А.Х. Шахмейстер

Комбинаторика
Статистика
Вероятность

Практикум
Тренинг
Контроль

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программы элективных курсов для учащихся 10–11 классов

1. Элементы комбинаторики (15 уроков).

№№ уроков	**Название темы** В скобках указаны номера заданий	Кол-во уроков
1–2	**Основные понятия комбинаторики (стр. 5–31)** Граф, дерево	2
3–5	Практикум 1 (2, 3, 4, 5, 6, 8,) (стр. 16–35) Тренировочная работа 1 (вариант 1 (2, 3, 5, 6))	3
6–7	**Размещения и сочетания (стр. 39–52)** Свойства сочетаний	2
8	**Бином Ньютона (стр. 53–55)**	1
9–12	Практикум 2 (1, 3, 5, 8, 9, 10) (стр. 56–97) Тренировочная работа 2 (вариант 2 (1, 3, 5, 6)) Практикум 3 (2(в), 3(а, г, д), 5) Тренировочная работа 3 вариант 1 (4(г, д), 5(б))	4
13–14	**Размещения с повторениями (стр. 98–103)** Практикум 4 **Перестановки с повторениями** Практикум 5 **Сочетания с повторениями** Практикум 6	2
15	Обзорное повторение курса комбинаторики	1

2. Элементы статистики (8 уроков).

1–3	**Меры центральной тенденции (стр. 104–127)** Тренировочная работа 4 (вариант 2 (1, 2, 3, 4))	3
4–6	**Меры изменчивости (стр. 128–171)** Практикум 7 (1, 3, 4,) Тренировочная работа 5 (вариант 1 (1, 3), вариант 2 (2))	
7	Нормальное распределение (стр. 172–176)	
8	Обзорное повторение курса «Элементы статистики»	

3. Элементы теории вероятностей (18 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий	Кол-во уроков
1	**Понятие событий (стр. 177–184)** Классификация событий Практикум 8	1
2–6	**Определение вероятности (стр. 185–212)** Упражнения (1, 2, 4, 7, 8, 9) Практикум 9 (1, 3, 4, 6, 7, 8) Тренировочная работа 6 (вариант 1 (1, 3, 5, 6))	5
7–8	**Произведение событий (стр. 213–228)** Условная вероятность Практикум 10 (1, 3)	2
9–10	**Теоремы сложения (стр. 229–241)** Практикум 11 (1, 4, 5, 7)	2
11–12	**Формула полной вероятности (стр. 242–248)** Практикум 12 (2, 3, 4)	2
13–14	**Формула Байеса (стр. 249–252)** Практикум 13 **Формула Бернулли (стр. 253–256)** Практикум 14 **Закон больших чисел (стр. 257–259)**	2
15–16	**Математическое ожидание и дисперсия случайной величины (стр. 260–279)** Тренировочная работа 7	2
17–18	Элементы теории вероятностей (обобщение курса и историческая справка)	2

Программы подготовлены, составлены и апробированы на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

Элементы комбинаторики

Основные понятия комбинаторики

Задача 1. Три брата Петя, Миша и Андрей вечно ссорились из-за того, кому на чем сидеть: на стуле, табуретке или кресле, для ежедневного просмотра мультиков по телевизору. Родители предложили братьям каждый день садиться по-разному, чтобы никому не было обидно. Петя сказал, что для перебора всех комбинаций потребуется 9 дней, а Миша считал, что 27 дней. Андрей же считал, что трех дней достаточно. Кто же из них прав и сколько способов различной рассадки существует?

Рассмотрим различные подходы к решению задачи.

1. Можно решить эту задачу перебором.

   а) Пусть Петя (**П**) сядет на стул, тогда либо Миша (**М**) сядет на табуретку и Андрей (**А**) на кресло, либо Миша сядет на кресло, а Андрей на табуретку.

   б) Пусть Петя сядет на табуретку, тогда либо Миша сядет на стул и Андрей на кресло, либо Миша сядет на кресло, а Андрей на стул.

   в) Пусть Петя сядет на кресло, тогда либо Миша сядет на стул и Андрей на табуретку, либо Миша сядет на табуретку, а Андрей на стул.

Значит, так как в каждом случае возможно только два способа, а случаев три, то общее число способов $3 \cdot 2 = 6$, т. е. за шесть дней все способы рассадки братьев будут исчерпаны.

2. Можно, применив метод соответствия, проиллюстрировать решение таблицами соответствия.

   а) 1) $\begin{pmatrix} \text{П} & \text{М} & \text{А} \\ \text{С} & \text{Т} & \text{К} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \text{П} & \text{М} & \text{А} \\ \text{С} & \text{К} & \text{Т} \end{pmatrix}$;

   б) 3) $\begin{pmatrix} \text{П} & \text{М} & \text{А} \\ \text{Т} & \text{С} & \text{К} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \text{П} & \text{М} & \text{А} \\ \text{Т} & \text{К} & \text{С} \end{pmatrix}$;

   в) 5) $\begin{pmatrix} \text{П} & \text{М} & \text{А} \\ \text{К} & \text{С} & \text{Т} \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} \text{П} & \text{М} & \text{А} \\ \text{К} & \text{Т} & \text{С} \end{pmatrix}$.

   В верхней строчке сокращенно записаны имена братьев. В нижней — виды мебели, на которые они садились.

3. Можно применить индексную систему записи соответствий и иллюстрировать цепочки соответствий различными способами рассадки братьев. $\text{П}_\text{С}$ — Петя сел на стул; $\text{П}_\text{Т}$ — Петя сел на табуретку и так далее.

   Получим случаи а), б), в):

   а) 1) $\text{П}_\text{С} - \text{М}_\text{Т} - \text{А}_\text{К}$; 2) $\text{П}_\text{С} - \text{М}_\text{К} - \text{А}_\text{Т}$;

   б) 3) $\text{П}_\text{Т} - \text{М}_\text{С} - \text{А}_\text{К}$; 4) $\text{П}_\text{Т} - \text{М}_\text{К} - \text{А}_\text{С}$;

   в) 5) $\text{П}_\text{К} - \text{М}_\text{С} - \text{А}_\text{Т}$; 6) $\text{П}_\text{К} - \text{М}_\text{Т} - \text{А}_\text{С}$.

Задача 2. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2 и 3 без повторений?

1. Используем метод перебора:

   а) 1 2 3; 1 3 2;

   б) 2 1 3; 2 3 1;

   в) 3 1 2; 3 2 1.

   Итого $3 \cdot 2 = 6$ — трехзначных чисел. Отметим, что при использовании метода перебора необходимо следить, чтобы он был полностью исчерпывающим.

2. Можно использовать метод табличного соответствия:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

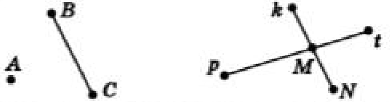
4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$3 \cdot 2 = 6$.

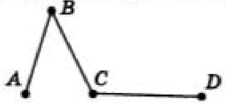
Заметим, что с точки зрения математики задача 1 и задача 2 — это две одинаковые задачи.

Задачи такого типа удобно рассматривать с помощью **графов**. Введем простейшие понятия теории графов.

<u>Определение 1.</u> Графом называется множество точек (вершин), среди которых некоторые пары точек соединены отрезками (ребрами).

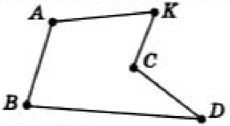


<u>Определение 2.</u> Граф называется связным, если из любой вершины в любую другую можно пройти по ребрам.

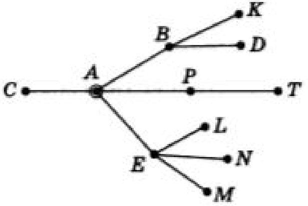


Примечание. На рисунке к определению 1 первый граф не связный, а второй связный.

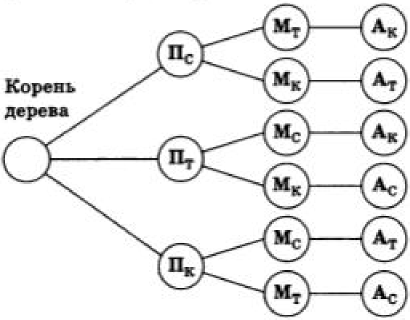
<u>Определение 3.</u> Циклом называется граф, замкнутый по ребрам, т. е. если в таком графе двигаться по ребрам из одной вершины, то можно вернуться в эту же вершину, пройдя по всем ребрам только один раз.



<u>Определение 4.</u> Деревом называется связный граф без циклов.



Рассмотрим иллюстрацию решения задачи 1 в виде дерева.



Анализируя дерево решений, можно отметить, что каждая основная ветвь дерева делится (ветвится) на одно и тоже число ветвей и каждая из получившихся ветвей делится (ветвится) на одно и тоже число ветвей (возможно и другое число ветвей) и т. д. Тогда количество концевых ветвей равно произведению таких чисел. Такие деревья называются **регулярными**.

В дальнейшем мы рассмотрим применение теории графов (регулярного дерева) и для других классов задач.

Примечания. 1. Из корня дерева идут три ветви. Из каждого узла $П_С$, $П_Т$ и $П_К$ по две ветви, а из каждого узла $М_Т$, $М_К$ и $М_С$ только по одной ветви. Итого $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

2. В примере к определению 4 дано нерегулярное дерево.

Описанный способ решения этой и аналогичных задач носит название **принцип умножения**.

> **Пусть количество различных элементов в конечном множестве A_1 равно n_1 (т. е. мощность множества[1] $m(A_1)$ равна n_1), в конечном множестве A_2 число различных элементов равно n_2 $(m(A_2) = n_2)$ и т. д., в конечном множестве A_k число различных элементов равно n_k $(m(A_k) = n_k)$, тогда число возможностей выбрать одновременно из каждого множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ только по одному элементу равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.**

Пример 1. Из одного мешка, в котором лежит 10 различных конфет, можно извлечь одну конфету 10 разными способами ($m(A_1) = 10$). Из двух таких мешков можно извлечь по одной конфете 100 разными способами:

$m(A_1) = 10;\quad m(A_2) = 10;\quad 10 \cdot 10 = 100$ и т. д.

Задача 3. На постоянную уборку школы: коридора, лестницы и туалета назначили уборщиц Парамонову, Михайлову и Назарову. Для того чтобы справедливо распределить нагрузку по уборке, каждый день каждая из них убирала или коридор, или лестницу, или туалет.

Им предложили составить график уборки (см. рисунок).

Здесь в левом столбце первые буквы фамилий, а в верхней строчке первые буквы помещений. Сколько таких различных графиков необходимо иметь, чтобы исчерпать все возможные варианты?

	К	Л	Т
П			
М			
Н			

Для решения задачи занумеруем каждую пустую клетку порядковым номером.

	К	Л	Т
П	1	2	3
М	4	5	6
Н	7	8	9

[1] О понятии мощности множества см. книгу А. Х. Шахмейстера «Множества. Функции. Последовательности».

Далее выберем, например, первую клетку первого столбца с номером $\boxed{1}$.

Следующую клетку во втором столбце выбираем так, чтобы она не находилась на уже использованной первой строке. Пусть это будет клетка $\boxed{5}$.

Затем выбираем клетку следующего столбца, в данном случае третьего. Причем так, чтобы она не принадлежала уже использованным строкам. В данном случае это будет клетка $\boxed{9}$.

Получим набор клеток 1) $\boxed{1}\boxed{5}\boxed{9}$.

Аналогично рассуждая, получим и остальные наборы

2) $\boxed{1}\boxed{8}\boxed{6}$; 3) $\boxed{4}\boxed{2}\boxed{9}$;

4) $\boxed{4}\boxed{8}\boxed{3}$; 5) $\boxed{7}\boxed{5}\boxed{3}$; 6) $\boxed{7}\boxed{2}\boxed{6}$.

Очевидно, шести дней хватит, чтобы использовать все варианты. Значит, на каждый день в школе можно составить свой график уборки помещений.

Понедельник			
	К	Л	Т
П	x		
М		x	
Н			x

Вторник			
	К	Л	Т
П	x		
М			x
Н		x	

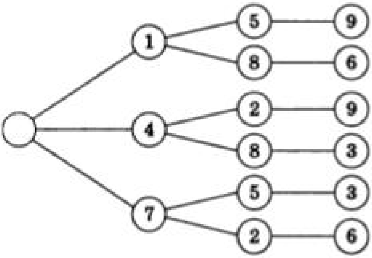
Среда			
	К	Л	Т
П		x	
М	x		
Н			x

Четверг			
	К	Л	Т
П			x
М	x		
Н		x	

Пятница			
	К	Л	Т
П			x
М		x	
Н	x		

Суббота			
	К	Л	Т
П		x	
М			x
Н	x		

Конечно, такую таблицу можно иллюстрировать графиком. В данном случае, регулярным деревом.



Это зачастую более удобно, так как требуется только одна таблица с занумерованными клетками и одно регулярное дерево.

Задача 4. Сколькими способами 6 человек могут занять очередь в железнодорожную кассу?

Первым может быть любой из шести человек (6 способов), вторым любой из оставшихся пяти (пять способов), третьим любой из оставшихся четырех (четыре способа), четвертым любой из оставшихся трех человек (три способа) и т. д. В результате получим $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ — произведение шести множителей. Это и есть общее количество всех способов, которыми могут шесть человек образовать очередь.

Вывод. Для того чтобы найти число всех способов, необходимо **перемножить число способов** занятия каждого из мест в очереди.

Теперь попытаемся обобщить некоторые подходы.

Определение 5. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел называют «эн факториал» (эн факториал по-английски примерно переводится как «состоящий из n множителей»).
Обозначают $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Таблица первых десяти значений $n!$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	36288800

Как видно, $n!$ растет весьма стремительно.

<u>Определение 6.</u> Если каждому элементу множества A по некоторому правилу ставится в соответствие элемент того же множества A, то говорят, что дано отображение множества A в себя.

Пример 2. Возьмем $A = \{a, b, c, k\}$. Тогда отображениями множества A в себя будут:

а) $\begin{pmatrix} a & b & c & k \\ a & b & c & k \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b & c & k \\ b & b & a & a \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b & c & k \\ k & k & k & k \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} a & b & c & k \\ a & c & k & b \end{pmatrix}$.

<u>Определение 7.</u> Перестановкой конечного множества из k элементов называют его отображение в себя, при котором *различные* элементы переходят в *различные*. Перестановки обозначают P_k.

Пример 3. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Вопрос: какие из соответствий являются перестановками?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: только а), б) и д).

Почему? В случае в) числу 3 сопоставляется 1 и числу 6 сопоставляется 1, но по определению перестановки различные элементы множества переходят в различные элементы этого же множества, а здесь два различных элемента 3 и 6 переходят в один и тот же элемент 1.

В случае г) соответствие вообще не является отображением множества A в себя, так как $0 \notin A$ (т.е. не принадлежит $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Ввиду того, что после перестановки сами элементы множества не изменяются, а меняется лишь их порядок, то можно говорить об их упорядочиваниях.

Очень важно, что отображения

а) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&3&4&1&5&6 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 1&2&3&4&5&6 \end{pmatrix}$ и д) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&5&4&3&2&1 \end{pmatrix}$

различны, а тогда можно говорить, что это **разные** упорядочивания множества A. С этой точки зрения можно дать несколько иное определение перестановки.

Определение 8. Перестановками из n элементов называют различные упорядочивания данного конечного множества, состоящего из n элементов.

Теорема. Число перестановок множества, состоящего из n элементов равно $n!$. Т. е. n различных элементов можно занумеровать числами от 1 до n ровно $n!$ способами. Иными словами, $P_n = n!$.

Примечания. 1. Полагая, что пустое множество (т. е. множество, не содержащее ни одного элемента) можно упорядочить единственным способом, определим $0! = 1$.

2. Область определения функции $f(n) = n!$ (факториала): $D(f) = \{n \in \mathbb{N}, n = 0\}$ или $D(f) = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Это важно понимать и учитывать при решении уравнений с использованием $n!$.

Практикум 1

1. Составьте всевозможные перестановки из элементов множества A, если $A = \{m; n; p; k\}$, иллюстрируйте решение, используя понятие регулярного дерева.

2. Вычислите: а) $\frac{9!}{6!}$; б) $\frac{6! - 4!}{120}$.

3. Упростите: а) $\frac{(m+4)!}{(m+1)!}$; б) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$.

4. Решите уравнения:

   а) $\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{20P_{n-2}}{P_{n-4}} = \frac{P_n}{P_{n-5}}$.

5. Из цифр 0, 2, 4 и 5 образованы четырехзначные числа. Найдите количество всех таких чисел, если в них нет одинаковых цифр.

6. Из цифр 1, 3, 4, 6, 7 составьте множество всех возможных пятизначных чисел без повторяющихся цифр. Сколько среди этих пятизначных чисел таких, которые:

   а) начинаются с цифры 7;

   б) не начинаются с цифры 1;

   в) начинаются с 34;

   г) не начинаются с 673;

   д) четные.

7. Братья Андрей, Миша, Павел и Рома ходили в летние каникулы в парк. В парке можно было покачаться на больших качелях (К), попрыгать на батуте (Б), покататься в вагончиках на горках (Г) или пострелять в тире (Т). Причем каждый брат за одно посещение мог выбрать только какое-нибудь одно из развлечений, которое не выбрали другие братья.

Для того чтобы не запутаться, братья составили таблицу, где в левом столбце отметили свои начальные буквы имен, а в верхней строчке начальные буквы развлечений.

	К	Б	Г	Т
А				
М				
П				
Р				

Вопрос: сколько выходных потребуется для того, чтобы коллективный выбор различных развлечений не повторялся?

8. Вычислите:

а) $f(n) = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)!}$; $f(4) = ?$

б) $f(n) = \dfrac{(2n^2-3)!}{(n^2-1)! \cdot 9!}$; $f(3) = ?$

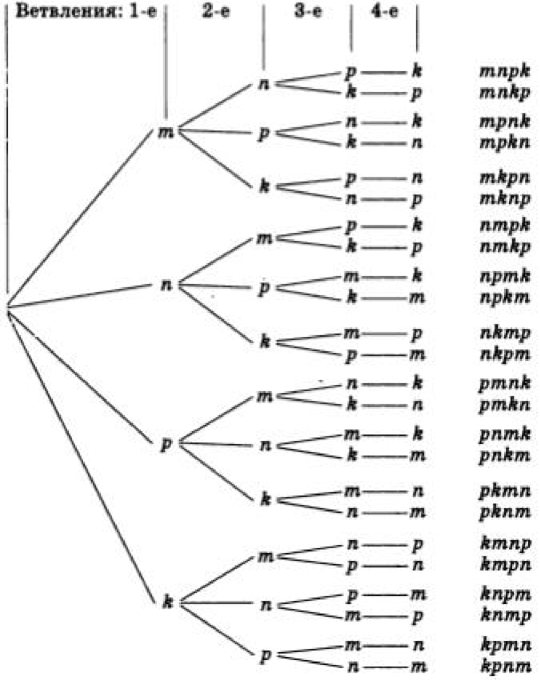
в) $f(n) = \dfrac{(n^2-2n-3)! \cdot 8!}{(3n-1)!(n+2)!}$; $f(5) = ?$

Решение практикума 1

1. Составьте всевозможные перестановки из элементов множества A, если $A = \{m; n; p; k\}$, иллюстрируйте решение, используя понятие регулярного дерева.

Очевидно, что мы имеем дела с перестановками четырехэлементного множества $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. В данном примере особенно очевидно значение упорядоченности для понимания определения перестановок.

Построим регулярное дерево решений.



Примечание. Этот метод подходит для решения и иного типа задач:

а) Сколько **двухэлементных** упорядоченных множеств (т. е. множеств пар) можно составить из множества $A = \{m; n; p; k\}$?

Напомним: пары $(a; b) = (a_1; b_1)$ тогда и только тогда, когда $a = a_1$ и $b = b_1$. Это и есть определение упорядоченности пар, а тогда $(a; b) \neq (b; a)$ при $a \neq b$.

Иллюстрируем решение новой задачи, используя регулярное дерево решений.

Очевидно, что их столько, сколько концевых ветвей:

$$\begin{matrix} mn & nm & pm & km \\ mp & np & pn & kn \\ mk & nk & pk & kp \end{matrix}, \text{ т. е. } 4 \cdot 3 = 12.$$

б) Сколько **трехэлементных** упорядоченных множеств (т. е. упорядоченных троек) можно составить из элементов множества $A = \{m; n; p; k\}$?

Напомним: упорядоченные тройки $(a; b; c) = (a_1; b_1; c_1)$ равны тогда и только тогда, когда $a = a_1$, $b = b_1$ и $c = c_1$ одновременно. В других случаях это разные тройки.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что этих упорядоченных трехэлементных множеств столько, сколько концевых ветвей будет при третьем ветвлении, т. е. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$:

$$\begin{matrix} mnp & nmp & pmn & kmn \\ mnk & nmk & pmk & kmp \\ mnk & npm & pnm & knp \\ mnp & npm & pnk & knm \\ mkp & nkm & pkm & kpm \\ mkn & nkp & pkn & kpn. \end{matrix}$$

Примечание. Обратите внимание, что упорядоченных четверок тоже 24, так как по упорядоченной тройке четвертый элемент определяется однозначно.

2. Вычислите:

а) $\frac{9!}{6!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!} = 9\cdot8\cdot7 = 504.$

б) $\frac{6!-4!}{120} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 - 4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5} =$

$= \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(6\cdot5-1)}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5} = \frac{29}{5} = 5{,}8.$

3. Упростите:

а) $\frac{(m+4)!}{(m+1)!} = \frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)!}{(m+1)!} =$
$= (m+4)(m+3)(m+2).$

б) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = (n-1)(n-2).$

4. Решите уравнения:

а) $\frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{4};$

$$\frac{(n-2)!}{n\cdot(n-1)(n-2)!} + \frac{(n-1)!}{(n+1)n\cdot(n-1)!} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{4}; \quad \frac{n+1+n-1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{2n}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{8};$$

$$8 = n^2 - 1; \quad n^2 = 9; \quad \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = -3 \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Ответ: $n = 3$.

Примечание. $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел.

б) $\dfrac{20P_{n-2}}{P_{n-4}} = \dfrac{P_n}{P_{n-5}};$ $\qquad D(У) = \{n \geqslant 5,\ n \in \mathbb{N}\};$

$$\frac{20(n-2)!}{(n-4)!} = \frac{n!}{(n-5)!};$$

$$\frac{20(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!};$$

$$20\underline{(n-2)(n-3)} = n(n-1)\underline{(n-2)(n-3)}(n-4);$$

$$(n-2)(n-3)\big(20 - n(n-1)(n-4)\big) = 0,$$

значит, $n = 2$ и $n = 3$, но $2 \notin D(У)$; $3 \notin D(У)$, тогда

$20 = \left(n^2 - n\right)(n-4); \quad n^3 - 5n^2 + 4n = 20;$

$n^2(n-5) + 4(n-5) = 0; \quad (n-5)(n^2+4) = 0; \quad n = 5.$

$n = 5 \in D(У) = \{n \geqslant 5,\ n \in \mathbb{N}\}.$

Проверка. $\dfrac{20(5-2)!}{5-4!} = \dfrac{5!}{(5-5)!};$ $\quad \dfrac{20 \cdot 3!}{1!} = \dfrac{5!}{1!},$

т. е. $5 \cdot 4 \cdot 3! = 5!$ — истина.

Ответ: $n = 5$.

5. Из цифр 0, 2, 4 и 5 образованы четырехзначные числа. Найдите количество всех таких чисел, если в них нет одинаковых цифр.

Так как мы имеем дело в данной задаче с перестановками, то всего из четырех цифр можно составить $4!$ чисел. Но цифра 0 на первом месте стоять не может. Чисел, которые можно образовать из трех оставшихся, будет $P_3 = 3!$.

Значит всего четырехзначных чисел, отвечающих условию задачи, будет $4! - 3! = 4 \cdot 3! - 3! = 3 \cdot 3! = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{18}$.

6. Из цифр 1, 3, 4, 6, 7 составили все возможные пятизначные числа без повторяющихся цифр. Сколько среди этих пятизначных чисел таких, которые:

а) начинаются с цифры 7.

Поставим цифру 7 на первое место, тогда неиспользованных цифр будет 4. Значит $P_4 = 4! = \boxed{24}$ — число любых пятизначных чисел без повторения цифр, у которых 7 стоит на первом месте.

б) не начинаются с цифры 1.

Всего из данных цифр можно образовать $P_5 = 5!$ пятизначных чисел (без повторения цифр).

Исключим из этого числа пятизначных чисел те, у которых 1 стоит на первом месте. Очевидно, таких будет столько же, сколько существует перестановок из оставшихся четырех цифр 3, 4, 6, 7, т.е. $4!$.

Значит, число пятизначных чисел, отвечающих условию задачи, будет

$5! - 4! = 5 \cdot 4! - 4! = 4 \cdot 4! = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{96}$.

в) начинаются с 34. Так как остается только комбинация из цифр 1, 6, 7, то количество таких чисел это просто перестановка $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{6}$.

г) не начинаются с 673.

Найдем вначале количество пятизначных чисел, которые начинаются с 673. Так как остались только цифры 1 и 4, то это $P_2 = 2 \cdot 1 = 2$.

Всего пятизначных чисел из цифр 1, 3, 4, 6, 7 без повторения $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, значит общее количество пятизначных чисел, отвечающих условию задачи, $5! - 2! = \boxed{118}$

д) четные.

Пусть цифра 6 стоит на последнем месте. Таких пятизначных чисел без повторения цифр будет 4! Аналогично рассуждая, получим 4! пятизначных чисел без повторения цифр, у которых на последнем месте стоит цифра 4.

Итого $4! + 4! = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{48}$ — количество четных четырехзначных чисел без повторения цифр, составленных из цифр 1, 3, 4, 6. 7.

7. Братья Андрей, Миша, Павел и Рома ходили в летние каникулы в парк. В парке можно было покачаться на больших качелях (К), попрыгать на батуте (Б), покататься в вагончиках на горках (Г) или пострелять в тире (Т). Причем каждый брат за одно посещение мог выбрать только какое-нибудь одно из развлечений, которое не выбрали другие братья.

Для того чтобы не запутаться, братья составили таблицу, где в левом столбце отметили свои начальные буквы имен, а в верхней строчке начальные буквы развлечений.

	К	Б	Г	Т
А				
М				
П				
Р				

Вопрос: сколько выходных потребуется для того, чтобы коллективный выбор различных развлечений не повторялся?

Занумеруем пустые клетки порядковыми номерами.

	К	Б	Г	Т
А	1	2	3	4
М	5	6	7	8
П	9	10	11	12
Р	13	14	15	16

Для начала возьмем клетку $\boxed{1}$, затем клетку $\boxed{6}$, находящуюся на пересечении не использованных ранее столбцов и строчек. Далее $\boxed{11}$, также находящуюся на пересечении ранее не использованных столбцов и строчек. И, наконец, осталась только клетка $\boxed{16}$.

Итак, 1) | 1 | 6 | 11 | 16 |,

Первый возможный выбор братьев, который можно рассмотреть как А → К, М → Б, П → Г, Р → Т.

Таких выборов, в которых использована $\boxed{1}$, будет шесть:

2) | 1 | 6 | 15 | 12 | 3) | 1 | 10 | 7 | 16 |

4) | 1 | 10 | 8 | 15 | 5) | 1 | 14 | 7 | 12 | 6) | 1 | 14 | 11 | 8 |

Аналогично рассуждая, получим по шесть выборов при использовании $\boxed{5}$, $\boxed{9}$ и $\boxed{13}$. Всего получится $6 \cdot 4 = 24$ выходных, чтобы использовать все возможные и различные не повторяющиеся наборы развлечений. Очевидно, что после нумеровки, можно было использовать построение регулярного дерева для решения данной задачи.

8. Вычислите:

а) $f(n) = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)!}$; $f(4) = \dfrac{8!}{7!} = \dfrac{8 \cdot 7!}{7!} = \boxed{8}$.

б) $f(n) = \dfrac{(2n^2-3)!}{(n^2-1)! \cdot 9!}$; $\boxed{(a \cdot b)! \neq a! \cdot b!}$

$$f(3) = \frac{15!}{8! \cdot 9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{13 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 2}{8 \cdot 6 \cdot 4} = \boxed{89{,}375}.$$

в) $f(n) = \dfrac{(n^2-2n-3)! \cdot 8!}{(3n-1)!(n+2)!}$;

$$f(5) = \frac{12! \cdot 8!}{14! \cdot 7!} = \frac{8}{14 \cdot 13} = \boxed{\frac{4}{91}}.$$

Тренировочная работа 1

Вариант 1

1. Вычислите: а) $\frac{8!}{5!}$; б) $\frac{5!-3!}{4!}$.

2. Сколько вариантов расписания уроков возможно составить, если в день шесть уроков: математика, русский язык, география, биология, физкультура, информатика.

3. Сколько вариантов расписания уроков можно составить в предыдущей задаче, если:

   а) урок математики должен быть только первым?

   б) урок физкультуры не может быть первым?

   в) урок русского языка не может быть ни первым, ни шестым?

   г) урок биологии может быть или четвертым, или шестым?

   д) урок математики и урок информатики должны стоять рядом?

4. Решите уравнения:

   а) $\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{1}{4}$; б) $(2x)!+3(x-1)!=27$.

5. Решите неравенство $\frac{x^3\left(25x^2-1\right)}{(5x+1)!}<\frac{4}{5(5x-2)!}$.

6. а) Сколько существует двухзначных чисел, все цифры которых нечетные и не повторяются?

   б) Сколько существует двухзначных чисел, все цифры которых четные и могут повторяться?

   в) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и могут повторяться?

   г) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные и не повторяются?

Вариант 2

1. Вычислите: а) $\frac{7!}{4!}$; б) $\frac{10!-8!}{7!\cdot 6!}$.

2. Сколько шестизначных кодов для открывания замка можно составить из цифр 2, 3, 5 и трех букв A, B и C, если в коде не должны повторяться ни буквы, ни цифры?

3. Сколько шестизначных кодов можно составить из цифр и букв предыдущей задачи, если:

а) буква A должна быть только первой?

б) цифра 1 не должна быть первой?

в) буква C не может стоять ни на первом, ни на шестом месте?

г) цифра 5 может стоять или на третьем, или на шестом месте?

д) буквы B и C должны стоять рядом?

4. Решите уравнения:

а) $\frac{(m-1)!}{(m+1)!}+\frac{m!}{(m+2)!}=\frac{1}{4}$;

б) $(4y+1)!+3\cdot y!=123$.

5. Решите неравенство $\frac{9}{3(3y-2)!}>\frac{y^3\left(9y^2-1\right)}{(3y+1)!}$.

6. а) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и не повторяются?

б) Сколько существует двухзначных чисел, все цифры нечетные и могут повторяться?

в) Сколько существует двухзначных чисел, все цифры которых четные и не повторяются?

г) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные и могут повторяться?

Решение тренировочной работы 1

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 56 \cdot 6 = \boxed{336}$.

б) $\dfrac{5! - 3!}{4!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3! - 3!}{4 \cdot 3!} = \dfrac{3! \cdot (20 - 1)}{4 \cdot 3!} = \dfrac{19}{4} = 4\dfrac{3}{4} = \boxed{4{,}75}$.

2. Сколько вариантов расписания уроков возможно составить, если в день шесть уроков: математика, русский язык, география, биология, физкультура, информатика?

В данной задаче мы имеем дело с различными по порядку следования шестью различными уроками, т. е. с различными по упорядочиванию шестиэлементными множествами, состоящими из шести элементов. Значит это перестановка: $P_6 = 6! = \boxed{720}$ способов.

3. Сколько вариантов расписания уроков можно составить в предыдущей задаче, если:

а) урок математики должен быть только первым?

Так как урок математики должен быть только первым, то для остальных уроков остаются варианты расписания только из оставшихся пяти предметов,

т. е. $P_5 = 5! = \boxed{120}$ вариантов.

б) урок физкультуры не может быть первым?

Так как урок физкультуры не может быть первым, то из всего количества всех вариантов уроков $P_6 = 6! = 720$ необходимо исключить случаи, когда урок проходит только первым.

Тогда $P_6 - P_5 = 6! - 5! = 6 \cdot 5! - 5! = 5 \cdot 5! = 5 \cdot 120 = \boxed{600}$ возможных вариантов расписания.

в) урок русского языка не может быть ни первым, ни шестым?

Так как русский язык не может быть ни первым, ни шестым, то эти случаи необходимо исключить:

$P_6 - 2P_5 = 6! - 2 \cdot 5! = 6 \cdot 5! - 2 \cdot 5! = 4 \cdot 5! = 4 \cdot 120 = \boxed{480}$ возможных вариантов, при которых русский язык не будет проводиться ни на первом, ни на шестом уроке.

г) урок биологии может быть или четвертым, или шестым?

Так как урок биологии возможно проводить или на четвертом, или на шестом уроке, то на четвертом уроке он может быть проведен в $5!$ вариантах, и на шестом уроке биология может быть проведена $5!$ случаях.

Итого всего $2 \cdot 5!$ вариантов расписания, при которых биология проводится или на четвертом, или на шестом уроке, т. е. $2 \cdot 5! = \boxed{240}$ способов.

д) урок математики и урок информатики должны стоять рядом?

Так как уроки математики и информатики должны стоять рядом, то будем сначала считать пару математика — информатика как один предмет.

Тогда из получившихся пяти учебных предметов можно составить только $P_5 = 5!$ вариантов расписания.

Но двухэлементное множество (математика и информатика) можно упорядочить только $2!$ способами. Значит общее количество вариантов будет в $2!$ раз больше.

Таким образом, $2! \cdot 5! = \boxed{240}$ — количество всех вариантов расписания, при которых уроки математики и информатики стоят рядом.

4. Решите уравнение:

а) $\dfrac{n!}{(n+2)!}+\dfrac{(n+1)!}{(n+3)!}=\dfrac{1}{4};$ $\qquad D(У):\ \left[\begin{array}{l} n=0 \\ n\in\mathbb{N}\end{array}\right.$

$$\frac{n!}{(n+2)(n+1)n!}+\frac{(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{4(n+3+n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=1; \quad \frac{8(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}=1;$$

$$8=(n+1)(n+3); \quad n^2+4n+3-8=0;$$

$$n^2+4n-5=0; \quad \left[\begin{array}{l} n=-5\notin D(У) \\ n=1\end{array}\right. .$$

Ответ: $n=1$.

б) $(2x)!+3(x-1)!=27.$

$D(У):\ \left[\begin{array}{l} x-1\in\mathbb{N} \\ x-1=0\end{array}\right.$, тогда $x\in\mathbb{N}$.

Заметим, что $\boxed{(m\cdot n)!\neq m!\cdot n!}$.

Попробуем задачу решить методом подбора.

1. Пусть $x=1$, тогда $2!+3\cdot 0!=27;\quad 3=27$ — ложь.
2. Пусть $x=2$, тогда $4!+3\cdot(1)!=27;$
   $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1+3\cdot 1=27$ — истина.

Отметим, что $f(n)=n!$ — функция строго монотонно возрастающая, а значит, функция $g(n)=(2n)!+3(n-1)!$ также строго монотонно возрастающая. Поэтому каждое свое значение она принимает только один раз. Следовательно, если корень уравнения существует, то только один.

Ответ: $x=2$.

5. Решите неравенство $\dfrac{x^3(25x^2-1)}{(5x+1)!} < \dfrac{4}{5(5x-2)!}$.

$D(\text{H}):\ \left[\begin{array}{l} 5x-2=0 \\ 5x-2\in \mathbb{N} \end{array}\right.$;

$$\frac{x^3(5x+1)(5x-1)}{(5x+1)(5x)(5x-1)(5x-2)!} < \frac{4}{5(5x-2)!};$$

сокращая, получим $\dfrac{x^2}{(5x-2)!} < \dfrac{4}{(5x-2)!}$,

значит $x^2 < 4$ 

$(5x-2)! \neq 0$.

Придавая $x \in (-2;2)$ значения, при которых $\left[\begin{array}{l} 5x-2\in \mathbb{N} \\ 5x-2=0 \end{array}\right.$,

получим $x \in \left\{\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5};1;1\dfrac{1}{5};1\dfrac{2}{5};1\dfrac{3}{5};1\dfrac{4}{5}\right\}$.

6. а) Сколько существует двухзначных чисел, все цифры которых нечетные и не повторяются?

Рассмотрим нечетные цифры (1, 3, 5, 7, 9).

На первом месте может стоять любая из пяти нечетных цифр, а на втором месте может стоять только любая из оставшихся четырех нечетных цифр.

Итого $5\cdot 4 = \boxed{20}$ таких чисел. Здесь и далее используется известное правило умножения.

б) Сколько существует двухзначных чисел, все цифры которых четные и могут повторяться?

Из всех четных цифр на первом месте может стоять только любая из четырех четных цифр 2, 4, 6, 8. На втором любая из пяти четных цифр, так как цифры могут повторяться.

Итого $5\cdot 4 = \boxed{20}$ — количество таких чисел.

в) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и могут повторяться?

Очевидно, что на первом месте может стоять любая из пяти нечетных цифр. На втором месте — любая из пяти нечетных цифр, так как цифры могут повторяться.

И на третьем месте также может стоять любая из пяти нечетных цифр. Значит $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = \boxed{125}$.

г) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные и не повторяются?

Рассмотрим четные цифры 0, 2, 4, 6, 8.

На первом месте может стоять любая из четырех цифр 2, 4, 6, 8 (цифра 0 стоять на первом месте не может). На втором месте может стоять любая из оставшихся четырех четных цифр (включая и цифру 0). На третьем месте может стоять любая из оставшихся трех четных цифр.

Итого $4 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{48}$.

Решение тренировочной работы 1

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$

б) $\frac{10! - 8!}{7! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8! - 8!}{7! \cdot 6!} = \frac{8!(10 \cdot 9 - 1)}{7! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{7! \cdot 6!} \cdot 89 =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 89}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{89}{45} = 1\frac{44}{45}.$

2. Сколько шестизначных кодов для открывания замка можно составить из цифр 2, 3, 5 и трех букв A, B и C, если в коде не должны повторяться ни буквы, ни цифры.

Так как в задаче речь идет о различных упорядочиваниях шестиэлементного множества, то не имеет значения, цифры это или буквы — все элементы различны. Значит, мы имеем дело здесь с числом всех перестановок $P_6 = 6! = \boxed{720}$ — число всех кодов составленных из букв A, B и C, а также цифр 2, 3 и 5.

3. Сколько шестизначных кодов можно составить из цифр и букв предыдущей задачи, если:

а) буква A должна быть только первой?

Так как A должна стоять только на первом месте, то для оставшихся пяти элементов число перестановок равно $P_5 = 5! = \boxed{120}$ — число возможных кодов.

б) цифра 1 не должна быть первой?

Чтобы цифра 1 не стояла на первом месте, необходимо из числа всевозможных кодов $P_6 = 6!$ вычесть случаи, когда цифра 1 стоит на первом месте ($5!$), т. е.

$P_6 - P_5 = 6! - 5! = 6 \cdot 5! - 5! = 5 \cdot 5! = \boxed{600}.$

в) буква C не может стоять ни на первом, ни на шестом месте?

Для выполнения требования условия задачи необходимо из числа всевозможных кодов исключить случаи нахождения буквы C на первом месте ($5!$) и на шестом месте (также $5!$), т. е.

$6! - 2\cdot 5! = 6\cdot 5! - 2\cdot 5! = 4\cdot 5! = 4\cdot 120 = \boxed{480}$.

г) цифра 5 может стоять или на третьем или на шестом месте?

Чтобы выполнить условие задачи, нужно вычислить все случаи нахождения цифры 5 на третьем месте ($5!$), затем на шестом месте ($5!$) и их сложить, т. е. $2\cdot 5!$ — число кодов, для которых цифра 5 стоит или на третьем или на шестом месте. Итого получается $\boxed{240}$ кодов.

д) буквы B и C должны стоять рядом?

Так как B и C стоят рядом, то, объединив их в один блок, получим $5!$ кодов с блоком. Но блок из двух элементов можно упорядочить только $2!$ способами. Значит число всех кодов из шести элементов в $2!$ раз больше, чем кодов с блоком. Итак, $2!\cdot 5! = \boxed{240}$ кодов.

4. Решите уравнения:

а) $\dfrac{(m-1)!}{(m+1)!} + \dfrac{m!}{(m+2)!} = \dfrac{1}{4}$; $D(У):\ \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ m-1\in\mathbb{N} \end{array}\right.$; $m\in\mathbb{N}$.

$$\frac{(m-1)!}{(m+1)m\cdot(m-1)!} + \frac{m!}{(m+2)(m+1)m!} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{(m+1)m} + \frac{1}{(m+2)(m+1)} = \frac{1}{4};\quad \frac{m+2+m}{m(m+1)(m+2)} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{2(m+1)}{m(m+1)(m+2)} = \frac{1}{4};\quad 8 = m^2+2m;$$

$$m^2+2m-8=0;\quad \left[\begin{array}{l} m=-4\notin D(У) \\ m=2 \end{array}\right.$$

Ответ: $m=2$.

б) $(4y+1)! + 3 \cdot y! = 123$; $\qquad D(У): \ y \geqslant 0$ и $y \in \mathbb{N}$.

Будем решать задачу методом подбора.

Пусть $y = 0$, тогда $(0+1)! + 3 \cdot 0! = 123$ — ложь.

Пусть $y = 1$, тогда $5! + 3 \cdot 1! = 123$,

т. е. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 = 123$ — истина.

Отметим, что $f(n) = n!$ — функция строго монотонно возрастающая, значит и функция $g(y) = (4y+1)! + 3 \cdot y!$ строго возрастающая функция. Поэтому каждое свое значение она принимает только один раз.

Следовательно, если корень уравнения существует, то только один.

Ответ: $y = 1$.

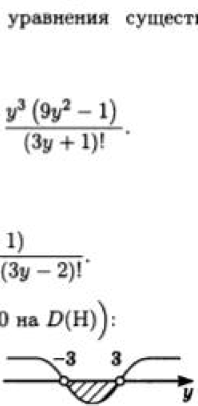
5. Решите неравенство. $\dfrac{9}{3(3y-2)!} > \dfrac{y^3(9y^2-1)}{(3y+1)!}$.

$D(\text{Н}): \ \left[\begin{array}{l} 3y-2=0 \\ 3y-2 \in \mathbb{N} \end{array}\right.$;

$$\frac{9}{3(3y-2)!} > \frac{y^3(3y+1)(3y-1)}{(3y+1)\cdot 3y \cdot (3y-1)(3y-2)!}.$$

Сокращая, получим $\big((3y-2)! \neq 0$ на $D(\text{Н})\big)$:

$\dfrac{9}{3(3y-2)!} > \dfrac{y^2}{3(3y-2)!}$; $\quad y^2 < 9$.



Придавая y значения, при которых $\left[\begin{array}{l} 3y-2=0 \\ 3y-2 \in \mathbb{N} \end{array}\right.$

и $-3 < y < 3$, получим $y \in \left\{\dfrac{2}{3}; 1; 1\dfrac{1}{3}; 1\dfrac{2}{3}; 2; 2\dfrac{1}{3}; 2\dfrac{2}{3}\right\}$.

6. а) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и не повторяются?

Рассмотрим нечетные цифры 1, 3, 5, 7, 9. На первом месте может стоять любая из пяти нечетных цифр.

На втором месте может стоять любая из четырех оставшихся нечетных цифр. На третьем месте — любая из трех оставшихся нечетных цифр.

Итого $5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{60}$ — количество таких чисел.

б) Сколько существует двузначных чисел, все цифры которых нечетные и могут повторяться?

Очевидно, что на первом месте может стоять любая из пяти нечетных цифр. На втором месте также может стоять любая из пяти нечетных цифр, так как цифры могут повторяться.

Итого $5 \cdot 5 = \boxed{25}$ — количество таких чисел.

в) Сколько существует двузначных чисел, все цифры которых четные и не повторяются?

Рассмотрим четные цифры 0, 2, 4, 6, 8.

На первом месте может стоять любая из четырех четных цифр 2, 4, 6, 8 (0 стоять на первом месте не может). На втором месте может стоять любая из оставшихся четных цифр (включая 0).

Итого $4 \cdot 4 = \boxed{16}$ — количество таких чисел.

г) Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные и могут повторяться?

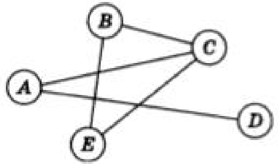
На первом месте может стоять любая из четырех четных цифр 2, 4, 6, 8 (0 стоять на первом месте не может). На втором месте может стоять любая из пяти четных цифр (включая цифру 0). Цифры могут повторяться. На третьем месте также может стоять любая из пяти четных цифр.

Итого $4 \cdot 5 \cdot 5 = \boxed{100}$ — количество таких чисел.

Взвешенный граф

Иногда используется так называемый **взвешенный граф**, где с каждым ребром связано некоторое число (вес). Это число может обозначать, например, расстояние между городами, стоимость перевозки и другие характеристики отношения.

Рассмотрим граф с вершинами A, B, C, D и E. Его можно иначе задать таблицей:

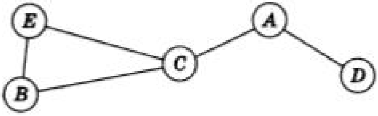


	A	B	C	D	E
A	×		3	4	
B		×	4		2
C	3	4	×		2
D	1			×	
E		2	2		×

В ней, например, число 4 на пересечении строки B и столбца C означает, что, во-первых, есть ребро, соединяющее B и C, а во-вторых, вес этого ребра 4. Пустая клетка на пересечении строки A и столбца B означает, что ребра, соединяющего A и B нет.

Примечания.

1. Граф по заданной таблице (она еще называется весовой матрицей) может быть нарисован и по-другому, например, так:



Данный вид графа более нагляден, из него, например, видно, что это граф с циклом.

2. В приведенном примере матрица (таблица) симметрична относительно главной диагонали (обозначена крестиками). Это означает, например, что стоимости перевозок из B в C и обратно равны (это не всегда так).

Задача. Даны таблицы различных маршрутов проезда между пунктами A, B, C, D и E, а также их стоимость. Найти маршрут наименьшей стоимости проезда из A и B.

1.

	A	B	C	D	E
A			3	1	
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E		2	2		

2.

	A	B	C	D	E
A			3	1	1
B			4		
C	3	4			2
D	1				
E	1		2		

3.

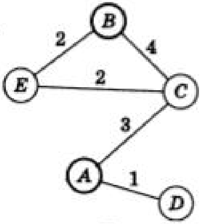
	A	B	C	D	E
A			3	1	4
B			4		2
C	3	4			2
D	1				
E	4	2	2		

4.

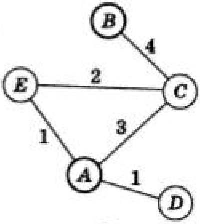
	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

Для каждой таблицы нарисуем соответствующий ей граф (схему дорог и стоимость проезда по ним).

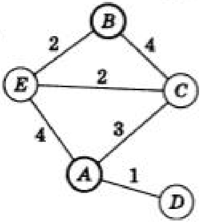
1.



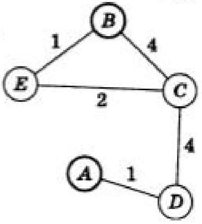
2.



3.



4.



Теперь по графам определим маршруты из A в B и их стоимость.

1: $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{4} B$

$A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{2} B$ — стоимость 7;

2: $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{4} B$

$A \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} C \xrightarrow{4} B$ — стоимость 7;

3: $\boldsymbol{A \xrightarrow{4} E \xrightarrow{2} B}$ — **стоимость 6;**

$A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{4} B$ — стоимость 7;

4: $A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} B$ — стоимость 8;

$A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} C \xrightarrow{4} B$ — стоимость 9.

Таким образом, наилучший (т. е. самый дешевый) маршрут (он выделен жирным шрифтом) определяется таблицей 3.

Примечания.

1. При построении графов из таблиц необходима внимательность. Такой переход повышает наглядность, но добавляет еще одну возможность для ошибки. Из-за невнимательности легко пропустить решение с минимальной стоимостью.

2. Естественно, наглядность графа зависит от удачности расположения его узлов. Предлагаем один из возможных приемов:

   а) сначала расставьте все узлы равномерно по окружности;

   б) затем нарисуйте все связи между узлами и посмотрите, как можно расположить узлы более удобно.

Размещения и сочетания

Задача 1. В отделении 12 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них в наряде старший?

Из 12 солдат старшего можно выбрать только 12 способами. Его помощника из оставшихся 11 солдат только 11 способами. Так как для каждого старшего можно подобрать помощника только 11 способами, а таких старших можно выбрать только 12 способами, то общее число всех возможных способов составить наряд из двух человек, где есть старший — есть произведение, т. е. $12 \cdot 11 = \boxed{132}$ способа составить необходимый наряд из 12 солдат.

Задача 2. Для праздника в детском саду дети раскрашивали флажки в разные цвета. Верхнюю половину флажка красили в один цвет, а нижнюю в другой. Для раскраски у них имелись синяя, красная, желтая и зеленая краска. Сколько различных двухцветных флажков могли подготовить дети к празднику. ( и  — различные флажки)

1 способ. Очевидно, что первый цвет краски в раскраске флажков можно выбрать четырьмя способами, так как даны четыре цвета краски: синяя, красная, желтая и зеленая.

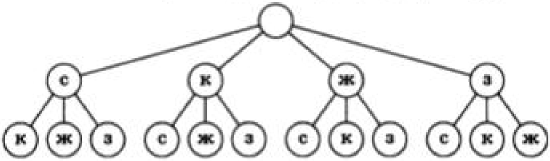
Второй цвет краски для каждого, на половину окрашенного флажка можно выбрать только из трех оставшихся цветов, т. е. тремя способами. Значит $4 \cdot 3 = \boxed{12}$ — количество различных двухцветных флажков.

2 способ. Можно решать как количество комбинаций двух неповторяющихся букв из четырех букв с, к, ж, з.

ск	кс	жс	зж
сж	кж	жк	зс
сз	кз	жз	зк

Итого 12 комбинаций. Естественно, это упорядоченные пары: $\boxed{\text{ск}}$ и $\boxed{\text{кс}}$ — разные пары букв и т. д.

3 способ. Можно решать, используя *регулярное* дерево.



Первых ветвей четыре, а вторых по три от каждой первой. Итого $4 \cdot 3 = 12$.

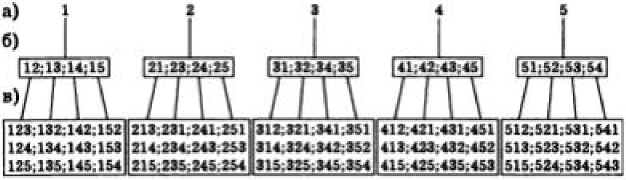
Задача 3. Сколько двухзначных, трехзначных или четырехзначных чисел по отдельности из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить, если цифры в любом числе не повторяются?

а) На первом месте можно поставить любую из данных цифр только пятью способами.

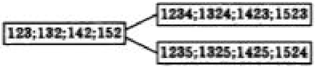
б) На второе место можно поставить цифру только четырьмя способами, из оставшихся четырех цифр. Значит, количество двухзначных чисел будет равно $5 \cdot 4 = 20$.

в) На третье место можно поставить цифру только тремя способами из оставшихся трех цифр. $5 \cdot 4 \cdot 3 = \boxed{60}$.

Графически это можно иллюстрировать так:



г) По аналогии на четвертое место можно поставить цифру только двумя способами из оставшихся двух цифр.

Например, 

Таким образом, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{120}$ — столько четырехзначных чисел можно образовать из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5.

Можно использовать и метод *регулярного* дерева. См. примечания к решению примера 1 в практикуме 1.

Определение 1. Множество с заданным порядком расположения элементов называют упорядоченным множеством.

Например: $(a;b)$ и $(b;a)$; $(a;b;c)$ и $(b;a;c)$; $(a;b;c;d)$ и $(a;c;b;d)$ и т. д.

Напомним, что при записи *множества* порядок расположения элементов не существенен, т. е. $\{a;b\}=\{b;a\}$; $\{a;b;c\}=\{b;a;c\}$; $\{a;b;c;d\}=\{a;c;b;d\}$ и т. д.

Определение 2. В комбинаторике конечные упорядоченные множества называются размещениями.

Вопрос. Интересно, сколько можно образовать упорядоченных двух-, трех-,..., k-элементных множеств из n элементов? Другими словами, сколько таких размещений из n элементов по k элементов в каждом размещении возможно образовать? Записывают это количество так: A_n^k.

Можно сформулировать иначе этот вопрос и дать следующее определение.

Определение 3. Число всех упорядоченных выборов k элементов из n данных называют числом размещений из n элементов по k и обозначают A_n^k.

В задаче 1 мы имеем, конечно, дело с размещениями из 12 элементов по два элемента, т. е. $A_{12}^2=12\cdot 11$. Обратим внимание, что здесь два сомножителя.

В задаче 2 это тоже размещение из четырех по два $A_4^2=4\cdot 3$ — сомножителя тоже два.

И в задаче 3 также имеем дело с размещениями. Причем в вопросе о количестве размещений обратим внимание на то что:

двухзначных чисел $A_5^2=5\cdot 4$ — два сомножителя;

трехзначных чисел $A_5^3=5\cdot 4\cdot 3$ — три сомножителя;

четырехзначных чисел $A_5^4=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ — четыре сомножителя.

Рассматривая аналогичные решения задач 1, 2, 3, 4 и т. д., можно отметить закономерность и сформулировать теорему.

Теорема. Число размещений из n элементов по k равно $A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}}$.

Можно доказать, что $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Действительно, $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$
$= \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Для доказательства домножили числитель и знаменатель на $(n-k)!$. Тогда по определению перестановок $A_n^k = \dfrac{P_n}{P_{n-k}}$.

Очевидно, что при $n = k$ получим
$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$.

Так как $n! = P_n$, то $A_n^n = P_n$, т.е. **перестановки — это частный случай размещений**.

Примечание. Так как существует только одно пустое множество, и оно является частью любого множества, и мы договорились считать, что оно может быть упорядоченным одним-единственным способом, то $A_n^0 = 1$ при $k = 0$.

Упражнение. Вычислите число A_n^k, где $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ и $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, и проверьте правильность таблицы.

Рассмотрим таблицу значений A_n^k при $n \leqslant 7$:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	**1**	**1**						
2	1	**2**	**2**					
3	1	3	**6**	**6**				
4	1	4	12	**24**	**24**			
5	1	5	20	60	**120**	**120**		
6	1	6	30	120	360	**720**	**720**	
7	1	7	42	210	840	2520	**5040**	**5040**

Обозначим A_0^0 количество пустых множеств, образованных из пустых. Но пустое множество только одно, и образовать из него можно только одно — его самого.

Обратите внимание, что, начиная со второй строчки, последние два числа в строчке всегда равны:

$A_1^0 = A_1^1$; $A_2^1 = A_2^2$; $A_3^2 = A_3^3$; $A_4^3 = A_4^4$, т. е. $A_n^{n-1} = A_n^n$.

Это легко доказать:

$$A_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n!;$$

$A_n^n = n!$ (это было доказано).

Из этих утверждений следует, что $\boxed{A_n^{n-1} = A_n^n}$.

Задача 4. Какое количество партий сыграли 8 шахматистов, встречаясь с каждым партнером только один раз?

Рассмотрим различные способы (подходы) решения этой задачи.

а) Если вдуматься, то это набор пар, в котором порядок несущественен. Действительно, A встречается с B или B встречается с A — все равно. Это одна и та же партия.

Двухэлементное множество можно упорядочить только $2! = 2$ способами ($2! = P_2$ — число перестановок). Значит общее число пар (партий) будет в $2!$ раз меньше, чем упорядоченных пар, т. е. в $2!$ раз меньше чем число размещений A_8^2.

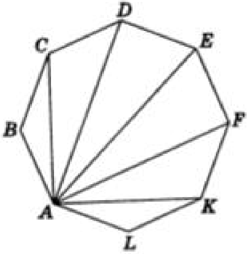
Так как число размещений из 8 элементов по два

$A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$, то общее число партий $\dfrac{A_8^2}{2!} = \dfrac{56}{2} = 28$.

б) Решение этой же задачи можно красиво иллюстрировать геометрически.

Рассмотрим выпуклый восьмиугольник $ABCDEFKL$. Из вершины A можно провести к другим вершинам семь отрезков, т. е. количество встреч (партий) шахматиста A с другими партнерами.

Но таких вершин (шахматистов) 8, а так как отрезки AB и BA и т.д. можно считать равными, то различных отрезков (партий) будет $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.



в) Можно решить задачу, используя турнирную таблицу встреч.

	A	B	C	D	E	F	K	L
A		1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
B	0		$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
C	1	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
D	0	0	1		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
E	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{2}$	0
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1		0	0
K	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$
L	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	

Объясним, как такая таблица заполняется. В строчке A пишется результат встречи для шахматиста A. В столбце B, на пересечении со строчкой A результат встречи для шахматиста B после встречи с шахматистом A.

Пусть E встретился с B. На пересечении 5-й строчки и 2-го столбца стоит 1. Значит, E выиграл у B. На пересечении 2-й строчки и 5-го столбца стоит 0. Значит, B проиграл партию E и т. д.

Общее количество клеток (пар) $8 \cdot 8 = 64$, но партнер сам с собой встречаться не может. Это диагональные клетки. Их будет 8. Исключим их. Получится $64 - 8 = 56$, но пары $(B; E)$ и $(E; B)$ это одна и та же партия. Значит количество партий $\frac{56}{2} = 28$.

г) Можно использовать другой вид записи таблицы.

	A	B	C	D	E	F	K	L
A		$1;0$	$0;1$	$1;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$0;1$
B			$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$1;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$1;0$	$0;1$
C				$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$
D					$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$1;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$
E						$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$
F							$0;1$	$0;1$
K								$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$
L								

Тогда число клеток над диагональю равно сумме клеток в каждом столбце (или строчек):

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{1 + 7}{2} \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Как заметили еще древние греки, сумма клеток такого ступенчатого многоугольника образует арифметическую прогрессию. Если считать клетки такой таблицы, то число клеток в каждом последующем столбце (или строчке) определяется формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$, а число всех клеток треугольной таблицы $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$.

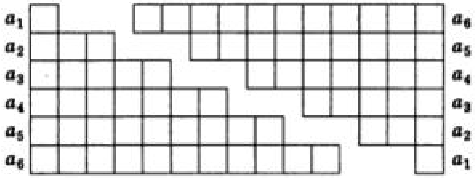
Но здесь дело идет о сумме первых $(n-1)$ членов прогрессии, где $a_1 = 1$; $d = 1$, тогда

$a_{n-1} = 1 + (n-2) \cdot 1 = n - 1$;

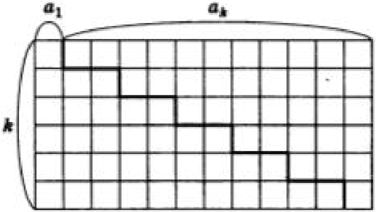
$$S_{n-1} = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

При $n = 8$ $S = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, что и требовалось доказать.

Примечание. Можно рассмотреть известное обобщение суммы площадей ступенчатых фигур



Если их сдвинуть друг к другу, то получится прямоугольник.



Именно подсчет площади ступенчатых фигур в геометрической форме и привел греков к алгоритмам нахождения суммы членов арифметической прогрессии.

$S_{\square} = 6 \cdot 12 = 72; \quad S_{\text{ступ}} = 72 : 2 = 36,$

но это сумма клеток ступенчатой фигуры, равная сумме членов арифметической прогрессии:

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \frac{1+11}{2} \cdot 6 = 36, \ \left(S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k\right)$$

где $a_1 = 1$, $d = 2$, а количество членов $n = 6$.

Задача 5. В магазине есть пять сортов печенья, шесть сортов конфет, четыре сорта шоколада. Сколько различных подарков может предложить магазин, если в подарок входит два различных вида угощения (печенья, конфет, шоколада) различных сортов (по одному).

а) Пусть подарки состоят только из печенья и конфет, тогда для каждого из пяти возможных сортов печенья можно подобрать шесть различных сортов конфет.

Итого $5 \cdot 6 = 30$ различных подарков.

б) Пусть подарки состоят только из печенья и шоколада, тогда каждому из пяти различных сортов печенья можно подобрать четыре различных сорта шоколада.

Итого $5 \cdot 4 = 20$ разных подарков.

в) Пусть подарки состоят только из конфет и шоколада, тогда каждому из шести различных сортов конфет можно подобрать четыре различных сорта шоколада.

Итого $6 \cdot 4 = 24$ различных подарков.

Так как других комбинаций подарков из конфет, печенья и шоколада нет, то общее число подарков есть обычная сумма числа подарков. Итак, $30+20+24=74$ — число различных подарков, которое может предложить магазин в соответствии с условиями задачи.

Очевидно, что здесь мы на интуитивно понятном уровне использовали **правило сложения.**

<u>Определение 4.</u> Рассмотрим конечные множества A_1, A_2, $A_3, \ldots,$ A_k, количество различных элементов в каждом из которых соответственно равно $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ $(m(A_1) = n_1, m(A_2) = n_2, \ldots, m(A_k) = n_k)$, причем у них нет общих элементов. Тогда общее число различных элементов в их объединении равно сумме чисел элементов в каждом из множеств:
$m(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_k) =$
$= n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Отметим, что в этой задаче порядок выбора элементов не существенен.

Возникла необходимость как-то описать новый класс задач.

<u>Определение 5</u>. В комбинаторике конечные множества называют сочетаниями.

Примечание. В сочетаниях порядок не имеет значения.

<u>Определение 6</u>. Число всех способов выбрать k элементов из n данных элементов без учета порядка называют числом сочетаний из n элементов по k и обозначают C_n^k.

Примечание. По-французски C — первая буква слова *combinations*, откуда и произошло название раздела математики, занимающегося подсчетом различных комбинаций, соединений, сочетаний, перестановок каких-то элементов некоторых множеств — **комбинаторики**.

Так как множество, состоящее из k элементов, можно упорядочить только $k! = P_k$ способами, то число сочетаний из n элементов по k будет в $k!$ раз меньше, чем число размещений из n элементов по k.

Теорема. Число сочетаний из n элементов по k C_n^k равно $\dfrac{A_n^k}{k!}$, то есть $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Можно доказать, что $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$:

так как $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$, и $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, то $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

В частности, из этой формулы следует:

а) при $k=1$: $C_n^1 = \dfrac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n.$

Действительно, один элемент из n данных можно выбрать только n способами;

б) при $k=2$ $C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

(для $n=8$ получаем решение задачи о числе партий, сыгранных между собой 8 шахматистами: $C_8^2 = \dfrac{8\cdot 7}{2} = 28$);

в) при $k=0$ $C_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!\cdot 0!} = \dfrac{n!}{n!\cdot 1} = 1$, что очевидно, так как пустое множество принадлежит любому множеству.

Таблица значений C_n^k при $n \leqslant 7$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Очень любопытная таблица. Из анализа ее можно сформировать ряд свойств-гипотез.

а) В первом столбце все числа равны 1, значит $C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = C_3^0 \ldots C_7^0 = 1$. По аналогии с A_0^0:

1. C_0^0 означает количество пустых множеств, которые можно образовать из пустого, но пустое множество только одно, а из него можно образовать только одно множество его самого.

2. $C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = C_3^0 \ldots C_7^0 = 1$ означает, что количество пустых множеств, принадлежащих множествам, всегда одно. Так как пустое множество принадлежит любому множеству и всегда единственно, т. е. $C_n^0 = 1$, что уже доказано.

б) Во втором столбце числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 совпадают с числом элементов в базовом множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$:
$C_1^1 = 1; \quad C_2^1 = 2; \quad C_3^1 = 3; \quad \ldots C_7^1 = 7,$
т. е. $C_n^1 = n$, что уже доказано.

в) Числа по диагонали всегда равны 1.
Значит $C_0^0 = C_1^1 = C_2^2 = C_3^3 = \ldots = C_7^7 = 1$, т. е. количество конечных множеств из n элементов без учета порядка и содержащих n элементов базового множества равно 1. Следовательно, это только само это множество.
Обобщая, имеем $C_n^n = 1$.
Но это свойство, так же как и предыдущие, можно вывести из формулы $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ при $k = n$:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

г) В каждой строчке коэффициенты, равноотстоящие от начала и конца, равны между собой.

$C_3^1 = C_3^{3-1} = C_3^2 = 3;$
$C_4^1 = C_4^{4-1} = C_4^3 = 4;$
$C_5^1 = C_5^{5-1} = C_5^4 = 5;$
$C_5^2 = C_5^{5-2} = C_5^3 = 10;$
$C_6^1 = C_6^{6-1} = C_6^5 = 6;$
$C_6^2 = C_6^{6-2} = C_6^4 = 15;$
$C_7^1 = C_7^{7-1} = C_7^6 = 7;$
$C_7^2 = C_7^{7-2} = C_7^5 = 21;$
$C_7^3 = C_7^{7-3} = C_7^4 = 35;$

Обобщая выдвинутую гипотезу (а ее трудно выдвинуть без анализа таблицы), предположим, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.
Так как $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$,
а $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} =$
$= \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, значит, мы доказали, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

д) Но самое любопытное свойства — это свойство суммы. Действительно, если взять два рядом стоящих числа в любой строчке, то их сумма равна числу, находящемуся в столбце правого из двух чисел, но строчкой ниже.

Геометрически это можно представить так: $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & a+b \\ \cline{2-2}\end{array}$

Например, $C_3^1 + C_3^2 = C_4^2$, так как $3 + 3 = 6$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 6 \\ \cline{2-2}\end{array}$

или $C_5^3 + C_5^4 = C_6^4$, т. е. 10+5=15. $\begin{array}{|c|c|}\hline 10 & 5 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 15 \\ \cline{2-2}\end{array}$

В общем виде это можно сформулировать так:

$$\boxed{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}, \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline C_n^k & C_n^{k+1} \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & C_{n+1}^{k+1} \\ \cline{2-2}\end{array}.$$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!};$$

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!};$$

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!}, \text{ тогда}$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} =$$

$$= n!\left(\frac{1}{(n-k-1)!(k+1) \cdot k!}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

е) Если суммировать все числа по строкам, то окажется, что

1 — в строчке при $n = 0$ сумма равна $1 = 2^0$;

2 — в строчке при $n = 1$ сумма равна $2 = 2^1$;

3 — в строчке при $n = 2$ сумма равна $4 = 2^2$;

4 — в строчке при $n = 3$ сумма равна $8 = 2^3$;

5 — в строчке при $n = 4$ сумма равна $16 = 2^4$;

6 — в строчке при $n = 5$ сумма равна $32 = 2^5$;

7 — в строчке при $n = 6$ сумма равна $64 = 2^6$;

8 — в строчке при $n = 7$ сумма равна $128 = 2^7$.

Таким образом,

$$\begin{array}{ll}
C_0^0 = 2^0 & 1 = 2^0 \\
C_1^0 + C_1^1 = 2^1 & 1 + 1 = 2^1 \\
C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^3 & 1 + 2 + 1 = 2^2 \\
C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 & 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3
\end{array}$$

....

$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7$,
т. е. $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7$.

Гипотеза очевидна: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Если осмыслить сумму $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$, то это ничто иное, как число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов.

Теорема. Число всех подмножеств, образованных из элементов множества, состоящего из n элементов, равно 2^n:
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Бином Ньютона

Рассмотрим известные алгебраические тождества.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

Обобщая, можно написать равенство, где слева — степень двучлена $(a+b)^n$, а справа — многочлен n-й степени:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n = {}& A_0a^n + A_1a^{n-1}b + A_2a^{n-2}b^2 + \ldots + A_ka^{n-k}b^k + \ldots\\
&+ A_{n-k}a^kb^{n-k} + \ldots + A_{n-1}a^1b^{n-1} + A_nb^n.
\end{aligned}$$

Причем, если внимательно присмотреться, то из таблицы следует, что

$$A_0 = C_n^0 = 1, \quad A_n = C_n^n = 1$$
$$A_1 = C_n^1 = n, \quad A_{n-1} = C_n^{n-1} = n$$

....

$$A_k = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

Например, при $n=6$ $k=3$: $C_6^3 = 20$ и т.д., что совпадает с числами в таблице.

Значит можно выдвинуть гипотезу:

$$\boxed{\begin{aligned}
(a+b)^n = {}& C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots\\
&+ C_n^ka^{k-n}b^k + \ldots + C_n^nb^n.
\end{aligned}}$$

Данное равенство называется формулой **бинома Ньютона**.

В классических учебниках по высшей математике формула доказывается методом математической индукции.

Примечание. Между прочим, при $a=b=1$ получается

$(1+1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$

Это еще один способ доказательства известного тождества.

Основные свойства бинома Ньютона.

1. В разложении $(a+b)^n$ содержится $n+1$ слагаемое.

2. Показатель степени при a убывает от n до 0, в любом случае сумма показателей при a и b равна n — показателю степени бинома.

3. Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны между собой $(C_n^m = C_n^{n-m})$.

4. Биномиальные коэффициенты сначала возрастают, а затем убывают.

   Если показатель степени бинома четный, то биномиальный коэффициент среднего слагаемого разложения наибольший.

   Если же показатель степени бинома нечетный, то биполиномиальные коэффициенты двух средних слагаемых равны между собой и являются наибольшими.

5. Так как отсчет биномиальных коэффициентов идет с нуля ($A_0 = C_n^0$, $A_1 = C_n^1$ и т.д.), то в общем виде принято $(k+1)$-е слагаемое разложения считать k-м членом, обозначая его $T_k = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Пример 1. Для $(3x-2)^7$ $T_5 = C_7^5 \cdot 3^2 \cdot x^2 \cdot 2^5$ — шестое слагаемое.

Пример 2. Найдите седьмой член разложения $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

$$T_6 = C_{10}^6 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{10-6} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 210x^{\frac{4}{3}} \cdot x^3 = 210x^{4\frac{1}{3}};$$

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Пример 3. Найдите член разложения $\left(2x^2-3x^{-3}\right)^{10}$, не содержащий x (т.е. содержащий x^0).

Так как $T_k=C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot\left(x^2\right)^{10-k}\cdot(-3)^k\cdot\left(x^{-3}\right)^k$,

то $x^{2(10-k)}\cdot x^{-3k}=x^0$.

Значит $2\cdot(10-k)-3k=0;\quad 20=5k;\quad k=4.$

Ответ: четвертый член разложения (он же пятое слагаемое).

Пример 4. Найдите наибольший член разложения $(1+0{,}1)^{100}$.

Для решения задачи необходимо выяснить, при каких k $T_{k+1}>T_k$, а при каких $T_{k+1}<T_k$.

Рассмотрим

$$\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{C_{100}^{k+1}\cdot(0{,}1)^{k+1}}{C_{100}^k\cdot(0{,}1)^k}=\frac{0{,}1\cdot k!(100-k)!}{(k+1)!(100-k-1)!}=\frac{100-k}{10(k+1)}.$$

$$\frac{T_{k+1}}{T_k}>1 \text{ при } \frac{100-k}{10(k+1)}>1;\quad 90>11k;\quad k<8\frac{2}{11},$$

т.е. при $k\leqslant 8$ коэффициенты возрастают.

$$\frac{T_{k+1}}{T_k}<1 \text{ при } \frac{100-k}{10(k+1)}<1;\quad 90<11k;\quad k>8\frac{2}{11},$$

т.е. при $k\geqslant 9$ коэффициенты убывают.

Значит при $k=9$ T_9 — наибольший член разложения или десятое слагаемое. $T_9=C_{100}^9\cdot 1^{100-9}\cdot(0{,}1)^9$.

Примечание. Очевидно, что есть разница между коэффициентом разложения T_9 и биномиальным коэффициентом, равным C_{100}^9.

Практикум 2 (на решение задач)

1. В классе 25 человек. На выпускном вечере они обменялись своими фотографиями. Сколько фотокарточек было использовано?

2. Сколько подмножеств можно составить из множества $\{a; b; c; d; k; m\}$?

3. Из бригады, состоящей из 21 человека, необходимо послать на профсоюзную конференцию трех человек. Сколько вариантов такого выбора есть?

4. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если все они встретились в партиях между собой? Всего партий было 210.

5. Известно, что в выпуклом многоугольнике 20 диагоналей. Сколько вершин в этом многоугольнике?

6. Сколькими способами можно разделить взвод из 18 солдат на две группы, так чтобы пять человек послать в разведку, а остальных на стрельбу по мишеням?

7. Собрание из 30 депутатов думской фракции для обсуждения законов избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

8. В спец. роте 75 солдат, пять офицеров и восемь сержантов. Необходимо выделить на охрану объектов восемь солдат, двоих сержантов и одного офицера. Сколько вариантов составить наряд существует?

9. Из троих эпидемиологов и восьми терапевтов необходимо составить бригаду из шести врачей. Сколькими способами это можно сделать, если в нее обязательно должен войти хотя бы один эпидемиолог?

10. В бригаде двенадцать газосварщиков и семь электросварщиков. Для производства строительных работ на объекте необходимо пятеро газосварщиков и трое электросварщиков. Сколько возможных вариантов составить нужный набор сварщиков, если известно, что:

а) любой газосварщик и любой электросварщик готовы работать в команде?

б) газосварщик Андрей не хочет работать вместе с газосварщиком Мишей?

в) газосварщик Андрей готов работать, только если будет работать его приятель электросварщик Виталий?

г) восемь газосварщиков заболели гриппом, и одному из электросварщиков придется работать на газосварке?

Решение практикума 2 (на решение задач)

1. В классе 25 человек. На выпускном вечере они обменялись своими фотографиями. Сколько фотокарточек было использовано?

Так как здесь имеем дело с упорядоченным множеством, то это размещение двухэлементных множеств из 25-элементного множества $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$.

Так как каждый из 25 человек получил по 24 фотографии.

2. Сколько всех подмножеств можно составить из множества $\{a; b; c; d; k; m\}$?

Известно, что число всех подмножеств шестиэлементного множества $\{a; b; c; d; k; m\}$ равно

$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64.$

3. Из бригады, состоящей из 21 человека, необходимо послать на профсоюзную конференцию трех человек. Сколько вариантов такого выбора есть?

Так как в задаче речь идет о неупорядоченном множестве (важно только количество делегатов на конференции), т. е. о числе сочетаний C_{21}^3, то

$$C_{21}^3 = \frac{21!}{18! \cdot 3!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18!}{18! \cdot 3!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3!} =$$

$$= 7 \cdot 10 \cdot 19 = \boxed{1330}.$$

4. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если все они встретились в партиях между собой? Всего партий было 210.

Учтем, что встреча шахматиста A с B или B с A — это одна и та же партия. Значит, здесь имеем дело с сочетаниями, т. е. $C_n^2 = 210$. Тогда $\dfrac{n!}{(n-2)2!} = 210$.

Так как $n! = n(n-1)(n-2)!$, то получим

$$\frac{n(n-1)}{2} = 210; \quad n^2 - n - 420 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 21 \\ n = -20 \text{ (посторонний корень)} \end{array}\right.$$

Ответ: $n = 21$.

5. Известно, что в выпуклом многоугольнике 20 диагоналей. Сколько вершин в этом многоугольнике?

Из каждой вершины n-угольника можно провести $n-3$ диагоналей.

Так как вершин n, а каждая диагональ проходит через две вершины, то число всех диагоналей равно $\frac{n}{2}(n-3)$ (так как диагональ AC и CA — одна и та же, то их будет в 2 раза меньше). Получим уравнение

$$\frac{n}{2}(n-3) = 20; \quad n^2 - 3n - 40 = 0; \quad n_{1,2} = \frac{3 \pm 13}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = -5 \end{array}\right..$$

Ответ: 8.

Примечание. Отметим, что эта задача аналогична задаче о восьми шахматистах.

6. Сколькими способами можно разделить взвод из 18 солдат на две группы, так чтобы пять человек послать в разведку, а остальных на стрельбу по мишеням?

Здесь речь идет также только о количестве солдат, а не о порядке их выбора. Поэтому найдем число сочетаний, т. е. количество пятиэлементных подмножеств, составленных из 18-элементного множества.

$$C_{18}^5 = \frac{18!}{13! \cdot 5!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 5!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 14}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 18 \cdot 17 \cdot 28 = \boxed{8568} \quad \left(\text{так как } C_{18}^5 = C_{18}^{13}\right).$$

7. Собрание из 30 депутатов думской фракции для обсуждения законов избирает председателя, секретаря и трех членов редакционной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, что председателя и секретаря можно выбрать A_{30}^2 способами, так как важно, кто председатель, а кто секретарь. Трех членов редакционной комиссии можно выбрать из оставшихся 28 $\left(C_{28}^3 \text{ способов}\right)$ — порядок не существенен. Значит общее количество способов равно

$$A_{30}^2 \cdot C_{28}^3 = 30 \cdot 29 \cdot \frac{28!}{25! \cdot 3!} = 30 \cdot 29 \cdot \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{25! \cdot 3!} =$$
$$= 5 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 = \boxed{2\,850\,120}.$$

8. В спец. роте 75 солдат, пять офицеров и восемь сержантов. Необходимо выделить на охрану объектов восемь солдат, двоих сержантов и одного офицера. Сколько вариантов составить наряд существует?

Так как здесь порядок несущественен, то

а) число способов выбора офицера C_5^1;

б) число способов выбора двух сержантов C_8^2;

в) число способов выбора восьми солдат C_{75}^8;

г) значит вариантов составления наряда $\boxed{C_5^1 C_8^2 C_{75}^8}$.

9. Из троих эпидемиологов и восьми терапевтов необходимо составить бригаду из шести врачей. Сколькими способами это можно сделать, если в нее обязательно должен войти хотя бы один эпидемиолог?

Очевидно, что здесь необходимо рассмотреть несколько случаев.

а) Пусть в бригаду входит один эпидемиолог.

C_3^1 — число возможностей выбрать эпидемиолога;

C_8^5 — число вариантов выбрать пять терапевтов.

Значит, $\boxed{C_3^1 \cdot C_8^5}$ — число способов составить бригаду врачей в данном случае.

б) Пусть в бригаду входят два эпидемиолога.

C_3^2 — число возможностей выбрать эпидемиологов;

C_8^4 — число вариантов выбрать пять терапевтов.

Значит, $\boxed{C_3^2 \cdot C_8^4}$ — число способов составить бригаду врачей в данном случае.

в) Пусть в бригаду входят три эпидемиолога.

C_3^3 — число возможностей выбрать эпидемиологов;

C_8^3 — число вариантов выбрать пять терапевтов.

Значит, $\boxed{C_3^3 \cdot C_8^3}$ — число способов составить бригаду врачей в данном случае.

Тогда в итоге получим $C_3^1 \cdot C_8^5 + C_3^2 \cdot C_8^4 + C_3^3 \cdot C_8^3 = \boxed{434}$ — число всех возможных способов составить бригаду из шести врачей выбранных из трех эпидемиологов и восьми терапевтов.

10. В бригаде двенадцать газосварщиков и семь электросварщиков. Для производства строительных работ на объекте необходимо пятеро газосварщиков и трое электросварщиков. Сколько возможных вариантов составить нужный набор сварщиков, если известно, что:

а) любой газосварщик и любой электросварщик готовы работать в команде?

Так как порядок несуществен, то здесь мы имеем дело с сочетанием.

Итак, $C_{12}^5 \cdot C_7^3 = \dfrac{12!}{7! \cdot 5!} \cdot \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = \boxed{\dfrac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!}}$.

б) газосварщик Андрей не хочет работать вместе с газосварщиком Мишей?

Для того, что бы определить число всех вариантов, при которых газосварщик Андрей и Миша не хотят работать вместе, необходимо из общего числа способов C_{12}^5

исключить число вариантов, когда они работают вместе, т. е. C_{11}^4 (тогда их можно рассматривать как единый блок).

Итак $(C_{12}^5 - C_{11}^4) \cdot C_7^3$ — число всех вариантов, при которых Андрей и Миша вместе не работают.

$$\left(\frac{12!}{7!\cdot 5!} - \frac{11!}{7!\cdot 4!}\right)\cdot\frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{11!}{7!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{12}{5}-1\right)\cdot\frac{7!}{4!\cdot 3!} =$$

$$= \frac{11!\cdot 8}{5\cdot 4!\cdot 4!\cdot 3!} = \boxed{\frac{7\cdot 11!}{5!\cdot 4!\cdot 3!}}.$$

в) газосварщик Андрей готов работать, только если будет работать его приятель электросварщик Виталий?

Из условия следует, что один из вариантов — это когда Андрей будет работать в паре с Виталием. Тогда осталось 11 газосварщиков и 4 электросварщика. Следовательно, число случаев будет равно

$$C_{11}^4 \cdot C_6^2 = \frac{11!}{4!\cdot 7!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{11!}{4!\cdot 7\cdot 2!\cdot 4!} = \boxed{\frac{11!}{7\cdot(4!)^2\cdot 2!}}.$$

Пусть Андрей не работает. Тогда $C_{11}^5 \cdot C_7^3$ — число вариантов образования набора рабочих бригады без Андрея. Значит, общее число вариантов $\boxed{C_{11}^4\cdot C_6^2 + C_{11}^5\cdot C_7^3}$.

г) восемь газосварщиков заболели гриппом, и одному из электросварщиков придется работать на газосварке?

Так как восемь газосварщиков заболѐли, то среди них выбора нет, а для электросварщиков это

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6.$$

А выбрать газосварщика, который будет работать электросварщиком, полагая, что это возможно, можно C_5^1 способами. Значит $\boxed{C_5^1\cdot C_4^3}$ — число возможных вариантов составить команду для работы на объекте в соответствии с условиями задачи.

Тренировочная работа 2

Вариант 1

1. На вечере встречи бывшие одноклассники обменялись рукопожатиями. Сколько одноклассников пришло на встречу, если было зафиксировано 91 рукопожатие?

2. Сколько существует различных телефонных номеров:

а) семизначных (возможен номер из одних нулей)?

б) семизначных, если в номере нет повторяющихся цифр?

в) семизначных, если номер не может начинаться с нуля, и выполняется условие пункта б)?

г) семизначных, у которых на первом и последнем месте стоят цифры 1 и 9, и выполняется условие пункта б)?

д) семизначных, для которых цифры 5 и 6 стоят рядом, и выполняются условия пунктов б) и в)?

3. Сколько четных пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 3, 4, 6?

4. В автомотоклубе тренировались восемь автогонщиков, и обслуживали их двенадцать автомехаников. На соревновании необходимо было выделить двоих автогонщиков, из которых один первый номер, а второй штурман, и троих автомехаников. Сколько возможных вариантов существует, чтобы составить команду на ралли?

5. В библиотеке имеются учебники по математике пяти различных авторов, учебники по физике трех различных авторов и учебники по информатике двух различных авторов. Каково наибольшее число студентов, которые взяли не меньше чем по одной книге по каждому из предметов, причем у каждого из студентов нет одинакового с другими студентами набора книг?

6. Сколько существует четырехзначных чисел, состоящих из цифр одинаковой четности, если рассматриваются случаи:

а) использования неповторяющихся цифр?

б) использования цифр с возможными повторениями?

Вариант 2

1. На выпускной вечер пришли 25 человек. Девушки обменялись между собой поцелуями, а юноши крепкими рукопожатиями. Причем количество рукопожатий относится к числу поцелуев как 7:3. Сколько на вечере было девушек, а сколько юношей?

2. Сколько существует различных семизначных кодов:

   а) из букв A, B, C, D и цифр 0, 2, 3, 4, 5, 9?

   б) если в любом коде нет повторяющихся элементов?

   в) если код не может начинаться с нуля и выполняются условия пункта б)?

   г) буквы A и B стоят или на первом месте, или на последнем?

   д) цифры 5 и 9 стоят рядом, и выполняются условия пунктов б) и в)?

3. Сколько нечетных пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 3, 4, 6?

4. В шахматном клубе университета занимались девять шахматистов I разряда и шесть шахматисток II разряда. Для соревнований необходимо выставить команду из троих мужчин на 1-ю, 2-ю и 3-ю доску и двух женщин на 4-ю и 5-ю доску. Сколько существует возможных вариантов составить команду?

5. В спортклубе на складе для тренировок есть три различные марки велосипедов, два вида различных шлемов и четыре вида различных комплектов одежды. Каково наибольшее число спортсменов, которые взяли не меньше чем по одному велосипеду, шлему и комплекту одежды?

6. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3 (найдите два способа решения)?

Решение тренировочной работы 2

Вариант 1

1. На вечере встречи бывшие одноклассники обменялись рукопожатиями. Сколько одноклассников пришло на встречу, если было зафиксировано 91 рукопожатие?

Так как порядок рукопожатий не имеет значения, то мы имеем дело с сочетаниями.

Тогда $C_n^2 = 91$, т. е. $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 91$; $\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 91$;

$n^2 - n = 182$; $n^2 - n - 182 = 0$; $\left[\begin{array}{l} n = 14 \\ n = -13 \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$.

Ответ: на встречу пришли 14 человек.

2. Сколько существует различных телефонных номеров:

а) семизначных (возможен номер из одних нулей)?

Так как на первом месте возможно набрать 10 цифр, на втором 10 цифр и т. д., то всего существует $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$ способов.

б) семизначных, если в номере нет повторяющихся цифр?

Так как повторений цифр нет, то имеем дело с $A_{10}^7 = \dfrac{10!}{(10-7)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ различных номеров.

в) семизначных, если номер не может начинаться с нуля, и выполняется условие пункта б)?

Так как ноль не может быть на первом месте, то из общего числа возможных различных номеров A_{10}^7 необходимо вычесть число вариантов, при которых ноль на первом месте A_9^6.

Тогда $A_{10}^7 - A_9^6 = \dfrac{10!}{3!} - \dfrac{9!}{3!} = \dfrac{9 \cdot 9!}{3!} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9!$ — число любых различных семизначных номеров.

г) семизначных, у которых на первом и последнем месте стоят цифры 1 и 9, и выполняется условие пункта б)?

Так как первое и последнее место занято, то осталось пять мест, т.е. A_8^5 — число возможных телефонных номеров. Далее нужно учесть, что цифры 1 и 9 могут меняться местами. Итак,

$$2A_8^5 = 2\cdot\frac{8!}{3!} = 2\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3\cdot 2\cdot 1} = 112\cdot 5! = 112\cdot 120 = \boxed{13\,440}.$$

д) семизначных, для которых цифры 5 и 6 стоят рядом, и выполняются условия пунктов б) и в)?

Так как цифры 5 и 6 стоят вместе, то мысленно их объединим, тогда возможен выбор только на шесть мест $\left(A_9^6\right)$. Но необходимо исключить нахождение 0 на первом месте $\left(A_8^5\right)$, тогда количество способов равно

$$A_9^6 - A_8^5 = \frac{9!}{3!} - \frac{8!}{3!} = \frac{8!}{3!}(9-1) = \frac{8\cdot 8!}{3!} = \frac{4}{3}8!.$$

Учтем, что цифры 5 и 6 могут меняться местами, поэтому способов набора будет в 2 раза больше. Итак, $\frac{8}{3}\cdot 8!$ — число различных семизначных телефонных номеров, у которых цифра 0 не стоит на первом месте, и цифры 5 и 6 стоят рядом.

3. Сколько четных пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 3, 4, 6?

Пятизначное число может быть четным если:

а) цифра 0 стоит на последнем месте, т.е. $A_4^4 = 4!$;

б) если цифра 4 стоит на последнем месте, а цифра 0 не на первом месте, значит, из A_4^4 вариантов надо исключить случаи, когда ноль на первом месте, т.е. $A_3^3 = 3!$, тогда $A_4^4 - A_3^3 = 4! - 3! = 3\cdot 3!$;

в) если цифра 6 стоит на последнем месте, а 0 не на первом. По аналогии, $A_4^4 - A_3^3 = 4! - 3! = 3\cdot 3!$.

Тогда всего четных пятизначных чисел из цифр 0, 1, 3, 4, 6 можно составить $4! + 3\cdot 3! + 3\cdot 3! = 4! + 6\cdot 3! = 24 + 6\cdot 6 = \boxed{60}$.

4. В автомотоклубе тренировались восемь автогонщиков, и обслуживали их двенадцать автомехаников. На соревновании необходимо было выделить двоих автогонщиков, из которых один первый номер, а второй штурман, и троих автомехаников. Сколько возможных вариантов существует, чтобы составить команду на ралли?

A_8^2 — число выборов автогонщиков, так как здесь порядок важен.

C_{13}^3 — число выборов автомехаников, так как здесь порядок несущественен.

Итак, $A_8^2 \cdot C_{13}^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 16.$

5. В библиотеке имеются учебники по математике пяти различных авторов, учебники по физике трех различных авторов и учебники по информатике двух различных авторов. Каково наибольшее число студентов, которые взяли не меньше чем по одной книге по каждому из предметов, причем у каждого из студентов нет одинакового с другими студентами набора книг?

Рассмотрим подробно все возможные случаи.

а) Если студенты взяли только по 3 книги, то число будет равно $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30.$

б) Если студенты взяли всего по 4 книги, тогда число студентов будет равно

$$C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 =$$

$$= 60 + 30 + 15 = 105, \text{ где}$$

1. $C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1$ — из них две книги по математике;
2. $C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1$ — из них две книги по физике;
3. $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2$ — из них две книги по информатике.

в) $C_5^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 + C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 + C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^2 + C_5^1 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 = 60+60+30+15+10 = 175$ — количество студентов, взявших по пять книг.

г) $C_5^4 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_5^3 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 + C_5^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 + C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_2^2 + C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 + C_5^1 \cdot C_3^3 \cdot C_2^2 = 30+60+30+30+20+5 = 175$ — количество студентов, взявших по шесть книг.

д) $C_5^5 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 + C_5^4 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 + C_5^4 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 + C_5^3 \cdot C_3^2 \cdot C_2^2 + C_5^3 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 + C_5^2 \cdot C_3^3 \cdot C_2^2 = 6+30+15+30+20+10 = 111$ — число студентов, взявших по семь книг.

е) $C_5^5 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 + C_5^5 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 + C_5^4 \cdot C_3^2 \cdot C_2^2 + C_5^4 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 + C_5^3 \cdot C_3^3 \cdot C_2^2 = 6+3+15+10+10+10 = 44$ — количество студентов, взявших по восемь книг.

ж) $C_5^5 \cdot C_3^2 \cdot C_2^2 + C_5^4 \cdot C_3^3 \cdot C_2^2 + C_5^5 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 = 3+5+2 = 10$ — число студентов, взявших по девять книг.

з) $C_5^5 \cdot C_3^3 \cdot C_2^2 = 1$ — число студентов, взявших по 10 книг.

Итого 651 студентов.

Но возможен и другой подход к решению задачи.

Действительно, всего из пятиэлементных множеств можно образовать 2^5 подмножеств, но так как пустое множество нас не устраивает, значит $(2^5 - 1)$ — число возможных вариантов взятия книг по математике.

Аналогично рассуждая, получим:

число вариантов по физике — $(2^3 - 1)$,

число вариантов по информатике — $(2^2 - 1)$.

Перемножая, получим:

$(2^5 - 1) \cdot (2^3 - 1) \cdot (2^2 - 1) = 31 \cdot 7 \cdot 3 = \boxed{651}$.

6. Сколько существует четырехзначных чисел, состоящих из цифр одинаковой четности, если рассматриваются случаи:

а) использования неповторяющихся цифр?

Рассмотрим все случаи с неповторяющимися цифрами.

1. Пусть цифры будут нечетными (1, 3, 5, 7, 9). Тогда на первом месте возможно поставить любых пять нечетных цифр. На втором месте — любые четыре оставшиеся цифры и т. д.
   Получим $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ чисел.

2. Пусть цифры будут четными (0, 2, 4, 6, 8), тогда, рассуждая аналогично, получим, что на четырех местах возможно получить $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ вариантов чисел, но из этих вариантов надо исключить случаи, в которых цифра ноль стоит на первом месте.

   Зафиксируем цифру ноль на первом месте, тогда осталось 4 цифры, комбинируя которые по аналогии получим, что на оставшиеся три места возможно получить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ вариантов чисел, значит количество чисел, образованных из четных цифр, равно $120 - 24 = 96$.

Можно предложить и другое решение этого случая для четных чисел.

Действительно, на первом месте мы можем поставить только 4 цифры из цифр 0, 2, 4, 6, 8. На второе место — также оставшиеся четыре цифры. На третье — оставшиеся 3 цифры и т. д.

Значит, получим $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$.

Тогда количество четырехзначных чисел, которые можно образовать из неповторяющихся цифр одинаковой четности, будет равно сумме первого и второго случая: $120 + 96 = \boxed{216}$.

б) использования цифр с возможными повторениями?

Рассмотрим все случаи образования четырехзначных чисел одинаковой четности, в которых возможно повторение цифр.

1. Пусть цифры будут нечетными. Тогда на первом месте возможно использовать пять цифр, на втором — также пять цифр и т. д., значит получим $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$.
2. Пусть цифры будут четными. Тогда на первом месте возможно использовать только четыре цифры (0 нельзя). На втором — пять цифр, на третьем пять цифр и т. д.

   Значит, получим $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$.

Суммируя, будем иметь $625 + 500 = \boxed{1125}$ четырехзначных чисел одинаковой четности с возможными повторениями цифр.

Решение тренировочной работы 2

Вариант 2

1. На выпускной вечер пришли 25 человек. Девушки обменялись между собой поцелуями, а юноши крепкими рукопожатиями. Причем количество рукопожатий относится к числу поцелуев как 7:3. Сколько на вечере было девушек, а сколько юношей?

Допустим, на вечер пришли n юношей. Количество пар для рукопожатия это число C_n^2 (очевидно, что порядок рукопожатий не принципиален).

Аналогично получим C_{25-n}^2 пар девушек. Значит

$$\frac{C_n^2}{C_{25-n}^2}=\frac{7}{3}. \qquad D(У): \begin{cases} 2\leqslant n \\ 2\leqslant 25-n \end{cases}; \ n\in\{2;3;\ldots;23\}.$$

$$\frac{3n!}{(n-2)!2!}=\frac{7(25-n)!}{(23-n)!2!}; \quad 3n(n-1)=7(25-n)(24-n);$$

$$3n^2-3n=7\cdot 600-7\cdot 49n+7n^2; \quad 4n^2-340n+4200=0;$$

$$n^2-85n+1050=0; \quad \left[\begin{array}{l} n=70\notin D(У) \\ n=15 \end{array}\right. .$$

Ответ: 15 юношей и 10 девушек.

2. Сколько существует различных семизначных кодов:

а) из букв A, B, C, D и цифр 0, 2, 3, 4, 5, 9?

Так как на каждом месте семизначных кодов возможно 10 символов (букв или цифр), то

$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=\boxed{10^7}$ возможных кодов.

б) Если в любом коде нет повторяющихся элементов?

Если в любом коде нет повторяющихся элементов, то мы имеем дело с размещениями:

$$A_{10}^7=\frac{10!}{3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{32}=10\cdot 3\cdot 4\cdot 7!=120\cdot 5760=\boxed{689\,200}.$$

в) Если код не может начинаться с нуля и выполняются условия пункта б)?

Вначале выясним, в скольких случаях цифра ноль стоит на первом месте. Очевидно, что комбинировать можно только из девяти элементов на шести местах, т. е. A_9^6.

Тогда семизначных кодов, у которых ноль не стоит на первом месте, будет

$$A_{10}^7 - A_9^6 = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9!}{3!}(10-1) = \frac{9 \cdot 9!}{3!} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot 9!}.$$

г) Буквы A и B стоят или на первом месте, или на последнем?

Из условия следует, что свободных мест только пять, тогда A_8^5 — число возможных комбинаций.

Учтя, что буквы A и B могут меняться местами, получим $2 \cdot A_8^5$ — число любых семизначных кодов из десяти символов, у которых буквы A и B стоят или на первом, или на последнем месте.

Ответ: 13 440.

д) Цифры 5 и 9 стоят рядом, и выполняются условия пунктов б) и в)?

Учтя, что цифры 5 и 9 стоят рядом, и объединив их в единый символ, получим шесть мест, т. е. комбинацию A_9^6.

Далее необходимо исключить наличие нуля на первом месте $\left(A_8^5\right)$.

Тогда число кодов будет равно $\boxed{2\left(A_9^6 - A_8^5\right)}$ — необходимо было учесть то, что цифры 5 и 9 могут меняться местами.

3. Сколько нечетных пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 3, 4, 6?

а) Цифра 1 может стоять на последнем месте в 4! случаях, но при этом необходимо исключить наличие 0 на первом месте (3!). Таким образом, $4! - 3! = 3 \cdot 3!$ — число всех случаев наличия цифры 1 на последнем месте.

б) Аналогично рассуждая, получим, что $3 \cdot 3!$ — число всех пятизначных чисел, для которых цифра 3 на последнем месте.

Тогда число всех нечетных пятизначных чисел, образованных из цифр 0, 1, 3, 4, 6 равно $3 \cdot 3! + 3 \cdot 3! = 6 \cdot 3! = \boxed{36}$.

4. В шахматном клубе университета занимались девять шахматистов I разряда и шесть шахматисток II разряда. Для соревнований необходимо выставить команду из троих мужчин на 1-ю, 2-ю и 3-ю доску и двух женщин на 4-ю и 5-ю доску. Сколько существует возможных вариантов составить команду?

а) Так как в данном случае порядок существенен (1-я, 2-я и 3-я доска — это разный набор троек), то имеем дело с размещениями: A_9^3 — число возможных троек из 9 элементов (мужчин).

б) Аналогично рассуждая, имеем выбор A_6^2 пар женщин на 4-ю и 5-ю доску.

Учитывая правило произведения, получим $\boxed{A_9^3 \cdot A_6^2}$ — число способов составить команду в соответствии с условиями данной задачи.

5. В спортклубе на складе для тренировок есть велосипеды трех марок, два вида шлемов и четыре вида комплектов одежды. Каково наибольшее число спортсменов, которые взяли не меньше чем по одному велосипеду, шлему и комплекту одежды?

Рассмотрим подробно все возможные случаи.

а) Пусть все спортсмены взяли только по одному велосипеду, шлему и комплекту одежды. Возможное число таких спортсменов равно $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

б) Пусть все спортсмены взяли по четыре предмета: необходимые (велосипед, шлем, одежду) и еще что-то дополнительно.

1. $C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1$ — если взяли по два велосипеда;
2. $C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^1$ — если по два шлема;
3. $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2$ — если по два комплекта одежды.

Таким образом $C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 + C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^1 + C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 =$ $= 3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 24 + 12 + 36 = 72$ — число всех случаев, когда каждый спортсмен взял по четыре предмета, включая и необходимые.

в) Пусть все спортсмены взяли по пять предметов. Рассуждая аналогично, получим:

$C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1 + C_3^2 \cdot C_2^2 \cdot C_4^1 + C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 + C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^3 +$
$+ C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^2 = 98;$

$1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 6 = 8 + 12 + 36 + 24 + 18 = 98.$

г) Пусть все спортсмены взяли по шесть предметов:

$C_3^3 \cdot C_2^2 \cdot C_4^1 + C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 + C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^3 + C_3^2 \cdot C_2^2 \cdot C_4^2 +$
$+ C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^4 + C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^3 = 76;$

$1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 4 =$
$= 4 + 12 + 24 + 18 + 6 + 12 = 76.$

д) Пусть все спортсмены взяли по семь предметов:

$C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^3 + C_3^3 \cdot C_2^2 \cdot C_4^2 + C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_4^4 + C_3^2 \cdot C_2^2 \cdot C_4^3 +$
$+ C_3^1 \cdot C_2^2 \cdot C_4^4 = 35;$

$1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 8 + 6 + 6 + 12 + 3 = 35.$

е) Пусть все спортсмены взяли по восемь предметов:
$C_3^3 \cdot C_2^2 \cdot C_4^3 + C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^4 + C_3^2 \cdot C_2^2 \cdot C_4^4 = 9$;
$1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4 + 2 + 3 = 9$.

ж) Пусть все спортсмены взяли по девять предметов:
$C_3^3 \cdot C_2^2 \cdot C_4^4 = 1$;
$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Таким образом, складывая все случаи, получим 315 спортсменов — наибольшее число спортсменов, которые взяли хотя бы по одному велосипеду, шлему и комплекту одежды из имеющихся по условию на складе.

Но можно рассмотреть более короткое и изящное решение.

Так как на складе только три различные марки велосипедов, то из трехэлементного множества можно образовать 2^3 подмножеств.

Но пустое множество нам не подходит, значит $(2^3 - 1)$ — число вариантов взятия велосипедов спортсменами.

Аналогично рассуждая, получим, что $(2^2 - 1)$ — число вариантов взятия шлема. И $(2^4 - 1)$ — число вариантов взятия комплектов одежды. Перемножая, получим $(2^3 - 1)(2^2 - 1)(2^4 - 1) = 7 \cdot 3 \cdot 15 = \boxed{315}$ — наибольшее число спортсменов, которые взяли не меньше чем по одному велосипеду, шлему и комплекту одежды.

6. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3 (найдите два способа решения)?

Первый способ

а) Рассмотрим случай, когда в записи трехзначного числа есть только одна цифра 3.

1. Пусть тройка стоит на первом месте, тогда таких трехзначных чисел будет $1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$.
2. Пусть тройка будет стоять только на втором месте, тогда таких трехзначных чисел будет $8 \cdot 1 \cdot 9 = 72$ (цифры 0 и 3 не используются на первом месте).

3. Аналогично если цифра 3 стоит на третьем месте: $8 \cdot 9 \cdot 1 = 72$.

Значит, если в записи числа есть только одна тройка, то таких трехзначных чисел будет $81 + 72 + 72 = 225$.

б) Пусть в записи трехзначного числа есть только две цифры 3. Тогда

1. либо они стоят на первом и втором месте, и их будет $1 \cdot 1 \cdot 9 = 9$;
2. либо они стоят на первом и третьем месте, и их будет $1 \cdot 9 \cdot 1 = 9$;
3. либо они стоят на втором и третьем месте, и их будет $8 \cdot 1 \cdot 1 = 8$.

Итого $9 + 9 + 8 = 26$ чисел.

в) Пусть в данном трехзначном числе будет три цифры 3. Тогда это только одно число 333.

Подводя итоги и суммируя все случаи, получим:

$225+26+1=252$ — количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна тройка.

Второй способ

а) Выясним вначале, сколько **всего** существует трехзначных чисел.

1. на первом месте можно использовать только 9 цифр (исключим цифру 0);
2. на втором месте можно использовать 10 цифр;
3. на третьем месте также можно использовать 10.

Значит $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ — количество всех трехзначных чисел.

б) Выясним теперь, сколько существует трехзначных чисел, в записи которых **нет цифры 3**. В этом случае:

1. на первом месте может стоять только 8 цифр;
2. на втором месте только 9 цифр;
3. на третьем месте только 9 цифр, итого $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ чисел, в записи которых нет цифры 3.

в) Таким образом, если из общего количества трехзначных чисел исключить количество трехзначных чисел, в которых нет цифры 3, то получим количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна 3.

То есть $900 - 648 = \boxed{252}$ — количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3.

Примечание. Сравнивая оба решения, отметим, что при решении комбинаторных задач часто легче решить задачу, не удовлетворяющую условию задачи, если в формулировке задачи имеются слова (или смысл) «хотя бы», «не больше» и т. д., а уже потом решить прямую задачу.

Практикум 3

1. Вычислите:

а) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$;

б) $\dfrac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$;

в) C_{12}^{10};

г) $C_{100}^{100} + C_{100}^{1}$.

2. Докажите:

а) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$;

б) $C_{10}^4 + 2C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{12}^6$;

в) $C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^6 = C_{11}^9$;

г) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

д) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$;

е) $C_n^m + 3C_n^{m+1} + 3C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$.

3. Решите уравнения:

а) $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$;

б) $A_{m+1}^3 = 5m(m+1)$;

в) $\dfrac{A_x^4 + A_x^3}{A_x^2} = 9$;

г) $C_{2n}^{n+1} = 15$;

д) $7C_{2n-2}^{n-2} = 3C_{2n-1}^{n-1}$.

4. Решите неравенство $C_n^5 < C_{n+1}^4$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$

Решение практикума 3

1. Вычислите:

а) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 =$
$= 210 + 120 + 60 = \boxed{390}.$

б) $\dfrac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 3 \cdot 2 + 3 = \boxed{9}.$

в) $C_{12}^{10} = \dfrac{12!}{(12-10)! \cdot 10!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2! \cdot 10!} = \dfrac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = \boxed{66}.$

г) $C_{100}^{100} + C_{100}^{1} = C_{100}^{0} + 100 = 1 + 100 = \boxed{101}.$

2. Докажите:

а) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4;$

$\mathrm{L} = C_7^4 + C_7^3 = \dfrac{7!}{(7-4)! \cdot 3!} + \dfrac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} =$

$= \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} + \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = \dfrac{2 \cdot 7!}{3! \cdot 4!};$

$\Pi = C_8^4 = \dfrac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \dfrac{8 \cdot 7!}{4! \cdot 4!} = \dfrac{8 \cdot 7!}{4 \cdot 3! \cdot 4!} = \dfrac{2 \cdot 7!}{3! \cdot 4!},$

значит $\mathrm{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

б) $C_{10}^4 + 2C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{12}^6;$

1. $C_{10}^4 + C_{10}^5 = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!} + \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} =$

$= 10! \cdot \left(\dfrac{1}{6 \cdot 5! \cdot 4!} + \dfrac{1}{5! \cdot 5 \cdot 4!}\right) =$

$= \dfrac{10!}{5! \cdot 4!}\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{5}\right) =$

$= \dfrac{10!}{5! \cdot 4!} \cdot \dfrac{11}{6 \cdot 5} = \dfrac{11!}{6! \cdot 5!};$

2. $C_{10}^5 + C_{10}^6 = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} + \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} =$

$= 10!\cdot\left(\dfrac{1}{5\cdot 4!\cdot 5!} + \dfrac{1}{4!\cdot 6!\cdot 5!}\right) = \dfrac{10!}{4!\cdot 5!}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right) =$

$= \dfrac{10!\cdot 11}{4!\cdot 5!\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{11!}{5!\cdot 6!};$

3. $\dfrac{11!}{5!\cdot 6!} + \dfrac{11!}{5!\cdot 6!} = \dfrac{2\cdot 11!}{5!\cdot 6!} = \dfrac{2\cdot 6\cdot 11!}{6\cdot 5!\cdot 6!} = \dfrac{12!}{6!\cdot 6!} = C_{12}^6,$

что и требовалось доказать.

в) $C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^6 = C_{11}^9$

$\text{L} = C_8^8 + C_8^9 + C_{10}^8 = 1 + \dfrac{9!}{1!\cdot 8!} + \dfrac{10!}{2!\cdot 8!} =$

$= 1 + \dfrac{9\cdot 8!}{8!} + \dfrac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 8!} = 1 + 9 + 5\cdot 9 = 55;$

$\Pi = C_{11}^9 = \dfrac{11!}{2!\cdot 9!} = \dfrac{11\cdot 10\cdot 9!}{2\cdot 9!} = 55,$

значит $\text{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

г) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ — известная формула.

$\text{L} = C_n^k + C_n^{k+1} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} + \dfrac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} =$

$= n!\cdot\left(\dfrac{1}{(n-k)!k(k-1)!} + \dfrac{1}{(n-k+1)(n-k)!(k-1)!}\right) =$

$= \dfrac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\cdot\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n-k+1}\right) =$

$= \dfrac{n!\cdot(n-k+1+k)}{(n-k+1)!\cdot k!} = \dfrac{n!\cdot(n+1)}{(n-k+1)!k!} = \dfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!};$

$\Pi = C_{n+1}^k = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!},$

значит $\text{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

д) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$;

$\mathrm{L} = \left(C_n^m + C_n^{m+1}\right) + \left(C_n^{m+1} + C_n^{m+2}\right) =$
$= C_{n+1}^{m+1} + C_{n+1}^{m+1} = C_{n+2}^{m+2}$.

Так как $\boxed{C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k}$, то

1. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;
2. $C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+1}^{m+2}$.

$\Pi = C_{n+2}^{m+2}$, значит $\boxed{C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}}$.

е) $C_n^m + 3C_n^{m+1} + 3C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$;

$\mathrm{L} = \left(C_n^m + C_n^{m+1}\right) + 2\left(C_n^{m+1} + C_n^{m+2}\right) + \left(C_n^{m+2} + C_n^{m+3}\right)$;

1. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;
2. $C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+1}^{m+2}$;
3. $C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+1}^{m+3}$.

Тогда $\mathrm{L} = C_{n+1}^{m+1} + 2C_{n+1}^{m+2} + C_{n+1}^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$, учитывая ранее доказанные утверждения.

Итак, $\left.\begin{array}{l} \mathrm{L} = C_{n+3}^{m+3} \\ \Pi = C_{n+3}^{m+3} \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

3. Решите уравнения:

а) $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

$D(\text{У}):\ 3 < n - 2;\ n \in \mathbb{N};\ n \in \{5; 6; 7, \ldots\}$;

$A_{n-2}^3 = (n-2)(n-3)(n-4)$; $\quad A_{n-2}^2 = (n-2)(n-3)$;

$(n-2)(n-3)(n-4) = 4(n-2)(n-3)$;

$(n-2)(n-3)(n-4-4) = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 3 \end{array}\right| \notin D(\text{У}) \\ n = 8 \end{array}\right.$.

Ответ: $n = 8$.

б) $A_{m+1}^3 = 5m(m+1)$;

$D(У):\ 3 \leqslant m+1;\ m \in \mathbb{N};\ m \in \{2; 3; 4; \ldots\}$;

$(m+1)\cdot m(m-1) = 5m(m+1); \quad m(m+1)(m-1-5) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \\ m = 6 \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right| \notin D(У).$$

Ответ: $m = 6$.

в) $\dfrac{A_x^4 + A_x^3}{A_x^2} = 9; \qquad D(У):\ 4 \leqslant x;\ x \in \mathbb{N};\ x \in \{4; 5; 6; \ldots\}$;

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = 9;$$

$x\,(x-1) \neq 0$;

$(x-2)(x-3) + (x-2) = 9; \quad x^2 - 5x + 6 + x - 2 - 9 = 0;$

$x^2 - 4x - 5 = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 5 & \\ x = -1 & \notin D(У) \end{array}\right.$.

Ответ: $x = 5$.

г) $C_{2n}^{n+1} = 15; \qquad D(У):\ n+1 \leqslant 2n;\ n \in \mathbb{N}$;

$$\frac{(2n)!}{(2n-n-1)!(n+1)!} = 15; \quad \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

Так как $(a \cdot b)! \neq a! \cdot b!$, что очевидно, то попробуем решать методом перебора.

При $n = 2$ $\dfrac{4!}{1! \cdot 3!} \neq 15$.

При $n = 3$ $\dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.

При возрастании n $\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ возрастает, т. е. если есть корень, то он единственный.

Ответ: $n = 3$.

д) $7C_{2n-2}^{n-2} = 3C_{2n-1}^{n-1}$; $D(У)$: $\begin{cases} n-2 \leqslant 2n-2 \\ n-1 \leqslant 2n-1 \end{cases}$; $\begin{cases} n \geqslant 0 \\ n \geqslant 0 \end{cases}$;

$$\frac{7(2n-2)!}{(2n-2-n+2)!(n-2)!} = \frac{3(2n-1)!}{(2n-1-n+1)!(n-1)!};$$

$$\frac{7(2n-2)!}{n!(n-2)!} = \frac{3(2n-1)(2n-2)!}{n!(n-1)(n-2)!};$$

$7(n-1) = 3(2n-1)$; $7n-7 = 6n-3$; $n = 4 \in D(У)$.

Ответ: $n = 4$.

4. Решите неравенство $C_n^5 < C_{n+1}^4$.

$D(\mathrm{H})$: $\begin{cases} 5 \leqslant n \\ 4 \leqslant n+1 \end{cases}$; $n \geqslant 5$, т.е. $n \in \{5;6;7;\ldots\}$;

$$\frac{n!}{(n-5)!5!} < \frac{(n+1)!}{(n+1-4)!4!};$$

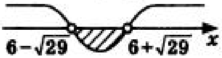
$$\frac{n!}{(n-5)!\cdot 5\cdot 4!} < \frac{(n+1)n!}{(n-3)(n-4)(n-5)!4!}.$$

Напомним, что $0! = 1$, т.е. $(5-5)! = 1$, значит

$$\frac{1}{5} < \frac{n+1}{(n-3)(n-4)},$$

но $D(\mathrm{H})$: $n \geqslant 5$, тогда $n^2 - 7n + 12 < 5n + 5$;

$n^2-12n+7<0$; $n_{1,2}=6\pm\sqrt{29}$;



Очевидно, что так как $6+\sqrt{29} \approx 11$ и $6-\sqrt{29} \approx 0$

$(n \in \{5,6,7,\ldots\})$, то $n \in \{5,6,7,\ldots,11\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

$C_x^2 = 66$; $x \geqslant 2$; $x \in \{2;3;4;\ldots\}$;

$$\frac{x!}{(x-2)!2!} = 66; \quad \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!\cdot 2} = 66;$$

$x^2 - x - 132 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -12 \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$; $x = 12$.

Тогда $C_x^y = C_x^{y+2}$ примет вид $C_{12}^y = C_{12}^{y+2}$, т.е. $y \leqslant 10$, значит $y \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

$$\frac{12!}{(12-y)!y!} = \frac{12!}{(12-y-2)(y+2)!};$$

$$\frac{1}{(12-y)!y!} = \frac{1}{(10-y)!(y+2)!};$$

$$\frac{1}{(12-y)(11-y)(10-y)!y!} = \frac{1}{(10-y)!(y+2)(y+1)y!};$$

$$\frac{1}{(12-y)(11-y)} = \frac{1}{(y+2)(y+1)},$$

значит $(12-y)(11-y) = (y+2)(y+1)$;

$y^2 - 23y + 132 = y^2 + 3y + 2; \quad 26y = 130; \quad y = 5.$

Ответ: $x = 12$ и $y = 5$.

Тренировочная работа 3

Вариант 1

1. Вычислите: а) $A_5^2 + A_4^2 + A_3^2$; б) C_{10}^8; в) $C_{11}^{11} + C_{11}^1$.

2. Упростите: $\dfrac{2}{n+1}C_{n+1}^{n-1}$.

3. Докажите, что:

а) $C_8^4 + C_8^5 = C_9^5$;

б) $C_9^5 + 2C_9^5 + C_9^7 = C_{11}^7$;

в) $C_7^7 + C_8^7 + C_9^7 = C_{10}^8$;

г) $C_8^4 + 3C_8^5 + 3C_8^6 + C_8^7 = C_{11}^7$.

4. Решите уравнения:

а) $\dfrac{n!}{(n-5)!} = \dfrac{20n!}{(n-3)!}$;

б) $18A_{n-2}^4 = A_n^5$;

в) $A_4^x = 8x$;

г) $A_{2x}^3 = 14A_x^3$;

д) $C_n^3 = \dfrac{1}{5}C_{n+2}^4$;

е) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n$.

5. Решите неравенства:

а) $C_n^5 < C_n^3$;

б) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^k$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+4} \\ \dfrac{1}{3}C_x^5 = 264 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Вычислите: а) $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2$; б) C_{11}^9; в) $C_9^9 + C_9^1$.

2. Упростите: $\dfrac{3}{2(2n-1)}C_{2n}^{2n-3}$.

3. Докажите, что:

а) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$;

б) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 = C_{12}^{10}$;

в) $C_9^3 + 3C_9^4 + 3C_9^5 + C_9^6 = C_{12}^6$.

4. Решите уравнения:

а) $\dfrac{(2n)!}{(2n-3)!} = \dfrac{40n!}{(n-1)!}$;

б) $A_n^4 = 15A_{n-2}^3$;

в) $A_6^x = 40x$;

г) $A_{3x}^4 = 15A_{2x}^3$;

д) $5C_{n+1}^3 = C_{n+3}^4$;

е) $17C_{2n-1}^n = 9C_{2n}^{n-1}$.

5. Решите неравенства:

а) $C_{2n}^7 < C_{2n}^5$;

б) $C_{15}^{k-2} < C_{15}^k$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_n^m = C_n^{m+1} \\ A_n^3 = 60 \end{cases}$.

Решение тренировочной работы 3

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $A_5^2 + A_4^2 + A_3^2 = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 20 + 12 + 6 = \boxed{38}$.

б) $C_{10}^8 = \dfrac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2! \cdot 8!} = \boxed{45}$.

в) $C_{11}^{11} + C_{11}^1 = C_{11}^0 + C_{11}^1 = 1 + 11 = \boxed{12}$.

2. Упростите: $\dfrac{2}{n+1} C_{n+1}^{n-1} = \dfrac{2}{n+1} \cdot \dfrac{(n+1)!}{(n+2-n+1)! \cdot (n-1)!} =$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{3! \cdot (n-1)!} = \frac{2 \cdot (n+1)n}{(n+1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n}{3}.$$

3. Докажите, что:

а) $C_8^4 + C_8^5 = C_9^5$.

$$\text{L} = C_8^4 + C_8^5 = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} + \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} =$$

$$= 8! \cdot \left(\frac{1}{4! \cdot 4!} + \frac{1}{3! \cdot 5!} \right) = 8! \cdot \left(\frac{1}{4! \cdot 4 \cdot 3!} + \frac{1}{3! \cdot 5 \cdot 4!} \right) =$$

$$= \frac{8!}{4! \cdot 3!} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8! \cdot 9}{4! \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!}.$$

$$\Pi = C_9^5 = \frac{9!}{(9-5)! \cdot 5!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!},$$

значит $\text{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

б) $C_9^5 + 2C_9^5 + C_9^7 = C_{11}^7$.

$$\text{L} = \left(C_9^5 + C_9^6\right) + \left(C_9^6 + C_9^7\right).$$

1. $C_9^5 + C_9^6 = \dfrac{9!}{4! \cdot 5!} + \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = 9! \cdot \left(\dfrac{1}{4 \cdot 3! \cdot 5!} + \dfrac{1}{3! \cdot 6 \cdot 5!} \right) =$

$$= \frac{9!}{3! \cdot 5!} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{9! \cdot 10}{3! \cdot 5! \cdot 4 \cdot 6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}.$$

2. $C_9^6+C_9^7=\dfrac{9!}{3!\cdot 6!}+\dfrac{9!}{2!\cdot 7!}=9!\cdot\left(\dfrac{1}{3\cdot 2!\cdot 6!}+\dfrac{1}{2!\cdot 7\cdot 6!}\right)=$

$=\dfrac{9!}{2!\cdot 6!}\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{9!\cdot 10}{2!\cdot 6!\cdot 3\cdot 7}=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}.$

$$\mathrm{L}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}+\frac{10!}{3!\cdot 7!}=10!\cdot\left(\frac{1}{4\cdot 3!\cdot 6!}+\frac{1}{3!\cdot 7\cdot 6!}\right)=$$

$$=\frac{10!}{3!\cdot 6!}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\right)=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=C_{11}^7.$$

$\Pi=C_{11}^7$, значит $\mathrm{L}=\Pi$, что и требовалось доказать.

в) $C_7^7+C_8^7+C_9^7=C_{10}^8.$

$$\mathrm{L}=C_7^7+C_8^7+C_9^7=1+\frac{8!}{1!\cdot 7!}+\frac{9!}{2!\cdot 7!}=1+8+\frac{9\cdot 8}{2}=45.$$

$$\Pi=C_{10}^8=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8!}{2\cdot 8!}=45,$$

значит $\mathrm{L}=\Pi$, что и требовалось доказать.

г) $C_8^4+3C_8^5+3C_8^6+C_8^7=C_{11}^7.$

$$\mathrm{L}=\left(C_8^4+C_8^5\right)+2\left(C_8^5+C_8^6\right)+\left(C_8^6+C_8^7\right).$$

1. $C_8^4+C_8^5=\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}+\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=\dfrac{8!}{3!\cdot 4!}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{9!}{4!\cdot 5!};$

2. $C_8^5+C_8^6=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}+\dfrac{8!}{2!\cdot 6!}=\dfrac{8!}{2!\cdot 5!}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{9!}{3!\cdot 6!};$

3. $C_8^6+C_8^7=\dfrac{8!}{2!\cdot 6!}+\dfrac{8!}{1!\cdot 7!}=\dfrac{8!}{1!\cdot 6!}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{9!}{2!\cdot 7!};$

$$\mathrm{L}=\frac{9!}{4!\cdot 5!}+\frac{9!}{3!\cdot 6!}+\frac{9!}{2!\cdot 7!}=\frac{9!}{2!\cdot 5!}\left(\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{7\cdot 6}\right)=$$

$$=\frac{9!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{6\cdot 7+2\cdot 4\cdot 7+4\cdot 3}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}=\frac{9!\cdot 10\cdot 11}{4!\cdot 7!}=$$

$$=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=C_{11}^7.$$

$\Pi=C_{11}^7$, значит $\mathrm{L}=\Pi$, что и требовалось доказать.

4. Решите уравнения:

а) $\dfrac{n!}{(n-5)!} = \dfrac{20n!}{(n-3)!}$;

$D(У) = n - 3 \geqslant 0; \quad n \in \mathbb{N}$, т. е. $n \in \{3; 4; 5; \ldots\}$;

$\dfrac{1}{(n-5)!} = \dfrac{20}{(n-3)(n-4)(n-5)!}; \quad n^2 - 7n + 12 = 20;$

$n^2 - 7n - 8 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = -1 \notin D(У) \end{array}\right.$

Ответ: $n = 8$.

б) $18A_{n-2}^4 = A_n^5$;

$D(У): \ 4 \leqslant n - 2; n \in \mathbb{N}$, т. е. $n \in \{6; 7; \ldots\}$.

$18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4);$

$18(n-5) = n^2 - n; \quad n^2 - 19n + 90 = 0;$

$\left[\begin{array}{l} n = 9 \\ n = 10 \end{array}\right| \quad \in D(У).$

Ответ: $n = 9$; $n = 10$.

в) $A_4^x = 8x; \qquad D(У): \ x \leqslant 4; x \in \mathbb{N}$, т. е. $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;

Попробуем решить простым перебором.

1. Пусть $x = 4$, тогда $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 4$ — ложь.
2. Пусть $x = 3$, тогда $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 3$ — истина.

Ответ: $x = 3$.

г) $A_{2x}^3 = 14A_x^3; \qquad D(У): \begin{cases} 3 \leqslant x \\ 3 \leqslant 2x \end{cases}$, т. е. $x \in \{3; 4; 5; \ldots\}$;

$2x(2x-1)(2x-2) = 14x(x-1)(x-2);$

$(2x-1) \cdot 2(x-1) = 7(x-1)(x-2);$

$4x - 2 = 7x - 14; \quad 3x = 12; \quad x = 4 \in D(У).$

Ответ: $x = 4$.

д) $C_n^3 = \frac{1}{5}C_{n+2}^4;$

$$D(\text{У}): \begin{cases} 3 \leqslant n \\ n \leqslant n+2 \end{cases}, \text{ т. е. } n \in \{3; 4; 5; \ldots\};$$

$$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(n+2)!}{(n-2)!4!};$$

$$\frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(n+2)(n+1) \cdot n!}{(n-2)(n-3)! \cdot 4 \cdot 3!};$$

$$20(n-2) = n^2 + 3n + 2; \quad n^2 - 17n + 42 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 14 \\ n = 3 \end{array}\right| \in D(\text{У}).$$

Ответ: $n = 3$; $n = 14$.

е) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^{n}$. $\quad D(\text{У}): \begin{cases} n-1 \leqslant 2n \\ n \leqslant 2n-1 \end{cases}$, т. е. $n \in \mathbb{N}$;

$$\frac{3(2n)!}{(2n-n+1)!(n-1)!} = \frac{5(2n-1)!}{(2n-1-n)!n!};$$

$$\frac{3 \cdot 2n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{5}{n!}; \quad 6n = 5n + 5; \quad n = 5 \in D(\text{У}).$$

Ответ: $n = 5$.

5. Решите неравенства:

а) $C_n^5 < C_n^3$; $\quad D(\text{Н}): 5 \leqslant n$, т. е. $n \in \{5; 6; 7; \ldots\}$;

$$\frac{n!}{(n-5)!5!} < \frac{n!}{(n-3)3!};$$

$$(n-3)(n-4)(n-5)!3! < (n-5)! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!;$$

$$n^2 - 7n + 12 < 20; \quad n^2 - 7n - 8 < 0;$$

Тогда $n = 5$, $n = 6$ или $n = 7$.

Ответ: $n \in \{5; 6; 7\}$.

б) $C_{19}^{k-1} < C_{19}^{k}$.

$D(\text{Н}):\ k \leqslant 19$, т.е. $k \in \{1;2;3;\ldots;18;19\}$;

$$\frac{19!}{(19-k+1)(k-1)} < \frac{19!}{(19-k)!k!};$$

$$\frac{1}{(10-k)(19-k)!(k-1)!} < \frac{1}{(19-k!)\cdot k\cdot(k-1)!};$$

$$\frac{1}{20-k} < \frac{1}{k};\quad k < 20-k;\quad 1 \leqslant k < 10,$$

тогда $k \in \{1;2;\ldots;9\}$.

Ответ: $k \in \{1;2;\ldots;9\}$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+4} \\ \frac{1}{3}C_x^5 = 264 \end{cases}$.

а) $\frac{1}{3}C_x^5 = 264$ $\qquad D(\text{У}):\ 5 \leqslant x;\quad x \in \{5;6;7;\ldots\}$;

$$\frac{x!}{3\cdot(x-5)} = 264;$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)!}{3\cdot(x-5)!\cdot 5!} = 264$$

$(264 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 11)$;

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3\cdot 5!\cdot 3\cdot 8\cdot 11$.

б) Попробуем решать методом перебора. Так как в правой части есть множитель 11, то и слева должен быть множитель, кратный 11.

Пусть $x = 11$, тогда $11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5!\cdot 9\cdot 8\cdot 11$.

Не считая, можно сказать, что это не тождество, так как справа нет числа, кратного 7.

Пусть $x = 12$, тогда $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = 9\cdot 5!\cdot 8\cdot 11$; $120 = 5!$ — истина.

в) Итак, $x = 12$, тогда первое уравнение примет вид $C_{12}^{y} = C_{12}^{y+4}$.

$D(У)$: $\begin{cases} y \leqslant 12 \\ y + 4 \leqslant 12 \end{cases}$, т.е. $y \in \{1; 2; 3; \ldots; 8\}$.

$(8 - y)!(y + 4)(y + 3)(y + 2)(y + 1)y! =$

$= (12 - y)(11 - y)(10 - y)(9 - y)(8 - y)!y!;$

$(y+4)(y+3)(y+2)(y+1) = (12-y)(11-y)(10-y)(9-y).$

Попробуем решать задачу, используя метод перебора из $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

1. Очевидно, что крайние значения не подходят. Пусть $y = 5$, тогда $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ — не подходит.
2. Пусть $y = 4$, тогда $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ — истина.

Ответ: $x = 12$, $y = 4$.

Решение тренировочной работы 3

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2 = 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = \boxed{62}$.

б) $C_{11}^9 = \dfrac{11!}{(11-9)! \cdot 9!} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{2! \cdot 9!} = \dfrac{11 \cdot 10}{2} = \boxed{55}$.

в) $C_9^9 + C_9^1 = 1 + 9 = \boxed{10}$.

2. Упростите: $\dfrac{3}{2(2n-1)} C_{2n}^{2n-3} =$

$$= \frac{3}{2(2n-1)} \cdot \frac{3}{2(2n-2n+3)(2n-3)!} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{2(2n-1) \cdot 3! \cdot (2n-3)!} = \frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

3. Докажите, что:

а) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$;

$$\mathrm{L} = C_{10}^5 + C_{10}^6 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} + \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10!}{4! \cdot 5!}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{10! \cdot 11}{4! \cdot 5! \cdot 5 \cdot 6} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = C_{11}^6;$$

$\Pi = C_{11}^6$, значит $\mathrm{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

б) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 = C_{12}^{10}$;

$$\mathrm{L} = C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 = 1 + \frac{10!}{1! \cdot 9!} + \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 1 + 10 + \frac{11 \cdot 10}{2} = 66;$$

$$\Pi = C_{12}^{10} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2! \cdot 10!} = \frac{132}{2} = 66,$$

значит $\mathrm{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

в) $C_9^3 + 3C_9^4 + 3C_9^5 + C_9^6 = C_{12}^6$.

$\mathrm{L} = C_9^3 + C_9^4 + 2\left(C_9^4 + C_9^5\right) + \left(C_9^5 + C_9^6\right)$.

На основе свойства $\boxed{C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}}$:

1. $C_9^3 + C_9^4 = C_{10}^4$
2. $C_9^4 + C_9^5 = C_{10}^5$
3. $C_9^5 + C_9^6 = C_{10}^6$

Значит $\mathrm{L} = C_{10}^4 + 2C_{10}^5 + C_{10}^6 =$

$= \left(C_{10}^4 + C_{10}^5\right) + \left(C_{10}^5 + C_{10}^6\right) = C_{11}^5 + C_{11}^6 = C_{12}^6$.

$\Pi = C_{12}^6$, значит $\mathrm{L} = \Pi$, что и требовалось доказать.

4. Решите уравнения:

а) $\dfrac{(2n)!}{(2n-3)!} = \dfrac{40n!}{(n-1)!}$;

$D(\text{У})$: $2n - 3 \geqslant 0$, т.е. $n \in \{2; 3; 4; \ldots\}$;

$$\frac{2n\cdot(2n-1)(2n-2)(2n-3)!}{(2n-3)!} = \frac{10n(n-1)!}{(n-1)!};$$

$2n(2n-1)\cdot 2(n-1) = 40n$; $\quad (2n-1)(n-1) = 10$;

$2n^2 - 3n + 1 = 10$; $\quad 2n^2 - 3n - 9 = 0$;

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} n = 3 \\ n = -1,5 \notin D(\text{У}) \end{array}\right..$$

Ответ: $n = 3$.

б) $A_n^4 = 15A_{n-2}^3$; $\quad D(\text{У})$: $3 \leqslant n-2$, т.е. $n \in \{5; 6; 7; \ldots\}$;

$n(n-1)(n-2)(n-3) = 15(n-2)(n-3)(n-4)$;

$n^2 - n = 15n - 60$; $\quad n^2 - 16n + 60 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = 10 \end{array}\right..$

Ответ: $n = 6$; $\quad n = 10$.

в) $A_6^x = 40x$; $D(У): \begin{cases} x \leqslant 6 \\ x > 0 \end{cases}$, т.е. $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Попробуем решить методом перебора. Очевидно, что крайние значения не подходят.

1. Пусть $x = 4$, тогда $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \neq 40 \cdot 4$.
2. Пусть $x = 3$, тогда $6 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \cdot 3$ — верно.

Значит $x = 3$. Можно доказать, что других корней уравнение не имеет.

Ответ: $x = 3$.

г) $A_{3x}^4 = 15A_{2x}^3$; $D(У): \begin{cases} 4 \leqslant 3x \\ 3 \leqslant 2x \end{cases}$, т.е. $x \in \{2, 3, 4, \ldots\}$;

$3x \cdot (3x-1)(3x-2)(3x-3) = 15 \cdot 2x(2x-1)(2x-2)$;

$(3x-1)(3x-2) \cdot 3(x-1) = 10(2x-1) \cdot 2(x-1)$;

$3(9x^2 - 9x + 2) = 20(2x-1)$;

$27x^2 - 27x + 6 - 40x + 20 = 0$;

$27x^2 - 67x + 26 = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{67 \pm \sqrt{67^2 - 4 \cdot 27 \cdot 26}}{54}$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{13}{27} \notin D(У) \end{array}\right.$.

Ответ: $x = 2$.

д) $5C_{n+1}^3 = C_{n+3}^4$; $D(У):\ 3 \leqslant n+1$; $n \in \{2; 3; 4; \ldots\}$;

$\dfrac{5(n+1)!}{(n-2)!3!} = \dfrac{(n+3)!}{(n-1)!4!}$;

$\dfrac{5(n+1)!}{(n-2)! \cdot 3!} = \dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n-1)(n-2)! \cdot 4!}$;

$20(n-1) = n^2 + 5n + 6$; $n^2 - 15n + 26 = 0$; $\left[\begin{array}{l} n = 13 \\ n = 2 \end{array}\right.$.

Ответ: $n = 2$; $n = 13$.

е) $17C_{2n-1}^{n} = 9C_{2n}^{n-1}$. $\qquad D(У): \; n \leqslant 2n-1; \quad n \in \mathbb{N}$

$$17 \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{9(2n)!}{(n+1)!(n-1)!};$$

$$\frac{17(2n-1)!}{n!} = \frac{9 \cdot 2n(2n-1)!}{(n-1)n!};$$

$17n + 17 = 18; \quad n = 17.$

5. Решите неравенства:

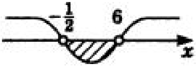
а) $C_{2n}^{7} < C_{2n}^{5}$; $\qquad D(\text{Н}): \; 7 \leqslant 2n; \quad n \in \{4; 5; \ldots\};$

$$\frac{(2n)!}{(2n-7)!7!} < \frac{(2n)!}{(2n-5)!5!};$$

$$\frac{1}{(2n-7)! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!} < \frac{1}{(2n-5)(2n-6)(2n-7)! \cdot 5!};$$

$(2n-5)(2n-6) < 42; \quad (2n-5)(n-3) < 21;$

$2n^2 - 11n - 6 < 0. \quad \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.;$



Значит $n \in \{4; 5\}$.

Ответ: $n = 4; \quad n = 5$.

б) $C_{15}^{k-2} < C_{15}^{k}$; $\quad D(\text{Н}): \begin{cases} k-2 \leqslant 15 \\ k-2 \geqslant 0 \end{cases}; \; k \in \{2; 3; \ldots; 17\};$

$$\frac{15!}{(15-k+2)!(k-2)!} < \frac{15!}{(15-k)k!};$$

$$\frac{1}{(17-k)!(k-2)!} < \frac{1}{(15-k)k!};$$

$(15-k)!k! < (17-k)!(k-2)!;$

$(15-k)! \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)! < (17-k)(16-k)(15-k)!(k-2)!;$

$k^2 - k < k^2 - 33k + 17 \cdot 16; \quad 32k < 17 \cdot 16; \quad 2k < 17;$

$k < 8,5$, значит $k \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} C_n^m = C_n^{m+1} \\ A_n^3 = 60 \end{cases}$;

$A_n^3 = 60 \qquad D(У):\ 3 \leqslant n; \quad n \in \{3; 4; 5; \ldots\};$

$n(n-1)(n-2) = 60; \quad n\left(n^2 - 3n + 2\right) = 60;$

$n^3 - 3n^2 + 2n - 60 = 0;$

$d = \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \ldots$

$$\begin{array}{r|l} -\,n^3 - 3n^2 + 2n - 60 & n - 5 \\ \cline{2-2} \underline{n^3 - 5n^2 \phantom{{}+ 2n - 60}} & n^2 + 2n + 12 \\ -\,2n^2 + 2n \phantom{{}- 60} & \\ \underline{2n^2 - 10n} \phantom{{}- 60} & \\ -\,12n - 60 & \\ \underline{12n - 60} & \end{array}$$

Значит $C_5^m = C_5^{m+1}$; $D(У):\ m + 1 \leqslant 5; \quad m \in \{1; 2; 3; 4\};$

$\dfrac{5!}{(5-m)!m!} = \dfrac{5!}{(4-m)!(m+1)!};$

$(m+1)m! \cdot (4-m)! = (5-m)(4-m)!m!;$

$m + 1 = 5 - m; \quad m = 2.$

Ответ: $n = 5; \quad m = 2.$

Размещения с повторениями

Задача 1. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 3 и 4?

Составим такие числа перебором: 11, 33, 44, 13, 14, 31, 34, 41, 43 — получилось 9 чисел.
Обозначим количество таких чисел $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Задача 2. Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 2 и 5?

Перебирая, получим: 222, 555, 225, 252, 522, 255, 525, 552 — 8 чисел.
Обозначим количество таких чисел $\tilde{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Размещениями из n различных элементов по k с повторениями назовем всевозможные соединения по k элементов, взятые из данных n элементов и отличающиеся либо самими элементами, либо их порядком.

Примечание. Очевидно, что любые элементы в каждом размещении могут повторяться до k раз. Отметим, что k может быть больше или равно n.

Наибольшее число таких размещений называется числом размещений из n элементов по k с повторениями и обозначается $\tilde{A}_n^k = n^k$.

Практикум 4

1. Сколько различных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 8:

   а) двузначных? По формуле $\tilde{A}_5^2 = 5^2 = \boxed{25}$.

   б) трехзначных? $\tilde{A}_5^3 = 5^3 = \boxed{125}$.

   в) шестизначных? $\tilde{A}_5^6 = 5^6 = \boxed{15\,625}$.

2. Сколько различных трехзначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 4?

а) Если считать, что 0 может быть на первом месте, то таких чисел будет $\tilde{A}_4^3 = 64$.

б) Рассмотрим количество всех двузначных чисел, образованных из цифр 0, 1, 2, 4. Их $\tilde{A}_4^2 = 4^2 = 16$. Но это также и количество всех трехзначных чисел, образованных из цифр 0, 1, 2, 4, у которых 0 на первом месте, — их нужно исключить.

Значит, из $\tilde{A}_4^3 = 64$ необходимо вычесть число $\tilde{A}_4^2 = 16$. Таким образом, количество различных трехзначных чисел, которые можно образовать из цифр 0. 1, 2, 4, равно:

$\tilde{A}_4^3 - \tilde{A}_4^2 = 64 - 16 = \boxed{48}$.

3. Сколько различных пятизначных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3?

а) Если считать, что 0 может стоять на первом месте, то таких чисел будет $\tilde{A}_4^5 = 4^5 = 1024$.

б) Количество всех четырехзначных чисел, образованных из цифр 0, 1, 2, 3, равно $\tilde{A}_4^4 = 4^4 = 256$ и совпадает с числом всех пятизначных чисел, образованных из цифр 0, 1, 2, 3, у которых 0 стоит на первом месте, и число которых необходимо исключить.

Таким образом, $\tilde{A}_4^5 - \tilde{A}_4^4 = 1024 - 256 = \boxed{768}$ — количество различных пятизначных чисел, которые можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3.

Перестановки с повторениями

Задача 1. Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если число может содержать цифры 2, 3, 4 и 5 по одному разу, а цифру 1 — три раза?

Если бы все цифры в семизначных числах были различными, то таких чисел было бы $7! = 5040$. Но трем цифрам соответствует $3!$ способа перестановки, значит раз эти цифры одинаковые, то количество таких семизначных чисел в $3!$ раз меньше, чем $7! = 5040$, т. е. $\dfrac{7!}{3!} = \dfrac{5040}{6} = 840$.

Задача 2. Сколько разных *слов* можно образовать из слова «папа»? Рассуждая так же, как в задаче 1, получим, что таких *слов* можно получить $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{6}$.

Перестановкой с повторениями из n элементов называется упорядоченное множество, содержащее n заданных элементов, из которых некоторые повторяются $k_1, k_2, \ldots, k_n$ раз ($k_1 + k_2 + \ldots + k_n \leqslant n$).

Максимальное количество таких перестановок обозначается $\bar{P}$, называется числом перестановок с повторениями и вычисляется по формуле $\bar{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$.

Практикум 5

1. Сколько семизначных чисел можно образовать, если при записи цифра 3 используется два раза, цифра 4 также используется два раза, а цифра 6 — три раза.

$$\bar{P}_7 = \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \boxed{210}.$$

2. Сколько *слов* можно получить из слова «барабашка»?

Так как буква «б» повторяется два раза, а буква «а» — четыре раза, то число *слов* равно:

$$\frac{9!}{2! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{1360}.$$

Сочетания с повторениями

Задача 1. В санатории на полдник предлагались апельсины (А), бананы (Б) и груши (Г). Отдыхающие могут выбрать четыре плода. Сколько вариантов полдника возможно?

Выпишем возможные варианты (очевидно, порядок не существенен): АБГГ, АББГ, ААБГ, АГГГ, АБББ, АААБ, АААГ, АААА, ББББ, ГГГГ, БГГГ, ГБББ, ГГАА, ГГББ, ББАА — всего 15 вариантов.

Обозначим это число $\tilde{C}_3^4 = 15$.

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k элементов называются неупорядоченные множества (любой набор) по k элементов из данных n элементов, причем любой элемент может повториться до k раз.

Наибольшее число таких наборов называется числом сочетаний из n элементов по k с повторениями и вычисляется по формуле $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

В задаче 1 $\tilde{C}_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4!}{2!\cdot 4!} = \boxed{15}$.

Практикум 6

1. На спектакле в Михайловском театре во время антракта Катя зашла в буфет и увидела на витрине четыре вида пирожных: эклеры, буше, наполеон и миндальные. Она купила 10 пирожных. Сколькими способами она могла это сделать?

   В данном случае речь идет о числе сочетаний из 10 элементов по 4 с повторениями, значит

   $$\tilde{C}_{10}^4 = C_{10+4-1}^4 = C_{13}^4 = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 13\cdot 11\cdot 5 = \boxed{715}.$$

2. Сколько существует треугольников, длина сторон которых 5, 6, 7, 8, 9?

   Данные длины сторон таковы, что любые три соответствуют правилу треугольника, т.е. каждая сторона меньше суммы двух других. Значит, любая комбинация из трех таких сторон образует треугольник.

В данной задаче речь идет о числе сочетаний из 5 элементов по 3 с повторениями: $\tilde{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \boxed{35}$.

3. Баскетбольные команды клубов «Вымпел» и «Гарант» играют серию игр до тех пор, пока одна из них не одержит пять побед (ничьих в баскетболе нет). Сколько различных выигрышных серий игр может быть?

Положим, что выигрывает команда клуба «Вымпел». Тогда возможны варианты 5:0, 5:1, 5:2, 5:3 и 5:4.

а) Счет 5:0 возможен только в одной комбинации.

б) Счет 5:1 возможен, если из всех возможных перестановок с повторениям $\tilde{P}_6 = \dfrac{6!}{1! \cdot 5!} = 6$ исключить серии, когда команда клуба «Гарант» выигрывает последнюю игру серии (ВВВВВГ), так как 5 побед в этой ситуации будет одержано раньше.

Итого $\tilde{P}_6 - 1 = 6 - 1 = 5$ — количество возможных серий игр, закончившихся со счетом 5:1.

в) Счет 5:2 возможен, если из всех возможных перестановок с повторениями $\tilde{P}_7 = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21$ исключить серии, в которых последнюю игру в серии выигрывает команда «Гарант» (аналогично случаю 5:1). Таких серий будет $\tilde{P}_6 = \dfrac{6!}{5!} = 6$, значит $\tilde{P}_7 - \tilde{P}_6 = 21 - 6 = 15$.

г) Счет 5:3 возможен, если из всех возможных перестановок с повторениями $\tilde{P}_8 = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$ исключить серии, в которых последнюю игру выигрывает «Гарант».

Их будет $\tilde{P}_7 = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$, значит серий, закончившихся со счетом 5:3 возможно $\tilde{P}_8 - \tilde{P}_7 = 56 - 21 = 35$.

д) Счет 5:4, аналогично, возможен в

$$\tilde{P}_9 - \tilde{P}_8 = \frac{9!}{5! \cdot 4!} - \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8! \cdot (9-4)}{5! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$= 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$ сериях.

Итого число серий во всех случаях это сумма:

$1 + 5 + 15 + 35 + 70 = \boxed{126}$.

4. Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, если цифра 2 используется в каждом числе по 3 раза, и две цифры 2 не стоят рядом?

Из цифр 1, 3, 4 можно образовать $3! = 6$ перестановок, то есть существует 6 упорядоченных троек чисел:

$(1;3;4)$; $(1;4;3)$; $(3;1;4)$; $(3;4;1)$; $(4;1;3)$; $(4;3;1)$.

Из каждой тройки можно образовать 4 шестизначных числа присоединением цифры 2 в соответствии с условиями, например: 213 242; 123 242; 213 242; 212 232.

Значит, всего таких шестизначных чисел будет $6 \cdot 4 = \boxed{24}$.

2

Элементы статистики

Меры центральной тенденции

Математическая статистика часто имеет дело с понятием среднего для данного ряда чисел (измерений). Для разных целей это среднее определяют по-разному. Попробуем разобраться на примерах.

Задача 1. Проводя ежегодный медицинский осмотр в конце августа среди мальчиков-десятиклассников, получили данные об их росте 168, 159, 181, 172, 161, 163, 164, 170, 169, 154, 168, 175 см. Найдите средний рост ребят и число ребят выше среднего роста.

Естественно, сложим рост всех ребят и поделим на число ребят:

$(168+159+181+172+161+163+164+170+169+154+168+175):$
$: 12 = 167.$

Число 167, которое получается в результате, называется средним арифметическим.

Определение 1. Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество. Обозначают $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ или $M = \bar{x}$.

Очевидно, семь ребят выше среднего роста, а пять ниже.

Задача 2. Проведем анализ оценок восьмиклассника Сидорова Кости по математике в III четверти: 5, 3, 4, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 5. Получим среднее арифметическое, равное

$$M = \frac{5+3+4+2+5+5+4+3+3+5}{10} = 3{,}9.$$

Теперь стало очевидно, почему учительница поставила Косте за III четверть оценку 4 — просто 3,9 приближенно равно 4. Кроме того, шесть оценок выше среднего балла. Отметим также, что чаще всего Костя получал оценку 5. В этом случае обычно в статистике говорят, что в ряде оценок число 5 является **модой**.

> **Определение 2. Модой обычно называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Обозначают M_0.**

Мода — весьма важный показатель в статистике. Например, она может использоваться для оценки того, какие телефоны и какой ценовой категории чаще всего покупают студенты, домохозяйки и в других подобных задачах.

Задача 3. В небольшом обувном магазине для месячного завоза обуви было проведено маркетинговое исследование. Как выяснилось, за день обычно продают обувь следующих размеров: 39, 43, 40, 44, 45, 42, 42, 41, 43, 40, 42, 43, 43, 41, 40, 45, 44, 41, 41, 43, 44, 42, 40, 39, 43, 46, 42, 41, 44, 43.

Чтобы удобнее было исследовать, упорядочим ряд чисел по величине и кратности: 39, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 46.

1. Можно посчитать среднее арифметическое ряда:
   $M = (39\cdot2+40\cdot4+41\cdot5+42\cdot5+43\cdot7+44\cdot4+45\cdot2+46):30 = 42.$

2. Но модой здесь будет 43 размер.

3. Из исследования выходило, что на месяц необходимо заказать 60 пар обуви 39 размера, 120 пар 40 размера, 150 пар 41 размера, 150 пар 42 размера, 210 пар 43 размера, 120 пар 44 размера, 60 пар 45 размера и 30 пар 46 размера.

4. Известно, что стоимость одной пары 39 размера 1000 рублей, каждый следующий размер стоит на 100 рублей дороже.

5. Представим эти результаты в виде таблицы:

Размер	Кратность данного размера	Завоз на месяц	Цена пары	Общая стоимость
39	2	60	1000	60 000
40	4	120	1100	132 000
41	5	150	1200	180 000
42	5	150	1300	195 000
43	7	210	1400	294 000
44	4	120	1500	180 000
45	2	60	1600	96 000
46	1	30	1700	51 000
				1 188 000

Общая стоимость обуви 1 188 000 рублей. Но чаще для прикидки расчеты ведут иначе. Учтем средний размер востребуемой пары обуви — 42, стоимость которой 1300 руб. Умножив на общее количество обуви 900 пар, получим $1300 \cdot 900 = 1\,170\,000$ рублей.

Как видно, проще и быстрее посчитать стоимость товара, используя понятие среднего арифметического. Ошибка около 1,5%, что несущественно. Для данной задачи $1\,188\,000 - 1\,170\,000 = 18\,000$ (абсолютная погрешность),

т. е. $\dfrac{18\,000}{1\,188\,000} = \dfrac{18}{1188} \approx 1{,}5\%$ (относительная погрешность).

Для бухгалтерских проводок расчеты, конечно, ведутся точно.

Примечание. Такое рассуждение можно вести не всегда. Вы, наверное, обратили внимание на то, что цены в таблице не очень сильно отличаются друг от друга. Отсюда и следует небольшая величина ошибки.

<u>Определение 3.</u>

1. Данные измерения иногда называют выборкой или вариантой.

2. Количество одинаковых вариант в ряде называют кратностью.

3. Сумма всех кратностей называется объемом измерения.

4. Частотой варианты называют отношение кратности варианты к общему числу измерений или объему измерений, чаще всего записывают в виде процентов или десятичной дробью, меньшей единицы.

Примечания.

1. Под измерением в этом определении подразумевается получение численных данных каким-либо способом.

2. Понятие объема измерения перекликается с понятием мощности множества, которое подробно обсуждается в книге А. Х. Шахмейстера «Функции. Множества. Последовательности». Напомним, что в случае конечных множеств мощностью является число элементов этого множества.

Задача 4. Число болельщиков, за две недели посетивших футбольные матчи на стадионе «Зенит», отображено на диаграмме.

Стоимость билета в среднем распределялась следующим образом: 30% по 250 рублей, 50% по 420 рублей и 20% по 550 рублей. Какова примерная выручка за две недели соревнований?

1. Составим среднее арифметическое посещений матчей. Округлив до сотен, получим

$$M = (12\,590 + 29\,700 + 7\,120 + 5\,410 + 18\,210 + 26\,450 + \\ + 12\,300 + 16\,530) : 8 \approx 16\,000.$$

2. 30%: $16\,000 \cdot 0{,}3 = 4\,800$ – число болельщиков, заплативших по 250 рублей;

   $4\,800 \cdot 250 = 1\,200\,000$ рублей — выручка.

   50%: $16\,000 \cdot 0{,}5 = 8\,000$ — число болельщиков, заплативших по 420 рублей;

   $8\,000 \cdot 420 = 3\,360\,000$ рублей — выручка.

   20%: $16\,000 \cdot 0{,}2 = 3\,200$ — число болельщиков, заплативших по 550 рублей;

   $3\,200 \cdot 550 = 1\,760\,000$ рублей — выручка.

   Итого выручка в среднем за один матч составила:

   $1\,200\,000 + 3\,360\,000 + 1\,760\,000 = 6\,320\,000.$

3. Тогда выручка за две недели составила

   $6\,320\,000 \cdot 8 = 50\,560\,000$ рублей.

   Для прикидки точность вполне достаточная.

   Очевидно, что если посчитать выручку за каждый матч, то расчеты будут существенно сложнее и утомительнее.

Примечание. Можно было поставить и решать другие вопросы. Например, если рентабельность матча в обслуживании составляет не менее 5 000 000 рублей, то сколько нерентабельных матчей прошло? Сколько милицейского транспорта необходимо выделить, если известна зависимость числа милиционеров от числа болельщиков и т. д.

В ряде задач существенно отследить разницу между числом болельщиков, посещающих наиболее популярные и наименее популярные матчи. В данном случае разница равна 24 290 человек.

Определение 4. В статистике разница между наибольшими и наименьшими значениями членов ряда называется размахом.

Задача 5. При сдаче производственных помещений для маточного поголовья коров строители заверили, что средний температурный режим в $24 \pm 2\%$ выдерживается. При контрольных замерах за месяц выяснилось, что минимальная температура $12° \pm 1°$, а максимальная температура $36° \pm 1°$. Средняя температура соответствовала заявленной, но размах был чудовищно большим — $24°$. Очевидно, что никакое маточное поголовье таких колебаний температур выдержать не может. Естественно, что здесь самое важное это размах, или амплитуда колебаний. Она должна была меняться в пределах $4°$.

Задача 6. На зачетном уроке по бегу на 100 метров, а затем на 1000 мальчики 7 класса показали следующие результаты.

Имя	с/100 м	с/1000 м
Иван	16,2	175
Денис	23,1	250
Марик	17,2	210
Алеша	22,2	270
Петя	15,9	180
Коля	16,5	205
Андрей	18,1	225
Филипп	19,6	255
Алик	26,2	315
Даниил	16,6	220
Игнат	21,2	275

Андрей порадовался, что на стометровке у него результат выше среднего. Но учитель, подводя итоги, отметил, что у Андрея результат средний, так как пять мальчиков пробежали быстрее него, а пять, увы, медленнее. Андрей не согласился с учителем, потому что $M = (16{,}2+23{,}1+17{,}2+22{,}2+15{,}9+16{,}5+18{,}1+19{,}6+$ $+26{,}2+16{,}6+21{,}2):11 \approx 19{,}3$, а у него результат выше среднего арифметического на 1,2 сек. Но учитель имел в виду не средний арифметический результат, а то, что результат Андрея лишь шестой из 11 возможных.

Действительно, 15,9; 16,2; 16,5; 16,6; 17,2; **18,1**; 19,6; 21,2; 22,2; 23,1; 26,2.

В статистике такой результат называется **медианой**.

Определение 5. **Медианой ряда, состоящего из нечетного числа членов, называется тот член ряда, который окажется посередине, если этот ряд упорядочить по величине его членов.**

Медианой ряда, состоящего из четного числа членов, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине членов упорядоченного по величине ряда.

Медиану обозначают Me.

Рассмотрим результаты забега на 1000 метров.

$$M = (175 + 250 + 210 + 270 + 180 + 205 + 225 + 255 + 315 + \\ + 220 + 275) : 11 \approx 235 \text{ сек.}$$

Упорядочим результаты забега по величине:

175, 180, 205, 210, 220, **225**, 250, 255, 270, 275, 315, $Me = 225$.

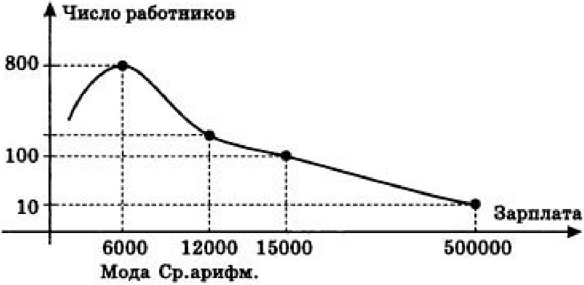
В этом забеге результат Андрея выше (лучше) среднего арифметического, но в то же время является медианой ряда. Очевидно, что медиана ряда является достаточно важной характеристикой ряда чисел.

Задача 7. В профсоюз работников лесной промышленности пришла жалоба рабочих одного завода на то, что у них среднемесячная зарплата в 6000 руб., и она ниже среднеотраслевой в два раза. В ответ на запрос от дирекции пришла справка, из которой следовало, что средняя зарплата по заводу более 12 000 рублей. Однако проведенный дополнительный анализ распределения зарплаты показал, что 800 рабочих получают по 6000 руб. в месяц, 100 инженеров и бухгалтеров по 15 000 руб. в месяц, а 10 человек — дирекция — по 500 000 руб. в месяц.

$$M = \frac{800 \cdot 6000 + 100 \cdot 15\,000 + 10 \cdot 500\,000}{910} \approx 12\,417.$$

Таким образом, из справки следовало, что среднемесячная зарплата даже выше. В данном случае более точным (т. е. соответствующим действительности), чем среднеарифметическая зарплата, является понятие **моды.**

На графике приведено распределение зарплат по группам работников.



На графике ясно видно реальное значение зарплаты рабочих — 6000 руб. С жульничеством с зарплатой на заводе разобрались, и вороватую администрацию уволили.

Тренировочная работа 4

Вариант 1

1. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда:

а) 7,5; 7,5; 7,5; 7,5; 7,5;

б) 8, 3, 5, 4, 6, 10;

в) 16, 6, 10, 8, 12, 20;

г) 9, 4, 6, 5, 7, 11;

д) 3, 10, 4, 6, 7, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 3, 8, 6, 4, 10, 2, 5, 3, 6.

2. а) Андрей за полугодие имел за самостоятельные и контрольные работы следующие отметки:
по математике — 3, 4, 5, 2, 4, 3, 4, 5;
по физике — 5, 3, 3, 4, 3, 4.
По какому предмету Андрей учится лучше?

б) За полугодие лучшие семь учеников на конкурсе работ по литературе получили следующие баллы:
Иванов: 4, 4, 3, 5, 5, 3, 3, 5, 5;
Петров: 4, 5, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 5;
Жукова: 5, 4, 4, 5, 4, 3, 3, 4, 4;
Волков: 5, 5, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 4;
Макарова: 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 4, 5;
Ломов: 3, 4, 5, 3, 5, 5, 4, 4;
Яковлев: 4, 4, 5, 5, 3, 4, 3, 4.
Какие места, по вашему мнению, заняли эти участники на конкурсе?

3. Результаты измерения роста 21 призывника одного районного города представлены в виде ряда чисел: 176, 180, 178, 175, 179, 177, 176, 175, 175, 177, 180, 178, 179, 176, 177, 178, 179, 175, 177, 176, 179. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда.

4. Известно, что в цеху работало 540 рабочих: слесари, токари, фрезеровщики и сверлильщики, число которых находится в отношении $4:5:6:3$. Причем зарплата их соответственно составляла 650, 890, 940 и 780 рублей в месяц. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах зарплат рабочих в цеху.

Тренировочная работа 4

Вариант 2

1. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда:

   а) $\pi; \pi; \pi; \pi; \pi; \pi; \pi;$

   б) 7, 2, 4, 3, 5, 9;

   в) 21, 6, 12, 9, 15, 27;

   г) 10, 5, 7, 6, 8, 12;

   д) 6, 20, 8, 12, 14, 2, 6, 10, 14, 16, 18, 6, 16, 12, 8, 20, 4, 10, 6, 12.

2. а) Наташа на конкурсе по английскому и русскому языку получила следующие баллы (по десятибалльной системе):

   по английскому — 6, 8, 10, 4, 8, 6, 8, 10;

   по русскому — 10, 6, 8, 8, 6, 8.

   По какому языку Наташа показала лучшие результаты на конкурсе?

   б) За олимпиаду по математике семь участников по десятибалльной системе получили следующие баллы за каждую решенную задачу:

   Петрова: 8, 8, 6, 10, 10, 6, 6, 10, 10;

   Сидоров: 8, 10, 6, 6, 8, 10, 8, 8, 10;

   Валуева: 10, 8, 8, 10, 8, 6, 6, 8, 8;

   Немчинов: 10, 10, 8, 6, 8, 10, 8, 8, 8;

   Сафонова: 6, 8, 10, 8, 6, 8, 10, 8, 10;

   Молчанов: 8, 8, 10, 6, 10, 10, 8, 8;

   Яковлев: 8, 8, 10, 10, 6, 8, 6, 8.

   Какие места, по-вашему, заняли эти участники олимпиады?

3. Результаты измерения роста 21 мальчика средней группы детского сада представлены в виде ряда чисел: 76, 80, 78, 75, 79, 77, 76, 75, 75, 77, 80, 78, 79, 76, 77, 78, 79, 75, 77, 76, 79. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда.

4. Известно, что в цеху работало 240 работниц: мотальщиц, ткачих, прядильщиц и красильщиц, число которых находится в отношении $4:6:7:3$. Причем в месяц зарплата их соответственно составляет 700, 940, 820, 760 рублей. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах зарплат работниц в цеху.

Решение тренировочной работы 4

Вариант 1

1. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда.

а) 7,5; 7,5; 7,5; 7,5; 7,5.

Очевидно, что $M = \dfrac{7{,}5 + 7{,}5 + \ldots + 7{,}5}{6} = \boxed{7{,}5}$.

Медиана равна $\boxed{7{,}5}$. Мода также равна $\boxed{7{,}5}$.

Размах, или амплитуда равен $\boxed{0}$.

б) 8, 3, 5, 4, 6, 10.

$M = \dfrac{8+3+5+4+6+10}{6} = \dfrac{36}{6} = \boxed{6}$.

Для поиска медианы упорядочим ряд чисел по величине, т. е. 3, 4, 5, 6, 8, 10. Тогда медиана равна $Me = \dfrac{5+6}{2} = 5{,}5$. Моды здесь нет.

в) 16, 6, 10, 8, 12, 20.

Отличается от предыдущего ряда 8, 3, 5, 4, 6, 10 в два раза. Но тогда среднее больше в два раза, т. е. $M = \boxed{12}$.

Медиана также будет в два раза больше, т. е. медиана $Me = \boxed{11}$.

Моды в этом ряде также нет.

г) 9, 4, 6, 5, 7, 11.

Заметим, что каждый член этого ряда на единицу больше ряда 8, 3, 5, 4, 6, 10. Тогда среднее на единицу больше, т. е. $M = 6 + 1 = \boxed{7}$.

Медиана также на единицу больше медианы сравниваемого ряда: $Me = 5{,}5 + 1 = \boxed{6{,}5}$. Моды нет.

Для пунктов в) и г) необходимые данные можно получить непосредственно вычислениями.

д) 3, 10, 4, 6, 7, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 3, 8, 6, 4, 10, 2, 5, 3, 6.

Составим таблицу кратностей.

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кратность	1	1	4	2	2	3	2	2	1	2

$$M = (1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 2\cdot 7 + 2\cdot 8 + 1\cdot 9 + 2\cdot 10) : 20 = \boxed{5{,}5}.$$

Ряд чисел можно, сгруппировав, представить в виде $1; 2; (3, 3, 3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6, 6); (7, 7); (8, 8); 9; (10, 10)$.

Очевидно, что десятым членом ряда будет число 5. А одиннадцатым членом ряда будет число 6.

Значит, медиана равна $Me = \dfrac{5+6}{2} = \boxed{5{,}5}$ (членом ряда не является).

Модой является число $M_0 = \boxed{3}$.

Размах ряда равен $10 - 1 = \boxed{9}$.

2. а) Андрей за полугодие имел за самостоятельные и контрольные работы следующие отметки:

по математике — 3, 4, 5, 2, 4, 3, 4, 5;

по физике — 5, 3, 3, 4, 3, 4.

По какому предмету Андрей учится лучше?

Среднее по математике равно

$$M = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 2\cdot 5 + 2}{8} = \frac{30}{8} = 3\frac{3}{4}.$$

Модой является отметка $M_0 = 4$.

Медианой — отметка $Me = 4$.

Среднее по физике:

$$M = \frac{3\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}.$$

Модой является отметка $M_0 = 3$.

Медианой — число $Me = 3{,}5$.

Очевидно, что так как $3\frac{3}{4} > 3\frac{2}{3}$, то по математике Андрей с позиции среднего учится лучше, хотя по физике Андрей учится стабильнее (нет двоек). Так что уверенно сказать, по какому предмету Андрей учится лучше, пока трудно.

Но так как а) мода отметок по математике больше моды отметок по физике; б) медиана отметок по математике больше медианы отметок по физике, то можно утверждать, что все-таки по математике Андрей учится несколько лучше, чем по физике.

б) За полугодие лучшие семь учеников на конкурсе работ по литературе получили следующие баллы:

Иванов: 4, 4, 3, 5, 5, 3, 3, 5, 5;

Петров: 4, 5, 3, 3, 4, 5, 4, 4, 5;

Жукова: 5, 4, 4, 5, 4, 3, 3, 4, 4;

Волков: 5, 5, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 4;

Макарова: 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 4, 5;

Ломов: 3, 4, 5, 3, 5, 5, 4, 4;

Яковлев: 4, 4, 5, 5, 3, 4, 3, 4.

Какие места, по вашему мнению, заняли эти участники на конкурсе?

1) Для Иванова: $M = \dfrac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{9} = \dfrac{37}{9} = 4\dfrac{1}{9}$.
Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 5$.

2) Для Петрова: $M = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{9} = \dfrac{37}{9} = 4\dfrac{1}{9}$.
Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 4$.

3) Для Жуковой: $M = \dfrac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{9} = \dfrac{36}{9} = 4$.
Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 4$.

4) Для Волкова: $M = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{9} = \dfrac{37}{9} = 4\dfrac{1}{9}$.

Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 4$.

5) Для Макаровой: $M = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{9} = \dfrac{37}{9} = 4\dfrac{1}{9}$.

Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 4$.

6) Для Ломова: $M = \dfrac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{8} = \dfrac{33}{8} = 4\dfrac{1}{8}$.

Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 5$.

7) Для Яковлева: $M = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{8} = \dfrac{32}{8} = 4$.

Медиана $Me = 4$. Мода $M_0 = 4$.

Очевидно, что по всем показателям (среднее арифметическое, медиана, мода) успешней всего стал Иванов. Затем Петров, Волков и Макарова.

Далее Жукова. Так как Ломов и Яковлев написали меньше работ, то они оцениваются ниже предыдущих, лучший из них, естественно, Ломов.

Ответ: Иванов — I;
Петров — II–III–IV;
Волков — II–III–IV;
Макарова — II–III–IV;
Жукова — V;
Ломов — VI;
Яковлев — VII.

В условиях реального конкурса необходимо заранее договориться, по каким критериям определяется победитель.

3. Результаты измерения роста 21 призывников одно районного города представлены в виде ряда чисел: 176, 180, 178, 175, 179, 177, 176, 175, 175, 177, 180, 178, 179, 176, 177, 178, 179, 175, 177, 176, 179. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда.

Составим таблицу кратностей.

Число	175	176	177	178	179	180
Кратность	4	4	4	3	4	2

$$M = \frac{4 \cdot 175 + 4 \cdot 176 + 4 \cdot 177 + 3 \cdot 178 + 4 \cdot 179 + 2 \cdot 180}{21} =$$
$$= \frac{3722}{21} = 177\frac{5}{21} \approx \boxed{177{,}24}.$$

Медиана $Me = \boxed{177}$.

А одной единственной моды нет (их четыре), так как 175, 176, 177 и 179 встречаются одинаково — по 4 раза.

Размах или амплитуда равен $180 - 175 = \boxed{5}$.

4. Известно, что в цеху работало 540 рабочих: слесари, токари, фрезеровщики и сверлильщики, число которых находится в отношении 4 : 5 : 6 : 3. Причем зарплата их соответственно составляла в 1994 году 650, 890, 940, 780 рублей. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах зарплат рабочих в цеху.

Так как число рабочих по специальностям находится в отношении $4:5:6:3$, то общее число частей $4+5+6+3=18$. Значит:

а) слесарей $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ от общей численности,

т. е. $540 \cdot \frac{2}{9} = 120$ человек;

б) токарей $\frac{5}{18}$ от общей численности,

т. е. $540 \cdot \frac{5}{18} = 150$ человек;

в) фрезеровщиков $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ от общей численности,

т. е. $540 \cdot \frac{1}{3} = 180$ человек;

г) сверлильщиков $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$, т. е. $540 \cdot \frac{1}{6} = 90$ человек.

Таким образом, можно составить таблицу кратностей зарплат рабочих

Число рабочих (кратность)	120	150	180	90
Зарплата	650	890	940	780

Тогда

$$M = (120 \cdot 650 + 150 \cdot 890 + 180 \cdot 940 + 90 \cdot 780) : 540 =$$

$$= \frac{450\,900}{540} \approx \boxed{835}.$$

Медиана равна $Me = \dfrac{890 + 940}{2} = \boxed{915}$.

Мода равна $M_0 = \boxed{940}$. Размах равен $940 - 650 = \boxed{290}$.

Решение тренировочной работы 4

Вариант 2

1. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда:

а) $\pi; \pi; \pi; \pi; \pi; \pi; \pi$.

Так как все члены равны между собой, то $M = \boxed{\pi}$, медиана $Me = \boxed{\pi}$ и мода $M_0 = \boxed{\pi}$. Размах или амплитуда равна нулю.

б) 7, 2, 4, 3, 5, 9.

$$M = \frac{7+2+4+3+5+9}{6} = \frac{30}{6} = \boxed{5}.$$

Для поиска медианы упорядочим ряд по величине: 2, 3, 4, 5, 7, 9. Значит, медиана $Me = \dfrac{4+5}{2} = \boxed{4{,}5}$. Моды здесь нет.

в) 21, 6, 12, 9, 15, 27.

$$M = \frac{21+6+12+9+15+27}{6} = \boxed{15}.$$

Можно было не вычислять среднее, так как члены данного ряда в три раза больше членов предыдущего ряда. Значит среднее также в три раза больше.

Аналогично для медианы: $Me = \boxed{13{,}5}$. Моды в этом ряде также нет.

г) 10, 5, 7, 6, 8, 12.

Отметим, что каждый член этого ряда на 3 больше каждого члена ряда 7. 2, 4, 3, 5, 9. Значит, среднее также больше на 3, т. е. $M = \boxed{8}$. Аналогично и медиана больше на 3: $Me = \boxed{7{,}5}$. Моды тоже нет.

Для пунктов в) и г) необходимые данные можно также получить непосредственно вычислениями.

д) 6, 20, 8, 12, 14, 2, 6, 10, 14, 16, 18, 6, 16, 12, 8, 20, 4, 10, 6, 12.

Составим таблицу кратностей.

Число	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Кратность	1	1	4	2	2	3	2	2	1	2

$M = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 14 + $
$+ 2 \cdot 16 + 1 \cdot 18 + 2 \cdot 20) : 20 = \boxed{11}$.

С другой стороны, этот ряд чисел можно сгруппировать иначе: 2; 4; (6;6;6;6); (8;8); (10;10); (12;12;12); (14;14); (16;16); 18; (20;20).

Очевидно, что десятым членом ряда будет 10, а одиннадцатым членом ряда будет число 12.

Значит, медиана будет $Me = \dfrac{10+12}{2} = \boxed{11}$ (членом ряда не является).

Модой является число $M_0 = \boxed{6}$.

Размах ряда равен $20 - 2 = \boxed{18}$.

2. а) Наташа на конкурсе по английскому и русскому языку получила следующие баллы (по десятибалльной системе):

по английскому — 6, 8, 10, 4, 8, 6, 8, 10;

по русскому — 10, 6, 8, 8, 6, 8.

По какому языку Наташа показала лучшие результаты на конкурсе?

Среднее по английскому:

$$\frac{6+8+10+4+8+6+8+10}{8} = \frac{60}{8} = \boxed{7,5}.$$

Модой является $M_0 = \boxed{8}$.

Упорядочим ряд баллов по английскому: 4; (6; 6); (8; 8; 8); (10; 10), значит, медиана $Me = \boxed{8}$.

Среднее по русскому $\dfrac{10+6+8+8+6+8}{6}=\boxed{7\frac{2}{3}}$.

Модой является $M_0=\boxed{8}$. Медиана $Me=\boxed{8}$.

Так как мода и медиана по русскому и английскому языку равны, а среднее больше по русскому, то по русскому языку Наташа показала более высокие результаты.

б) За олимпиаду по математике семь участников по десятибалльной системе получили следующие баллы за каждую решенную задачу.

Петрова: 8, 8, 6, 10, 10, 6, 6, 10, 10;

Сидоров: 8, 10, 6, 6, 8, 10, 8, 8, 10;

Валуева: 10, 8, 8, 10, 8, 6, 6, 8, 8;

Немчинов: 10, 10, 8, 6, 8, 10, 8, 8, 8;

Сафонова: 6, 8, 10, 8, 6, 8, 10, 8, 10;

Молчанов: 8, 8, 10, 6, 10, 10, 8, 8;

Яковлев: 8, 8, 10, 10, 6, 8, 6, 8.

Какие места, по-вашему, заняли эти участники олимпиады?

1) Для Петровой $M=\dfrac{3\cdot 6+2\cdot 8+4\cdot 10}{9}=\dfrac{74}{9}=\boxed{8\frac{2}{9}}$.

Медиана $Me=\boxed{8}$. Мода $M_0=\boxed{10}$.

2) Для Сидорова $M=\dfrac{2\cdot 6+4\cdot 8+3\cdot 10}{9}=\dfrac{74}{9}=\boxed{8\frac{2}{9}}$.

Медиана $Me=\boxed{8}$. Мода $M_0=\boxed{8}$.

3) Для Валуевой $M=\dfrac{2\cdot 6+5\cdot 8+2\cdot 10}{9}=\dfrac{72}{9}=\boxed{8}$.

Медиана $Me=\boxed{8}$. Мода $M_0=\boxed{8}$.

4) Для Немчинова $M=\dfrac{1\cdot 6+5\cdot 8+3\cdot 10}{9}=\dfrac{76}{9}=\boxed{8\frac{4}{9}}$.

Медиана $Me=\boxed{8}$. Мода $M_0=\boxed{8}$.

5) Для Сафоновой $M = \dfrac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 10}{9} = \dfrac{74}{9} = \boxed{8\frac{2}{9}}$.

Медиана $Me = \boxed{8}$. Мода $M_0 = \boxed{8}$.

6) Для Молчанова $M = \dfrac{1 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 10}{9} = \dfrac{68}{9} = 8{,}5$.

Медиана $Me = \boxed{8}$. Мода $M_0 = \boxed{8}$.

7) Для Яковлева $M = \dfrac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 10}{9} = \dfrac{66}{9} = \boxed{8{,}25}$.

Медиана $Me = \boxed{8}$. Мода $M_0 = \boxed{8}$.

Так как Немчинов решил девять задач и получил $M = \boxed{8\frac{4}{9}}$, медиану $Me = \boxed{8}$ и моду $M_0 = \boxed{8}$, а значит, был стабильнее, то ему присудили I место.

II место получила Петрова, у которой $M = \boxed{8\frac{2}{9}}$, медиана $Me = \boxed{8}$, хотя мода равна $M_0 = \boxed{10}$. Но она выступила менее стабильно, чем Немчинов.

Сидоров и Сафонова разделили III–IV места, так как у них $M = \boxed{8\frac{2}{9}}$, медиана $Me = \boxed{8}$ и мода $M_0 = \boxed{8}$.

V место заняла Валуева с $M = \boxed{8}$, медианой $Me = \boxed{8}$ и модой $M_0 = \boxed{8}$.

Хотя у Молчалова $M = \boxed{8{,}5}$ самое высокое, а медиана $Me = \boxed{8}$ и мода $M_0 = \boxed{8}$ но, так как он решил на одну задачу меньше, то занял VI место.

Ну, а Яковлев — VII место.

Ответ: Немчинов — I место;
Петрова — II место;
Сидоров — III–IV место;
Сафонова — III–IV место;
Валуева — V место;
Молчанов — VI место;
Яковлев — VII место.

3. Результаты измерения роста 21 мальчика средней группы детского сада представлены в виде ряда чисел: 76, 80, 78, 75, 79, 77, 76, 75, 75, 77, 80, 78, 79, 76, 77, 78, 79, 75, 77, 76, 79. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах ряда.

Составим таблицу кратностей.

Число	75	76	77	78	79	80
Кратность	4	4	4	3	4	2

$$M = \frac{4\cdot 75 + 4\cdot 76 + 4\cdot 77 + 3\cdot 78 + 4\cdot 79 + 2\cdot 80}{21} =$$
$$= 77\frac{5}{21} \approx \boxed{77{,}24}.$$

Медиана $Me = \boxed{77}$.

Моды нет, так как 75, 76, 77 и 79 встречаются по 4 раза.

Размах или амплитуда равен $80 - 75 = \boxed{5}$.

4. Известно, что в цеху работало 240 работниц: мотальщиц, ткачих, прядильщиц и красильщиц, число которых находится в отношении $4:6:7:3$. Причем зарплата их соответственно составляет 700, 940, 820, 760 рублей. Найдите среднее арифметическое, медиану, моду и размах зарплат работниц в цеху.

Так как число работниц относится как $4:6:7:3$, то общее число частей равно $4+6+7+3=20$. Значит число

а) мотальщиц $240\cdot\dfrac{4}{20} = 48$ человек;

б) ткачих $240\cdot\dfrac{6}{20} = 72$ человека;

в) прядильщиц $240\cdot\dfrac{7}{20} = 84$ человека;

г) красильщиц $240\cdot\dfrac{3}{20} = 36$ человек.

Значит, можно составить таблицу кратностей зарплат работниц в зависимости от профессий

Кратность или число работниц	48	72	84	36
Зарплата	700	940	820	760

$$M = \frac{48 \cdot 700 + 72 \cdot 940 + 84 \cdot 820 + 36 \cdot 760}{240} = \frac{197\,520}{240} \approx \boxed{823}.$$

Медиана $Me = \dfrac{940 + 820}{2} = \boxed{880}$.

Мода $M_0 = \boxed{820}$. Размах $\boxed{240}$.

Итак, подведем некоторые итоги.

Для того чтобы воспользоваться информацией о проведенных измерениях, необходимо каким-то образом ее систематизировать, обработать. Иначе эта информация трудно «читается». Одна из основных задач статистики как раз и состоит в надлежащей **обработке информации**:

1. Данные измерений упорядочивают и группируют;
2. После группировки составляют таблицы распределения данных;
3. Таблицы распределения позволяют построить графики распределения данных;
4. Составляют своего рода паспорт, в котором отражено небольшое количество основных числовых характеристик полученной информации.

Разумеется, у статистики есть много других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Понятие среднего арифметического, моды, размаха или амплитуды, а также медианы позволяет глубже, более осмысленно анализировать полученную информацию.

Примечание. Отметим, что среднее арифметическое, мода и медиана называются **мерами центральной тенденции**.

Меры изменчивости

Задача 8. В одном почтовом отделении в районе новостроек было проведено следующее статистическое исследование. Выбрано произвольно 100 посетителей. Попросили замерить, сколько минут каждый из них потратит на дорогу к почтовому отделению. В результате получили следующий ряд: 25; 50; 40; 36; 45; 6; 19; 38; 30; 5; 14; 33; 52; 26; 34; 38; 16; 29; 43; 22; 28; 13; 37; 32; 46; 23; 28; 5; 30; 10; 24; 33; 46; 17; 31; 24; 15; 28; 40; 20; 51; 26; 40; 34; 21; 8; 32; 44; 14; 27; 33; 50; 39; 30; 19; 37; 53; 23; 27; 6; 34; 42; 24; 53; 32; 17; 40; 52; 34; 26; 30; 35; 49; 18; 27; 45; 31; 25; 39; 20; 37; 38; 38; 27; 43; 31; 40; 16; 35; 13; 27; 12; 44; 21; 29; 22; 43; 25; 47; 36.

Как видно, одинаковые значения здесь встречаются редко, а число различных вариантов довольно велико, и поэтому обычное ранжирование не позволяет выявить характерные черты ряда данных.

Попробуем для обработки данных построить интервальный ряд. Для этого найдем наибольшее значение — 53, и наименьшее — 5. Вычислим размах данных $53 - 5 = 48$. Можно весь промежуток значений разбить на несколько равных интервалов. Десять интервалов — этого много, четыре интервала — мало. Пусть будет шесть интервалов. $48 : 6 = 8$, т.е. длина интервала равна 8.

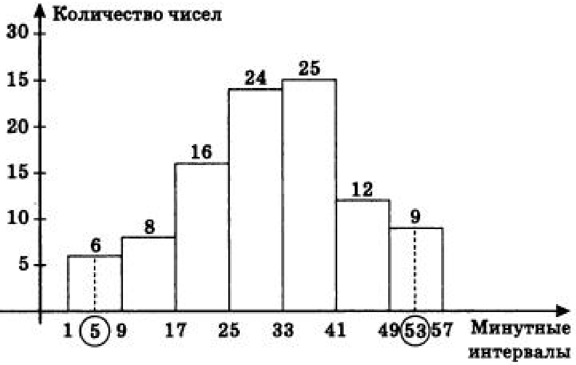
Примечание. Если вопрос о количестве интервалов, а, следовательно, и о величине интервалов вызывает сомнения, то в практике научных исследований применяется формула Стерджесса, предусматривающая выделение оптимального числа интервалов: $k = 1 + 3{,}22 \lg N$, где N — число членов ряда измерений. В данном случае оптимальное число интервалов $k = 1 + 3{,}22 \lg 100 = 1 + 6{,}44 = 7{,}44 \approx 7$.

Границей начала первого интервала обычно принято брать значение, расположенное на пол-интервала левее наименьшего значения в ряду, т.е. $5 - 4 = 1$. Тогда границы всех интервалов будут 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57.

Теперь составим таблицу и посчитаем, сколько чисел попадает в каждый интервал.

Интервал времени в минутах	Числа, вошедшие в данный промежуток	Количество чисел
1–9	6, 5, 5, 6, 8, 7	6
9–17	16, 13, 10, 15, 14, 16, 12, 13	8
17–25	19, 22, 23, 24, 24, 20, 21, 18, 19, 23, 24, 21, 22; 20, 17, 17	16
25–33	25, 30, 26, 29, 28, 32, 28, 30, 31, 28, 26, 32, 27, 30, 27, 32, 25, 29, 31, 26, 30, 27, 31, 25	24
33–41	36, 38, 33, 35, 34, 38, 37, 33, 34, 33, 39, 37, 34, 39, 36, 38, 34, 35, 39, 37, 38, 40, 40, 40, 40	25
41–49	45, 43, 43, 46, 46, 44, 42, 43, 48, 47, 44, 45	12
49–57	50, 51, 52, 51, 50, 53, 53, 52, 49	9

Для интервального ряда построим столбиковую диаграмму (гистограмму):



Теперь возникает вопрос, как по интервальному ряду определить, сколько в среднем люди тратят на дорогу до почты. Как правило, в этих случаях рассматривают середину каждого интервала и соответствующей частоты для каждого интервала, и перемножают их. Затем все произведения складывают и делят на число данных (т. е. количество членов ряда).

	Время	Кратность
$\frac{1+9}{2}=5$	5	6
$\frac{9+17}{2}=13$	13	8
$\frac{17+25}{2}=21$	21	16
$\frac{25+33}{2}=29$	29	24
$\frac{33+41}{2}=37$	37	25
$\frac{41+49}{2}=45$	45	12
$\frac{49+57}{2}=53$	53	9

Таким образом, среднее арифметическое равно:

$$M = \frac{5\cdot 6+13\cdot 8+21\cdot 16+29\cdot 24+37\cdot 25+45\cdot 12+53\cdot 9}{100} \approx 31.$$

Таким образом, на посещение почтового отделения тратится более получаса. Из интервального ряда видно также, что почти половина населения, которое обслуживает данное почтовое отделение, тратит существенно больше 31 минуты на дорогу до почты. Что довольно много для города, но это уже другая история.

Задача 9. 50 абитуриентов при предварительном тестировании задач из группы В набрали по десятибалльной системе следующий ряд баллов: 3, 2, 4, 4, 6, 6, 4, 9, 2, 8, 2, 6, 8, 6, 4, 9, 1, 5, 8, 4, 4, 10, 7, 10, 2, 7, 10, 2, 3, 4, 10, 9, 8, 1, 6, 2, 4, 2, 4, 10, 7, 3, 4, 6, 10, 3, 6, 2, 6, 8.

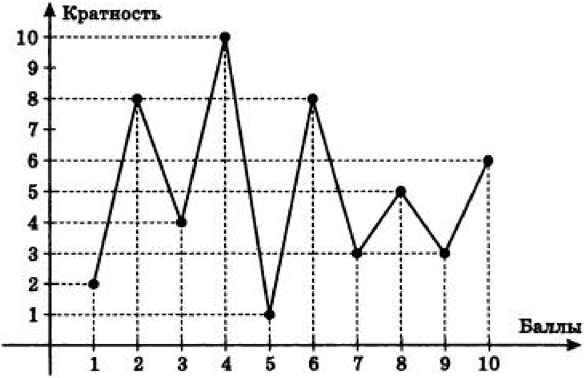
Упорядочите полученные данные, постройте таблицу кратности и графически ее иллюстрируйте. Найдите меры центральной тенденции.

а) 1) Рассмотрим таблицу кратности баллов.

Баллы	1	2	3	4	5
Кратность	2	8	4	10	1
% кратности	4	16	8	20	2
Частота	0,04	0,16	0,08	0,2	0,02

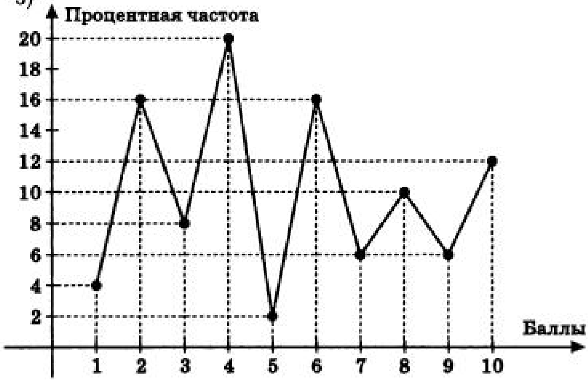
Баллы	6	7	8	9	10
Кратность	8	3	5	3	6
% кратности	16	6	10	6	12
Частота	0,16	0,06	0,1	0,06	0,12

2) Рассмотрим таблицу кратности баллов.



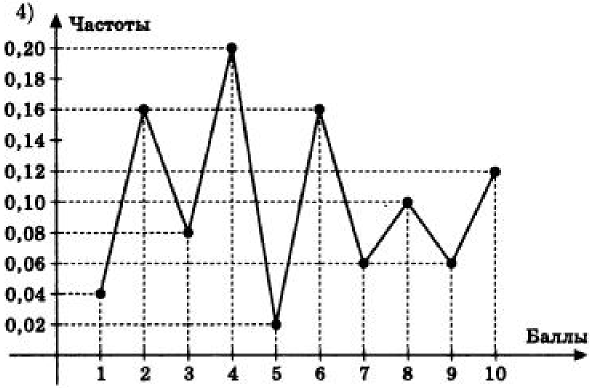
Такой график, где точки соединены отрезками, называется многоугольником (или полигоном) распределения кратностей.

3)



Такой график называется многоугольником (или полигоном) распределения процентных частот.

4)



Такой график называется многоугольником (или полигоном) распределения частот.

б) Найдем меры центральной тенденции.

1) $M = (2\cdot1+8\cdot2+4\cdot3+10\cdot4+1\cdot5+8\cdot6+3\cdot7+5\cdot8+$
$+3\cdot9+6\cdot10):50\approx\boxed{5{,}4}$.

2) $M_0=\boxed{4}$.

3) $Me=\dfrac{5+6}{2}=5{,}5$.

Задача 10. В спецшколе одного из районов провели статистическое исследование. Из опросов 100 произвольно выбранных учеников выяснялось, сколько минут тратят они на дорогу в школу. Вот эти данные: 17, 42, 33, 28, 37, 8, 11, 30, 22, 43, 35, 44, 25, 18, 30, 8, 21, 35, 14, 20, 27, 5, 29, 24, 38, 15, 20, 7, 22, 3, 16, 25, 6, 19, 25, 42, 31, 22, 11, 29, 45, 15, 19, 8, 26, 34, 16, 45, 24, 9, 32, 44, 17, 10, 35, 10, 21, 40, 8, 9, 31, 4, 28, 30, 13, 39, 23, 5, 14, 36, 26, 18, 22, 27, 41, 10, 19, 37, 23, 17, 31, 12, 29, 30, 16, 14, 35, 6, 33, 18, 7, 31, 33, 35, 40, 38, 21, 34, 10, 32.

Проанализируем эти данные и составим наглядную гистограмму, предварительно определив интервальный ряд.

Амплитуда, или размах данных равна $45-3=42$.

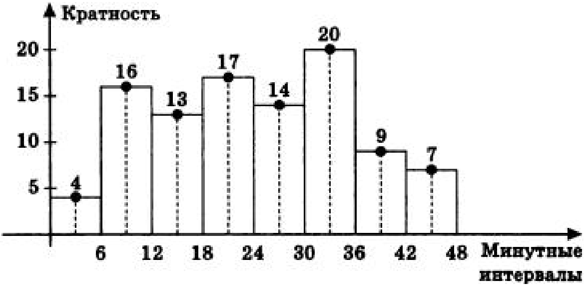
Пусть длина интервала будет равна 6 минут. Найдем начало границы. Для этого сместим влево на половину длины интервала, т. е. на 3, наименьшее значение начала границы, тогда границами интервалов будут числа 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48. Составим таблицу кратности (числа чисел) на интервалах.

Интервал времени в минутах	Кратность
0–6	4
6–12	16
12–18	13
18–24	17
24–30	14
30–36	20
36–42	9
42–48	7

(В интервалы включены их левые границы.)

Для того чтобы определить, сколько в среднем ребята тратят на дорогу до школы, необходимо рассмотреть середину каждого из интервалов, соответствующую частоту и их произведение. А затем все произведения суммируют и делят на 100 (число участников опроса):

$$M = (3 \cdot 4 + 9 \cdot 16 + 15 \cdot 13 + 21 \cdot 17 + 27 \cdot 14 + 33 \cdot 20 + \\ + 39 \cdot 9 + 45 \cdot 7) : 100 \approx 24.$$



Но из этой столбиковой диаграммы (гистограммы) следует, что значительная часть ребят тратит времени на дорогу в школу гораздо больше, чем 24 минуты. Скорее всего, они ездят из разных удаленных мест района. Более того, очевиден большой разброс по времени.

Для того чтобы проанализировать более глубоко полученную информацию, рассмотрим **свойство среднего арифметического.**

Пусть $M = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, тогда:

а) $aM = \dfrac{ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n}{n}$;

б) $b + M = \dfrac{(x_1 + b) + (x_2 + b) + \ldots + (x_n + b)}{n}$.

Теорема. Для того чтобы c было средним арифметическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. $c = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, необходимо и достаточно, чтобы сумма отклонений от среднего M равнялась нулю: $(x_1 - c) + (x_2 - c) + \ldots + (x_n - c) = 0$.

Из теоремы следует, что среднее M ряда чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ специально определяется так, чтобы сумма отклонений от среднего M равнялось нулю:

$(x_1 - M) + (x_2 - M) + \ldots + (x_n - M) = 0$.

Следовательно, если M — среднее арифметическое всех данных, то алгебраическая сумма отклонений $(x_i - M)$ будет нулевая, поэтому она не может характеризовать **разброс** чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно их среднего арифметического значения M. В связи с этим естественно ввести понятие квадрата отклонений — $(x_i - M)^2$.

Определение 1. Характеристику, «отвечающую» за разброс чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вокруг их среднего значения M, называют дисперсией.

Пишут $D = \dfrac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n}$, значит, дисперсия D — это среднее арифметическое квадратов отклонений этих данных от их среднего значения M.

Определение 2. Значение квадратного корня из дисперсии называют средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением и обозначают $\sigma = \sqrt{D}$.

Рассмотрим вычисление дисперсии для предыдущей задачи:

$$\begin{aligned}
D = {} & \big(4(3-24)^2 + 16(9-24)^2 + 13(15-24)^2 + \\
& + 17(21-24)^2 + 14(27-24)^2 + 20(33-24)^2 + \\
& + 9(39-24)^2 + 7(45-24)^2\big) : 100 = \\
= {} & 0{,}04 \cdot 21^2 + 0{,}16 \cdot 15^2 + 0{,}13 \cdot 9^2 + 0{,}17 \cdot 3^2 + 0{,}14 \cdot 3^2 + \\
& + 0{,}2 \cdot 9^2 + 0{,}09 \cdot 15^2 + 0{,}07 \cdot 21^2 \approx 134{,}28.
\end{aligned}$$

x_i	Частота V_i	Отклонения $(x_i - M)$	Квадраты отклонений $(x_i - M)^2$	Произведения $V_i(x_i - M)^2$	
3	0,04	−21	441	$0{,}04 \cdot 441$	17,64
9	0,16	−15	225	$0{,}16 \cdot 225$	36,0
15	0,13	−9	81	$0{,}13 \cdot 81$	10,53
21	0,17	−3	9	$0{,}17 \cdot 9$	1,53
27	0,14	3	9	$0{,}14 \cdot 9$	1,26
33	0,2	9	81	$0{,}2 \cdot 81$	16,2
39	0,09	15	225	$0{,}09 \cdot 225$	20,25
45	0,07	21	441	$0{,}07 \cdot 441$	30,87

$\sigma = \sqrt{D}$; $\sigma = \sqrt{134{,}28} \approx 11{,}59$.

Очевидно, что рассмотренное нами измерение имеет очень большое среднее квадратическое отклонение σ от среднего значения $M \approx 24$. Это означает, что результаты данного измерения заметно «разбросаны» вокруг среднего значения. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение (стандартное) σ прежде всего и являются **количественными оценками такого разброса, или мерами изменчивости.**

Примечание. Говоря в статистике о большом или маленьком, мы должны хорошо понимать, что имеется в виду. Для многих прикладных целей достаточно считать, что «маленькое» это 1–5%. Однако если речь идет о таких важных характеристиках, как, скажем, частота смертельных исходов при тех или иных заболеваниях, то этот порог следует полагать в тысячи раз меньше. Эта ситуация подобна уже обсуждавшейся выше, с выбором подходящих мер центральной тенденции: для разных целей и там нужно выбирать разные характеристики. Вообще, статистика не дает качественного ответа на вопросы, но лишь предоставляет математические методы анализа данных.

Задача 11. В одном из районов города проводили исследование среди курящих подростков. Задавался вопрос: в каком возрасте вы закурили в первый раз? В таблице приведены сведения о поле и возрасте начала курения для 36 учащихся одной из школ.

№	Пол	Возраст начала курения	№	Пол	Возраст начала курения
1	М	12	19	М	11
2	М	9	20	М	15
3	М	13	21	М	11
4	М	7	22	М	9
5	Ж	14	23	Ж	12
6	М	13	24	М	13
7	Ж	12	25	Ж	11
8	Ж	11	26	Ж	12
9	М	13	27	М	14
10	М	10	28	М	8
11	Ж	13	29	М	11
12	М	15	30	Ж	7
13	Ж	13	31	М	13
14	Ж	11	32	М	12
15	Ж	13	33	М	14
16	М	13	34	М	13
17	Ж	15	35	М	16
18	М	8	36	Ж	14

Очевидно, что в таком виде полученной информацией пользоваться трудно. Составим упорядоченные по кратности данные о возрасте начала курения.

Возраст начала курения	Кратность
7	2
8	2
9	2
10	1
11	6
12	5
13	**10**
14	4
15	3
16	1

В таком виде таблица информативнее и короче. Как видно из таблицы, чаще всего начинают курить в 13 лет. Это значение возраста встречается чаще всего — 10 раз. Значит мода начала курения — 13 лет: $M_0 = \boxed{13}$.

Рассмотрим среднее арифметическое:

$$M = (2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 11 + 5 \cdot 12 + 10 \cdot 13 + 4 \cdot 14 + \\ + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 16) : 36 = 11{,}44.$$

Значит, в 11,5 лет в среднем начинают курить. Интересно было бы сравнить с медианой.

Построим более подробную таблицу:

Возраст начала курения	Кратность	Процентная частота	Накопленная процентная частота
7	2	$\frac{1}{18} \cdot 100\% \approx 5{,}6\%$	5,6%
8	2	$\frac{1}{18} \cdot 100\% \approx 5{,}6\%$	11,2%
9	2	$\frac{1}{18} \cdot 100\% \approx 5{,}6\%$	16,8%
10	1	$\frac{1}{36} \cdot 100\% \approx 2{,}8\%$	19,4%
11	6	$\frac{1}{6} \cdot 100\% \approx 16{,}7\%$	36,1%
12	**5**	$\mathbf{\frac{5}{36} \cdot 100\% \approx 13{,}9\%}$	**50,0%**
13	10	$\frac{5}{18} \cdot 100\% \approx 27{,}8\%$	78,8%
14	4	$\frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11{,}1\%$	88,9%
15	3	$\frac{1}{12} \cdot 100\% \approx 8{,}3\%$	97,2%
16	1	$\frac{1}{36} \cdot 100\% \approx 2{,}8\%$	100%

Очевидно, что медиана — среднее арифметическое 12 и 13 лет: $Me = \dfrac{12+13}{2} = 12{,}5$.

В последний из дополнительных столбцов записаны значения так называемых **накопленных** (или кумулятивных) процентных частот.

Представьте себе, что мы обходим строй из 36 учащихся, которые стоят в шеренгах в зависимости от возраста начала курения. В первой шеренге (7 лет) 2 человека. Во второй (8 лет) тоже два и т. д. Задача — подсчитать, сколько подростков при таком «обходе учащихся» осталось за нашей спиной. В конце обхода за нашей спиной будет 36 учащихся. Но такой кумулятивный подход показывает, какой процент из 36 учащихся к каждому классу (возрасту) уже начинает курить (или уже курит). И если данное исследование отражает реальную, устойчивую закономерность, то таблица отражает эту закономерность.

	Количество начавших курить в каждом возрасте	Общее количество курящих в данном возрасте
7	2	2
8	2	4
9	2	6
10	1	7
11	6	13
12	5	18
13	10	28
14	4	32
15	3	35
16	1	36

Теперь можно посчитать общее количество курящих в школе с 7 до 16 лет: $2 + 4 + 6 + 7 + 13 + 18 + 28 + 32 + 35 + 36 = 181$. Это, конечно, катастрофическое положение.

$M = 11{,}44$. Вычисления проводим с точностью до $\pm 0{,}01$. Частоту рассматриваем с точностью до сотых, где 1% — 0,01.

Возраст	Кратность	Частота V_i	Отклонение $(x_i - M)$	Квадраты отклонения	Произведения $V_i(x_i - M)^2$	
7	2	0,056	(7−11,44)	$(-4{,}44)^2$	$0{,}06 \cdot (19{,}71)$	1,18
8	2	0,056	(8−11,44)	$(-3{,}44)^2$	$0{,}06 \cdot (11{,}83)$	0,71
9	2	0,056	(9−11,44)	$(-2{,}44)^2$	$0{,}06 \cdot (59{,}56)$	3,57
10	1	0,028	(10−11,44)	$(-1{,}44)^2$	$0{,}03 \cdot (20{,}74)$	0,62
11	6	0,167	(11−11,44)	$(-0{,}44)^2$	$0{,}17 \cdot (0{,}17)$	0,03
12	5	0,139	(12−11,44)	$(0{,}56)^2$	$0{,}14 \cdot (0{,}37)$	0,05
13	10	0,278	(13−11,44)	$(1{,}56)^2$	$0{,}28 \cdot (2{,}44)$	0,68
14	4	0,111	(14−11,44)	$(2{,}56)^2$	$0{,}11 \cdot (6{,}56)$	0,72
15	3	0,083	(15−11,44)	$(3{,}56)^2$	$0{,}083 \cdot (12{,}67)$	1,01
16	1	0,028	(16−11,44)	$(4{,}56)^2$	$0{,}03 \cdot (20{,}79)$	0,62

Значит дисперсия равна

$$1{,}18+0{,}71+3{,}57+0{,}62+0{,}03+0{,}05+0{,}68+0{,}72+1{,}01+0{,}62=9{,}29.$$

К сожалению, дисперсия не всегда оказывается удобным показателем меры изменчивости. Например, если мы хотим знать меру изменчивости роста для исследуемой группы людей, то в формуле для дисперсии будет использоваться значение, связанное с $(\text{рост} - \text{среднее})^2$ размерностью см^2, но см^2 — это уже размерность площади, а не длины.

Для решения возникающей проблемы вместо значения дисперсии используется квадратный корень из нее, как было рассмотрено ранее. Напомним, что полученное таким образом новое значение называется средним квадратичным отклонением, или стандартным отклонением. Обозначается $\sigma = \sqrt{D}$.

В нашем случае $\sigma = \sqrt{9{,}29} \approx 3{,}06$.

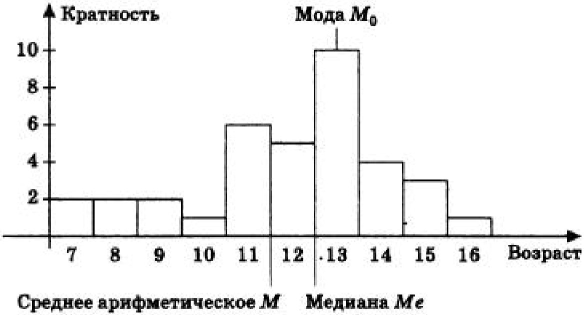
Напомним, что в статистике моду, медиану и среднее арифметическое называют мерами центральной тенденции, а мерами изменчивости — дисперсию (среднее арифметическое квадратов отклонений от их среднего значения M) и стандартное отклонение (значение квадратного корня из дисперсии).

Меры центральной тенденции показывают, вокруг каких значений колеблется большинство полученных в результате опросов (экспериментов) данных. Обычно в качестве центра рассматривают среднее M, его еще иначе обозначают $\overline{x}$.

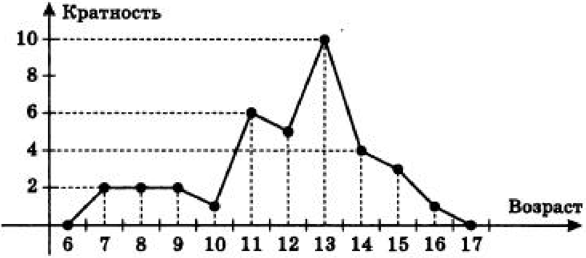
Очевидно, что меры изменчивости свидетельствуют о том, в какой степени полученные результаты отклоняются от центра группирования, что чаще всего приводит к определению меры отклонения полученных данных от среднего. Для этого необходимо определить, насколько каждое значение (в данном случае возраста) отклоняется в большую или меньшую сторону от среднего M (или $\overline{x} = 11{,}44$). Затем сложить все результаты и разделить на число значений.

К сожалению, этот путь невозможен, поскольку, как правило, отклонения от среднего в любую сторону компенсируют друг друга и в сумме дают ноль. Для решения этой проблемы лучше использовать не отклонение от среднего, а квадрат этого отклонения, потому что такая процедура позволяет избавиться от влияния знака.

Разумеется, весьма наглядно для понимания и анализа полученных результатов графическое представление. Используя таблицы, можно получить либо гистограмму распределения частот (кратностей), либо полигон распределения частот (кратностей). Для рассматриваемой задачи это выглядит так:



Распределение кратностей (частот) изображается в виде набора столбиков, середина основания каждого из которых совпадает со значением возраста, а высота равна значению кратности (частоты для этого возраста).



В полигоне распределения кратностей (частот) или многоугольников распределения кратности возраст изображается точками, расположенными на соответствующей высоте над значением возраста. Затем эти точки соединяют друг с другом отрезками прямых.

Если вернуться еще раз к графической интерпретации мер центральной тенденции, то моде будет соответствовать самое высокое значение возраста (13 лет). Медиана — это значение, которое делит площадь геометрической фигуры пополам. А среднее — это значение, сумма отклонений от которого влево и вправо будет равна нулю.

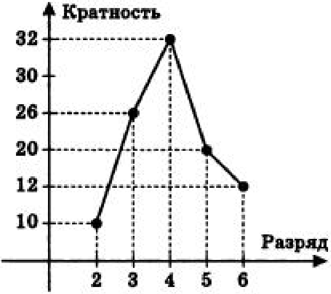
Задача 12. Известны данные о тарифных разрядах 100 рабочих одного из цехов завода. Найдите меры центральной тенденции: моду, среднее, медиану, а также дисперсию и стандартное отклонение (среднее квадратичное отклонение). Постройте гистограмму, полигон (многоугольник) распределения кратностей, если данные о тарифных разрядах отражены в таблице:

3	5	6	3	2	4	3	5	5	6	3	4	5	4	2	5	3	3	6	6
4	3	2	3	4	5	4	2	4	6	3	3	4	2	6	3	3	5	4	4
5	3	4	5	4	3	3	6	2	3	2	4	4	4	5	4	5	3	5	3
4	6	3	4	4	5	4	5	3	4	3	4	3	4	4	5	2	6	5	4
2	6	3	4	5	3	4	4	5	4	5	4	2	3	5	6	6	3	4	4

Составим таблицу кратностей тарифных разрядов, предварительно посчитав их.

Тарифный разряд	Кратность
2	10
3	26
4	32
5	20
6	12

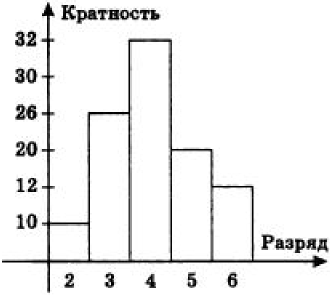
Построим полигон кратности разрядов.



Очевидно, модой является 4 разряд.

$$M = \frac{10 \cdot 2 + 26 \cdot 3 + 32 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 12 \cdot 6}{100} = \boxed{3,98}, \text{ т. е. } \bar{x} = \boxed{3,98}.$$

Построим гистограмму распределения кратностей.



Построим полигон процентных частот. Так как объем измерений равен 100, то он будет выглядеть так же, как полигон кратностей. В данном случае полигон кратностей и процентных частот будет совпадать, так как объем измерений равен 100.

Из гистограммы ясно следует, что медиана $Me = \boxed{4}$.

В данном случае меры центральной тенденции расположены очень близко или совпадают. Рассмотрим меры изменчивости.

Разряды	Кратности	Частота V_i	Отклонение $(x_i - M)$	Квадраты отклонений	Произведения $V_i(x_i - M)^2$	
2	10	0,10	$2 - 3{,}98$	$(-1{,}98)^2$	$0{,}10 \cdot 3{,}9204$	0,039
3	26	0,26	$3 - 3{,}98$	$(-0{,}98)^2$	$0{,}26 \cdot 0{,}9604$	0,250
4	32	0,32	$4 - 3{,}98$	$(0{,}02)^2$	$0{,}32 \cdot 0{,}0004$	0,001
5	20	0,20	$5 - 3{,}98$	$(1{,}02)^2$	$0{,}20 \cdot 1{,}0404$	0,208
6	12	0,12	$6 - 3{,}98$	$(2{,}02)^2$	$0{,}12 \cdot 4{,}0804$	0,490

Дисперсия равна

$V_1(x_1 - M)^2 + V_2(x_2 - M)^2 + \ldots + V_5(x_5 - M)^2 = 0{,}991.$

Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{0{,}991} \approx 0{,}995.$

Как видно, стандартное отклонение достаточно мало, что можно было бы предугадать в силу достаточной близости мер центральной тенденции.

Задача 13. Для анализа деятельности 50 заводов в районе собрали информацию о стоимости их основных фондов (млн руб.).

9,4	8,0	6,3	10,0	8,2	7,3	9,2	5,8	8,7	15,0
5,2	13,2	8,1	7,5	14,6	8,5	7,8	10,5	6,0	11,8
5,1	6,8	8,3	7,7	9,0	10,1	8,0	12,0	14,0	7,9
8,2	9,8	13,5	5,5	7,9	9,2	10,8	12,1	12,4	5,5
12,9	12,6	6,7	8,3	10,8	15,0	7,0	13,0	9,5	8,3

Чтобы показать распределение предприятий по стоимости основных фондов, сначала решим вопрос о количестве групп, которые мы хотим выделить. Так как размах (амплитуда) равен $15-5{,}1=9{,}9$, то выделим пять групп. (Известно, что оптимальное количество групп по Стерджессу равно $k = 1 + 3{,}322 \lg N$, в данном случае $k = 1 + 3{,}322 \lg 50$, т. е. $k \approx 6{,}644$.

Тогда $\dfrac{9{,}9}{6{,}644} \approx 1{,}49 \approx 1{,}5$ млн руб.)

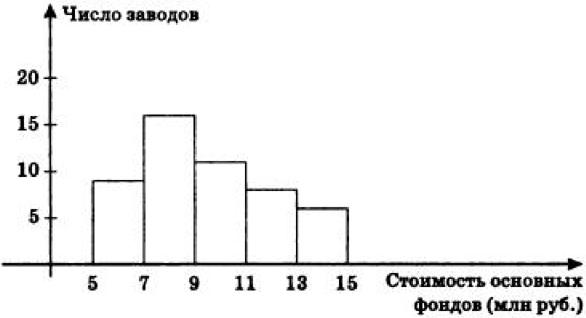
В случае пяти групп величина интервала будет равна

$\dfrac{9{,}9}{5} \approx 2$ (млн. руб.)

Как видно, разница с оптимальным количеством групп не очень велика, поэтому для удобства положим длину интервала равной 2 млн руб.

Стоимости основных фондов, млн руб.	Кратность	Накопление кратности	Частота V_i	Накопленная (кумулятивная) частота
5–7	9	9	0,18	0,18
7–9	16	25	0,32	0,50
9–11	11	36	0,22	0,72
11–13	8	44	0,16	0,88
13–15	6	50	0,12	1,00
Всего	50			

Мы получили интервальный ряд с равными длинами интервалов. Построим гистограмму.



$$M = \frac{5+7}{2}\cdot 0{,}18 + \frac{7+9}{2}\cdot 0{,}32 + \frac{9+11}{2}\cdot 0{,}22 + \\ + \frac{11+13}{2}\cdot 0{,}16 + \frac{13+15}{2}\cdot 0{,}12 =$$

$$= 6\cdot 0{,}18 + 8\cdot 0{,}32 + 10\cdot 0{,}22 + 12\cdot 0{,}16 + 14\cdot 0{,}12 =$$

$$= 1{,}08 + 2{,}56 + 2{,}20 + 1{,}92 + 1{,}68 = 9{,}44 \approx 9{,}4.$$

Дисперсия равна

$$(6-9{,}4)^2\cdot 0{,}18 + (8-9{,}4)^2\cdot 0{,}32 + (10-9{,}4)^2\cdot 0{,}22 + \\ + (12-9{,}4)^2\cdot 0{,}16 + (14-9{,}4)^2\cdot 0{,}12 =$$

$$= 11{,}56\cdot 0{,}18 + 1{,}96\cdot 0{,}32 + 0{,}36\cdot 0{,}22 + 6{,}76\cdot 0{,}16 + 21{,}16\cdot 0{,}12 \approx$$

$$\approx 2{,}08 + 0{,}63 + 0{,}08 + 1{,}08 + 2{,}54 \approx 6{,}41.$$

Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{6{,}41} \approx 2{,}53.$

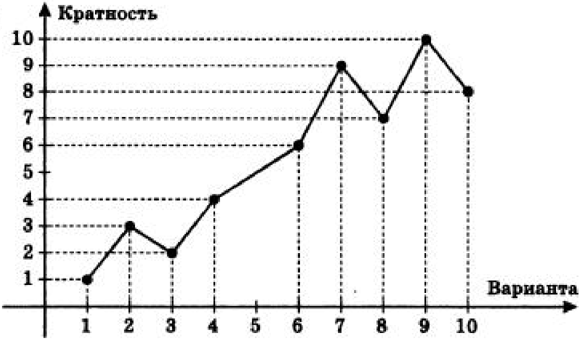
Можно построить по накопленной кратности кумулятивное распределение (кумуляту), характеризующее нарастающую кратность при переходе от группы к группе.

Примечание. По графику кумуляты можно легко найти медиану. Для этого необходимо через середину накопленной кратности провести параллельную оси абсцисс прямую до пересечения с графиком кумуляты. Абсцисса точки пересечения есть медиана. В данном случае $Me = 9$.

Попробуйте самостоятельно проанализировать работу 50 заводов, если интервал будет равен 1,5 млн рублей, и сравните результаты этого исследования с анализом деятельности 50 заводов при интервале 2 млн рублей.

Практикум 7

1.



По данному многоугольнику кратностей определите:

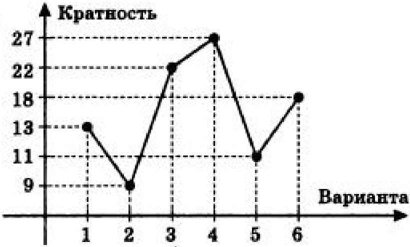
а) количество вариант измерения;

б) объем измерения;

в) моду измерения;

г) наименьшую и наибольшую из процентных частот вариант измерения.

2.



По данному многоугольнику кратностей определите:

а) объем измерения;

б) моду измерения и ее частоту;

в) составьте таблицу частот;

г) нарисуйте многоугольник процентных частот.

3. В сводной таблице распределения данных некоторые измерения были не проставлены. Восполните их.

Варианта	1	2	3	4	5	6	Сумма
Кратность	391		117				
Частота		0,124				0,194	
Частота %	39,1			19,2	8,8		

4. При проверке деталей ОТК[2] получили следующие данные взвешивания на тысячу проверенных деталей при норме веса в 250 г.

Вес, г	246	247	248	249	250	251	252	253	254
Число деталей, шт.	20	40	110	180	305	215	100	20	10

а) Чему равна мода измерений?

б) Каков процент нормальных деталей?

в) Каков процент деталей с точностью в весе до одного грамма?

г) Каков процент деталей с точностью в весе до двух граммов?

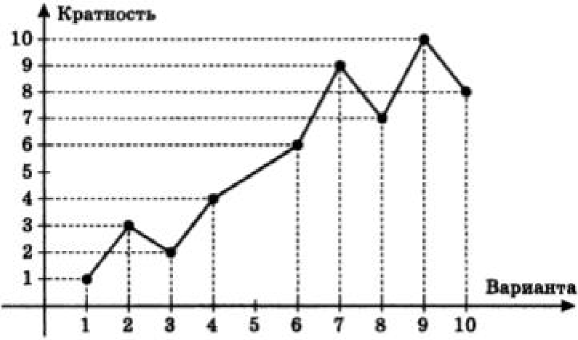
д) Составьте таблицу распределения частот.

е) Постройте многоугольник частот.

[2] ОТК — отдел технического контроля.

Решение практикума 7

1.



По данному многоугольнику кратностей определите:

а) количество вариант измерения.

Очевидно, что это количество вершин углов многоугольника кратностей, включая начальную и конечную точку многоугольника. Оно равно $7 + 2 = \boxed{9}$.

б) объем измерения.

Очевидно, что объем связан с суммой кратностей, т.е. $1 + 3 + 2 + 4 + 6 + 9 + 7 + 10 + 8 = \boxed{50}$ (сумма ординат точек многоугольника).

в) моду измерения.

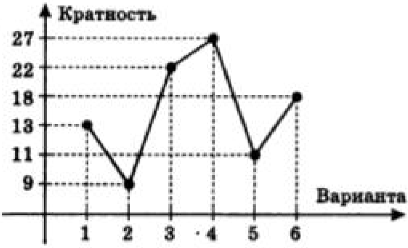
Из графика многоугольника следует, что чаще всего (10 раз) использовалась $M_0 = \boxed{9}$.

г) наименьшую и наибольшую из процентных частот вариант измерения.

Так как объем измерений равен 50, то наименьшая из процентных частот равна $\frac{1}{50} \cdot 100\% = \boxed{2\%}$.

Наибольшая же равна $\frac{10}{50} \cdot 100\% = \boxed{20\%}$.

2.



По данному многоугольнику кратностей определите:

а) объем измерения.

Так как это сумма всех кратностей, то

$13 + 9 + 22 + 27 + 11 + 18 = \boxed{100}$.

б) моду измерения и ее частоту.

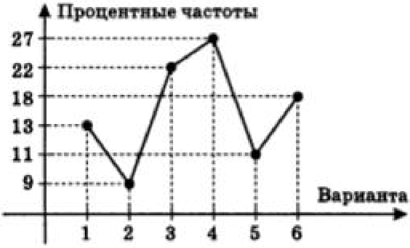
Мода равна $M_0 = \boxed{4}$, а частота есть отношение объема измерений к сумме ее кратностей, то $\frac{27}{100} = 0{,}27$ — частота измерения.

в) составьте таблицу частот.

Число	1	2	3	4	5	6
Кратность	13	9	22	27	11	18
Частота	0,13	0,09	0,22	0,27	0,11	0,18

г) нарисуйте многоугольник процентных частот.

Так как объем измерений равен 100, то кратность совпадает с процентной частотой. Следовательно, это тот же многоугольник кратностей, у которого в вершинах вместо кратностей стоит то же число, но уже процентов.



Примечание. Многоугольники кратностей и процентной частоты в данном случае совпадают, так как объем измерения равен 100.

3. В сводной таблице распределения данных некоторые измерения были не проставлены. Восполните их.

Варианта	1	2	3	4	5	6	Сумма
Кратность	391		117				
Частота		0,124				0,194	
Частота %	39,1			19,2	8,8		

Так как в первом столбце кратность равна 391, а процентная частота равна 39,1, значит, частота равна 0,391. Аналогично для других столбцов, учитывая отношение в данной таблице кратности к процентной частоте 10:1, кратности к частоте 1000:1. Следовательно, таблицу можно заполнить следующим образом:

Варианта	1	2	3	4	5	6	Сумма
Кратность	391	124	117	192	88	194	1106
Частота	0,391	0,124	0,117	0,192	0,088	0,194	1,106
Частота %	39,1	12,4	11,7	19,2	8,8	19,4	110,6

4. При проверке деталей ОТК получили следующие данные взвешивания на тысячу проверенных деталей при норме веса в 250 г.

Вес, г	246	247	248	249	250	251	252	253	254
Число деталей, шт.	20	40	110	180	305	215	100	20	10

а) Чему равна мода измерений?

Очевидно, что модой является число нормальных деталей $M_0 = \boxed{250}$.

б) Каков процент нормальных деталей?

Для этого необходимо найти объем измерения. Для этого найдем сумму всех кратностей:

$20 + 40 + 110 + 180 + 305 + 215 + 100 + 20 + 10 = 1000.$

Тогда процент нормальных деталей равен

$\frac{305}{1000} \cdot 100\% = \boxed{30{,}5\%}.$

в) Каков процент деталей с точностью в весе до одного грамма?

Имеется в виду процент деталей с весом 249, 250, 251 г. Найдем их сумму: $180+305+215=700$, значит процент таких деталей равен $\frac{700}{1000} \cdot 100\% = \boxed{70\%}.$

г) Каков процент деталей с точностью в весе до двух граммов?

Рассуждая аналогично, получим:

$110 + 180 + 305 + 215 + 100 = 910,$

значит, процент таких деталей равен

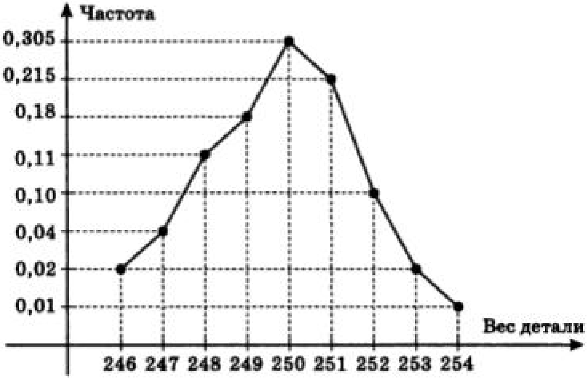
$\frac{910}{1000} \cdot 100\% = \boxed{91\%}.$

д) Составьте таблицу распределения частот.

Так объем измерений теперь известен, то составить таблицу существенно проще. Для этого число кратностей деталей необходимо поделить на 1000.

Вес, г	246	247	248	249	250	251	252	253	254	Сумма
Число деталей, шт.	20	40	110	180	305	215	100	20	10	1000
Частота	0,02	0,04	0,11	0,18	0,305	0,215	0,100	0,02	0,01	1

е) Постройте многоугольник частот.



Тренировочная работа 5

Вариант 1

1. Для отрывка из поэмы А. С. Пушкина «Медный всадник» составьте таблицу кратности (частот) букв «а», «и», «о», «е», «у», «я»[3] и иллюстрируйте диаграммой.

На берегу пустынных волн
Стоял он, дум великих полн,
И вдаль глядел. Пред ним широко
Река неслася; бедный чёлн
По ней стремился одиноко.
По мшистым, топким берегам
Чернели избы здесь и там,
Приют убогого чухонца;
И лес, неведомый лучам
В тумане спрятанного солнца,
Кругом шумел.
И думал он:
Отсель грозить мы будем шведу,
Здесь будет город заложен
На зло надменному соседу.
Природой здесь нам суждено
В Европу прорубить окно,
Ногою твердой стать при море.
Сюда по новым им волнам
Все флаги в гости будут к нам,
И запируем на просторе.

2. а) Имеются следующие данные о производстве пятью рабочими бригады за смену некоторого изделия:

Номер рабочего	1	2	3	4	5
Произведено продукции, шт.	21	18	20	22	19

Определите среднюю выработку одного рабочего данной бригады.

[3] Буквы «и» и «й», «е» и «ё» считаются одинаковыми.

б) Имеется следующее распределение 60 рабочих по тарифному разряду:

Тарифный разряд x_i	2	3	4	5	6
Число рабочих f_i	8	16	17	12	7

Определить среднюю зарплату рабочих, зная, что оплата определяется в соответствии с таблицей:

Тариф	2	3	4	5	6
Зарплата	12 000	15 000	17 000	21 000	25 000

в) Определите среднемесячную заработную плату рабочего на предприятии по следующим данным:

Месячная зарплата в интервале, руб.	Число рабочих f_i
8000–8500	10
8500–9000	20
9000–9500	48
9500–10 000	60
10 000–10 500	42
10 500–11 000	20
Итого	

$M = \overline{x} = ?$ $Me = ?$ $M_0 = ?$

3. По пяти хозяйствам района имеются следующие данные об урожайности зерновых и валовом сборе:

Хозяйство	Урожайность x_i, ц/га	Валовой сбор зерна M_i
1	18	18 000
2	20	30 000
3	21	63 000
4	22	44 000
5	25	30 000
Итого		

а) Определите среднюю урожайность для всех хозяйств.

б) Определите среднюю себестоимость производства зерна в районе, если себестоимость зерна по хозяйствам отражена в таблице:

Номер хозяйства	1	2	3	4	5
Себестоимость 1 ц зерна, руб.	1600	1400	1300	1200	900

в) Определите среднюю прибыль по всем хозяйствам, если зерно удалось продать по цене 2500 рублей за 1 центнер.

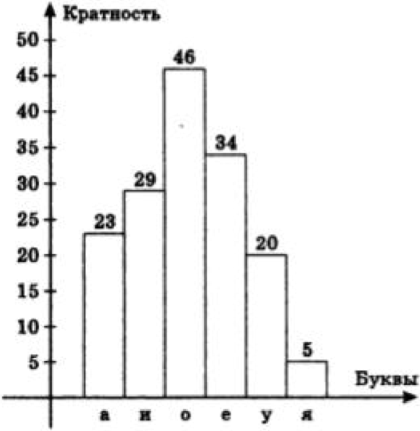
Решение тренировочной работы 5

Вариант 1

1. Посчитаем построчно количество букв в отрывке поэмы.

а	и	о	е	у	я	Строка
1	–	1	2	2	–	1
–	2	3	1	1	1	2
1	3	2	2	–	1	3
2	1	–	4	–	1	4
–	3	4	2	–	1	5
1	2	2	2	–	–	6
1	3	–	3	–	–	7
1	1	4	–	2	–	8
1	2	1	3	1	–	9
3	–	3	1	1	1	10
–	–	1	1	2	–	11
1	1	1	–	1	–	12
–	1	2	3	.2	–	13
1	–	3	3	1	–	14
2	–	3	2	2	–	15
1	2	3	2	1	–	16
–	1	4	1	2	–	17
1	2	4	2	–	–	18
2	1	3	–	–	–	19
2	2	1	1	2	–	20
2	2	2	2	1	–	21
23	29	46	34	20	5	Итого

Столбиковая диаграмма (гистограмма) кратности появления букв:



2. а) Имеются следующие данные о производстве пятью рабочими бригады за смену некоторого изделия:

Номер рабочего	1	2	3	4	5
Произведено продукции, шт.	21	18	20	22	19

Определите среднюю выработку одного рабочего данной бригады.

$$M = \overline{x} = \frac{21 + 18 + 20 + 22 + 19}{5} = \boxed{20}.$$

б) Имеется следующее распределение 60 рабочих по тарифному разряду:

Тарифный разряд x_i	2	3	4	5	6
Число рабочих f_i	8	16	17	12	7

Определить среднюю зарплату рабочих, зная, что оплата определяется в соответствии с таблицей:

Тариф	2	3	4	5	6
Зарплата, руб.	12 000	15 000	17 000	21 000	25 000

$$M = \overline{x} = (8 \cdot 12\,000 + 16 \cdot 15\,000 + 17 \cdot 17\,000 + \\ + 12 \cdot 21\,000 + 7 \cdot 25\,000) : (8 + 16 + 17 + 12 + 7) = \\ = \frac{1\,052\,000}{60} \approx 17\,533;$$

$Me = \boxed{17\,000}$ (тридцатым и тридцать первым будет рабочий 4 разряда с заработной платой 17 000 руб).

$M_0 = \boxed{17\,000}$.

в) Определите среднемесячную заработную плату рабочего на предприятии по следующим данным.

Для этого продлим таблицу еще на два столбца и заполним ее. Чтобы решить задачу найдем середины интервалов (x_i) и произведение $x_i \cdot f_i$:

Месячная зарплата в интервале, руб.	Число рабочих f_i	Середина интервала x_i	$x_i \cdot f_i$
8000–8500	10	8250	82 500
8500–9000	20	8750	175 000
9000–9500	48	9250	444 000
9500–10 000	60	9750	585 000
10 000–10 500	42	10 250	430 500
10 500–11 000	20	10 750	215 000

Тогда

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5 + x_6 \cdot f_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6} =$$

$$= \frac{82\,500 + 175\,000 + 444\,000 + 585\,000 + 430\,500 + 215\,000}{10 + 20 + 48 + 60 + 42 + 20} =$$

$$= \frac{1\,932\,000}{200} = \boxed{9660}.$$

$Me = \boxed{9750}$. $M_0 = \boxed{9750}$.

3. По пяти хозяйствам района имеются данные об урожайности зерновых и валовом сборе (смотри первые три столбца таблицы):

а) Определить среднюю урожайность для всех хозяйств.

Для определения числа гектаров в каждом хозяйстве необходимо валовой сбор зерна разделить на его урожайность:

Хозяйство	Урожайность x_i, ц/га	Валовой сбор зерна M_i, ц	Число гектаров
1	18	18 000	1000
2	20	30 000	1500
3	21	63 000	3000
4	22	44 000	2000
5	25	30 000	1200
Итого	–	185 000	8700

Можно записать более подробно:

$$\overline{x} = \frac{18\,000 + 30\,000 + 63\,000 + 44\,000 + 30\,000}{\frac{18\,000}{18} + \frac{30\,000}{20} + \frac{63\,000}{21} + \frac{44\,000}{22} + \frac{30\,000}{25}} \approx 21{,}26;$$

более подробно

$$\overline{x} = \frac{185\,000}{1000 + 1500 + 3000 + 2000 + 1200} \approx 21{,}26;$$

$$\overline{x} = \frac{185\,000}{8700} \approx \boxed{21{,}26}\ \text{ц/га}.$$

Примечание. В общем виде это можно записать так:

$$\overline{x} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5}{\frac{M_1}{x_1} + \frac{M_2}{x_2} + \frac{M_3}{x_3} + \frac{M_4}{x_4} + \frac{M_5}{x_5}};$$

при $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = \ldots = M_n$ получаем

$$\overline{x} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{nM_1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

где $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ — **среднее гармоническое.**

В практике исследования статистических процессов в экономике понятие среднего гармонического имеет большое значение.

б) Определите среднюю себестоимость производства зерна в районе, если себестоимость зерна по хозяйствам отражена в таблице:

Номер хозяйства	1	2	3	4	5
Себестоимость 1 ц зерна, руб.	1600	1400	1300	1200	900

Для определения средней себестоимости производства зерна в районе необходимо определить затраты на производство зерна по каждому хозяйству. Затем суммировать все затраты и поделить на общую площадь пашни в гектарах в районе.

$$\bar{x} = (1600 \cdot 1000 + 1400 \cdot 1500 + 1300 \cdot 3000 + \\ + 1200 \cdot 2000 + 900 \cdot 1200) : 8700 = \\ = \frac{11\,080\,000}{8700} \approx \boxed{1274}$$ руб./га (себестоимость производства зерна в среднем по району).

в) Определите среднюю прибыль по всем хозяйствам, если зерно удалось продать по цене 2500 рублей за 1 центнер.

Прибыль по зерну определяется в каждом хозяйстве произведением разности между стоимостью и себестоимостью на количество пашни в гектарах.

Хозяйство	$2500 - x_i$ (прибыль на один гектар), руб.	Число гектаров в хозяйстве	$x_i \cdot M_i$
1	900	1000	900 000
2	1100	1500	1 650 000
3	1200	3000	3 600 000
4	1300	2000	2 600 000
5	1600	1200	1 920 000

Средняя прибыль

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 \cdot M_3 + x_4 \cdot M_4 + x_5 \cdot M_5}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5} =$$

$$= \frac{900\,000 + 1\,650\,000 + 3\,600\,000 + 2\,600\,000 + 1\,920\,000}{8700} =$$

$$= \frac{10\,670\,000}{8700} \approx \boxed{1226} \text{ руб./га.}$$

Но можно было это определить как разность между стоимостью зерна за центнер и средней себестоимостью, т. е. $2500 - 1274 = 1226$.

Примечание. Зная среднюю себестоимость производства зерна по району, можно легко определить среднюю прибыль по каждому хозяйству. Средняя прибыль для:

1-го хозяйства — $1000 \cdot 1226 = \boxed{1\,226\,000}$ рублей;

2-го хозяйства — $1500 \cdot 1226 = \boxed{1\,839\,000}$ рублей;

3-го хозяйства — $3000 \cdot 1226 = \boxed{3\,678\,000}$ рублей;

4-го хозяйства — $2000 \cdot 1226 = \boxed{2\,452\,000}$ рублей;

5-го хозяйства — $1200 \cdot 1226 = \boxed{1\,471\,200}$ рублей.

Сравните среднюю прибыль по хозяйствам с фактической прибылью (отражено в правом столбце предыдущей таблицы).

Тренировочная работа 5

Вариант 2

1. Для отрывка из поэмы А. С. Пушкина «Медный всадник» составьте таблицу кратности (частот) букв «а», «и», «о», «е», «у», «я»[4] и иллюстрируйте диаграммой.

Прошло сто лет, и юный град,
Полнощных стран краса и диво,
Из тьмы лесов, из топи блат
Вознесся пышно, горделиво;
Где прежде финский рыболов,
Печальный пасынок природы,
Один у низких берегов
Бросал в неведомые воды
Свой ветхий невод, ныне там
По оживленным берегам
Громады стройные теснятся
Дворцов и башен; корабли
Толпой со всех концов земли
К богатым пристаням стремятся;
В гранит оделася Нева;
Мосты повисли над водами;
Темнозелеными садами
Ее покрылись острова,
И перед младшею столицей
Померкла старая Москва,
Как перед новою царицей
Порфироносная вдова.

2. а) В бригаде плотников для изготовления ящиков для оборудования за смену производили

Табельный номер плотника	1	2	3	4	5	6	7
Число ящиков за смену, шт.	15	20	19	22	17	23	18

Определите среднюю выработку одного плотника в бригаде.

[4] Буквы «и» и «й», «е» и «ё» считаются одинаковыми.

б) Имелись рабочие различных разрядов. Таблица отражает их распределение по разрядам:

Тарифный разряд x_i	2	3	4	5	6
Число рабочих M_i	5	13	16	9	7

Определить среднюю зарплату рабочих $M = \overline{x}$, Me и M_0, если распределение оплаты по разрядам отражено в таблице:

Тариф	2	3	4	5	6
Оплата x_i, руб.	11 000	13 000	16 000	20 000	25 000

в) Определите среднемесячную заработную плату рабочего в цеху по данной таблице:

Месячная зарплата в интервале, руб.	Число рабочих f_i
7200–8000	8
8000–8800	12
8800–9600	20
9600–10 400	32
10 400–11 200	40
11 200–12 000	56
12 000–12 800	30
12 800–13 600	15

$M = \overline{x} = ?$ $Me = ?$ $M_0 = ?$

3. В цехе есть пять станков различной производительности. В таблице отражены данные о производительности станков и общее число деталей, произведенных на них, учитывая, что какие-то станки работают в одну смену, а какие-то в три смены ежедневно:

Номер станка	Производительность станков, дет/час	Общее число деталей
1	16	9600
2	19	9500
3	21	3570
4	22	7700
5	24	10 800

а) Определить среднюю производительность станков.

б) Определите среднюю себестоимость изготовления деталей в цеху, если по станкам она отражена в таблице:

Номер станка	1	2	3	4	5
Себестоимость 1 детали, руб.	1500	1200	110	90	800

в) Определите среднюю прибыль по всем станкам, если все детали продали по цене 2400 рублей за 1 деталь.

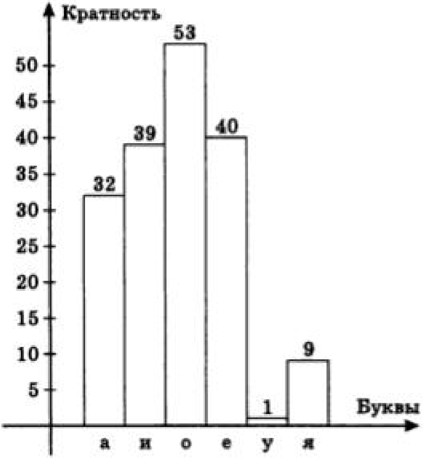
Решение тренировочной работы 5

Вариант 2

1. Посчитаем построчно количество букв в отрывке поэмы:

а	и	о	е	у	я	Строка
1	2	3	1	–	–	1
3	2	3	–	–	–	2
1	3	2	1	–	–	3
–	1	4	2	–	1	4
–	3	2	3	–	–	5
2	2	2	1	–	–	6
–	3	2	2	1	–	7
1	–	3	3	–	–	8
1	3	2	3	–	–	9
1	1	2	3	–	–	10
1	1	2	2	–	2	11
2	2	3	1	–	–	12
–	2	5	2	–	–	13
2	1	1	1	–	3	14
3	1	1	2	–	1	15
2	3	3	–	–	–	16
2	2	1	3	–	–	17
1	1	3	2	–	–	18
1	3	1	4	–	–	19
4	–	2	1	–	1	20
2	2	2	3	–	–	21
2	1	4	–	–	1	22
32	39	53	40	1	9	Итого

Столбиковая диаграмма (гистограмма) кратности появления букв «а», «и», «о», «е», «у», «я»:



2. а) В бригаде плотников для изготовления ящиков для оборудования за смену производили:

Табельный номер плотника	1	2	3	4	5	6	7
Число ящиков за смену, шт.	15	20	19	22	17	23	18

Определите среднюю выработку одного плотника в бригаде.

$$M = \overline{x} = \frac{15+20+19+22+17+23+18}{7} = \frac{134}{7} = \boxed{19}.$$

б) Имелись рабочие различных разрядов. Таблица отражает их распределение по разрядам:

Тарифный разряд x_i	2	3	4	5	6
Число рабочих M_i	5	13	16	9	7

Определить среднюю зарплату рабочих $M = \overline{x}$, Me и M_0, если распределение оплаты по разрядам отражено в таблице:

Тариф	2	3	4	5	6
Оплата x_i, руб.	11 000	13 000	16 000	20 000	25 000

$$\bar{x} = (5 \cdot 11\,000 + 13 \cdot 13\,000 + 16 \cdot 16\,000 + 9 \cdot 20\,000 + 7 \cdot 25\,000) : (5 + 13 + 16 + 9 + 7) = \frac{55\,000 + 169\,000 + 256\,000 + 180\,000 + 175\,000}{50} = \frac{835\,000}{50} = \boxed{16\,700};$$

$Me = \boxed{16\,000}$ (25 и 26 рабочий по порядку возрастания имеют 4 разряд);

$M_0 = \boxed{16\,000}$ (разряд по моде 4, значит оплата 16 000 руб.).

в) Определите среднемесячную заработную плату рабочего в цеху по данной таблице

Месячная зарплата в интервале, руб.	Число рабочих f_i	Середина интервала x_i	Произведение $x_i \cdot f_i$
7200–8000	8	7600	60 800
8000–8800	12	8400	100 800
8800–9600	20	9200	184 000
9600–10 400	32	10 000	320 000
10 400–11 200	40	10 800	432 000
11 200–12 000	56	11 600	649 600
12 000–12 800	30	12 400	372 000
12 800–13 600	15	13 200	198 000
Итого	213		2 316 600

Для определения среднего найдем середины интервалов, затем перемножим их на количество рабочих. Далее суммируем эти произведения и разделим на общее число рабочих: $\bar{x} = \dfrac{2\,316\,600}{213} \approx \boxed{10\,876}$;

$Me = \boxed{10\,800}$ (на 107 месте середина интервала зарплаты);

$M_0 = \boxed{11\,600}$.

3. В цехе есть пять станков различной производительности. В таблице отражены данные о производительности станков и общее число деталей, произведенных на них, с учетом того, что какие-то станки работают в одну смену, а какие-то в три смены ежедневно:

Номера станков	Производительность станков, дет/час	Общее число деталей, шт.
1	16	9600
2	19	9500
3	21	3570
4	22	7700
5	24	10 800

а) Определить среднюю производительность станков:

$$\bar{x} = (16 \cdot 9600 + 19 \cdot 9500 + 21 \cdot 3570 + 22 \cdot 7700 +$$

$$+ 24 \cdot 10\,800) : (9600 + 9500 + 3570 + 7700 + 10800) =$$

$$= \frac{153\,600 + 180\,500 + 74\,970 + 169\,400 + 259\,200}{41\,170} =$$

$$= \frac{837\,670}{41\,170} \approx \boxed{20{,}35}.$$

б) Определите среднюю себестоимость изготовления деталей в цеху, если по станкам она отражена в таблице:

Номер станка	1	2	3	4	5
Себестоимость 1 детали, руб.	1500	1200	1100	900	800

$$\bar{x} = (1500 \cdot 9600 + 1200 \cdot 9500 + 1100 \cdot 3570 + 900 \cdot 7700 +$$

$$+ 800 \cdot 10\,800) : (9600 + 9500 + 3570 + 7700 + 10\,800) =$$

$$= (14\,400\,000 + 11\,400\,000 + 3\,927\,000 +$$

$$+ 6\,930\,000 + 8\,640\,000) : 41\,170 =$$

$$= \frac{45\,297\,000}{41\,170} \approx \boxed{1100}.$$

в) Определите среднюю прибыль по всем станкам, если все детали продали по цене 2400 рублей за 1 деталь.

Значит, прибыль на одну деталь по каждому станку и общую прибыль по всем станкам можно отразить в таблице:

Номер станка	Прибыль на одну деталь, руб.	Общая прибыль, руб.
1	900	8 640 000
2	1200	11 400 000
3	1300	4 641 000
4	1500	11 550 000
5	1600	17 280 000
Итого		53 511 000

$$\bar{x} = \frac{53\,511\,000}{5} = \boxed{10\,702\,200}.$$

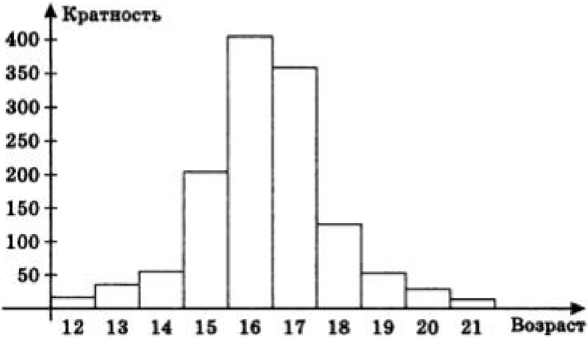
Примечания. 1. В данной задаче предполагается, что либо на всех станках изготовлялись одинаковые детали, либо эти детали были одной и той же степени сложности.

2. В силу нехватки специалистов высокой квалификации не все высокопроизводительные станки использовались в полной мере.

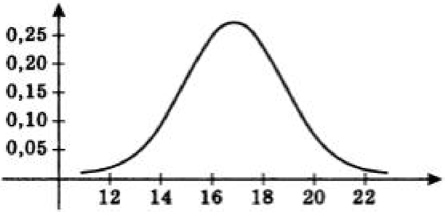
3. Простейшие расчеты показывают, что наиболее загруженные станки работали по 20 часов в день в течение 30 дней. Значит речь идет о средней прибыли станков за месяц.

Нормальное распределение

По результатам исследования на тему «Молодежь и наркотики» в начале 2000 гг., в котором приняло участие 1235 человек в возрасте от 12 до 21 года, получили данные, отраженные в гистограмме:



В математической статистике доказывается, что по мере увеличения числа данных (в идеале до бесконечности) такого рода распределения приближаются к виду, который называется кривой **нормального** распределения, или **кривой Гаусса** (по имени немецкого математика Карла Гаусса (1777–1855), который в начале XIX в. исследовал свойства такого распределения). Вид кривой нормального распределения показан ниже. Причем использованы значения частот, отображенных на графике



Нормальное распределение обладает рядом свойств.

Во-первых, для него все три меры центральной тенденции — мода, медиана и среднее — совпадают друг с другом: $M_0 = Me = \overline{x}$.

Из этого факта следует симметричный характер кривой нормального распределения.

Во-вторых, несмотря на то, что теоретически нормальное распределение простирается от $-\infty$ до ∞, на практике ограничиваются диапазоном $(\overline{x} \pm 3\sigma)$, где σ — **стандартное отклонение**.

В этих пределах лежит 99,74% площади под кривой нормального распределения, что, как правило, более чем достаточно для решения большинства задач.

Примечания.

1. Отметим, что отбрасываемые «хвосты» нормального распределения, в которых распределено 0,26% площади (по 0,13% с каждой стороны), играют весьма важную роль при проверке статистических гипотез.
2. Выбор диапазона $\pm 3\sigma$ не носит принципиального характера. В ряде случаев рассматривают диапазон $\pm 4\sigma$, в пределах которого лежит уже 99,997% площади под кривой нормального распределения.

   Например, для нормального распределения, изображенного на гистограмме распределения возраста молодежи, употребляющей наркотики, $\overline{x} = 16{,}5$ лет, $\sigma = 1{,}5$.

Рассмотрим произвольное значение возраста и обозначим как x_i. Пусть $x_i = 18$.

Введем величину $z = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$.

В данном случае $z = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma} = \dfrac{18 - 16{,}5}{1{,}5} = 1$.

Для $x_i = 13{,}5$ получим $z = \dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma} = \dfrac{13{,}5 - 16{,}5}{1{,}5} = -2$.

Очевидно, что значение z показывает, насколько далеко от среднего расположено какое-либо конкретное значение возраста. Если возраст меньшего среднего (отклонения влево), z отрицательно. Если возраст больше среднего (отклонения вправо), z положительно. Если возраст равен среднему, то $z = 0$.

Учитывая, что в пределах $(\overline{x} \pm 3\sigma)$ лежит 99,74% площади под кривой нормального распределения, то 99,74% всех участников исследования имели возраст в пределах от $(16{,}5 - 3 \cdot 1{,}5) = 12$ лет до $(16{,}5 + 3 \cdot 1{,}5) = 21$ года.

Найдем значение z для этих значений:

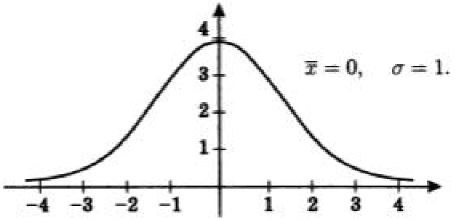
$$z_{\min} = \frac{12 - 16{,}5}{1{,}5} = -3; \quad z_{\max} = \frac{21 - 16{,}5}{1{,}5} = 3.$$

Если мы возьмем любое другое нормальное распределение (для других задач), где известны $\overline{x}$ и σ, то получим аналогичный результат. Это принципиально важно, так как позволяет не учитывать природу конкретных данных, на основе которых было получено нормальное распределение.

Любое нормальное распределение всегда можно преобразовать к виду, называемому **единичным нормальным распределением**, при котором среднее $\overline{x} = 0$ и $\sigma = 1$.

Тем самым все нормальные распределения приводятся как бы к общему знаменателю, в роли которого выступает z-шкала, а значит, появляется возможность сравнивать различные распределения между собой независимо от того, на основе каких значений результатов исследования они были получены.

График единичного нормального распределения:



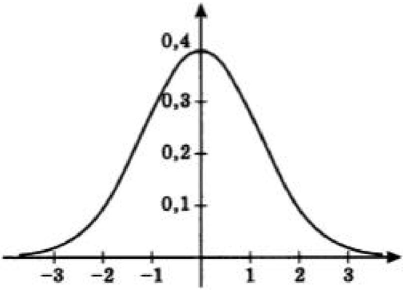
Это преобразование позволяет заменить большинство вычислений, связанных с использованием нормального распределения, работой со специальными статистическими таблицами, где приведены все относящиеся к такому распределению значения и результаты.

Чаще всего используется таблица стандартного нормального z-распределения (для случая $\overline{x} = 0; \quad \sigma = 1$).

Этот закон нормального распределения был выведен Гауссом и задается функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

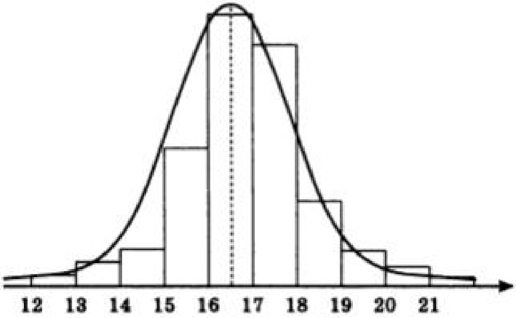
График $y = \varphi(x)$ называется **гауссовской кривой**. Это колоколообразная кривая, симметричная относительно оси ординат, причем площадь под кривой равна единице.

Кривая асимптотически очень быстро приближается к оси абсцисс и имеет единственную точку максимума $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = 0{,}3989$.



Иногда этот закон называют **законом статистической устойчивости**. А такую функцию называют выравнивающей при переходе к графику от гистограмм, где ширина столбиков гистограммы достаточно мала, а основания их есть некоторый непрерывный промежуток.

При $\overline{x} = 16{,}5$, $\sigma = 1{,}5$:



Кривая распределения данных по исследованию числа употребляющих наркотики. Исследовалось 1235 человек.

3

Элементы теории вероятностей

Понятие событий

Стохастическим называют испытание или опыт (действительный или умозрительный), если заранее нельзя предугадать его результаты или исход. Результаты (исходы) стохастического опыта называются **случайными** событиями или просто событиями. Приведем примеры событий.

а) В закрытом ящике находятся четыре одинаковых куба разной расцветки белый, синий, красный и зеленый. Из ящика, не подсматривая, берут один из кубов и смотрят его цвет. Опыт — это изъятие куба из ящика, а событие — изъятие куба определенного цвета.

б) Открывается одна из карт — это опыт; на карте валет — это событие.

События обычно обозначают заглавными буквами A, B и т. д.

События, происходящие в результате испытания, опыта, могут иметь разные характеристики.

1. Событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (опыта), назовем **достоверным** (иногда обозначают символом Ω).
2. Событие, которое не может произойти в результате данного испытания, называется **невозможным** (символ $\emptyset$) или **недостоверным**.

Примеры

а) Сбить летящий на высоте 10 км самолет из охотничьего ружья нельзя — это невозможное событие.

б) Выбор среди школьников учащегося, весящего более 5 кг, — достоверное событие.

3. Несколько событий называют **равновозможными**, если в результате опытов ни одно из них не имеет бо́льшую возможность появления, чем другие.

4. Несколько событий называются **неравновозможными**, если в результате опытов одно из них имеет бо́льшую возможность наступления, чем другие.

Примеры

а) При игре в домино открытие первоначально любой из костяшек (их 28) с набором от $(0;0)$ до $(6;6)$ равновозможное.

б) В ящике для обуви находятся сандалеты для детей: три пары 35 размера, две пары 36 размера, четыре пары 34 размера. Произвольное извлечение из ящика сандалет 35, 36 или 34 размера — не равновозможное событие, так как имеется разное количество сандалет каждого размера.

5. События называются **совместимыми (совместными)**, если наступление одного из них не исключает наступления других.

Примеры

а) Из колоды карт вытащили случайно десятку пик. Здесь событие A — появление десятки, событие B — появление масти пик.

Очевидно, что события A и B могут быть совместными.

б) У партнера по игре в домино случайно оказались костяшки $(1;1)$ (событие A) и $(3;3)$ (событие B). Это тоже вполне совместимые события.

6. События называют **несовместимыми** (**несовместными**), если наступление одного из них исключает наступление других (другого).

   Примеры

   а) Из ящика для различных игрушек случайным образом выбирают одну игрушку: зайца (событие A) или мишку (событие B). Естественно, это разные игрушки, и события A и B несовместимые в условиях данного опыта.

   б) При поездке в автобусе контролер проверяет у пассажиров наличие билетов или проездных карточек.

   Если событие A — пассажир П оплатил проезд, а событие B — пассажир П едет «зайцем», то очевидно, что это несовместимые события (конечно, речь идет об одном и том же времени).

7. События, которые нельзя разделить на более простые, называются **элементарными** событиями.

   Пример

   Известна игра в кости (бросание кубика, на каждой грани которого числа или точки от 1 до 6). Бросаем произвольно игральный кубик. Выпасть могут от одного до шести очков (точек). Каждое из этих событий элементарное.

   Очевидно, что каждое из этих элементарных событий несовместное.

8. Множество всех событий рассматриваемого опыта, одно из которых обязательно произойдет, причем любые два события из которых несовместимы, называется **полной группой событий**.

Возможно другое определение **элементарных** событий: события, образующие полную группу, называют **элементарными**.

Пример

Если при игре в игральные кости происходит событие:

A_1 — выпало одно очко;

A_2 — выпало два очка;

A_3 — выпало три очка;

A_4 — выпало четыре очка;

A_5 — выпало пять очков;

A_6 — выпало шесть очков.

Значит множество $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ образует полную группу событий, причем все события элементарные.

9. Событие, состоящее из нескольких элементарных событий, называется **составным**.

Пример

Рассмотрим таблицу различных опытов, связанных с игральными кубиком.

Обозначение событий	Содержание события	Количество элементарных событий, благоприятствующих данному событию
A	Выпало четное число очков	3 ($\{A_2; A_4; A_6\}$)
B	Выпало меньше 3 очков	2 ($\{A_1; A_2\}$)
C	Выпало менее 5 очков	4 ($\{A_1; A_2; A_3; A_4\}$)
D	Выпало не более 5 очков	5 ($\{A_1; A_2; A_3; A_4; A_5\}$)
M	Выпало более 6 очков	0 ($\emptyset$)

Очевидно, что:

а) события A, B, C, D являются подмножествами множества полной группы событий $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$;

б) события A, B, C, D не являются элементарными событиями (они составные);

в) так как пустое множество $\emptyset$ по умолчанию всегда принадлежит любому множеству, то событие $M \in \{A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6\}$ и является элементарным событием.

Событие M является невозможным событием.

10. **Противоположным** событию A называется событие, которое происходит только тогда, когда не происходит событие A. Обозначается такое событие: $\overline{A}$.

Отметим, что противоположные события образуют полную группу событий. Например, «выпадение герба на монете при подбрасывании» — событие, противоположное событию «выпадение цифры».

Практикум 8

Определить вид события, если:

A_1 — вас завтра вызовут к доске;

A_2 — машина, постоянно стоящая в гараже, попадет в аварию на перекрестке городских дорог;

A_3 — на костяшке в домино в сумме выпало одно очко;

A_4 — на костяшке в домино выпало в сумме четное число очков;

A_5 — на костяшке в домино выпало в сумме три очка;

A_6 — на костяшке в домино выпало в сумме меньше 13 очков;

A_7 — на костяшке в домино выпало в сумме нечетное число очков;

A_8 — на костяшке в домино выпало в сумме два очка.

Какие из событий $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6; A_7; A_8$ являются:

1) совместными;
2) несовместными;
3) равновозможными;
4) случайными;
5) неравновозможными;
6) достоверными;
7) элементарными;
8) противоположными;
9) недостоверными;
10) составными;
11) образующими полную группу событий?

Решение практикума 8

Определить вид события, если:

A_1 — вас завтра вызовут к доске;

A_2 — машина, постоянно стоящая в гараже, попадет в аварию на перекрестке городских дорог;

A_3 — на костяшке в домино в сумме выпало одно очко;

A_4 — на костяшке в домино выпало в сумме четное число очков;

A_5 — на костяшке в домино выпало в сумме три очка;

A_6 — на костяшке в домино выпало в сумме меньше 13 очков;

A_7 — на костяшке в домино выпало в сумме нечетное число очков;

A_8 — на костяшке в домино выпало в сумме два очка.

1) Совместными являются события:

   а) A_6 и любое из событий A_3, A_4, A_5, A_7, A_8;

   б) A_3 и A_7; в) A_5 и A_7; г) A_8 и A_4.

2) Несовместными являются события:

   а) A_3 и любое из событий A_4, A_5, A_8; б) A_4 и любое из событий A_5, A_7; в) A_5 и A_8; г) A_7 и A_8.

   Особо важно понимать, что события A_1 и A_2 — разной природы как относительно друг друга, так и относительно остальных событий A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, поэтому их сравнивать совершенно невозможно (некорректно).

3) Равновозможными являются события A_5 и A_8, так как для A_5 это костяшки $(0;3)$ и $(1;2)$ (порядок несуществе-нен), для A_8 это костяшки $(0;2)$ и $(1;1)$, и возможностей для A_5 и для A_8 всего по две.

4) Все события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 — случайные;

5) Неравновозможными являются события:

   а) A_3 и все остальные A_4, A_5, A_6, A_7, A_8;

   б) A_4 и все остальные A_5, A_6, A_7, A_8.

   Подробнее остановимся на неравновозможности событий A_4 и A_7. Действительно, событие A_4 — выбор костяшек, сумма очков которых четна, т. е. это:

   $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;2)$, $(3;3)$, $(4;4)$, $(5;5)$, $(6;6)$;
   $(0;2)$, $(1;3)$, $(2;4)$, $(3;5)$, $(4;6)$;
   $(0;4)$, $(1;5)$, $(2;6)$;
   $(0;6)$.

   Всего 16 костяшек (возможностей).

   Событие A_7 — выбор костяшек, сумма очков которых нечетна, т. е.:

   $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(4;5)$, $(5;6)$;
   $(0;3)$, $(1;4)$, $(2;5)$, $(3;6)$;
   $(0;5)$, $(1;6)$.

   Всего 12 костяшек (возможностей).

6) Достоверным является только событие A_6.

7) Элементарными являются события A_1, A_2, A_3;
   Позже остановимся на событиях A_4 и A_7.

8) Противоположными являются события A_4 и A_7, так как сумма очков или четна, или нечетна. Значит $\bar{A}_4 = A_7$, или $\bar{A}_7 = A_4$.

   Тогда события A_4 и A_7 образуют полную группу событий, в которой они являются элементарными событиями.

9) Недостоверным является событие A_2.

10) Составными являются события: A_4, A_5, A_6, A_7, A_8.

11) Образуют полную группу событий события:

    а) A_4 и A_7; б) A_6 состоит из множества всех событий, образующих полную группу событий.

Классическое (комбинаторное) определение вероятности

Задача 1. Пусть в одной корзине 10 пар черных носков с размерами 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38. а в другой 8 белых пар носков с размерами 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35. Произвольно наугад вынимаем из каждой корзины по одной паре носков.

Событие A_1 — номер размера черной пары носков, кратный 3.
Событие B_1 — номер размера белой пары носков, не больший 25 размера. Интересно, какое из этих событий более возможно?

Очевидно, событию A_1 благоприятствуют три равновозможных события — это вытаскивание черной пары носков размеров 24, 30, 36. Событию B_1 благоприятствуют также три равновозможных события — это вытаскивание белой пары носков размеров 21, 23, 25. Кажется, что события A_1 и B_1 равновозможные, но так ли это?

Ответить правильно на этот вопрос можно, только зная количество всех равновозможных элементарных событий, связанных с множеством полной группы событий.

а) При извлечении черных пар носков с размерами 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38 всего десять событий, из них кратных 3 (событие A_1) три. Получаем три благоприятствующих события из десяти равновозможных.

   Отношение числа благоприятствующих элементарных событий к числу равновозможных событий равно $\frac{3}{10}$.

б) При извлечении же белых пар носков с размерами 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35 всего восемь событий, из них с размерами не больше 25 (событие B_1) три. В этом случае имеем также три благоприятствующих события, но из восьми равновозможных.

Отношение числа благоприятствующих элементарных событий к числу равновозможных событий равно $\frac{3}{8}$.

Очевидно, что событие B_1 более возможно, чем событие A_1.

Вероятностью случайного события A называют отношение числа элементарных событий, которые благоприятствуют этому событию, к общему числу всех равновозможных элементарных событий, образующих полную группу событий.

Обозначается это так: $P(A) = \frac{m}{n}$, где m — число элементарных событий, благоприятствующих событию A, а n — число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу событий.

Очевидно, что $P(\emptyset) = 0$ и $P(\Omega) = 1$, а для любого случайного события A $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Общая схема решения задач на вычисление классической вероятности

Для решения таких задач необходимо:

1. убедиться, что количество возможных событий конечно;
2. установить, что все события равновозможны, либо их равновозможность можно принять как приемлемое допущение;
3. найти общее число возможных событий n;
4. четко определить события, вероятность которых нужно найти (A);
5. правильно подсчитать m — количество событий, благоприятствующих событию A;
6. вычислить вероятность события по классической формуле $P(A) = \frac{m}{n}$.

Задача 2. В закрытом ящике содержатся фирменные бляхи носильщиков с номерами от 1 до 50 включительно. Какова вероятность того, что извлеченная случайным образом бляха имеет номер, содержащий только одну цифру 3, если в ящике нет блях с одинаковыми номерами?

а) Очевидно, что если события — это извлечения из ящика занумерованных блях, то таких событий только конечное число.

б) Ясно, что по условию задачи эти события равновозможны.

в) Число всех равновозможных событий для данной задачи равно 50 (n).

г) По условию задачи, события, вероятность которых нужно найти (A), — это наличие в номере бляхи только одной цифры 3, т. е. бляхи с номерами: 3, 13, 23, 43, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

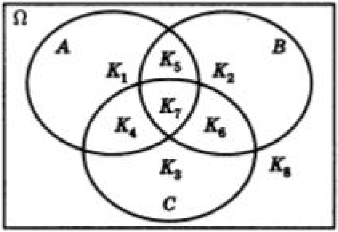
д) Число событий, благоприятствующих событию A, будет равно 13 (m).

е) $P(A) = \dfrac{m}{n}$, т. е. $P(A) = \dfrac{13}{50} = \boxed{0{,}26}$.

Упражнения

1. Из целых чисел от 1 до 30 включительно наугад выбрали числа.

Пусть событие A — числа, кратные 2; событие B — кратные 3; событие C — кратные 5. Взаимоотношения между событиями $A, B, C, k_1, k_2, \ldots, k_8$ графически отображены на чертеже.



Найдите вероятность события $k_1, k_2, \ldots, k_8$ по графическим отображениям.

а) Выпишем числа, связанные с событием k_1: 2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28 — это числа, кратные 2, но среди которых нет чисел, кратных 3 или 5. $P(k_1) = \frac{8}{30} = \boxed{\frac{4}{15}}$.

б) Выпишем числа, связанные с событием k_2: 3, 9, 21, 27 — это числа, кратные 3, но среди которых нет чисел кратных 2 или 5. $P(k_2) = \frac{4}{30} = \boxed{\frac{2}{15}}$.

в) Выпишем числа, связанные с событием k_3: 5, 25 — это числа, кратные 5, но среди которых нет чисел кратных 2 или 3. $P(k_3) = \frac{2}{30} = \boxed{\frac{1}{15}}$.

г) Выпишем числа, связанные с событием k_4: 10, 20 — это числа, кратные одновременно 2 и 5, но среди которых нет чисел, кратных 3. $P(k_4) = \frac{2}{30} = \boxed{\frac{1}{15}}$.

д) Выпишем числа, связанные с событием k_5: 6, 12, 18, 24 — это числа, кратные одновременно 2 и 3, но среди которых нет чисел, кратных 5.

$$P(k_5) = \frac{4}{30} = \boxed{\frac{2}{15}}.$$

е) Выпишем числа, связанные с событием k_6: 15 — это число, кратное одновременно 3 и 5, но не кратное 2.

$$P(k_6) = \boxed{\frac{1}{30}}.$$

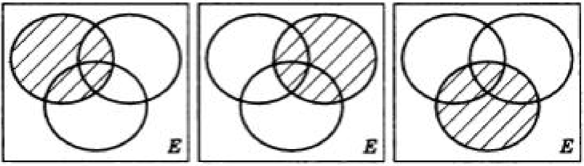
ж) Выпишем числа, связанные с событием k_7: 30 — это число, кратное одновременно 2, 3 и 5. $P(k_7) = \boxed{\frac{1}{30}}$.

з) Выпишем числа, связанные с событием k_8: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 — это числа, среди которых нет кратных или 2, или 3, или 5. $P(k_8) = \frac{8}{30} = \boxed{\frac{4}{15}}$.

Проверка: $\frac{4}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{4}{15} = 1.$

Значит события $k_1, k_2, \ldots, k_8$ образуют полную группу событий. Решение верное.

2. Из множества E чисел от 10 до 30 включительно выбирали произвольно числа. Положим событие A — выбор чисел, кратных 2; событие B — выбор чисел, кратных 3; событие C — выбор чисел, кратных 5.



$A \vdots 2$ $\qquad$ $B \vdots 3$ $\qquad$ $C \vdots 5$

Обозначим:

событие D_1 — числа, кратные или 2 или 3;

событие D_2 — числа кратные 3 и 2;

событие D_3 — числа, не кратные 3;

событие D_4 — числа, не кратные 2;

событие D_5 — числа, кратные 3, но не кратные 2;

событие D_6 — числа, кратные 2, но не кратные 3;

событие D_7 — числа, не кратные 3 или 2;

событие D_8 — числа, не кратные 3 и 2;

событие D_9 — числа, кратные 2 и кратные 3 или 5;

событие D_{10} — числа, кратные 2, или кратные 3 и 5;

событие D_{11} — числа, кратные 3 или 2, но не кратные 3 и 2;

событие D_{12} — числа, кратные 3 и 2 или не кратные 3 или 2.

Для событий $D_1, D_2, \ldots, D_{12}$:

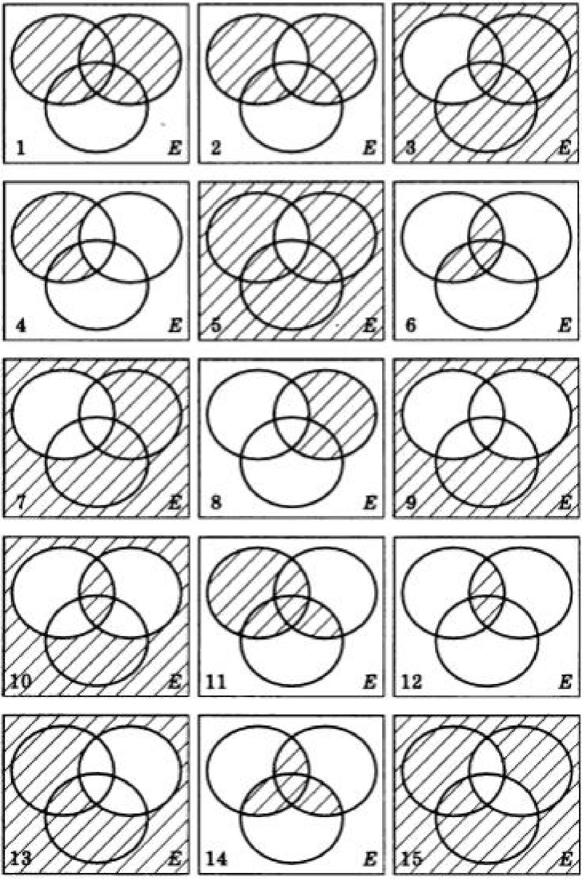
а) опишите события с точки зрения операций над множествами;

б) выберите из предложенных графических иллюстраций соответствующую и укажите ее номер;

в) установите содержание и вычислите вероятность данного события;

г) попытайтесь описать неиспользованные иллюстрации как операции над множествами и вычислите вероятность этих событий.

Возможные графические иллюстрации к событиям $D_1, D_2, \ldots, D_{12}$.



а) $D_1 = A \cup B$; $D_5 = A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
$D_2 = A \cap B$; $D_6 = B \setminus A = B \cap \overline{A}$;
$D_3 = \overline{B} = E \setminus B$; $D_7 = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
$D_4 = \overline{A} = E \setminus A$; $D_8 = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

$D_9 = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$D_{10} = A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$D_{11} = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$;

$D_{12} = (A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)}$.

б) $D_1 - 1$ $D_5 - 8$ $D_9 - 6$
$D_2 - 12$ $D_6 - 4$ $D_{10} - 11$
$D_3 - 13$ $D_7 - 9$ $D_{11} - 2$
$D_4 - 7$ $D_8 - 5$ $D_{12} - 10$

в) 1. $D_1 = A \cup B =$
$= \{10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30\}$.

Так как $m(E) = 21$, а $m(A \cup B) = 14$,
то $P(D_1) = \dfrac{14}{21} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$, где $m(E), m(A \cup B)$ – количество элементов в данном множестве.

2. $D_2 = A \cap B = \{12, 18, 24, 30\}$; $m(A \cap B) = 4$;
$P(D_2) = \boxed{\dfrac{4}{21}}$.

3. $D_3 = \overline{B} = \{10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25,$
$26, 28, 29\}$; $m\left(\overline{A}\right) = 14$; $P(D_3) = \dfrac{14}{21} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

4. $D_4 = \overline{A} = \{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$;
$m\left(\overline{B}\right) = 10$; $P(D_4) = \boxed{\dfrac{10}{21}}$.

5. $D_5 = B \setminus A = B \cap \overline{A} = \{15, 21, 27\}$;
$m\left(B \cap \overline{A}\right) = m(B \setminus A) = 3$; $P(D_5) = \dfrac{3}{21} = \boxed{\dfrac{1}{7}}$.

6. $D_6 = A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{10, 14, 16, 20, 22, 26, 28\}$;

$m(A \setminus B) = m(A \cap \overline{B}) = 7;\quad P(D_6) = \frac{7}{21} = \boxed{\frac{1}{3}}.$

7. $D_7 = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{11, 13, 17, 19, 23, 25, 29\}$;

$m(\overline{A \cup B}) = m(\overline{A} \cap \overline{B}) = 7;\quad P(D_7) = \frac{7}{21} = \boxed{\frac{1}{3}}.$

8. $D_8 = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = \{10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21,$
$22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}$;
$m(\overline{A \cap B}) = m(\overline{A} \cup \overline{B}) = 17;\quad P(D_8) = \boxed{\frac{17}{21}}.$

9. $D_9 = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) =$
$= \{10, 12, 18, 20, 24, 30\}$;

$m(A \cap (B \cup C)) = m((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 6;$

$P(D_9) = \frac{6}{21} = \boxed{\frac{2}{7}}.$

10. $D_{10} = A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) =$
$= \{10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$;

$m(A \cup (B \cap C)) = m((A \cup B) \cap (A \cup C)) = 12;$

$P(D_{10}) = \frac{12}{21} = \boxed{\frac{4}{7}}.$

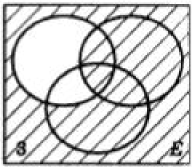
11. $D_{11} = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) =$
$= \{10, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 26, 27, 28\}$;

$m((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) = m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 10;$

$P(D_{11}) = \boxed{\frac{10}{21}}.$

12. $D_{12} = \overline{A \cup B} \cup (A \cap B) =$
$= \{11, 12, 13, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 29, 30\}$;
$m(\overline{A \cup B} \cup (A \cap B)) = 11;\quad P(D_{12}) = \boxed{\frac{11}{21}}.$

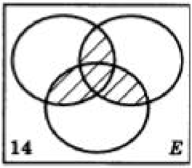
г) 1. Если судить по графической иллюстрации 3, событие D_{13} есть событие, противоположное разности событий $A \setminus B$ или пересечению события A с событием, противоположным B, т. е. $D_{13} = \overline{A \setminus B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.



Тогда так как $A \setminus B = \{10, 14, 16, 20, 22, 26, 28\}$, то $D_{13} = \{11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 30\}$;

$m\left(\overline{A \setminus B}\right) = \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) = 14$; $P(D_{13}) = \frac{14}{21} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

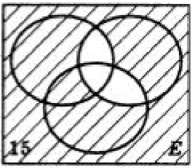
2. Из графической иллюстрации 14 ясно, что событие D_{14} по сути есть объединение попарных пересечений A, B, C, т. е. $D_{14} = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup \cup (A \cap C)$.



Учитывая, что $A \cap B = (12, 18, 24, 30)$; $A \cap C = \{10, 20, 30\}$; $B \cap C = \{15, 30\}$, получим $m((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) = 7$ $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = = \{10, 12, 15, 18, 20, 24, 30\})$;

$P(D_{14}) = \frac{7}{21} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

3. Иллюстрация 15 показывает, что событие D_{15} есть событие, противоположное пересечению B с объединением A и C, т. е. $D_{15} = \overline{B \cap (A \cup C)} = = \{10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}$;



$m\left(\overline{B \cap (A \cup C)}\right) = 16$; $D_{15} = \boxed{\frac{16}{21}}$.

Практикум 9

1. У Маши было четыре фантика от конфет «Мишка на севере», пять фантиков от конфет «Южные» и три фантика от конфет «Сливочные». К сожалению, один фантик она потеряла. Какова вероятность, что это фантик от «Мишки на севере»?

2. Найдите вероятность того, что случайно выбранная костяшка домино содержит менее семи точек (очков).

3. На озере обитала стая из 40 диких лебедей. Для изучения путей миграции 15 из них было окольцовано. Через месяц другая группа ученых захотела поставить свои метки (чипы) на лебедях. Какова вероятность того, что пойманные четыре диких лебедя окажутся окольцованными?

4. Из пяти букв разрезанной азбуки составлено слово «книга». Игривый котенок разбросал буквы. Какова вероятность, что пятилетний Андрей, не умеющий читать, вновь соберет слово «книга»?

5. Андрея и Машу друзья пригласили на вечеринку в компанию из восьми человек, включая их. Естественно, они очень хотели сидеть вместе. Какова вероятность, что их желание осуществится, если по договору с друзьями выбор места определяется жеребьевкой?

6. В библиотеке после посещения читателей на одной из полок находится пятитомное издание К. Симонова в произвольной последовательности. С полки взяли произвольно три тома Симонова. Какова вероятность того, что книги были взяты в определенном порядке (для определенности положим, что этот порядок таков: 2-й, 3-й и 5-й том)?

7. На школьном вечере каждому из двухсот учащихся дали занумерованную от 1 до 200 карточку. Какова вероятность того, что учащийся получит карточку с номером: а) кратным 7 (событие A); б) кратным или 5, или 6 (событие B)?

8. В первенстве по волейболу участвовало 18 команд. В результате жеребьевки все команды распределили на две группы по девять команд. Обычно пять команд занимают лидирующие места.

   а) Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу?

   б) Какова вероятность попадания двух лидирующих команд в одну, а трех из лидирующих команд в другую группу?

Решение практикума 9

1. У Маши было четыре фантика от конфет «Мишка на севере», пять фантиков от конфет «Южные» и три фантика от конфет «Сливочные». К сожалению, один фантик она потеряла. Какова вероятность, что это фантик от «Мишки на севере»?

Всего было $4+5+3=12$ фантиков. Тогда по классическому определению вероятности ($n=12;\ m=4$): $P(A)=\frac{4}{12}=\boxed{\frac{1}{3}}$,

где A — случайное событие: утеря фантика от конфет «Мишка на севере».

2. Найдите вероятность того, что случайно выбранная костяшка домино содержит менее семи точек (очков).

Всего костяшек домино 28. Рассмотрим костяшки, у которых менее 7 очков. Можно представить любую костяшку домино в виде пары чисел, где каждое число количество точек на костяшке:

$(0;0);(1;0);(2;0);(3;0);(4;0);(5;0);(6;0);$

$(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);$

$(2;2);(2;3);(2;4);$

$(3;3).$

(Так в домино костяшки симметричны, то $(a;b)=(b;a)$.)

Пусть A — случайное событие выбора костяшки, содержащей менее 7 точек (очков). Тогда $P(A)=\frac{16}{28}=\boxed{\frac{4}{7}}$.

3. На озере обитала стая из 40 диких лебедей. Для изучения путей миграции 15 из них было окольцовано. Через месяц другая группа ученых захотела поставить свои метки (чипы) на лебедях. Какова вероятность того, что пойманные четыре диких лебедя окажутся окольцованными?

Выбрать четыре диких лебедя из 40 можно C_{40}^4 способами. Из 15 окольцованных лебедей выбрать четыре можно C_{15}^4 способами. Вероятность события A (т. е. того, что пойманные четыре диких лебедя окажутся уже окольцованными):

$$P(A) = \frac{C_{15}^4}{C_{40}^4} = \frac{15!}{4!\cdot 11!}\cdot\frac{4!\cdot 36!}{40!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37} = \boxed{\frac{21}{1406}}$$

$\left(\text{напомним, что } C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}\right)$.

4. Из пяти букв разрезанной азбуки составлено слово «книга». Игривый котенок разбросал буквы. Какова вероятность, что пятилетний Андрей, не умеющий читать, вновь соберет слово «книга»?

   В данном случае мы имеем дело с числом перестановок $P_5 = 5! = 120$, значит $P(A) = \dfrac{1}{5!} = \boxed{\dfrac{1}{120}}$.

5. Андрея и Машу друзья пригласили на вечеринку в компанию из восьми человек, включая их. Естественно, они очень хотели сидеть вместе. Какова вероятность, что их желание осуществится, если по договору с друзьями выбор места определяется жеребьевкой?

   Андрей и Маша, сидя вместе, могут занять 16 различных позиций, так как если Андрей сядет на данное место, то Маша может сесть и справа, и слева. Но различных мест только 8.

   Шестерка его друзей может сесть за стол 6! способами. Восемь человек может сесть 8! различными способами. Следовательно, вероятность исполнения желания Андрея и Маши равна $P = \dfrac{16\cdot 6!}{8!} = \dfrac{16}{8\cdot 7} = \boxed{\dfrac{2}{7}}$.

6. В библиотеке после посещения читателей на одной из полок находится пятитомное издание К. Симонова в произвольной последовательности. С полки взяли произвольно

три тома Симонова. Какова вероятность того, что книги были взяты в определенном порядке (для определенности положим, что этот порядок таков: 2-й, 3-й и 5-й том)?

Очевидно, что здесь мы имеем дело с числом размещений: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, из них только раз можно взять данный том в предложенном порядке, так как каждая книга имеется только в одном экземпляре, значит $P(A) = \frac{1}{60}$, где A — событие, описанное в вопросе задачи.

7. На школьном вечере каждому из двухсот учащихся дали занумерованную от 1 до 200 карточку. Какова вероятность того, что учащийся получит карточку с номером: а) кратным 7 (событие A); б) кратным или 5, или 6 (событие B)?

а) Вначале найдем число карточек с номерами, кратными 7. Очевидно, что такие номера образуют арифметическую прогрессию, где

$a_1 = 7;\quad d = 7;\quad a_n = 7 + (n-1)7 = 7n;\quad a_n = 7n < 200.$

Тогда наибольшее натуральное $n = 28$, $\quad a_{28} = 196$;

$P(A) = \frac{28}{200} = \frac{7}{50} = \boxed{0{,}14}.$

б) Здесь необходимо найти число карточек, кратных или 5, или 6 — событие B.

1. Вначале найдем число карточек, кратных 5, — событие C: $a_1 = 5;\quad a_n = 195;\quad d = 5.$

   Так как $a_n = a_1 + (n-1)d$, то $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$,

   т.е. $n = \frac{195 - 5 + 5}{5} = 39.$

2. Затем найдем число карточек, кратных 6, — событие D: $a_1 = 6;\quad a_n = 198;\quad d = 6.$

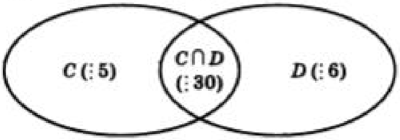
   $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$, т.е. $n = \frac{198 - 6 + 6}{6} = 33.$

3. Так как здесь мы имеем дело с объединением множества кратных номеров, то воспользуемся правилом, которому подчиняется количество элементов в объединении $B = C \cup D$:

$\boxed{m(C \cup D) = m(C) + m(D) - m(C \cap D)}$ (подробнее см. книгу А. Х. Шахмейстера «Функции. Множества. Последовательности»).

Найдем число карточек с номерами, кратными и 5, и 6. Очевидно, что число номеров, кратных 30, — событие $C \cap D$:

$a_1 = 30$; $a_n = 180$; $d = 30$;



$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}, \text{ т.е. } n = \frac{180 - 30 + 30}{30} = 6.$$

Тогда $m(C \cup D) = 39 + 33 - 6 = 66$, где $B = C \cup D$, т.е. число карточек с номерами, кратными или 5, или 6, равно 66, значит $P(B) = \dfrac{66}{200} = \dfrac{33}{100} = \boxed{0{,}33}$.

8. В первенстве по волейболу участвовало 18 команд. В результате жеребьевки все команды распределили на две группы по девять команд. Обычно пять команд занимают лидирующие места. а) Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу? б) Какова вероятность попадания двух лидирующих команд в одну, а трех из лидирующих команд в другую группу?

а) Обозначим за A событие, при котором все пять лидирующих команд попадают в одну группу. Из 18 команд группы по девять команд могут быть образованы C_{18}^{9} способами, т.е. $n = C_{18}^{9}$.

Событию A благоприятствует столько событий, сколькими способами пять лидирующих команд могут образовывать девятки с четырьмя командами из числа остальных 13 команд.

Первая девятка команд, так же как и вторая девятка может быть образована C_{13}^4 способами, значит $m = 2C_{13}^4$.

Тогда $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{2C_{13}^4}{C_{18}^9} = \dfrac{2 \cdot 13!}{4! \cdot 9!} : \dfrac{18!}{9! \cdot 9!} =$

$= \dfrac{2 \cdot 13! \cdot 9! \cdot 9!}{4! \cdot 9! \cdot 18!} = \dfrac{2 \cdot 13! \cdot 9!}{4! \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13!} =$

$= \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = \boxed{\dfrac{1}{34}}$.

б) Рассмотрим число событий, благоприятствующих событию B.

1. C_5^2 — число способов выбрать две лидирующие команды из пяти. Оставшиеся команды в первую группу можно присоединить C_{13}^7 способами.

   Тогда число способов составить первую группу из девяти команд, в которую попадут две лидирующих команды, равно $C_5^2 \cdot C_{13}^7$.

2. C_5^3 — число способов выбрать три лидирующие команды из пяти. Оставшиеся команды во вторую группу можно присоединить C_{13}^6 способами.

   Тогда вторая группа может быть образована $C_5^3 \cdot C_{13}^6$ способами.

   Таким образом, число событий, благоприятствующих событию B, равно $m = C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6$.

   Значит $P(B) = \dfrac{C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6}{C_{18}^9}$. Внимательно выполнив вычисления, получим $P(B) = \boxed{\dfrac{12}{17}}$.

Очевидно, что присутствие лидирующих команд в обеих группах более вероятно, чем отсутствие их в одной из групп.

Статистическое (частотное) понятие вероятности события

При классическом (комбинаторном) подходе определение понятия вероятности сводится, как правило, к более простому понятию — равновозможности элементарных событий. Это связано с интуитивным представлением человеком достоверности равновозможности условий испытания. Но, увы, это далеко не всегда так.

Рассмотрим результаты стрельб двух солдат — Андреева и Константинова:

Число выстрелов	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Число попаданий Андреева	8	17	26	33	41	49	56	65	72	81
Число попаданий Константинова	3	5	8	12	15	19	22	25	28	31

Из таблицы следует, что как у Андреева, так и у Константинова отношения числа попаданий к числу произведенных выстрелов меняются. Очевидно, что эти отношения в какой-то степени зависят от числа испытаний (произведенных выстрелов) но, и это существенно, что для Андреева это отношение колеблется около числа $\frac{4}{5}$, а для Константинова — около числа $\frac{3}{10}$.

При анализе оказалось, что Андреев до этого постоянно тренировался, а Константинов до службы в армии никогда не стрелял. Необходимо отметить и их различные психофизические возможности. Естественно, весьма логично принять числа $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{10}$ за оценку вероятности попадания Андреевым и Константиновым в мишень.

Эти оценки вероятностей попадания тем более надежны, чем больше произведено опытов (стрельб) с целью установления их значений.

Пусть l — число испытаний, при проведении которых событие A могло произойти или не произойти. K — число испытаний, при проведении которых событие A произошло. Отношение $\frac{K}{l}$ называется статистической частотой события A и обозначается $P_l\{A\} = \frac{K}{l}$.

Индекс l ставится специально, для подчеркивания зависимости статистической частоты от числа испытаний. На практике в случаях, когда точно известна вероятность $P(A)$ в классическом понимании, при достаточно большом числе испытаний l $\boxed{P_l\{A\} \approx P(A)}$. Это приближенное равенство получило теоретическое обоснование в законе больших чисел, открытом Яковом Бернулли.

Задача 1. Известно, что из 1000 произвольно выбранных деталей примерно шесть деталей бракованы. Вопрос: сколько приблизительно бракованных деталей окажется среди 4500 деталей, отгруженных в мастерскую?

Пусть событие A: произвольно выбранная деталь — бракованная. Тогда $P(A) = 0{,}006$.

Допустим, что среди 4500 деталей x бракованных. Используя понятие статистической частоты, получим:

$P_{4500}\{A\} = \frac{x}{4500}$. Так как $P_{4500}\{A\} \approx P(A)$, то $\frac{x}{4500} \approx 0{,}006$.

Отсюда следует, что $x \approx 4500 \cdot 0{,}006$; $x \approx \boxed{27}$.

Задача 2. В областном отделе управления и регулирования природными ресурсами перед учеными поставили задачу определить степень зарыбленности озера Лесное площадью приблизительно 4 кв. км и средней глубиной в 50 метров.

Предположим в озере x рыб. После заброски сети в ней оказалось n рыб. Каждую из них ученые пометили и выпустили обратно в озеро. Через некоторое время (неделю или две) в том же месте, при такой же погоде забросили ту же самую сеть. При этом выловили m рыб, среди которых оказалось k меченых. Положим за A событие «пойманная рыба меченая», тогда, используя понятие статистической частоты события A, получим

$P_m\{A\} = \dfrac{k}{m}$. Полагая, что в озере x рыб и в первый раз выловлено n рыб, $P(A) = \dfrac{n}{x}$, где A — событие улова рыбы. Так как при достаточно большом числе испытаний $P_m\{A\} \approx P(A)$, то $\dfrac{k}{m} \approx \dfrac{n}{x}$, и $\boxed{x \approx \dfrac{nm}{k}}$.

Поделив количество рыб на кубатуру объема воды озера (или площади зеркала), получим среднюю зарыбленность на кубатуру (или площадь зеркала) озера Лесное.

Примечания. 1. Классическое (комбинаторное) определение возникло в самом начале развития теории вероятностей в связи с изучением шансов на выигрыш в азартных играх. Оно удобно в тех случаях, когда заведомо применимо положение о равновозможности исходов наблюдений (подбрасывание монет или игральных костей, извлечение шаров из урны или карт из колоды и т. п.). В то же время изложенный подход нельзя считать определением вероятности в строгом смысле, так как использованное в нем понятие равновозможности по существу означает равновероятность (вероятность, определенная через равновозможность). Кроме того, данный подход практически бесполезен, если неясно, какие исходы событий следует считать равновозможными.

2. В статистической теории вероятностей под случайным событием понимается не любое событие, в отношении которого нельзя сказать точно, что оно произошло или не произошло, а только те из них, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз, и для которых имеет смысл говорить об их вероятности. Смысл последнего требования состоит в том, что при большом числе наблюдений отношение числа появлений интересующего нас события к числу всех наблюдений остается почти постоянным. Именно такую устойчивость проявляет, например, качество промышленных изделий при условии, что технологический процесс хорошо отлажен и качество исходных материалов не изменяется в процессе производства.

Тренировочная работа 6

Вариант 1

1. Какова вероятность того, что наугад вырванный листок нового отрывного календаря соответствует 30 числу невисокосного года?

2. Из полного набора костяшек домино наугад выбирается одна. Какова вероятность, что эта костяшка имеет сумму очков, равную шести?

3. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число от 1 до 30 включительно является делителем числа 30?

4. Из 25 занумерованных экзаменационных билетов наугад вытаскивается один. Какова вероятность того, что номер вынутого билета есть число, кратное 3?

5. Какова вероятность наугад зачеркнуть целые числа от 5 до 95 включительно, кратные 6 или 7?

6. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие на одной плоскости, причем три из этих точек фиксированные. Какова вероятность того, что произвольно проведенная через три из данных точек плоскость пройдет именно через три фиксированные точки?

Тренировочная работа 6

Вариант 2

1. Какова вероятность того, что наугад вытащенная из колоды карта будет десяткой, если в колоде 36 карт?

2. Из полного набора костяшек домино наугад выбирается одна. Какова вероятность, что эта костяшка имеет сумму очков, меньшую пяти?

3. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число от 1 до 24 включительно является делителем числа 24?

4. Для подарков детям были закуплены три смешных зайчика, пять красивых кукол в различной модной одежде, четыре мишки разной расцветки и три солдатика, каждый в своей форме. Какова вероятность того, что победитель конкурса рисунков Маша К. наудачу вытащит из ящика с подарками мишку?

5. Какова вероятность выбрать мысленно наугад из натуральных чисел от 1 до 100 включительно число, кратное 4 или 5?

6. Через любые четыре вершины куба проводили плоскости. Какова вероятность того, что наугад проведенная плоскость является диагональным сечением?

Решение тренировочной работы 6

Вариант 1

1. Какова вероятность того, что наугад вырванный листок нового отрывного календаря соответствует 30 числу невисокосного года?

Так как в невисокосном году 365 дней, а месяцев, в которых дней больше или равно 30, только 11, то $\boxed{\frac{11}{365}}$ — вероятность того, что наугад вырванный листок календаря обозначает 30 число какого-то месяца.

2. Из полного набора костяшек домино наугад выбирается одна. Какова вероятность, что эта костяшка имеет сумму очков, равную шести?

Вначале выясним, сколько таких костяшек существует. Для этого выпишем их: $(0;6)$; $(1;5)$; $(2;4)$; $(3;3)$ — значит, их всего 4.

Тогда вероятность того, что наугад вытащенная костяшка имеет сумму очков, равную 6, равна $\frac{4}{28} = \boxed{\frac{1}{7}}$.

3. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число от 1 до 30 включительно является делителем числа 30?

Найдем все делители числа 30, для этого все их выпишем: $d = 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30$. Значит их 8, тогда $\frac{8}{30} \approx \boxed{0{,}27}$ — вероятность того, что выбранное наудачу целое число от 1 до 30 есть делитель числа 30.

4. Из 25 занумерованных экзаменационных билетов наугад вытаскивается один. Какова вероятность того, что номер вынутого билета есть число, кратное 3?

Выпишем в начале все номера билетов, кратные 3: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$ — их восемь. Значит $\frac{8}{25} = \boxed{0{,}32}$ — вероятность вытащить наудачу билет с номером, кратным 3.

Примечание. Если бы билетов было очень много, то для того, чтобы определить число билетов, кратных, скажем числу 3, можно было бы использовать арифметическую прогрессию: $a_1 = 3$; $d = 3$; $a_n = a_1 + (n-1)d$, тогда можно найти $n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$, зная, что a_n — кратное 3.

5. Какова вероятность наугад зачеркнуть целые числа от 5 до 95 включительно, кратные 6 или 7?

а) Определим число целых чисел, кратных 6.

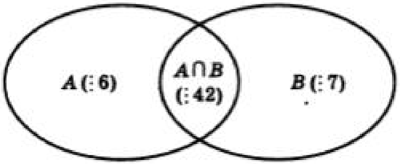
Пусть $a_1 = 6$; $a_n = 90$; $d = 6$;

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}, \text{ т.е. } n = \frac{90 - 6 + 6}{6} = 15.$$

б) Определим число целых чисел, кратных 7:

$a_1 = 7$; $a_n = 91$; $d = 7$;

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}, \text{ т.е. } n = \frac{91 - 7 + 7}{7} = 13.$$



в) Пусть A — числа, делящиеся на 6, B — числа, делящиеся на 7. Тогда $A \cap B$ — числа, делящиеся на 42.

Известно, что $\boxed{m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)}$ (см. книгу А. Х. Шахмейстера «Множества. Функции. Последовательности»), где $m(A)$ — количество чисел, кратных 6; $m(B)$ — количество чисел, кратных 7; $m(A \cap B)$ — количество чисел, кратных 42; $m(A \cup B)$ — количество чисел, кратных или 6, или 7.

г) Числа, кратные 42, необходимо исключить из целых чисел, кратных или 6, или 7, так как они дважды входят в множество таких чисел. Найдем их количество:

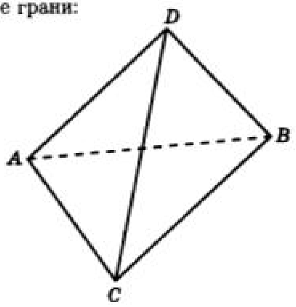
$$a_1 = 42; \quad a_n = 84; \quad d = 42; \quad n = \frac{84 - 42 + 42}{42} = 2.$$

д) Значит, $m(A \cup B) = 15 + 13 - 2 = 26$. Тогда вероятность зачеркнуть целые числа от 5 до 95 включительно, кратные 6 или 7, равна $\frac{26}{91} = \boxed{\frac{2}{7}}$ (91 — количество целых чисел от 5 до 95).

6. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие на одной плоскости, причем три из этих точек фиксированные. Какова вероятность того, что произвольно проведенная через три из данных точек плоскость пройдет именно через три фиксированные точки?

Так, через любые четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, можно провести только четыре различных плоскости, и нам подходит только одна, то вероятность прохождения плоскости именно через три фиксированные точки равна $\boxed{\frac{1}{4}}$.

Примечание. Любые четыре точки, не лежащие на одной прямой, жестко фиксируют треугольную пирамиду, у которой четыре грани:



Решение тренировочной работы 6

Вариант 2

1. Какова вероятность того, что наугад вытащенная из колоды карта будет десяткой, если в колоде 36 карт?

Так как в колоде всего четыре десятки разных мастей (бубны, червы, пики, трефы), то вероятность наудачу вытащить десятку равна $\frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$.

2. Из полного набора костяшек домино наугад выбирается одна. Какова вероятность, что эта костяшка имеет сумму очков, меньшую пяти?

Выпишем все такие костяшки:

$(0;0); (0;1); (0;2); (0;3); (0;4); (1;1); (1;2); (1;3); (2;2)$ — их всего 9, значит, вероятность вытащить такую костяшку с первого раза равна $\boxed{\frac{9}{28}}$.

3. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число от 1 до 24 включительно является делителем числа 24?

Выпишем все делители числа 24: $d = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ — таких чисел будет 8. Тогда вероятность наудачу выбрать целое число, являющееся делителем 24, равна $\frac{8}{24} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

4. Для подарков детям были закуплены три смешных зайчика, пять красивых кукол в различной модной одежде, четыре мишки разной расцветки и три солдатика, каждый в своей форме. Какова вероятность того, что победитель конкурса рисунков Маша К. наудачу вытащит из ящика с подарками мишку?

Так как подарков было $3+5+4+3 = 15$, а мишек только 4, то вероятность, что Маша вытащит мишку, равна $\boxed{\frac{4}{15}}$.

5. Какова вероятность выбрать мысленно наугад из натуральных чисел от 1 до 100 включительно число, кратное 4 или 5?

Пусть A — числа, кратные 4;

$m(A)$ — количество чисел, кратных 4.

B — числа, кратные 5;

$m(B)$ — количество чисел, кратных 5.

$C = A \cap B$ — числа, кратные 20;

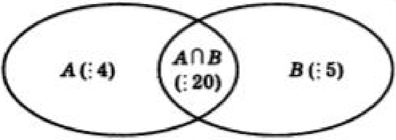
$m(A \cap B)$ — количество чисел, кратных 20.

а) Количество натуральных чисел, делящихся на 4:

$$a_1 = 4; \quad a_n = 100; \quad d = 4; \quad n = \frac{100 - 4 + 4}{4} = 25.$$

б) Количество натуральных чисел, делящихся на 5:

$$a_1 = 5; \quad a_n = 100; \quad d = 5; \quad n = \frac{100 - 5 + 5}{5} = 20.$$



в) Количество натуральных чисел, делящихся на 20:

$$a_1 = 20; \quad a_n = 100; \quad d = 20; \quad n = \frac{100 - 20 + 20}{20} = 5.$$

г) Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,

то $m(A \cup B) = 25 + 20 - 5 = 40$, где $m(A \cup B)$ — количество чисел, кратных или 4, или 5.

д) Таким образом, вероятность выбрать число, кратное или 4, или 5 из чисел от 1 до 100 включительно, равна $\frac{40}{100} = \boxed{0{,}4}$.

Более подробно см. решение варианта 1.

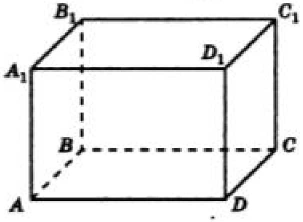
6. Через любые четыре вершины куба проводили плоскости. Какова вероятность того, что наугад проведенная плоскость является диагональным сечением?

Вначале выпишем все плоскости, которым принадлежат грани: $ABCD$; $A_1B_1C_1D_1$; AA_1B_1B; BB_1C_1C; CC_1D_1D; DD_1A_1A — их шесть.

Затем выпишем все плоскости, которым принадлежат параллельные диагонали граней: AA_1C_1C; BB_1D_1D; AB_1C_1D; BA_1D_1C; ABC_1D_1; DA_1B_1C — их также шесть.

Отметим, что все перечисленные плоскости проходят через четыре вершины куба. Легко проверить, что других нет.

Тогда вероятность наугад провести через четыре вершины куба диагональную равна $\frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$.



Произведение событий

Рассмотрим еще несколько важных характеристик событий.

1. Два события называются **независимыми**, если вероятность любого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

   Пример. В коробке три синих, два красных и четыре черных карандаша. Рассмотрим ряд событий и обозначим их.

   A — извлечение наугад черного карандаша.

   Вероятность $P(A) = \frac{4}{9}$.

   B — извлечение наугад красного карандаша.

   Вероятность $P(B) = \frac{2}{9}$.

   C — извлечение наугад синего карандаша.

   Вероятность $P(C) = \frac{1}{3}$.

   D — извлечение синего карандаша при повторном извлечении, если первый изъятый черный карандаш не положили в коробку обратно.

   Здесь события A, B и C являются независимыми, так как:

   а) события B, C не зависят от события A;

   б) события A, C не зависят от события B;

   в) события A, B не зависят от события C.

   Но события A и D — зависимые, так как вероятность события D равна $\frac{3}{8}$ с учетом наступления события A.

   Если же событие A не наступило бы, то $P(D) = P(C) = \frac{1}{3}$.

2. Несколько событий называются **попарно независимыми**, если каждые два из них независимые.

3. События A и B называются **зависимыми**, если вероятность наступления одного из них зависит от того, произошло или нет другое событие.

4. Если вероятность события B вычисляется в предположении, что событие A уже произошло, то такая вероятность называется **условной вероятностью** события B по отношению к событию A. Обозначается это $P_A(B)$.

Задача 1. В конверте лежало четыре открытки с видами Петербурга и три открытки с видами Москвы. Пусть событие A — извлечение открытки с видами Петербурга, событие B — извлечение открытки с видами Москвы. Рассмотрим вероятности, связанные с этой ситуацией.

1. Если открытка извлекается только в начале один раз, то $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{3}{7}$.

2. Если две открытки последовательно извлекаются из конверта без возврата в него, то:

   а) если сначала вытащили открытку с видом Петербурга, а затем с видом Москвы, то $P_A(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

   б) если сначала вытащили открытку с видом Москвы, а затем с видом Петербурга, тогда $P_B(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Для того чтобы можно было вводить далее новые понятия и определения, необходимо вспомнить основные понятия и определения теории множеств (см. книгу А. Х. Шахмейстера «Функции. Множества. Последовательности»)

Событие C называется <u>произведением</u> двух событий A и B, если в результате испытания C происходят оба события, A и B.

Это значит, что событие C состоит в том, что произошли событие A и событие B. Обозначается $C = A \cap B$ (пересечение множеств A и B).

Для того чтобы определить формулу подсчета вероятности произведения событий A и B, необходимо знать, зависимы ли события A и B друг относительно друга или нет.

Теорема умножения для <u>зависимых</u> событий

Если события A и B являются зависимыми, то вероятность их произведения $C = A \cap B$ равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Вернемся еще раз к задаче об извлечении открыток из конверта с видами Петербурга и Москвы. Напомним, что в конверте было четыре открытки с видами Петербурга и три открытки с видами Москвы.

Пусть событие A — извлечение первый раз видов Петербурга; событие B — извлечение первый раз видов Москвы.

Пусть событие C состоит в том, что вначале вытащили вид Петербурга, затем вид Москвы. Тогда событие C по определению умножения равно $C = A \cap B$.

Очевидно, что в данном случае событие A и B **зависимы**. Покажем это.

1. Если вначале извлекут вид Петербурга $P(A) = \frac{4}{7}$, то вероятность того, что затем извлекут вид Москвы $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (по классическому определению вероятности).

2. Если же вначале извлекут вид Москвы, то вероятность того, что второй раз извлекут вид Москвы, будет равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Зависимость более чем очевидна.

Значит нужно воспользоваться теоремой о формуле произведения зависимых событий, т.е. $P(C) = P(A) \cdot P_A(B)$. Таким образом, $P(C) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$.

Теорема умножения <u>независимых</u> событий

Если события являются независимыми, то вероятность события $C = A \cap B$ равна произведению вероятности событий A и B, т.е. $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Иногда независимость событий A и B определяется так:

Если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, то события A и B называются независимыми.

Задача 2. Игральный куб подбрасывают два раза. Какова вероятность, что в первом броске выпадет 2 очка, а во втором 6?

Пусть событие A — выпадение 2 очков, событие B — выпадение 6 очков, событие C — выпадение в первом броске 2 очков, а во втором 6 очков.

События A и B независимы, так как наступление одного события не зависит от наступления другого события. Тогда, так как $P(A) = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$, то $P(C) = P(A) \cdot P(B) = \boxed{\frac{1}{36}}$.

Примечания.

1. Обе теоремы справедливы для более чем двух событий. Например, если событие B зависит от наступления события A, событие C зависит от наступления события B, то событие D, заключающееся в совместном наступлении событий A, B и C, имеет вероятность:

   $P(D) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$.

   Если же события A, B и C независимы, то

   $P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = P(A \cap B \cap C)$.

2. Для зависимых событий можно доказать, что

   $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(B \cap A)$,

   т.е. $P(A \cap B) = P(B \cap A)$.

   Значит, действие умножения для них коммутативно (перестановочно).

Например, из задачи об открытках:

$P(A) \cdot P_A(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$; $P(B) \cdot P_B(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$;

$\boxed{P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)}$.

Тем более это верно для независимых событий:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A) = P(B \cap A)$ — в силу коммутативности обычного действия умножения для чисел и операций пересечения для множеств.

3. Отметим, что из попарной независимости любых двух из трех событий A, B и C вовсе **не следует** независимость всех трех событий A, B и C.

Задача 3. Рассмотрим треугольную пирамиду (тетраэдр), все грани которой правильные треугольники, изготовленную из однородного материала. На одной грани наклеена фотография мамы, на второй фотография папы, на третьей фотография сына, на четвертой их семейная фотография вместе.

Пусть событие A состоит в том, что подброшенный вверх данный тетраэдр упал на грань, на которой есть фото мамы, аналогично обозначим за событие B падение пирамиды на грань, где есть фото папы, и, наконец, за событие C — падение на грань, где есть фото сына.

Так как фото мамы, папы и сына есть на двух гранях, то

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Здесь необходимо отметить, что одновременное событие A и B уже влечет событие C. Значит $P_{A \cap B}(C) = 1$, тогда

$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P_{A \cap B}(C) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$,

так как $A \cap B$ — это событие появления на одной грани и фото мамы, и фото папы — но это возможно только на одной грани (семейное фото).

Далее, если бы события A, B и C одновременно были бы независимы, то $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

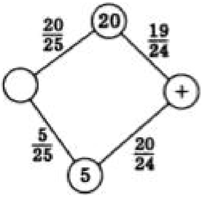
Увы, но это не так.

Задача 4. Школьник выучил к экзамену 20 из 25 билетов. В каком случае вероятность взять известный билет больше - когда школьник пришел на экзамен первым или вторым?

а) Если школьник идет на экзамен первым, то вероятность вытащить выученный билет равна $P_1 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

б) Допустим, школьник идет сдавать экзамен вторым, тогда первый ученик, вытащивший билет, мог взять как известный, так и не известный второму билет. Иллюстрируем эту возможность в виде вероятностного графа.

Граф становится <u>вероятностным</u>, если рядом с каждым его ребром записать вероятность события, соответствующую конечной вершине этого ребра.



Тогда вероятность того, что школьник возьмет выученный билет, если пойдет вторым, равна

$$P_2 = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} = \frac{20 \cdot (19 + 5)}{25 \cdot 24} = \frac{20}{25} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

Значит, вероятности равны и не зависят от того, каким идти на экзамен.

Упражнения

Ранее мы рассмотрели следующие характеристики событий:

1) достоверные;
2) недостоверные;
3) равновозможные;
4) неравновозможные;
5) совместные;
6) несовместные;
7) образующие полную группу событий;
8) элементарные;
9) составные;
10) противоположные;
11) независимые;
12) зависимые.

1. Вспомните и запишите определения этих событий.

2. Приведите примеры событий, являющихся:

а) достоверными, независимыми... (1–12);

б) обладающих одновременно несколькими характеристиками.

Практикум 10

1. На празднике в классе в честь Дня школы в коробке для подарков было 20 конфет «Мишка на севере» и 15 конфет «Аленка». Учительница наугад извлекает из коробки и раздает по одной конфете одноклассникам за ответы на вопросы об истории Петербурга. Какова вероятность:

   а) что первые два ученика, ответившие на вопросы, получат по конфете «Мишка на севере»?

   б) что первые три ученика получат конфеты в последовательности: «Аленка», «Мишка на севере», «Мишка на севере»?

2. В ювелирном магазине в хранилище есть сейф с тремя отделениями, в каждом из которых находится по 20 ювелирных изделий. В первом отделении семь одинаковых браслетов с изумрудами, во втором — шесть одинаковых кулонов с изумрудами, в третьем — три одинаковых колье с изумрудами. Из каждого отделения перед открытием магазина хозяин наугад вынимает по одному украшению для витрины. Какова вероятность того, что в витрине мы увидим полную изумрудную коллекцию?

3. Среди 50 студентов первого курса спортивного техникума 35 имеют рост меньше 175 см, и 15 — рост, больший или равный 175 см. Найдите вероятность того, что среди трех случайно встреченных студентов этого техникума:

   а) двое окажутся ниже 175 см, а третий не ниже;

   б) двое окажутся не ниже 175 см, а третий не выше.

4. Вероятность того, что Андрей и Ваня оба готовятся к урокам математики, равна 0,24. Однако известно, что Андрей готовится к урокам математики с вероятностью 0,72. С какой вероятностью Ваня готовится к урокам математики?

5. Тренер предложил своему молодому ученику Андрею избрать одну из двух схем из трех партий в шашки с партнерами. Согласно первой схеме Андрей сначала играет с Петром, затем с Иваном и в конце снова с Петром — (А-П); (А-И); (А-П). Согласно второй, наоборот, Андрей сначала играет с Иваном, потом с Петром, а затем снова с Иваном — (А-И); (А-П); (А-И). Если Андрей выигрывает две партии подряд, то он получает приз. Какой из двух схем игры с партнерами выгоднее придерживаться, если более опытный игрок Петр выигрывает у Андрея семь партий из 10, а Иван выигрывает у Андрея шесть партий из 10?

6. Два школьника определяют, кто будет убирать класс, с помощью игры «считалка». Первый (с кого начинается счет) не убирает класс, если число выброшенных пальцев на одной руке у одного и у другого в сумме будет нечетной, второй — если сумма будет четной (не выбрасывать пальцы нельзя). С какой вероятностью каждый школьник будет убирать класс?

Решение практикума 10

1. На празднике в классе в честь Дня школы в коробке для подарков было 20 конфет «Мишка на севере» и 15 конфет «Аленка». Учительница наугад извлекает из коробки и раздает по одной конфете одноклассникам за ответы на вопросы об истории Петербурга.

   а) Какова вероятность, что первые два ученика, ответившие на вопросы, получат по конфете «Мишка на севере»?

   Вероятность того, что первый ученик получит конфету «Мишка на севере», равна $P(A) = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$.

   Пусть событие B — второй учительница вытащит конфету «Мишка на севере». Так как конфета «Мишка на севере» уже была вытащена, то, используя понятие условной вероятности, получим $P_A(B) = \dfrac{19}{34}$.

   Отметим также, что события A и B зависимы. Значит событие C — подряд два раза вытащили конфету «Мишка на севере», где $C = A \cap B$, — вычисляется по формуле произведения зависимых событий:

   $P(C) = P(A) \cdot P_A(B)$; $\quad (P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B))$.

   Следовательно, $P(C) = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{19}{34} = \dfrac{38}{7 \cdot 17} = \boxed{\dfrac{38}{119}}$.

   б) Какова вероятность, что первые три ученика получат конфеты в последовательности: «Аленка», «Мишка на севере», «Мишка на севере»?

   Пусть событие A — первая конфета «Аленка», событие B — вторая «Мишка на севере», событие C — первая «Аленка», а вторая «Мишка на севере», где $C = A \cap B$.

   Тогда $P(A) = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$; $\quad P_A(B) = \dfrac{20}{34} = \dfrac{10}{17}$.

Так как A и B — зависимые события, то

$P(C) = P(A) \cdot P_A(B)$; $\quad P(C) = \frac{3}{7} \cdot \frac{10}{17} = \frac{30}{119}$.

Пусть событие D — третья конфета «Мишка на севере». Так как события C и D зависимы, и всего конфет осталось 33, из них 19 «Мишка на севере» и 14 «Аленка», то $P_C(D) = \frac{19}{33}$.

Значит, наступление события $E = (A \cap B) \cap D = C \cap D$ имеет вероятность $P(E) = P(C) \cdot P_C(D)$,

т. е. $P(E) = \frac{30}{119} \cdot \frac{19}{33} = \frac{190}{119 \cdot 11} = \boxed{\frac{190}{1309}}$.

2. В ювелирном магазине в хранилище есть сейф с тремя отделениями, в каждом из которых находится по 20 ювелирных изделий. В первом отделении семь одинаковых браслетов с изумрудами, во втором — шесть одинаковых кулонов с изумрудами, в третьем — три одинаковых колье с изумрудами. Из каждого отделения перед открытием магазина хозяин наугад вынимает по одному украшению для витрины. Какова вероятность того, что в витрине мы увидим полную изумрудную коллекцию?

Так как изъятие из каждого отделения драгоценностей с изумрудами — независимые события, то применима теорема о произведении для независимых событий. Пусть событие A — извлечение из 1-го отделения. $P(A) = \frac{7}{20}$.

Событие B — извлечение из 2-го отделения. $P(B) = \frac{6}{20}$.

Событие C — извлечение из 3-го отделения. $P(C) = \frac{3}{20}$.

Событие D — извлечение полной коллекции изумрудов.

Тогда $D = A \cap B \cap C$ и $P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$,

т. е. $P(D) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{3}{20} = \frac{7}{20} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{20} = \boxed{\frac{63}{4000}}$.

3. Среди 50 студентов первого курса спортивного техникума 35 имеют рост меньше 175 см, и 15 — рост, больший или равный 175 см. Найдите вероятность того, что среди трех случайно встреченных студентов этого техникума:

а) двое окажутся ниже 175 см, а третий не ниже;

б) двое окажутся не ниже 175 см, а третий не выше.

а) События зависимы между собой, так как при встрече любого из студентов меняется как общая численность студентов, так и численность студентов с определенным ростом. Здесь, поэтому, применяется теорема умножения для зависимых событий.

1. Пусть событие A — первая встреча студента ниже 175 см. $P(A) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$.

   Пусть событие B — вторая встреча студента ниже 175 см. $P_A(B) = \frac{34}{49}$.

2. Пусть событие C — первая и вторая встреча студентов ниже 175 см.

   $C = A \cap B; \quad P(C) = P(A) \cdot P_B(A);$

   $P(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{34}{49} = \frac{17}{35}$.

3. Пусть событие D — третья встреча студента не ниже 175 см. $P_C(D) = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$.

4. Пусть E — встреча двух студентов не ниже 175 и третьего не выше 175 см. $E = C \cap D$.

   $P(E) = P(C) \cdot P_C(D); \quad P(E) = \frac{17}{35} \cdot \frac{5}{16} = \boxed{\frac{17}{112}}$.

б) Рассуждая аналогично, получим

$$P(E) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} \cdot \frac{34}{48} = \boxed{\frac{17}{280}}.$$

4. Вероятность того, что Андрей и Ваня оба готовятся к урокам математики, равна 0,24. Однако известно, что Андрей готовится к урокам математики с вероятностью 0,72. С какой вероятностью Ваня готовится к урокам математики?

Пусть событие A — Андрей готовится к урокам математики. $P(A) = 0{,}72$.

Пусть событие B — Ваня готовится к урокам математики. $P(B) = ?$

Пусть событие C — оба готовятся к урокам математики.

$C = A \cap B$; $\quad P(C) = 0{,}24$.

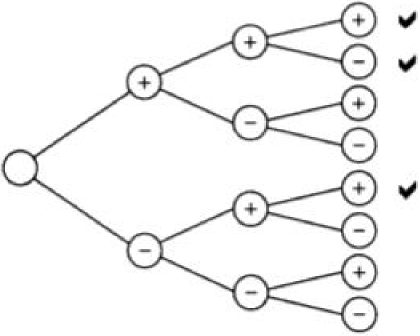
Так как события A и B не зависимы друг от друга, то

$$P(C) = P(A) \cdot P(B); \quad P(B) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)};$$

т. е. $P(B) = \dfrac{0{,}24}{0{,}72} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

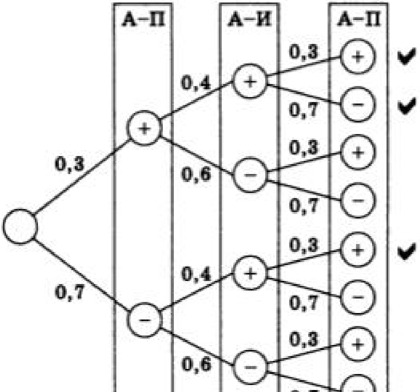
5. Тренер предложил своему молодому ученику Андрею избрать одну из двух схем из трех партий в шашки с партнерами. Согласно первой схеме Андрей сначала играет с Петром, затем с Иваном и в конце снова с Петром — (А-П); (А-И); (А-П). Согласно второй, наоборот, Андрей сначала играет с Иваном, потом с Петром, а затем снова с Иваном — (А-И); (А-П); (А-И). Если Андрей выигрывает две партии подряд, то он получает приз. Какой из двух схем игры с партнерами выгоднее придерживаться, если более опытный игрок Петр выигрывает у Андрея семь партий из 10, а Иван выигрывает у Андрея шесть партий из 10?

Построим дерево, иллюстрирующее исходы партий, и отметим ветви, отображающие исходы, при которых Андрей получит приз:



Преобразуем дерево исходов в вероятностный граф для различных схем игры Андрея с партнерами. (Граф становится *вероятностным*, если рядом с каждым его ребром записать вероятность события, соответствующую конечной вершине этого ребра.)

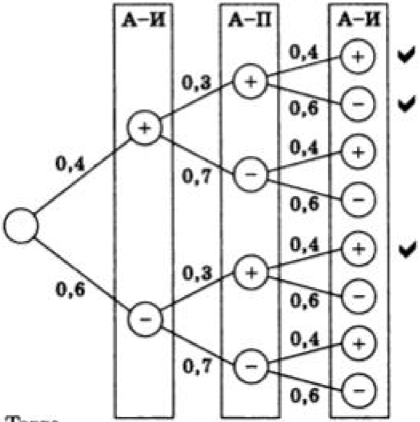
а) (А-П); (А-И); (А-П).



Тогда

$$P_1 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = \boxed{0{,}204}.$$

б) (А-И); (А-П); (А-И).



Тогда

$$P_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = \boxed{0{,}192}.$$

Следовательно, Андрею выгоднее придерживаться первой схемы игры, так как шансы получить приз в данной схеме выше.

Примечание. На первый взгляд, ответ кажется странным, так как в этой схеме Андрей чаще встречается с более сильным партнером Петром, но если обратить внимание на решающую роль второй партии в данной схеме игры, то интуитивное противоречие снимается.

6. Два школьника определяют, кто будет убирать класс, с помощью игры «считалка». Первый (с кого начинается счет) не убирает класс, если число выброшенных пальцев на одной руке у одного и у другого в сумме будет нечетной, второй — если сумма будет четной (не выбрасывать пальцы нельзя). С какой вероятностью каждый школьник будет убирать класс?

Рассмотрим таблицу возможностей набрать четную или нечетную сумму очков.

Четные суммы	
Способы	Количество
$1+1=2$	1
$1+3=2+2=3+1=4$	3
$1+5=2+4=3+3=4+2=5+1=6$	5
$3+5=4+4=5+3=8$	3
$5+5=10$	1
Нечетные суммы	
Способы	Количество
$1+2=2+1=3$	2
$1+4=2+3=3+2=4+1=5$	4
$2+5=3+4=4+3=5+2=7$	4
$4+5=5+4=9$	2

Для первого игрока получилось 12 способов благоприятных исходов (случай, когда игрок не дежурит). Для второго игрока получилось 13 благоприятных исходов. Следовательно, при игре вдвоем выгоднее стоять вторым (чтобы не дежурить).

Теоремы сложения

<u>Суммой</u> двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B.

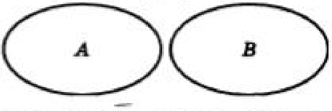
Задача 1. На книжной полке находится восемь томов собрания книг С. Я. Маршака. Событие A — снятие для чтения 2-го тома с полки. Событие B — снятие для чтения 5-го тома с полки. Событие C — снятие с полки или 2-го тома, или 5-го тома С. Я. Маршака. Символическая запись $C = A \cup B$.

Примечание. По сути, здесь опять используются идеи теории множеств. В данном случае это операция объединения множеств A и B: $C = A \cup B$ (более подобно см. А. Х. Шахмейстер «Множества. Функции. Последовательности»).

Для того, чтобы содержательно двигаться дальше, вспомним определения совместимых и несовместимых событий.

Напоминание. Два события называются несовместимыми, если появление одного события в данном испытании (опыте) исключает появление другого. Два события называются совместимыми, если появление одного события в данном испытании не исключает появления (или непоявления) другого.

Пример графической иллюстрации двух **несовместных** событий:



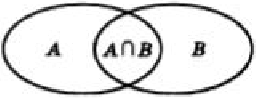
Теорема сложения вероятностей для двух несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:
$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

Примечание. Событие A и противоположное ему событие $\overline{A}$ несовместны, поэтому $P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$. С другой стороны, противоположные события образуют полную группу событий, а значит вероятность $P\left(A \cup \overline{A}\right) = 1$, тогда

$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$, или $\boxed{P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)}$.

Пример графической иллюстрации двух **совместимых** событий:



Теорема сложения вероятностей для двух совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(См. задачу 2 на стр. 39 книги А. Х. Шахмейстера «Множества. Функции. Последовательности».)

Задача 2. На столе в корзинке находятся пять яблок, шесть апельсинов и восемь бананов. Какова вероятность того, что наугад взятый из корзины фрукт — яблоко или апельсин?

Очевидно, что пусть событие A — извлечение из корзины яблока, B — извлечение из корзины апельсина, C — извлечение из корзины или яблока, или апельсина.

Так как очевидно, что эти события несовместные, то

$P(C) = P(A) + P(B) \quad (C = A \cup B)$;

$P(A) = \frac{5}{19}$; $P(B) = \frac{6}{19}$, значит $P(C) = \frac{5}{19} + \frac{6}{19} = \boxed{\frac{11}{19}}$.

Примечание. 1. Событием, противоположным событию C, является событие $\overline{C}$ — извлечение банана. $P\left(\overline{C}\right) = \frac{8}{19}$, тогда вероятность события C будет равна

$P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - \frac{8}{19} = \frac{11}{19}$. Это еще один способ решения.

2. Отметим также возможность решить данную задачу используя классическое определение вероятности,

т.е. $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{5+6}{19} = \frac{11}{19}$.

Задача 3. В школе 1400 учеников, из них 1200 учеников умеют кататься на лыжах. 952 ученика умеют кататься на коньках. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 учеников. Какова вероятность, что ученик умеет кататься и на лыжах, и на коньках?

Обозначим множество E — все ученики данной школы.

Пусть событие A — умение учеников кататься на лыжах.

Событие B — умение учеников кататься на коньках.

Событие $A \cap B$ — умение учеников кататься и на лыжах, и на коньках.

Событие $A \cup B$ — умение учеников кататься или на лыжах, или на коньках.

$m(E) = 1400$ — число школьников в данной школе.

Так как 60 учеников не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках, то число учеников, которые умеют кататься или на лыжах, или на коньках, равно $1400 - 60 = 1340$.

Тогда $P(A) = \dfrac{1200}{1400} = \dfrac{6}{7}$; $\quad P(B) = \dfrac{952}{1400} = \dfrac{119}{175}$;

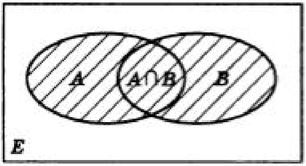
$P(A \cup B) = \dfrac{1340}{1400} = \dfrac{67}{70}$, но $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

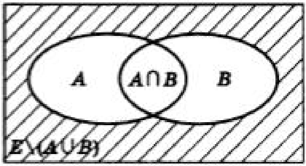
тогда $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

Так как события A и B — зависимые события, то

$P(A \cap B) = \dfrac{6}{7} + \dfrac{119}{175} - \dfrac{67}{70} = \boxed{\dfrac{203}{350}}$.

Графически иллюстрируем условие задачи:





$E \setminus (A \cup B)$ — ученики, которые не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках.

$m(E) = 1400$ — число учеников школы.
$m(A) = 1200$ — число учеников, умеющих кататься на лыжах.
$m(B) = 952$ — число учеников, умеющих кататься на коньках.
$E \setminus (A \cup B) = 60$ — число учеников, не умеющих кататься ни на лыжах, ни на коньках.
$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 1200 + 952 - 1340 = 812$ — число учеников, умеющих кататься и на лыжах, и на коньках.

Примечание. Примерная схема применения теорем сложения и умножения вероятностей для решения задач:

Практикум 11

1. Наугад выбираются жетоны с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность извлечь два жетона, сумма чисел на которых: а) нечетна; б) четна?

2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найдите вероятность того, что: а) вынуто два валета; б) вынуто две карты пиковой масти; в) вынуты валет и дама.

3. Постоянно проводя опыты и наблюдения в садовом питомнике, И. П. Мичурин составил таблицу вероятности опадения спелых яблок в зависимости от даты:

Время опадения	До 20 авг.	21–25 авг.	26–31 авг.	1–5 сент.	После 5 сент.
Вероятность	0,14	0,21	0,35	0,20	0,10

Какова вероятность падения яблок: а) до 5 сентября; б) от 21 августа до 5 сентября; в) после 25 августа?

4. В пруду находится 2000 лососевых рыб, из которых половина с икрой. Рыбаку была выдана лицензия на вылов восьми рыб лосося. Какова вероятность того, что из восьми пойманных рыб хотя бы одна будет с икрой?

5. Два приятеля решили в отпуске пойти на охоту на четыре дня. Но охота на тетеревов возможна, только если нет дождя. И тогда вдвоем они сбивают за день 15 тетеревов. Вероятность того, что будет хорошая погода без дождя, 0,25. Какова вероятность того, что в результате охоты они за отпуск собьют 15 тетеревов.

6. В конном турнире на первенстве области участвуют три жеребца — Красавец, Буйный и Звезда — от конноспортивного клуба «Вымпел». Вероятность стать призером соревнования у каждого соответственно равна 0,42; 0,48 и 0,7. Какова вероятность того, что в турнире будут два призера от клуба «Вымпел»?

7. Так как в результате бомбежки связь была нарушена, для передачи срочного донесения с поля боя командир батальона послал двух связистов в штаб бригады разными дорогами. В силу различного боевого опыта и условий продвижения вероятность доставки донесения составляла 0,65 и 0,75. Какова вероятность доставки донесения в штаб бригады?

Решение практикума 11

1. Наугад выбираются жетоны с цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Какова вероятность извлечь два жетона, сумма чисел на которых: а) нечетна; б) четна?

а) Всего наборов по два жетона $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$, т. е. полная группа событий состоит из 10 событий.

Благоприятных событий всего 6. Это наборы жетонов: $(1;2)$; $(1;4)$; $(3;2)$; $(3;4)$; $(5;2)$; $(5;4)$, сумма чисел которых нечетна.

По классическому определению вероятности

$P = \frac{6}{10} = \boxed{0{,}6}$.

б) Число наборов событий то же — $C_5^2 = 10$.

Благоприятных событий всего 4. Это наборы: $(1;3)$; $(1;5)$; $(3;5)$; $(2;4)$.

Значит, вероятность равна $P = \frac{4}{10} = \boxed{0{,}4}$.

2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найдите вероятность того, что: а) вынуто два валета; б) вынуто две карты пиковой масти; в) вынуты валет и дама.

а) Какова вероятность вынуть два валета?

1. Так как всего таких случаев 4, по одному на масть, то вероятность события A (изъятие с первого раза валета) будет равна $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
2. Пусть событие B — изъятие второй раз также валета. Так как события A и B зависимые, то $P(B) = P_A(B) = \frac{3}{31}$.

3. Тогда $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} = \boxed{\frac{3}{248}}$,

   где $A \cap B$ — произведение событий A и B.

   Можно обозначить событие $C = A \cap B$ (оба раза вытащили валета из колоды карт),

   т.е. $P(C) = P(A) \cdot P_A(B)$.

б) Какова вероятность вынуть две карты пиковой масти?

1. Так как одной масти в колоде из 32 карт 8 карт, то вероятность первой вытащить карту данной масти (событие A) $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.
2. Вероятность второй вытащить карту той же масти (событие B) $P_A(B) = \frac{7}{31}$ (события A и B зависимые, поэтому вычисляем условную вероятность $P_A(B)$).
3. Пусть C — такое событие, что первая и вторая карты одной масти.

   Тогда $P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$;

   $P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{31} = \boxed{\frac{7}{124}}$.

в) Какова вероятность вынуть валета и даму?

1. Пусть событие A — изъятие валета; $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
2. Пусть событие B — изъятие второй карты — дамы; $P_A(B) = \frac{4}{31}$.
3. Пусть событие C — извлечение вначале валета, а затем дамы; $P(C) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{31} = \frac{1}{62}$.

3. Постоянно проводя опыты и наблюдения в садовом питомнике, И. П. Мичурин составил таблицу вероятности опадения спелых яблок в зависимости от даты:

Время опадения	До 20 авг.	21–25 авг.	26–31 авг.	1–5 сент.	После 5 сент.
Вероятность	0,14	0,21	0,35	0,20	0,10

Какова вероятность падения яблок: а) до 5 сентября; б) от 21 августа до 5 сентября; в) после 25 августа?

Так как наблюдения в разные периоды времени независимые события, то вероятности за разные периоды наблюдения складываются:

а) до 5 сентября: $P = 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}35 + 0{,}20 = \boxed{0{,}90}$;

б) от 21 августа до 5 сентября:

$P = 0{,}21 + 0{,}35 + 0{,}20 = \boxed{0{,}76}$;

в) после 25 августа: $P = 0{,}35 + 0{,}20 + 0{,}10 = \boxed{0{,}65}$.

4. В пруду находится 2000 лососевых рыб, из которых половина с икрой. Рыбаку была выдана лицензия на вылов восьми рыб лосося. Какова вероятность того, что из восьми пойманных рыб хотя бы одна будет с икрой?

Пусть A — событие, заключающееся в поимке хотя бы одной рыбы с икрой.

$\overline{A}$ — событие, заключающееся в том, что ни единой рыбы с икрой не поймано.

Тогда $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$ (A и $\overline{A}$ противоположны).

Всего возможно вариантов при поимке восьми рыб из 2000 рыб: $C_{2000}^{8} = \dfrac{2000!}{8!(2000-8)!}$.

Далее определим число сочетаний по восемь рыб из 1000 рыб без икры, т. е. $C_{1000}^{8} = \frac{1000!}{8!(1000-8)!}$. Тогда

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{1000}^{8}}{C_{2000}^{8}} = \frac{1000!}{8!(1000-8)!} \cdot \frac{8!(2000-8)!}{2000!} = \frac{1000! \cdot 1992!}{992! \cdot 2000!},$$

значит $P(A) = 1 - \frac{1000! \cdot 1992!}{992! \cdot 2000!} \approx 1 - 0{,}062 = 0{,}938.$

Имеет смысл задачу обобщить. Пусть в пруду n рыб лососевой породы, причем m из них с икрой ($m < n$). Выловлено было k рыб ($k < n$). Найдите вероятность того, что хотя бы одна из k выловленных рыб будет с икрой.

Тогда C_n^k — число всех возможных результатов ловли рыб, а C_{n-k}^k — число всех случаев ловли рыб без икры.

Значит $P(\overline{A}) = \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k} = \frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$, и так как $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, получим $P(A) = 1 - \frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$ — формула, имеющая значение при выдаче квот на вылов рыб (в грубом приближении).

5. Два приятеля в отпуске решили пойти на охоту на четыре дня. Но охота на тетеревов возможна, только если нет дождя. И тогда вдвоем они сбивают за день 15 тетеревов. Вероятность того, что будет хорошая погода без дождя, 0,25. Какова вероятность того, что в результате охоты они за отпуск собьют 15 тетеревов.

а) Пусть C — событие «собьют 15 тетеревов» (т. е. будет один ясный день).

Пусть B_1 — ясная погода в 1-й день; B_2 — ясная погода в 2-й день; B_3 — ясная погода в 3-й день; B_4 — ясная погода в 4-й день.

б) Очевидно, что охота зависит от того, будет ли ясная погода и сколько дней. Так как события B_1, B_2, B_3, B_4 независимые, то $P(C)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)$, но события B_1, B_2, B_3, B_4 составные и зависят от события «в данный день будет ясная погода».

в) Пусть A_i — ясная погода в i-й день ($i = 1,2,3,4$). Тогда $B_1 = A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$ (A_1, A_2, A_3, A_4 — независимые события). Это означает:

A_1 (ясная погода) $P(A_1) = \frac{1}{4}$;

$\overline{A_2}$ (дождь) $P\left(\overline{A_2}\right) = \frac{3}{4}$;

$\overline{A_3}$ (дождь) $P\left(\overline{A_3}\right) = \frac{3}{4}$;

$\overline{A_4}$ (дождь) $P\left(\overline{A_4}\right) = \frac{3}{4}$.

Таким образом, $P(B_1)=P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right)$ — только один день без дождя, первый.

В силу независимости событий A_i

$$P(B_1)=P(A_1)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)\cdot P\left(\overline{A_4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{27}{256}.$$

Аналогично для $P(B_2) = P\left(A_2 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right)$

(только один день без дождя — второй): $P(B_2) = \frac{27}{256}$.

Далее $P(B_3) = P\left(A_3 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_4}\right) = \frac{27}{256}$

(только один день без дождя — третий);

$P(B_4) = P\left(A_4 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) = \frac{27}{256}$

(только один день без дождя — четвертый).

Значит $P(C) = \frac{27}{256} + \frac{27}{256} + \frac{27}{256} + \frac{27}{256} = \boxed{\frac{27}{64}}$ — вероятность того, что приятели за отпуск собьют 15 тетеревов.

6. В конном турнире на первенстве области участвуют три жеребца — Красавец, Буйный и Звезда — от конноспортивного клуба «Вымпел». Вероятность стать призером соревнования у каждого соответственно равна 0,42; 0,48 и 0,7. Какова вероятность того, что в турнире будут два призера от клуба «Вымпел»?

Искомое событие A — победа двух жеребцов в турнире.

Составные события: A_1 — победил Красавец, A_2 — победил Буйный, A_3 — победил Звезда.

Из них образованы несовместные события:

B_1 — победили Красавец и Буйный;

$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$;

B_2 — победили Буйный и Звезда;

$B_2 = A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_1}$;

B_3 — победили Красавец и Звезда;

$B_3 = A_1 \cap A_3 \cap \overline{A_2}$.

Тогда $P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$, где:

$P(B_1) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P\left(\overline{A_3}\right)$,

т. е. $P(B_1) = 0{,}42 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}3 = 0{,}06048$;

$P(B_2) = P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P\left(\overline{A_1}\right)$,

т. е. $P(B_2) = 0{,}48 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}58 = 0{,}19488$;

$P(B_3) = P(A_1) \cdot P(A_3) \cdot P\left(\overline{A_2}\right)$,

т. е. $P(B_3) = 0{,}42 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}52 = 0{,}15288$.

$P(A) = 0{,}02048 + 0{,}18928 + 0{,}15288 = 0{,}40824 \approx \boxed{0{,}41}$.

7. Так как в результате бомбежки связь была нарушена, для передачи срочного донесения с поля боя командир батальона послал двух связистов в штаб бригады разными дорогами. В силу различного боевого опыта и условий продвижения вероятность доставки донесения составляла 0,65 и 0,75. Какова вероятность доставки донесения в штаб бригады?

Событие A — доставка донесения первым связистом; B — доставка донесения вторым связистом.

События A и B независимые; $P(A)=0{,}65$; $P(B)=0{,}75$.

Пусть C — событие «хотя бы один из связистов доставит донесение», т. е. $C=A\cup B$.

Так как $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

и $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, получим

$P(C)=0{,}65+0{,}75-0{,}65\cdot 0{,}75=1{,}4-0{,}4875=0{,}9125\approx\boxed{0{,}91}$.

Формула полной вероятности

Задача. В хранилище банка «Надежный» есть три особых разных отдела, в каждом из которых, соответственно, 30, 25 и 20 ячеек с драгоценностями. Количество ячеек с бриллиантами в каждом отделе равно, соответственно, 8, 6 и 9. В банк «Надежный» проникает вор-взломщик. Найдите вероятность того, что наудачу взломанная ячейка будет с бриллиантами.

Очевидно, что заранее неизвестно, какой из трех отделов станет «жертвой» взломщика. Так как не известно, какой отдел станет «жертвой», поэтому возможно развитие трех сценариев. Пусть событие B_1 — кража из 1-го отдела; событие B_2 — кража из 2-го отдела; событие B_3 — кража из 3-го отдела.

а) Очевидно, что все эти события несовместные и равновозможные и образуют полную группу событий.

Тогда $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

б) Пусть произойдет событие B_1, тогда вероятность того, что взломщик вскроет ячейку с бриллиантами, равна

$P_1(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)$, где событие A — вскрытие ячейки с бриллиантами.

$P_{B_1}(A) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$, т.е. $P_1(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{45}$.

в) Пусть произойдет событие B_2, тогда вероятность того, что взломщик вскроет ячейку с бриллиантами, равна

$P_2(A) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)$, где $P_{B_2}(A) = \frac{6}{25}$,

т.е. $P_2(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25} = \frac{2}{25}$.

г) Пусть произойдет событие B_3, тогда вероятность того, что взломщик вскроет ячейку с бриллиантами, равна

$P_3(A) = P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)$, где $P_{B_3}(A) = \frac{9}{20}$,

т.е. $P_3(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$.

д) Обобщая все три случая, получим вероятность

$$P(A) = P_1(A) + P_2(A) + P_3(A) =$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A).$$

Тогда $P(A) = \frac{4}{45} + \frac{2}{25} + \frac{3}{20} = \boxed{\frac{287}{900}}$.

Подводя итоги рассуждения, связанного с решением задачи, приходим к **формуле полной вероятности**:

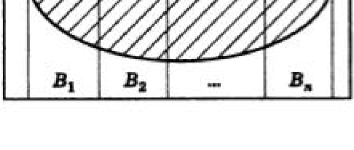
$$\boxed{P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)},$$

где $P(A)$ — вероятность события A; $P(B_k)$ — вероятность события B_k; $P_{B_k}(A)$ — условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что реализовано (произошло) событие B_k.

События B_k $(k = 1, \ldots, n)$ несовместны и образуют полную группу.

Вероятность события A, которое может наступать лишь при появлении одного из событий $B_1, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий, равна сумме произведений каждого из событий на соответствующую условную вероятность события A.

Графическая иллюстрация этого:



Практикум 12

1. Имеются две упаковки с гелевыми авторучками синего и черного цвета, по 50 штук в каждой. В первой упаковке пять авторучек синего цвета, во второй упаковке десять ручек синего цвета. Какова вероятность, что из наудачу взятой коробки будет наудачу извлечена авторучка синего цвета?

2. В письменном столе четыре ящика. В первом ящике одна папка красного цвета и одна синего. Во втором две красного и три синего цвета. В третьем три красного цвета и четыре синего цвета. В четвертом четыре красного и шесть синего цвета. Наудачу открывают ящик и достают из него папку. Какова вероятность, что это папка красного цвета?

3. При движении по федеральной трассе водитель «Ауди» Андрей грубо нарушил скоростной режим проезда. Это могли заметить едущие сзади общественные автоинспекторы Владимир на «Жигулях» с вероятностью 0,8 и Константин на «Волге» с вероятностью 0,4. При этом Владимир сообщит об этом на ближайший пост ГАИ с вероятностью 0,5, а Константин с вероятностью 0,9. Какова вероятность, что об этом нарушении узнают на посту ГАИ?

4. В Гостином дворе имеются три бутика, торгующие меховыми изделиями. В первом продаются одна норковая жилетка и одна соболья. Во втором — две норковые и три собольи. В третьем бутике — две норковые и четыре собольи. Вероятность выбора k-го бутика определена формулой $P_k = \dfrac{k}{6}$. Какова вероятность, что случайно купленная жилетка — норковая?

Решение практикума 12

1. Имеются две упаковки с гелевыми авторучками синего и черного цвета, по 50 штук в каждой. В первой упаковке пять авторучек синего цвета, во второй упаковке десять ручек синего цвета. Какова вероятность, что из наудачу взятой коробки будет наудачу извлечена авторучка синего цвета?

   Пусть событие A — извлечение синей авторучки.

   Пусть событие B_1 — извлечение синей авторучки из первой упаковки, событие B_2 — извлечение синей авторучки из второй упаковки.

   События B_1 и B_2 образуют полную группу равновозможных событий: $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

   Для решения задачи применим формулу полной вероятности. Так как вероятности событий нам известны, то найдем условные вероятности события A в предположении любой из двух гипотез.

   $P_{B_1}(A) = \frac{5}{50} = 0{,}1; \quad P_{B_2}(A) = \frac{10}{50} = 0{,}2.$

   Используя формулу полной вероятности (или формулу полной группы событий), получим:

   $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(B_2),$

   т. е. $P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 = \boxed{0{,}15}$.

2. В письменном столе четыре ящика. В первом ящике одна папка красного цвета и одна синего. Во втором две красного и три синего цвета. В третьем три красного цвета и четыре синего цвета. В четвертом четыре красного и шесть синего цвета. Наудачу открывают ящик и достают из него папку. Какова вероятность, что это папка красного цвета?

   Пусть событие A — извлечение папки красного цвета;

   B_1 — событие извлечения папки из первого ящика;

   B_2 — событие извлечения папки из второго ящика;

B_3 — событие извлечения папки из третьего ящика;

B_4 — событие извлечения папки из четвертого ящика.

B_1, B_2, B_3, B_4 — равновозможные события.

Очевидно, что $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = \frac{1}{4}$,

причем $P_{B_1}(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\quad P_{B_2}(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$;

$P_{B_3}(A) = \frac{3}{7}$; $\quad P_{B_4}(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Тогда $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) +$

$+ P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + P(B_4) \cdot P_{B_4}(A)$,

т. е. $P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{419}{840} \approx \boxed{0{,}499}$.

3. При движении по федеральной трассе водитель «Ауди» Андрей грубо нарушил скоростной режим проезда. Это могли заметить едущие сзади общественные автоинспекторы Владимир на «Жигулях» с вероятностью 0,8 и Константин на «Волге» с вероятностью 0,4. При этом Владимир сообщит об этом на ближайший пост ГАИ с вероятностью 0,5, а Константин с вероятностью 0,9. Какова вероятность, что об этом нарушении узнают на посту ГАИ?

Пусть событие A — о нарушении узнали на посту ГАИ.

Событие B_1 — Владимир увидел нарушителя;

$P(B_1) = 0{,}8$.

Событие B_2 — Константин увидел нарушителя;

$P(B_2) = 0{,}4$.

Событие $\overline{B_1}$ — Владимир не увидел нарушителя;

$P\left(\overline{B_1}\right) = 0{,}2$.

Событие $\overline{B_2}$ — Константин не увидел нарушителя;

$P\left(\overline{B_2}\right) = 0{,}6$.

Далее отметим, что возможны следующие события, образующие полную группу событий:

$C_1 = B_1 \cap B_2$ — Владимир и Константин оба замечают нарушение:

$P(C_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32.$

$C_2 = B_1 \cap \overline{B_2}$ — Владимир заметил, Константин нет:

$P(C_2) = P(B_1) \cdot P\left(\overline{B_2}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$

$C_3 = \overline{B_1} \cap B_2$ — Константин заметил, Владимир нет:

$P(C_3) = P\left(\overline{B_1}\right) \cdot P(B_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$

$C_4 = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ — Владимир и Константин оба не замечают нарушение:

$P(C_4) = P\left(\overline{B_1}\right) \cdot P\left(\overline{B_2}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12.$

Для уверенности правильности подсчетов найдем сумму всех этих вероятностей:

$0{,}32 + 0{,}48 + 0{,}08 + 0{,}12 = 1$ — это верно.

Далее по формуле полной вероятности получим:

$$P(A) = P(C_1) \cdot P_{C_1}(A) + P(C_2) \cdot P_{C_2}(A) + \\ + P(C_3) \cdot P_{C_3}(A) + P(C_4) \cdot P_{C_4}(A).$$

$P_{C_1}(A)$ — вероятность сообщения о нарушении скоростного режима, если оба, и Владимир, и Константин заметили его.

$P_1 = 0{,}5$ — вероятность сообщения о нарушении в ГАИ Владимиром.

$P_2 = 0{,}9$ — вероятность сообщения о нарушении в ГАИ Константином.

Очевидно, вероятность для независимых и совместных событий в данном случае:

$P_{C_1}(A) = P_1 + P_2 - P_1P_2 = 0{,}5 + 0{,}9 - 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}95.$

Из условия задачи следует, что

$P(C_2) = P_1 = 0{,}5; \quad P_{C_3} = P_2 = 0{,}9; \quad P_{C_4}(A) = 0.$

Тогда по формуле получим:

$P(A) = 0{,}32 \cdot 0{,}95 + 0{,}48 \cdot 0{,}5 + 0{,}08 \cdot 0{,}9 + 0{,}12 \cdot 0 =$

$= 0{,}304 + 0{,}240 + 0{,}072 = \boxed{0{,}616}.$

4. В Гостином дворе имеются три бутика, торгующие меховыми изделиями. В первом продаются одна норковая жилетка и одна соболья. Во втором — две норковые и три собольи. В третьем бутике — две норковые и четыре собольи. Вероятность выбора k-го бутика определена формулой $P_k = \dfrac{k}{6}$. Какова вероятность, что случайно купленная жилетка — норковая?

Пусть событие A — покупка норковой жилетки.

Событие B_1 — покупка в первом бутике; $P(B_1) = \dfrac{1}{6}$.

Событие B_2 — покупка в втором бутике; $P(B_2) = \dfrac{1}{3}$.

Событие B_3 — покупка в третьем бутике; $P(B_3) = \dfrac{1}{2}$.

Очевидно, что $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = 1$, значит события B_1, B_2, B_3 образуют полную группу событий.

Тогда можно воспользоваться формулой для полной вероятности:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A),$

где $P_{B_1}(A) = \dfrac{1}{2}$; $P_{B_2}(A) = \dfrac{2}{5}$; $P_{B_3}(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Значит, $P(A) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{23}{60}}.$

Формулы Байеса

Вернемся вновь к задаче об ограблении банка «Надежный» (стр. 242). Напомним, что в данной задаче грабитель выбирает одно из трех отделений в хранилище банка. Причем вероятность того, что грабитель нашел ячейку с бриллиантами, была вычислена по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{287}{900}.$$

Теперь рассмотрим другой вопрос. При тех же условиях задачи какова вероятность выбора первого отделения хранилища, если уже известно, что грабитель нашел ячейку с бриллиантами (из какого отделения банка — неизвестно)? В этом случае помогает формула Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}, \text{ т. е. } P_A(B_1) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{15}}{\frac{287}{900}} = \frac{80}{287}.$$

Рассуждая аналогично, получим вероятность выбора грабителем второго отделения:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}, \text{ т. е. } P_A(B_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{25}}{\frac{287}{900}} = \frac{72}{287}.$$

Очевидно, теперь сумма $P_A(B_1)+P_A(B_2)+P_A(B_3)=1$, так как факт нахождения грабителем ячейки с бриллиантами предполагается достоверным.

Теорема. Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Тогда, если событие A достоверно (свершилось), т. е. $P(A) = 1$, то вероятность события B_k определяется формулой Байеса:

$$\boxed{P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}}, \text{ где } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Практикум 13

1. Подводная лодка выпустила по большегрузному транспорту противника последовательно три торпеды. Из-за возможности корректировки вероятность попадания первым выстрелом равна 0,4, вторым 0,5, третьим 0,7. Одним попаданием транспорт можно потопить с вероятностью, равной 0,2, двумя попаданиями — с вероятностью 0,6, а тремя попаданиями — наверняка. Найдите вероятность того, что подлодка будет потоплена.

   а) Рассмотрим несовместные события.

   A_0 — промах; A_1 — одно попадание; A_2 — два попадания; A_3 — три попадания.

   При этом пусть B_1 — попадание с первого пуска торпеды; B_2 — попадание со второго пуска торпеды; B_3 — попадание с третьего пуска торпеды.

   Пусть событие A — транспорт потоплен.

   Учитывая формулу полной вероятности, получим:

   $$P(A) = P(A_0)\cdot P_{A_0}(A) + P(A_1)\cdot P_{A_1}(A) + P(A_2)\cdot P_{A_2}(A) + P(A_3)\cdot P_{A_3}(A).$$

   Вспомним, что для событий B_1, B_2, B_3 противоположные события $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$ соответственно, тогда

   1. $A_0 = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}$, значит
      $P(A_0) = P\left(\overline{B_1}\right)\cdot P\left(\overline{B_2}\right)\cdot P\left(\overline{B_3}\right)$
      (B_1, B_2, B_3 — независимые события, значит, и $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{B_3}$ — независимые).
   2. $A_1 = \left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right) \cup \left(B_2 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_3}\right) \cup \left(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right)$, где $\left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right)$ обозначает попадание первым выстрелом и непопадание вторым и третьим.

      Аналогично $\left(B_2 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_3}\right)$ и $\left(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right)$.

      Значит $P(A_1) = P(B_1)\cdot P\left(\overline{B_2}\right)\cdot P\left(\overline{B_3}\right) + P(B_2)\cdot P\left(\overline{B_1}\right)\cdot P\left(\overline{B_3}\right) + P(B_3)\cdot P\left(\overline{B_1}\right)\cdot P\left(\overline{B_2}\right)$.

3. $A_2 = (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) \cup (B_1 \cap B_3 \cap \overline{B_2}) \cup (B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_1})$, где $(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3})$ обозначает попадание первым и вторым выстрелом и непопадание третьим и т. д.
$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_3}) + P(B_1) \cdot P(B_3) \cdot P(\overline{B_2}) + $$
$$+ P(B_2) \cdot P(B_3) \cdot P(\overline{B_1}).$$
4. $A_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3$, тогда $P(A_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3)$.

б) Отметим, что из условия задачи следует, что
$P(B_1) = 0{,}4$, тогда $P(\overline{B_1}) = 0{,}6$;
$P(B_2) = 0{,}5$, тогда $P(\overline{B_2}) = 0{,}5$;
$P(B_3) = 0{,}7$, тогда $P(\overline{B_3}) = 0{,}3$.
Значит, $P(A_0) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$.
$P(A_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36$;
$P(A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41$;
$P(A_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$.
Из условия задачи следует, что
$P_{A_0}(A) = 0$; $P_{A_1}(A) = 0{,}2$; $P_{A_2}(A) = 0{,}6$; $P_{A_3}(A) = 1$.
Далее, используя формулу полной вероятности и полученные результаты, вычислим:
$P(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = \boxed{0{,}458}$.

2. В первом вольере находится восемь черных и два белых кролика. Во втором — семь белых и три черных. Один кролик из первого вольера прогрыз дырку в стенке между вольерами и перешел во второй вольер. Дырку заделали и после этого одного кролика из второго вольера отобрали для выставки. Какова вероятность того, что отобранный кролик из первого вольера, если известно, что он белый?

Пусть событие A — отобрали белого кролика из первого загона. Событие B_1 — перебежал белый кролик. Событие B_2 — перебежал черный кролик.

$P(B_1) = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$; $P(B_2) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$;

$P_{B_1}(A) = \dfrac{8}{11}$; $P_{B_2}(A) = \dfrac{7}{11}$.

Используя формулу Байеса, получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)},$$

т. е. $P_A(B_1) = \dfrac{\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{11}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{11} + \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{11}} = \dfrac{8}{8 + 4 \cdot 7} = \dfrac{8}{36} = \boxed{\dfrac{2}{9}}$.

3. Сборочный цех завода получает изделия от трех цехов. От первого цеха 25% изделий, от второго цеха 45% изделий, от третьего цеха 30% изделий. Полученные изделия хранятся на общем складе завода. Известно, что по различным технологическим и квалификационным причинам доля бракованных изделий из первого цеха составляет 4%, из второго цеха 6%, из третьего цеха 5%. При проверке ОТК (отдел технического контроля) наугад исследованное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность, что это изделие из первого цеха?

Пусть событие A — наугад взятое изделие — бракованное;

B_1 — наугад взятое изделие из первого цеха;

B_2 — наугад взятое изделие из второго цеха;

B_3 — наугад взятое изделие из третьего цеха.

$P_{B_1}(A) = 0{,}04$; $P(B_1) = 0{,}25$ — вероятность того, что изделие из первого цеха;

$P_{B_2}(A) = 0{,}06$; $P(B_2) = 0{,}45$ — вероятность того, что изделие из второго цеха;

$P_{B_3}(A) = 0{,}05$; $P(B_3) = 0{,}30$ — вероятность того, что изделие из третьего цеха.

Так как нас интересует вероятность брака из первого цеха, то необходимо найти значение $P_A(B_1)$. Используем формулу Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)},$$

тогда $P_A(B_1) = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}04}{0{,}25 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}06 + 0{,}30 \cdot 0{,}05} = \boxed{\dfrac{5}{26}}$.

Формула Бернулли

Задача. На тренировках по стрельбе стрелок П из одной и той же позиции стрелял по цели. Пусть событие A — попадание, событие B — промах. Очевидно, что $B = \overline{A}$ (события A и B противоположны). Из предыдущих многократных тренировок известно, что вероятность попасть в цель у стрелка П равна $p = 0{,}7$, тогда промах имеет вероятность $q = 1 - p$, т.е. $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
Вопрос. Какова вероятность из 10 попыток поразить цель: а) 7 раз; б) 10 раз; в) 3 раза?

Результаты каждого выстрела не зависят от результатов как предыдущего выстрела, если он был, так и последующего, если он не последний.

а) В этом случае могло сложиться так:

$A, B, A, A, A, B, A, A, A, B$ или $A, \overline{A}, A, A, A, \overline{A}, A, A, A, \overline{A}$.

По теореме умножения вероятности получим:

$p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p \cdot q = p^7 \cdot q^3$.

Формула перестановок с повторениями $\overline{P_n} = \dfrac{n!}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n)$, поэтому всего перестановок с семью попаданиями и тремя промахами существует $\overline{P_{10}} = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!}$,

причем $C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 12 = 120.$

По теореме сложения вероятностей, искомая вероятность будет равна $P = C_{10}^7 \cdot p^7 \cdot q^3 = 120 \cdot (0{,}7)^7 \cdot (0{,}3)^3 \approx \boxed{0{,}2668}$.

б) В этом случае возможен только один вариант:

$A, A, A, A, A, A, A, A, A, A$, тогда $p = (0,7)^{10}$, или

$P = C_{10}^{10} \cdot p^{10} \cdot q^0 = (0{,}7)^{10} \cdot 1 = (0{,}7)^{10} \approx \boxed{0{,}0282}$.

в) Рассуждая аналогично, получим

$$P = C_{10}^3 \cdot p^3 \cdot q^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^7 = \frac{120 \cdot 7^3 \cdot 3^7}{10^{10}} \approx \boxed{0{,}009}.$$

Подводя итоги, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Если при однократном испытании вероятность события A равна p, а вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$, то вероятность наступления события A ровно m раз при n повторных испытаниях равна

$$\boxed{P = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{(n-m)}}.$$

Иногда обозначают иначе:

$P(S_n = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{(n-m)}$, или $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$.

Данная формула была найдена Бернулли и носит его фамилию.

Практикум 14

1. Вероятность того, что деталь не пройдет контроля, равна 0,125. Какова вероятность того, что среди 12 деталей, представленных для контроля, не будет ни одной забракованной?

Здесь $n = 12$, а $m = 0$, при $p = 0{,}125$ и $q = 0,875$.

По формуле Бернулли $P = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{(n-m)}$ получим

$$P = C_{12}^0 \cdot (0{,}125)^0 \cdot (0{,}875)^{12} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{12} \approx \boxed{0{,}2014}.$$

2. Что вероятнее: выиграть одну партию из трех или две из пяти, если играют равносильные соперники и ничьи невозможны?

Так как исход любой партии не зависит от результатов предыдущих и не влияет на последующую, то имеем дело с событиями, независимыми от события A (выигрыш партии). В первом случае тогда

$$P(A) = \frac{1}{3}; \quad P\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{3}.$$

По формуле Бернулли $P = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{(n-m)}$.

В первом случае, где $n = 3$, $m = 1$, получим

$$P = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9};$$

Во втором случае (событие B — выигрыш двух партий из пяти):

$P(B) = \frac{2}{5}$; $P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{5}$, тогда по формуле Бернулли

$$P = C_5^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{5^2} \cdot \frac{27}{5^3} = \frac{216}{625}.$$

Так как $\frac{216}{625} < \frac{4}{9}$, то вероятнее выиграть одну партию из трех, чем две партии из пяти.

3. Торпедный катер атакует крейсер, выпустив по нему одну за другой четыре торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой в крейсер 0,7. Любая из торпед с равной вероятностью может попасть в любой из 10 отсеков крейсера. Известно, что в результате попадания в любой отсек он полностью заполняется водой. Если любые два отсека затоплены, то крейсер тонет. Какова вероятность, что при данной атаке крейсер потонет.

Пусть событие A_1 — попадание одной торпеды; событие A_2 — попадание двух торпед; событие A_3 — попадание трех торпед; событие A_4 — попадание четырех торпед; событие A — крейсер потоплен.

Используя формулу Бернулли, получим:

$$P(A_1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{756}{10000};$$

$$P(A_2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{6 \cdot 49 \cdot 9}{1 \cdot 100 \cdot 100} = \frac{2646}{10000};$$

$$P(A_3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot \frac{3}{10} = \frac{4116}{10000};$$

$$P(A_4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^0 = \frac{2401}{10000}.$$

Найдем условные вероятности:

$$P_{A_1}(A) = 0; \quad P_{A_2}(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10};$$

$$P_{A_3}(A) = 1 - \frac{1}{10^2} = \frac{99}{100}; \quad P_{A_4}(A) = 1 - \frac{1}{10^3} = \frac{999}{1000}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(A) + P(A_4) \cdot P_{A_4}(A).$$

Получим $P(A) = \frac{756}{10000} \cdot 0 + \frac{2646}{10000} \cdot \frac{9}{10} + \frac{4116}{10000} \cdot \frac{99}{100} + \frac{2401}{10000} \cdot \frac{999}{1000} = \frac{8\,854\,839}{10\,000\,000} \approx \boxed{0{,}8855}.$

Вероятность потопления крейсера достаточно велика.

Закон больших чисел

Настало время более подробно познакомиться с законом больших чисел, открытым Я. Бернулли:

С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточном большом числе независимых испытаний статистическая частота появления необходимого события как угодно мало отличается от его вероятности при отдельном испытании.

Современное понимание этого закона связано с неравенством П. Л. Чебышёва.

Теорема. Пусть вероятность события A в некотором эксперименте равна p, и пусть проводится n независимых повторений этого эксперимента. Через m обозначим количество появлений события A. Тогда для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышёва: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot n}$, где $q = 1 - p$.

Задача 1. Рассмотрим известную игру «Орлянка», суть которой в выпадении орла или решки при многократном подбрасывании монеты. Очевидно, что вероятность выпадения орла при многократных испытаниях (подбрасываниях монет) равна $\frac{1}{2}$.

а) Пусть проведено $a = 1000$ испытаний. Для $\varepsilon = 0{,}1$ по теореме Чебышёва получим вероятность того, что разность относительной частоты $\frac{m}{n}$ выпадения орла и числа $p = \frac{1}{2}$ будет больше $0{,}1$.

Эта вероятность меньше числа $\frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot n} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}1^2 \cdot 1000} = \frac{1}{40}$,

т. е. $P\left(\left|\frac{m}{1000} - \frac{1}{2}\right| > 0{,}1\right) < \frac{1}{40}$.

Примечание. Что означает результат решения неравенства $\left|\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}\right|>0{,}1$?

Решим неравенство: $\left[\begin{array}{l}\frac{m}{1000}>\frac{1}{2}+0{,}1=\frac{6}{10}\\ \frac{m}{1000}>\frac{1}{2}-0{,}1=\frac{4}{10}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}m>600\\ m<400\end{array}\right.$.

Значит, вероятность того, что орел выпадет меньше 400 раз или больше 600 раз при 1000 выбрасываниях, меньше $\frac{1}{40}=0{,}025$.

б) Пусть проведено $n=10\,000$ испытаний.

$\frac{p\cdot q}{\varepsilon^2\cdot n}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}1^2\cdot 10\,000}=\frac{1}{400}$,

т. е. $P\left(\left|\frac{m}{10\,000}-\frac{1}{2}\right|>0{,}1\right)<\frac{1}{400}$, т. е. чем больше n (число экспериментов), тем меньше вероятность P отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p события A на величину, большую, чем ε (в данном случае $\varepsilon=0{,}1$).

в) Вопрос. Сколько раз следует повторить опыт, чтобы вероятность p отклонения $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ относительно частоты $\frac{m}{n}$ от p более чем на $0{,}01$ не превышала $0{,}05$?

Так как $\varepsilon=0{,}01$ и $\frac{p\cdot q}{\varepsilon^2\cdot n}<0{,}05$, то $\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}01^2\cdot n}<0{,}05$, значит $n>\frac{0{,}25}{0{,}0001\cdot 0{,}05}=50\,000$.

Очевидно, что чем более жесткие требования к надежности результата, тем больше испытаний, экспериментов, опытов необходимо провести.

Задача 2. Рассмотрим опыты с игральным кубиком. Пусть событие A — выпадение четырех очков при выбрасывании игрального кубика. Сколько раз следует подбросить кубик, чтобы вероятность P отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p (выпадения при выбрасывании четырех очков) на величину, большую $\frac{1}{216}$, была менее 0,01?

Так как выпадение любого числа очков от 1 до 6 при выбрасывании игрального кубика равновозможно, то $p = \frac{1}{6}$ (вероятность выпадения четырех очков).

Используя теорему Чебышёва и помня, что n — число повторений опыта, а m — число появлений события, получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| > \frac{1}{6^3}\right) < \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6^3}\right)^2 \cdot n} = \frac{1}{10^2}$$

$$\left(\varepsilon = \frac{1}{6^3},\ \text{при}\ p = \frac{1}{6},\ \ q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\right);$$

$$n = \frac{\frac{5}{6^2}}{\frac{1}{6^6} \cdot \frac{1}{10^2}} = 5 \cdot 6^4 \cdot 10^2 = 648\,000.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Напоминание. 1. События, которые могут произойти или не произойти в результате произведенного испытания, опыта, называются случайными событиями.
2. Число бракованных изделий на 1000 изготовленных, число очков, выбиваемых каким-либо стрелком при определенных условиях стрельбы с одного выстрела (мишень, на которой указано число очков, засчитываемых при попадании в каждую из ее частей) и т. д. называется случайным числом.

Задача 1. Пусть x — случайная величина, равная сумме очков, получившихся при одновременном выбрасывании двух игральных кубиков. Очевидно, что значения x — целые числа от 2 до 12 (если выпало две шестерки). Выпишем значение вероятности каждого значения от 2 до 12.

Так как появление на грани куба очков от 1 до 6 — равновозможно и независимо от появления очков от 1 до 6 на другом, то можно воспользоваться правилом умножения.

Значит, $x = 2$ возможно только в одном из 36 случаев, когда на каждом выпало по единице, т. е. $P(2) = \dfrac{1}{36}$;

$x = 3$ при выпадении двумя способами:

$1+2$ или $2+1$, т. е. $P(3) = \dfrac{2}{36}$;

$x = 4$ при выпадении тремя способами:

$1+3,\ \ 3+1,\ \ 2+2$, т. е. $P(4) = \dfrac{3}{36}$;

$x = 5$ при выпадении четырьмя способами:

$1+4,\ \ 2+3,\ \ 3+2,\ \ 4+1$, т. е. $P(5) = \dfrac{4}{36}$;

$x = 6$ при выпадении пятью способами:

$1+5,\ \ 2+4,\ \ 3+3,\ \ 4+2,\ \ 5+1$, т. е. $P(6) = \dfrac{5}{36}$;

$x = 7$ при выпадении шестью способами:

$1+6,\ \ 2+5,\ \ 3+4,\ \ 4+3,\ \ 3+4,\ \ 2+5,\ \ 1+6$, т. е. $P(7) = \dfrac{6}{36}$.

Далее аналогично по убывающей. Получим таблицу распределения случайной величины по ее вероятности:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Так как $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\ldots+\frac{1}{36}=1$, то любое частное значение случайной величины x является элементарным событием, и все значения образуют полную группу элементарных событий.

Данная задача хорошо иллюстрирует закон распределения дискретной случайной величины, когда возможных значений x_i величины x конечное множество. В данном случае их 11.

Рассмотрим среднее значение величины по определению:

$$\overline{X}=\frac{2+3+4+\ldots+12}{11}=\frac{\frac{2+12}{2}\cdot 11}{11}=7.$$

С другой стороны, рассмотрим новое понятие — **математическое ожидание**, которое связано с вероятностью наступления случайной величины (в данном случае выпадении данного числа очков).

Обозначается математическое ожидание $M(X)$ и находится как сумма произведений случайного числа на вероятность его получения, т. е. $M(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$.

Математическим ожиданием случайной величины X называется число $\boxed{M(X)=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}$.

В данном случае

$$M(X)=\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{3}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{5}{36}\cdot 6+$$
$$+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{5}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{3}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{1}{36}\cdot 12=7\frac{5}{18}\approx 7{,}28.$$

Математическое ожидание иногда называют значением случайной величины X или средним значением случайной величины.

Отметим, что среднее значение $\overline{X}=7$ и $M(X)\approx 7{,}28$ достаточно близки по значению.

Задача 2. При сборе яблок получили плоды, масса которых x (в граммах) различна. Весь урожай яблок сгруппируем по массе: до 100 г, от 100 г до 150 г, от 150 г до 200 г, от 200 г до 250 г, от 250 г до 300 г., от 300 г до 350 г, от 350 г до 400 г, от 400 г до 450 г, от 450 г до 500 г, более 500 г.

Экспериментально установили вероятности появления яблок данной весовой группы.

x (г)	до 100	100–150	150–200	200–250	250–300
P	0,06	0,12	0,14	0,16	0,17
x (г)	300–350	350–400	400–450	450–500	от 500
P	0,11	0,09	0,08	0,06	0,01

Проверим:

$$0{,}06+0{,}12+0{,}14+0{,}16+0{,}17+0{,}11+0{,}09+0{,}08+0{,}06+0{,}01=1.$$

Случайная величина в данной задаче — масса яблок — непрерывна, так как может принимать любые значения на данных промежутках. Таблица отражает закон распределения случайной непрерывной величины.

Задача 3. Отделу комплектования интендантской службы Министерства обороны необходимо заказать на зиму мужскую обувь для солдат. Естественно, необходимо знать какой процент солдат носит тот или иной размер обуви. Здесь генеральная совокупность — все солдаты действующей армии. Для выяснения проводят исследование размеров обуви у 50 случайно отобранных солдат. Получили ряд чисел, которые называют вариационным рядом или выборкой, представленной в виде таблицы чисел.

25	32	27	31	20	21	25	26	28	28	27	31	24
25	27	21	25	26	26	28	27	27	31	30	27	29
27	26	28	27	26	25	28	29	27	26	22	23	30
25	24	23	32	28	27	26	27	26	27	30		

Естественно, вариационный ряд строится по нарастанию признака:

20	21	21	22	23	23	24	24	25	25	25	25	25
25	26	26	26	26	26	26	26	26	27	27	27	27
27	27	27	27	27	27	27	28	28	28	28	28	28
29	29	29	30	30	30	31	31	31	32	32		

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
m	1	2	1	2	2	6	8	12	6	2	3	3	2
W	0,02	0,04	0,02	0,04	0,04	0,12	0,16	0,22	0,12	0,06	0,06	0,06	0,04

Здесь: x — исследуемый признак (размер);

m — частота ($m_1 + m_2 + \ldots + m_{13} = 50$);

$W = \dfrac{m}{n}$ — относительная частота ($W_1 + W_2 + \ldots + W_{13} = 1$).

Найдем среднее значение выборки:

$$\overline{X} = (20 \cdot 1 + 21 \cdot 2 + 22 \cdot 1 + 23 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 25 \cdot 6 + 26 \cdot 8 +$$

$$+27 \cdot 12 + 28 \cdot 6 + 29 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 31 \cdot 3 + 32 \cdot 2) : 50 = \frac{1333}{50} = 26{,}7;$$

$$Me = \frac{27 + 27}{2} = 27 \text{ (25 и 26 место).}$$

Известно, что при большом количестве испытаний вероятность наступления какого-либо события примерно равно его относительной частоте: $p_i \approx W_i = \dfrac{m_i}{n}$. Здесь m_i — абсолютная частота появления i-го события (данного размера обуви) из общего числа испытаний n.

Тогда $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n \approx$

$$\approx x_1W_1 + x_2W_2 + \ldots + x_nW_n = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_n\frac{m_n}{n} =$$

$$= \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{n} = \overline{X}.$$

В данном случае $M(X) \approx \overline{X} = 26{,}7$.

Задача 4. Двум однотипным станкам соответствуют таблицы вероятностей (частот) того или иного числа бракованных изделий на тысячу изделий.

1-й станок, брак (шт.)	0	1	2	3	4	5
Вероятности	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1
2-й станок, брат (шт.)	0	1	2	3	4	5
Вероятности	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,05

Сравните математическое ожидание выпускаемых первым и вторым станками бракованных изделий и дисперсии тех же величин.

$M(X) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 = 2{,}7;$

$M(Y) = 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}05 = 2{,}7.$

Математические ожидания числа бракованных изделий для обоих станков одинаковы.

Рассмотрим дисперсию.

$$D(X) = 0{,}1(0-2{,}7)^2 + 0{,}1(1-2{,}7)^2 + 0{,}2(2-2{,}7)^2 + 0{,}3(3-2{,}7)^2 + 0{,}2(4-2{,}7)^2 + 0{,}1(5-2{,}7)^2 =$$
$$= 0{,}729 + 0{,}289 + 0{,}098 + 0{,}027 + 0{,}338 + 0{,}529 = 2{,}01.$$
$$D(Y) = 0{,}05(0-2{,}7)^2 + 0{,}1(1-2{,}7)^2 + 0{,}2(2-2{,}7)^2 + 0{,}25(3-2{,}7)^2 + 0{,}3(4-2{,}7)^2 + 0{,}05(5-2{,}7)^2 =$$
$$= 0{,}3645 + 0{,}289 + 0{,}098 + 0{,}0225 + 0{,}507 + 0{,}2645 = 1{,}5455 \approx 1{,}5.$$

Значит, работа второго станка является более стабильной, так как числа бракованных изделий болёе плотно группируются вокруг математического ожидания, равного 2,7, чем в случае первсго станка.

Ряд свойств математического ожидания

1. Свойство линейности

а) Математическое ожидание постоянной величины равно постоянной величине. $M(\alpha) = \alpha$, где α — постоянное число.

б) Постоянный множитель случайной величины можно вынести за знак математического ожидания:

$M(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot M(X)$, где α — постоянное число.

2. Свойство аддитивности

а) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

б) $M(\alpha\cdot X+b)=\alpha\cdot M(X)+b$, где α, b — постоянные числа.

3. Свойство мультипликативности

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин: $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, где X и Y — независимые случайные величины.

Свойства дисперсии

1. Так как по определению $\boxed{D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2}$, то

$$D(X)=M\left(X^2-2X\cdot M(X)+M^2(X)\right)=$$
$$=M\left(X^2\right)-M\left(2X\cdot M(X)\right)+M\left(M^2(X)\right)=$$
$$=M\left(X^2\right)-2M(X)\cdot M(X)+M^2(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X),$$

где $M(X)$, $2M(X)$ и $M^2(X)$ — постоянные числа.

Получили новую формулу: $\boxed{D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)}$.

2. $D(\alpha)=0$, если α — постоянное число.
3. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, где X, Y — независимые случайные числа.
4. $D(\alpha\cdot X)=\alpha^2\cdot D(X)$.

Задача 5. Найдите дисперсию случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

а) Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, есть число событий A при n независимых испытаниях, при которых вероятность события A равна p, а отсутствие события A равно $q=1-p$.

б) Положим x_i — число событий A при i-м испытании, которое может принимать два значения:

1 с вероятностью p (A произошло);

0 с вероятностью q (A не произошло).

Тогда $M\left(X^2\right) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$.

Используя формулу дисперсии, получим:

$D(X_i) = M\left(X_i^2\right) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$.

С другой стороны, так как X_i — независимые случайные величины, то

$D(X) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$

$= D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = \boxed{n \cdot p \cdot q}$.

Тренировочная работа 7

1. Определите шансы на дежурство каждого участника игры «считалка», если в ней принимают участие два человека, причем первый (с кого начинается счет) не убирает класс, если число «выброшенных» пальцев на одной руке одного и другого в сумме будет нечетной, второй — если сумма будет четной. Отметим, что рассматриваются только пальцы на одной руке, и разрешен выброс без раскрытия пальцев, т. е. в виде кулака, тогда считается нулевое очко.

2. В благотворительной лотерее разыгрываются выигрыши: в 100 рублей — 500 билетов; в 50 рублей — 1000 билетов; в 10 рублей — 2000 билетов; в 5 рублей — 2500 билетов. Всего выпущено 50 000 лотерейных билетов по 6 рублей каждый.

   а) Чему равна вероятность того, что один приобретенный билет окупится?

   б) Какой средний выигрыш соответствует одному билету?

3. Автоматизированная система охраны ювелирного магазина снабжена четырьмя датчиками. Вероятность срабатывания каждого из них в силу различных технологических причин равна: 0,95, 0,85, 0,9 и 0,8. Найдите вероятность того, что в случае несанкционированного проникновения в магазин срабатывают: а) все датчики; б) хотя бы один датчик.

4. По статистике следственный отдел результативно расследует в среднем 85% преступлений. Найдите вероятность того, что из пяти совершенных преступлений: а) четыре будут успешно расследованы; б) три будут успешно расследованы.

5. Известно, что по различным причинам, в том числе в силу низкой квалификации и отсутствия должного опыта, определенный процент дел судьи отправляют на доследование. Судья Ильин возвращает на доследование в среднем 11% уголовных дел, судья Воронов — 6% дел, а судья

Павлов — 9% дел. Найдите вероятность того, что при очередном расследовании уголовных дел каждым судьей на доследование будет отправлено дело только одного судьи.

6. В подразделении патрульно-постовой службы 12 рядовых и восемь сержантов. В смену заступает 10 человек, выбранных, чтобы было не обидно, наугад. Найдите вероятность того, что в состав смены войдут: а) три сержанта; б) два сержанта; в) один сержант; г) только рядовые.

7. Вероятность поражения цели одним выстрелом равна 0,7. По цели производится три выстрела. Какова вероятность поражения цели после трех выстрелов?

8. По оперативным данным, разыскиваемый преступник может появиться у приятеля на даче с вероятностью 0,65 или у своей знакомой на квартире с вероятностью 0,35. Причем захват преступника на даче возможен с вероятностью 0,85, а на квартире — с вероятностью 0,95. Руководство УВД для надежности приняло решение о подготовке обеих операций. Найдите:
   а) вероятность успешного задержания преступника;
   б) вероятность задержания преступника на квартире, если известно, что он задержан;
   в) вероятность задержания преступника на даче, если известно, что он задержан.

9. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, что наблюдается в 60% случаев; форсированном, что возможно в 30% случаев; недогруженном, что бывает в 10% случаев. Надежность прибора, т. е. вероятность безотказной работы в течение определенного срока составляет: для нормального режима 0,8; для форсированного режима 0,5; для недогруженного режима 0,9. Определите:
   а) вероятность безотказной работы прибора с учетом заданных условий работы;
   б) если известно, что прибор вышел из строя, то определите вероятность сбоя в режиме: нормальном; форсированном; недогруженном.

Решение тренировочной работы 7

1. Определите шансы на дежурство каждого участника игры «считалка», если в ней принимают участие два человека, причем первый (с кого начинается счет) не убирает класс, если число «выброшенных» пальцев на одной руке одного и другого в сумме будет нечетной, второй — если сумма будет четной. Отметим, что рассматриваются только пальцы на одной руке, и разрешен выброс без раскрытия пальцев, т. е. в виде кулака, тогда считается нулевое очко.

Рассмотрим таблицу возможностей набрать четную или нечетную сумму очков.

Четные суммы (дежурит первый)	
Способы	Количество
$2+0=0+2=1+1=2$	3
$4+0=1+3=2+2=3+1=0+4=4$	5
$1+5=2+4=3+3=4+2=5+1=6$	5
$3+5=4+4=5+3=8$	3
$5+5=10$	1
	17

Нечетные суммы (дежурит второй)	
Способы	Количество
$1+0=0+1=1$	2
$1+2=2+1=0+3=3+0=3$	4
$1+4=2+3=3+2=4+1=5$	4
$2+5=3+4=4+3=5+2=7$	4
$4+5=5+4=9$	2
	16

Для первого игрока получилось 16 способов благоприятных исходов (случай, когда игрок не дежурит). Для второго игрока получилось 17 благоприятных исходов. Значит дежурит первый.

2. В благотворительной лотерее разыгрываются выигрыши: в 100 рублей — 500 билетов; в 50 рублей — 1000 билетов; в 10 рублей — 2000 билетов; в 5 рублей — 2500 билетов. Всего выпущено 50 000 лотерейных билетов по 6 рублей каждый.

а) Чему равна вероятность того, что один приобретенный билет окупится?

б) Какой средний выигрыш соответствует одному билету?

а) Чему равна вероятность того, что один приобретенный билет окупится?

Пусть событие A_0 — выигрыш в 5 рублей; событие A_1 — выигрыш в 10 рублей; событие A_2 — выигрыш в 50 рублей; событие A_4 — выигрыш в 100 рублей.

Так как куплен только один билет, то все события являются несовместными. Для окупаемости подходят только события A_1, A_2, A_3, причем:

$$P(A_1) = \frac{2000}{50\,000} = 0{,}04; \quad P(A_2) = \frac{1000}{50\,000} = 0{,}02;$$

$$P(A_3) = \frac{500}{50\,000} = 0{,}01.$$

Тогда $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}04 + 0{,}02 + 0{,}01 = \boxed{0{,}07}$.

б) Какой средний выигрыш соответствует одному билету?

Найдем вероятность приобретения выигрышного билета в 5 рублей: $P(A_0) = \dfrac{2500}{50000} = 0{,}05$.

Вероятность приобретения безвыигрышного билета, где $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$, а $\overline{A}$ (противоположное событие), равна $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$:

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$= 0{,}05 + 0{,}04 + 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}12,$$

а значит $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

Результаты представим в виде таблицы

Выигрыш	0	5	10	50	100
Вероятность	0,88	0,05	0,04	0,02	0,01

Тогда по формуле среднего получим

$$\overline{X} = 0\cdot 0{,}88 + 5\cdot 0{,}05 + 10\cdot 0{,}04 + 50\cdot 0{,}02 + 100\cdot 0{,}01 = 2{,}65,$$

значит, если выкупить все 50 000 билетов, то получим $2{,}65 \cdot 50\,000 = 132\,500$ рублей, затратив при этом $6 \cdot 50\,000 = 300\,000$ рублей. Лотерея явно благотворительная.

В обычной лотерее выигрыш по всем билетам не может быть ниже 60–70 процентов от общей стоимости всех билетов.

3. Автоматизированная система охраны ювелирного магазина снабжена четырьмя датчиками. Вероятность срабатывания каждого из них в силу различных технологических причин равна: 0,95, 0,85, 0,9 и 0,8. Найдите вероятность того, что в случае несанкционированного проникновения в магазин срабатывают: а) все датчики; б) хотя бы один датчик.

а) С какой вероятностью сработают все датчики? Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4 — срабатывания соответствующего датчика на несанкционированное проникновение. Так как эти события независимые, то вероятность того, что все датчики сработают, будет равна:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4) =$$
$$= 0{,}95\cdot 0{,}85\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8 \approx \boxed{0{,}58}.$$

Таким образом, все датчики сработают только в 58 случаях из 100. Кажется, что магазин беззащитен от воров, а это просто катастрофа. Но так ли это? Сигнал тревоги поступит на пульт управления охраны, даже если сработает хотя бы один датчик.

2) С какой вероятностью сработает хотя бы один датчик?

Пусть событие A — поступление сигнала тревоги на пульт, тогда противоположное событие — не поступление сигнала тревоги ни от одного датчика.

Так как $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$, то $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

Но $P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right)$, где

$P\left(\overline{A_1}\right) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$

$P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$

$P\left(\overline{A_3}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$

$P\left(\overline{A_4}\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

Тогда $P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right) =$

$= P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) \cdot P\left(\overline{A_4}\right) =$

$= 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}00015,$

значит $P(A) = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985$, т. е. при 100 000 — попыток проникновения только в 15 случаях защита не сработает. Отличный результат.

4. По статистике следственный отдел результативно расследует в среднем 85% преступлений. Найдите вероятность того, что из пяти совершенных преступлений: а) четыре будут успешно расследованы; б) три будут успешно расследованы.

а) Расследование каждого преступления — событие, причем успешное расследование происходит в среднем с постоянной вероятностью $P = 0{,}85$.

Тогда $q = 1 - P = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Здесь, очевидно, можно использовать расчеты по формуле Я. Бернулли, где $n = 5$, а $m = 4$:

$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}85)^4 (0{,}15)^1 \approx \boxed{0{,}392}$.

б) Аналогично, при $n = 5$; $m = 3$:

$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}85)^3 (0{,}15)^2 \approx \boxed{0{,}138}$.

5. Известно, что по различным причинам, в том числе в силу низкой квалификации и отсутствия должного опыта, определенный процент дел судьи отправляют на доследование. Судья Ильин возвращает на доследование в среднем 11% уголовных дел, судья Воронов — 6% дел, а судья Павлов — 9% дел. Найдите вероятность того, что при очередном расследовании уголовных дел каждым судьей на доследование будет отправлено дело только одного судьи.

а) Обозначим:

A — событие: дело, рассматриваемое Ильиным, не направлено на доследование;

B — событие: дело, рассматриваемое Вороновым, не направлено на доследование.

C — событие: дело, рассматриваемое Павловым, не направлено на доследование.

Пусть A_1, B_1, C_1 — события: дело направлено на доследование соответствующим судьей.

б) Очевидно, что $\overline{A_1} = A$, $\overline{B_1} = B$, $\overline{C_1} = C$.

$$\begin{matrix} P(A_1) = 0{,}11 & & P(A) = 0{,}89 \\ P(B_1) = 0{,}06\,, & \text{тогда} & P(B) = 0{,}94\,. \\ P(C_1) = 0{,}09 & & P(C) = 0{,}91 \end{matrix}$$

в) Если нас интересует вероятность того, что из трех судей только один направит дело на доследование, то возможны три варианта.

1. Если Ильин и Воронов не направляют дело на доследование, а Павлов направляет, то вероятность этого варианта равна

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C_1) = 0{,}89 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}0753.$$

2. Если Ильин и Павлов не направляют дело на доследование, а Воронов направляет, то вероятность этого варианта равна

$$P(A) \cdot P(C) \cdot P(B_1) = 0{,}89 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}06 \approx 0{,}0486.$$

3. Если Воронов и Павлов не направляют дело на доследование, а Ильин направляет, то вероятность этого варианта равна
$P(C) \cdot P(B) \cdot P(A_1) = 0{,}91 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}11 \approx 0{,}0941.$

г) Пусть D — событие: только один из судей направляет дело на доследование. Тогда

$$P(D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C_1) + P(A) \cdot P(C) \cdot P(B_1) + \\ + P(C) \cdot P(B) \cdot P(A_1) = \\ = 0{,}0753 + 0{,}0486 + 0{,}0941 \approx \boxed{0{,}218}.$$

6. В подразделении патрульно-постовой службы 12 рядовых и восемь сержантов. В смену заступает 10 человек, выбранных, чтобы было не обидно, наугад. Найдите вероятность того, что в состав смены войдут: а) три сержанта; б) два сержанта; в) один сержант; г) только рядовые.

а) Рассмотрим случай, когда в состав смены войдут три сержанта.

Общее число исходов при выборе 10 человек из 20 определяется числовым сочетанием

$n = C_{20}^{10} = \dfrac{20!}{10! \cdot (20-10)!} = \dfrac{20!}{10! \cdot 10!} = 184\,756$ — общее число способов.

Три сержанта из восьми могут быть выбраны

$m_1 = C_8^3 = \dfrac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$ способами.

Остальные семь рядовых можно выбрать из 12 человек:

$$m_2 = C_{12}^7 = \frac{12!}{7! \cdot (12-7)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 5!} =$$

$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$ способами.

Таким образом, вероятность выбора трех сержантов в смену равна

$$P(A) = \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^7}{C_{20}^{10}} = \frac{56 \cdot 792}{184\,756} = \frac{44\,352}{184\,756} \approx \boxed{0{,}2401}.$$

б) Допустим, в состав смены войдут два сержанта.

$n = 184\,756$ — число всех выборов остается прежним.

Двух сержантов из восьми можно выбрать

$m_3 = C_8^2 = \dfrac{8!}{2!\cdot 6!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6!}{2!\cdot 6!} = 28$ способами.

Остальные восемь рядовых можно выбрать из 12:

$m_4 = C_{12}^8 = \dfrac{12!}{4!\cdot 8!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} =$

$= 11\cdot 45 = 495$ способами.

Таким образом, вероятность выбора двух сержантов в одну смену равна

$$P(A) = \frac{C_8^2\cdot C_{12}^8}{C_{20}^{10}} = \frac{28\cdot 495}{184\,756} = \frac{13\,860}{184\,756} \approx \boxed{0{,}0750}.$$

в) Пусть в состав смены войдет один сержант;

$n = 184\,756$ — число всех выборов остается прежним.

Одного сержанта из восьми можно выбрать

$m_5 = C_8^1 = \dfrac{8!}{1!\cdot 7!} = 8$ способами.

Остальных девять рядовых можно выбрать из 12

$m_6 = C_{12}^9 = \dfrac{12!}{3!\cdot 9!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$ способами.

Таким образом, вероятность выбора одного сержанта

$$P(C) = \frac{C_8^1\cdot C_{12}^9}{C_{20}^{10}} = \frac{8\cdot 220}{184\,756} = \frac{1760}{184\,756} \approx \boxed{0{,}0095}.$$

г) Теперь пусть в состав смены войдут только рядовые.

$n = 184\,756$ — число всех выборов остается прежним.

Десять рядовых можно выбрать из 12

$m_7 = C_{12}^{10} = \dfrac{12!}{2!\cdot 10!} = \dfrac{12\cdot 11}{2} = 66;$

$$m_8 = \frac{C_{12}^{10}\cdot C_8^0}{C_{20}^{10}} = \frac{66}{184\,765} \approx \boxed{0{,}0004}.$$

7. Вероятность поражения цели одним выстрелом равна 0,7. По цели производится три выстрела. Какова вероятность поражения цели после трех выстрелов?

Противоположное событие $\overline{A_1}$ — промах;

$P\left(\overline{A_1}\right)+P(A_1)=1$, тогда $P\left(\overline{A_1}\right)=1-P(A_1)=1-0{,}7=0{,}3.$

Так как именно три промаха представляют собой три совместных и независимых события, то к ним применима теорема умножения вероятностей.

Пусть A_2 — событие: поражение цели вторым выстрелом; $\overline{A_2}$ — промах вторым выстрелом. A_3 — событие: поражение цели третьим выстрелом; $\overline{A_3}$ — промах третьим выстрелом. Если цель поражена, например, с первого выстрела, то дальнейшее испытание (попытки поразить цель) теряет смысл. Но если цель не поражена с первого выстрела, то имеет смысл произвести второй выстрел, и если снова не поражена, то третий.

Тогда $P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=$
$=0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3=0{,}027.$

Пусть событие A — поражение цели тремя выстрелами, тогда $\overline{A}$ — событие непопадания в цель после трех выстрелов; $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$; $\quad P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)=0{,}027.$

Отсюда следует, что $P(A)=1-0{,}027=\boxed{0{,}973}$.

8. По оперативным данным, разыскиваемый преступник может появиться у приятеля на даче с вероятностью 0,65 или у своей знакомой на квартире с вероятностью 0,35. Причем захват преступника на даче возможен с вероятностью 0,85, а на квартире — с вероятностью 0,95. Руководство УВД для надежности приняло решение о подготовке обеих операций. Найдите:

а) вероятность успешного задержания преступника;

б) вероятность задержания преступника на квартире, если известно, что он задержан;

в) вероятность задержания преступника на даче, если известно, что он задержан.

а) Найдем вероятность задержания преступника.

Пусть событие C — задержание преступника; событие A — появление преступника на даче; событие B — появление преступника на квартире.

Тогда $P(A) = 0{,}65$ и $P_A(C) = 0{,}85$;
$P(B) = 0{,}35$ и $P_B(C) = 0{,}95$.

По формуле полной вероятности получим
$$P(C) = P(A) \cdot P_A(C) + P(B) \cdot P_B(C) =$$
$$= 0{,}65 \cdot 0{,}85 + 0{,}35 \cdot 0{,}95 = \boxed{0{,}885}.$$

б) Зная о задержании, найдем вероятность задержания преступника на квартире.

Поскольку нам известно об успешном задержании преступника, а нам важно знать вероятность задержания именно в квартире, то воспользуемся формулой Байеса.

Тогда $P_C(B)$ (вероятность задержания на квартире)
$$P_C(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(C)}{P(C)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}95}{0{,}885} = \boxed{0{,}376}.$$

в) Зная о задержании, найдем вероятность задержания преступника на даче.

Решая вопрос о задержании преступника на даче, будем рассуждать аналогично.

$P_C(A)$ — вероятность задержания на даче, тогда по формуле Байеса
$$P_C(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(C)}{P(C)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}85}{0{,}885} = \boxed{0{,}624}.$$

9. Прибор может работать в трех режимах: нормальном, что наблюдается в 60% случаев; форсированном, что возможно в 30% случаев; недогруженном, что бывает в 10% случаев. Надежность прибора, т. е. вероятность безотказной работы в течение определенного срока составляет: для нормального режима 0,8; для форсированного режима 0,5; для недогруженного режима 0,9.

Определите:

а) вероятность безотказной работы прибора с учетом заданных условий работы;

б) если известно, что прибор вышел из строя, то определите вероятность сбоя в нормальном, форсированном и недогруженном режиме.

а) Найдем вероятность безотказной работы прибора с учетом заданных условий работы.

Пусть событие A_1 — нормальный режим работы; A_2 — форсированный режим работы; A_3 — недогруженный режим работы.

Значит, $P(A_1) = 0{,}6; \quad P(A_2) = 0{,}3; \quad P(A_3) = 0{,}1.$

Пусть событие A — безотказная работа прибора, тогда

$P_{A_1}(A) = 0{,}8; \quad P_{A_2}(A) = 0{,}5; \quad P_{A_3}(A) = 0{,}9.$

Очевидно, что вероятность безотказной работы прибора необходимо определить по формуле полной вероятности, т. е.

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(A),$$

тогда $P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 =$

$= 0{,}48 + 0{,}15 + 0{,}09 = \boxed{0{,}72}.$

б) 1. Определим вероятность того, что прибор вышел из строя в нормальном режиме.

Пусть событие $\overline{A}$ — выход прибора из строя. Ясно, что это событие, противоположное событию A; $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

Рассмотрим вероятности выхода прибора из строя при различных режимах работы:

$P_{A_1}\left(\overline{A}\right) = 1 - P_{A_1}(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$P_{A_2}\left(\overline{A}\right) = 1 - P_{A_2}(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$

$P_{A_3}\left(\overline{A}\right) = 1 - P_{A_3}(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$

Используя формулу полной вероятности, найдем вероятность выхода прибора из строя.

$$P\left(\overline{A}\right) = P(A_1) \cdot P_{A_1}\left(\overline{A}\right) + P(A_2) \cdot P_{A_2}\left(\overline{A}\right) + \\ + P(A_3) \cdot P_{A_3}\left(\overline{A}\right),$$

тогда $P\left(\overline{A}\right) = 0.6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,28$.

Вот теперь можно применить формулу Байеса, если прибор вышел из строя в нормальном режиме.

$$P_{\overline{A}}(A_1) = \frac{P(A_1) \cdot P_{A_1}\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,28} = \boxed{0,43}.$$

2. Теперь выясним вероятность того, что прибор вышел из строя в форсированном режиме.

$$P_{\overline{A}}(A_2) = \frac{P(A_2) \cdot P_{A_2}\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,28} = \boxed{0,54}.$$

3. Аналогично рассуждая, найдем вероятность того, что прибор отказал в недогруженном режиме.

$$P_{\overline{A}}(A_3) = \frac{P(A_3) \cdot P_{A_3}\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{0,28} = \boxed{0,03}.$$

Невредно проверить точность полученных результатов. Для этого необходимо убедиться, что

$P_{\overline{A}}(A_1) + P_{\overline{A}}(A_2) + P_{\overline{A}}(A_3) = 1.$

Подставляя, получим $0,43 + 0,54 + 0,03 = 1$. Значит, выход из строя прибора в нормальном, форсированном и недогруженном режиме составляет полную группу событий.

Историческая справка

Математика соприкасается с жизнью гораздо теснее, чем это традиционно нам кажется. Теория вероятностей, статистика — важнейшие области, неразрывно связанные с нашей повседневной деятельностью. Экономика, промышленное производство, страховое дело в значительной степени связаны с закономерностями этих наук. Если же рассматривать физику макро- и микромира, то сердцевиной закономерностей в них являются вероятностные процессы и закономерности. Они также играют важную роль в биологии и социологии, химии и вирусологии, теории игр и стратегий, военном деле и т. д.

Первый интерес к осмыслению возможного и не очень, конечно, был связан с природными явлениями: предсказанием погоды, возможного урожая, грозы, наводнения. Естественно, не обошлось без внимания к человеку. Его деятельности и войнам, эпидемиям, уловам, играм, победам между участниками. Первыми к возможностям игры для понимания человека обратились еще Сократ (469–399 гг. до н. э.), Платон (427–348 гг. до н. э.), Аристотель (384–322 гг. до н. э.), Квинтилиан (35–97 гг. н. э.) и т. д.

Игра — с одной стороны, форма азартного[5] соперничества, времяпрепровождения, с другой стороны, если хотите, один из очень мощных способов формирования способностей и мировоззрения человека. Много позже известная идея философов XVIII в. реализовалась в рассуждении Гете: «Играет не только человек, а вся природа».

Начало комбинаторики как раздела математики было положено Г. Лейбницем (1646–1716 гг.) в его «Рассуждении о комбинаторном искусстве» 1666 г. Затем появилась работа Д. Валлиса (1616–1703 гг.) «Рассуждения о сочетаниях, перестановках и т. д.» 1685 г., которая существенно развила

[5] Слово «азар» по-арабски означает «трудный». Так, арабы называли азартной игрой комбинацию очков, которая при бросании нескольких костей могла появится лишь единственным образом. Например, при бросании двух костей трудным («азар») считалось появление в сумме двух или двенадцати очков.

идеи комбинаторного анализа. И, наконец, В. Де Весси (1602–1675 гг.) в «Резюме о соединениях» продолжил эти исследования. К сожалению, эта работа была опубликована только в 1729 г.

Но самые глубокие и принципиальные результаты были представлены в неоконченной книге Я. Бернулли (1654–1705 гг.) «Искусство предположений», купленной после его смерти в 1705 г. издателями братьями Турнизиус, которые сумели издать ее только в 1713 г. с предисловием его племянника Н. Бернулли (1687–1759 гг).

Часть 2-я работы Я. Бернулли называется «Учение о перестановках и сочетаниях». Теория сочетаний была необходима для решения многих задач теории вероятностей того времени. Развитие комбинаторики и теории вероятностей взаимно влияли друг на друга. Действительно, с самого начала своего выделения из других понятий вероятность понималась как отношение шансов, возможностей, исходов и т.п. Но для того чтобы составить отношение, нужно было найти число шансов. Если в простых задачах эти числа находились просто, то в сложных без комбинаторики обойтись было нельзя.

В части 3-й, которая называется «Применение учения о сочетаниях к различным случайным играм и играм в кости», Я. Бернулли осознанно подчеркивает существенную роль комбинаторики в решении задач и дальнейшем развитии теории вероятности того времени. В этой части впервые последовательно изложена теория сочетаний, в том числе и с повторениями. Многие задачи решены в общем виде.

Но основной частью книги является 4-я часть «Применение предыдущего учения к гражданским, моральным и экономическим вопросам». В ней содержится доказательство знаменитой теории Я. Бернулли — закона больших чисел. Эта работа ознаменовала новый подход к вероятности, которую теперь стали связывать с частотой. Но главное, впервые понятию вероятности отведено довольно много внимания. Установленная связь вероятности с частотой и статистический подход к вероятности оказали существенное влияние на дальнейшие вероятностные исследования и изучения и осмысления самого понятия вероятности.

Впервые же задачи теории вероятностей были рассмотрены А. Пачоли (1445–1514 гг.), Д. Кардано (1501–1576 гг.), Н. Тартальи (1499–1557 гг.), Б. Паскалем (1623–1662 гг.), П. Ферма (1601–1665 гг.), Х. Гюйгенсом (1629–1695 гг.).

Затем, после Я. Бернулли, теория вероятностей стала развиваться в работах А. Муавра (1667–1754 гг.), П. Лапласа (1749–1827 гг.), С. Пуассона (1781–1840 гг.). Далее развитие было связано с работами русских ученых П. Л. Чебышёва (1821–1894 гг.), А. А. Маркова (1854–1922 гг.), А. М. Ляпунова (1857–1918 гг.), А. Я. Хинчина (1894–1959 гг.), С. Н. Бернштейна (1880–1968 гг.), А. Н. Колмогорова (1903–1987 гг.).

Отметим, что в книге А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» 1936 г. была построена аксиоматика теории вероятностей, ставшая прорывом в понимании природы и особенностей в применении вероятностей. В конце жизни А. Н. Колмогоров сделал попытку вскрыть самую сущность понятия «порядок» и «хаос», показать, как хаотические процессы, воспринимаемые нами как случайные, возникают из детерминированных, но сложно устроенных явлений. Так возникла знаменитая концепция случайности как степени алгоритмической сложности.

Статистические данные, чаще всего примитивными способами, собирались еще различными правителями Древнего Египта, Греции и Рима. Для этого делались отдельные попытки подсчета численности населения, количества ежегодно собираемого хлеба, податей и т. п.

Император Август (27 г. до н. э. – 14 г. н. э.) при присоединении новых областей обязал своих наместников производить перепись населения. В кодексе Юстиниана (527–533 г. н. э.) из закона о продовольствии следует, что его подданные стремились определить среднюю продолжительность жизни человека при условии достижения им определенного возраста.

В книге «Страшного суда» Вильгельма I (1027–1087 гг.) нормандский герцог, король Англии с 1066 г., отразил особые списки с результатами всеобщей поземельной переписи 1086 г. В русских летописях IX в. отражены данные о некоторых статистических данных, связанных в первую очередь с собиранием дани, подати и т. п. Известны данные переписи 1245 г. оставшихся жителей Киева, проведенной монголами после убийства князем Михаилом послов Батыя. В связи с эпидемиями чумы в Англии с 1517 г. велись бюллетени о естественном движении населения. Форма и содержание бюллетеней менялись. С 1603 г. в декабре давалась годичная сводка, где указывались возраст, причины смерти, пол умерших, вероисповедание и т. д. Разрозненные потоки сбора таких данных были и в других государствах.

Как особая наука, статистика закрепилась в Англии в XVII в., когда она приняла вид так называемой политической арифметики. В противоположность чисто описательному государствоведению немецких статистиков, политическая арифметика обратилась к количественному числовому методу исследования. Основными были вопросы рождаемости, смертности, а также расчеты для страхования жизни, торговли и т. д. Первыми исследователями политической арифметики были У. Петти (1623–1687 гг.) и Д. Граунт (1620–1674 гг.). В книге Д. Граунта «Естественные и политические наблюдения, сделанные над бюллетенями смертности» 1662 г. свободно используются средние величины. В ней он установил:

а) что перевес рождаемости мальчиков над рождаемостью девочек для Лондона составляет 14:13;

б) что в среднем на один брак приходится четыре ребенка;

в) что смертность в Лондоне выше, чем в провинции;

г) что на каждые 11 семейств ежегодно приходится три случая смертности;

д) что число ежегодных рождений в Лондоне 12 000;

е) что способных к деторождению замужних женщин 24 000 (вдвое больше);

ж) что замужние женщины имеют не более одного ребенка за два года;

з) что общее число семейств 48 000, так как женщин с 16 до 76 лет вдвое больше, чем женщин в возрасте 20–44 лет;

и) что каждое семейство состоит в среднем из восьми человек: отец, мать, трое детей и три человека прислуги или родственников;

к) что численность жителей Лондона равна $48\,000 \cdot 8 = 384\,000$.

Петти в книге «Наблюдения над Дублинскими записями о смертности» 1683, 1686 г. установил:

а) 1. что в Лондоне ежегодно умирает 1 из 30 человек;

2. в сельской местности 1 из 37;

3. в Риме 1 из 40;

4. из членов парламента 1 из 50;

б) что доля смертности случаев от чумы в период эпидемии составляет $\frac{1}{5}$.

Петти широко использовал средние величины:

а) среднее число человек в семье;

б) среднее число печей на один дом;

в) средний денежный доход на человека;

г) средний период удвоения населения Лондона, всей Англии.

Для установления ренты с земель Петти требовал наблюдения в течение ряда лет, не меньше семи, во время которых будут и неурожайные годы. Работы в исследовании аналогичных тем продолжил Людвиг Гюйгенс (1631–1699 гг.), а затем и его старший брат Христиан Гюйгенс (1629–1695 гг.).

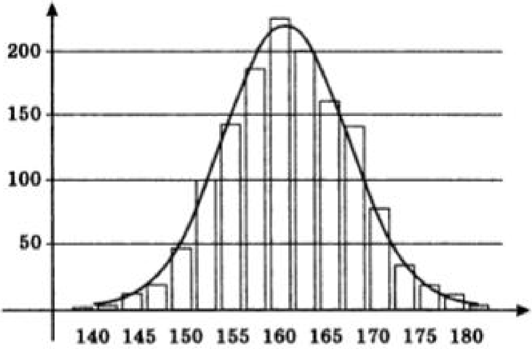
На формирование идей и понятий статистики, а затем и вероятности оказали существенное влияние и наблюдения в астрономии. Точнее сказать, не столько сами результаты наблюдений, а осмысление расхождений при наблюдениях. То, что ошибка при наблюдениях и расчетах неизбежна, было известно давно. Вопрос в том, как уменьшить влияние этих ошибок. Здесь, конечно, были важны понятие о средних величинах и некоторые правдоподобные (вероятностные) рассуждения.

Например, К. Птолемей (умер около 170 г. н. э.) сопоставлял свои наблюдения предварения равноденствий с результатами наблюдений Гиппарха (180–125 до н. э.). В Китае в 723–726 гг. И Синь и Е Нань Кун сравнивали свои градусные измерения и измерения расстояний в зависимости от размеров Земли, которую они полагали шарообразной. Для исключения систематических ошибок Тихо Браге (1546–1628 гг.) использовал среднее арифметическое. Еще более обширно использовал эти идеи Галилей (1564–1642 гг.). И. Ламберт (1728–1777 гг.) изучал случайные ошибки при измерении длины данного отрезка и пришел к выводу, что среднее арифметическое измерений ближе всего к истинной величине отрезка. В развитии и осмыслении этих идей приняли участие ученые Р. Коутс (1682–1716 гг.), Т. Симпсон (1710–1761 гг.), Г. Лейбниц (1646–1716 гг.), Л. Эйлер (1707–1783 гг.), Д. Бернулли (1700–1782 гг.).

Харальд Крамер (1704–1752 гг.) — известный шведский ученый, один из основателей математической статистики, писал: «По-видимому, невозможно дать точное определение того, что подразумевается под словом «случайный». Смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах».

А. Муавр (1667–1754 гг.) в 1718 году выпустил в Лондоне книгу «Учение о случаях», в которой измерил рост у 1375 случайно выбранных женщин.

Колоколообразная кривая, приближенно «обволакивающая» диаграмму распределения роста, похожа на график $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, смещенный направо. Муавр впервые заметил



и теоретически обосновал роль такого распределения в случайных явлениях, которое позже было названо нормальным.

Известно, что Т. Байес (1702–1761 гг.) в анонимном трактате «Введение в проблему флюксий и защита математики от автора аналиста», изданном в 1736 г., а затем в письмах Д. Кантону и в «Философских трудах» за 1763 г., опубликованных Р. Прайсом, под названием «опыт решения задач по теории вероятностей...» занимался решением теоретических и практических задач вероятности. В своей работе Байес формулирует семь определений.

«1. Несколько событий являются несовместными, если наступление одного из них исключает наступление остальных.

2. События являются исключающими друг друга, если одно из них должно наступить, но оба одновременно наступить не могут.

3. Говорят, что событие не состоялось, если оно не наступает, или наступает исключающее событие.

4. Говорят, что событие определено, если оно наступило или не наступило.

5. Вероятность какого-нибудь события есть отношение значения, которое дается ожиданию, связанному с наступлением события, и значения ожидаемой в этом случае прибыли.

6. Под шансом я понимаю то же самое, что и под вероятностью.

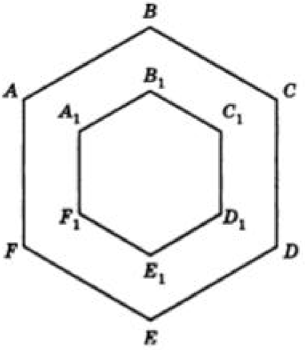
7. События являются независимыми, если наступление одного не уменьшает и не увеличивает вероятности остальных».

Очевидно, какой сложный и длительный процесс осмысления основных определений и идей претерпела теория вероятностей, прежде чем стать такой, какой она сегодня является. Хотя, ради справедливости, отметим, что 1-е и 7-е определения совпадают с современными. Есть также сведения о том, что домашним учителем Т. Байеса был А. Муавр.

Т. Байес первым четко сформулировал теоремы сложения и умножения вероятностей и доказал их. Кроме того, он отчетливо ввел понятие условной вероятности и знал вывод формулы $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, на основании которой впервые пришел к биномиальной кривой распределения, получив все ее основные свойства. (Позже она получит в работах Лапласа название кривой нормального распределения.)

Так называемое классическое определение вероятности дал французский ученый П. Лаплас (1749–1827 гг.) в книге «Опыт философии теории вероятностей» 1795 г., а затем в книге «Аналитическая теория вероятностей» 1812 г. В XVIII в. Ж. Л. Бюффон (1707–1788 гг.) в работе «Опыт правительственной арифметики» 1777 г. исследовал игру «франк-каро» (т. е. прямо в клетку) суть которой в следующем:

На пол, выложенный правильными шестиугольными плитками, бросают круглую монету. Один игрок держит пари за то, что монета ляжет целиком внутри какого-то шестиугольника, другой игрок ставит на то, что монета пересечет какую-нибудь линию соединения между шестиугольниками. Для решения вопроса кто выиграл, внутри шестиугольника $ABCDEF$ нарисуем другой $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ так, чтобы расстояние между параллельными сторонами было равно полудиаметру монеты. Тогда первый игрок выигрывает, если центр монеты внутри $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, а второй выигрывает, когда центр монеты попадает между контурами обоих шестиугольников. Поэтому вероятность выигрыша первого игрока равна отношению площа-



ди внутреннего шестиугольника к площади внешнего. В этой работе впервые вероятность подсчитывается не при помощи различных исходов, а при помощи отношения площадей — это и есть геометрическая вероятность.

Еще в 1827 г. английский ботаник Броун, рассматривая в микроскоп растительные препараты, заметил движение мелких взвешенных частиц. Это движение получило название броуновского. Оно является результатом случайных толчков, которые испытывает взвешенная частица со стороны хаотически движущихся молекул. Теорию броуновского движения оказалось возможным разработать только с помощью вероятностных соображений. Законченная теория броуновского движения была создана только в 1905 г. А. Энштейном (1879–1955 гг.) и М. Смолуховским (1872–1917 гг.).

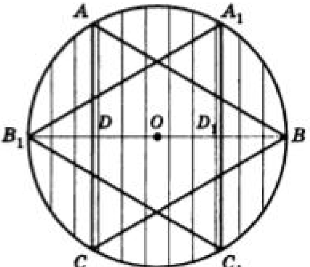
Если до второй половины XIX в. основными областями применения теории вероятностей были обработка результатов наблюдений, статистика (в первую очередь демография) и некоторые другие вопросы, то во второй половине XIX в. положение принципиально изменилось. В первую очередь это связано с работами физиков И. К. Максвелла (1831–1879 гг.), австрийского ученого Л. Больцмана (1844–1906 гг.) и американского ученого Д. В. Гиббса (1839–1903 гг.), которые создали *статистическую механику*.

Главной заслугой Л. Больцмана является молекулярно-кинетическое истолкование второго начала термодинамики и установление статистического смысла понятия энтропии. Второе начало термодинамики сформулировал Р. Клазиус (1822–1888 гг.) в 1850 г., и лишь в 1865 г. он ввел и термин «энтропия». Много позже Н. Виннер (1894–1964 гг.) установил, что «как количество информации о системе есть мера организованности системы, точно так же энтропия системы есть мера дезорганизованности системы; одно равно другому, взятому с обратным знаком».

На необходимость уточнения основных понятий теории вероятностей математики указывали неоднократно. Ж. Бертран (1822–1900 гг.) выдвинул ряд парадоксов, относящихся к основным понятиям теории вероятностей (1899).

Требуется определить вероятность того, что взятая произвольно хорда окружности будет больше, чем сторона вписанного в эту окружность равностороннего треугольника. По-разному понимая слова «взятая произвольно», мы будем получать разные вероятности.

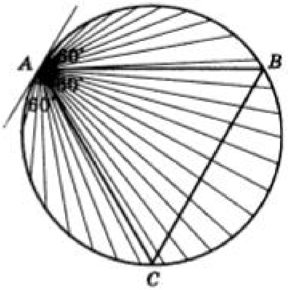
а) Рассматривая только те хорды, которые параллельны данному направлению, мы получим, что искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.



В этом случае хорды, большие, чем сторона треугольника, будут находиться от центра на расстоянии, меньшем половины радиуса окружности.

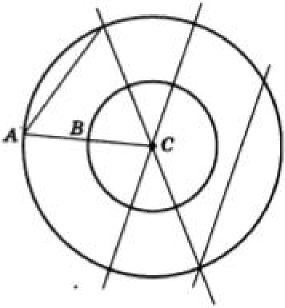
$$OD = OD_1 = \frac{1}{2}R.$$

б) Если считать, что произвольно проведенные хорды будут выходить из определенной точки окружности, то искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.



Очевидно, что $\angle BAC = 60°$ есть третья часть от развернутого угла.

в) Если считать, что слова «взятая произвольно» означают, что вероятность попадания середины хорды внутрь какой-либо части круга пропорциональна площади этой части, то получим, что искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.



Действительно, так как серединой хорды может быть любая точка круга, а середины хорд, которые больше стороны правильного вписанного треугольника, заполняют круг радиуса $\frac{R}{2}$, тогда искомая вероятность будет равна

$$\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

Такая неопределенность ответа может быть объяснена тем, что «вероятность» уже предполагает определенный опыт многих задач. Этот опыт хотя и мысленный (виртуальный), но обычно жестко следует из содержания задачи. В данной задаче слова «произвольно взятая хорда» без дальнейших указаний в постановке задачи практически не дают никаких жестко определенных разъяснений о конкретном опыте. Своими парадоксами Ж. Бертран стремился показать необходимость более четкого осмысления ряда понятий теории вероятностей и, прежде всего, самого понятия вероятности.

Необходимость установления строгой логической базы исходила из разных областей. Первые шаги и попытки построения аксиоматического обоснования теории вероятностей принадлежат российскому ученому С. Н. Бернштейну, опубликовавшему работу «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей» в 1917 г. В 1927 г. вышло первое издание книги «Теория вероятностей», в 1946 г. — четвертое.

Начиная с 20-х годов XX столетия, характер исследований по теории вероятностей во многом определялся идеями теории множеств и теории функций. Выяснилось, что можно установить глубокие аналогии между основными понятиями теории множеств и метрической теорией функций, с одной стороны, и основными понятиями теории вероятности — с другой стороны. Позже были установлены аналогии между мерой множеств и вероятностью события, интегралом и математическим ожиданием и др. Впервые такие идеи стал привлекать в разработку теории вероятностей начиная с 1905 г. Е. Борель (1871–1956 гг.). Необходимо также отметить первые работы А. Ломницкого (1881–1941 г.) в понимании вероятности как меры в 1923 г. Польский математик погиб в июле 1941 г. от рук фашистов.

Вследствие глубоких исследований и осмысления результатов, полученных другими учеными в этой области, появилась книга «Kolmogorov» (1933), а вскоре ее русский перевод в 1936 г., где были реализованы новые идеи и построено аксиоматическое обоснование теории вероятности.

Отметим те параллели между основными понятиями теории множеств и основными понятиями теории вероятностей, которые выделяет А. Н. Колмогоров.

В теории множеств	В теории вероятностей
1. A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \emptyset$	1. События A и B не совместны.
2. $A \cap B \cap \ldots \cap N = \emptyset$	2. События $A, B, \ldots, N$ не совместны.
3. $A \cap B \cap \ldots \cap N = X$	3. Событие X заключается в одновременной реализации всех событий $A, B, \ldots, N$.
4. $A \cup B \cup \ldots \cup N = X$	4. Событие X заключается в наступлении по крайней мере одного из событий $A, B, \ldots, N$.
5. Дополнительное множество $\overline{A}$	5. Противоположное событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события A.
6. $A = 0$	6. A — невозможно (недостоверное событие).
7. $A = \Omega$	7. A должно необходимо наступить (достоверное событие).
8. Система U множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образует разложение Ω, если $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ (предполагается, что множества из разложения попарно не пересекаются).	8. Испытание U заключается в том, что устанавливают, какое из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ происходит; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют при этом возможными исходами испытания U.
9. B является подмножеством множества A ($B \subseteq A$).	9. Из осуществления события B с необходимостью следует осуществление события A.

Рассмотрим аксиомы А. И. Колмогорова. Пусть Ω — множество элементов ω, которые мы будем называть случайными событиями. F — множество подмножеств из Ω. Элементы множеств F будем называть случайными событиями (или просто событиями), а Ω — пространством элементарных событий.

1. Для системы F подмножеств множества Ω выполняются правила:

   а) $\Omega \in F$.

   б) Объединение, пересечение и разность двух множеств системы опять принадлежит этой системе, т. е. действия — операции над множествами объединения, пересечения и разности двух множеств замкнуты. Иногда говорят, что F является алгеброй множеств.

2. Каждому множеству из F поставлено в соответствие неотрицательное число $P(A)$. Это число называется вероятностью события A.

3. $P(\Omega) = 1$.

4. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Полем вероятностей называется совокупность объектов (Ω, F, P), удовлетворяющая аксиомам 1-4.

5. Для случая бесконечного числа случайных событий А. Н. Колмогоров вводит следующую аксиому непрерывности.

   Для убывающей последовательности

   $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ событий F такой, что

   $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \emptyset$

   имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = 0$.

Только после аксиоматики Колмогорова теория вероятностей стала полноправной математической дисциплиной. Естественно, система аксиом А. Н. Колмогорова непротиворечива, но она не полна. Неполнота аксиоматики связана не с неудачностью выбора аксиом, а с существованием вероятностных вопросов. Естественно, что каждое новое определение одного и того же понятия (в том числе и вероятности) накладывает и новые ограничения. Содержание понятия вероятности, как и других фундаментальных понятий математики, вскрывается только в совокупности многих несводимых друг к другу определений. Необходимо четко понимать, что содержание основных (неопределяемых) понятий (т. е. того, что можно понимать под прямой, множеством, вероятностью) косвенным образом определяется системой аксиом. Значит, возможны различные способы реализации аксиоматических логических теорий, так как все время возникают новые подходы, точки зрения и т. д.

В связи с глубоким проникновением вероятностных методов и рассуждений в различные области математики, во все современное естествознание, а также во многие гуманитарные науки, понятие вероятности стало одним из важнейших понятий современной науки.

Содержание

Программы элективных курсов 5

1. Элементы комбинаторики. 7

Основные понятия комбинаторики 7
Практикум 1 16
Тренировочная работа 1. 25
Взвешенный граф 36
Размещения и сочетания 39
Бином Ньютона 53
Практикум 2 (на решение задач) 56
Тренировочная работа 2. 63
Практикум 3 78
Тренировочная работа 3. 85
Размещения с повторениями .98
Практикум 4 98
Перестановки с повторениями 100
Практикум 5 100
Сочетания с повторениями 101
Практикум 6 101

2. Элементы статистики 104

Меры центральной тенденции 104
Тренировочная работа 4. 112
Меры изменчивости 128
Практикум 7 148
Тренировочная работа 5. 155
Нормальное распределение. .172

3. Элементы теории вероятностей. 177

Понятие событий 177
Практикум 8 182
Классическое (комбинаторное) определение вероятности 185
Упражнения. 188
Практикум 9 195
Статистическое (частотное) определение вероятности 202
Тренировочная работа 6. 205
Произведение событий 213
Упражнения. 219
Практикум 10 220
Теоремы сложения 229
Практикум 11 233
Формула полной вероятности 242

Практикум 12 244
Формула Байеса 249
Практикум 13 250
Формула Бернулли 253
Практикум 14 255
Закон больших чисел 257
Математическое ожидание и дисперсия
случайной величины. 260
Тренировочная работа 7 267
Историческая справка 280

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
КОМБИНАТОРИКА. СТАТИСТИКА. ВЕРОЯТНОСТЬ

Научный редактор серии *А. В. Семенов*
Компьютерная верстка *С. С. Афонин*
Компьютерный набор *К. В. Шевяков*
Корректоры *Е. Г. Никитина, С. С. Афонин*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 13.03.2012 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 13,5 печ. л. Тираж 2500 экз. Заказ № 247.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.

[illegible]

1. Дроби
2. Корни
3. Уравнения
4. Дробно-рациональные неравенства
5. Системы уравнений
6. Иррациональные уравнения и неравенства
7. Множества. Функции. [illegible]
8. Логарифмы
9. Тригонометрия
10. Построение графиков функций [illegible]
11. Уравнения и неравенства с параметрами
12. Задачи с параметрами [illegible]
13. Введение в математический анализ
14. Комплексные числа
15. Комбинаторика. Статистика. Вероятность
16. [illegible]

КОМБИНАТОРИКА • СТАТИСТИКА • ВЕРОЯТНОСТЬ

МАТЕМАТИКА • ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ