае не нужна, так как возведение в нечетную степень не нарушает равносильности.

3. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$$x+1+3\sqrt[3]{(x+1)^2(3x+1)}+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)^2}+3x+1=x-1$$

$$3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=-3(x+1).$$

В условии сказано, что $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$, поэтому заменим $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ на $\sqrt[3]{x-1}$:

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\cdot\sqrt[3]{x-1}=-(x+1).$$

Возведем еще раз обе части уравнения в третью степень

$$(x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3;$$

$$(x+1)\left((x-1)(3x+1)+(x+1)^2\right)=0.$$

После преобразований получим

$$(x+1)4x^2=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Проверка:

1) $x=-1$.

$$\sqrt[3]{-1+1}+\sqrt[3]{3(-1)+1}=\sqrt[3]{-1-1};\quad 0+\sqrt[3]{-2}=\sqrt[3]{-2}\text{ — истина.}$$

2) $x=0$.

$$\sqrt[3]{0+1}+\sqrt[3]{3\cdot 0+1}=\sqrt[3]{0-1};\quad 1+1=-1\text{ — ложь.}$$

Ответ: $x=-1$.

Примечание. $x = 0$ не является корнем уравнения. Почему? Разве мы делали неравносильные преобразования? Да, так как при решении уравнения мы заменили левую часть уравнения $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ на не равную ей *тождественно* правую часть $\sqrt[3]{x-1}$ (нам дано уравнение, а не тождество). В таких случаях проверка обязательна!

4. $\sqrt{6-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1}=1$.

Введем подстановку: $\sqrt{x^2+x-1}=t\geqslant 0$, тогда

$x^2+x-1=t^2$; $-x^2-x+1=-t^2$; $-x^2-x+6=-t^2+5$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt{5-t^2}=1+t\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\geqslant 0\\5-t^2=t^2+2t+1\end{cases};\ \begin{cases}t\geqslant 0\\t^2+t-2=0\end{cases};\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=1\end{array}\right.\\t\geqslant 0\end{cases};\quad t=1.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\sqrt{x^2+x-1}=1;\quad \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2;\ 1\}$.

5. $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3-\sqrt{x-2}}=1$.

Введем подстановку: $\sqrt{x-2}=t\geqslant 0$, тогда $x-2=t^2$;

$x=t^2+2$; $x-3=t^2-1$.

Уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2-2+t}-\sqrt{t^2-1-t}=1;\quad \sqrt{t^2-2+t}=1+\sqrt{t^2-1-t}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$t^2-2+t=1+2\sqrt{t^2-1-t}+t^2-1-t;\quad t-1=\sqrt{t^2-t-1}.$

Возведя в квадрат обе части уравнения еще раз, получим

$t^2-2t+1=t^2-t-1;\quad t=2.$

Возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{x-2}=2$, т.е. $x=6$.

Проверка показывает, что $x=6$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=6$.

6. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1.$

Выполним подстановку: $\sqrt{x-1}=t\geqslant 0$. Получаем:

$x-1=t^2;\quad x=t^2+1;\quad x+1=t^2+2.$

Тогда уравнение примет вид

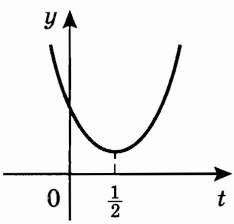
$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2-2t+1}=t^2+2;\quad \sqrt{(t+1)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=t^2+2.$

Извлечем квадратные корни. Получим

$|t+1|+|t-1|=t^2+2;\quad t+1+|t-1|=t^2+2;$

$|t-1|=t^2-t+1.$

Заметим, что $t^2-t+1>0$ при любом значении t, так как $a=1>0$ и $D<0$, т.е. графиком функции $\varphi(t)=t^2-t+1$ является парабола, расположенная выше оси абсцисс и не имеющая с ней точек пересечения.



$(|t-1|)^2=(t^2-t+1)^2$, так как $|a|^2=a^2$ по определению.

Используя формулу сокращенного умножения $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, получаем

$(t^2-t+1+t-1)(t^2-t+1-t+1)=0;\quad t^2(t^2-2t+2)=0;$

$$\left[\begin{array}{l} t^2=0 \\ t^2-2t+2=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} t=0 \\ (t-1)^2+1=0 \end{array}\right.;\quad t=0.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{x-1}=0;\quad x=1.$

Ответ: $x=1$.

7. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+6x=11+x^2$.

D(У): $\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ 4-x\geqslant 0 \end{cases}$;

D(У) = $[2;\ 4]$.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ на $[2;\ 4]$.

Заметим, что $x^2-6x+11=(x-3)^2+2>0$ при любом x.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x-2+2\sqrt{(x-2)(4-x)}+4-x=\left(x^2-6x+11\right)^2.$$

С учетом D(у) получим

$$\begin{cases} 2+2\sqrt{-x^2+6x-8}=\left(x^2-6x+11\right)^2 \\ 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}.$$

Введем подстановку: $x^2-6x+11=t>0$, тогда

$-x^2+6x-11=-t$; $\quad -x^2+6x-8=-t+3$.

Уравнение примет вид

$$2\sqrt{3-t}=t^2-2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t^2-2\geqslant 0 \\ 4(3-t)=t^4-4t^2+4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ t^4-4t^2+4t-8=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ t^2\left(t^2-4\right)+4(t-2)=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ (t-2)\left(t^2(t+2)+4\right)=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ (t-2)\left(t^3+2t^2+4\right)=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ t^3+2t^2+4=0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Последнее уравнение корней не имеет,

так как $t^3+2t^2+4>0$ при $t>0$.

Получим систему $\begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ t=2 \end{cases}$; $\quad t=2$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\begin{cases} x^2-6x+11=2 \\ 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2-6x+9=0 \\ 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}.$$

Ответ: $x=3$.

8. $z+\frac{1}{8}=\sqrt[3]{z^2}$.

Введем подстановку $\sqrt[3]{z}=t$, $\sqrt[3]{z^2}=t^2$, $z=t^3$.

Уравнение примет вид $t^3+\frac{1}{8}=t^2$ или $8t^3-8t^2+1=0$.

Видно, что целых корней нет.

Проверим наличие рациональных корней.

Пусть $t=\frac{1}{a}$, тогда $\frac{8}{a^3}-\frac{8}{a^2}+1=0$ или $a^3-8a+8=0$.

Если целые корни есть, то они — делители числа 8. Введем функцию $\varphi(a)=a^3-8a+8$. Заметим, что $\varphi(2)=2^3-8\cdot 2+8=0$, т. е. $\varphi(a)$ кратно $(a-2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3-8a+8 & a-2 \\ \cline{2-2} \underline{a^3-2a^2} & a^2+2a-4 \\ 2a^2-8a & \\ \underline{2a^2-4a} & \\ -4a+8 & \\ \underline{-4a+8} & \end{array}$$

Уравнение $a^2+2a-4=0$ имеет корни $a_{1,\,2}=-1\pm\sqrt{5}$.

Получаем: $\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-1+\sqrt{5} \\ a=-1-\sqrt{5} \end{array}\right.$, тогда $\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{-1+\sqrt{5}} \\ t=\frac{1}{-1-\sqrt{5}} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ t=-\frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{array}\right.$.

Возвращаясь к исходному уравнению, имеем:

а) $\sqrt[3]{z}=\frac{1}{2}$; $z_1=\frac{1}{8}$.

б) $\sqrt[3]{z}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; $z_2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^3=\frac{5\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2+3\sqrt{5}+1}{64}=\frac{\sqrt{5}+2}{8}$.

в) $\sqrt[3]{z}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$; $z_3=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^3=\frac{1-3\sqrt{5}+3(\sqrt{5})^2-5\sqrt{5}}{64}=\frac{2-\sqrt{5}}{8}$.

Проверку делать не нужна, так как в процессе решения были использованы лишь равносильные преобразования.

Ответ: $\left\{\frac{1}{8};\ \frac{\sqrt{5}+2}{8};\ \frac{2-\sqrt{5}}{8}\right\}$.

9. $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1.$

Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1;$$

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\left(x^2-x^2+1\right)^3=1;$$

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2-1}=1 \\ x+\sqrt{x^2-1}=-1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1}=1-x \\ \sqrt{x^2-1}=-1-x \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x\geqslant 0 \\ x^2-1=(1-x)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1-x\geqslant 0 \\ x^2-1=(x+1)^2 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant 1 \\ x^2-1=x^2-2x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant -1 \\ x^2-1=x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant 1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leqslant -1 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-1;\ 1\}$.

10. $\frac{x}{x+3}-2\sqrt{1+\frac{3}{x}}=3.$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{x+3}{x}}=t$. Тогда $\frac{x+3}{x}=t^2$.

Исходное уравнение примет вид:

$$\frac{1}{t^2}-2t=3; \quad 2t^3+3t^2-1=0.$$

Введем функцию $\varphi(t)=2t^3+3t^2-1=0$.

Отметим, что $\varphi(-1)=2(-1)^3+3(-1)^2-1=0$,
т. е. $\varphi(t)$ кратно $(t+1)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 2t^3+3t^2-1 & t+1 \\ \underline{2t^3+2t^2} & 2t^2+t-1 \\ t^2-1 & \\ \underline{t^2+t} & \\ -t-1 & \\ \underline{-t-1} & \end{array}$$

$$2t^2+t-1=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1\notin(0;\ \infty) \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Тогда $\sqrt{\frac{x+3}{x}}=\frac{1}{2}$, значит $x=-4$.

Ответ: $x=-4$.

11. $2\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{1-2x+\sqrt{2x(1+2x)}}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$4(1+2x)+4\sqrt{(1+2x)(1-2x)}+1-2x=1-2x+\sqrt{2x(1+2x)}$;

$*\sqrt{1+2x}\left(4\sqrt{1+2x}+4\sqrt{1-2x}-\sqrt{2x}\right)=0$ (сужение D(У)).

Отсюда имеем

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ 4\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}\right)=\sqrt{2x} \end{array}\right..$$

После возведения в квадрат обеих частей второго уравнения имеем:

$16\left(1+2x+2\sqrt{1-4x^2}+1-2x\right)=2x$; $\sqrt{1-4x^2}=\frac{x}{16}-1$.

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$1-4x^2=\frac{x^2-32x+16^2}{16^2}$; $1025x^2-32x=0$.

$$\left[\begin{array}{l} x=-0{,}5 \\ x=0 \\ x=\frac{32}{1025} \end{array}\right.$$ — возможные решения исходного уравнения.

После проверки ясно, что $x_1=-0{,}5$ является корнем исходного уравнения, а $x_2=0$ и $x_3=\frac{32}{1025}$ — нет.

Если учесть, что в процессе нахождения x_2 и x_3 возникало требование: $\frac{x}{16}-1\geqslant 0$, то x_2 и x_3 можно было и не проверять.

Внимание! Так как при решении уравнения была нарушена равносильность, причем впервые в (*) произошло сужение области определения, что может привести к потере корней, то требуются дополнительные исследования.

D(У): $\begin{cases} 1+2x\geqslant 0 \\ 1-2x\geqslant 0 \\ 2x(1-2x)\geqslant 0 \end{cases}$, тогда $D(У)=\{-0{,}5\}\cup[0;0{,}5]$

D(У*): $\begin{cases} 1+2x\geqslant 0 \\ 1-2x\geqslant 0 \\ 2x\geqslant 0 \end{cases}$, тогда $D(У^*)=[0;0{,}5]$

Так как в новом D(У*), из-за сужения был потерян только $x = -0{,}5$, который и есть корень первичного уравнения, то катастрофы не произошло. В общем же, такой способ решения, при котором происходит сужение области определения требует дополнительных исследований, что делает его менее предпочтительным, а иногда и невозможным.

О т в е т: $x = -0{,}5$.

12. $\sqrt{3-y} + \sqrt{y-1} = y^2 - 4y + 6.$

Уравнение можно решать аналогично уравнению **7**. Но здесь рассмотрим иной подход, использующий сравнение областей изменения правой и левой частей уравнения.

Введем функцию $f(y) = \sqrt{3-y} + \sqrt{y-1}$.

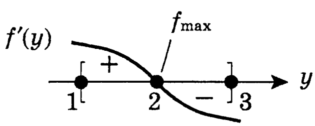
Найдем производную:

$$f'(y) = \frac{-1}{2\sqrt{3-y}} + \frac{1}{2\sqrt{y-1}} = \frac{\sqrt{3-y}-\sqrt{y-1}}{2\sqrt{3-y}\cdot\sqrt{y-1}}.$$

Приравняв производную нулю, получим

$\sqrt{3-y} = \sqrt{y-1}$ или $y = 2 \in [1;\ 3] = \text{D(У)}$.

Представим полученный результат графически:



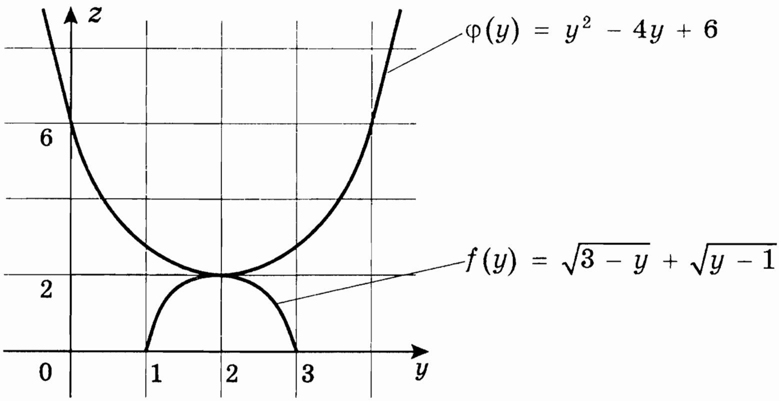
$f_{max}(y) = f(2) = 2$, т.е. $f(y) \leqslant 2$; $\sqrt{3-y} + \sqrt{y-1} \leqslant 2$.

Введем еще функцию $\varphi(y) = y^2 - 4y + 6 = (y-2)^2 + 2 \geqslant 2$.

$$\begin{cases} f(y) \leqslant 2 \\ \varphi(y) \geqslant 2 \end{cases}; \quad f(y) = \varphi(y) = 2 \text{ при } y = 2.$$

Рассмотрим графическое решение.

Построим графики функций $f(y) = \sqrt{3-y} + \sqrt{y-1}$ и $\varphi(y) = y^2 - 4y + 6$.



Ответ: $x = 2$.

13. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}=x^4+2.$

D(y): $1-x^2 \geqslant 0$;
D(y) = $[-1;\ 1]$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$1+x^2+2\sqrt{1-x^4}+1-x^2=\left(x^4+2\right)^2;$

$2+2\sqrt{1-x^4}=\left(x^4+2\right)^2.$

Введем подстановку: $x^4+2=t>0$,
тогда $1-x^4=3-t$.

Получим:

$2\sqrt{3-t}=t^2-2 \Leftrightarrow \begin{cases}4(3-t)=\left(t^2-2\right)^2 \\ t^2-2\geqslant 0\end{cases};$

$\begin{cases}t^4-4t^2+4t-8=0 \\ t^2\geqslant 2\end{cases}; \quad \begin{cases}t^2\left(t^2-4\right)+4(t-2)=0 \\ t^2\geqslant 2\end{cases};$

$\begin{cases}(t-2)\left(t^3+2t^2+4\right)=0 \\ t^2\geqslant 2\end{cases}.$

Так как $t>0$, то $t^3+2t^2+4>0$ и уравнение системы имеет единственное решение $t=2$.

Система примет вид $\begin{cases}t=2 \\ t^2\geqslant 2\end{cases}.$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\begin{cases} x^4 + 2 = 2 \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases}; \quad x = 0.$$

Ответ: $x = -0$.

14. $2x + 1 + (x + 1)\sqrt{x^2 + 2} + x\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$.

Иногда стандартные методы решения уравнений приводят к технически неразрешимым проблемам. Приведем данное уравнение к уравнению с двумя переменными.

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = a \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2 + 2} = b \geqslant 0 \end{cases}$.

Тогда $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 = a^2 \\ x^2 + 2 = b^2 \end{cases}$.

Вычтем второе уравнение из первого:

$a^2 - b^2 = 2x + 1; \quad x = \frac{a^2 - b^2 - 1}{2}; \quad x + 1 = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}$.

Учтем, что

$a = \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \sqrt{(x+1)^2 + 2} \geqslant \sqrt{2}$ и $b = \sqrt{x^2 + 2} \geqslant \sqrt{2}$,

т. е. $a + b \geqslant 2\sqrt{2}$.

Тогда исходное уравнение с новыми переменными примет вид:

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2 - 1}{2} \cdot a + \frac{a^2 - b^2 + 1}{2} \cdot b = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot a - \frac{a}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot b + \frac{b}{2} = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot (a + b) - \frac{1}{2}(a - b) = 0;$$

$$(a - b)\left(a + b + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Имеем единственный корень $a = b$.

$a + b + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{1}{2} > 0$, так как $\begin{cases} a + b \geqslant 2\sqrt{2} \\ \frac{(a+b)^2}{2} > 0 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем
$\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$x^2+2x+3=x^2+2;\quad x=-0,5.$

Ответ: $x=-0,5$.

15. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2.$

Введем подстановку: $x^2=t\geqslant 0$.

Тогда $\sqrt{12-\frac{12}{t}}+\sqrt{t-\frac{12}{t}}=t;\quad t-\sqrt{12-\frac{12}{t}}=\sqrt{t-\frac{12}{t}}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$t^2-2t\sqrt{12-\frac{12}{t}}+12-\frac{12}{t}=t-\frac{12}{t};$

$t^2-t+12=2\sqrt{12t^2-12t}.$

Напомним, что
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab.$

После повторного возведения в квадрат получаем:

$t^4+t^2+12^2+24t^2-2t^3-24t=4\left(12t^2-12t\right);$

$t^4-2t^3-23t^2+24t+144=0.$

Обозначим $f(t)=t^4-2t^3-23t^2+24t+144.$

Так как $f(4)=0$, то $f(t)$ кратно $(t-4)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
t^4-2t^3-23t^2+24t+144 & t-4 \\ \cline{2-2}
-\;t^4-4t^3\qquad\qquad\qquad\qquad & t^3+2t^2-15t-36 \\ \cline{1-1}
2t^3-23t^2\qquad\qquad\quad & \\
-\;2t^3-8t^2\qquad\qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-15t^2+24t\qquad\quad & \\
-\;-15t^2+60t\qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-36t+144 & \\
-\;-36t+144 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Обозначим $\varphi(t)=t^3+2t^2-15t-36.$

Так как $\varphi(4) = 0$, то $\varphi(t)$ кратно $(t - 4)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^3 + 2t^2 - 15t - 36 & t - 4 \\ \cline{2-2} -\underline{t^3 - 4t^2\quad\quad\quad\quad} & t^2 + 6t + 9 \\ 6t^2 - 15t\quad\; & \\ -\underline{6t^2 - 24t\quad\;} & \\ 9t - 36 & \\ -\underline{9t - 36} & \end{array}$$

Приведем уравнение к виду
$(t - 4)^2(t + 3)^2 = 0$.

Уравнение имеет корни $\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -3 \notin [0; +\infty) \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $x^2 = 4$,

т. е. $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Проверка показывает, что эти значения x являются корнями исходного уравнения.

Примечание. Учитывая четность функций, можно $x = -2$ не проверять.

Существует более простое решение:

$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} = x^2 - \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}}$. Правая часть больше нуля.

Возведем обе части в квадрат:

$$12 - \frac{12}{x^2} = x^4 - 2x^2\sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 - \frac{12}{x^2};$$

$$x^4 - 12 - 2x^2\sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} + x^2 = 0;$$

$$x^4 - 12 - 2|x|\sqrt{x^4 - 12} + x^2 = 0; \quad \left(\sqrt{x^4 - 12} - |x|\right)^2 = 0;$$

$$\sqrt{x^4 - 12} = |x|; \quad x^4 - x^2 - 12 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -3 \notin [0; \infty) \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Проверка показывает, что эти значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{-2;\ 2\}$.

Тренировочная работа 2

Решите уравнения 1–15.

1. $2\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} + 3\sqrt{\frac{4+x}{3x+2}} = 5$.

2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

3. $4\left(x + \sqrt{x^2+x}\right)^{-1} - \left(x - \sqrt{x^2+x}\right)^{-1} = 3x^{-1}$.

4. $2\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{1+2x+\sqrt{2x(2x-1)}}$.

5. $2y + 5 + (y+3)\sqrt{y^2+6y+11} + (y+2)\sqrt{y^2+4y+6} = 0$.

6. $\sqrt{3-2y} + \sqrt{2y-1} = 4y^2 - 8y + 6$.

7. $\sqrt{6+2x-4x^2} - \sqrt{4x^2-2x-1} = 1$.

8. $\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{2x+3}{x+6} = 2$.

9. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}} + \sqrt{5-\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}$.

10. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

11. $y\sqrt{y} + \frac{1}{8} = y$.

12. $\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{2x-4} = 3 - x$.

13. $\sqrt{x^2-2x} \cdot \sqrt{3x-7} = 3 - x$.

14. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$.

15. $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$.

Решение тренировочной работы 2

1. $2\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} + 3\sqrt{\frac{4+x}{3x+2}} = 5.$

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} = t \geqslant 0$.

Исходное уравнение примет вид

$$2t + \frac{3}{t} = 5; \quad t_{1,\,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} = 1 \\ \sqrt{\frac{3x+2}{4+x}} = \frac{3}{2} \end{array}\right. .$$

Возведем в квадрат обе части уравнений системы:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{3x+2}{4+x} = 1 \\ \frac{3x+2}{4+x} = \frac{9}{4} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 9\frac{1}{3} \end{array}\right. .$$

О т в е т: $\left\{1;\ 9\frac{1}{3}\right\}$.

2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$

Напомним, что $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Возведем в куб обе части уравнения:

$$x + 2x - 3 + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}\right) = 12(x-1);$$

$$9(x-1) = 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}\right).$$

Но $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$ (согласно исходному уравнению) и, произведя замену, получаем:

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3} \cdot \sqrt[3]{12(x-1)} = 3(x-1).$$

Ясно, что после такой замены проверка необходима!

После возведения в куб обеих частей уравнения получаем:

$$x(2x-3)12(x-1) = 27(x-1)^3;$$

$$3(x-1)\left(4x(2x-3)-9(x-1)^2\right)=0$$

$$3(x-1)\left(-x^2+6x-9\right)=0;$$

$$3(x-1)(x-3)^2=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Проверка показывает, что $x=1$ и $x=3$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\{1;\ 3\}$.

3. $4\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)^{-1}-\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)^{-1}=3x^{-1}$.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}-\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}=\frac{3}{x};$$

$$\frac{4\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{x^2-x^2-x}-\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x^2-x^2-x}=\frac{3}{x};$$

$$\frac{-4x+4\sqrt{x^2+x}+x+\sqrt{x^2+x}}{x}=\frac{3}{x};\quad 5\sqrt{x^2+x}-3x=3;$$

$$5\sqrt{x^2+x}=3(x+1).$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$25\left(x^2+x\right)=9(x+1)^2;\quad 25x(x+1)-9(x+1)^2=0;$$

$$(x+1)(25x-9x-9)=0;\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{9}{16} \end{array}\right..$$

Проверка.

1) $x=-1$.

$$4\left(-1+\sqrt{1-1}\right)^{-1}-\left(-1-\sqrt{1-1}\right)^{-1}=-3;$$

$-4+1=-3$ — истина.

2) $x = \frac{9}{16}$.

$$4\left(\frac{9}{16} + \sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{9}{16}+1\right)}\right)^{-1} - \left(\frac{9}{16} - \sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{9}{16}+1\right)}\right)^{-1} = 3\cdot\frac{16}{9};$$

$$4\left(\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{16}{3};$$

$$4\left(\frac{24}{16}\right)^{-1} - \left(-\frac{6}{16}\right)^{-1} = \frac{16}{3};\quad \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \text{ — истина.}$$

Ответ: $\left\{-1;\ \frac{9}{16}\right\}$.

4. $2\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{1+2x+\sqrt{2x(2x-1)}}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$4\left(\sqrt{1-2x}\right)^2 + 4\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{1+2x} + 1 + 2x =$$
$$= 1 + 2x + \sqrt{2x(2x-1)}$$
$$4(1-2x) + 4\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{1+2x} = \sqrt{2x(2x-1)};$$

Возведем в квадрат еще раз обе части уравнения.

$$16(1-2x)^2 + 32(1-2x)\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{1+2x} +$$
$$+16(1-2x)(1+2x) = -2x(1-2x);$$
$$2(1-2x)\left(8(1-2x) + 16\sqrt{1-4x^2} + 8(1+2x) + x\right) = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ 8-16x+16\sqrt{1-4x^2}+8+16x+x=0 \end{array}\right.;$$
$$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5 \\ 16\sqrt{1-4x^2} = -x-16 \end{array}\right.;$$
$$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5 \\ \begin{cases} -x-16 \geqslant 0 \\ 256(1-4x^2) = x^2+32x+256 \end{cases} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x=0{,}5 \\ \begin{cases} x \leqslant -16 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{32}{1025} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.\quad \varnothing.$$

Проверка показывает, что $x = 0{,}5$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 0{,}5$.

При данном способе решения сужения D(У) нет.

5. $2y + 5 + (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} + (y + 2)\sqrt{y^2 + 4y + 6} = 0.$

Введем подстановку:

$$\begin{cases}\sqrt{y^2 + 6y + 11} = a \geqslant 0 \\ \sqrt{y^2 + 4y + 6} = b \geqslant 0\end{cases}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases}a^2 = y^2 + 6y + 11 = (y + 3)^2 + 2 \geqslant 2 \\ b^2 = y^2 + 4y + 6 = (y + 2)^2 + 2 \geqslant 2\end{cases}.$$

Заметим, что $a^2 - b^2 = 2y + 5.$

Отсюда $y = \frac{a^2 - b^2 - 5}{2}$; $y + 2 = \frac{a^2 - b^2 - 1}{2}$; $y + 3 = \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}$.

После всех этих подстановок исходное уравнение принимает вид:

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2 + 1}{2}a + \frac{a^2 - b^2 - 1}{2}b = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2}a + \frac{a}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}b - \frac{b}{2} = 0;$$

$$a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) = 0;$$

$$(a - b)\left(a + b + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$,

то $a + b + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{1}{2} > 0$, следовательно, $a = b$.

Возвращаясь к переменной y, получаем

$$\sqrt{y^2 + 6y + 11} = \sqrt{y^2 + 4y + 6}.$$

Учитывая, что $\begin{cases}y^2 + 6y + 11 > 0 \\ y^2 + 4y + 6 > 0\end{cases}$

и решая полученное уравнение, находим корень $y = -2{,}5$.

Ответ: $x = -2{,}5$.

6. $\sqrt{3-2y}+\sqrt{2y-1}=4y^2-8y+6.$

Возведем в квадрат обе части уравнения и упростим:

$2+2\sqrt{-4y^2+8y-3}=\left(4y^2-8y+6\right)^2.$

Введем подстановку:

$4y^2-8y+6=t>0$, так как $\begin{cases} a=4>0 \\ D<0 \end{cases}.$

Тогда

$-4y^2+8y-6=-t;\quad -4y^2+8y-3=3-t.$

Уравнение примет вид

$2\sqrt{3-t}=t^2-2;\quad \begin{cases} t^2-2\geqslant 0 \\ 4(3-t)=t^4-4t^2+4 \end{cases}.$

Последнее уравнение преобразуем к виду

$(t-2)\left(t^3+2t^2+4\right)=0.$

Так как $t^3+2t^2+4>0$, то получим $\begin{cases} t^2\geqslant 2 \\ t=2 \end{cases}.$

Подставляя это значение для t в уравнение

$4y^2-8y+6=t$, находим, что $y=1$.

После проверки ясно, что $y=1$ является решением исходного уравнения.

Ответ: $y=1$.

7. $\sqrt{6+2x-4x^2}-\sqrt{4x^2-2x-1}=1.$

Введем подстановку: $\sqrt{4x^2-2x-1}=t\geqslant 0$.

Тогда $4x^2-2x-1=t^2$ и $-4x^2+2x+6=5-t^2$.

Исходное уравнение примет вид

$\sqrt{5-t^2}=1+t.$

Возведем в квадрат обе части уравнения и, зная, что $t\geqslant 0$, получим:

$5-t^2=1+2t+t^2;\quad \left[\begin{array}{l} t=-2\notin[0;\infty) \\ t=1 \end{array}\right..$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$\sqrt{4x^2 - 2x - 1} = 1.$

Решения данного уравнения: $x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

8. $\sqrt{\frac{x}{3}} + \frac{2x+3}{x+6} = 2.$

Перенесем $\frac{2x+3}{x+6}$ в правую часть уравнения и приведем к общему знаменателю. В результате получим $\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{9}{x+6}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$\frac{x}{3} = \frac{81}{(x+6)^2}; \quad x^3 + 12x^2 + 36x - 243 = 0.$

Обозначим $f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 243.$

$f(3) = 0$, значит $f(x)$ кратно $(x - 3)$.
Выполним деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^3 + 12x^2 + 36x - 243 & x - 3 \\
\underline{x^3 - 3x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{x^2 + 15x + 81} \\
-\ 15x^2 + 36x\qquad\ \, & \\
\underline{15x^2 - 45x\qquad\ \,} & \\
-\ 81x - 243 & \\
\underline{81x - 243} &
\end{array}
$$

Найдем корни уравнения $(x - 3)(x^2 + 15x + 81) = 0.$

Так как $x^2 + 15x + 81 \neq 0 \quad (D < 0)$, то $x = 3$.

Проверка показывает, что $x = 3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 3$.

9. $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}.$

Введем подстановку $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = t \geqslant 0$.

Тогда $5 + \sqrt[3]{x} = t^2; \quad \sqrt[3]{x} = t^2 - 5; \quad 5 - \sqrt[3]{x} = 10 - t^2.$

Исходное уравнение примет вид:

$t + \sqrt{10 - t^2} = t^2 - 5; \quad \sqrt{10 - t^2} = t^2 - t - 5.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$10 - t^2 = t^4 + t^2 + 25 - 2t^3 - 10t^2 + 10t;$

$t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 10t + 15 = 0.$

Обозначим $f(t) = t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 10t + 15.$

$f(3) = 0$, т.е. $f(t)$ кратно $(t - 3)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} t^4 - 2t^3 - 8t^2 + 10t + 15 & t - 3 \\ \cline{2-2} -\ t^4 - 3t^3 \qquad\qquad\qquad & t^3 + t^2 - 5t - 5 \\ \cline{1-1} t^3 - 8t^2 \qquad\qquad & \\ -\ t^3 - 3t^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1} -5t^2 + 10t \qquad & \\ -\ -5t^2 + 15t \qquad & \\ \cline{1-1} -5t + 15 & \\ -\ -5t + 15 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Очевидно, что $t^3 + t^2 - 5t - 5 = (t + 1)\left(t^2 - 5\right).$

Получаем: $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -1 \notin [0; \infty) \\ t = \sqrt{5} \\ t = -\sqrt{5} \notin [0; \infty) \end{array}\right.$.

Возвратимся к переменной x:

1) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = 3;\quad x = 64,$

2) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = \sqrt{5};\quad x = 0.$

Проверка показывает, что только $x = 64$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 64$.

10. $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}.$

Введем подстановку: $\sqrt{2x - 5} = t \geqslant 0$.

Тогда $2x - 5 = t^2;\quad x = \frac{t^2+5}{2};\quad x - 2 = \frac{t^2+1}{2}$ и $x + 2 = \frac{t^2+9}{2}$.

Исходное уравнение примет вид:

$\sqrt{\frac{t^2+1}{2} + t} + \sqrt{\frac{t^2+9}{2} + 3t} = 7\sqrt{2};$

$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 + 6t + 9} = 14;$

$\sqrt{(t + 1)^2} + \sqrt{(t + 3)^2} = 14.$

Следовательно $|t+1|+|t+3|=14$.

Так как $t \geqslant 0$, то $t+1+t+3=14$; $t=5$.

Для переменной x получаем $\sqrt{2x-5}=5$; $x=15$.

Ответ: $x=15$.

11. $y\sqrt{y}+\frac{1}{8}=y$. Введем подстановку: $\sqrt{y}=t \geqslant 0$.

Тогда $y\sqrt{y}=t^3$. Очевидно, что целых корней исходное уравнение не имеет.

Проверим наличие рациональных корней.

Пусть $t=\frac{1}{a}$. Исходное уравнение примет вид:

$\frac{8}{a^3}-\frac{8}{a^2}+1=0$; $a^3-8a+8=0$.

Обозначим $f(a)=a^3-8a+8$.

$f(2)=0$, т.е. $f(a)$ кратно $(a-2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 8a + 8 & a-2 \\ \cline{2-2} -\underline{(a^3 - 2a^2)} & a^2+2a-4 \\ 2a^2 - 8a & \\ -\underline{(2a^2 - 4a)} & \\ -4a+8 & \\ -\underline{(-4a+8)} & \end{array}$$

Уравнение $(a-2)(a^2+2a-4)=0$ имеет решения:

$$\left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-1+\sqrt{5} \\ a=-1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной t, получаем

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{-1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ t=\frac{1}{-1-\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4} \notin [0;\ \infty) \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной y, получаем

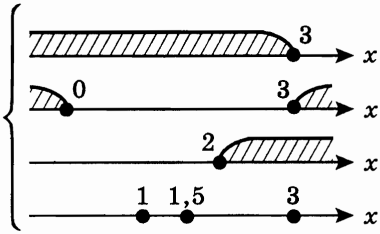
$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{y}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{y}=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{4} \\ y=\frac{\sqrt{5}+3}{8} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{4};\ \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right\}$.

12. $\sqrt{x^2-3x}\cdot\sqrt{2x-4}=3-x.$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x^2-3x\geqslant 0\\ 2x-4\geqslant 0\\ (x^2-3x)(2x-4)=(3-x)^2\end{cases};\quad \begin{cases}x\leqslant 3\\ x(x-3)\geqslant 0\\ x\geqslant 2\\ (x-3)(2x^2-5x+3)=0\end{cases}.$$



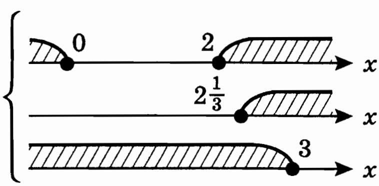
$x=3.$

Ответ: $x=3.$

13. $\sqrt{x^2-2x}\cdot\sqrt{3x-7}=3-x.$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2-2x\geqslant 0\\ 3x-7\geqslant 0\\ 3-x\geqslant 0\\ x(x-2)(3x-7)=(3-x)^2\end{cases};\quad \begin{cases}x^2-2x\geqslant 0\\ 3x-7\geqslant 0\\ 3-x\geqslant 0\\ 3x^3-14x^2+20x-9=0\end{cases}.$$



Условие равносильности: $x\in\left[2\frac{1}{3};3\right]$.

Корни уравнения $3x^3-14x^2+20x-9=0$ ищем на $\left[2\frac{1}{3};3\right]$.

Введем $f(x)=3x^3-14x^2+20x-9=0$.

$f(1)=0$, т. е. $f(x)$ кратно $(x-1)$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 14x^2 + 20x - 9 & x - 1 \\ \underline{3x^3 - 3x^2} & \overline{3x^2 - 11x + 9} \\ -11x^2 + 20x & \\ \underline{-11x^2 + 11x} & \\ 9x - 9 & \\ \underline{9x - 9} & \end{array}$$

Найдем и оценим корни уравнения:

$(x-1)(3x^2-11x+9)=0$:

$x_1 = 1 \notin \left[2\frac{1}{3};\ 3\right]$; $x_2 = \frac{11-\sqrt{13}}{6} \notin \left[2\frac{1}{3};\ 3\right]$;

$x_3 = \frac{11+\sqrt{13}}{6} \in \left[2\frac{1}{3};\ 3\right]$.

Примечание. $\frac{7}{3} < \frac{11+\sqrt{13}}{6} < 3$; $14 < 11 + \sqrt{13} < 18$;

$3 < \sqrt{13} < 7$; $9 < 13 < 49$ — истина.

Ответ: $x = \frac{11+\sqrt{13}}{6}$.

14. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$.

Введем подстановку: $\sqrt[3]{x+1} = t$.

Тогда $x + 1 = t^3$; $7 - x = 8 - t^3$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt[3]{8-t^3} = 2 - t$.

Возведем в куб обе части уравнения:

$8 - t^3 = 8 - 12t + 6t^2 - t^3$; $6t(t-2) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = 0 \\ \sqrt[3]{x+1} = 2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;\ 7\}$.

15. $\sqrt[4]{77+x} + \sqrt[4]{20-x} = 5$.

Введем подстановку: $\sqrt[4]{77+x} = t \geqslant 0$.

Тогда $77 + x = t^4$; $x = t^4 - 77$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt[4]{97-t^4}=5-t$, $(t \leqslant 5)$.

Напомним, что $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Возведем в четвертую степень:

$97 - t^4 = 5^4 - 4 \cdot 5^3 \cdot t + 6 \cdot 5^2 \cdot t^2 - 4 \cdot 5 \cdot t^3 + t^4.$

Перегруппировав слагаемые и сократив на 2, получим

$t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264 = 0.$

Обозначим $f(t) = t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264$.

$f(3) = 0$, т.е. $f(t)$ кратно $(t-3)$. Выполним деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,t^4 - 10t^3 + 75t^2 - 250t + 264 & t-3 \\ \cline{2-2}
\underline{t^4 - 3t^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & t^3 - 7t^2 + 54t - 88 \\
-\,-7t^3 + 75t^2 \qquad\qquad\quad & \\
\underline{-7t^3 + 21t^2} \qquad\qquad\quad & \\
-\,54t^2 - 250t \qquad & \\
\underline{54t^2 - 162t} \qquad & \\
-\,-88t + 264 & \\
\underline{-88t + 264} & \\
\end{array}
$$

Обозначим $\varphi(t) = t^3 - 7t^2 + 54t - 88$.

$\varphi(2) = 0$, т. е. $\varphi(t)$ кратно $(t-2)$. Выполним деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,t^3 - 7t^2 + 54t - 88 & t-2 \\ \cline{2-2}
\underline{t^3 - 2t^2} \qquad\qquad\quad & t^2 - 5t + 44 \\
-\,-5t^2 + 54t \qquad & \\
\underline{-5t^2 + 10t} \qquad & \\
-\,44t - 88 & \\
\underline{44t - 88} & \\
\end{array}
$$

Так как уравнение $t^2 - 5t + 44$ корней не имеет $(D < 0)$, то получаем

$$\left[\begin{array}{l} t = 3 \in [0; 5] \\ t = 2 \in [0; 5] \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{77+x} = 3 \\ \sqrt[4]{77+x} = 2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -61 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-61; 4\}$.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $\sqrt{3 + \sqrt{5 - x}} = \sqrt{x}$.
2. $4\sqrt{3 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{3x+1}} = 3$.
3. $\sqrt[3]{x + 7} = \sqrt{x + 3}$.
4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 16} = 0,5\sqrt[3]{8 - x}$.
5. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} = 2$.
6. $(x^2 - 9x + 14)\sqrt{x^2 - 9} = 0$.
7. $\sqrt{1 - 7x} - \sqrt{6 + x} = \sqrt{15 - 2x}$.
8. $2\sqrt{x^2 + 2x + 4} - 1 = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$.
9. $\sqrt{-x - 1} = 1 - \sqrt[3]{2 + x}$.
10. $\sqrt[3]{2 + x} + \sqrt[3]{7 - x} = 3$.

Вариант 2

1. $\sqrt{3 + \sqrt{5 + x}} = \sqrt{-x}$.
2. $4\sqrt{3 - \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{3x-1}} = 3$.
3. $\sqrt{3 - x} + \sqrt[3]{x - 7} = 0$.
4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x + 16} + 0,5\sqrt[3]{x + 8} = 0$.
5. $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 7} + 2$.
6. $(x^2 + 9x + 14)\sqrt{x^2 - 16} = 0$.
7. $\sqrt{1 + 7x} - \sqrt{15 + 2x} = \sqrt{6 - x}$.
8. $2\sqrt{x^2 - 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 9} = 1$.
9. $\sqrt{x - 1} - \sqrt[3]{x - 2} = 1$.
10. $\sqrt[3]{x + 7} - 3 = \sqrt[3]{x - 2}$.

Примеры нестандартных способов решения иррациональных уравнений

Практикум 3

Рассмотрим еще несколько приемов, используемых при решении уравнений.

1. $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}} = 6 - x.$

Допустим, что $x \neq 5$: $\dfrac{\sqrt[3]{x-5}\left(\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}}-1\right)}{\sqrt[3]{x-5}\left(\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}}+1\right)} = 6 - x.$

Введем подстановку: $\sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}} = t.$

Тогда $\dfrac{7-x}{x-5} = t^3$; $7 - x = (x - 5)t^3$; $7 + 5t^3 = x + xt^3$;

$x = \dfrac{7+5t^3}{1+t^3}$; $x - 6 = \dfrac{1-t^3}{1+t^3}.$

Уравнение примет вид:

$\dfrac{t-1}{t+1} + \dfrac{1-t^3}{1+t^3} = 0$; $\dfrac{t-1}{t+1}\left(1 - \dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}\right) = 0$;

$\dfrac{-2t(t-1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}} = 0 \\ \sqrt[3]{\dfrac{7-x}{x-5}} = 1 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = 6 \end{array}\right.$.

Посмотрим, что будет с исходным уравнением при $x = 5$:

$\dfrac{\sqrt[3]{7-5}-\sqrt[3]{5-5}}{\sqrt[3]{7-5}-\sqrt[3]{5-5}} = 6 - 5$; $1 = 1$ — истина.

Ответ: $\{5; 6; 7\}$.

2. $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$

Так как $1 - x^2 \geqslant 0$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Введем подстановку: $x = \sin\alpha$.

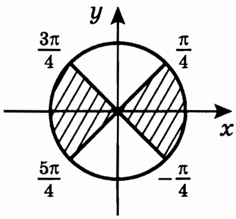
Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}} = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\,|\cos\alpha|}{2}} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\alpha \geq 0\\ 1 + 2\sin\alpha\,|\cos\alpha| = 2\cos^2 2\alpha.\end{cases}$$

Так как $\cos 2\alpha \geqslant 0$, то $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant 2\alpha \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



А. Если $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$,

то $\cos\alpha > 0$, т.е. $|\cos\alpha| = \cos\alpha$.

Тогда $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^2 2\alpha$;

$$\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)^2;$$

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - 2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 0;$$

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2\left(1 - 2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2\right) = 0;$$

$$\left[\begin{aligned}&\cos\alpha + \sin\alpha = 0\\ &(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

1. $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$.

   $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

   Так как $\alpha = -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, $\alpha = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$,

   то $\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Подставив это значение в уравнение $x = \sin\alpha$,

   получим $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = \frac{1}{2}$.

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$; $\sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}$;

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$2\alpha = \frac{\pi}{6}(-1)^k + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$\alpha = \frac{\pi}{12}(-1)^k + k\frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Проверим, при каких значениях k справедливо утверждение $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$?

1) $k = 0,\ \alpha_1 = \frac{\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

2) $k = 1,\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \notin \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

3) $k = 2,\ \alpha_3 = \frac{\pi}{12} + \pi \notin \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

4) $k = -1, \alpha_4 = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12} \notin \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Следовательно, $\sin\alpha_1 = \sin\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$.

$\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Подставив это значение в уравнение $x = \sin\alpha$, получим $x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Б. Если $\alpha \in \left[\frac{3}{4}\pi;\ \frac{5}{4}\pi\right]$, то $\cos\alpha < 0$,

т. е. $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

Тогда $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \cos^2 2\alpha$;

$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2$;

$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2\left(1 - 2(\cos\alpha + \sin\alpha)^2\right) = 0$.

1. $\cos\alpha = \sin\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = 1$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

но $\alpha \in$ II или III четверти, поэтому только

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi \in \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$.

Следовательно, $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Подставив это значение в уравнение $x = \sin\alpha$, получим $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $1 - 2(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 0$.

$1 - 2(1 + \sin 2\alpha) = 0$; $\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$.

Следовательно,

$2\alpha = \frac{\pi}{6}(-1)^{k+1} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

$\alpha = \frac{\pi}{12}(-1)^{k+1} + \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Проверим, при каких значениях k справедливо условие $\alpha \in \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$?

1) $k = 0$, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{12} \notin \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$;

2) $k = 1$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{12}\pi \notin \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$;

3) $k = 2$, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11}{12}\pi \in \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$;

4) $k = 3$, $\alpha_4 = \frac{\pi}{12} + \frac{3}{2}\pi = \frac{19}{12}\pi \notin \left[\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$.

Следовательно, $\sin\alpha_3 = \sin\frac{11}{12}\pi$; $\sin\frac{11}{12}\pi = \sin\frac{\pi}{12}$.

Подставив это значение в уравнение $x = \sin\alpha$, получим $x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right\}$.

Решим это же уравнение алгебраическим способом:

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1;$$

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1 - 2x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x^2 \geqslant 0 \\ 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} = 2\left(1 - 4x^2 + 4x^4\right) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -8x^2\left(1 - x^2\right) + 2 = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} \end{cases}.$$

Для решения последнего уравнения используем подстановку: $x\sqrt{1 - x^2} = t$.

Получаем:

$$-8t^2 + 2 = 1 + 2t; \quad \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

1) $x\sqrt{1 - x^2} = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x^2 \leqslant 1 \\ x^2\left(1 - x^2\right) = \frac{1}{4} \end{cases};$

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \left(2x^2 - 1\right)^2 = 0 \end{cases}; \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) $x\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{4}.$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \leqslant 1 \\ x^2\left(1 - x^2\right) = \frac{1}{16} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 16x^4 - 16x^2 + 1 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \left(x^2\right)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{16} \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{array}\right..$$

Но $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \notin \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right\}$.

3. $\sqrt{|x^2 + 14x + 47| - 1} = |x + 7| - 1.$

Введем подстановку: $|x + 7| = t \geqslant 0$.

Исходя из того, что $|a|^2 = a^2$, получаем $|x + 7|^2 = t^2$.

Так как $x^2 + 14x + 49 = t^2$, то $x^2 + 14x + 47 = t^2 - 2$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{|t^2 - 2| - 1} = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 \geqslant 0 \\ |t^2 - 2| - 1 = t^2 - 2t + 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t \geqslant 1 \\ |t^2 - 2| = t^2 - 2t + 2 \end{cases}.$$

Так как $t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1 > 0$

и $|t^2 - 2|^2 = (t^2 - 2)^2$, то получаем:

$$\begin{cases} t \geqslant 1 \\ (t^2 - 2)^2 = (t^2 - 2t + 2)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} t \geqslant 1 \\ t(t - 1)(t - 2) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} t \geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} |x + 7| = 1 \\ |x + 7| = 2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x + 7 = 1 \\ x + 7 = -1 \\ x + 7 = 2 \\ x + 7 = -2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = -8 \\ x = -5 \\ x = -9 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-9; -8; -6; -5\}$.

4. $\sqrt{x - 2} = \frac{5x^2 - 10x + 1}{x^2 + 6x - 11}.$

Введем подстановку: $\sqrt{x - 2} = t \geqslant 0$.

Тогда $x - 2 = t^2$ и $x = t^2 + 2$.

Исходное уравнение примет вид

$$t = \frac{5(t^2+2)^2-10(t^2+2)+1}{(t^2+2)^2+6(t^2+2)-11}; \quad t = \frac{5t^4+10t^2+1}{t^4+10t^2+5};$$

$$t^5 + 10t^3 + 5t = 5t^4 + 10t^2 + 1;$$

$$t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1 = 0.$$

Напомним, что:

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Очевидно, что левая часть уравнения равна $(t - 1)^5$. Решение уравнения — $t = 1$. Возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{x-2} = 1$ или $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

5. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

D(y): $\begin{cases} x + \sqrt{x} \geqslant 0 \\ x - \sqrt{x} \geqslant 0; \\ \frac{x}{x+\sqrt{x}} \geqslant 0 \end{cases}$

D(y) = $[1;\ \infty)$.

Умножим обе части исходного уравнения на $\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Получим

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x};$$

$$x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \quad \sqrt{x^2 - x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + x.$$

Очевидно, что уравнение $\sqrt{x^2 - x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + x$ равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - x = \frac{1}{4}(x - 4x\sqrt{x} + 4x^2) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{x} + x \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - 4x\sqrt{x} = 0 \\ 2x \geqslant \sqrt{x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{25}{16} \end{array}\right. ; \\ 2x \geqslant \sqrt{x} \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{25}{16} \end{array}\right. .$$

Однако $x = 0 \notin [1;\ \infty)$, т. е. не является корнем первоначального уравнения. $\frac{25}{16} \in [1;\ \infty)$.

Ответ: $x = \frac{25}{16}$.

6. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Возведем обе части уравнения в третью степень (равносильное преобразование):

$$2 - x = 1 - 3\sqrt{x-1} + 3\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - (x-1)\sqrt{x-1};$$

$$1 - x = -3\sqrt{x-1} + 3\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - (x-1)\sqrt{x-1}.$$

Введем подстановку: $\sqrt{x-1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x - 1 = t^2$.

Уравнение примет вид

$$-t^2 = -3t + 3t^2 - t^2 \cdot t.$$

Находим корни: $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1; \\ \sqrt{x-1} = 3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 10 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{1;\ 2;\ 10\}$.

7. $\sqrt[3]{4 - 4x + x^2} + \sqrt[3]{x^2 + 14x + 49} = 3 + \sqrt[3]{14 - 5x - x^2}$.

Любое решение данного уравнения является решением уравнения

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} = 3 + \sqrt[3]{-(x+7)(x-2)}.$$

Введем подстановки $\sqrt[3]{x-2} = a$; $\sqrt[3]{x+7} = b$.

Тогда $a^3 = x - 2$; $b^3 = x + 7$.

Заметим, что $b^3 - a^3 = 9$.

В новых переменных уравнение примет вид:

$$a^2 + b^2 = 3 - a \cdot b.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ b^3 - a^3 = 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 \\ (b-a)\left(a^2 + ab + b^2\right) = 9 \end{cases}.$$

Решая систему уравнений, получаем $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -2 \end{array}\right.$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-2} = -1 \\ \sqrt[3]{x-2} = -2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$.

Примечание. Если решать уравнение относительно «b», то корни будут те же самые.

Ответ: $\{-6;\ 1\}$.

8. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = 5.$

Введем подстановки: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} = t \geqslant 0$,

$\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = z \geqslant 0$.

Тогда

$\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2} = tz;$

$\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{x^2+66^2}+x\right)\cdot x\left(\sqrt{x^2+66^2}-x\right)}{x}} = tz,$

$\sqrt{x^2+66^2-x^2} = tz$ или $tz = 66$.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} t - z = 5 \\ tz = 66 \end{cases}$.

Решая систему, находим $\left[\begin{array}{l} z_1 = -11 \notin [0; \infty) \\ z_2 = 6 \end{array}\right.$; $z = 6$, и, соответственно, $t = 11$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} = 11$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$\sqrt{x^2+66^2} + x = 121x;$ $\sqrt{x^2+66^2} = 120x.$

Последнее уравнение равносильно системе

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + 66^2 = 120^2x^2 \end{cases}$.

Решаем уравнение:

$66^2 = (120x + x)(120x - x);\ \ 66^2 = 121 \cdot 119 \cdot x^2;$

$x^2 = \frac{11^2 \cdot 6^2}{121 \cdot 119}.$

Получаем $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{6\sqrt{119}}{119} \\ x = -\dfrac{6\sqrt{119}}{119} \end{array}\right. \\ x \geqslant 0 \end{cases}$; $\quad x = \dfrac{6\sqrt{119}}{119}$.

Примечание. Решив уравнение $\sqrt{x\sqrt{x^2 + 66^2} - x^2} = 6$, получим те же корни.

Ответ: $x = \dfrac{6\sqrt{119}}{119}$.

9. $\sqrt[6]{1,5} \cdot \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0.$

Введем подстановку: $\sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = t \geqslant 0$.

Тогда $\sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = t^2$, $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = t^3$.

Исходное уравнение принимает вид:

$\sqrt[6]{1,5}\, t^2 - t^3 = 0;\quad t^2\left(\sqrt[6]{1,5} - t\right) = 0;\quad \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt[6]{1,5} \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = 0 \\ \sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = \sqrt[6]{1,5} \end{array}\right.$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$ — корни первого уравнения.

Решая уравнение $\sqrt[6]{x - \frac{1}{x}} = \sqrt[6]{1,5}$ или $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$,

получаем $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;\ -\frac{1}{2};\ 1;\ 2\}$.

10. $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} = 35 - 2x.$

Введем подстановку: $\sqrt{x} = a \geqslant 0$ и $\sqrt{x+7} = b \geqslant 0$.

Тогда $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+7} = a \cdot b$;

$x = a^2$; $x + 7 = b^2$;

$2x = a^2 + b^2 - 7$; $b^2 - a^2 = 7$.

Исходное уравнение принимает вид:

$a + b + 2ab = 35 - \left(a^2 + b^2 - 7\right)$;

$(a+b)^2 + (a+b) - 42 = 0.$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $(a+b)$, находим:

$$\left[\begin{aligned} &a + b = 6 \\ &a + b = -7 \notin [0; \infty) \end{aligned}\right. .$$

Учитывая, что $b^2 - a^2 = 7$, получаем

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ b^2 - a^2 = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = 6 \\ b - a = \frac{7}{6} \end{cases}.$$

Эта система имеет решение $\left(\frac{29}{12}; \frac{43}{12}\right)$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{29}{12} \\ \sqrt{x+7} = \frac{43}{12} \end{cases}.$

Следовательно, $x = \frac{841}{144}$ является решением данного уравнения.

Ответ: $x = \frac{841}{144}$.

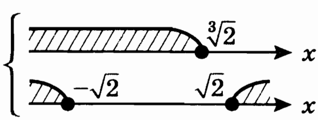
11. $\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt{2 - x^3}$.

Так как $\sqrt{2 - x^3} \geqslant 0$, то $\sqrt[3]{x^2 - 2} \geqslant 0$,

следовательно, $x^2 - 2 \geqslant 0$.

Таким образом:

$$\begin{cases} x \leqslant \sqrt[3]{2} \\ \left[\begin{aligned} &x \geqslant \sqrt{2} \\ &x \leqslant -\sqrt{2} \end{aligned}\right. \end{cases}.$$



$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$ — область, где могут быть корни.

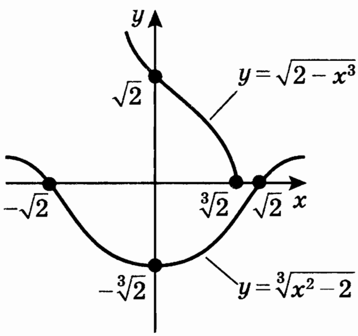
Рассмотрим графическое решение исходного уравнения. Функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 2}$ — четная, т.е. график симметричен относительно оси ординат,

$y = 0$ при $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{2}$,

$x = 0$ при $y = -\sqrt[3]{2}$.

Функция $y = \sqrt{2 - x^3}$ — убывающая,

$y = 0$ при $x = \sqrt[3]{2}$, $x = 0$ при $y = \sqrt{2}$.



Очевидно, что на промежутке $\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right]$ функции не пересекаются, т.е. данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

12. $\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}.$ D(y): $x \geqslant \sqrt{3}$.

Умножим и разделим почленно левую часть уравнения на выражения, сопряженные знаменателям:

$$\frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}})}{x-x-\sqrt{3}} + \frac{(x-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}})}{x-x+\sqrt{3}} = \sqrt{x};$$

$$-\sqrt{x}(x+\sqrt{3}) + \left(\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)^3 + \sqrt{x}(x-\sqrt{3}) + \left(\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)^3 = \sqrt{3x}.$$

Приведем подобные члены в левой части уравнения:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)^3 = 3\sqrt{3x}.$$

Возведем теперь в квадрат обе части уравнения:

$$(x+\sqrt{3})^3 + (x-\sqrt{3})^3 + 2\left(\sqrt{x+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)^3 = 27x;$$

$$x^3 + 3x^2\sqrt{3} + 3 \cdot x \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 2\left(\sqrt{x^2 - 3}\right)^3 +$$

$$+ x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 3 \cdot x \cdot 3 - 3\sqrt{3} = 27x;$$

$$2\left(x^2 - 3\right)^{\frac{3}{2}} = 9x - 2x^3.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9x - 2x^3 \geqslant 0 \\ 4\left(x^2 - 3\right)^3 = 81x^2 - 36x^4 + 4x^6 \\ x \geqslant \sqrt{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\left(9 - 2x^2\right) \geqslant 0 \\ x \geqslant \sqrt{3} \\ 4x^6 - 36x^4 + 108x^2 - 108 = 81x^2 - 36x^4 + 4x^6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leqslant \sqrt{4,5} \\ x \geqslant \sqrt{3} \\ x^2 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{4,5} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases}; \quad x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

13. Найдите сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{x + 2} = x^2 + 2x - 8.$$

Уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 \geqslant 0 \\ x + 2 = \left(x^2 + 2x - 8\right)^2 \end{cases}$

т.к. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$,

то $x + 2 = x^4 + 4x^2 + 64 + 4x^3 - 16x^2 - 32x$

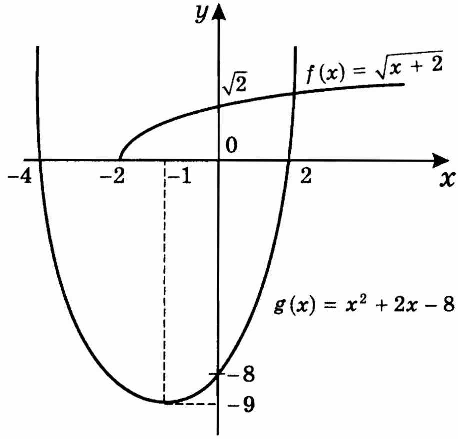
$$x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 33x + 62 = 0$$

т. к. $d = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 31;\ \pm 62$, то легко проверить, что целых корней нет. Можно поискать другие способы, но это технически достаточно сложно.

Попробуем графический способ.

Пусть $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = x^2 + 2x - 8$

Построим графики этих функций на одном чертеже и найдем сколько точек пересечения при этом получится.



Из графиков функций видно, что есть только одна точка пересечения. Значит уравнение имеет только один корень на $[2; \infty)$.

Ответ: Один корень.

14. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{8}{5} - \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}}$.

Попробуем стандартный путь введения новой переменной.

Пусть $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t \ (t \geqslant 0)$

$x^2 + 2x + 2 = t^2$

уравнение приобретает вид $\frac{1}{t} = \frac{8}{5} - \frac{3}{\sqrt{t^2+24}}$ приведя его к рациональному виду,

получим

$5\sqrt{t^2 + 24} = 8t\sqrt{t^2 + 24} - 15t$ — уравнение, которое решить технически очень сложно.

Выберем тогда другой подход, связанный с анализом области изменения правой и левой части уравнения.

а) так как $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geqslant 1$,

то $\sqrt{x^2 + 2x + 2} \geqslant 1$ и $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \leqslant 1$,

причем равенство возможно только при $x = -1$.

б) $x^2 + 2x + 26 = (x+1)^2 + 25 \geqslant 25$,

значит $\sqrt{x^2 + 2x + 26} \geqslant 5$,

а тогда $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}} \leqslant \frac{1}{5}$ и $\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}} \leqslant \frac{3}{5}$.

Умножив обе части неравенства на -1,

получим $-\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}} \geqslant -\frac{3}{5}$.

Прибавим к обеим частям $\frac{8}{5}$, тогда $\frac{8}{5} - \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+26}} \geqslant 1$,

равенство возможно только при $x = -1$.

Итак: так как левая часть уравнения меньше или равна единице, а правая больше или равна единице, причем в обоих случаях, равенство есть только при $x = -1$, значит обе части одновременно равны единице, и $x = -1$ — корень уравнения.

Ответ: $x = -1$.

Тренировочная работа 3

Решите уравнения 1–18.

1. $5\sqrt{x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 8}} + 2\sqrt{x + 3 - \sqrt{x^2 + 6x + 8}} = 11.$

2. $\sqrt[5]{x^2 + 45 - 14x} + \sqrt[5]{14x - 13 - x^2} = 2.$

3. $3(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 7} + 3(x + 3)\sqrt{x^2 + 6x + 15} = 20(x + 2).$

4. $2\sqrt{x + 2} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2 - x + \sqrt{x(x + 2)}}.$

5. $\dfrac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{x\sqrt{3}}+\sqrt{x\sqrt{3}+1}} + \dfrac{x\sqrt{3}-1}{\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{x\sqrt{3}-1}} = \sqrt{x\sqrt{3}}.$

6. $\sqrt{\frac{x}{4}} + \frac{3x+2}{x+3} = 3.$

7. $\sqrt[3]{2x + 1} + \sqrt[3]{6x + 1} = \sqrt[3]{2x - 1}.$

8. $\sqrt{x + 1} - \sqrt[3]{2x - 6} = 2.$

9. $\sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{15 + x} = 2.$

10. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} - \sqrt{x \cdot \sqrt{x^2 + 28^2} - x^2} = 3.$

11. $\sqrt[5]{(x - 2)(x - 32)} - \sqrt[4]{(x - 1)(x - 33)} = 1.$

12. $x + \sqrt{x} + \sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x} = 3.$

13. $\sqrt{x + 1} = \dfrac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}.$

14. $\sqrt[4]{x - 1} + 2\sqrt[3]{3x + 2} = 4 + \sqrt{3 - x}.$

15. $\sqrt{\frac{1}{3} - x} + x - 1 = \sqrt{x - \frac{1}{4}} + \sqrt{x - \frac{1}{6}}.$

16. $\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = 4.$

17. $\sqrt[3]{2 - x} = 2 - x^3.$

18. $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|.$

Решение тренировочной работы 3

1. $5\sqrt{x+3+\sqrt{x^2+6x+8}}+2\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}}=11.$

Введем подстановку:

$\sqrt{x+3+\sqrt{x^2+6x+8}}=a\geqslant 0$ и

$\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}}=b\geqslant 0.$

Отметим, что

$$ab=\sqrt{x+3+\sqrt{x^2+6x+8}}\cdot\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}}=1.$$

Тогда можем составить систему уравнений:

$$\begin{cases}5a+2b=11\\ ab=1\end{cases};\quad \begin{cases}a=\frac{1}{b}\\ 5+2b^2=11b\end{cases};\quad \left[\begin{array}{l}b=5\\ b=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

1) $\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}}=5.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$x+3-\sqrt{x^2+6x+8}=25;\quad x-22=\sqrt{x^2+6x+8}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-22\geqslant 0\\ x^2-44x+484=x^2+6x+8\end{cases};\quad \begin{cases}x\geqslant 22\\ x=9\frac{13}{25}\end{cases},$$

т.е. данная система решений не имеет.

2) $\sqrt{x+3-\sqrt{x^2+6x+8}}=\frac{1}{2}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$x+3-\sqrt{x^2+6x+8}=\frac{1}{4}$

$x+2{,}75=\sqrt{x^2+6x+8}\quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2{,}75\geqslant 0\\ x^2+2\cdot 2{,}75x+2{,}75^2=x^2+6x+8\end{cases};\quad \begin{cases}x\geqslant -2\frac{3}{4}\\ x=-\frac{7}{8}\end{cases}.$$

Ответ: $x=-\frac{7}{8}.$

2. $\sqrt[5]{x^2+45-14x}+\sqrt[5]{14x-13-x^2}=2.$

Введем подстановку: $\sqrt[5]{x^2+45-14x}=a.$

Тогда $x^2-14x+45=a^5$; $-x^2+14x-13=-a^5+32.$

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[5]{32-a^5}=2-a.$

Напомним, что

$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.$

Возведем обе части уравнения в пятую степень:

$32-a^5=2^5-5\cdot 2^4\cdot a+10\cdot 2^3\cdot a^2-10\cdot 2^2\cdot a^3+5\cdot 2\cdot a^4-a^5;$

$10a\left(a^3-4a^2+8a-8\right)=0.$

Получаем $\left[\begin{aligned}&a=0\\&(a-2)\left(a^2-2a+4\right)=0\end{aligned}\right.$; $\left[\begin{aligned}&a=0\\&a=2\end{aligned}\right..$

Примечание. Уравнение $a^2-2a+4=0$ решений не имеет, так как $a^2-2a+4=(a-1)^2+3>0.$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{aligned}&x^2-14x+45=0\\&\sqrt[5]{x^2-14x+45}=2\end{aligned}\right.;\quad \left[\begin{aligned}&x=9\\&x=5\\&x=13\\&x=1\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\{1;\ 5;\ 9;\ 13\}$.

3. $3(x+1)\sqrt{x^2+2x+7}+3(x+3)\sqrt{x^2+6x+15}=20(x+2)$.

Введем подстановки:

$\sqrt{x^2+2x+7}=a\geqslant 0$ и $\sqrt{x^2+6x+15}=b\geqslant 0$.

Тогда $x^2+2x+7=a^2$; $x^2+6x+15=b^2$;

$b^2-a^2=8+4x$; $x=\frac{b^2-a^2-8}{4}$; $x+1=\frac{b^2-a^2-4}{4}$;

$x+2=\frac{b^2-a^2}{4}$; $x+3=\frac{b^2-a^2+4}{4}$;

$a=\sqrt{(x+1)^2+6}\geqslant\sqrt{6}$; $b=\sqrt{(x+3)^2+6}\geqslant\sqrt{6}$;

$a+b\geqslant 2\sqrt{6}$.

Исходное уравнение примет вид

$$3\frac{b^2-a^2-4}{4}\cdot a+3\frac{b^2-a^2+4}{4}\cdot b-5\left(b^2-a^2\right)=0,$$

$$\frac{3}{4}\left(b^2-a^2\right)\cdot a-3a+\frac{3}{4}\left(b^2-a^2\right)\cdot b+3b-5\left(b^2-a^2\right)=0.$$

Воспользуемся формулой сокращенного умножения $\left(b^2-a^2\right)=(b-a)(b+a)$, сгруппируем слагаемые $3b$ и $-3a$, вынесем за скобку общий множитель:

$$(b-a)\left(\frac{3}{4}a(b+a)+3+\frac{3}{4}b(b+a)-5(b+a)\right)=0.$$

После дальнейших упрощений получим:

$$(b-a)\left(3(b+a)^2-20(b+a)+12\right)=0.$$

Одно из решений: $b=a$.

Решим квадратное уравнение $3(b+a)^2-20(b+a)+12=0$ относительно $(b+a)$. Получим

$$\left[\begin{array}{l} b+a=6 \\ b+a=\frac{2}{3}\notin\left[2\sqrt{6};\ \infty\right) \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x+7}=6-\sqrt{x^2+6x+15} \\ \sqrt{x^2+2x+7}=\sqrt{x^2+6x+15} \end{array}\right. . \tag{1}$$

Возведем в квадрат обе части каждого из уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x+7=36+x^2+6x+15-12\sqrt{x^2+6x+15} \\ x^2+2x+7=x^2+6x+15 \end{array}\right. .$$

Решение второго уравнения: $x=-2$.

Упростив вид первого уравнения, получим

$$3\sqrt{x^2+6x+15}=11+x. \tag{2}$$

Вновь возведем в квадрат обе части уравнения:

$$9\left(x^2+6x+15\right)=121+22x+x^2;$$

$$8x^2+32x+14=0.$$

Делим левую часть на 2, находим корни уравнения

$4x^2 + 16x + 7 = 0;\quad x_1 = -\frac{1}{2};\quad x_2 = -3\frac{1}{2}.$

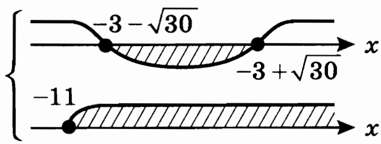
Учитывая D(У) уравнений и условия равносильности двух переходов при возведении в квадрат, получим систему неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2 + 6x + 15} \leqslant 6\\ x + 11 \geqslant 0\end{cases};\quad \begin{cases}x^2 + 6x - 21 \leqslant 0\\ x \geqslant -11\end{cases}.$$

Примечание: $x^2 + 6x + 15 = (x + 3)^2 + 6 > 0,$

$x^2 + 2x + 7 = (x + 1)^2 + 6 > 0.$

Графически иллюстрируем это так:



$\left[-3 - \sqrt{30};\ -3 + \sqrt{30}\right].$

Убеждаемся, что $-\frac{1}{2} \in \left[-3 - \sqrt{30};\ -3 + \sqrt{30}\,\right];$

$-3\frac{1}{2} \in \left[-3 - \sqrt{30};\ -3 + \sqrt{30}\,\right].$

Ответ: $\left\{-3\frac{1}{2};\ -2;\ -\frac{1}{2}\right\}.$

4. $2\sqrt{x + 2} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2 - x + \sqrt{x(x + 2)}}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$4\left(\sqrt{x + 2}\right)^2 + 4\sqrt{x + 2} \cdot \sqrt{2 - x} + 2 - x = 2 - x + \sqrt{x(x + 2)};$

$4\left(\sqrt{x + 2}\right)^2 + 4\sqrt{x + 2} \cdot \sqrt{2 - x} = \sqrt{x(x + 2)}.$

Учтя соображения, изложенные в комментариях к 11 примеру пр.2 (стр. 27, 28), получаем:

$$\left[\begin{array}{l}x = -2\\ 4\sqrt{x + 2} + 4\sqrt{2 - x} = \sqrt{x}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}x = -2\\ 32\sqrt{4 - x^2} = x - 64\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = -2\\ \begin{cases}x \geqslant 64\\ 32^2\left(4 - x^2\right) = x^2 - 128x + 64^2\end{cases}\end{array}\right..$$

С учетом решений последнего уравнения получаем

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{128}{1025} \end{array}\right. \\ x \geqslant 64 \end{cases} \end{array}\right.; \quad x = -2.$$

После проверки ясно, что $x = -2$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $x = -2$.

5. $\dfrac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{x\sqrt{3}}+\sqrt{x\sqrt{3}+1}} + \dfrac{x\sqrt{3}-1}{\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{x\sqrt{3}-1}} = \sqrt{x\sqrt{3}}.$

Умножим и разделим почленно левую часть уравнения на выражения, сопряженные знаменателям.

D(y): $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}; \ x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$\frac{(\sqrt{3}\cdot x+1)\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x+1}-\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x+1}+\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x+1}-\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}\right)} +$$

$$+ \frac{(\sqrt{3}\cdot x-1)\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}+\sqrt{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}-\sqrt{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}+\sqrt{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)} = \sqrt{\sqrt{3}\cdot x},$$

тогда

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x+1}\right)^3-\sqrt{3}\cdot x\cdot\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}-\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}}{\sqrt{3}\cdot x+1-\sqrt{3}\cdot x} +$$

$$+ \frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)^3+\sqrt{3}\cdot x\cdot\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}-\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}}{\sqrt{3}\cdot x-\sqrt{3}\cdot x+1} = \sqrt{\sqrt{3}\cdot x}.$$

Взаимно уничтожим $-\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}\right)^3$ и $\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}\right)^3$ и перенесем $-2\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}$ в правую часть уравнения:

$$\left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x+1}\right)^3 + \left(\sqrt{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)^3 = 3\sqrt{\sqrt{3}\cdot x}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(\sqrt{3}x+1)^3 + 2\left(\sqrt{(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)}\right)^3 + (\sqrt{3}x-1)^3 = 9\sqrt{3}x.$$

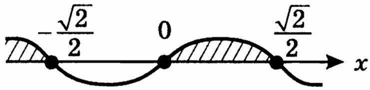
Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$6\sqrt{3}x^3 + 2\left(\sqrt{3x^2-1}\right)^3 = 3\sqrt{3}x;$$

$$2\left(\sqrt{3x^2-1}\right)^3 = 3\sqrt{3}x\left(1-2x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-2x^2\right) \geqslant 0 \\ 4\left(3x^2-1\right)^3 = 27x^2\left(1-2x^2\right)^2 \end{cases}.$$

Иллюстрируем решение первого неравенства графически:



Учитывая D(У), находим, что корни уравнения должны лежать в промежутке $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Решая уравнение

$$4\left(27x^6 - 27x^4 + 9x^2 - 1\right) = 27x^2\left(1 - 4x^2 + 4x^4\right),$$

получаем $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Однако $x = -\frac{2}{3} \notin \left[\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Для проверки первого решения нужно убедиться, что $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. При возведении в квадрат получаем $\frac{1}{3} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ — истина.

Ответ: $x = \frac{2}{3}$.

6. $\sqrt{\frac{x}{4}} + \frac{3x+2}{x+3} = 3$.

Перенесем $\frac{3x+2}{x+3}$ в правую часть уравнения и приведем к общему знаменателю:

$\sqrt{\frac{x}{4}} = \frac{7}{x+3}$. D(У): $x \geqslant 0$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$\frac{x}{4} = \frac{49}{(x+3)^2}$; $x^3 + 6x^2 + 9x = 196$.

Обозначим $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 196$.

$f(4) = 0$, т.е. $f(x)$ кратно $(x - 4)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 + 9x - 196 & x - 4 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - 4x^2} \quad\quad\quad\quad & x^2 + 10x + 49 \\ 10x^2 + 9x \quad\quad & \\ -\underline{10x^2 - 40x} \quad\quad & \\ 49x - 196 & \\ -\underline{49x - 196} & \end{array}$$

Уравнение примет вид $(x - 4)\left(x^2 + 10x + 49\right) = 0$.

1) $x - 4 = 0$; $x = 4 \in (0; \infty)$.

2) уравнение $x^2 + 10x + 49 = 0$ решений не имеет, так как $D < 0$.

Ответ: $x = 4$.

7. $\sqrt[3]{2x + 1} + \sqrt[3]{6x + 1} = \sqrt[3]{2x - 1}$.

Напомним, что $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

После возведения в третью степень частей уравнения получим

$2x + 1 + 6x + 1 + 3\sqrt[3]{2x + 1} \cdot \sqrt[3]{6x + 1}\left(\sqrt[3]{2x + 1} + \sqrt[3]{6x + 1}\right) =$
$= 2x - 1$.

Перенесем $8x + 2$ в правую часть и заменим $\sqrt[3]{2x + 1} + \sqrt[3]{6x + 1}$ на $\sqrt[3]{2x - 1}$:

$3\sqrt[3]{2x + 1} \cdot \sqrt[3]{6x + 1} \cdot \sqrt[3]{2x - 1} = -3(2x + 1)$.

Делим обе части уравнения на 3 и еще раз возводим в третью степень:

$(2x + 1)(6x + 1)(2x - 1) = -(2x + 1)^3$;

$$\left[\begin{array}{l} (6x + 1)(2x - 1) + (2x + 1)^2 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть числа $-\frac{1}{2}$ и 0.

После проверки ясно, что число $-\frac{1}{2}$ является корнем уравнения, а число 0 — нет, так как при $x = 0$ получаем $1 + 1 = -1$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

8. $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$.

Введем подстановку: $\sqrt{x+1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x + 1 = t^2$; $2x = 2t^2 - 2$; $2x - 6 = 2t^2 - 8$.

Исходное уравнение примет вид $t - 2 = \sqrt[3]{2t^2 - 8}$.
Возведем в куб обе части уравнения:

$t^3 - 3t^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 \cdot t - 8 = 2t^2 - 8$; $t^3 - 8t^2 + 12t = 0$;
$t\left(t^2 - 8t + 12\right) = 0$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \\ t = 6 \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{x+1} = 6 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 35 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;\ 3;\ 35\}$.

9. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$.

Введем подстановку: $\sqrt[4]{1-x} = a \geqslant 0$.

Тогда $1 - x = a^4$; $15 + x = 16 - a^4$.

Напомним, что $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[4]{16 - a^4} = 2 - a$, что равносильно

$\begin{cases} 2 - a \geqslant 0 \\ 16 - a^4 = (2-a)^4 \end{cases}$; $\begin{cases} a \leqslant 2 \\ 2a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a = 0 \end{cases}$.

В последнем уравнении вынесем $2a$ за скобку и обозначим

$f(a) = a^3 - 4a^2 + 12a - 16.$

$f(2) = 0$, т.е. $f(a)$ кратно $(a - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 4a^2 + 12a - 16 & a - 2 \\ \cline{2-2} -\underline{a^3 - 2a^2} & a^2 - 2a + 8 \\ -2a^2 + 12a & \\ -\underline{-2a^2 + 4a} & \\ 8a - 16 & \\ -\underline{8a - 16} & \end{array}$$

Уравнение примет вид

$$2a(a-2)(a^2 - 2a + 8) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \\ a^2 - 2a + 8 = 0 \end{array}\right. .$$

Уравнение $a^2 - 2a + 8 = 0$ корней не имеет $(D < 0)$. Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{1-x} = 0 \\ \sqrt[4]{1-x} = 2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -15 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{-15; 1\}$.

10. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2} - x^2} = 3.$

Введем подстановку:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} = a \geqslant 0; \quad \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2} - x^2} = b \geqslant 0.$$

Отметим, что

$$ab = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2} - x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{x^2+28^2}+x\right)x\left(\sqrt{x^2+28^2}-x\right)}{x}} = 28.$$

Тогда можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ ab = 28 \end{cases}.$$

Решая данную систему, получаем

$$\left[\begin{array}{l} b = -7 \notin [0; \infty) \\ b = 4, \quad a = 7 \end{array}\right..$$

Возвращаемся к переменной x: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} = 7.$

Возведем в квадрат:

$$\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x} = 49; \; \sqrt{x^2 + 28^2} = 48x;$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 28^2 = (48x)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 0 \\ 28^2 = (48x - x)(48x + x) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 7^2 \cdot 4^2 = 49 \cdot 47 \cdot x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{47}\sqrt{47} \\ x = -\frac{4}{47}\sqrt{47} \notin (0; \; \infty) \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $x = \dfrac{4\sqrt{47}}{47}$.

Примечание. Если вычислять x относительно b, т.е. решать уравнение $\sqrt{x\sqrt{x^2 + 28^2} - x^2} = 4$, то ответ будет тот же. Проверьте!

11. $\sqrt[5]{(x - 2)(x - 32)} - \sqrt[4]{(x - 1)(x - 33)} = 1.$

Введем подстановку:

$\sqrt[5]{(x - 2)(x - 32)} = a$ и $\sqrt[4]{(x - 1)(x - 33)} = b \geqslant 0$.

Возведем эти выражения в пятую и четвертую степень соответственно. Получим:

$x^2 - 34x + 64 = a^5$; $x^2 - 34x + 33 = b^4$; $a^5 - b^4 = 31$.

С учетом исходного уравнения получаем систему уравнений: $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^5 - b^4 = 31 \end{cases}$; $\begin{cases} b = a - 1 \\ a^5 - (a - 1)^4 = 31 \end{cases}$.

Раскроем скобки в последнем уравнении:

$$a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 1 = 31;$$

$$a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 32 = 0.$$

Введем функцию $f(a) = a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 32$.

$f(2) = 0$, т.е. $f(a)$ кратно $(a-2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l} a^5 - a^4 + 4a^3 - 6a^2 + 4a - 32 & a-2 \\ \underline{a^5 - 2a^4} & \overline{a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16} \\ \quad a^4 + 4a^3 & \\ \quad \underline{a^4 - 2a^3} & \\ \qquad 6a^3 - 6a^2 & \\ \qquad \underline{6a^3 - 12a^2} & \\ \qquad\quad 6a^2 + 4a & \\ \qquad\quad \underline{6a^2 - 12a} & \\ \qquad\qquad 16a - 32 & \\ \qquad\qquad \underline{16a - 32} & \end{array}$$

Получаем $(a-2)\left(a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16\right) = 0$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16 = 0 \end{array}\right.$.

Последнее уравнение корней не имеет: так как $b \geqslant 0$, то и $a - 1 \geqslant 0$, т.е. $a \geqslant 1$ и $a^4 + a^3 + 6a^2 + 6a + 16 > 0$.
Вернемся к переменной x:

$\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = 2$.

Возведем полученное уравнение в пятую степень:

$x^2 - 34x + 32 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 17 - \sqrt{257} \\ x = 17 + \sqrt{257} \end{array}\right.$.

Ответ: $\{17 - \sqrt{257};\ 17 + \sqrt{257}\}$.

12. $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 2x} = 3$.

Введем подстановку: $\sqrt{x} = a \geqslant 0$ и $\sqrt{x+2} = b \geqslant 0$.

Тогда $x = a^2$; $x + 2 = b^2$; $b^2 - a^2 = 2$.

Используя исходное уравнение, составим систему

$\begin{cases} a^2 + a + b + ab = 3 \\ b^2 - a^2 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a(a+b) + (a+b) = 3 \\ (b-a)(b+a) = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} (a+b)(a+1) = 3 \\ (b-a)(a+b) = 2 \end{cases}$.

Из первого уравнения найдем $a + b = \frac{3}{a+1}$. Подставив это значение во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{a+1} \\ (b - a)\frac{3}{a+1} = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = \frac{3}{a+1} \\ 3b - 3a = 2a + 2 \end{cases}.$$

Из второго уравнения найдем $b = \frac{5a+2}{3}$. Подставив это значение в первое уравнение, получим

$$\begin{cases} a + \frac{5a+2}{3} = \frac{3}{a+1} \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 3a(a + 1) + (5a + 2)(a + 1) = 9 \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8a^2 + 10a - 7 = 0 \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{7}{4} \notin [0; \infty). \end{array}\right. \\ b = \frac{5a+2}{3} \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$,

т.е. $x = \frac{1}{4}$ — корень данного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

13. $\sqrt{x + 1} = \frac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}$.

Введем подстановку: $\sqrt{x + 1} = t \quad (t \geqslant 0)$.

Тогда $x = t^2 - 1$.

Исходное уравнение примет вид $t = \frac{5(t^2-1)^2+20(t^2-1)+16}{(t^2-1)^2+12(t^2-1)+16}$;

$$t(t^4 - 2t^2 + 1 + 12t^2 - 12 + 16) =$$

$$= 5(t^4 - 2t^2 + 1) + 20(t^2 - 1) + 16;$$

$$t^5 + 10t^3 + 5t = 5t^4 + 10t^2 + 1;$$

$$t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t - 1 = 0.$$

Напомним, что

$$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.$$

Тогда $(t - 1)^5 = 0$; $t = 1 \in [0; \infty)$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{x+1} = 1$; $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

14. $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$. $\quad$ $D(y)=[1;\ 3]$.

Для решения данного уравнения не существует рациональных приемов. Попробуем найти корни методом подбора. Исходя из D(y), проверим, является ли корнем $x=2$.

$\sqrt[4]{2-1}+2\sqrt[3]{3\cdot 2+2}=4+\sqrt{3-2}$; $\quad 5=5$ — истина.

Рассмотрим, существуют ли другие корни.

Пусть $f(x)=\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}$.

Тогда $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x-1)^3}}+\dfrac{2\cdot 3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$.

$f'(x)>0$ для любого $x\in(1;\ 3]$, т.е. $f(x)$ на промежутке $(1;\ 3]$ возрастает.

Пусть $\varphi(x)=4+\sqrt{3-x}$, тогда $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

$\varphi'(x)<0$ для любого $x\in[1;3)$, т.е. $\varphi(x)$ на промежутке $[1;3)$ убывает.

Известно, что возрастающая и убывающая функции, если и пересекаются, то только в одной точке.

Ответ: $x=2$.

15. $\sqrt{\frac{1}{3}-x}+x-1=\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\sqrt{x-\frac{1}{6}}$.

$$D(У):\ \begin{cases}\frac{1}{3}-x\geqslant 0\\ x-\frac{1}{4}\geqslant 0;\\ x-\frac{1}{6}\geqslant 0\end{cases}\qquad D(У)=\left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right].$$

Для решения исходного уравнения применим метод оценок левой и правой его частей.

Так как $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$, то $-\frac{3}{4}\leqslant x-1\leqslant-\frac{2}{3}$. $\quad$ (1)

Аналогично из $-\frac{1}{3}\leqslant -x\leqslant-\frac{1}{4}$ следует $0\leqslant -x+\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{12}$.

Значит $0\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}-x}\leqslant\sqrt{\frac{1}{12}}$. $\quad$ (2)

Складывая неравенства (1) и (2), для левой части уравнения получаем

$$0-\frac{3}{4}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}-x}+x-1\leqslant-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{1}{12}}.$$

Тогда $\sqrt{\frac{1}{3}-x}+x-1<0$.

Так как $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$, то для правой части уравнения

$\sqrt{x - \frac{1}{4}} + \sqrt{x - \frac{1}{6}} \geqslant 0$.

Левая и правая части уравнения имеют разные знаки, следовательно, уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

16. $\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = 4$.

Введем подстановки:

$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} = a$ и $\sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = b$.

Тогда: $a^3 = 9 - \sqrt{x + 1}$; $b^3 = 7 + \sqrt{x + 1}$; $a^3 + b^3 = 16$.

С учетом исходного уравнения получаем систему

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = 4 \\ (a + b)\left((a + b)^2 - 3ab\right) = 16 \end{cases}.$$

Подставляя во второе уравнение $(a + b) = 4$, получаем

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4(16 - 3ab) = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 4 \end{cases}.$$

Из теоремы, обратной теореме Виета, следует $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} = 2$, т. е. $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

17. $\sqrt[3]{2 - x} = 2 - x^3$.

Введем подстановку: $y = \sqrt[3]{2 - x}$.

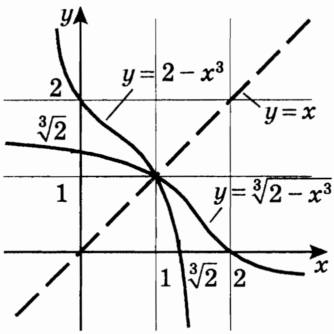
Производная $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}} < 0$ для любого $x \neq 2$, следовательно, $y = \sqrt[3]{2 - x}$ — функция, монотонно убывающая, и каждое свое значение функция принимает только один раз. Тогда для нее существует обратная функция: $x = \sqrt[3]{2 - y}$ и, значит, $x^3 = 2 - y$; $y = 2 - x^3$.

В данном случае имеем уравнение, связанное с равенством взаимно обратных функций. Известно, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, задаваемой уравнением $y = x$.

Если графики этих функций пересекаются, то хотя бы одна точка пересечения принадлежит прямой $y = x$, т. е. $2 - x^3 = x$; $x^3 + x - 2 = 0$; $(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$.

Следовательно, $x = 1$ и других решений нет.

Графическое решение:



Ответ: $x = 1$.

18. $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2\left|\sqrt{3x + 18} - 2\right|$.

Пусть $f(x) = 3x - 2|x - 2|$.

Если проанализировать структуру правой части, то становится ясно — это та же самая функция, только вместо аргумента x использован аргумент $\sqrt{3x + 18}$.

Таким образом, $f(x) = f\left(\sqrt{3x + 18}\right)$.

«Раскроем» модуль, используя определение модуля.

Тогда $3x - 2|x - 2| = \begin{cases} x + 4, & x \geqslant 2 \\ 5x - 4, & x < 2 \end{cases}$.

Функция $f(x)$ возрастает на каждом из лучей: $[2; \infty)$ и $(-\infty; 2)$. Отсюда следует, что $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а это значит, что каждое свое значение она принимает только один раз.

Следовательно, $f(x) = f\left(\sqrt{3x + 18}\right)$ выполняется лишь

при $x = \sqrt{3x + 18} \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = 3x + 18 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases}$.

Ответ: $x = 6$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\sqrt{3x - \sqrt{x - \frac{1}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x + 4} = 4$.

3. $\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} + 16\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} = 8$.

4. $2x^2 - x + 1 = 2x\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$.

5. $\sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10 + x - 6\sqrt{x+1}} = 1$.

6. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

7. $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{7}{5} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+29}}$.

8. $\sqrt[3]{25 + x} - 6 = \sqrt[3]{x - 29}$.

9. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 7x} = 3$.

10. $\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt{x + 1} = 3$.

Вариант 2

1. $\sqrt{15x - \sqrt{5x - \frac{1}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $x^2 + x - 4 = 2\sqrt{x^2 + x + 4}$.

3. $\sqrt{\frac{x-2}{2x+1}} + 16\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}} = 8$.

4. $2x^2 + x + 1 + 2x\sqrt{\frac{2x+1}{x}} = 0$.

5. $\sqrt{5 - x - 4\sqrt{1-x}} + \sqrt{10 - x - 6\sqrt{1-x}} = 1$.

6. $\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{-x^2 - 4x - 3} = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$.

7. $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{7}{5} - \frac{2}{\sqrt{x^2-4x+29}}$.

8. $\sqrt[3]{29 + x} - 6 = \sqrt[3]{x - 25}$.

9. $\sqrt{24 + 2x - x^2} + \sqrt{x^2 - 9x + 8} = 3$.

10. $\sqrt{1 - x} - 3 = \sqrt[3]{x + 2}$.

2 Иррациональные неравенства

Основные свойства

1) Если $\sqrt{a} < b$, то $\begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \\ a < b^2 \end{cases}$.

2) Если $\sqrt{a} > b$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a > b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

3) Если $a\sqrt{b} \leqslant 0$, то $\begin{cases} ab^2 \leqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

4) Если $a\sqrt{b} \geqslant 0$, то $\begin{cases} ab^2 \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

5) Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $\begin{cases} b \geqslant 0 \\ a > b \end{cases}$.

6) Если $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, то $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ a < b \end{cases}$.

7) Если $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$, то $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \\ c \geqslant 0 \\ a + 2\sqrt{ab} + b > c \end{cases}$.

8) Если $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{c}$, то $\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \\ c \geqslant 0 \\ a + 2\sqrt{ab} + b < c \end{cases}$.

Примеры решения иррациональных неравенств

Практикум 4

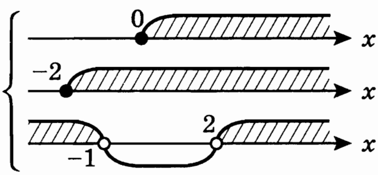
Рассмотрим решения некоторых простейших иррациональных неравенств.

1. $\sqrt{x + 2} < x$.

Данное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \\ x + 2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant -2 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}.$$

Ясно, что решениями уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ являются числа -1 и 2.



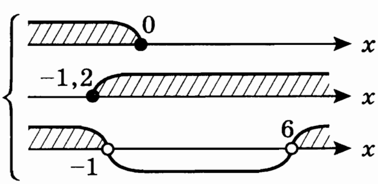
Ответ: $(2; \infty)$.

2. $\sqrt{5x + 6} < -x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств (по I свойству):

$$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ 5x + 6 \geqslant 0 \\ 5x + 6 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \geqslant -1{,}2 \\ x^2 - 5x - 6 > 0 \end{cases}.$$

Решим уравнение $x^2 - 5x - 6 = 0$ и представим решения неравенств графически:

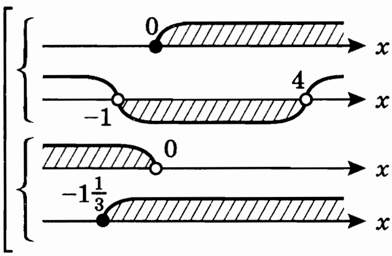


Ответ: $[-1{,}2; -1)$.

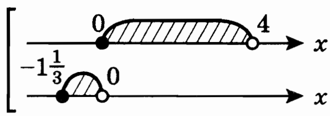
3. $\sqrt{3x+4} > x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств (по II свойству):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0\\ 3x+4 > x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ 3x+4 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0\\ x^2-3x-4 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0\\ x \geqslant -1\frac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right..$$



или

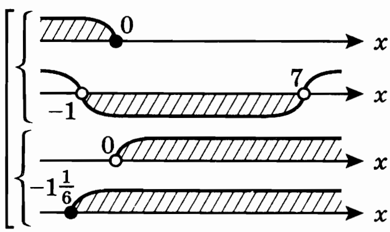


Ответ: $\left[-1\frac{1}{3};\ 4\right)$.

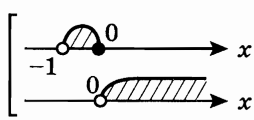
4. $\sqrt{6x+7} > -x$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x \geqslant 0\\ 6x+7 > (-x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-x < 0\\ 6x+7 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant 0\\ x^2-6x-7 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x > 0\\ x \geqslant -1\frac{1}{6}\end{cases}\end{array}\right..$$



или

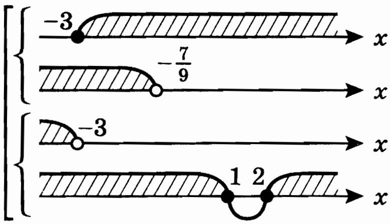


Ответ: $(-1;\ \infty)$.

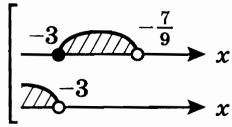
5. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3.$

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant -3 \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -3 \\ (x - 1)(x - 2) \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right. .$$



или

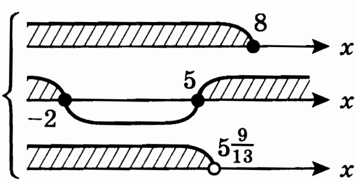


Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{7}{9}\right).$

6. $\sqrt{(x + 2)(x - 5)} < 8 - x.$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 8 - x \geqslant 0 \\ (x + 2)(x - 5) \geqslant 0 \\ (x + 2)(x - 5) < (8 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 8 \\ (x + 2)(x - 5) \geqslant 0. \\ 13x < 74 \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty;\ -2] \cup \left[5;\ 5\frac{9}{13}\right).$

7. $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} - \sqrt{2 - x} > 0.$

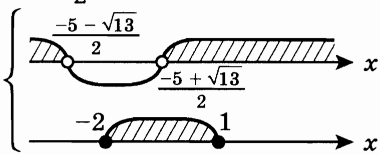
Перенесем $\sqrt{2 - x}$ в правую часть. Получаем

$\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} > \sqrt{2 - x}.$

Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2 - x \geqslant 0 \\ 4 - \sqrt{1 - x} > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ \sqrt{1 - x} < 2 + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant 2 \\ 2 + x \geqslant 0 \\ 1 - x \geqslant 0 \\ 1 - x < (2 + x)^2 \end{cases}.$$

В последнем неравенстве перенесем $(1 - x)$ в правую часть, раскроем скобки, получим $x^2 + 5x + 3 > 0$. Числа $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ являются корнями уравнения $x^2 + 5x + 3 = 0$.



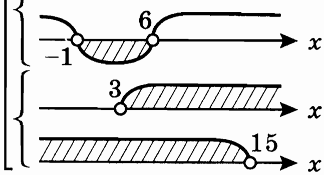
Ответ: $\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right]$.

8. $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

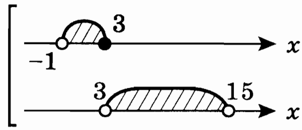
Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{15 - x} > 3 - x \\ x \neq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ 15 - x > (3 - x)^2 \\ x \neq 15 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x < 0 \\ 15 - x > 0 \end{cases} \end{array} \right..$$

То есть $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x^2 - 5x - 6 < 0 \\ x \neq 15 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3 \\ x < 15 \end{cases} \end{array} \right.$.



или



Ответ: $(-1;\ 15)$.

9. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}>-1$.

Так как левая часть неравенства неотрицательна, то на области существования корней левой части неравенство верно из-за того, что правая часть неравенства отрицательна.

Итак, $\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases}$ $[-2;\ 3]$.

Ответ: $[-2;\ 3]$.

10. $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+7}+\sqrt{2x-5}$.

Данное неравенство равносильно по свойству 8 системе неравенств:

$$\begin{cases} x+6 \geqslant 0 \\ x+7 \geqslant 0 \\ 2x-5 \geqslant 0 \\ x+6 > x+7+2\sqrt{(x+7)(2x-5)}+2x-5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5 \\ \sqrt{(x+7)(2x-5)} < 2-x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 2{,}5 \\ 2-x \geqslant 0 \\ (x+7)(2x-5) \geqslant 0 \\ (x+7)(2x-5) < (2-x)^2 \end{cases} \quad \varnothing.$$

Отсюда следует, что неравенство решений не имеет.

Ответ: решения нет.

11. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$.

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ 3-x+2\sqrt{(3-x)(x+1)}+x+1 > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -1 \\ 2\sqrt{(3-x)(x+1)} > -3\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Последнее неравенство верно для любого $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: $[-1;\ 3]$.

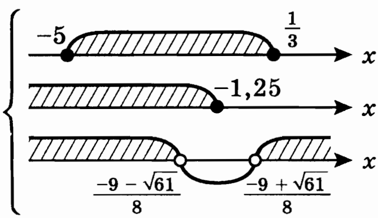
12. $\sqrt{1-3x} - \sqrt{5+x} > 1.$

Перенесем $\sqrt{5+x}$ в правую часть, тогда неравенство $\sqrt{1-3x} > 1 + \sqrt{5+x}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 1-3x \geqslant 0 \\ 5+x \geqslant 0 \\ 1-3x > 1 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{3} \\ x \geqslant -5 \\ 2\sqrt{5+x} < -4x - 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{3} \\ x \geqslant -5 \\ -4x - 5 \geqslant 0 \\ 4(x+5) < 16x^2 + 40x + 25 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{3} \\ x \geqslant -5 \\ x \leqslant -1,25 \\ 16x^2 + 36x + 5 > 0 \end{cases}.$$

Числа $\frac{-9+\sqrt{61}}{8}$ и $\frac{-9-\sqrt{61}}{8}$ являются решениями уравнения $16x^2 + 36x + 5 = 0.$



Ответ: $\left[-5;\ \frac{-9+\sqrt{61}}{8}\right).$

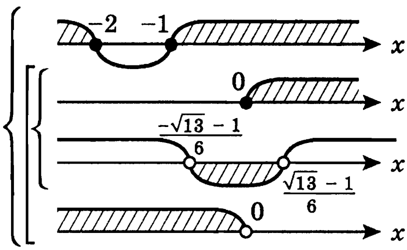
13. $\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1.$

Перенесем $\sqrt{x^2-x+1}$ в правую часть, тогда неравенство $\sqrt{x^2+3x+2} < 1 + \sqrt{x^2-x+1}$ равносильно системе неравенств:

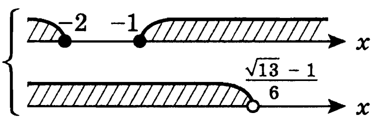
$$\begin{cases} x^2+3x+2 \geqslant 0 \\ x^2-x+1 \geqslant 0 \\ x^2+3x+2 < 1 + 2\sqrt{x^2-x+1} + x^2 - x + 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x+1)(x+2) \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2-x+1} > 2x \end{cases};$$

$$\begin{cases}(x+1)(x+2)\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-x+1>4x^2\end{cases};\\ \begin{cases}x<0\\ x^2-x+1\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \qquad \begin{cases}(x+1)(x+2)\geqslant 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 0\\ 3x^2+x-1<0\end{cases}.\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}$$



или



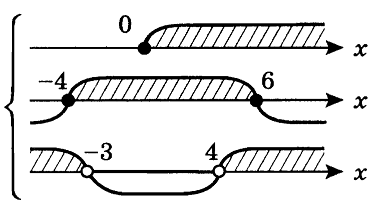
Ответ: $(-\infty;\ -2] \cup \left[-1;\ \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$.

14. $\sqrt{24+2x-x^2} < x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ 24+2x-x^2\geqslant 0\\ 24+2x-x^2<x^2\end{cases};$$

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ -(x-6)(x+4)\geqslant 0\\ (x-4)(x+3)>0\end{cases}.$$



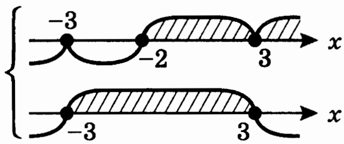
Ответ: $(4;\ 6]$.

15. $(x+2)\sqrt{9-x^2} \geqslant 0$. Используем свойство 4.

Напомним, что $a\sqrt{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab^2 \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

Получаем $\begin{cases} (x+2)\left(9-x^2\right)^2 \geqslant 0 \\ 9-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x+2)(3-x)^2(x+3)^2 \geqslant 0 \\ (3-x)(3+x) \geqslant 0 \end{cases}$

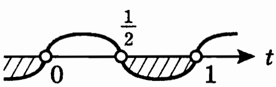


Ответ: $[-2;\ 3] \cup \{-3\}$.

16. $2\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} < 3$.

Введем подстановку $\sqrt{x} = t,\quad t \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}$.

Получаем $2t + \frac{1}{t} < 3$; $\frac{2t^2-3t+1}{t} < 0$; $\frac{2(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{t} < 0$.



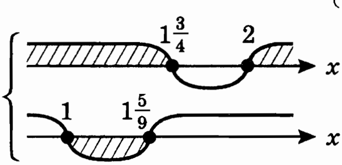
$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 1 \\ \sqrt{x} < 0 \quad (\varnothing) \end{array}\right.$; $\frac{1}{4} < x < 1$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$.

17. $\sqrt{4x^2 - 15x + 14} \leqslant \sqrt{8x - 5x^2}$.

По свойству 6 $\begin{cases} 4x^2 - 15x + 14 \geqslant 0 \\ 4x^2 - 15x + 14 \leqslant 8x - 5x^2 \end{cases}$;

$\begin{cases} 4x^2 - 15x + 14 \geqslant 0 \\ 9x^2 - 23x + 14 \leqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-2)\left(x-1\frac{3}{4}\right) \geqslant 0 \\ (x-1)\left(x-1\frac{5}{9}\right) \leqslant 0 \end{cases}$.



$\left[1;\ 1\frac{5}{9}\right]$

Ответ: $\left[1;\ 1\frac{5}{9}\right]$.

Тренировочная работа 4

Решите неравенства 1–12.

1. $\sqrt{2-x} < -x$.

2. $\sqrt{6-5x} < x$.

3. $\sqrt{4-3x} > x$.

4. $\sqrt{x^2+3x+2} > 3-x$.

5. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}$.

6. $\sqrt{4-x^2} + x + 1 > 0$.

7. $\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant x+4$.

8. $\sqrt{\frac{9}{x^2}-3} > 1 + \frac{3}{x}$.

9. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leqslant 1$.

10. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \geqslant \frac{7}{12}$.

11. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} \leqslant x+1$.

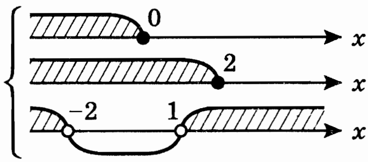
12. $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 \leqslant 3x+7$.

Решение тренировочной работы 4

1. $\sqrt{2-x} < -x.$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ 2 - x \geqslant 0 \\ 2 - x < x^2 \end{cases}. \quad \text{Следовательно,} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \leqslant 2 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}.$$

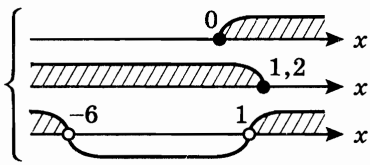


Ответ: $(-\infty;\ -2)$.

2. $\sqrt{6-5x} < x.$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 6 - 5x \geqslant 0 \\ 6 - 5x < x^2 \end{cases}. \quad \text{Следовательно,} \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant 1{,}2 \\ x^2 + 5x - 6 > 0 \end{cases}.$$

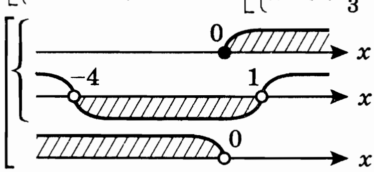


Ответ: $(1;\ 1{,}2]$.

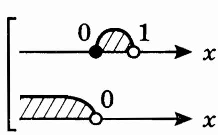
3. $\sqrt{4-3x} > x.$

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4 - 3x > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 4 - 3x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \leqslant 1\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right..$$



или

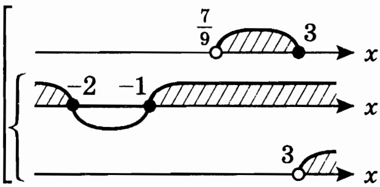


Ответ: $(-\infty;\ 1)$.

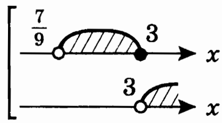
4. $\sqrt{x^2+3x+2} > 3-x.$

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-x \geqslant 0\\ x^2+3x+2 > (3-x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}3-x < 0\\ x^2+3x+2 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant 3\\ x > \frac{7}{9}\end{cases}\\ \begin{cases}x > 3\\ (x+1)(x+2) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$



или



О т в е т: $\left(\frac{7}{9};\ \infty\right)$.

5. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}.$

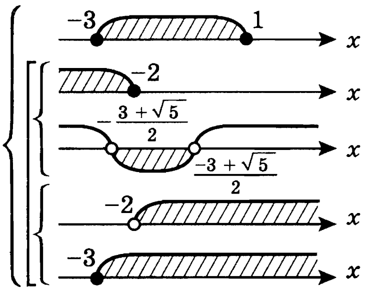
Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}2-\sqrt{x+3} \geqslant 0\\ x+4 \geqslant 0\\ 2-\sqrt{x+3} < x+4\end{cases};$$

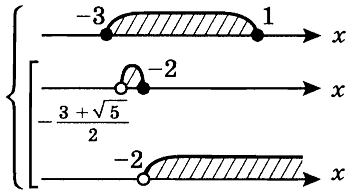
$$\begin{cases}\sqrt{x+3} \leqslant 2\\ x \geqslant -4\\ \sqrt{x+3} > -x-2\end{cases};$$

$$\begin{cases}x+3 \geqslant 0\\ x+3 \leqslant 4\\ x \geqslant -4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x-2 \geqslant 0\\ x+3 > (x+2)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-x-2 < 0\\ x+3 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}; \quad \begin{cases}x \geqslant -3\\ x \leqslant 1\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant -2\\ x^2+3x+1 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x > -2\\ x \geqslant -3\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$$

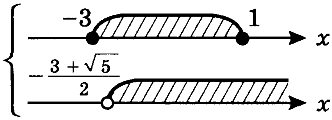
Убеждаемся, что числа $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ являются корнями уравнения $x^2+3x+1=0$.



или



или



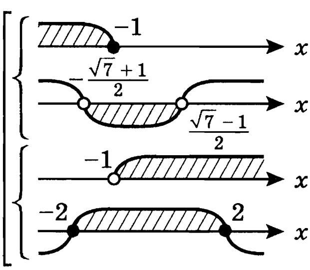
Ответ: $\left(-\frac{3+\sqrt5}{2};\ 1\right]$.

6. $\sqrt{4-x^2}+x+1>0.$

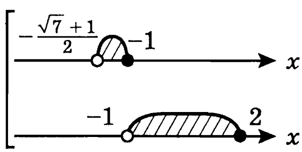
Перенесем $x+1$ в правую часть: $\sqrt{4-x^2}>-x-1$, тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x-1\geqslant 0\\ 4-x^2>(-x-1)^2\end{cases}\\ \begin{cases}-x-1<0\\ 4-x^2\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant -1\\ 2x^2+2x-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-1\\ (2+x)(2-x)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$

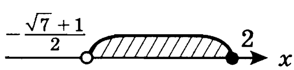
Числа $\frac{-1-\sqrt7}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt7}{2}$ являются решениями уравнения $2x^2+2x-3=0$.



или



или

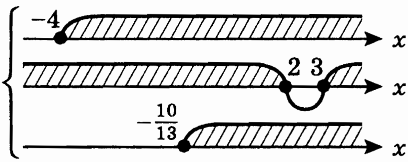


Ответ: $\left(-\frac{\sqrt7+1}{2};\ 2\right]$.

7. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leqslant x + 4$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leqslant x^2 + 8x + 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -4 \\ (x-2)(x-3) \geqslant 0. \\ x \geqslant -\frac{10}{13} \end{cases}$$

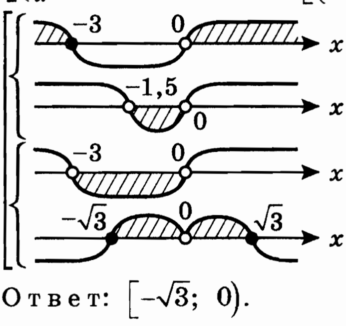


Ответ: $\left[-\frac{10}{13};\ 2\right] \cup [3;\ \infty)$.

8. $\sqrt{\frac{9}{x^2} - 3} > 1 + \frac{3}{x}$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + \frac{3}{x} \geqslant 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 > \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + \frac{3}{x} < 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+3}{x} \geqslant 0 \\ \frac{9}{x^2} - 3 > 1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+3}{x} \geqslant 0 \\ \frac{4x+6}{x} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+3}{x} < 0 \\ \frac{3(3-x^2)}{x^2} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right..$$



Ответ: $\left[-\sqrt{3};\ 0\right)$.

9. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} \leqslant 1$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \\ x - 1 + 2\sqrt{x^2 + x - 2} + x + 2 \leqslant 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \sqrt{x^2 + x - 2} \leqslant -x \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ -x \geqslant 0 \\ x^2 + x - 2 \leqslant x^2 \end{cases}.$$

Неравенство решения не имеет.

Ответ: решений нет.

10. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \geq \frac{7}{12}$.

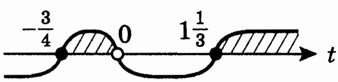
Введем подстановку: $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} = t > 0$.

Исходное неравенство примет вид:

$t - \frac{1}{t} \geqslant \frac{7}{12}$; $\frac{12t^2-7t-12}{t} \geqslant 0$.

Числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{3}{4}$ являются корнями уравнения $12t^2 - 7t - 12 = 0$.

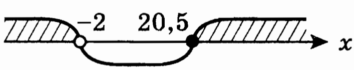
Исходное неравенство принимает вид: $\frac{(3t-4)(4t+3)}{t} \geqslant 0$.



$\left[-\frac{3}{4};\ 0\right) \not\subset (0;\ \infty)$, так как $t > 0$; следовательно, $t \geqslant \frac{4}{3}$.

Возвращаемся к переменной x:

$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} \geqslant \frac{4}{3}$; $\frac{2x-1}{x+2} \geqslant \frac{16}{9}$; $\frac{2x-41}{9(x+2)} \geqslant 0$.



Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup [20{,}5;\ \infty)$.

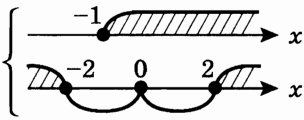
11. $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} \leqslant x + 1$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} \geqslant 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} \leqslant x^2 + 2x + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} \geqslant -2x \\ \sqrt{6x^2 + 1} \leqslant x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2x \geqslant 0 \\ 6x^2 + 1 \geqslant 4x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x < 0 \\ 6x^2 + 1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} x^2 + 1 \geqslant 0 \\ 6x^2 + 1 \geqslant 0 \\ 6x^2 + 1 \leqslant x^4 + 2x^2 + 1 \end{cases} \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 2x^2 + 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ x > 0 \end{array}\right. \\ x^2\left(x^2 - 4\right) \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x^2\left(x^2 - 4\right) \geqslant 0 \end{cases}.$$



Ответ: $\{0\} \cup [2;\ \infty)$.

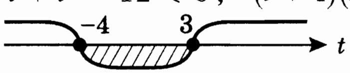
12. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 \leqslant 3x + 7$.

Перенесем $3x + 7$ в левую часть и выполним подстановку: $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t \geqslant 0$.

Тогда $x^2 - 3x + 5 = t^2$; $x^2 - 3x - 7 = t^2 - 12$.

Исходное неравенство примет вид:

$t + t^2 - 12 \leqslant 0$; $(t + 4)(t - 3) \leqslant 0$.



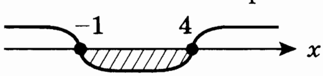
Но $t \geqslant 0$, поэтому $0 \leqslant t \leqslant 3$.

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 5} \leqslant 3 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 5} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 5 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 5 \leqslant 9 \end{cases}.$$

Неравенство $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$ верно для любого x (так как $a = 1 > 0$, $D < 0$).

Решим неравенство $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$. Числа -1 и 4 являются корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$.



Ответ: $[-1;\ 4]$.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $\sqrt{x^2 - x} < \dfrac{6}{\sqrt{x^2-x}}$.
2. $\sqrt{5x + 6} < -x$.
3. $\sqrt{x^2 + 3x + 2} > 3 - x$.
4. $(8x^2 - 6x + 1)\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \geqslant 0$.
5. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 15} < 5$.
6. $\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$.
7. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+1}{x} \geqslant 1$.
8. $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2}} - \dfrac{7}{12} \geqslant \sqrt{\dfrac{x-2}{2x+1}}$.
9. $\sqrt{x^2 + 3x + 5} + 3x \leqslant 7 - x^2$.
10. $3 - x + 2\sqrt{3x - 2} \geqslant \dfrac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{3x+2}}$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{6}\sqrt{x^2 + x} < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.
2. $\sqrt{6 - 5x} < x$.
3. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.
4. $\dfrac{\sqrt{-25x^2-15x-2}}{8x^2+6x+1} \geqslant 0$.
5. $\sqrt{15 - x} + \sqrt{-2x - 1} < 5$.
6. $\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x-8} \geqslant \dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{2x-1}$.
7. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+1}{x} \leqslant -1$.
8. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} - \dfrac{7}{12} \geqslant \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.
9. $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 \leqslant 7 + 3x$.
10. $x + 3 + 2\sqrt{-3x - 2} \geqslant \dfrac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{2-3x}}$.

Примеры решения более сложных иррациональных неравенств

Практикум 5

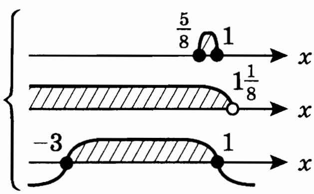
1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}.$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0 \\ 1-x\geqslant 0 \\ 8x-5\geqslant 0 \\ x+3+2\sqrt{(x+3)(1-x)}+1-x>8x-5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\geqslant \frac{5}{8} \\ x\leqslant 1 \\ 2\sqrt{(x+3)(1-x)}>8x-9 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{5}{8}\leqslant x\leqslant 1 \\ 8x-9<0 \\ 4(x+3)(1-x)\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{5}{8}\leqslant x\leqslant 1 \\ 8x-9\geqslant 0 \\ 4(x+3)(1-x)>(8x-9)^2 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right..$$

Последняя система неравенств решений не имеет.



Ответ: $\left[\frac{5}{8};\ 1\right]$.

2. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}.$

Слагаемые левой части умножим и разделим на выражения, сопряженные знаменателям:

$$\frac{2\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)}{\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)}+\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)}>\frac{1}{x};$$

$$\frac{4-2\sqrt{4-x^2}+2+\sqrt{4-x^2}}{4-4+x^2} > \frac{1}{x}.$$

Перенесем $\frac{1}{x}$ в левую часть и приведем к общему знаменателю:

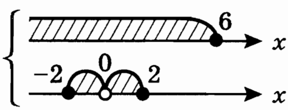
$$\frac{6-\sqrt{4-x^2}-x}{x^2} > 0.$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} < 6-x \\ x \neq 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leqslant 6 \\ -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 6x + 16 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Неравенство $x^2 - 6x + 16 > 0$ верно для любого x, так как $a = 1 > 0$, $\mathrm{D} < 0$.



Ответ: $[-2;\ 0) \cup (0;\ 2]$.

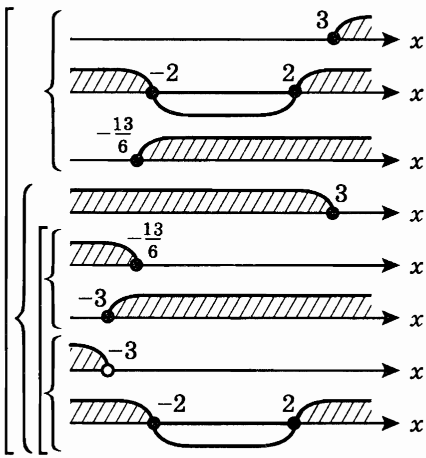
3. $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leqslant x^2 - 9$.

Перенесем $\left(x^2 - 9\right)$ в левую часть и вынесем $(x-3)$ за скобку: $(x-3)\left(\sqrt{x^2-4} - (x+3)\right) \leqslant 0$.

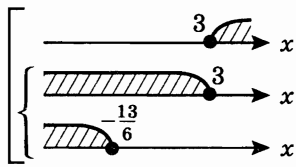
Напомним: $a \cdot b \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2-4} \leqslant x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \leqslant 0 \\ \sqrt{x^2-4} \geqslant x+3 \end{cases} \end{array}\right.$;

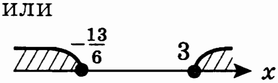
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 3\\ x^2 - 4 \geqslant 0\\ x^2 - 4 \leqslant x^2 + 6x + 9\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 3\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x + 3 \geqslant 0\\ x^2 - 4 \geqslant x^2 + 6x + 9\end{cases}\\ \begin{cases}x + 3 < 0\\ x^2 - 4 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 3\\ (x - 2)(x + 2) \geqslant 0\\ x \geqslant -\frac{13}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant 3\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant -3\\ x \leqslant -\frac{13}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x < -3\\ (x - 2)(x + 2) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right..$$



или



или



Ответ: $\left(-\infty;\ -2\frac{1}{6}\right] \cup [3;\ \infty)$.

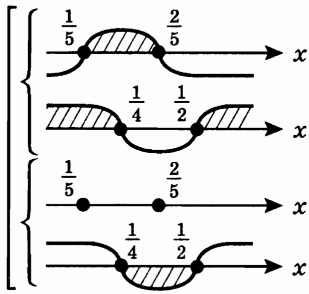
4. $\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}\,\left(8x^2 - 6x + 1\right) \geqslant 0.$

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \geqslant 0\\ 8x^2 - 6x + 1 \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{-25x^2 + 15x - 2} \leqslant 0\\ 8x^2 - 6x + 1 \leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-25x^2 + 15x - 2 \geqslant 0\\ 8x^2 - 6x + 1 \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}-25x^2 + 15x - 2 = 0\\ 8x^2 - 6x + 1 \leqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$

Числа $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{5}$ являются решениями уравнения $25x^2 - 15x + 2 = 0$, а числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ — решениями уравнения $8x^2 - 6x + 1 = 0$. Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-25\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right) \geqslant 0\\ 8\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \frac{2}{5}\\ x = \frac{1}{5}\end{array}\right.\\ 8\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.;$$



$$\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}.$$

Примечание. Возможен и другой способ решения исходного неравенства.

Напомним, что по свойству 4

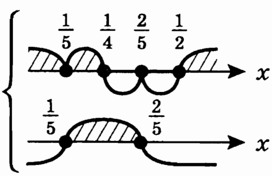
$$b\sqrt{a} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}b a^2 \geqslant 0\\ a \geqslant 0\end{cases}.$$

Получаем:

$$\sqrt{-25x^2 + 15x - 2}\left(8x^2 - 6x + 1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(-25x^2 + 15x - 2\right)^2\left(8x^2 - 6x + 1\right) \geqslant 0\\ -25x^2 + 15x - 2 \geqslant 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}25^2\left(x - \frac{2}{5}\right)^2\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 \cdot 8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \geqslant 0\\ -25\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) \geqslant 0\end{cases}.$$



Ответ: $\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

5. $\sqrt{|1-8x|-2} \leqslant x+1$.

Напомним свойства модульных неравенств:

а) $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha > -\beta \end{cases}$;

б) $|\alpha| > \beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta \end{array}\right.$,

а также $|a-b| = |b-a|$.

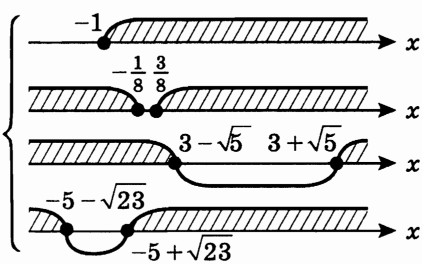
Тогда исходное неравенство равносильно системе

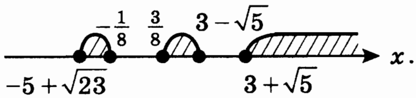
$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ |8x-1| \geqslant 2 \\ |8x-1|-2 \leqslant x^2+2x+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -1 \\ |8x-1| \geqslant 2 \\ |8x-1| \leqslant x^2+2x+3 \end{cases}.$$

«Раскроем» модули:

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} 8x-1 \geqslant 2 \\ 8x-1 \leqslant -2 \end{array}\right. \\ 8x-1 \leqslant x^2+2x+3 \\ 8x-1 \geqslant -x^2-2x-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{3}{8} \\ x \leqslant -\frac{1}{8} \end{array}\right. \\ x^2-6x+4 \geqslant 0 \\ x^2+10x+2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

Числа $3+\sqrt{5}$ и $3-\sqrt{5}$ — решения уравнения $x^2-6x+4=0$; числа $-5+\sqrt{23}$ и $-5-\sqrt{23}$ — решения уравнения $x^2+10x+2=0$.



или 

Ответ: $\left[-5+\sqrt{23};\ -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8};\ 3-\sqrt{5}\right] \cup \left[3+\sqrt{5};\ \infty\right)$.

6. $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x - 1.$

D(H) — область определения неравенства: $D(H) = [0;\ \infty)$.

Перенесем $\sqrt{3x}$ в правую часть, а число 1 — в левую. Полученное неравенство $\sqrt{x+1} + 1 > 2x + \sqrt{3x}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2 > \left(2x+\sqrt{3x}\right)^2 \\ x \geqslant 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x + 2\sqrt{x+1} + 2 > 4x^2 + 4x\sqrt{3x} + 3x \\ x \geqslant 0\end{cases}.$$

Похоже, данный способ решения не эффективен и технически очень сложен.

Попробуем другой подход — введем подстановку:

$\sqrt{x+1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x + 1 = t^2$; $x = t^2 - 1$; $2x = 2\left(t^2 - 1\right)$;

$3x = 3\left(t^2 - 1\right)$.

Неравенство примет вид

$t + 1 > 2\left(t^2 - 1\right) + \sqrt{3\left(t^2 - 1\right)}$;

$-2t^2 + t + 3 > \sqrt{3\left(t^2 - 1\right)}$,

что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}-2t^2 + t + 3 \geqslant 0 \\ t^2 - 1 \geqslant 0 \\ \left(-2t^2 + t + 3\right)^2 > 3\left(t^2 - 1\right)\end{cases}$$

$\frac{3}{2}$ и -1 — корни уравнения $-2t^2 + t + 3 = 0$.

В последнем неравенстве системы раскрываем скобки:

$$\begin{cases}-2\left(t - \frac{3}{2}\right)(t + 1) \geqslant 0 \\ (t - 1)(t + 1) \geqslant 0 \\ 4t^4 + t^2 + 9 - 4t^3 - 12t^2 + 6t > 3t^2 - 3\end{cases};$$

$$\begin{cases} -\left(t - \frac{3}{2}\right)(t+1) \geqslant 0 \\ (t-1)(t+1) \geqslant 0 \\ 4t^4 - 4t^3 - 14t^2 + 6t + 12 > 0 \end{cases}$$

Этот способ решения также становится очень сложным технически.

Попробуем проанализировать знаки левой и правой частей исходного неравенства:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x - 1. \qquad (1)$$

1) Пусть $\sqrt{x+1} > \sqrt{3x}$ и $2x - 1 > 0$. Это равносильно системе

$$\begin{cases} 3x \geqslant 0 \\ x + 1 > 3x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Очевидно, что полученная система неравенств решений не имеет.

2) Пусть $\sqrt{x+1} > \sqrt{3x}$ и $2x - 1 < 0$, что равносильно системе

$$\begin{cases} 3x \geqslant 0 \\ x + 1 > 3x \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Решением системы является промежуток $\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$.

В этом случае $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 0$; $2x - 1 < 0$.

Следовательно, $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} > 2x - 1$ для любого $x \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right)$.

3) Пусть $\sqrt{x+1} < \sqrt{3x}$ и $2x - 1 > 0$, что противоречит исходному неравенству (1), и равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ x + 1 < 3x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Тогда $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x} < 0, \quad 2x - 1 > 0.$

Получили ложное утверждение: отрицательное число больше положительного.

4) При $x = \frac{1}{2}$, $0 > 0$ — решений нет.

Ответ: $\left[0; \frac{1}{2}\right)$.

Примечание. Иногда логический анализ более эффективен, чем технические приемы.

7. $\frac{1}{4}x > \left(\sqrt{1+x} - 1\right)\left(\sqrt{1-x} + 1\right)$.

Умножим и разделим правую часть неравенства на $\left(\sqrt{1+x} + 1\right)$:

$$\frac{1}{4}x > \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\sqrt{1+x}+1};$$

$$\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x} + 1\right) > (1 + x - 1)\left(\sqrt{1-x} + 1\right);$$

$$\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x} + 1\right) > x\left(\sqrt{1-x} + 1\right).$$

Перенесем $x\left(\sqrt{1-x} + 1\right)$ в левую часть неравенства, умножим его на 4, вынесем x за скобку:

$$x\left(\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3\right) > 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x} + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x} + 3 \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + x > 16(1 - x) + 24\sqrt{1-x} + 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + x < 16(1 - x) + 24\sqrt{1-x} + 9 \end{cases} \end{array}\right..$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x \leqslant 1 \\ 24\sqrt{1-x} < 17x - 24 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ 24\sqrt{1-x} > 17x - 24 \end{cases} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x \leqslant 1 \\ 17x \geqslant 24 \\ 24^2(1-x) < (17x-24)^2 \end{cases} \quad \varnothing . \\ \begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система неравенств решений не имеет.

Решением второй системы неравенств является любое значение $x \in [-1;\ 0)$.

Ответ: $[-1;\ 0)$.

8. $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0.$

Выполним подстановку $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} = t \geqslant 0$.

Тогда $\sqrt{\frac{12x}{x-2}} = t^2$, $\frac{12x}{x-2} = t^4$.

Исходное неравенство примет вид

$\frac{1}{2}t^4 - t^2 - 2t > 0.$

Умножаям на 2, получаем $t^4 - 2t^2 - 4t > 0$.

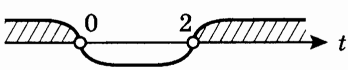
Пусть $f(t) = t^3 - 2t - 4$.

$f(2) = 0$, т.е. $f(t)$ кратно $(t - 2)$.

Получаем: $t(t-2)\left(t^2 + 2t + 2\right) > 0$.

Так как $t^2 + 2t + 2 > 0$ $(t > 0)$,

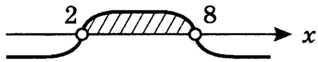
получаем: $t(t - 2) > 0$.



Поскольку $t \geqslant 0$, то решением неравенства является промежуток $(2;\ \infty)$.

Возвратимся к переменной x:

$$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 2; \quad \frac{12x}{x-2} > 16; \quad \frac{12x-16x+32}{x-2} > 0, \quad \frac{4(8-x)}{x-2} > 0.$$

Графическое решение: 

Ответ: $(2; 8)$.

9. $\sqrt{x+2\left(1-\sqrt{1+x}\right)} < \dfrac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5}$.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sqrt{x+2\left(1-\sqrt{1+x}\right)} = \sqrt{x+2-2\sqrt{1+x}} =$$

$$= \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5}; \quad \left|\sqrt{x+1}-1\right| < \frac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5}.$$

Отметим, что тогда

$$\frac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5} > 0. \qquad (1)$$

1) Если $\sqrt{x+1}-1 \geqslant 0$, то $\sqrt{x+1} \geqslant 1$; $x \geqslant 0$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x+1}-1 < \dfrac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5}. \end{cases}$$

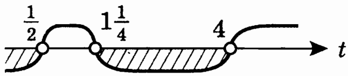
Выполним подстановку $\sqrt{1+x} = t \geqslant 0$.

Тогда $x+1 = t^2$; $2x = 2\left(t^2-1\right)$; $2x+3 = 2t^2+1 > 0$.

Получаем: $t-1 < \dfrac{2t^2+1}{4t-5}$.

Перенесем $\dfrac{2t^2+1}{4t-5}$ в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю, получаем $\dfrac{2t^2-9t+4}{4t-5} < 0$.

Убеждаемся, что числа 4 и $\dfrac{1}{2}$ — решения уравнения $2t^2-9t+4=0$. Получаем неравенство $\dfrac{2(t-4)\left(t-\frac{1}{2}\right)}{4\left(t-\frac{5}{4}\right)} < 0$.



Так как $\sqrt{x+1} \geqslant 1$, то $t \geqslant 1$, следовательно $1\frac{1}{4} < t < 4$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} < 4 \\ \sqrt{x+1} > 1\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 15 \\ x > \frac{9}{16} \end{cases}.$$

2) Если $\sqrt{x+1} - 1 < 0$, то $\sqrt{x+1} < 1$, $-1 \leqslant x < 0$.

Но $\frac{2x+3}{4\sqrt{1+x}-5} > 0$ (см. (1)),

следовательно $4\sqrt{1+x} - 5 > 0$

(так как на интервале $[-1;\ 0)$ $2x + 3 > 0$).

Получаем: $\begin{cases} \sqrt{x+1} < 1 \\ \sqrt{x+1} > 1\frac{1}{4} \end{cases}$. Эта система решений не имеет.

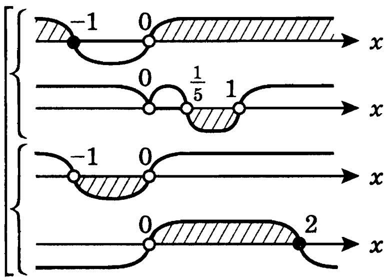
Ответ: $\left(\frac{9}{16};\ 15\right)$.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{2-x}{x}} - \frac{x+1}{2x}} \geqslant 0$.

Данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{\frac{2-x}{x}} > \frac{x+1}{2x}$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x+1}{2x} \geqslant 0 \\ \frac{2-x}{x} > \left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x+1}{2x} < 0 \\ \frac{2-x}{x} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Неравенство во второй строчке системы приведем к виду $\frac{5x^2-6x+1}{4x^2} < 0$.



Ответ: $\left(\frac{1}{5};\ 1\right)$.

11. $\sqrt{x+14-6\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+30-10\sqrt{x+5}} \leqslant 4$.

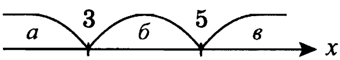
$\sqrt{x+14-6\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+30-10\sqrt{x+5}} \leqslant 4$;

$x+14-6\sqrt{x+5} = x+5-2\cdot 3\sqrt{x+5}+9 = \left(\sqrt{x+5}-3\right)^2$;

$x+30-10\sqrt{x+5} = x+5-2\cdot 5\sqrt{x+5}+25 = \left(\sqrt{x+5}-5\right)^2$;

Тогда $\sqrt{\left(\sqrt{x+5}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+5}-5\right)^2} \leqslant 4$,

т.е. $\left|\sqrt{x+5}-3\right|+\left|\sqrt{x+5}-5\right| \leqslant 4$.



а) $\sqrt{x+5}-3<0$, тогда $\begin{array}{l}\left|\sqrt{x+5}-3\right| = 3-\sqrt{x+5} \\ \left|\sqrt{x+5}-5\right| = 5-\sqrt{x+5}\end{array}$,

т.е. $\begin{cases}\sqrt{x+5}<3 \\ 3-\sqrt{x+5}+5-\sqrt{x+5} \leqslant 4\end{cases}$; $\begin{cases}\sqrt{x+5}<3 \\ \sqrt{x+5} \geqslant 2\end{cases}$;

$\begin{cases}x+5<9 \\ x+5 \geqslant 4\end{cases}$; $\begin{cases}x<4 \\ x \geqslant -1\end{cases}$ $[-1;\ 4)$.

б) $\begin{cases}\sqrt{x+5} \geqslant 3 \\ \sqrt{x+5}<5\end{cases}$,

тогда $\begin{array}{l}\left|\sqrt{x+5}-3\right| = \sqrt{x+5}-3 \\ \left|\sqrt{x+5}-5\right| = 5-\sqrt{x+5}\end{array}$, т.е. $\begin{cases} \sqrt{x+5} \geqslant 3 \\ \sqrt{x+5} < 5 \\ \sqrt{x+5} - 3 + 5 - \sqrt{x+5} \leqslant 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x+5 \geqslant 9 \\ x+5 < 25 \\ 2 \leqslant 4 \end{cases}$ $[4;\ 20)$.

в) $\sqrt{x+5} \geqslant 5$, тогда $\begin{array}{l} \left|\sqrt{x+5} - 3\right| = \sqrt{x+5} - 3 \\ \left|\sqrt{x+5} - 5\right| = \sqrt{x+5} - 5 \end{array}$,

т.е. $\begin{cases} \sqrt{x+5} \geqslant 5 \\ \sqrt{x+5} - 3 + \sqrt{x+5} - 5 \leqslant 4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x+5 \geqslant 25 \\ \sqrt{x+5} \leqslant 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geqslant 20 \\ x \leqslant 31 \end{cases}$ $[20;\ 31]$.

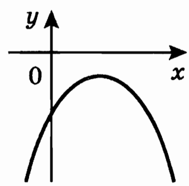
Ответ: $[-1;\ 31]$.

12. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{-x^2 + 2x + 3} > -x^2 + 3x - 6$.

Выглядит это неравенство технически очень громоздко. Для упрощения проанализируем его правую часть.

Пусть $y = -x^2 + 3x - 6$.

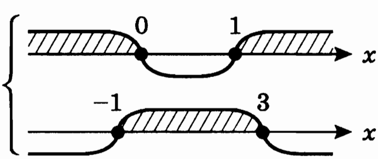
Так как $\begin{cases} a = -1 < 0 \\ D = -15 < 0 \end{cases}$, то



Значит $\forall x \quad -x^2 + 3x - 6 < 0$.

Итак, левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, значит неравенство верно для любых x из области определения.

Тогда $\begin{cases} x^2 - x \geqslant 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x(x-1) \geqslant 0 \\ -(x-3)(x+1) \geqslant 0 \end{cases}$.



$[-1;\ 0] \cup [1;\ 3]$

Ответ: $[-1;\ 0] \cup [1;\ 3]$.

Тренировочная работа 5

Решите неравенства 1–20.

1. $\sqrt{9-3x}+\sqrt{4-x}>\sqrt{2x+25}$.

2. $\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3}\geqslant\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$.

3. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+1>\sqrt{2x-1}$.

4. $\sqrt{x^3+2x-32}>x-2$.

5. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-8x+7}\geqslant\sqrt{x^2-24x+23}$.

6. $\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x^2-4x}}\leqslant\frac{x+1}{2\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}<2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

8. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}\leqslant 1$.

9. $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$.

10. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$.

11. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}>\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

12. $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\leqslant\sqrt{2-x+\sqrt{(x+2)\cdot x}}$.

13. $\sqrt{49-4x\sqrt{x^2-7}}\leqslant 2x-7$.

14. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}\geqslant\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

15. $\sqrt{10-3x}-2\sqrt{3+x}\leqslant\sqrt{2-x}$.

16. $(x-18)\cdot\sqrt{x^2+144}\leqslant x^2-9\cdot 36$.

17. $2x+5>2\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+5}$.

18. $x^2+4x\cdot\sqrt{x-1}\leqslant 12(x-1)$.

19. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2}\leqslant 1$.

20. $\sqrt{x^2-2x-\sqrt{x^2-3x-4}}>x+\frac{1}{2}$.

Решение тренировочной работы 5

1. $\sqrt{9-3x}+\sqrt{4-x}>\sqrt{2x+25}$.

Данное неравенство равносильно системе

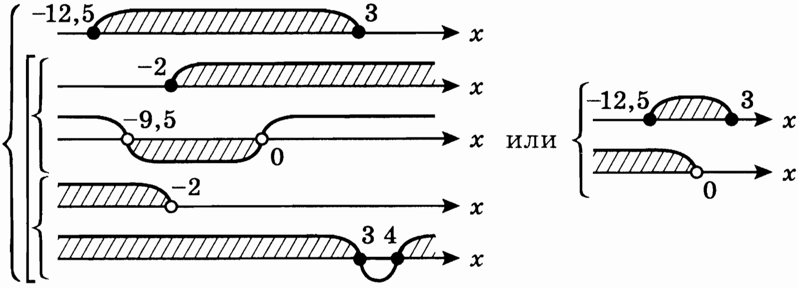
$$\begin{cases} 9-3x\geqslant 0\\ 4-x\geqslant 0\\ 2x+25\geqslant 0\\ 9-3x+2\sqrt{(9-3x)(4-x)}+4-x>2x+25 \end{cases}$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем

$$\begin{cases} x\leqslant 3\\ x\leqslant 4\\ x\geqslant -12{,}5\\ \sqrt{3\left(x^2-7x+12\right)}>3(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 3\\ x\geqslant -12{,}5\\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2\geqslant 0\\ 3\left(x^2-7x+12\right)>9(x+2)^2 \end{cases}\\ \begin{cases} x+2<0\\ (x-3)(x-4)\geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Приведем неравенство $3\left(x^2-7x+12\right)>9(x+2)^2$ к виду $2x^2+19x<0$.



О т в е т: $[-12{,}5;\ 0)$.

2. $\dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{2x+3} \geqslant \dfrac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x+3}$.

Запишем неравенство в виде

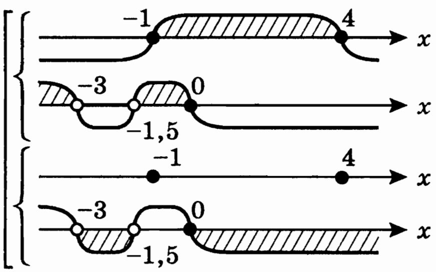
$$\sqrt{4+3x-x^2}\left(\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{x+3}\right) \geqslant 0$$

и приведем выражения в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{4+3x-x^2}\cdot\frac{-x}{(x+3)(2x+3)} \geqslant 0,$$

что равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{4+3x-x^2} \geqslant 0\\ -\dfrac{x}{(x+3)(2x+3)} \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{4+3x-x^2} \leqslant 0\\ -\dfrac{x}{(x+3)(2x+3)} \leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x^2+3x+4 \geqslant 0\\ -\dfrac{x}{(x+3)(2x+3)} \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-1\end{array}\right.\\ -\dfrac{x}{(x+3)(2x+3)} \leqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$



Вспомним, что $b\sqrt{a} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}ba^2 \geqslant 0\\ a \geqslant 0\end{cases}$.

Тогда можно получить более простое решение, если подставить $a = 4+3x-x^2$ и $b = \dfrac{-x}{(x+3)(2x+3)}$.

Ответ: $[-1;\ 0] \cup \{4\}$.

3. $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1 > \sqrt{2x-1}$.

Исходное неравенство можно записать так:

$$\frac{x^2-1}{2x}+1 > \sqrt{2x-1}.$$

D(H): $2x-1 \geqslant 0$;

D(H) $= \left[\dfrac{1}{2};\ \infty\right)$.

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x^2 + 2x - 1 > 2x\sqrt{2x-1} \end{cases} \quad \left(\text{на } \left[\frac{1}{2};\ \infty\right) \quad x^2 + 2x - 1 > 0\right).$$

Возведем в квадрат левую и правую части последнего неравенства, перенесем правую часть в левую и поделим почленно на x^2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x + 6 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 > 0 \end{cases}.$$

Выполним подстановку: $x + \frac{1}{x} = t$.

Тогда $x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2;\quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Получаем: $t^2 - 2 - 4t + 6 > 0;\quad (t-2)^2 > 0$ — верно для любого $t \neq 2$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{x} \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2};\ 1\right) \cup (1;\ \infty)$.

4. $\sqrt{x^3 + 2x - 32} > x - 2$.

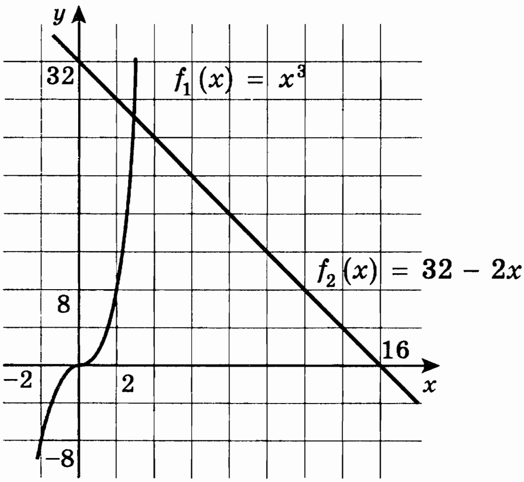
Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ x^3 + 2x - 32 > (x-2)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x^3 + 2x - 32 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Заметим, что система $\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x^3 + 2x - 32 \geqslant 0 \end{cases}$ не имеет решений. Выясним почему?

Пусть $f(x) = x^3 + 2x - 32$. Найдем графическое решение для неравенства $f(x) > 0$.

Введем обозначения: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 32 - 2x$. Необходимо выяснить, когда $f_1(x) > f_2(x)$ на промежутке $(-\infty;\ 2)$.



(оси разномасштабны)

Очевидно, что на промежутке $(-\infty;\ 2)$ справедливо неравенство $x^3 < 32 - 2x$.

Возвратимся к системе $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0 \\ x^3 + 2x - 32 > (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x^3 - x^2 + 6x - 36 > 0 \end{cases}.$$

Пусть $\varphi(x) = x^3 - x^2 + 6x - 36$.

$\varphi(3) = 0$, т.е. система принимает вид

$$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ (x-3)(x^2 + 2x + 12) > 0 \end{cases}.$$

$x^2 + 2x + 12 = (x+1)^2 + 11 > 0$ при любом x.

Получаем $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$ или $x > 3$.

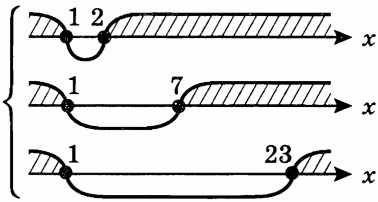
Ответ: $(3;\ \infty)$.

5. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 8x + 7} \geqslant \sqrt{x^2 - 24x + 23}$.

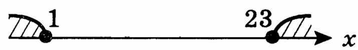
Представим подкоренные выражения в виде произведений:
$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-7)} \geqslant \sqrt{(x-1)(x-23)}$.

Перенесем $\sqrt{(x-1)(x-23)}$ в левую часть. Получим:
$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-7)} - \sqrt{(x-1)(x-23)} \geqslant 0$. (1)

D(H):



или



$D(H) = (-\infty;\ 1] \cup [23;\ \infty)$

Напомним, что $\sqrt{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; & a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}; & a \leqslant 0,\ b \leqslant 0 \end{cases}$.

1) Найдем решение при $x \leqslant 1$. Неравенство (1) приобретает вид $\sqrt{1-x}\left(\sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} - \sqrt{23-x}\right) \geqslant 0$, которое равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} \geqslant \sqrt{23-x} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \sqrt{1-x} \leqslant 0 \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{7-x} \leqslant \sqrt{23-x} \end{cases} \end{array}\right..$$

Возведем в квадрат последнее неравенство. Получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 1 \\ 2 - x + 2\sqrt{(2-x)(7-x)} + 7 - x \geqslant 23 - x \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x = 1 \\ 1 + \sqrt{6} \leqslant \sqrt{22} \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 1 \\ 2\sqrt{x^2 - 9x + 14} \geqslant 14 + x \end{cases} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Напомним, что $\sqrt{a} \geqslant b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \geqslant b^2 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases}\end{array}\right.$.

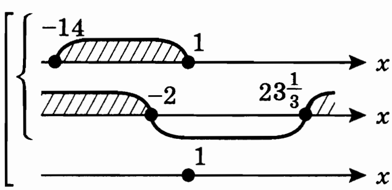
Получаем

а) $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant -14 \\ 4\left(x^2 - 9x + 14\right) \geqslant x^2 + 28x + 196 \end{cases} \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant -14 \\ 3x^2 - 64x - 140 \geqslant 0 \end{cases} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Убеждаемся, что числа $23\frac{1}{3}$ и -2 — решения уравнения $3x^2 - 64x - 140 = 0$. Получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant -14 \\ 3(x + 2)\left(x - 23\frac{1}{3}\right) \geqslant 0 \end{cases} \\ x = 1 \end{array}\right.$$



$-14 \leqslant x \leqslant -2$ или $x = 1$.

б) $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x < -14 \\ x^2 - 9x + 14 \geqslant 0 \end{cases}$ имеет решение $x < -14$.

Объединяем решения: $\left[\begin{array}{l} -14 \leqslant x \leqslant -2 \\ x < -14 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

2) Найдем решение при $x \geqslant 23$.

Неравенство (1) приобретает вид

$\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}-\sqrt{x-23}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 23 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x-7} \geqslant \sqrt{x-23} \end{cases}$.

Возведем в квадрат последнее неравенство:

$\begin{cases} x \geqslant 23 \\ x-2+2\sqrt{(x-2)(x-7)}+x-7 \geqslant x-23 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 23 \\ 2\sqrt{x^2-9x+14} \geqslant -x-14 \end{cases}$.

Отметим, что $-x-14 < 0$ при $x \geqslant 23$.

Ответ: $(-\infty;\ -2] \cup [23;\ \infty) \cup \{1\}$.

6. $\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x^2-4x}} \leqslant \frac{x+1}{2\sqrt{3}}$.

Данное неравенство равносильно системе

$\begin{cases} x^2-4x > 0 \\ 2\sqrt{3}\left(x^2-4x-5\right) \leqslant (x+1)\sqrt{x^2-4x} \end{cases}$.

Разложим выражение $\left(x^2-4x-5\right)$ на множители $(x-5)$ и $(x+1)$ и перенесем $(x+1)\sqrt{x^2-4x}$ в левую часть:

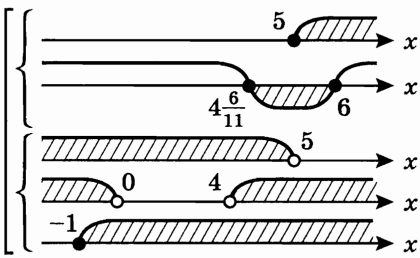
$\begin{cases} x^2-4x > 0 \\ (x+1)\left(2\sqrt{3}(x-5)-\sqrt{x^2-4x}\right) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ 2\sqrt{3}(x-5) \leqslant \sqrt{x^2-4x} \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \leqslant 0 \\ 2\sqrt{3}(x-5) \geqslant \sqrt{x^2-4x} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Последняя система решений не имеет, так как при $x \leqslant -1$ получается, что $\sqrt{x^2 - 4x} < 0$ $(x^2 - 4x > 0)$, а такого не может быть.

Тогда $\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2 - 4x} \geqslant 2\sqrt{3}(x - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 5 \\ x^2 - 4x \geqslant 12(x-5)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ x^2 - 4x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 5 \\ 11x^2 - 116x + 300 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 5 \\ x^2 - 4x > 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \end{array}\right. .$$



О т в е т: $[-1;\ 0) \cup (4;\ 6]$.

7. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} < 2 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$.

Возведем обе части неравенства в третью степень:

$1 + \sqrt{x} < 8 - 3 \cdot 4\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} - 1 + \sqrt{x}$.

Перенесем $1 + \sqrt{x}$ в правую часть и поделим выражение почленно на 6:

$0 < 1 - 2\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \left(1 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} \neq 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}.$

О т в е т: $(0;\ \infty)$.

8. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}\leqslant 1$.

Введем подстановку: $\sqrt{x+1}=t\geqslant 0$.

Тогда $x+1=t^2$; $x+2=t^2+1$; $x+5=t^2+4$.

Исходное неравенство примет вид

$\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+1-2t}\leqslant 1$.

Выделим полный квадрат:

$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-1)^2}\leqslant 1\Leftrightarrow|t-2|+|t-1|\leqslant 1$.

Найдем решение:

1) если $\begin{cases}t\leqslant 1\\2-t+1-t\leqslant 1\end{cases}$, то $\begin{cases}t\leqslant 1\\t\geqslant 1\end{cases}$ или $t=1$;

2) если $\begin{cases}1<t\leqslant 2\\2-t+t-1\leqslant 1\end{cases}$, то $\begin{cases}1<t\leqslant 2\\1=1\end{cases}$ или $1<t\leqslant 2$;

3) если $\begin{cases}t>2\\t-2+t-1\leqslant 1\end{cases}$, то $\begin{cases}t>2\\t\leqslant 2\end{cases}$, и решений нет.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

1) если $\sqrt{x+1}=1$, то $x=0$;

2) если $1<\sqrt{x+1}\leqslant 2$, то $0<x\leqslant 3$.

Ответ: $[0;\ 3]$.

9. $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$.

Введем подстановку: $\sqrt[4]{16-x}=t\geqslant 0$.

Тогда $\sqrt{16-x}=t^2$; $16-x=t^4$; $x=16-t^4$;

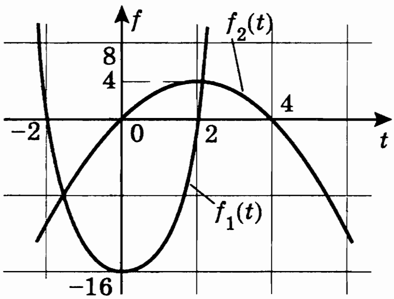
$x+4=20-t^4$.

Исходное неравенство примет вид $\sqrt{20-t^4}>2-t$ $(t\geqslant 0)$, что равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-t\geqslant 0\\20-t^4>4-4t+t^2\\t\geqslant 0\end{cases}\\\begin{cases}2-t<0\\20-t^4\geqslant 0\\t\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\leqslant t\leqslant 2\\t^4+t^2-4t-16<0\end{cases}\\\begin{cases}t>2\\t^4\leqslant 20\end{cases}\end{array}\right.$$

Уравнение $t^4 + t^2 - 4t - 16 = 0$ целых и рациональных корней не имеет. Обозначим $f(t) = t^4 + t^2 - 4t - 16$ и определим графически, когда $f(t) < 0$?

Построим графики функций $f_1(t) = t^4 - 16$ и $f_2(t) = 4t - t^2$.



(оси разномасштабны)

Очевидно, что на промежутке $[0;\ 2]$: $f_1(t) < f_2(t)$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 2 < t \leqslant \sqrt[4]{20} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant \sqrt[4]{20}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$0 \leqslant \sqrt[4]{16 - x} \leqslant \sqrt[4]{20}$$

или, возводя части неравенства в четвертую степень:

$$0 \leqslant 16 - x \leqslant 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4 \\ x \leqslant 16 \end{cases}.$$

Ответ: $[-4;\ 16]$.

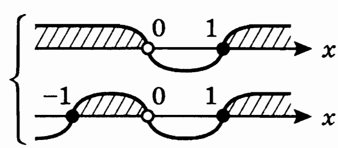
10. $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$.

Отметим, что:

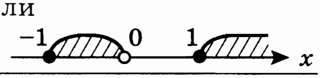
$x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{x^2 - x}$ на промежутке $[1;\ \infty)$,

$x\sqrt{\frac{x-1}{x}} = -\sqrt{x^2 - x}$ на промежутке $[-1;\ 0)$.

D(H): $\begin{cases} \frac{x-1}{x} \geqslant 0 \\ x - \frac{1}{x} \geqslant 0 \end{cases}$.



или



Возвращаемся к исходному неравенству:

$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \geqslant 0$.

Так как $\sqrt{\frac{x-1}{x}} \geqslant 0$, то $\frac{x-1}{x} \geqslant 0$.

Возведем в квадрат обе части неравенства:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} > \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{2(x-1)}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{x-1}{x} \\ \frac{x^2-1}{x} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > \frac{(x-1)^2}{x^2} + \frac{2(x-1)}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geqslant 0 \end{cases}.$$

Заметим, что правая часть первого неравенства всегда положительна, тогда вынесем за скобку $(x - 1)$ и получим

$$\begin{cases} (x - 1)\left(1 - \frac{x-1}{x^2} - \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right) > 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{x-1}{x^2} > \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2-x+1}{x^2} > \frac{2}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ x > 1 \end{cases}.$$

Умножим обе части первого неравенства системы на x^2:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 > 2\sqrt{x^2 - x} \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 - x} - 1\right)^2 > 0 \\ x > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x} \neq 1 \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases}.$$

Окончательное решение — $\left(1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$.

Ответ: $\left(1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \infty\right)$.

11. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}>\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

$$\text{D(H)}: \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 3x-2 \geqslant 0 \\ 4x-3 \geqslant 0 \\ 5x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{4}{5}.$$

Представим неравенство в виде:

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{5x-4}>\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x-2} \qquad (1)$$

Найдем решение, проанализировав знаки правой и левой частей этого неравенства.

а) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}>\sqrt{5x-4} \\ \sqrt{4x-3}>\sqrt{3x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>5x-4 \\ 4x-3>3x-2 \\ 5x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>1 \\ x \geqslant 0,8 \end{cases}.$

$x \in \varnothing$, т. е. такого варианта нет.

б) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}>\sqrt{5x-4} \\ \sqrt{4x-3}<\sqrt{3x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>5x-4 \\ 4x-3<3x-2 \\ 5x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<1 \\ x \geqslant 0,8 \end{cases}.$

Система имеет решение при любом $x \in [0,8;\ 1)$.

Так как левая часть (1) положительна, а правая отрицательна, то данное неравенство верно всегда на $[0,8;\ 1)$.

в) $\begin{cases} \sqrt{2x-1}<\sqrt{5x-4} \\ \sqrt{4x-3}>\sqrt{3x-2} \end{cases} \quad x>1.$

Когда левая часть неравенства меньше нуля, а правая часть больше нуля, это противоречит условию (1). Тогда на $(1;\ \infty)$ решения нет.

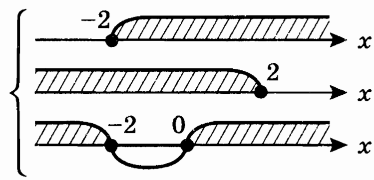
г) При $x = 1$, $0 > 0$ — решения нет.

Нет смысла рассматривать другие случаи, так как на промежутке $(-\infty;\ 0{,}8)$ неравенство не определено.

Ответ: $[0{,}8;\ 1)$.

12. $2\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \leqslant \sqrt{2 - x + \sqrt{(x+2)\cdot x}}$.

$$\text{D(H)}: \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ 2 - x \geqslant 0 \\ (x+2)x \geqslant 0 \end{cases}.$$



$\text{D(H)} = [0;\ 2] \cup \{-2\}$.

Возведем в квадрат обе части заданного неравенства и вынесем за скобку $\sqrt{x+2}$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2}\left[4\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}\right) - \sqrt{x}\right] \leqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \\ x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}\right) \leqslant \sqrt{x} \end{cases} \end{array}\right.$$

или после возведения в квадрат последнего неравенства

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 16\left(2\sqrt{4-x^2} + 4\right) \leqslant x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2\sqrt{4-x^2} \leqslant \frac{x}{16} - 4 \end{cases} \end{array}\right..$$

Используя свойство $\sqrt{a} \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \geqslant 0 \\ a \leqslant b^2 \end{cases}$, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{x}{16} - 4 \geqslant 0 \\ 4\left(4 - x^2\right) \leqslant \left(\frac{x-64}{16}\right)^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \varnothing.$$

Убеждаемся, что только $x = -2$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $\{-2\}$.

13. $\sqrt{49 - 4x\sqrt{x^2 - 7}} \leqslant 2x - 7$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 7 \geqslant 0 \\ 49 - 4x\sqrt{x^2 - 7} \geqslant 0 \\ 49 - 4x\sqrt{x^2 - 7} \leqslant (2x - 7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3{,}5 \\ 4x\sqrt{x^2 - 7} \leqslant 49 \\ (7 - 2x + 7)(7 + 2x - 7) \leqslant 4x\sqrt{x^2 - 7} \end{cases}$$

или после возведения в квадрат второго неравенства и приведения подобных членов в последнем

$$\begin{cases} 2x - 7 \geqslant 0 \\ 16x^4 - 112x^2 - 49^2 \leqslant 0. \\ \sqrt{x^2 - 7} \geqslant 7 - x \end{cases}$$

Числа $\frac{14-7\sqrt{53}}{4}$ и $\frac{14+7\sqrt{53}}{4}$ — корни уравнения

$16x^4 - 112x^2 - 49^2 = 0$ относительно x^2.

Тогда $\frac{14-7\sqrt{53}}{4} \leqslant 0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{14+7\sqrt{53}}{4}$ или

$0 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2}$.

Последнее неравенство системы равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7 - x \geqslant 0\\ x^2 - 7 \geqslant 49 - 14x + x^2\end{cases}\\ \begin{cases}7 - x < 0\\ x^2 - 7 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. .$$

Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases}3{,}5 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant 7\\ x \geqslant 4\end{cases}\\ \begin{cases}x > 7\\ x^2 \geqslant 7\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3{,}5 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2}\\ x \geqslant 4\end{cases}.$$

Можно доказать, что $\frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2} > 4$.

Ответ: $\left[4;\ \frac{\sqrt{14+7\sqrt{53}}}{2}\right]$.

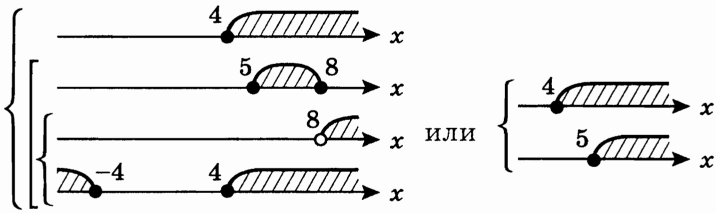
14. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x - 3} \geqslant \frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}x^2 - 16 \geqslant 0\\ x - 3 > 0\\ \sqrt{x^2 - 16} + x - 3 \geqslant 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geqslant 4\\ \sqrt{x^2 - 16} \geqslant 8 - x\end{cases}$$

или, используя второе свойство иррациональных неравенств, получаем

$$\begin{cases}x \geqslant 4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8 - x \geqslant 0\\ x^2 - 16 \geqslant 64 - 16x + x^2\end{cases}\\ \begin{cases}8 - x < 0\\ x^2 - 16 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geqslant 4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant 8\\ x \geqslant 5\end{cases}\\ \begin{cases}x > 8\\ (x - 4)(x + 4) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$$



О т в е т: $[5;\ \infty)$.

15. $\sqrt{10-3x}-2\sqrt{3+x}\leqslant\sqrt{2-x}$.

Перенесем $2\sqrt{3+x}$ в правую часть неравенства:

$$\sqrt{10-3x}\leqslant\sqrt{2-x}+2\sqrt{3+x}\Leftrightarrow$$

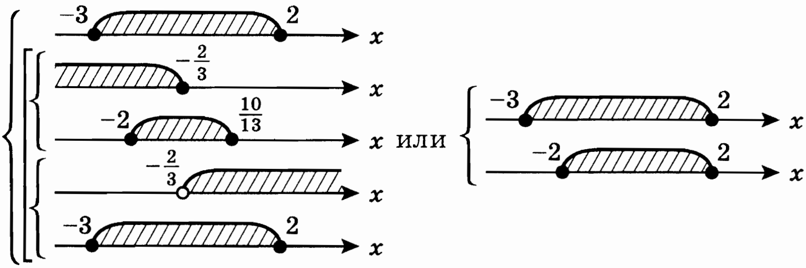
$$\Leftrightarrow\begin{cases}10-3x\geqslant 0\\ 2-x\geqslant 0\\ x+3\geqslant 0\\ 10-3x\leqslant 2-x+4\sqrt{(2-x)(3+x)}+4(3+x)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 2\\ 2\sqrt{(2-x)(3+x)}\geqslant -3x-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3x-2\geqslant 0\\ 4\left(-x^2-x+6\right)\geqslant 9x^2+12x+4\end{cases}\\ \begin{cases}-3x-2<0\\ (2-x)(x+3)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Приводим неравенство $4\left(-x^2-x+6\right)\geqslant 9x^2+12x+4$ к виду $13x^2+16x-20\leqslant 0$. Числа $\frac{10}{13}$ и -2 являются решениями уравнения $13x^2+16x-20=0$.

Получаем $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leqslant -\frac{2}{3}\\ -2\leqslant x\leqslant \frac{10}{13}\end{cases}\\ \begin{cases}x>-\frac{2}{3}\\ (2-x)(x+3)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$



Ответ: $[-2;\ 2]$.

16. $(x-18)\sqrt{x^2+144} \leqslant x^2 - 9\cdot 36$.

Перенесем $x^2 - 9\cdot 36$ в левую часть неравенства:

$$(x-18)\left[\sqrt{x^2+144}-(x+18)\right] \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-18 \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2+144} \leqslant x+18 \end{cases} \\ \begin{cases} x-18 \leqslant 0 \\ \sqrt{x^2+144} \geqslant x+18 \end{cases} \end{array}\right.$$

или, воспользовавшись свойствами неравенств, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 18 \\ x^2+144 \leqslant x^2+36x+324 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 18 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+18 \geqslant 0 \\ x^2+144 \geqslant x^2+36x+324 \end{cases} \\ \begin{cases} x+18 < 0 \\ x^2+144 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 18 \\ x \geqslant -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 18 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -18 \\ x \leqslant -5 \end{cases} \\ x < -18 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -5 \\ x \geqslant 18 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;\ -5] \cup [18;\ \infty)$.

17. $2x+5 > 2\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+5}$.

Выполним подстановки

$\sqrt{x+5} = a$ и $\sqrt{x} = b$.

$$\text{D(H)}: \begin{cases} x^2+5x \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ x+5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

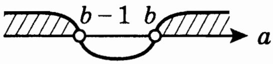
$$\Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

Тогда $x+5=a^2$; $x=b^2$; $2x+5=a^2+b^2$.

Исходное неравенство примет вид

$$a^2+b^2>2a\cdot b+b-a \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-b)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b+1)>0.$$



Возвращаясь к переменной x, получим

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+5}>\sqrt{x}\\ \sqrt{x+5}<\sqrt{x}-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+5>x\\ x\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+5<x-2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow\\ x\geqslant 0\\ \sqrt{x}>1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5>0\\ x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}<-2\\ x>1\end{cases} \quad \varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x\geqslant 0.$$

Ответ: $[0;\infty)$.

18. $x^2+4x\sqrt{x-1}\leqslant 12(x-1)$.

Добавим к обеим частям неравенства $4\left(\sqrt{x-1}\right)^2$ для того, чтобы в левой части выделить полный квадрат, тогда

$$x^2+2x\cdot 2\sqrt{x-1}+4\left(\sqrt{x-1}\right)^2\leqslant 12(x-1)+4\left(\sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x-1}\right)^2\leqslant 16(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\sqrt{x-1}\right)^2-\left(4\sqrt{x-1}\right)^2\leqslant 0.$$

Разложив по формуле $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, получим

$$\left(x+2\sqrt{x-1}+4\sqrt{x-1}\right)\left(x+2\sqrt{x-1}-4\sqrt{x-1}\right)\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+6\sqrt{x-1}\right)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)\leqslant 0.$$

Так как согласно D(H) $x \geqslant 1$, то $x + 6\sqrt{x-1} > 0$.

Тогда

$$x \leqslant 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x^2 \leqslant 4(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\{2\}$.

19. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \leqslant 1$.

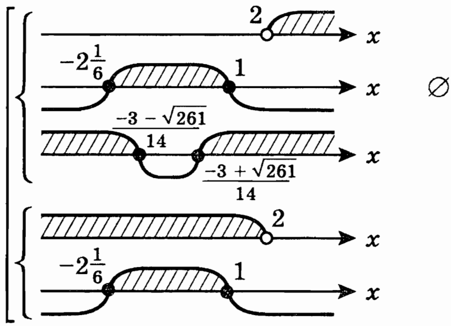
Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 > 0 \\ \sqrt{13 - 7x - 6x^2} \leqslant x - 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ \sqrt{13 - 7x - 6x^2} \geqslant x - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ 13 - 7x - 6x^2 \geqslant 0 \\ 13 - 7x - 6x^2 \leqslant x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ 13 - 7x - 6x^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ -6x^2 - 7x + 13 \geqslant 0 \\ 7x^2 + 3x - 9 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ 13 - 7x - 6x^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Числа 1 и $-\frac{13}{6}$ — корни уравнения $-6x^2 - 7x + 13 = 0$, числа $\frac{-3+\sqrt{261}}{14}$ и $\frac{-3-\sqrt{261}}{14}$ — корни уравнения $7x^2 + 3x - 9 = 0$.

Тогда
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2 \\ -6(x-1)\left(x + \frac{13}{6}\right) \geqslant 0 \\ 7\left(x - \left(\frac{-3+\sqrt{261}}{14}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-3-\sqrt{261}}{14}\right)\right) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ -6(x-1)\left(x + \frac{13}{6}\right) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right..$$



Ответ: $\left[-2\frac{1}{6};\ 1\right]$.

20. $\sqrt{x^2 - 2x - \sqrt{x^2 - 3x - 4}} > x + \frac{1}{2}$.

а) $\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - \sqrt{x^2 - 3x - 4} > x^2 + x + \frac{1}{4} \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2 - 3x - 4} < -3x - \frac{1}{4} \end{cases}$;

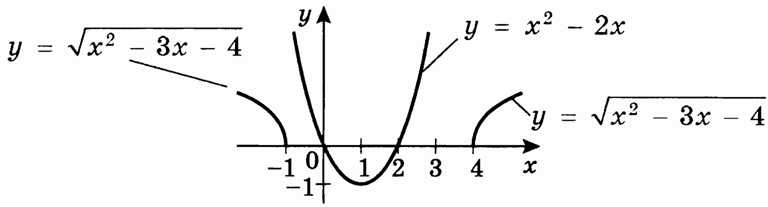
$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ -3x - \frac{1}{4} \geqslant 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{16} \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ x \leqslant -\frac{1}{12} \\ 8x^2 + 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{16} > 0 \\ (x - 4)(x + 1) \geqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ x \leqslant -\frac{1}{12} \\ 128x^2 + 72x + 65 > 0 \quad \forall x \\ (x - 4)(x + 1) \geqslant 0 \end{cases}$ $\varnothing$.

б) $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x^2 - 2x \geqslant \sqrt{x^2 - 3x - 4} \end{cases}$.

Решим неравенство $x^2 - 2x \geqslant \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ графически.



Видно, что $x^2 - 2x \geqslant \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ при $\forall x \in D(H)$.

D(H): $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$.
D(H) = $(-\infty;\ -1] \cup [4;\ \infty)$.

Но $x < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-\infty;\ -1]$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. $-x - 3 < \sqrt{9 - x}$.
2. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 3} < 3$.
3. $\sqrt{2x^2 - 2x + 5} - \sqrt{2x^2 - 2x} \geqslant 1$.
4. $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} > 1$.
5. $\left||x + 2| - 3\right| \leqslant \sqrt{3x^2 - 3}$.
6. $\dfrac{3}{\sqrt{x+4}+2} > \dfrac{2}{\sqrt{x+9}+3}$.
7. $\dfrac{9}{\sqrt{x^2-6x+18}} + \dfrac{10}{\sqrt{x^2-6x+34}} \geqslant 5$.
8. $2x + 5 > 2\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x} + \sqrt{x + 5}$.
9. $\sqrt{1 - x} \leqslant \dfrac{5x^2-20x+16}{x^2-12x+16}$.
10. $\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 6} > 2x + 3$.

Вариант 2

1. $x - 3 < \sqrt{9 + x}$.
2. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{-1 - 2x} < 3$.
3. $\sqrt{2x^2 + 2x + 5} - 1 \geqslant \sqrt{2x^2 + 2x}$.
4. $\sqrt{5x + 3 - 4\sqrt{5x - 1}} + \sqrt{5x + 8 - 6\sqrt{5x - 1}} > 1$.
5. $\left||2 - x| - 3\right| \leqslant \sqrt{3x^2 - 3}$.
6. $\dfrac{3}{\sqrt{4-2x}+3} > \dfrac{2}{\sqrt{9-2x}+3}$.
7. $\dfrac{9}{\sqrt{x^2+6x+18}} + \dfrac{10}{\sqrt{x^2+6x+34}} \geqslant 5$.
8. $4x + 5 > 2\sqrt{4x^2 + 10x} - \sqrt{2x} + \sqrt{2x + 5}$.
9. $\sqrt{1 + x} \leqslant \dfrac{5x^2+20x+16}{x^2+12x+16}$.
10. $\sqrt{3 - x} + 2x - 3 > \sqrt{6 - 3x}$.

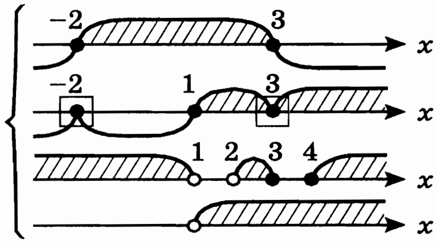
3 Системы иррациональных неравенств

Практикум 6

1. $\begin{cases}(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \geqslant 0\\ \sqrt{1+\frac{2}{x-2}} \geqslant \sqrt{\frac{6}{x-1}}\end{cases}$

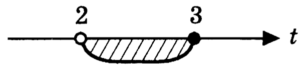
Так как $a\sqrt{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases}b \geqslant 0\\ a \cdot b^2 \geqslant 0\end{cases}$,

то $\begin{cases}6+x-x^2 \geqslant 0\\ (x-1)(6+x-x^2)^2 \geqslant 0\\ 1+\frac{2}{x-2} \geqslant \frac{6}{x-1}\\ x-1>0\end{cases}$; $\begin{cases}-(x-3)(x+2) \geqslant 0\\ (x-1)(x-3)^2(x+2)^2 \geqslant 0\\ \frac{x^2-7x+12}{(x-2)(x-1)} \geqslant 0\\ x>1\end{cases}$;



Ответ: $(2;3]$.

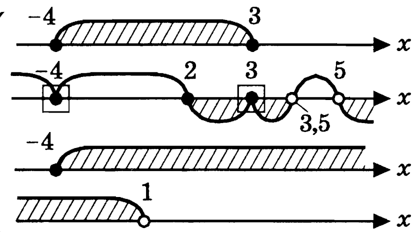
2. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5} \\ \dfrac{\sqrt{5-x}-3}{\sqrt{5-x}-2} \leqslant 0 \end{cases}$. Пусть $\sqrt{5-x} = t$



$$\begin{cases} \sqrt{12-x-x^2}\left(\dfrac{1}{2x-7} - \dfrac{1}{x-5}\right) \leqslant 0 \\ \sqrt{5-x} \leqslant 3 \\ \sqrt{5-x} > 2 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{12-x-x^2}\,\dfrac{2-x}{(2x-7)(x-5)} \leqslant 0 \\ 5-x \leqslant 9 \\ 5-x > 4 \end{cases};$$

Так как $a\sqrt{b} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ a \cdot b^2 \leqslant 0 \end{cases}$,

$$\begin{cases} 12-x-x^2 \geqslant 0 \\ \dfrac{(2-x)(12-x-x^2)^2}{(2x-7)(x-5)} \leqslant 0 \\ x \geqslant -4 \\ x < 1 \end{cases};$$

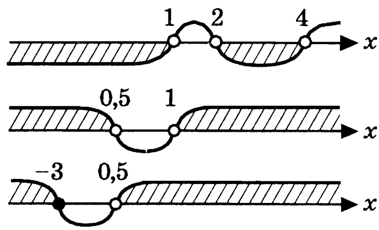


Ответ: $x = -4$.

3. $\begin{cases} \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{2-x} < 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+3}{2x-1}} < 2 \end{cases}$.

Так как $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a < b^2 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$, то $\begin{cases} \dfrac{4-x}{(x-1)(2-x)} < 0 \\ \dfrac{x+3}{2x-1} < 4 \\ \dfrac{x+3}{2x-1} \geqslant 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)} < 0 \\ \dfrac{7(x-1)}{2x-1} > 0 \\ \dfrac{x+3}{2x-1} \geqslant 0 \end{cases};$$

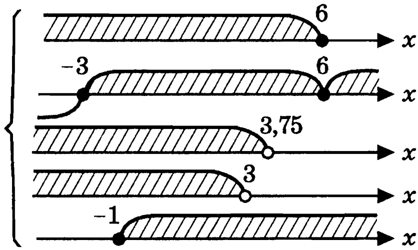


Ответ: $(-\infty; -3] \cup (2; 4)$.

4. $\begin{cases} (x+3)\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{15-4x}} \geqslant 0 \\ \dfrac{4-2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6-x \geqslant 0 \\ (x+3)(6-x)^2 \geqslant 0 \\ 15-4x > 0 \\ \sqrt{x+1} < 2 \end{cases}$;

$\sqrt{x+1}+1 > 0 \quad \forall x \in D(H)$

$\begin{cases} x \leqslant 6 \\ (x+3)(6-x)^2 \geqslant 0 \\ x < 3{,}75 \\ x < 3 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$;

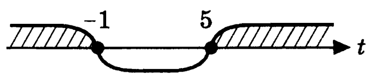


Ответ: $[-1;3)$.

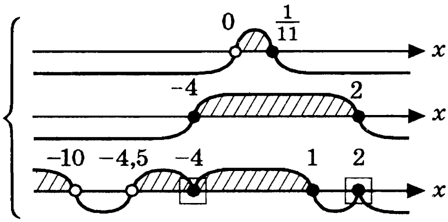
5. $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{2}{x}+3}+5 \leqslant \dfrac{3x+2}{x} \\ \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \geqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \end{cases}$; $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{2}{x}+3}+5 \leqslant \dfrac{3x+2}{x} \\ \sqrt{8-2x-x^2}\left(\dfrac{1}{2x+9}-\dfrac{1}{x+10}\right) \geqslant 0 \end{cases}$

Пусть $\sqrt{\dfrac{2}{x}+3} = t \quad (t \geqslant 0)$; $4t+5 \leqslant t^2$; $t^2-4t-5 \geqslant 0$;

$(t-5)(t+1) \geqslant 0$



$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{2}{x}+3} \geqslant 5 \\ \sqrt{\dfrac{2}{x}+3} \leqslant -1 \quad \varnothing \end{array}\right. \\ \sqrt{8-2x-x^2}\,\dfrac{-x+1}{(2x+9)(x+10)} \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{2(1-11x)}{x} \geqslant 0 \\ -(x+4)(x-2) \geqslant 0 \\ \dfrac{(1-x)(x+4)^2(x-2)^2}{(2x+9)(x+10)} \geqslant 0 \end{cases}$



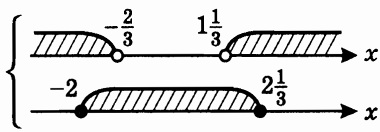
Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{11}\right]$.

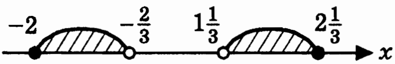
6. $\begin{cases} \sqrt{7-|3x-1|} < 2 \\ \dfrac{4x^2-8x-5}{\sqrt{3x^2-6x}} \leqslant \dfrac{2x+1}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 7-|3x-1| < 4 \\ 7-|3x-1| \geqslant 0 \\ 3x^2-6x > 0 \text{ при этом } \left(\sqrt{3x^2-6x} > 0\right) \\ 3(2x-5)(2x+1) - (2x+1)\sqrt{3x^2-6x} \leqslant 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} |3x-1| > 3 \\ |3x-1| \leqslant 7 \\ 3x(x-2) > 0 \\ (2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим отдельно решение системы модульных неравенств.

$\begin{cases} |3x-1| > 3 \\ |3x-1| \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-1 > 3 \\ 3x-1 < -3 \end{array}\right. \\ 3x-1 \leqslant 7 \\ 3x-1 \geqslant -7 \end{cases}$;





Рассмотрим систему неравенств на участках, учтя при этом, что $a \cdot b \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases}$.

Получим:

а) $\begin{cases} -2 \leqslant x < -\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ (2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}\right) \leqslant 0 \end{cases}$

Так как $x < -\frac{2}{3}$, то $2x+1<0$, значит $6x-15-\sqrt{3x^2-6x} \geqslant 0$

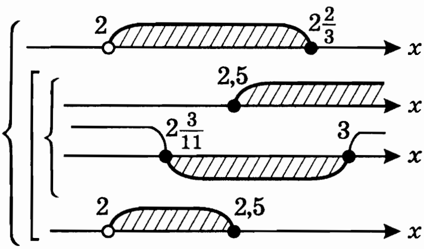
тогда $\begin{cases} -2 \leqslant x < -\dfrac{2}{3} \\ \sqrt{3x^2-6x} \leqslant 3(2x-5) \quad \varnothing \ (2x-5<0) \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1\dfrac{1}{3} < x \leqslant 2\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \\ (2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}\right) \leqslant 0 \end{cases}$

Так как $x > 2$, то $2x + 1 > 0$, значит $6x - 15 - \sqrt{3x^2 - 6x} \leqslant 0$,

тогда $\begin{cases} 2 < x \leqslant 2\frac{2}{3} \\ \sqrt{3x^2 - 6x} \geqslant 3(2x - 5) \end{cases}$; $\begin{cases} 2\frac{2}{3} \geqslant x > 2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2{,}5 \\ 3x(x-2) \geqslant 9(2x-5)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x \leqslant 2{,}5 \\ 3x(x-2) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$;

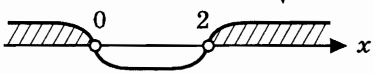
$\begin{cases} 2\frac{2}{3} \geqslant x > 2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2{,}5 \\ 11x^2 - 58x + 75 \leqslant 0 \end{cases} \\ 2 < x \leqslant 2{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 11x^2 - 58x + 75 = \\ = 11(x-3)\left(x - 2\frac{3}{11}\right) \end{pmatrix}$.



О т в е т: $\left(2; 2\frac{2}{3}\right]$.

Рассмотрим несколько иной способ решения системы.

Так как $D(\text{Н})$ $3x^2 - 6x > 0$ (для $\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 6x}} \geqslant 0$)

$3x(x - 2) > 0$ 

, то рассмотрим систему неравенств на каждом интервале отдельно.

а) $x > 2$ тогда $3x - 1 > 0$ значит $|3x - 1| = 3x - 1$

$\begin{cases} x > 2 \\ \sqrt{7 - 3x + 1} < 2 \\ 3(4x^2 - 8x - 5) \leqslant (2x + 1)\sqrt{3x^2 - 6x} \end{cases}$;

$\begin{cases} x > 2 \\ 8 - 3x < 4 \\ 8 - 3x \geqslant 0 \\ (2x + 1)\left(6x - 15 - \sqrt{3x^2 - 6x}\right) \leqslant 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > \dfrac{4}{3} \quad (2x+1>0) \\ x \leqslant 2\dfrac{2}{3} \\ \sqrt{3x(x-2)} \geqslant 3(2x-5) \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2,5 \leqslant x \leqslant 2\dfrac{2}{3} \\ 3x(x-2) \geqslant 9(4x^2-20x+25) \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x \leqslant 2,5 \\ \sqrt{3x(x-2)} > 3(2x-5) \end{cases} \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2,5 \leqslant x \leqslant 2\dfrac{2}{3} \\ 11x^2 - 58x + 75 \leqslant 0 \end{cases} \\ 2 < x \leqslant 2,5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left[2,5\,;\,2\dfrac{2}{3}\right] \\ \\ (2;\,2,5] \end{array}, \text{ т.е. } \left(2\,;\,2\dfrac{2}{3}\right]$$

б) $x < 0$ тогда $3x-1$, $|3x-1| = 1-3x$

$$\begin{cases} \sqrt{7+3x-1} < 2 \\ (2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

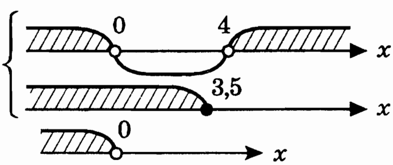
при $x < 0$ $(6x-15<0$, тогда $6x-15-\sqrt{3x^2-6x} < 0)$

$$\begin{cases} x < 0 \\ 6+3x < 4 \\ 6+3x \geqslant 0 \\ 2x+1 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < -\dfrac{2}{3} \\ x \geqslant -2 \\ x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \varnothing.$$

Ответ: $\left(2;\,2\dfrac{2}{3}\right]$.

7. $$\begin{cases} (x^2-7x+10)\left(\sqrt{7-2x}-x-4\right) > 0 \\ \dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{x^2-4x}} \leqslant \dfrac{x+2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$D(C.H.)$: $\begin{cases} x^2-4x > 0 \\ 7-2x \geqslant 0 \end{cases}$



($D(C.H.)$ — область определения системы неравенств.)

$$\begin{cases} (x-2)(x-5)\left(\sqrt{7-2x}-x-4\right) > 0 \\ \dfrac{(x-5)(x+2)}{\sqrt{x^2-4x}} \leqslant \dfrac{x+2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

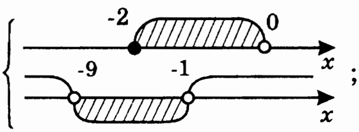
На $(-\infty;0)$ $(x-2)(x-5) > 0$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{7-2x} - x - 4 > 0 \\ (x+2)\left((x-5)2\sqrt{3} - \sqrt{x^2-4x}\right) \leqslant 0 \end{cases},$$

но $2\sqrt{3}(x-5) - \sqrt{x^2-4x} < 0$ при $x < 0$.

Значит $\begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{7-2x} > x+4 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} -2 \leqslant x < 0 \\ 7 - 2x > x^2 + 8x + 16 \end{cases} (x+4>0); \quad \begin{cases} -2 \leqslant x < 0 \\ x^2 + 10x + 9 < 0 \end{cases}.$$

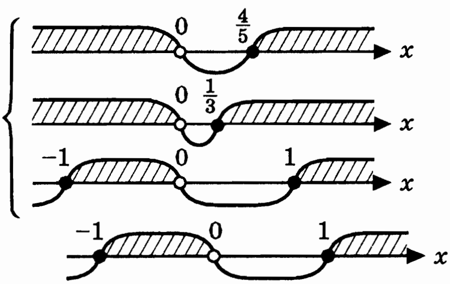


;

Ответ: $[-2;-1)$.

8. $\begin{cases} x\sqrt{5 - \frac{4}{x}} < -3 \\ \sqrt{9 - \frac{3}{x}} \leqslant 3x - \sqrt{3x - \frac{3}{x}} \end{cases}$

D(С.Н): $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{x} \geqslant 0 \\ \dfrac{9x-3}{x} \geqslant 0 \\ \dfrac{3x^2-3}{x} \geqslant 0 \end{cases}$



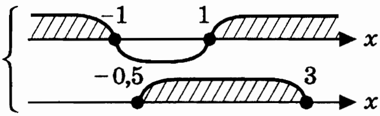
а) $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x\sqrt{5 - \frac{4}{x}} < -3 \end{cases}$ $\varnothing$

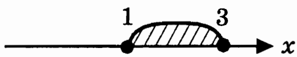
б) $\begin{cases} 0 > x \geqslant -1 \\ \sqrt{9 - \frac{3}{x}} \leqslant 3x - \sqrt{3x - \frac{3}{x}} \end{cases}$ $\varnothing$ $\left(3x - \sqrt{3x - \frac{3}{x}} < 0\right)$

Ответ: $\varnothing$.

9. $\begin{cases} \left||x-2|-3\right| \leqslant \sqrt{3x^2-3} \\ \sqrt{5x-2x^2+3} \leqslant 3-x \end{cases}$. $\quad D(C.H.)$: $\begin{cases} 3x^2-3 \geqslant 0 \\ 5x-2x^2+3 \geqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3x^2-3 \geqslant 0 \\ -(x-3)(2x+1) \geqslant 0 \end{cases}$;





$[1;3]$.

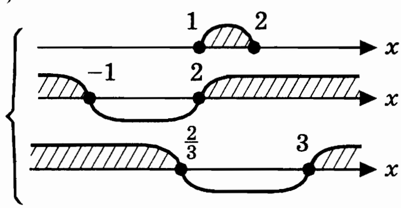
а) $1 \leqslant x \leqslant 2$, значит $|x-2| = 2-x$,

$\left||x-2|-3\right| = |2-x-3| = |-1-x| = |x+1|$

тогда система будет выглядеть следующим образом:

$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ |x+1| \leqslant \sqrt{3x^2-3} \\ 5x-2x^2+3 \leqslant (3-x)^2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2+2x+1 \leqslant 3x^2-3 \\ 5x-2x^2+3 \leqslant 9-6x+x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x^2-2x-4 \geqslant 0 \\ 3x^2-11x+6 \geqslant 0 \end{cases}$;



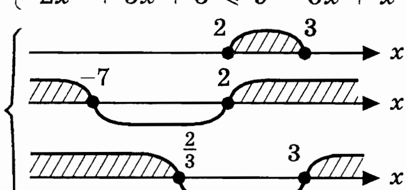
$\varnothing$

б) $2 \leqslant x \leqslant 3$, $|x-2| = x-2$

значит $\left||x-2|-3\right| = |x-2-3| = |x-5|$

$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ |x-5| \leqslant \sqrt{3x^2-3} \\ \sqrt{5x-2x^2+3} \leqslant 3-x \quad (3-x \geqslant 0) \end{cases}$;

$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ x^2-10x+25 \leqslant 3x^2-3 \\ -2x^2+5x+3 \leqslant 9-6x+x^2 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x^2+10x-28 \geqslant 0. \\ 3x^2-11x+6 \geqslant 0 \end{cases}$

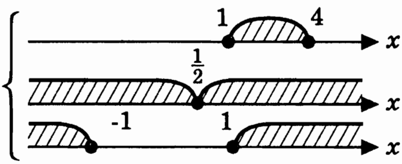


$x = 3$

Ответ: $\{3\}$.

10. $\begin{cases} 4x-5>\sqrt{1+4x(x-1)}+\sqrt{-8x^2+40x-32} \\ \left||x+3|-2\right| \leqslant \sqrt{3x^2-3} \end{cases}$

D(С.Н): $\begin{cases} -8x^2+40x-32 \geqslant 0 \\ 4x^2-4x+1 \geqslant 0 \\ 3(x^2-1) \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -8(x^2-5x+4) \geqslant 0 \\ (2x-1)^2 \geqslant 0 \\ 3(x-1)(x+1) \geqslant 0 \end{cases}$

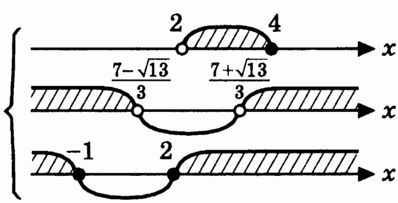


$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 4x-5>\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{-8(x^2-5x+4)}\,; \\ |x+3-2|^2 \leqslant 3x^2-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}25<x \leqslant 4 \quad (4x-5>0) \\ 4x-5>|2x-1|+\sqrt{-8(x^2-5x+4)} \quad (|2x-1|=2x-1)\,; \\ x^2+2x+1 \leqslant 3x^2-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}25<x \leqslant 4 \\ \sqrt{-8(x^2-5x+4)}<2(x-2)\,; \\ 2x^2-2x-4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2<x \leqslant 4 \\ -8x^2+40x-32<4(x^2-4x+4)\,; \\ x^2-x-2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2<x \leqslant 4 \\ 3x^2-14x+12>0\,; \\ (x-2)(x+1) \geqslant 0 \end{cases}$$



Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{3};4\right]$.

Тренировочная работа 6

1. $\begin{cases}(x+4)\sqrt{-x^2-9x-14} \geqslant 0 \\ \sqrt{1+\frac{2}{x+3}} \geqslant \sqrt{\frac{6}{x+4}}\end{cases}.$

2. $\begin{cases}\frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{2x+1} \leqslant \frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{x-1} \\ \frac{\sqrt{x+10}-3}{\sqrt{x+10}-2} \leqslant 0\end{cases}.$

3. $\begin{cases}\frac{x^2-x+2}{\sqrt{\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}}} \geqslant 0 \\ \sqrt{\frac{x+7}{2x+7}} < 2\end{cases}.$

4. $\begin{cases}\frac{(x-1)\sqrt{10-x}}{\sqrt{19-4x}} \geqslant 0 \\ \frac{4-2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} > 0\end{cases}.$

5. $\begin{cases}4\sqrt{\frac{2}{x-1}+3}+5 \leqslant \frac{3x-1}{x-1} \\ \frac{\sqrt{-x^2+9}}{2x+7} \geqslant \frac{\sqrt{-x^2+9}}{x+9}\end{cases}.$

6. $\begin{cases}\sqrt{7-|3x-4|} < 2 \\ \frac{4x^2-16x+7}{\sqrt{3(x^2-4x+3)}} \leqslant \frac{2x-1}{3}\end{cases}.$

7. $\begin{cases}(x^2-9x+18)\left(\sqrt{9-2x}-x-3\right) > 0 \\ \frac{x^2-5x-6}{\sqrt{x^2-6x+5}} < \frac{x+1}{2\sqrt{3}}\end{cases}.$

8. $\begin{cases}(1-x)\sqrt{\frac{1-5x}{1-x}} < -3 \\ \sqrt{\frac{6-9x}{1-x}}+3x < 3-\sqrt{\frac{3x^2-6x}{1-x}}\end{cases}.$

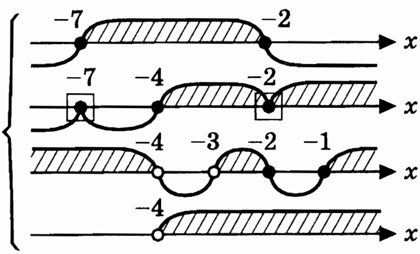
9. $\begin{cases}\left||x-5|-3\right| \leqslant \sqrt{3x^2-18x+24} \\ \sqrt{-2x^2+17x-30} \leqslant 6-x\end{cases}.$

10. $\begin{cases}4x+1 > \sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{-8x^2+8x+16} \\ \left||x+5|-2\right| \leqslant \sqrt{3x^2+12x+9}\end{cases}.$

Решение тренировочной работы 6

1. $$\begin{cases}(x+4)\sqrt{-x^2-9x-14}\geqslant 0\\ \sqrt{1+\frac{2}{x+3}}\geqslant\sqrt{\frac{6}{x+4}}\end{cases};\quad \begin{cases}-x^2-9x-14\geqslant 0\\ (x+4)(-x^2-9x-14)^2\geqslant 0\\ 1+\frac{2}{x+3}\geqslant\frac{6}{x+4}\\ \frac{6}{x+4}\geqslant 0\end{cases}$$

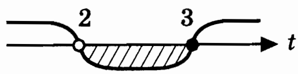
$$\begin{cases}-(x+2)(x+7)\geqslant 0\\ (x+4)(x+2)^2(x+7)^2\geqslant 0\\ \frac{(x+4)(x+3)+2(x+4)-6(x+3)}{(x+4)(x+3)}\geqslant 0\\ x+4>0\end{cases};\quad \begin{cases}-(x+2)(x+7)\geqslant 0\\ (x+4)(x+2)^2(x+7)^2\geqslant 0\\ \frac{x^2+3x+2}{(x+4)(x+3)}\geqslant 0\\ x>-4\end{cases}$$



Ответ: $(-3;2]$.

2. $$\begin{cases}\frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{2x+1}\leqslant\frac{\sqrt{-x^2-9x-8}}{x-1}\\ \frac{\sqrt{x+10}-3}{\sqrt{x+10}-2}\leqslant 0\end{cases}.$$

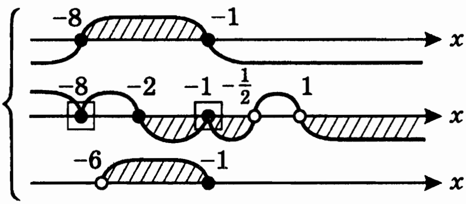
Пусть $\sqrt{x+10}=t\ \ (t\geqslant 0)$



$$\begin{cases}\sqrt{-x^2-9x-8}\cdot\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\leqslant 0\\ \sqrt{x+10}\leqslant 3\\ \sqrt{x+10}>2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{-x^2-9x-8}\,\frac{x+2}{(2x+1)(1-x)}\leqslant 0\\ x+10\leqslant 9\\ x+10>4\end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2-9x-8\geqslant 0\\ \dfrac{x+2}{(2x+1)(1-x)}(-x^2-9x-8)^2\leqslant 0\\ x\leqslant -1\\ x>-6\end{cases}; \quad \begin{cases} -(x+1)(x+8)\geqslant 0\\ \dfrac{x+2}{(2x+1)(1-x)}(x+1)^2(x+8)^2\leqslant 0\\ -6<x\leqslant -1\end{cases};$$

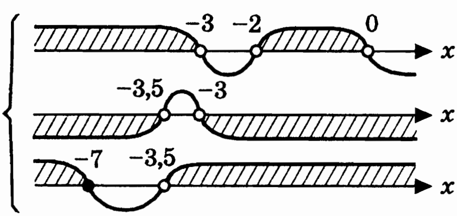


Ответ: $[-2;-1]$.

3. $\begin{cases} \dfrac{x^2-x+2}{\sqrt{\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}}}\geqslant 0\\ \sqrt{\dfrac{x+7}{2x+7}}<2\end{cases}.$

Так как $x^2-x+2>0$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{3}{4}>0$ $(\forall x)$,

то $\begin{cases} \dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}>0\\ \dfrac{x+7}{2x+7}<4\\ \dfrac{x+7}{2x+7}\geqslant 0\end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{-x}{(x+2)(x+3)}>0\\ \dfrac{-7(x+3)}{2x+7}<0\\ \dfrac{x+7}{2x+7}\geqslant 0\end{cases}$

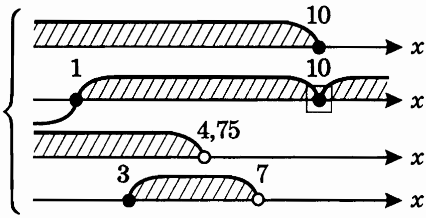


Ответ: $(-\infty;-7]\cup(-2;0)$.

4. $\begin{cases} \dfrac{(x-1)\sqrt{10-x}}{\sqrt{19-4x}}\geqslant 0\\ \dfrac{4-2\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1}>0\end{cases}.$ Так как $\dfrac{1}{\sqrt{19-4x}}>0$ на $(-\infty;\,4,75)$ и $\sqrt{x-3}+1>0$ на $[3;\,\infty)$,

то $\begin{cases} (x-1)\sqrt{10-x} \geqslant 0 \\ x < 4,75 \\ 4 - 2\sqrt{x-3} > 0 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 10 - x \geqslant 0 \\ (x-1)(10-x)^2 \geqslant 0 \\ x < 4,75 \\ \sqrt{x-3} < 2 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \leqslant 10 \\ (x-1)(10-x)^2 \geqslant 0 \\ x < 4,75 \\ x - 3 < 4 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$;



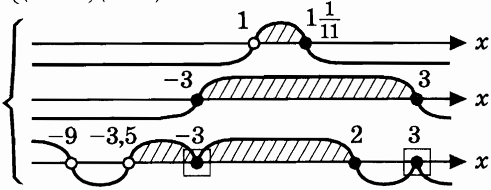
Ответ: $[3;\ 4,75)$.

5. $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{2}{x-1}+3} + 5 \leqslant \dfrac{3x-1}{x-1} \\ \dfrac{\sqrt{-x^2+9}}{2x+7} \geqslant \dfrac{\sqrt{-x^2+9}}{x+9} \end{cases}$; $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}} + 5 \leqslant \dfrac{3x-1}{x-1} \\ \sqrt{-x^2+9}\left(\dfrac{1}{2x+7} - \dfrac{1}{x+9}\right) \geqslant 0 \end{cases}$.

Пусть $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}} = t$, тогда $4t + 5 \leqslant t^2$; $t^2 - 4t - 5 \geqslant 0$; $(t-5)(t+1) \geqslant 0$ $(t+1 > 0)$, значит $t \geqslant 5$.

$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}} \geqslant 5 \\ \sqrt{-x^2+9}\left(\dfrac{2-x}{(2x+7)(x+9)}\right) \geqslant 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{x-1} \geqslant 25 \\ -x^2 + 9 \geqslant 0 \\ \dfrac{2-x}{(2x+7)(x+9)}(-x^2+9)^2 \geqslant 0 \end{cases}$;

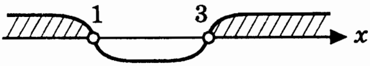
$\begin{cases} \dfrac{2(12-11x)}{x-1} \geqslant 0 \\ (3+x)(3-x) \geqslant 0 \\ \dfrac{2-x}{(2x+7)(x+9)}(x-3)^2(x+3)^2 \geqslant 0 \end{cases}$;



Ответ: $\left(1;\, 1\dfrac{1}{11}\right]$.

6. $\begin{cases} \sqrt{7-|3x-4|} < 2 \\ \dfrac{4x^2-16x+7}{\sqrt{3(x^2-4x+3)}} \leqslant \dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$.

Из второго неравенства следует, что $x^2 - 4x + 3 > 0$, т. е. $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) > 0$



а) Пусть $x < 1$, тогда $3x - 4 < 0$, значит $|3x-4| = 4 - 3x$

$$\begin{cases} \sqrt{7-4+3x} < 2 \\ 3(4x^2-16x+7) \leqslant (2x-1)\sqrt{3(x-1)(x-3)} \\ x < 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \sqrt{3(x+1)} < 2 \\ 3(2x-1)(2x-7) \leqslant (2x-1)\sqrt{3(x-1)(x-3)} \\ x < 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3(x+1) < 4 \\ x+1 \geqslant 0 \\ (2x-1)\left(3(2x-7) - \sqrt{3(x-1)(x-3)}\right) \leqslant 0 \\ x < 1 \end{cases};$$

Так как $2x - 1 < 0$ $\left(x < \dfrac{1}{3}\right)$,

то $\begin{cases} -1 \leqslant x < \dfrac{1}{3} \\ \sqrt{3(x-1)(x-3)} \leqslant 3(2x-7) \end{cases}$ $\varnothing$ $(2x - 7 < 0)$.

б) Пусть $x > 3$, тогда $3x - 4 > 0$, значит $|3x-4| = 3x - 4$.

$$\begin{cases} x > 3 \\ \sqrt{7-3x+4} < 2 \\ 3(2x-1)(2x-7) \leqslant (2x-1)\sqrt{3(x-1)(x-3)} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ 11 - 3x < 4 \\ 11 - 3x \geqslant 0 \\ (2x-1)\left(3(2x-7) - \sqrt{3(x-1)(x-3)}\right) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Так как при этом $2x - 1 > 0$, то $\begin{cases} 3 < x \leqslant 3\dfrac{2}{3} \\ \sqrt{3(x-1)(x-3)} \geqslant 3(2x-7) \end{cases}$;

$$\begin{cases} 3 < x \leqslant 3\frac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 3,5 \\ 3(x-1)(x-3) \geqslant 9(4x^2 - 28x + 49); \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 3,5 \\ 3(x-1)(x-3) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

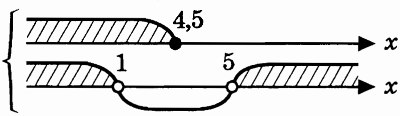
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3,5 \leqslant x \leqslant 3\frac{2}{3} \\ 11x^2 - 80x + 144 \leqslant 0 \end{cases}; \\ 3 < x \leqslant 3,5 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3,5 \leqslant x \leqslant 3\frac{2}{3} \\ (x-4)(11x-36) \leqslant 0 \end{cases}; \\ 3 < x \leqslant 3,5 \end{array}\right.$$

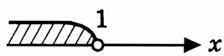
$$\left[\begin{array}{l} 3,5 \leqslant x \leqslant 3\frac{2}{3} \\ 3 < x \leqslant 3,5 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(3\,;\,3\frac{2}{3}\right]$.

7. $$\begin{cases} (x^2 - 9x + 18)(\sqrt{9-2x} - x - 3) > 0 \\ \dfrac{x^2-5x-6}{\sqrt{x^2-6x+5}} < \dfrac{x+1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

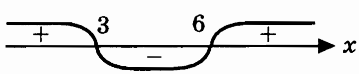
$D(С.Н.)$: $\begin{cases} 9 - 2x \geqslant 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$





$$\begin{cases} (x-3)(x-6)(\sqrt{9-2x} - x - 3) > 0 \\ \dfrac{(x-6)(x+1)}{\sqrt{(x-1)(x-5)}} < \dfrac{x+1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Учитывая, что $y = (x-3)(x-6)$



на промежутке $(-\infty\,;1)$ положительна,

имеем: $\begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{9-2x} > x + 3 \\ (x-6)(x+1)2\sqrt{3} < (x+1)\sqrt{(x-1)(x-5)} \end{cases}$;

$$\begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{9-2x} > x + 3 \\ (x+1)(2\sqrt{3}(x-6) - \sqrt{(x-1)(x-5)}) < 0 \end{cases};$$

$\left(2\sqrt{3}(x-6) - \sqrt{(x-1)(x-5)} < 0 \right)$

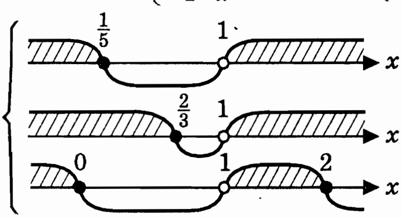
$$\begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{9 - 2x} > x + 3 \\ (x + 1) > 0 \end{cases}.$$ Так как $x + 3 > 0$,

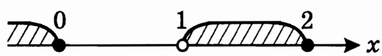
то $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 9 - 2x > x^2 + 6x + 9 \end{cases}$; $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 + 8x < 0 \end{cases}$.

Ответ: $(-1; 0)$.

8. $$\begin{cases} (1 - x)\sqrt{\dfrac{1-5x}{1-x}} < -3 \\ \sqrt{\dfrac{6-9x}{1-x}} + 3x < 3 - \sqrt{\dfrac{3x^2-6x}{1-x}} \end{cases}.$$

$$D(C.H.): \begin{cases} \dfrac{1-5x}{1-x} \geqslant 0 \\ \dfrac{6-9x}{1-x} \geqslant 0 \\ \dfrac{3x^2-6x}{1-x} \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{5x-1}{x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{3(3x-2)}{x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{3x(x-2)}{1-x} \geqslant 0 \end{cases}.$$





Рассмотрим неравенства отдельно на каждом из участков:

а) $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ (1 - x)\sqrt{\dfrac{1-5x}{1-x}} < -3 \end{cases}$ $\quad \varnothing \quad (1 - x > 0)$

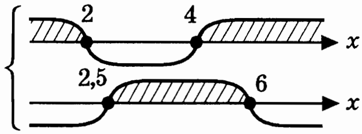
б) $\begin{cases} 1 < x \leqslant 2 \\ \sqrt{\dfrac{6-9x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{3x^2-6x}{1-x}} + 3x < 3 \end{cases}$ $\quad \varnothing \quad (3 < 3x \leqslant 6)$

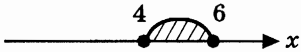
Ответ: $\varnothing$.

9. $$\begin{cases} \left||x - 5| - 3\right| \leqslant \sqrt{3x^2 - 18x + 24} \\ \sqrt{-2x^2 + 17x - 30} \leqslant 6 - x \end{cases}$$

$$D(C.H.): \begin{cases} 3x^2 - 18x + 24 \geqslant 0 \\ -2x^2 + 17x - 30 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geqslant 0 \\ -(2x^2 - 17x + 30) \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases}(x-4)(x-2) \geqslant 0\\ -(x-6)(2x-5) \geqslant 0\end{cases}$$



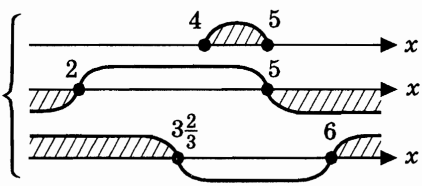


а) $\begin{cases}4 \leqslant x \leqslant 5\\ |5-x-3| \leqslant \sqrt{3(x-4)(x-2)}\\ -2x^2+17x-30 \leqslant (6-x)^2 \qquad (6-x>0)\end{cases}$

$$\begin{cases}4 \leqslant x \leqslant 5\\ (2-x)^2 \leqslant 3(x-4)(x-2);\\ 3x^2-29x+66 \geqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4 \leqslant x \leqslant 5\\ (x-2)(x-2-3(x-4)) \leqslant 0\\ 3(x-6)\left(x-\frac{11}{3}\right) \geqslant 0\end{cases};$$

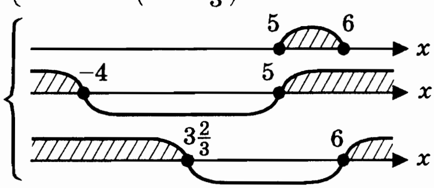
$$\begin{cases}4 \leqslant x \leqslant 5\\ (x-2)(10-2x) \leqslant 0;\\ (x-6)(3x-11) \geqslant 0\end{cases}$$



$\varnothing$.

б) $\begin{cases}5 \leqslant x \leqslant 6\\ |x-5-3| \leqslant \sqrt{3(x-4)(x-2)};\\ -2x^2+17x-30 \leqslant (6-x)^2\end{cases}$ $\begin{cases}5 \leqslant x \leqslant 6\\ (x-8)^2 \leqslant 3(x-4)(x-2);\\ 3x^2-29x+66 \geqslant 0\end{cases}$

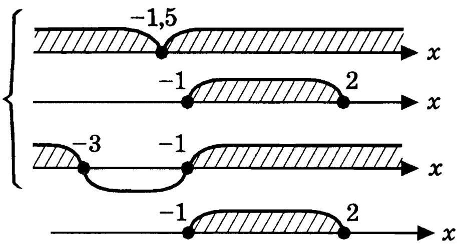
$\begin{cases}5 \leqslant x \leqslant 6\\ 2x^2-2x-40 \geqslant 0\\ 3(x-6)\left(x-\frac{11}{3}\right) \geqslant 0\end{cases};$ $\begin{cases}5 \leqslant x \leqslant 6\\ 2(x-5)(x+4) \geqslant 0;\\ (x-6)(3x-11) \geqslant 0\end{cases}$



Ответ: $\{6\}$.

10. $\begin{cases} 4x+1 > \sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{-8x^2+8x+16} \\ \big||x+5|-2\big| \leqslant \sqrt{3x^2+12x+9} \end{cases}$

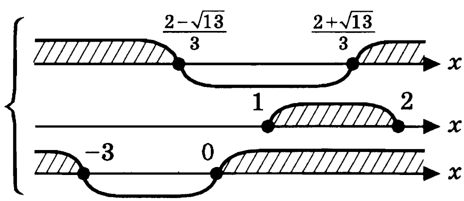
$$D(C.H.):\ \begin{cases} 4x^2+12x+9 \geqslant 0 \\ -8x^2+8x+16 \geqslant 0; \\ 3x^2+12x+9 \geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (2x+3)^2 \geqslant 0 \\ -8(x^2-x-2) \geqslant 0; \\ 3(x^2+4x+3) \geqslant 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4x+1 \geqslant |2x+3| + \sqrt{-8(x-2)(x+1)} \quad (|2x+3| = 2x+3) \\ |x+5-2| \leqslant \sqrt{3(x+1)(x+3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x-2 \geqslant \sqrt{-8(x-2)(x+1)}; \\ |x+3| \leqslant \sqrt{3(x+1)(x+3)} \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4(x-1)^2 \geqslant -8(x-2)(x+1) \\ (x+3)^2 \leqslant 3(x+1)(x+3) \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ 2(x-1) \geqslant \sqrt{-8(x-2)(x+1)} \\ (x+3)^2 \leqslant 3(x+1)(x+3) \end{cases} \end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 4(3x^2-4x-3) \geqslant 0 \\ 2x^2+6x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ \varnothing \qquad (x-1<0) \\ 2x^2+6x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $\left[\frac{2+\sqrt{13}}{3};\ 2\right]$.

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{18+3x-x^2}}{4-x} \geqslant 0 \\ \sqrt{12} \geqslant \sqrt{x^2-4x} \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{3x^2+19x+6}{\sqrt{20-x-x^2}} \geqslant 0 \\ \dfrac{7\sqrt{3-x}}{15} < \dfrac{8\sqrt{3-x}+9}{14} \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (x^2-4x-32)\sqrt{169-x^2} \leqslant 0 \\ (x^2-3x-28)\sqrt{13-x} \leqslant 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{19-x}{7+x}} + 10\sqrt{\dfrac{7+x}{19-x}} \leqslant 7 \\ \sqrt{16-x} + \sqrt{4+x} < 6 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+7} \geqslant 2x+7 \\ \dfrac{(x-2)\sqrt{x^2-5x+4}}{5-x} \leqslant 0 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \sqrt{6-x} - |x-5| + \sqrt{x-4} \geqslant 2 \\ \sqrt{x^3-5x^2+6x} \geqslant x-2 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x^2+5x+6 < 3\sqrt{(x+1)(x+4)} \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+5} < \sqrt{4x+7} + \sqrt{5x+9} \end{cases}.$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + 1 < \sqrt{2x-1} \\ x^2 + 4x\sqrt{x-1} \leqslant 12(x-1) \end{cases}.$

9. $\begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \\ \sqrt{x^3+3x} > x^2-6x+3 \end{cases}.$

10. $\begin{cases} \sqrt{9-\dfrac{9}{x}} < x - \sqrt{x-\dfrac{9}{x}} \\ \dfrac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leqslant \sqrt{4x-3} \end{cases}.$

Вариант 2

1. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{18-3x-x^2}}{4+x} \geqslant 0 \\ \sqrt{12} \geqslant \sqrt{x^2+4x} \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{3x^2-19x+6}{\sqrt{20+x-x^2}} \geqslant 0 \\ \dfrac{7\sqrt{3+x}}{15} < \dfrac{8\sqrt{3+x}+9}{14} \end{cases}.$

3. $\begin{cases} (x^2+3x-28)\sqrt{13+x} \leqslant 0 \\ (x^2+4x-32)\sqrt{169-x^2} \leqslant 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} 10\sqrt{\dfrac{7-x}{19+x}} + \sqrt{\dfrac{19+x}{7-x}} \leqslant 7 \\ \sqrt{4-x} + \sqrt{x+16} < 6 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+5x+4}}{x+5} \geqslant 0 \\ \sqrt{3x^2+6x+7} \geqslant 7-2x \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \sqrt{6-2x} - |2x-5| + \sqrt{2x-4} \geqslant 2 \\ \sqrt{2x^3-5x^2+3x} \geqslant x-1 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x^2-5x+6 < 3\sqrt{(x-1)(x-4)} \\ \sqrt{3-2x} + \sqrt{5-3x} < \sqrt{7-4x} + \sqrt{9-5x} \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{4x} + 1 < \sqrt{4x-1} \\ x^2 + 2x\sqrt{2x-1} \leqslant 3(2x-1) \end{cases}.$

9. $\begin{cases} \sqrt{4-\sqrt{12+2x}} < \sqrt{8+x} \\ \sqrt{2x^3+24x} > x^2-12x+12 \end{cases}.$

10. $\begin{cases} 3\sqrt{1-\dfrac{2}{x}} < 0,5x - \sqrt{0,5x-\dfrac{18}{x}} \\ \dfrac{x^3-64+12x(4-x)}{8|3-2x|} \leqslant \sqrt{2x-3} \end{cases}.$

4

Тренировочные карточки

Карточка 1

1. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$
2. $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+9}.$
3. $\sqrt[3]{3+2x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{12(x+1)}.$
4. $3\sqrt{-x^2+x+6}>-2(2x-1).$
5. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\le 3.$

Карточка 2

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+2}=4.$
2. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$
3. $\sqrt[4]{77-x}+\sqrt[4]{20+x}=5.$
4. $\sqrt{x^2-5x+6}<2x-3.$
5. $\frac{4x+3+\sqrt{2-x}}{x}\geqslant 2.$

Карточка 3

1. $\sqrt{4x-1}-\sqrt{x-2}=3$.
2. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$.
3. $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{-x}=3+x$.
4. $\frac{\sqrt{x+2}}{x}<1$.
5. $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x+1}\leqslant x^2-2x-3$.

Карточка 4

1. $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$.
2. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)}=2$.
3. $\sqrt[3]{2x\left(4x^2+3\right)-1-12x^2}+x=x^2-11$.
4. $\sqrt{3x^2-22x-16}>2x-7$.
5. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$.

Карточка 5

1. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$.
2. $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.
3. $\sqrt{8-x+2\sqrt{7-x}}+\sqrt{1-x-\sqrt{7-x}}=4$.
4. $\sqrt{2-x}>\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$.
5. $\left(\sqrt{x+3}+x-3\right)\left(\sqrt{4x+5}+x-4\right)\leqslant 0$.

Карточка 6

1. $\sqrt{x+4}+2\sqrt{x+1}=\sqrt{x+20}$.
2. $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5$.
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.
4. $\sqrt{-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. $\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{1-x}\leqslant x^2+2x-3$.

Решение карточки 1

1. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4.$

Перенесем $\sqrt{2x-3}$ в правую часть и возведем в квадрат обе части уравнения:

$4x+1=16-8\sqrt{2x-3}+2x-3$

или $4\sqrt{2x-3}=6-x.$

Возведем в квадрат обе части уравнения еще раз:

$16(2x-3)=36-12x+x^2;$

$$x^2-44x+84=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=42\\x=2\end{array}\right..$$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа 42 и 2. Сделав проверку, убеждаемся, что число 2 является его корнем, а 42 не является его корнем.

Ответ: $x=2$.

2. $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+9}.$

Выполним подстановку $\sqrt{x^2+x+2}=t\geqslant 0$.

Тогда $x^2+x+2=t^2$; $x^2+x+7=t^2+5$;

$3x^2+3x+9=3t^2+3.$

Тогда исходное уравнение примет вид

$t+\sqrt{t^2+5}=\sqrt{3t^2+3}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$t^2+2t\sqrt{t^2+5}+t^2+5=3t^2+3\Leftrightarrow 2t\sqrt{t^2+5}=t^2-2.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$4t^2\left(t^2+5\right)=t^4-4t^2+4$; $3t^4+24t^2-4=0.$

Числа $\frac{-12+2\sqrt{39}}{3}$ и $-\frac{12+2\sqrt{39}}{3}$ являются корнями уравнения $3t^4+24t^2-4=0$ относительно t^2.

Заметим, что $\frac{-12+2\sqrt{39}}{3} \in [0;\ \infty)$, а $-\frac{12+2\sqrt{39}}{3} \notin [0;\ \infty)$

Тогда $t^2 = \frac{2\sqrt{39}-12}{3}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$x^2 + x + 2 = \frac{2\sqrt{39}-12}{3}$.

Анализируя полученное уравнение, убеждаемся, что $\frac{2\sqrt{39}-12}{3} < 1$, так как $2\sqrt{39} < 15$, но $x^2 + x + 2 > 1$, так как $x^2 + x + 1 > 0$ для любых x.

Следовательно, заданное уравнение решений не имеет.

Ответ: решения нет.

3. $\sqrt[3]{3 + 2x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{12(x + 1)}$.

Напомним, что $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$3 + 2x + x + 3\sqrt[3]{3 + 2x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{3 + 2x} + \sqrt[3]{x}\right) = 12(x + 1)$.

Заменим $\sqrt[3]{3 + 2x} + \sqrt[3]{x}$ на $\sqrt[3]{12(x + 1)}$, тогда

$3 + 3x + 3\sqrt[3]{3 + 2x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{12(x + 1)} = 12(x + 1)$.

Поделим почленно на 3:

$\sqrt[3]{3 + 2x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{12(x + 1)} = 3(x + 1)$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$(3 + 2x)\,x \cdot 12(x + 1) = 27(x + 1)^3 \Leftrightarrow$

$3(x + 1)\left((3 + 2x)\,x \cdot 4 - 9(x + 1)^2\right) = 0$;

$3(x + 1)\left(x^2 + 6x + 9\right) = 0$.

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа -1 и -3.

Сделав проверку, убеждаемся, что числа -1 и -3 действительно являются его корнями.

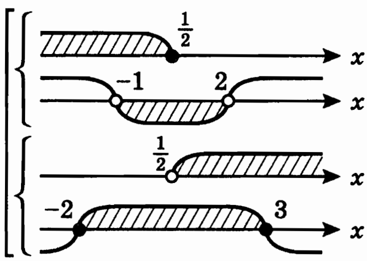
Ответ: $\{-1;\ -3\}$.

4. $3\sqrt{-x^2+x+6} > -2(2x-1)$.

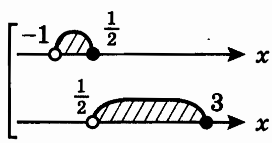
Данное неравенство равносильно $3\sqrt{-x^2+x+6} > 2-4x$, что, в свою очередь, равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-4x \geqslant 0\\ 9\left(-x^2+x+6\right) > 4-16x+16x^2\end{cases}\\ \begin{cases}2-4x < 0\\ -x^2+x+6 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant \frac{1}{2}\\ 25x^2-25x-50 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x > \frac{1}{2}\\ -(x-3)(x+2) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leqslant \frac{1}{2}\\ 25(x+1)(x-2) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x > \frac{1}{2}\\ -(x-3)(x+2) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$



или



Ответ: $(-1;\ 3]$.

5. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x} \leq 3$.

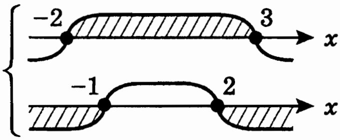
Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}3-x \geqslant 0\\ x+2 \geqslant 0\\ x+2+2\sqrt{(x+2)(3-x)}+3-x \leqslant 9\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \leqslant 3\\ x \geqslant -2\\ \sqrt{-x^2+x+6} \leqslant 2\end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части последнего неравенства и решим уравнение $-x^2 + x + 2 = 0$:

$$\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -2 \\ -(x-2)(x+1) \leqslant 0 \end{cases}.$$



или

Ответ: $[-2;\ -1] \cup [2,\ 3]$.

Решение карточки 2

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+2}=4$.

Перенесем $\sqrt{x-1}$ в правую часть и возведем в квадрат обе части уравнения:

$\sqrt{2x+2}=4-\sqrt{x-1}$, тогда

$2x+2=16-8\sqrt{x-1}+x-1$.

Перенесем $2x+2$ в правую часть, а $8\sqrt{x-1}$ — в левую, и еще раз возведем в квадрат обе части получившегося уравнения $8\sqrt{x-1}=13-x$:

$64(x-1)=169-26x+x^2$.

Следовательно, решениями исходного уравнения могут быть числа $45+\sqrt{1792}$ и $45-\sqrt{1792}$.

Сделать проверку технически очень сложно, поэтому проверим равносильность переходов.

а) $\sqrt{2x+2}=4-\sqrt{x-1}$.

Условием равносильности перехода является

$4-\sqrt{x-1}\geqslant 0$,

то есть чтобы $\sqrt{x-1}\leqslant 4$.

$\sqrt{x-1}\leqslant 4$ выполняется при $1\leqslant x\leqslant 17$.

$x=45+\sqrt{1792}$ не принадлежит промежутку $[1;\ 17]$.

Принадлежит ли $45-\sqrt{1792}$ данному промежутку?

Так как $45-\sqrt{1792}=45-16\sqrt{7}$ и $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$,

то $41{,}6<16\sqrt{7}<43{,}2$;

тогда $41{,}6<\sqrt{1792}<43{,}2$; $-41{,}6>-\sqrt{1792}>-43{,}2$;

прибавим к обеим частям число 45, получим

$3{,}4>45-\sqrt{1792}>1{,}8$.

Следовательно, $x=45-\sqrt{1792}\in[1;\ 17]$.

б) Если учесть, что из $8\sqrt{x-1} = 13 - x$ следует требование $x \leqslant 13$, то необходимо проверить и истинность того, что $45 - 16\sqrt{7} \in [1;\ 13] \subset D(y) = [1;\ \infty)$.

Но $45 - 16\sqrt{7} < 13$, так как $1{,}8 < 45 - \sqrt{1792} < 3{,}4$.

Ответ: $\left\{45 - \sqrt{1792}\right\}$.

2. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x - 1$.

Так как

$x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2$

и $x - 2\sqrt{x-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$,

то $\left|\sqrt{x-1} + 1\right| + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = x - 1$. (1)

Возможны два случая:

1) $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, то есть $x \geqslant 2$.

Значит, $\begin{array}{l} \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = \sqrt{x-1} - 1 \\ \left|\sqrt{x-1} + 1\right| = \sqrt{x-1} + 1 \end{array}$ на $[2;\ \infty)$.

Тогда уравнение (1) приобретает вид:

$\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = x - 1;$

$2\sqrt{x-1} - (x - 1) = 0;$

$\sqrt{x-1}\left(2 - \sqrt{x-1}\right) = 0;$ $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$

2) $\sqrt{x-1} \leqslant 1$, т. е. $1 \leqslant x \leqslant 2$, следовательно,

$\left|\sqrt{x-1} - 1\right| = 1 - \sqrt{x-1}$.

Тогда

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Ответ: $x = 5$.

3. $\sqrt[4]{77-x}+\sqrt[4]{20+x}=5.$

Выполним подстановку: $\sqrt[4]{20+x}=t\geqslant 0.$

Тогда $20+x=t^4$; $x=t^4-20$; $77-x=97-t^4$.

Исходное уравнение примет вид

$\sqrt[4]{97-t^4}=5-t$ $(t\leqslant 5)$.

Возведем обе части уравнения в четвертую степень:

$97-t^4=625-4\cdot 5^3\cdot t+6\cdot 5^2\cdot t^2-4\cdot 5\cdot t^3+t^4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^4-10t^3+75t^2-250t+264=0.$

Обозначим $f(t)=t^4-10t^3+75t^2-250t+264.$

Заметим, что $f(3)=0$, тогда

$$\begin{array}{l|l}
t^4-10t^3+75t^2-250t+264 & t-3 \\
\underline{t^4-3t^3} & \overline{t^3-7t^2+54t-88} \\
\quad -7t^3+75t^2 & \\
\quad \underline{-7t^3+21t^2} & \\
\qquad 54t^2-250t & \\
\qquad \underline{54t^2-162t} & \\
\qquad\quad -88t+264 & \\
\qquad\quad \underline{-88t+264} &
\end{array}$$

Обозначим $\varphi(t)=t^3-7t^2+54t-88$, $\varphi(2)=0$, тогда

$$\begin{array}{l|l}
t^3-7t^2+54t-88 & t-2 \\
\underline{t^3-2t^2} & \overline{t^2-5t+44} \\
\quad -5t^2+54t & \\
\quad \underline{-5t^2+10t} & \\
\qquad 44t-88 & \\
\qquad \underline{44t-88} &
\end{array}$$

Запишем левую часть уравнения в виде произведения

$(t-3)(t-2)\left(t^2-5t+44\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=2\end{array}\right.\in[0;\ 5].$

Уравнение $t^2-5t+44=0$ решений не имеет, так как его дискриминант $D<0$.

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{20+x}=3\\ \sqrt[4]{20+x}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=61\\ x=-4\end{array}\right..$$

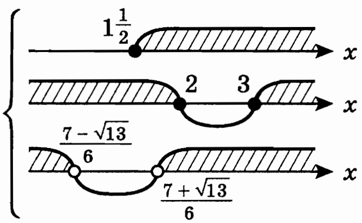
Ответ: $\{-4;\ 61\}$.

4. $\sqrt{x^2-5x+6}<2x-3$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}2x-3\geqslant 0\\ x^2-5x+6\geqslant 0\\ x^2-5x+6<4x^2-12x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 1{,}5\\ (x-2)(x-3)\geqslant 0.\\ 3x^2-7x+3>0\end{cases}$$

Числа $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$ и $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$ — корни уравнения $3x^2-7x+3=0$.



Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{6};\ 2\right]\cup[3;\ \infty)$.

5. $\frac{4x+3+\sqrt{2-x}}{x}\geqslant 2$.

Перенесем 2 в левую часть и приведем к общему знаменателю:

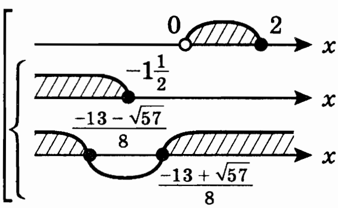
$$\frac{2x+3+\sqrt{2-x}}{x}\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3+\sqrt{2-x}\geqslant 0\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+3+\sqrt{2-x}\leqslant 0\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{2-x} \geqslant -2x-3 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{2-x} \leqslant -2x-3 \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant 2 \\ \begin{cases} -2x-3 \geqslant 0 \\ 2-x \geqslant 0 \\ x < 0 \\ 2-x \leqslant 4x^2+12x+9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant 2 \\ \begin{cases} x \leqslant -1,5 \\ x \leqslant 2 \\ x < 0 \\ 4x^2+13x+7 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Числа $-\frac{13+\sqrt{57}}{8}$ и $\frac{-13+\sqrt{57}}{8}$ — корни уравнения $4x^2+13x+7=0$. Тогда получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant 2 \\ \begin{cases} x \leqslant -1,5 \\ x \leqslant 2 \\ x < 0 \\ 4\left(x+\frac{13+\sqrt{57}}{8}\right)\left(x-\frac{\sqrt{57}-13}{8}\right) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$



Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{13+\sqrt{57}}{8}\right] \cup (0;\ 2]$.

Решение карточки 3

1. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3$.

D(У): $\begin{cases} 4x - 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x \geqslant 2$.

Перенесем $\sqrt{x-2}$ в правую часть и возведем обе части уравнения $\sqrt{4x-1} = 3 + \sqrt{x-2}$ в квадрат:

$4x - 1 = 9 + 6\sqrt{x-2} + x - 2$ или $6\sqrt{x-2} = 3x - 8$.

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$9x^2 - 84x + 136 = 0$.

Решения последнего уравнения: $\frac{42+6\sqrt{15}}{9}$ и $\frac{42-6\sqrt{15}}{9}$ могут быть решениями и исходного уравнения.

Проверим равносильность переходов.

1) $3 + \sqrt{x-2} \geqslant 0$, для $x \in [2, \infty)$ (учитывая D(У)) — первый переход. Корни $\frac{42\pm6\sqrt{15}}{9} \in [2, \infty)$.

2) $3x - 8 \geqslant 0$; для $x \geqslant 2\frac{2}{3}$ — второй переход.

Корень $\frac{42+6\sqrt{15}}{9} \in \left[2\frac{2}{3};\ \infty\right)$.

Принадлежит ли данному промежутку число $\frac{42-6\sqrt{15}}{9}$?

$\frac{42-6\sqrt{15}}{9} - \frac{8}{3} = \frac{18-6\sqrt{15}}{9} < 0$,

т. е. $\frac{42-6\sqrt{15}}{9} \notin \left[2\frac{2}{3};\ \infty\right)$.

Ответ: $x = \frac{42+6\sqrt{15}}{9}$.

2. $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3$.

Выполним подстановку: $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x^3 + x^2 - 1 = t^2$; $x^3 + x^2 + 2 = t^2 + 3$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt{t^2 + 3} = 3 - t$.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 + 3 = 9 - 6t + t^2 \\ 3 - t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \leqslant 3 \end{cases} \Rightarrow t = 1.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{x^3 + x^2 - 1} = 1$ или $x^3 + x^2 - 2 = 0$.

Пусть $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(x)$ кратно $(x - 1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - x^2} & x^2 + 2x + 2 \\ 2x^2 - 2 & \\ -\underline{2x^2 - 2x} & \\ 2x - 2 & \\ -\underline{2x - 2} & \end{array}$$

Уравнение $x^2 + 2x + 2$ корней не имеет $(D < 0)$.

$x = 1$ — единственное решение.

Ответ: $x = 1$.

3. $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2 - x} + \sqrt{-x} = 3 + x$.

Выполним подстановки: $\sqrt{2 - x} = a \geqslant 0$ и $\sqrt{-x} = b \geqslant 0$.

Тогда $x = -b^2$; $x = 2 - a^2$; $a^2 - b^2 = 2$.

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ab + a + b = -b^2 + 3 \\ a^2 - b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + b)(b + 1) = 3 \\ (a + b)(a - b) = 2 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{3}{b+1} \\ (a - b)\frac{3}{b+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3}{b+1} \\ 3a - 3b = 2b + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3}{b+1} \\ a = \frac{5b+2}{3} \end{cases}.$$

Подставляя найденное значение a в первое уравнение, находим, чему равно b.

Решая уравнение $8b^2 + 10b - 7 = 0$, убеждаемся, что это — числа $\frac{1}{2}$ и $-\frac{7}{4}$, причем $-\frac{7}{4} \notin [0; \infty)$.

Тогда, возвращаясь к переменной x, получаем

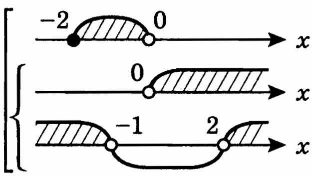
$\sqrt{-x} = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{4}$.

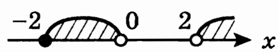
4. $\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1$.

Перенесем число 1 в левую часть неравенства и приведем к общему знаменателю: $\frac{\sqrt{x+2}-x}{x} < 0$, что равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2} > x \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2} < x \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ x > 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ (x-2)(x+1) > 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$



или



Ответ: $[-2;\ 0) \cup (2;\ \infty)$.

5. $\left(x^2 - 4x + 3\right)\sqrt{x+1} \leqslant x^2 - 2x - 3$.

Разложим на множители трехчлены $x^2 - 4x + 3$ и $x^2 - 2x - 3$:

$(x-3)(x-1)\sqrt{x+1} - (x-3)(x+1) \leqslant 0$;

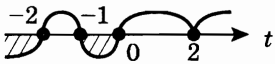
$(x-3)\sqrt{x+1}\left(x - 1 - \sqrt{x+1}\right) \leqslant 0$.

Выполним подстановку: $\sqrt{x+1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x + 1 = t^2$; $x - 3 = t^2 - 4$; $x - 1 = t^2 - 2$.

Неравенство примет вид

$\left(t^2 - 4\right)t\left(t^2 - 2 - t\right) \leqslant 0$; $(t-2)(t+2)t(t-2)(t+1) \leqslant 0$.



Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} \leqslant -2 \\ \begin{cases} \sqrt{x+1} \leqslant 0 \\ \sqrt{x+1} \geqslant -1 \end{cases} \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \\ x = 3 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{-1;\ 3\}$.

Решение карточки 4

1. $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5.$

Перенесем $\sqrt{x+4}$ в правую часть и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$2x-6=25-10\sqrt{x+4}+x+4;\quad 10\sqrt{x+4}=35-x,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases}35-x\geqslant 0\\100(x+4)=1225-70x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 35\\x^2-170x+825=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 35\\\left[\begin{array}{l}x=165\\x=5\end{array}\right.\end{cases}.$$

Ответ: $x=5$.

2. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)}=2.$

Выполним подстановки: $\sqrt{6-x}=a\geqslant 0$ и $\sqrt{x-2}=b\geqslant 0$.

Тогда $6-x=a^2$; $x-2=b^2$; $a^2+b^2=4$.

Получаем систему $\begin{cases}a+b+2\sqrt{ab}=2\\a^2+b^2=4\end{cases}.$

Заменим

$$\begin{cases}a+b=t\\\sqrt{ab}=z\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=t^2-2z^2.$$

Система примет вид

$$\begin{cases}t+2z=2\\t^2-2z^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2(1-z)\\(2(1-z))^2-2z^2=4\end{cases}.$$

Решая систему, находим корни:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=4\\t=-6\end{cases}\\\begin{cases}z=0\\t=2\end{cases}\end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменным a и b, получаем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{ab} = 4\\ a + b = -6 \notin (0;\ \infty]\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{ab} = 0\\ a + b = 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0\\ b = 2\end{cases}\\ \begin{cases}b = 0\\ a = 2\end{cases}\end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{6 - x} = 0\\ \sqrt{x - 2} = 2\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x - 2} = 0\\ \sqrt{6 - x} = 2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 6\\ x = 2\end{array}\right..$$

Ответ: $\{2;\ 6\}$.

3. $\sqrt[3]{2x(4x^2 + 3) - 1 - 12x^2} + x = x^2 - 11.$

Напомним, что $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Преобразуем подкоренное выражение:

$2x(4x^2 + 3) - 1 - 12x^2 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$.

Исходное уравнение равносильно

$\sqrt[3]{(2x - 1)^3} + x = x^2 - 11;\quad 2x - 1 + x = x^2 - 11.$

Решая квадратное уравнение $x^2 - 3x - 10 = 0$, находим его корни: 5 и -2.

Ответ: $\{-2;\ 5\}$.

4. $\sqrt{3x^2 - 22x - 16} > 2x - 7.$

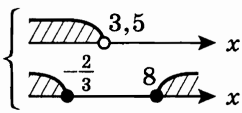
Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x - 7 \geqslant 0\\ 3x^2 - 22x - 16 > 4x^2 - 28x + 49\end{cases}\\ \begin{cases}2x - 7 < 0\\ 3x^2 - 22x - 16 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 3,5\\ x^2 - 6x + 65 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x < 3,5\\ 3x^2 - 22x - 16 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$

Уравнение $x^2 - 6x + 65 = 0$ корней не имеет ($D < 0$). Числа 8 и $-\frac{2}{3}$ — корни уравнения $3x^2 - 22x - 16 = 0$.

Получаем: $\begin{cases} x < 3,5 \\ 3(x-8)\left(x+\frac{2}{3}\right) \geqslant 0 \end{cases}$.



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

5. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > 1$.

Перенесем $\sqrt{x-1}$ в правую часть уравнения:

$$\sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ x - 1 \geqslant 0 \\ x + 2 > 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ \sqrt{x-1} < 1 \end{cases}.$$

После возведения в квадрат получим:

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x < 2 \end{cases}.$$

Ответ: $[1; 2)$.

Решение карточки 5

1. $\sqrt{5x+7} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}$.

$$D(y): \begin{cases} 5x+7 \geqslant 0 \\ 3x+1 \geqslant 0 \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{7}{5} \\ x \geqslant -\frac{1}{3} \\ x \geqslant -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{3}.$$

$\sqrt{5x+7} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$5x + 7 = 3x + 1 +$

$+ 2\sqrt{(3x+1)(x+3)} + x + 3;$

$2\sqrt{(3x+1)(x+3)} = x + 3.$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$4(3x+1)(x+3) = x^2 + 6x + 9.$

Корнями уравнения $11x^2 + 34x + 3 = 0$ являются числа $-\frac{1}{11}$ и -3, но $-3 \notin \left[-\frac{1}{3};\ \infty\right)$. Проверка подстановкой подтверждает, что $x = -\frac{1}{11}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = -\frac{1}{11}$.

2. $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6$.

Выполним подстановку $\sqrt{12-x} = a \geqslant 0$.

Тогда $12 - x = a^2$; $x = 12 - a^2$; $x + 24 = 36 - a^2$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt[3]{36-a^2} = 6 - a$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$36 - a^2 = 6^3 - 3 \cdot 6^2 \cdot a + 3 \cdot 6 \cdot a^2 - a^3;$

$a^3 - 19a^2 + 108a - 180 = 0.$

Пусть $f(a) = a^3 - 19a^2 + 108a - 180$.

$f(3) = 0$, т. е. $f(a)$ кратно $(a - 3)$.

Получаем

$$(a-3)(a^2 - 16a + 60) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 6 \\ a = 10 \end{array}\right. .$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{aligned}\sqrt{12-x}&=3\\ \sqrt{12-x}&=6\\ \sqrt{12-x}&=10\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}12-x&=9\\ 12-x&=36\\ 12-x&=100\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}x&=3\\ x&=-24\\ x&=-88\end{aligned}\right..$$

Ответ: $\{-88;\ -24;\ 3\}$.

3. $\sqrt{8-x+2\sqrt{7-x}}+\sqrt{1-x-\sqrt{7-x}}=4.$

Выполним подстановку $\sqrt{7-x}=t\geqslant 0$.

Тогда $7-x=t^2$; $1-x=t^2-6$; $8-x=t^2+1$.

Исходное уравнение примет вид

$\sqrt{t^2+1+2t}+\sqrt{t^2-t-6}=4$; $\quad |t+1|+\sqrt{t^2-t-6}=4$,

но так как $t\geqslant 0$, то

$t+1+\sqrt{t^2-t-6}=4$; $\quad \sqrt{t^2-t-6}=3-t$.

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3-t\geqslant 0\\ t^2-t-6=9-6t+t^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\leqslant 3\\ t=3\end{cases}.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{7-x}=3 \Rightarrow 7-x=9$; $\quad x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

4. $\sqrt{2-x}>\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$.

Перенесем $\sqrt{-3-2x}$ в левую часть неравенства:

$\sqrt{2-x}+\sqrt{-3-2x}>\sqrt{7-x}$, что равносильно системе

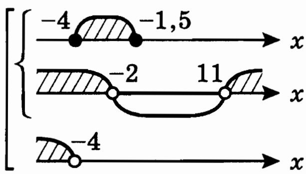
$$\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ -3-2x\geqslant 0\\ 7-x\geqslant 0\\ 2-x+2\sqrt{(2-x)(-3-2x)}-3-2x>7-x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\leqslant -1{,}5\\ \sqrt{2x^2-x-6}>4+x\end{cases} \Leftrightarrow$$

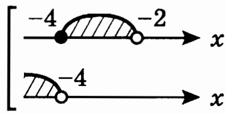
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -1{,}5 \\ x + 4 \geqslant 0 \\ 2x^2 - x - 6 > x^2 + 8x + 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -1{,}5 \\ 4 + x < 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Числа -2 и 11 — корни уравнения $x^2 - 9x - 22 = 0$, следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant -1{,}5 \\ (x + 2)(x - 11) > 0 \end{cases} \\ x < -4 \end{array}\right..$$



или



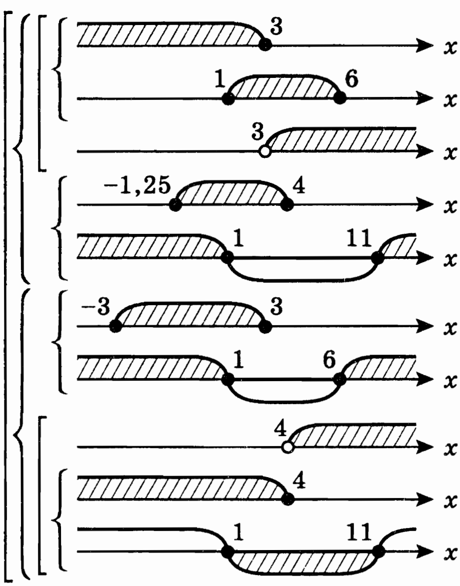
Ответ: $(-\infty;\ -2)$.

5. $\left(\sqrt{x+3} + x - 3\right)\left(\sqrt{4x+5} + x - 4\right) \leqslant 0$.

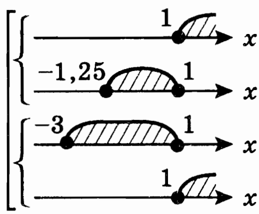
Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} \geqslant 3 - x \\ \sqrt{4x+5} \leqslant 4 - x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} \leqslant 3 - x \\ \sqrt{4x+5} \geqslant 4 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ x + 3 \geqslant 9 - 6x + x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x < 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} 4 - x \geqslant 0 \\ 4x + 5 \geqslant 0 \\ 4x + 5 \leqslant 16 - 8x + x^2 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \\ x + 3 \leqslant 9 - 6x + x^2 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 - x < 0 \\ 4x + 5 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - x \geqslant 0 \\ 4x + 5 \geqslant 16 - 8x + x^2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ x^2 - 7x + 6 \leqslant 0 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x > 3 \\ x \geqslant -3 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ x \geqslant -1,25 \\ x^2 - 12x + 11 \geqslant 0 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -3 \\ x^2 - 7x + 6 \geqslant 0 \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x > 4 \\ x \geqslant -1,25 \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ x^2 - 12x + 11 \leqslant 0 \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right. ; \quad
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ (x - 1)(x - 6) \leqslant 0 \end{array}\right. \\
x > 3
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ x \geqslant -1,25 \\ (x - 1)(x - 11) \geqslant 0 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -3 \\ (x - 1)(x - 6) \geqslant 0 \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l}
x > 4 \\
\left\{\begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ (x - 1)(x - 11) \leqslant 0 \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right. .$$



или



т. е. $x = 1$.

Данное неравенство можно решить значительно проще.

Выполним подстановку: $\sqrt{x+3} = a \geqslant 0$ и $\sqrt{4x+5} = b \geqslant 0$.

Тогда $x + 3 = a^2$; $x - 3 = a^2 - 6$;

$4x + 5 = b^2$; $x = \frac{b^2-5}{4}$; $x - 4 = \frac{b^2-21}{4}$.

Исходное неравенство примет вид:

$$(a^2 + a - 6)\left(b + \frac{b^2-21}{4}\right) \leqslant 0;$$

$$(a+3)(a-2)(b^2 + 4b - 21) \leqslant 0;$$

$$(a+3)(a-2)(b+7)(b-3) \leqslant 0.$$

Так как $a + 3 > 0$, $b + 7 > 0$, то должно выполняться $(a-2)(b-3) \leqslant 0$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left(\sqrt{x+3} - 2\right)\left(\sqrt{4x+5} - 3\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} \geqslant 2 \\ \sqrt{4x+5} \leqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} \leqslant 2 \\ \sqrt{4x+5} \geqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 \geqslant 4 \\ 4x + 5 \leqslant 9 \\ 4x + 5 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ x + 3 \leqslant 4 \\ 4x + 5 \geqslant 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

О т в е т: $\{1\}$.

Решение карточки 6

1. $\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+20}$.

D(У): $\begin{cases} x+4 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x+20 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geqslant -1$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$x + 4 + 4\sqrt{(x+4)(x+1)} + 4(x+1) = x + 20;$

$4\sqrt{x^2 + 5x + 4} = -4x + 12.$

Сократим на 4:

$\sqrt{x^2 + 5x + 4} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ x^2 + 5x + 4 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}.$

Решив систему, получим $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x = \dfrac{5}{11} \end{cases}.$

Ответ: $x = \frac{5}{11}$.

2. $\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 + 18} = 5.$

Выполним подстановку: $\sqrt[3]{x^2 - 1} = t$.

Тогда $x^2 = t^3 + 1$; $x^2 + 18 = t^3 + 19$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{t^3 + 19} = 5 - t$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$t^3 + 19 = 5^3 - 3 \cdot 5^2 \cdot t + 3 \cdot 5 \cdot t^2 - t^3;$

$2t^3 - 15t^2 + 75t - 106 = 0.$

Пусть $f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 75t - 106$.

$f(2) = 0$, т. е. $f(t)$ кратно $(t - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - 15t^2 + 75t - 106 & t - 2 \\ \cline{2-2} \underline{2t^3 - 4t^2 } & 2t^2 - 11t + 53 \\ -11t^2 + 75t & \\ \underline{-75t^2 + 22t } & \\ 53t - 106 & \\ \underline{53t - 106} & \end{array}$$

Можно убедиться, что $t = 2$ — единственный корень полученного уравнения, так как $2t^2 - 11t + 53 = 0$ корней не имеет $(D < 0)$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2; \quad x^2 = 9; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-3;\ 3\}$.

3. $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1.$

Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x - \sqrt{1 - x} = 1 - 2\sqrt{x} + x; \quad \sqrt{1 - x} = 2\sqrt{x} - 1.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - x = 4x - 4\sqrt{x} + 1; \quad \sqrt{x}\left(5\sqrt{x} - 4\right) = 0.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{16}{25} \end{array}\right..$

Выполнив подстановку, можно убедиться, что число $\frac{16}{25}$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{16}{25}$.

4. $\sqrt{-x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{-x} > \sqrt{x + 1} \\ -x - 2\sqrt{-x(x + 1)} + x + 1 > \frac{1}{3} \\ -x \geqslant 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > x + 1 \\ 2\sqrt{-x(x + 1)} < \frac{2}{3} \\ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -x^2 - x < \frac{1}{9} \\ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x < -\frac{1}{2} \\ 9x^2 + 9x + 1 > 0 \end{cases}.$$

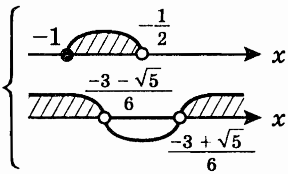
Числа $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{6}$ являются корнями уравнения $9x^2 + 9x + 1 = 0$.

Выясним, что больше: $\frac{-3+\sqrt{5}}{6}$ или $-\frac{1}{2}$?

Найдем разность: $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-3}{6} = -\frac{3-3+\sqrt{5}}{6}$, т. е. $-\frac{\sqrt{5}}{6} < 0$, следовательно $-\frac{1}{2} < \frac{-3+\sqrt{5}}{6}$.

Выясним, что больше: $\frac{-3-\sqrt{5}}{6}$ или -1?

Найдем разность: $-1 - \frac{-3-\sqrt{5}}{6} = -\frac{6-3-\sqrt{5}}{6}$; $-\frac{3-\sqrt{5}}{6} < 0$, следовательно $-1 < \frac{-3-\sqrt{5}}{6}$.



Ответ: $\left[-1; \frac{-3+\sqrt{5}}{6}\right)$.

5. $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{1 - x} \leqslant x^2 + 2x - 3$.

Разложим трехчлены $x^2 + 4x + 3$ и $x^2 + 2x - 3$ на множители:

$(x + 3)(x + 1)\sqrt{1 - x} - (x + 3)(x - 1) \leqslant 0$.

Вынесем за скобку $(x + 3)\sqrt{1 - x}$:

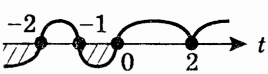
$(x + 3)\sqrt{1 - x}\left(x - 1 - \sqrt{x + 1}\right) \leqslant 0$.

Выполним подстановку: $\sqrt{1 - x} = t$ $(t \geqslant 0)$.

Тогда $1 - x = t^2$; $x + 1 = 2 - t^2$; $x + 3 = 4 - t^2$.

Неравенство примет вид:

$(4 - t^2) \cdot t\left(2 - t^2 + t\right) \leqslant 0$; $(t - 2)(t + 2)t(t - 2)(t + 1) \leqslant 0$.



Возвращаясь к переменной x и учитывая, что $t \geqslant 0$, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{1 - x} = 0 \\ \sqrt{1 - x} = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1 \\ x = -3\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3; 1\}$.

5
Зачетные карточки

Карточка 1

1. $\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$

2. $x\sqrt[3]{35 - x^3}\left(x + \sqrt[3]{35 - x^3}\right) = 30.$

3. $\sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} + \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = 2.$

4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leqslant x + 4.$

5. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \geqslant 1.$

Карточка 2

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4.$

2. $\sqrt[5]{(x+2)(x+32)} - \sqrt[5]{(x+1)(x+33)} = 1.$

3. $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}.$

4. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3.$

5. $\sqrt{11 + 2x} + \sqrt{21 - 2x} \geqslant 8.$

Карточка 3

1. $\sqrt{2x+6}+\sqrt{x-4}=5.$

2. $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5.$

3. $\sqrt{19+x}+\sqrt[4]{2x^2+45x+133}=6\sqrt{7+2x}.$

4. $\sqrt{2x+3}<1-\sqrt{x+2}.$

5. $\left(\sqrt{3-x}-x-3\right)\left(\sqrt{5-4x}-x-4\right)\leqslant 0.$

Карточка 4

1. $\sqrt{x+3}+2\sqrt{x-3}=9.$

2. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

3. $\sqrt[3]{x-1}=1-\sqrt{2-x}.$

4. $\sqrt{2+x}>\sqrt{7+x}-\sqrt{2x-3}.$

5. $2\sqrt{x^3+4x}>x^2-8x+4.$

Карточка 5

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{34+x}-\sqrt{7+x}.$

2. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}.$

3. $\sqrt[3]{-x-1}=1-\sqrt{x+2}.$

4. $\sqrt{x+2}<\sqrt{x+12}-\sqrt{2x-10}.$

5. $\dfrac{\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{7-2x}}<0.$

Карточка 6

1. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$.

2. $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

3. $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1$.

4. $\sqrt{3 - 2x} \leqslant 1 - \sqrt{2 - x}$.

5. $\sqrt{x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4}} > x + \frac{1}{2}$.

Карточка 7

1. $\sqrt{\sqrt{6x^2 + 1} - 2x} = 1 - x$.

2. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x - 16} = \sqrt[3]{x - 8}$.

3. $\sqrt{x - 3 + \sqrt{2x - 7}} + \sqrt{x + 1 + 3\sqrt{2x - 7}} = 7\sqrt{2}$.

4. $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{3x - 5} < \sqrt{4x - 7} + \sqrt{5x - 9}$.

5. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 5x} > 4$.

Карточка 8

1. $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$.

2. $\sqrt[5]{33 - x} + \sqrt[5]{x} = 3$.

3. $\sqrt{4x^2 - \sqrt{x} - 2} = 3\sqrt{x} - 2x$.

4. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3$.

5. $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} > 1$.

Решение зачетной карточки 1

1. $\sqrt{x} + \sqrt{x(x+2)} - \sqrt{(x+1)^3} = 0.$

Перенесем $\sqrt{(x+1)^3}$ в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат:

D(У): $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x(x+2) \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [0;\ \infty).$

$$x + 2\sqrt{x^2(x+2)} + x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(x+2)} = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Выполним подстановку: $\sqrt{x^2(x+2)} = t \geqslant 0$.

Тогда $x^2(x+2) = t^2$.

Уравнение примет вид $2t = t^2 + 1$; $(t-1)^2 = 0$.

$\sqrt{x^2(x+2)} = 1$ или после возведения в квадрат:

$x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$

Заметим, что $(x^3 + 2x^2 - 1)$ кратно $(x+1)$, тогда

$(x+1)(x^2 + x - 1) = 0.$

Следовательно, решениями данного уравнения могут быть лишь числа -1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Но $x = -1 \notin [0;\ \infty)$, $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \notin [0;\ \infty)$,

т. е. $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ — решение данного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. $x\sqrt[3]{35 - x^3}\left(x + \sqrt[3]{35 - x^3}\right) = 30.$

Выполним подстановки $\sqrt[3]{35 - x^3} = a$ и $x = b$.

Тогда $35 - x^3 = a^3$; $x^3 = b^3$; $a^3 + b^3 = 35$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ (a+b)\left((a+b)^2 - 3ab\right) = 35 \end{cases}.$$

В последнем уравнении системы раскроем скобки:

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35 \end{cases}.$$

Так как $ab(a+b) = 30$, то

$$\begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ (a+b)^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b) = 30 \\ a+b = 5 \end{cases}.$$

Подставим в первое уравнение $a + b = 5$:

$$\begin{cases} 5ab = 30 \\ a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 6 \\ a+b = 5 \end{cases}.$$

Воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{35 - x^3} = 3 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{35 - x^3} = 2 \\ x = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{2;\ 3\}$.

3. $\sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} + \sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = 2.$

Выполним подстановку $\sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} = t \geqslant 0$.

Тогда $\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = t^2$.

Исходное уравнение примет вид

$t + \frac{1}{t^2} = 2;\quad t^3 - 2t^2 + 1 = 0.$

Разложив на множители выражение $t^3 - 2t^2 + 1$, получим

$(t-1)(t^2 - t - 1) = 0.$

Следовательно, числа 1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ могут быть решениями данного уравнения.

Но $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin [0;\ \infty)$; $1 > 0$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, т. е. только

1 и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — корни полученного уравнения.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} = 1 \\ \sqrt[4]{\frac{2+x}{3-x}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3+5\sqrt{5}}{6} \end{array}\right..$$

Последовательность решения последнего уравнения такова:

$$\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2};\quad \frac{2+x}{3-x} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2};$$

$$2 + x = (3 - x)\frac{7+3\sqrt{5}}{2};\quad x + x\frac{7+3\sqrt{5}}{2} = 3\frac{7+3\sqrt{5}}{2} - 2;$$

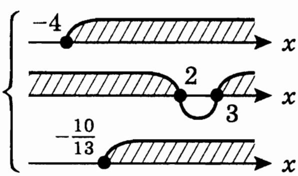
$$x = \frac{\left(17+9\sqrt{5}\right)\left(9-3\sqrt{5}\right)}{\left(9+3\sqrt{5}\right)\left(9-3\sqrt{5}\right)} = \frac{18+30\sqrt{5}}{36} = \frac{3+5\sqrt{5}}{6}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{3+5\sqrt{5}}{6}\right\}$.

4. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leqslant x + 4$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leqslant x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4 \\ (x - 3)(x - 2) \geqslant 0. \\ x \geqslant -\frac{10}{13} \end{cases}$$



Ответ: $\left[-\frac{10}{13};\ 2\right] \cup [3;\ \infty)$.

5. $\frac{\sqrt{13-7x-6x^2}}{x-2} \geqslant 1$.

Если $x < 2$, то решения нет, так как тогда левая часть отрицательна и больше правой — положительной.

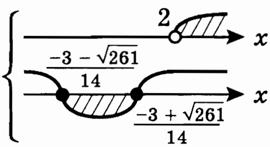
Следовательно, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x > 2 \\ \sqrt{13 - 7x - 6x^2} \geqslant x - 2 \end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части последнего неравенства:

$$\begin{cases} x > 2 \\ 13 - 7x - 6x^2 \geqslant x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 7x^2 + 3x - 9 \leqslant 0 \end{cases}.$$

Числа $\frac{-3+\sqrt{261}}{14}$ и $\frac{-3-\sqrt{261}}{14}$ — корни уравнения $7x^2 + 3x - 9 = 0$.



т. е. решения нет.

Ответ: решения нет.

Решение зачетной карточки 2

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4.$

Перенесем $\sqrt{x+3}$ в правую часть уравнения:
$\sqrt{2x-1} = 4 - \sqrt{x+3}.$

Возведем в квадрат обе части уравнения:
$2x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3;\ \ 8\sqrt{x+3} = 20 - x.$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:
$64(x+3) = 400 - 40x + x^2;\ \ x^2 - 104x + 208 = 0.$

Числа $52 + \sqrt{2496}$ и $52 - \sqrt{2496}$ могут быть решениями исходного уравнения.

Сделать проверку подстановкой этих чисел в исходное уравнение технически сложно, поэтому проверим равносильность переходов:

а) $4 - \sqrt{x+3} \geqslant 0 \Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 13.$

б) $20 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 20.$

в) D(У): $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 2x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}.$

Следовательно, $x \in \left[\frac{1}{2};\ 13\right]$ — условие разрешимости уравнения. Лишь $x = 52 - \sqrt{2496}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 52 - \sqrt{2496}.$

2. $\sqrt[5]{(x+2)(x+32)} - \sqrt[5]{(x+1)(x+33)} = 1.$

Выполним подстановку: $\sqrt[5]{(x+2)(x+32)} = a$ и $\sqrt[5]{(x+1)(x+33)} = b.$

Тогда $x^2 + 34x + 64 = a^5;$
$x^2 + 34x + 33 = b^5;\ a^5 - b^5 = 31.$
Напомним, что
$(m+n)^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5.$

Получаем систему: $\begin{cases} a - b = 1 \\ a^5 - b^5 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ (b + 1)^5 - b^5 = 31 \end{cases}.$

Раскрывая скобки в последнем уравнении, получаем

$$\begin{cases} a = b + 1 \\ b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(b) = b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(b)$ кратно $(b - 1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l}
-\underline{\begin{array}{l} b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6 \\ b^4 - b^3 \end{array}} & \dfrac{b - 1}{b^3 + 3b^2 + 5b + 6} \\
\quad -\underline{\begin{array}{l} 3b^3 + 2b^2 \\ 3b^3 - 3b^2 \end{array}} & \\
\qquad -\underline{\begin{array}{l} 5b^2 + b \\ 5b^2 - 5b \end{array}} & \\
\qquad\quad -\underline{\begin{array}{l} 6b - 6 \\ 6b - 6 \end{array}} &
\end{array}$$

Пусть $\varphi(b) = b^3 + 3b^2 + 5b + 6$.

$\varphi(-2) = 0$, т. е. $\varphi(b)$ кратно $(b + 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{l|l}
-\underline{\begin{array}{l} b^3 + 3b^2 + 5b + 6 \\ b^3 + 2b^2 \end{array}} & \dfrac{b + 2}{b^2 + b + 3} \\
\quad -\underline{\begin{array}{l} b^2 + 5b \\ b^2 + 2b \end{array}} & \\
\qquad -\underline{\begin{array}{l} 3b + 6 \\ 3b + 6 \end{array}} &
\end{array}$$

Получаем, что лишь числа 1 и -2 — корни уравнения $b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b - 6 = 0$. Других корней нет, так как $b^2 + b + 3 > 0$ ($D < 0$, $a = 1 > 0$).

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{(x + 1)(x + 33)} = 1 \\ \sqrt[5]{(x + 1)(x + 33)} = -2 \end{array}\right..$$

Возведем обе части уравнения в пятую степень:

$$\left[\begin{array}{l} (x + 1)(x + 33) = 1 \\ (x + 1)(x + 33) = -32 \end{array}\right..$$

Решая уравнения $\left[\begin{array}{l} x^2 + 34x + 32 = 0 \\ x^2 + 34x + 65 = 0 \end{array}\right.$, находим их корни:

$x_{1,2} = -17 \pm \sqrt{257}$; $x_{3,4} = -17 \pm \sqrt{224}$.

Ответ: $\left\{-17 \pm \sqrt{257};\ -17 \pm \sqrt{224}\right\}$.

3. $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$.

Выполним подстановку: $\sqrt{x^2 + x + 1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x^2 + x + 1 = t^2$; $x^2 + x + 4 = t^2 + 3$;
$2x^2 + 2x + 9 = 2t^2 + 7$.

Исходное уравнение примет вид: $\sqrt{t^2 + 3} + t = \sqrt{2t^2 + 7}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$t^2 + 3 + 2t\sqrt{t^2 + 3} + t^2 = 2t^2 + 7$; $\quad t\sqrt{t^2 + 3} = 2$.

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$t^2\left(t^2 + 3\right) = 4$; $\quad t^4 + 3t^2 - 4 = 0$.

Числа 1 и −4 — корни уравнения $t^4 + 3t^2 - 4 = 0$ относительно t^2; заметим, что $t^2 = -4 < 0$.

Тогда $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 < 0 \end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$; $x^2 + x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1;\ 0\}$.

4. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x - 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x - 3 < 0 \\ x^2 - 4x \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 3 \\ x > 4,5 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x < 3 \\ x(x - 4) \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4,5 \\ x \leqslant 0 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;\ 0] \cup (4,5;\ \infty)$.

5. $\sqrt{11+2x}+\sqrt{21-2x}\geqslant 8$.

Перенесем $\sqrt{21-2x}$ в правую часть неравенства:

$\sqrt{11+2x}\geqslant 8-\sqrt{21-2x}$.

Последнее равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-\sqrt{21-2x}\geqslant 0\\ 11+2x\geqslant 64-16\sqrt{21-2x}+21-2x\end{cases}\\ \begin{cases}8-\sqrt{21-2x}<0\\ 11+2x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{21-2x}\leqslant 8\\ 8\sqrt{21-2x}\geqslant 37-2x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{21-2x}>8\\ x\geqslant -5{,}5\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}21-2x\geqslant 0\\ 21-2x\leqslant 8^2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}64(21-2x)\geqslant(37-2x)^2\\ 37-2x\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}21-2x\geqslant 0\\ 37-2x<0\end{cases}\quad\varnothing\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}21-2x>8^2\\ x\geqslant -5{,}5\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}21-2x\leqslant 64\\ 21-2x\geqslant 0\\ x\leqslant 18{,}5\\ 64(21-2x)\geqslant 37^2-148x+4x^2\end{cases};\\ \begin{cases}21-2x>64\\ x\geqslant -5{,}5\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -21{,}5\\ x\leqslant 10{,}5\\ 4x^2-20x+25\leqslant 0\\ x\leqslant 18{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}x<-21{,}5\\ x\geqslant -5{,}5\end{cases}\quad\varnothing\end{array}\right.;\quad \begin{cases}x\geqslant -21{,}5\\ x\leqslant 10{,}5\\ (2x-5)^2\leqslant 0\end{cases}.$$

Ответ: $\{2{,}5\}$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-4} = 5.$

Перенесем $\sqrt{x-4}$ в правую часть уравнения и возведем в квадрат:

$\sqrt{2x+6} = 5 - \sqrt{x-4};$

$2x + 6 = 25 - 10\sqrt{x-4} + x - 4;$

$10\sqrt{x-4} = 15 - x.$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$100(x-4) = 225 - 30x + x^2;$

$x^2 - 130x + 625 = 0.$

Следовательно, корнями исходного уравнения могут быть числа 5 и 125. Сделав проверку, можно убедиться, что число 5 является корнем исходного уравнения, а число 125 — не является.

Ответ: $x = 5.$

2. $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5.$

Выполним подстановку: $\sqrt[3]{x+7} = t \Rightarrow x + 7 = t^3.$

Тогда $28 - x = 35 - t^3.$

Исходное уравнение примет вид: $t + \sqrt[3]{35-t^3} = 5;$

$\sqrt[3]{35-t^3} = 5 - t.$

Возведем в третью степень обе части уравнения:

$35 - t^3 = 125 - 3\cdot 25\cdot t + 3\cdot 5\cdot t^2 - t^3;$

$t^2 - 5t + 6 = 0.$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+7} = 2 \\ \sqrt[3]{x+7} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 20 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{1;\ 20\}.$

3. $\sqrt{19+x} + \sqrt[4]{2x^2+45x+133} = 6\sqrt{7+2x}$.

Выполним подстановки:

$\sqrt[4]{19+x} = a \geqslant 0$

и $\sqrt[4]{7+2x} = b \geqslant 0$.

Тогда $\sqrt{19+x} = a^2$;

$\sqrt{7+2x} = b^2$;

$\sqrt[4]{7+2x} \cdot \sqrt[4]{19+x} = \sqrt[4]{2x^2+45x+133} = ab$.

$$\text{D(У)}: \begin{cases} 19+x \geqslant 0 \\ 2x^2+45x+133 \geqslant 0 \\ 7+2x \geqslant 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in [-3{,}5;\ \infty)$.

Исходное уравнение примет вид: $a^2 + ab - 6b^2 = 0$;

$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+24b^2}}{2} = \frac{-b \pm 5b}{2}$; $a = 2b$.

$a = -3b$ не является корнем уравнения,

так как $a \geqslant 0$; $b \geqslant 0$ и $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt[4]{19+x} = 2\sqrt[4]{7+2x}$.

Возведем обе части уравнения в четвертую степень:

$19 + x = 16(7+2x)$.

Решая полученное уравнение, находим корень — $x = -3 \in$ D(У).

Ответ: $x = -3$.

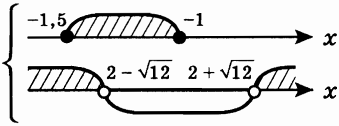
4. $\sqrt{2x+3} < 1 - \sqrt{x+2}$.

Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\sqrt{x+2} \geqslant 0 \\ 2x+3 \geqslant 0 \\ 2x+3 < 1 - 2\sqrt{x+2} + x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-\sqrt{x+2} \geqslant 0 \\ \sqrt{2x+3} < 0 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} \leqslant 1 \\ x \geqslant -1{,}5 \\ 2\sqrt{x+2} < -x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -1 \\ x \geqslant -1{,}5 \\ -x \geqslant 0 \\ 4(x+2) < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}5 \leqslant x \leqslant -1 \\ x^2 - 4x - 8 > 0 \end{cases}.$$

Числа $2 \pm \sqrt{12}$ являются корнями уравнения
$x^2 - 4x - 8 = 0.$



Примечание. Так как $\sqrt{12} < 3{,}5$, то $2 - \sqrt{12} > -1{,}5$.

Ответ: $\left[-1{,}5;\ 2 - 2\sqrt{3}\right)$.

5. $\left(\sqrt{3 - x} - x - 3\right)\left(\sqrt{5 - 4x} - x - 4\right) \leqslant 0$.

Выполним подстановки $\sqrt{3 - x} = t \geqslant 0$
и $\sqrt{5 - 4x} = z \geqslant 0$.

Тогда $3 - x = t^2;\quad -3 - x = t^2 - 6;\quad 5 - 4x = z^2;$
$x = \frac{5 - z^2}{4};\quad -x - 4 = \frac{z^2 - 21}{4}.$

Исходное неравенство примет вид
$(t + t^2 - 6)\left(z + \frac{z^2 - 21}{4}\right) \leqslant 0$.

Разложив выражения в скобках на множители, получаем
$(t + 3)(t - 2)(z + 7)(z - 3) \leqslant 0$.

Тогда $(t - 2)(z - 3) \leqslant 0$, так как $t + 3 > 0$ и $z + 7 > 0$.

Возвращаясь к переменной x, получаем
$(\sqrt{3 - x} - 2)(\sqrt{5 - 4x} - 3) \leqslant 0$,

что равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{3 - x} \geqslant 2 \\ \sqrt{5 - 4x} \leqslant 3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3 - x} \leqslant 2 \\ \sqrt{5 - 4x} \geqslant 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - x \geqslant 4 \\ 5 - 4x \leqslant 9 \\ 5 - 4x \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ 3 - x \leqslant 4 \\ 5 - 4x \geqslant 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -1 \\ x \geqslant -1 \\ x \leqslant 1{,}25 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \geqslant -1 \\ x \leqslant -1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-1\}$.

Решение зачетной карточки 4

1. $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-3} = 9.$

Перепишем уравнение в виде $2\sqrt{x-3} = 9 - \sqrt{x+3}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x-3 \geqslant 0 \\ 9-\sqrt{x+3} \geqslant 0 \\ 4(x-3) = 81 - 18\sqrt{x+3} + x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ \sqrt{x+3} \leqslant 9 \\ 6\sqrt{x+3} = 32 - x \end{cases}$$

Воспользовавшись свойствами неравенств, получим

$$\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x+3 \leqslant 81 \\ 32 - x \geqslant 0 \\ 36(x+3) = 1024 - 64x + x^2 \end{cases}$$

Числа $50 \pm \sqrt{1584}$ являются корнями уравнения $x^2 - 100x + 916 = 0$, тогда

$$\begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 32 \\ \left[\begin{array}{l} x = 50 + \sqrt{1584} \\ x = 50 - \sqrt{1584} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Очевидно, что $50 + \sqrt{1584} \notin [3;\ 32]$;
$50 - \sqrt{1584} \in [3;\ 32]$, так как $\sqrt{1584} \approx 39$.

О т в е т: $x = 50 - 12\sqrt{11}$.

2. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4.$

Выполним подстановку: $\sqrt{x+7} = t \geqslant 0$.

Тогда $x+7 = t^2$; $x+8 = t^2+1$; $x+1 = t^2-6$.

Исходное уравнение примет вид

$\sqrt{t^2+1+2t} + \sqrt{t^2-t-6} = 4$; $|t+1| + \sqrt{t^2-t-6} = 4$.

Так как $t \geqslant 0$, то получаем

$t + 1 + \sqrt{t^2-t-6} = 4$; $\sqrt{t^2-t-6} = 3 - t$, что равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - t \geqslant 0 \\ t^2 - t - 6 = 9 - 6t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{x + 7} = 3 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: $x = 2$.

3. $\sqrt[3]{x - 1} = 1 - \sqrt{2 - x}$.

Выполним подстановку: $\sqrt{2 - x} = t \geqslant 0$.

Тогда $2 - x = t^2$; $-x = t^2 - 2$; $x - 1 = 1 - t^2$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{1 - t^2} = 1 - t$.

Возведем обе части уравнения в третью степень:

$1 - t^2 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$; $t^3 - 4t^2 + 3t = 0$;

$t(t - 1)(t - 3) = 0$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2 - x} = 0 \\ \sqrt{2 - x} = 1 \\ \sqrt{2 - x} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = -7 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{-7;\ 1;\ 2\}$.

4. $\sqrt{2 + x} > \sqrt{7 + x} - \sqrt{2x - 3}$.

Перепишем исходное неравенство в виде

$\sqrt{2x - 3} > \sqrt{7 + x} - \sqrt{2 + x}$.

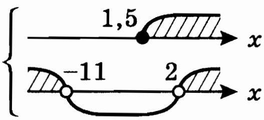
Последнее неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{7 + x} \geqslant \sqrt{2 + x} \\ x \geqslant 1{,}5 \\ 2x - 3 > 7 + x - 2\sqrt{x^2 + 9x + 14} + 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \sqrt{7 + x} < \sqrt{2 + x} \\ x \geqslant 1{,}5 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7+x \geqslant 2+x\\ x\geqslant 1{,}5\\ \sqrt{x^2+9x+14}>6\end{cases}\\ \begin{cases}7+x<2+x\\ x\geqslant 1{,}5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7\geqslant 2\\ x\geqslant 1{,}5\\ x^2+9x-22>0.\end{cases}\\ \begin{cases}7<2\\ x\geqslant 1{,}5\end{cases}\quad \varnothing\end{array}\right.$$

Последняя система неравенств решений не имеет.

Значения $x = -11$ и $x = 2$ являются корнями уравнения $x^2 + 9x - 22 = 0$.



Ответ: $(2;\ \infty)$.

5. $2\sqrt{x^3 + 4x} > x^2 - 8x + 4$.

Напомним, что

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-8x+4\geqslant 0\\ 4(x^3+4x)>x^4+64x^2+16-16x^3+8x^2-64x\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-8x+4<0\\ x^3+4x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-8x+4\geqslant 0\\ x^4-20x^3+72x^2-80x+16<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-8x+4<0\\ x(x^2+4)\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. .$$

Пусть $f(x) = x^4 - 20x^3 + 72x^2 - 80x + 16$.

$f(2) = 0$, т. е. $f(x)$ кратно $(x - 2)$.

Выполним деление:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{x^4 - 20x^3 + 72x^2 - 80x + 16} & x - 2 \\
\underline{-\,x^4 - 2x^3} & \overline{x^3 - 18x^2 + 36x - 8} \\
\quad -18x^3 + 72x^2 & \\
\quad \underline{-\,(-18x^3 + 36x^2)} & \\
\qquad 36x^2 - 80x & \\
\qquad \underline{-\,(36x^2 - 72x)} & \\
\qquad\quad -8x + 16 & \\
\qquad\quad \underline{-\,(-8x + 16)} &
\end{array}
$$

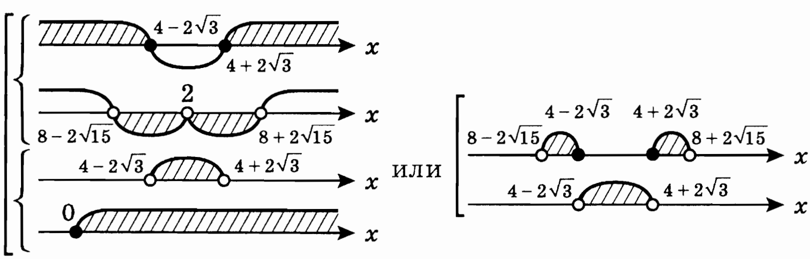
Пусть $\varphi(x) = x^3 - 18x^2 + 36x - 8$.

$\varphi(2) = 0$, т. е. $\varphi(x)$ кратно $(x - 2)$. Выполним деление:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 18x^2 + 36x - 8 & x - 2 \\
\underline{-\,(x^3 - 2x^2)} & \overline{x^2 - 16x + 4} \\
\quad -16x^2 + 36x & \\
\quad \underline{-\,(-16x^2 + 32x)} & \\
\qquad 4x - 8 & \\
\qquad \underline{-\,(4x - 8)} &
\end{array}
$$

Числа $8 \pm 2\sqrt{15}$ являются корнями уравнения
$x^2 - 16x + 4 = 0$,
числа $4 \pm 2\sqrt{3}$ — корнями уравнения $x^2 - 8x + 4 = 0$.

Тогда получаем систему $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 8x + 4 \geqslant 0 \\ (x-2)^2(x^2 - 16x + 4) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 4 < 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$.



О т в е т: $(8 - 2\sqrt{15};\ 8 + 2\sqrt{15})$.

Решение зачетной карточки 5

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{34+x}-\sqrt{7+x}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x-1+2\sqrt{x^2+x-2}+x+2=$$
$$=34+x-2\sqrt{x^2+41x+238}+7+x;$$

$$\sqrt{x^2+x-2}=20-\sqrt{x^2+41x+238}.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x^2+x-2=400-40\sqrt{x^2+41x+238}+x^2+41x+238;$$

$$\sqrt{x^2+41x+238}=16+x.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения в третий раз:

$$x^2+41x+238=256+32x+x^2.$$

Решением данного уравнения является число 2.

Сделав проверку, можно убедиться, что 2 является также корнем исходного уравнения.

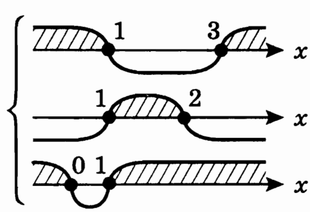
Ответ: $x=2$.

2. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

Разложим на множители подкоренные выражения:

$$\sqrt{(x-1)(x-3)}+\sqrt{-(x-1)(x-2)}=\sqrt{x(x-1)}.$$

$$\text{D(У)}: \begin{cases}(x-1)(x-3)\geqslant 0\\ -(x-1)(x-2)\geqslant 0.\\ x(x-1)\geqslant 0\end{cases}$$



или $x=1$.

Сделав проверку, убеждаемся, что число 1 — корень исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

3. $\sqrt[3]{-x-1} = 1 - \sqrt{x+2}$.

Выполним подстановку $\sqrt{x+2} = a \geqslant 0$.
Тогда $x = a^2 - 2$; $-x = 2 - a^2$; $-1 - x = 1 - a^2$.
Исходное уравнение примет вид $\sqrt[3]{1-a^2} = 1 - a$.
Возведем обе части уравнения в третью степень:
$1 - a^2 = 1 - 3a + 3a^2 - a^3$; $a^3 - 4a^2 + 3a = 0$;

$$a\left(a^2 - 4a + 3\right) = 0; \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2} = 0 \\ \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 7 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-2; -1; 7\}$.

4. $\sqrt{x+2} < \sqrt{x+12} - \sqrt{2x-10}$.

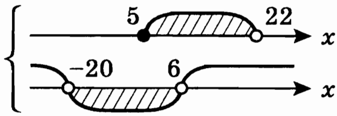
Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+12} > \sqrt{2x-10} \\ 2x - 10 \geqslant 0 \\ x + 2 < x + 12 - 2\sqrt{2(x+12)(x-5)} + 2x - 10 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+12} < \sqrt{2x-10} \\ \sqrt{x+2} < 0 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right..$$

Очевидно, последняя система решений не имеет, а первая система равносильна

$$\begin{cases} x \geqslant 5 \\ x + 12 > 2x - 10 \\ \sqrt{2\left(x^2 + 7x - 60\right)} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leqslant x < 22 \\ 2x^2 + 14x - 120 < x^2 \end{cases}.$$

Числа -20 и 6 являются решениями уравнения
$x^2 + 14x - 120 = 0$.



О т в е т: $[5;\ 6)$.

5. $\dfrac{\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{7-2x}} < 0$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 7-2x > 0 \\ \sqrt{2x+3} < 1+\sqrt{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3{,}5 \\ 2x-1 \geqslant 0 \\ 2x+3 < 1+2\sqrt{2x-1}+2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 \leqslant x < 3{,}5 \\ 2\sqrt{2x-1} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 \leqslant x < 3{,}5 \\ 4(2x-1) > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 \leqslant x < 3{,}5 \\ x > \frac{13}{8} \end{cases}.$$

О т в е т: $\left(1\frac{5}{8};\ 3\frac{1}{2}\right)$.

Решение зачетной карточки 6

1. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - \sqrt{x+8}$;

$\sqrt{x+8} = 2\sqrt{x+1} - 2$.

Возведем еще раз в квадрат обе части уравнения:

$x + 8 = 4x + 4 - 8\sqrt{x+1} + 4$; $\;8\sqrt{x+1} = 3x$.

Возводем обе части уравнения в квадрат в третий раз:

$64(x+1) = 9x^2$.

Решая квадратное уравнение $9x^2 - 64x - 64 = 0$, убеждаемся, что числа 8 и $-\frac{8}{9}$ могут быть решениями данного уравнения. Выполнив проверку, убеждаемся, что число 8 — корень уравнения.

Ответ: $x = 8$.

2. $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Представив подкоренные выражения в виде множителей, запишем исходное уравнение так:

$\sqrt{(x+2)(x-1)} + \sqrt{(x+3)(x-1)} = \sqrt{(x-1)(x-2)}$.

Напомним, что

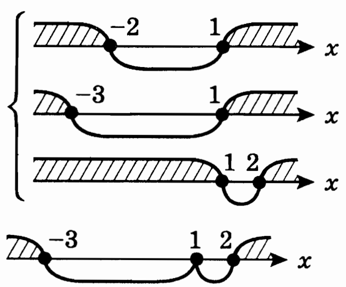
$\sqrt{a \cdot b} =$

$$= \begin{cases} \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} & \text{при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} & \text{при } a \leqslant 0,\ b \leqslant 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что $x = 1$ является корнем заданного уравнения.

Проверим, есть ли корни на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[2; \infty)$.

$$\text{D(У)}: \begin{cases} (x+2)(x-1) \geqslant 0 \\ (x+3)(x-1) \geqslant 0 \\ (x-2)(x-1) \geqslant 0 \end{cases}.$$



1) Если $x \geqslant 2$, то $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = -x - 7;$

$-x - 7 < 0$ на промежутке $[2;\ \infty)$, следовательно, корней нет.

2) Если $x \leqslant -3$, то $\sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-3} = \sqrt{2-x}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$-x - 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 6} - x - 3 = 2 - x;$

$2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = 7 + x;$

$$\begin{cases} x + 7 \geqslant 0 \\ x \leqslant -3 \\ 4\left(x^2 + 5x + 6\right) = 49 + 14x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leqslant x \leqslant -3 \\ 3x^2 + 6x - 25 = 0 \end{cases}.$$

Числа $\frac{-3\pm\sqrt{84}}{3}$ являются корнями уравнения $3x^2 + 6x - 25 = 0$, но только $x = -\frac{3+\sqrt{84}}{3} \in [-7;\ -3]$.

Рассмотрим иной способ решения заданного уравнения.

$\sqrt{(x+2)(x-1)} + \sqrt{(x+3)(x-1)} = \sqrt{(x-1)(x-2)}$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(x+2)(x-1) + 2\sqrt{(x-1)^2(x+2)(x+3)} + (x+3)(x-1) = \\ = (x-1)(x-2);$$

$$(x+2)(x-1) + 2|x-1|\sqrt{(x+2)(x+3)} + (x+3)(x-1) = \\ = (x-1)(x-2). \qquad (1)$$

Тогда, если

1) $x \geqslant 1$, то $|x-1| = x - 1$;

уравнение (1) равносильно на $[1;\ \infty)$ совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(x+3)} + x + 3 = x - 2 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = -x - 7 < 0 \end{array}\right. \text{ на } [1;\ \infty). \text{ Только } x = 1.$$

2) $x < 1$, то $|x - 1| = 1 - x$;

тогда (1) равносильно на $(-\infty;\ 1)$ совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2\sqrt{x^2 + 5x + 6} = x + 7 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \notin (-\infty;\ 1) \\ \begin{cases} 4\left(x^2 + 5x + 6\right) = x^2 + 14x + 49 \\ x < 1 \\ x \geqslant -7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x - 25 = 0 \\ -7 \leqslant x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3+\sqrt{84}}{3}.$$

Окончательный ответ является объединением ответов двух рассмотренных случаев.

Ответ: $\left\{-\frac{3+\sqrt{84}}{3};\ 1\right\}$.

3. $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1.$

Выполним подстановку: $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = a$ и $\sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = b$.

Тогда $\frac{1}{2} + x = a^5$; $\frac{1}{2} - x = b^5$; $a^5 + b^5 = 1$.

Составим систему: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^5 + b^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ (1 - b)^5 + b^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$(1 - b)^5 = 1 - 5b + 10b^2 - 10b^3 + 5b^4 - b^5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 5\left(b^4 - 2b^3 + 2b^2 - b\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ b\left(b^3 - 2b^2 + 2b - 1\right) = 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(b) = b^3 - 2b^2 + 2b - 1$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(b)$ кратно $b - 1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} b^3 - 2b^2 + 2b - 1 & b - 1 \\ \underline{b^3 - b^2} \quad\quad\quad\quad & \overline{b^2 - b + 1} \\ -b^2 + 2b \quad\; & \\ \underline{-b^2 + b} \quad\; & \\ b - 1 & \\ \underline{b - 1} & \end{array}$$

Уравнение $b^2 - b + 1 = 0$ корней не имеет ($D < 0$), следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 0 \end{array}\right..$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = 0 \\ \sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Используя полученные значения b, получим те же решения.

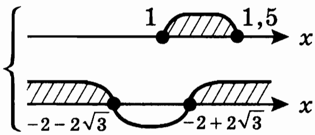
Ответ: $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$.

4. $\sqrt{3 - 2x} \leqslant 1 - \sqrt{2 - x}$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - 2x \geqslant 0 \\ 2 - x \geqslant 0 \\ 3 - 2x \leqslant 1 - 2\sqrt{2 - x} + 2 - x \\ 1 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5 \\ x \leqslant 2 \\ 2 - x \leqslant 1 \\ 2\sqrt{2 - x} \leqslant x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5 \\ x \geqslant 1 \\ x^2 + 4x - 8 \geqslant 0 \end{cases}.$$



$\left[-2 + 2\sqrt{3};\ 1{,}5\right]$.

Ответ: $\left[-2 + 2\sqrt{3};\ 1{,}5\right]$.

5. $\sqrt{x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4}} > x + \frac{1}{2}$.

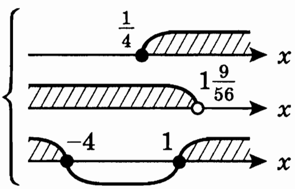
Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \frac{1}{2} \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4} > x^2 + x + \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x + \frac{1}{2} < 0 \\ x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 3x - 4} \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2 + 3x - 4} < x - \frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x^2 + 2x \geqslant \sqrt{x^2 + 3x - 4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

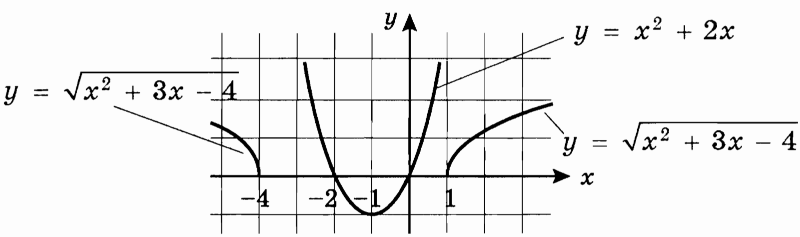
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{4} \geqslant 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geqslant 0 \\ x^2 + 3x - 4 < x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x^2 + 2x \geqslant 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geqslant 0 \\ \left(x^2 + 2x\right)^2 \geqslant x^2 + 3x - 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{4} \\ 3,5x < 4\frac{1}{16} \\ (x+4)(x-1) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x(x+2) \geqslant 0 \\ (x+4)(x-1) \geqslant 0 \\ x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 3x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$x \in \left[1;\ 1\frac{9}{56}\right).$

Вторую систему решим, построив графики функций $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ и $y = x^2 + 2x$ (так как решить иначе технически сложно).



Очевидно, что $x^2 + 2x > \sqrt{x^2 + 2x - 4}$ всегда при $x \in (-\infty;\ -4] \cup [1;\ \infty)$.

Учитывая, что в этом случае $x < -\frac{1}{2}$, получаем $x \leqslant -4$.

О т в е т: $(-\infty;\ -4] \cup \left[1;\ 1\frac{9}{56}\right)$.

Решение зачетной карточки 7

1. $\sqrt{\sqrt{6x^2+1}-2x}=1-x$.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1-x \geqslant 0 \\ \sqrt{6x^2+1}-2x=1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \sqrt{6x^2+1}=x^2+1 \end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ 6x^2+1=x^4+2x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x^2\left(x^2-4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $\{0;\ -2\}$.

2. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

Напомним, что $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Возведем в третью степень обе части уравнения:

$$x+x-16+3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-16}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}\right)=x-8.$$

Заменив $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}$ на $\sqrt[3]{x-8}$ (согласно исходному уравнению), получим

$$3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x-16}\cdot\sqrt[3]{x-8}=-(x-8).$$

Еще раз возведем в третью степень обе части уравнения:

$$27\cdot x(x-16)(x-8)+(x-8)^3=0;$$

$$(x-8)\left(27x^2-432x+x^2-16x+64\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x-8=0 \\ 28x^2-448x+64=0 \end{array}\right..$$

Поделив последнее уравнение на 4, получим

$$\left[\begin{array}{l} x-8=0 \\ 7x^2-112x+16=0 \end{array}\right..$$

Очевидно, что решениями исходного уравнения могут быть числа 8 и $\frac{56\pm12\sqrt{21}}{7}$. Проверка способом подстановки показывает, что 8 — корень заданного уравнения, но как проверить $\frac{56\pm12\sqrt{21}}{7}$? Ведь эти числа получены не при тождественной подстановке, а при замене $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}$ на $\sqrt[3]{x-8}$.

Попробуем решить уравнение по-другому. Поделим почленно части исходного уравнения на $\sqrt[3]{x}$, тогда

$$1+\sqrt[3]{1-\frac{16}{x}}=\sqrt[3]{1-\frac{8}{x}}.$$

Выполним подстановки: $\sqrt[3]{1-\frac{16}{x}}=a$ и $\sqrt[3]{1-\frac{8}{x}}=b$.

Тогда $1-\frac{16}{x}=a^3$; $1-\frac{8}{x}=b^3$; $2b^3-a^3=1$.

Составим систему

$$\begin{cases}1+a=b\\2b^3-a^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+a=b\\2(1+a)^3-a^3=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+a=b\\2\left(a^3+3a^2+3a+1\right)-a^3=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+a=b\\a^3+6a^2+6a+1=0\end{cases}.$$

Пусть $f(a)=a^3+6a^2+6a+1$.

$f(-1)=0$, т. е. $f(a)$ кратно $(a+1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
-\,a^3+6a^2+6a+1 & a+1\\ \cline{2-2}
\underline{a^3+a^2} & a^2+5a+1\\
-\,5a^2+6a & \\
\underline{5a^2+5a} & \\
-\,a+1 & \\
\underline{a+1} &
\end{array}$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=\frac{-5+\sqrt{21}}{2}\\a=\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \frac{56+12\sqrt{21}}{7}. \\ x = \frac{56-12\sqrt{21}}{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{8;\ \frac{56+12\sqrt{21}}{7};\ \frac{56-12\sqrt{21}}{7}\right\}$.

3. $\sqrt{x-3+\sqrt{2x-7}}+\sqrt{x+1+3\sqrt{2x-7}} = 7\sqrt{2}$.

Выполним подстановку: $\sqrt{2x-7} = a \geqslant 0$.

Тогда $2x-7 = a^2$; $x = \frac{a^2+7}{2}$; $x+1 = \frac{a^2+9}{2} > 0$;
$x-3 = \frac{a^2+1}{2} > 0$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}+a}+\sqrt{\frac{a^2+9}{2}+3a} = 7\sqrt{2};$$

$$\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2}}+\sqrt{\frac{a^2+6a+9}{2}} = 7\sqrt{2}; \quad \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}+\frac{|a+3|}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}.$$

Учтем, что $|a+1| = a+1$; $|a+3| = a+3$ $(a \geqslant 0)$.

Тогда получаем $a+1+a+3 = 14$; $a = 5$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{2x-7} = 5$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$2x-7 = 25$; $x = 16$.

Ответ: $x = 16$.

4. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5} < \sqrt{4x-7}+\sqrt{5x-9}$.

Решить данное неравенство на уровне равносильности технически очень сложно.

Запишем неравенство в виде

$\sqrt{2x-3}-\sqrt{4x-7} < \sqrt{5x-9}-\sqrt{3x-5}$,

тогда, анализируя знаки правой и левой частей, имеем:

а) $\begin{cases} \sqrt{2x-3} < \sqrt{4x-7} \\ \sqrt{5x-9} > \sqrt{3x-5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 4x-7 \\ 5x-9 > 3x-5 \\ x \geqslant 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow x > 2.$

б) $\begin{cases}\sqrt{2x-3} > \sqrt{4x-7}\\ \sqrt{5x-9} < \sqrt{3x-5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3 > 4x-7\\ 5x-9 < 3x-5\\ x \geqslant 1{,}8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 2\\ x \geqslant 1{,}8\end{cases}.$

При $x \in [1{,}8;\ 2)$ решения нет, так как левая часть получается больше нуля, а правая — меньше нуля.

Очевидно, что $x = 2$ не является решением.

Примечание. Другие случаи можно не анализировать, так как при $x \in (-\infty;\ 1{,}8)$ неравенство не определено.

Ответ: $(2;\ \infty)$.

5. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 5x} > 4.$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}25 - x^2 \geqslant 0\\ x^2 + 5x \geqslant 0\\ 25 - x^2 + 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} + x^2 + 5x > 16\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-5 \leqslant x \leqslant 5\\ \left[\begin{array}{l}x \leqslant -5\\ x \geqslant 0\end{array}\right.\\ 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9 - 5x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = -5\\ 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9 - 5x\end{cases}\\ \begin{cases}0 \leqslant x \leqslant 5\\ 2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} > -9 - 5x\end{cases}\end{array}\right..$$

Сделав проверку, убеждаемся, что при $x = -5$ неравенство ложно.

Решим неравенство $2\sqrt{(x+5)^2(5-x)\cdot x} > -9 - 5x$ на промежутке $[0;\ 5]$, где $-9 - 5x < 0$.

Тогда $2\sqrt{(x+5)^2(5-x)x} \geqslant 0$, т. е. при $x \in [0;\ 5]$ неравенство верно.

Ответ: $[0;\ 5]$.

Решение зачетной карточки 8

1. $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$.

Выполним подстановки: $\sqrt{1 + \frac{20}{x}} = a \geqslant 0$ и $\sqrt{-1 + \frac{20}{x}} = b \geqslant 0$.

Тогда $1 + \frac{20}{x} = a^2$; $-1 + \frac{20}{x} = b^2$; $a^2 - b^2 = 2$.

Составим систему

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{6} \\ a^2 - b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{6} \\ (a + b)(a - b) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{6} \\ a - b = \frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

откуда $a = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $b = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Возвращаясь к переменной x, получаем

$\sqrt{1 + \frac{20}{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$; $x = 12$.

Ответ: $x = 12$.

2. $\sqrt[5]{33 - x} + \sqrt[5]{x} = 3$.

Выполним подстановки: $\sqrt[5]{33 - x} = a$ и $\sqrt[5]{x} = b$.

Тогда $33 - x = a^5$; $x = b^5$; $a^5 + b^5 = 33$.

Составим систему

$$\begin{cases} b = 3 - a \\ a^5 + 243 - 5 \cdot 81a + 10 \cdot 27a^2 - 10 \cdot 9a^3 + 15a^4 - a^5 = 33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 27a + 14 = 0 \end{cases}.$$

Пусть $f(a) = a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 27a + 14$.

$f(2) = 0$, т. е. $f(a)$ кратно $(a - 2)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^4 - 6a^3 + 18a^2 - 27a + 14 & a - 2 \\ \cline{2-2} \underline{a^4 - 2a^3} \qquad\qquad\qquad\qquad & a^3 - 4a^2 + 10a - 7 \\ -4a^3 + 18a^2 \qquad\qquad\quad & \\ \underline{-4a^3 + \ \ 8a^2} \qquad\qquad\quad & \\ 10a^2 - 27a \qquad\quad & \\ \underline{10a^2 - 20a} \qquad\quad & \\ -7a + 14 & \\ \underline{-7a + 14} & \end{array}$$

Пусть $\varphi(a) = a^3 - 4a^2 + 10a - 7$.

$\varphi(1) = 0$, т. е. $\varphi(a)$ кратно $a - 1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 4a^2 + 10a - 7 & a - 1 \\ \cline{2-2} a^3 - a^2 \phantom{{}+10a-7} & a^2 - 3a + 7 \\ \hline -3a^2 + 10a \phantom{{}-7} & \\ -3a^2 + 3a \phantom{{}-7} & \\ \hline 7a - 7 & \\ 7a - 7 & \\ \hline \end{array}$$

Уравнение $a^2 - 3a + 7 = 0$ корней не имеет ($D < 0$),

следовательно, $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 1 \end{array}\right.$.

Значение b знать уже не обязательно. Почему?

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{33 - x} = 1 \\ \sqrt[5]{33 - x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 33 - x = 1 \\ 33 - x = 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 32 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{1;\ 32\}$.

3. $\sqrt{4x^2 - \sqrt{x} - 2} = 3\sqrt{x} - 2x$.

Выполним подстановку: $\sqrt{x} = t \geqslant 0$.

Тогда $x = t^2$; $x^2 = t^4$.

Исходное уравнение примет вид $\sqrt{4t^4 - t - 2} = 3t - 2t^2$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$4t^4 - t - 2 = 9t^2 - 12t^3 + 4t^4$.

Пусть $f(t) = 12t^3 - 9t^2 - t - 2$.

$f(1) = 0$, т. е. $f(t)$ кратно $(t - 1)$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} 12t^3 - 9t^2 - t - 2 & t - 1 \\ \cline{2-2} 12t^3 - 12t^2 \phantom{{}-t-2} & 12t^2 + 3t + 2 \\ \hline 3t^2 - t \phantom{{}-2} & \\ 3t^2 - 3t \phantom{{}-2} & \\ \hline 2t - 2 & \\ 2t - 2 & \\ \hline \end{array}$$

Следовательно $t = 1$, так как уравнение $12t^2 + 3t + 2 = 0$ корней не имеет ($D < 0$).

Возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{x} = 1$; $x = 1$.

Сделав проверку, можно убедиться, что число 1 является корнем заданного уравнения.

Ответ: $x = 1$.

4. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3$.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 25 - x^2 \geqslant 0 \\ x^2 + 7x \geqslant 0 \\ 25 - x^2 + 2\sqrt{(25 - x^2)(x^2 + 7x)} + x^2 + 7x > 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5 - x)(5 + x) \geqslant 0 \\ x(x + 7) \geqslant 0 \\ 2\sqrt{(25 - x^2)x(x + 7)} > -16 - 7x \end{cases}$$

Решив неравенства $(5 - x)(5 + x) \geqslant 0$ и $x(x + 7) \geqslant 0$, получим $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Очевидно, что при $x \in [0;\ 5]$ выражение $-16 - 7x < 0$, т. е. $2\sqrt{(25 - x^2)x(x + 7)} > -16 - 7x$ для $\forall x \in [0;\ 5]$.

Ответ: $[0;\ 5]$.

5. $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} > 1$.

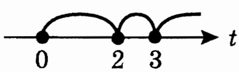
Выполним подстановку: $\sqrt{x - 1} = t \geqslant 0$.

Тогда $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$; $x + 3 = t^2 + 4$; $x + 8 = t^2 + 9$.

Исходное уравнение примет вид

$\sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{t^2 + 9 - 6t} > 1$; $|t - 2| + |t - 3| > 1$.

Разобьем числовую ось числами 0; 2; 3:



1) Если $t \in [0;\ 2)$, то $2 - t + 3 - t > 1$ или $0 \leqslant t < 2$. Возвращаясь к переменной x, получаем $0 \leqslant \sqrt{x - 1} < 2$; $1 \leqslant x < 5$.

2) Если $t \in [2,\ 3)$, то $t - 2 + 3 - t > 1$, т. е. решений нет.

3) Если $t \geqslant 3$, то $t - 2 + t - 3 \geqslant 1$; $t > 3$.

Возвращаясь к переменной x, получаем $\sqrt{x - 1} > 3$; $x > 10$.

Ответ: $[1;\ 5) \cup (10;\ \infty)$.

Ответы к самостоятельным работам

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

1. $\{4\}$ **2.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **3.** $\{1\}$ **4.** $\{8\}$ **5.** $\{6\}$ **6.** $\{-3;3;7\}$

7. $\{-5\}$ **8.** $\{-2;0\}$ **9.** $\{-10;-2;-1\}$ **10.** $\{-1;6\}$

Вариант 2

1. $\{-4\}$ **2.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **3.** $\{-1\}$ **4.** $\{-8\}$ **5.** $\{-6\}$ **6.** $\{-7;-4;4\}$

7. $\{5\}$ **8.** $\{0;2\}$ **9.** $\{1;2;10\}$ **10.** $\{-6;1\}$

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. $\left\{\frac{5}{18}\right\}$ **2.** $\{-3;4\}$ **3.** $\left\{\frac{18}{31}\right\}$ **4.** $\{1\}$ **5.** $[3;8]$

6. $\{1\}$ **7.** $\{-2\}$ **8.** $\{2\}$ **9.** $\varnothing$ **10.** $\{3\}$

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{18}\right\}$ **2.** $\{-4;3\}$ **3.** $\left\{-\frac{18}{31}\right\}$ **4.** $\{-1\}$ **5.** $[-8;-3]$

6. $\{-1\}$ **7.** $\{2\}$ **8.** $\{-2\}$ **9.** $\varnothing$ **10.** $\{-3\}$

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. $(-2;0)\cup(1;3)$ **2.** $[-1,2;-1)$ **3.** $\left(\frac{7}{9};\infty\right)$ **4.** $\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}$

5. $[0,5;1)$ **6.** $\left(-\frac{1}{2};1\right]\cup\{-3\}$ **7.** $[1;\infty)$

8. $(-\infty;-20,5]\cup(2;\infty)$ **9.** $[-4;1]$ **10.** $\left[\frac{2}{3};\frac{9+\sqrt{37}}{2}\right]$

Вариант 2

1. $(0;2)\cup(-3;-1)$ **2.** $(1;1,2]$ **3.** $\left(-\infty;-\frac{7}{9}\right)$

4. $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right]\cup\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ **5.** $(-1;-0,5]$ **6.** $\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\{3\}$

7. $(-\infty;-1]$ **8.** $(-\infty;-2)\cup[20,5;\infty)$ **9.** $[-1;4]$

10. $\left[-\frac{9+\sqrt{37}}{2};-\frac{2}{3}\right]$

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1. $(-7; 9]$ **2.** $[0,5; 1)$ **3.** $[-1; 0] \cup [1; 2]$

4. $[1; 5) \cup (10; \infty)$ **5.** $(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$ **6.** $[-4; \infty)$

7. $\{3\}$ **8.** $[0; 4)$ **9.** $[0; 1]$ **10.** $[-2; -1,5)$

Вариант 2

1. $[-9; 7)$ **2.** $(-1; -0,5]$ **3.** $[-2; -1] \cup [0; 1]$

4. $[0,2; 1) \cup (2; \infty)$ **5.** $[-\infty; -1] \cup [2; \infty]$ **6.** $(-\infty; 2]$

7. $\{-3\}$ **8.** $[0; 2)$ **9.** $[-1; 0]$ **10.** $(1,5; 2]$

Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1. $[-2; 0] \cup \{6\}$ **2.** $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$ **3.** $[-4; 7] \cup \{13\}$

4. $[-4; -1,8]$ **5.** $\left(-\infty; -17 + \sqrt{247}\right]$ **6.** $\{5\}$

7. $\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}; 0\right)$ **8.** $\varnothing$ **9.** $\left(\frac{9-\sqrt{69}}{2}; 1\right]$

10. $\left[3; \frac{1+\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}; 7\right]$

Вариант 1

1. $[0; 2] \cup \{-6\}$ **2.** $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$ **3.** $[-7; 4] \cup \{-13\}$

4. $[1,8; 4]$ **5.** $\left(17 - \sqrt{247}; \infty\right]$ **6.** $\{2,5\}$

7. $\left(0; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$ **8.** $\varnothing$ **9.** $\left(9 - \sqrt{69}; 2\right]$

10. $\left[6; 1 + \sqrt{37}\right) \cup \left(1 + \sqrt{37}; 14\right]$

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Научный редактор серии *А. В. Семенов*
Художник *Ю.Н. Куликов*
Компьютерная верстка *С. П. Широкий*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 943-8076; факс: (812) 560-0598.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 15.08.2011 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 13,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № 340.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.