МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

Множества Функции Последовательности Прогрессии

Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Множества
Функции
Последовательности
Прогрессии

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

Под общей редакцией
заслуженного учителя РФ Б. Г. Зива

VICTORY

ПЕТРОГЛИФ МЦНМО

С.-Петербург
Москва
2008

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редакторы:
Кандидат физ.-мат. наук, доцент РГПУ им. Герцена, заслуженный учитель РФ С. Е. Рукшин.
Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
заслуженный учитель РФ Т. И. Курсиш,
заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А.Х.
Ш32 Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2008. — 296 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-423-1, ISBN 978-5-98712-027-9, ISBN 978-5-91673-006-7.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-94057-423-1 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-027-9 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-006-7 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программа элективного курса для учащихся 8-11 классов (30–40 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–6 (+2)	**Действия над множествами (стр. 5–12)** Практикум 1. Тренировочная работа 1 (четные). Проверочная работа 1 (нечетные). Зачетная работа 1 (3–5, 7, 10). Практикумы 2, 3, 4 (выборочный набор примеров). Тренировочная работа 3 (5–8).
7–12 (+3)	**Мощность множества. Дополнения (стр. 37–76)** Практикумы 5, 6, 7. Тренировочная работа 4 (3–5, 9, 10). Практикум 8. Тренировочная работа 5 (1, 2). Практикум 9. Тренировочная работа 6 (1, 2). Практикум 10. Тренировочная работа 7 (2, 3).
13–15	**Функции (стр. 85–92)** Практикум 11. Тренировочная работа 9 (1, 3).
16–25 (+2)	**Последовательности (стр. 93–132)** Практикумы 12, 13. Тренировочная работа 10 (1, 3). Практикум 14. Тренировочная работа 11 (2, 4). Практикум 15. Тренировочная работа 12 (2, 5, 7, 8, 10).
26–30 (+3)	**Прогрессии (стр. 133–186)** Практикумы 16, 17, 18 (выборочный набор примеров). Тренировочная работа 13 (1, 4, 5). Практикумы 19, 20. Тренировочная работа 14 (1, 4, 7). Практикумы 21, 22, 23. Тренировочная работа 15 (2, 5, 7, 8, 10).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1 Множества

Введение

Идя по лесу, мы автоматически отмечаем березы, сосны, дикую рябину и т.д. Входя в автобус, не задумываясь, отмечаем пожилых женщин, мужчин, подростков, маленьких детей... Каждый раз мы порой неосознанно группируем наблюдаемые объекты по признакам, свойствам, характеристикам. Находясь в классе, на работе, отдыхе, мы невольно отмечаем для себя: здесь много девчонок, светловолосых парней, высоких или низких, голубоглазых или кареглазых и т.д. Процесс группировки по особенным свойствам также важен в математике, являющейся специфическим языком моделирования окружающего нас мира.

Договор. *Под множеством мы будем понимать такой набор, группу, коллекцию элементов, обладающих каким-либо* ***общим*** *для них* ***всех*** *свойством или признаком.*[1]

Заглавные буквы A, B, C обозначают множества, маленькие буквы a, b, c – элементы множеств. Если элемент a принадлежит множеству A, то этот факт записывают: $a \in A$.

Если множество A состоит из элементов 1, 2, 3 это обозначают $A = \{1; 2; 3\}$.

---

[1] Основателем теории множеств является немецкий ученый Георг Кантор (1845–1918).

Если $\forall n \in N$ такое, что $n \in A$, то записывают,[1]

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}\}^2 \text{ или } A = \{1; 2; 3; \ldots n; \ldots\}.$$

Определение 1. *Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Пример 1.
$A = \{1;2;3;4\}$;
$B = \{(1;2);(1;3);(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\}$.

Вопрос: $A = B$?

Оказывается нет, хотя в образовании их участвуют одни и те же цифры. В множестве A цифры есть элементы.

А в множестве B элементами являются пары цифр.

Определение 2. *Пусть $a \in A$. Тогда если любой элемент a, принадлежащий A, принадлежит множеству B, то говорят, что множество A включено в множество B, или что множество A является подмножеством множества B, или что множество A является частью множества B.*

Записывается это так.

Если для $\forall a \in A$ следует, что $a \in B$, то $A \subset B^3$.

$$\left. \begin{array}{l} B = \{1; 2; 3; 4 \ldots n \ldots\} \\ A = \{2; 4; 6; \ldots 2n \ldots\} \end{array} \right| \Rightarrow A \subset B^4.$$

Можно теперь дать и иное определение равенства двух множеств.

Определение 3. *Два множества называются равными, если они являются взаимными подмножествами,* т.е. если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Примечание. Можно принять в качестве **определения** одно из них, тогда другое будет просто **теоремой**. По современным научным представлениям множество относится к основным **неопределяемым понятиям** (поэтому мы договариваемся).

---

[1] $\forall$ знак любое, всех и т.д.

[2] $|$ – вертикальная черта – обозначает <u>таких, что</u>

[3] $\subset$ знак включения (подмножества) – запись подмножества

[4] $\Rightarrow$ знак следования (логического)

Свойства включений

1. Любое множество является своим собственным подмножеством $A \subset A$ (*рефлексивность*).

2. Из того, что множество A является подмножеством множества B, совсем не следует, что множество B является подмножеством множества A, т.е. из $(A \subset B) \not\Rightarrow (B \subset A)$ (кроме $A = B$). Свойство называется свойством *антисимметричности*.

3. Если $A \subset B$ и одновременно $B \subset C$, то $A \subset C$ (свойство *транзитивности*), т.е. если A подмножество множества B и B подмножество множества C, то отсюда следует, что A подмножество множества C.

Пример 2.

Пусть $A = \{n \mid n$ – кратно 2; $n \in \mathbb{N}\}$,

$B = \{n \mid n$ – кратно 6; $n \in \mathbb{N}\}$,

$C = \{n \mid n$ – кратно 30; $n \in \mathbb{N}\}$.

Очевидно, что $\left.\begin{matrix} B \subset A \\ C \subset B \end{matrix}\right| \Rightarrow C \subset A$.

Пример 3.

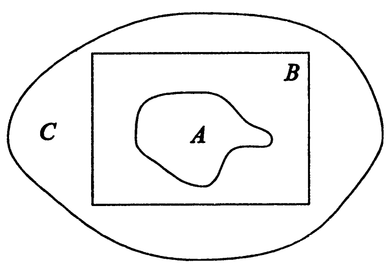
Пусть A – множество всех ромбов;

B – множество всех параллелограммов;

C – множество всех четырехугольников.

Очевидно, что $A \subset B \subset C$, т.е. $A \subset C$.

Графическая иллюстрация отражает своеобразный принцип матрешки.

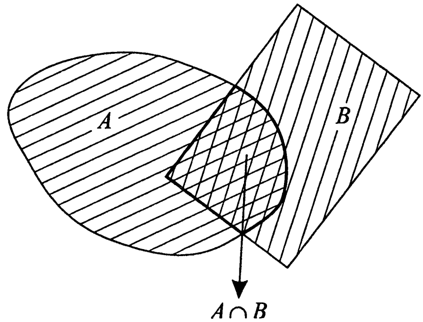


Записывается это так:

$A \cap B = C$, где

$C = \{c \mid c \in A$ и $c \in B\}$

(см. рис.).



Пример 5.

$A = \{1; 3; 5; 11; 12; 14\}$,

$B = \{2; 3; 10; 11; 14; 15\}$.

$A \cap B = \{3; 11; 14\}$.

Пример 6.

Пусть $A = \{$Множество всех ромбов$\}$;

$B = \{$Множество всех прямоугольников$\}$.

$A \cap B = \{$Множество всех квадратов$\}$, так как только квадрат одновременно обладает как свойствами ромба, так и свойствами прямоугольника.

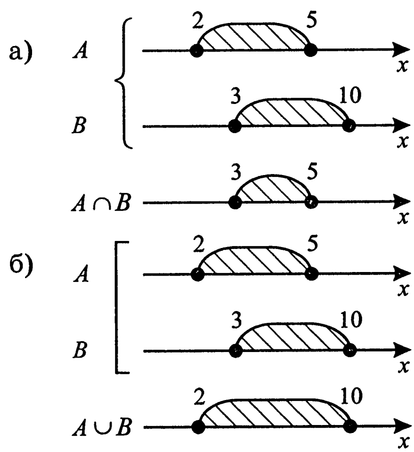
Пример 7.

Пусть $A = [2; 5]$,

$B = [3; 10]$,

т.е. $A \cap B = [3; 5]$.

Значит $A \cup B = [2; 10]$.



Пример 8.[1]

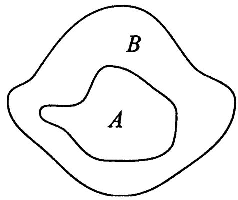
$$\left.\begin{array}{l} A = \{n \mid n \vdots 3;\ n \in \mathbb{N}\} \\ B = \{n \mid n \vdots 5;\ n \in \mathbb{N}\} \end{array}\right| \Rightarrow A \cap B = \{n \mid n \vdots 15;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

[1] $n \vdots 3$, т.е. кратно 3 (делится на 3 нацело) и т.д.

Свойства операций

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cap B = B \cap A$.

Связь включений и операций



5. $A \subset B \Rightarrow \begin{matrix} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{matrix}$.
6. $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$.
7. $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

Объединение и пересечение множеств обладают многими свойствами, аналогичными свойствам арифметических действий суммы (сложения) и произведения чисел (умножения).

Коммутативность действий и операций

1. $A \cup B = B \cup A$.	1. $a + b = b + a$.
2. $A \cap B = B \cap A$.	2. $a \cdot b = b \cdot a$.

Ассоциативность действий и операций

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.	3. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.	4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

I закон дистрибутивности для действий и операций

5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.	5. $(a + b)c = ac + bc$.

II закон дистрибутивности для операций есть, для действий нет

6. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.	6. Аналога нет.

Отсюда ясно, что действия над числами (арифметические) есть частный случай более общих операций над множествами.

Докажем I закон дистрибутивности:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

1) Пусть любой $x \in (A \cup B) \cap C$.

Это значит, что $x \in (A \cup B)$ и одновременно $x \in C$.

Так как $x \in A \cup B$, то $x \in A$ или $x \in B$.

Итак, а) $x \in A$ или $x \in B$ и

б) $x \in C$.

Значит а) $x \in A$ и одновременно $x \in C$

или б) $x \in B$ и $x \in C$.

Тогда а) $x \in A \cap C$

или б) $x \in (B \cap C)$.

Т.е. $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Значит $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2) Пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Это значит, что $x \in (A \cap C)$ или $x \in (B \cap C)$.

Тогда а) $x \in A$ и одновременно $x \in C$ или б) $x \in B$ и одновременно $x \in C$, но это значит $x \in A$ или $x \in B$.

Т.е. $x \in A \cup B$, но одновременно $x \in C$.

Значит $x \in (A \cup B) \cap C$.

Тогда $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$.

3) Так как $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

и одновременно $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$,

то $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Докажем II закон дистрибутивности:

$(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

1) Пусть $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, тогда

$x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$.

а) Так как $x \in A \cup C$, то $x \in A$ или $x \in C$.

б) Так как $x \in B \cup C$, то $x \in B$ или $x \in C$.

Значит $x \in A$ и $x \in B$, (т.е. $x \in A \cap B$), или $x \in C$.

Тогда $x \in (A \cap B) \cup C$, значит

$((A \cup C) \cap (B \cup C)) \subset (A \cap B) \cup C$.

2) Пусть $x \in (A \cap B) \cup C$, тогда $x \in (A \cap B)$ или $x \in C$, тогда или и $x \in A$, и $x \in B$, или $x \in C$.
Тогда
а) $x \in A$ или $x \in C$, т.е. $x \in A \cup C$, и
б) $x \in B$ или $x \in C$, т.е. $x \in B \cup C$.
Значит $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Значит $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Вывод. Так как $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ и одновременно $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$, то отсюда следует, что $\boxed{(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C}$.

Примечание. I и II законы дистрибутивности обладают свойством **двойственности**, т.е. если в **одном** из них поменяются символы объединения на пересечение, и наоборот, все символы пересечения на символы объединения, то получится **другой** закон.

Практикум 1

Дано:

$A = \{1; 2; 3; 5; 7; 10\}$;

$B = \{3; 4; 6; 9; 10\}$;

$C = \{2; 5; 7; 9; 11\}$.

Найти:

1. $A \cap B$.

2. $A \cup B$.

3. $A \cup (B \cap C)$.

4. $(A \cup B) \cap C$.

5. $A \cap (B \cup C)$.

6. $(A \cap B) \cup C$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение.

1. $A \cap B = \{3; 10\}$.

2. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}$.

3. $A \cup (B \cap C) = A \cup 9 = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10\}$.

4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 5; 7; 9; 11\} =$
$= \{2; 5; 7; 9\}$.

5. $A \cap (B \cup C) =$
$= \{1; 2; 3; 5; 7; 10\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
$= \{2; 3; 5; 7; 10\}$.

6. $(A \cap B) \cup C = \{3; 10\} \cup \{2; 5; 7; 9; 11\} =$
$= \{2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\}$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$

$= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$

$= \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3; 10\} \cup \{9\} = \{3; 9; 10\}$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2; 5; 7\} \cup \{9\} = \{2; 5; 7; 9\}$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$
$= \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\} \cap \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
$= \{2; 3; 5; 7; 9; 10; 11\}$.

Любопытно отметить, что результаты заданий 4 и 9 совпадают (согласно I закону дистрибутивности) и заданий 6 и 10 совпадают (согласно II закону дистрибутивности).

Тренировочная работа 1

Дано:

$A = \{1; 3; 4; 6; 8; 10\}$;

$B = \{3; 7; 8; 10\}$;

$C = \{4; 8; 11\}$.

Найти:

1. $A \cap B$.

2. $A \cup B$.

3. $A \cup (B \cap C)$.

4. $(A \cup B) \cap C$.

5. $A \cap (B \cup C)$.

6. $(A \cap B) \cup C$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Решение тренировочной работы 1

1. $A \cap B = \{3; 8; 10\}$.

2. $A \cup B = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\}$.

3. $A \cup (B \cap C) = A \cup \{8\} = \{1; 3; 4; 6; 8; 10\}$.

4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap \{4; 8; 11\} =$
$= \{4; 8\}$.

5. $A \cap (B \cup C) = A \cap \{3; 4; 7; 8; 10; 11\} = \{3; 4; 8; 10\}$.

6. $(A \cap B) \cup C = \{3; 8; 10\} \cup C = \{3; 4; 8; 10; 11\}$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$
$= \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap \{3; 4; 7; 8; 10; 11\} =$
$= \{3; 4; 7; 8; 10\}$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{3; 8; 10\} \cup \{8\} = \{3; 8; 10\}$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4; 8\} \cup \{8\} = \{4; 8\}$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$
$= \{1; 3; 4; 6; 8; 10; 11\} \cap \{3; 4; 7; 8; 10; 11\} =$
$= \{3; 4; 8; 10; 11\}$.

Проверочная работа 1

Дано:

$A = \{1; 3; 4; 6; 10\}$;

$B = \{2; 4; 5; 6; 9; 11\}$;

$C = \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}$.

Найти:

1. $A \cap B$.

2. $A \cup B$.

3. $A \cup (B \cap C)$.

4. $(A \cup B) \cap C$.

5. $A \cap (B \cup C)$.

6. $(A \cap B) \cup C$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Зачетная работа 1

Дано:

$A = \{2; 3; 5; 8; 10\}$;

$B = \{1; 4; 5; 6; 9; 10\}$;

$C = \{2; 4; 8; 9\}$.

Найти:

1. $A \cap B$.

2. $A \cup B$.

3. $A \cup (B \cap C)$.

4. $(A \cup B) \cap C$.

5. $A \cap (B \cup C)$.

6. $(A \cap B) \cup C$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Практикум 2

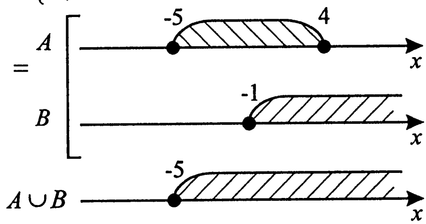
Упражнения на операции над множествами.

$A = [-5; 4];\quad B = [-1; \infty);\quad C = (-\infty; 2].$

(объединение ($\cup$) аналог совокупности [;

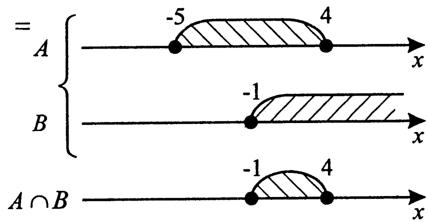
пересечение ($\cap$) аналог системы {) .

1. $A \cup B = [-5; 4] \cup [-1; \infty) =$
$= [-5; \infty).$



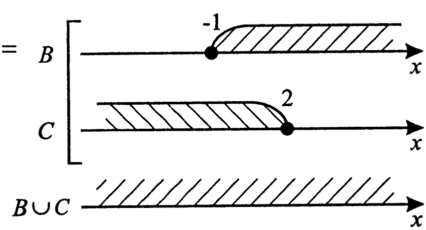
Ответ: $A \cup B = [-5; \infty).$

2. $A \cap B = [-5; 4] \cap [-1; \infty) =$
$= [-1; 4].$



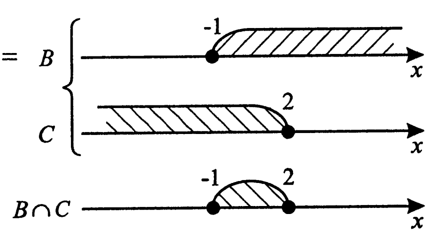
Ответ: $A \cap B = [-1; 4].$

3. $B \cup C = [-1; \infty) \cup (-\infty; 2] =$
$= (-\infty; \infty).$



Ответ: $B \cup C = (-\infty; \infty).$

4. $B \cap C = [-1; \infty) \cap (-\infty; 2] =$
$= [-1; 2].$

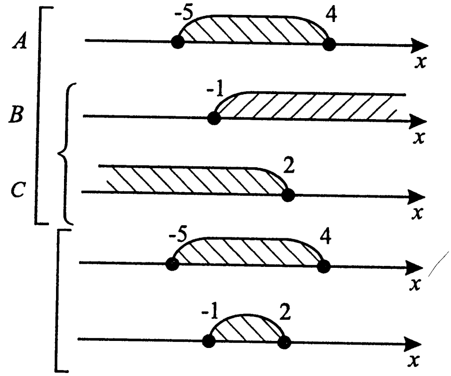


Ответ: $B \cap C = [-1; 2].$

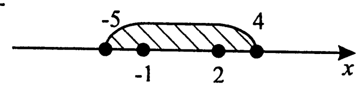
5. $A \cup (B \cap C) = [-5;4] \cup ([-1;\infty) \cap (-\infty;2]) =$

$= [-5;4] \cup [-1;2] =$

$= [-5;4]$.



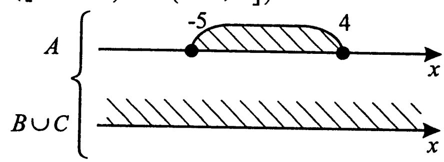
Ответ: $A \cup (B \cap C) = [-5;4]$.



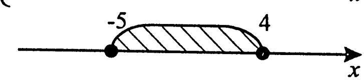
6. $A \cap (B \cup C) = [-5;4] \cap ([-1;\infty) \cup (-\infty;2]) =$

$= [-5;4] \cap (-\infty;\infty) =$

$= [-5;4]$.



Ответ: $A \cap (B \cup C) = [-5;4]$.

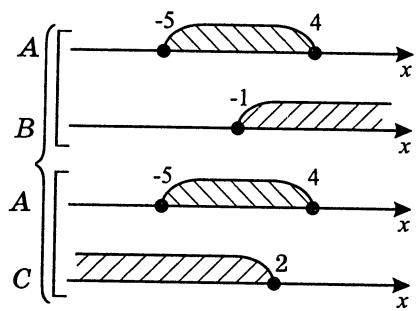


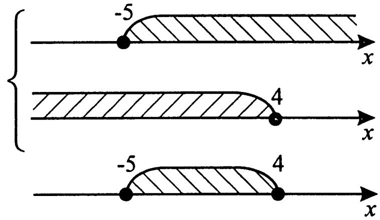
7. $(A \cup B) \cap (A \cup C) = ([-5;4] \cup [-1;\infty)) \cap$

$\cap([-5;4] \cup (-\infty;2]) =$

$= [-5;\infty) \cap (-\infty;4] =$

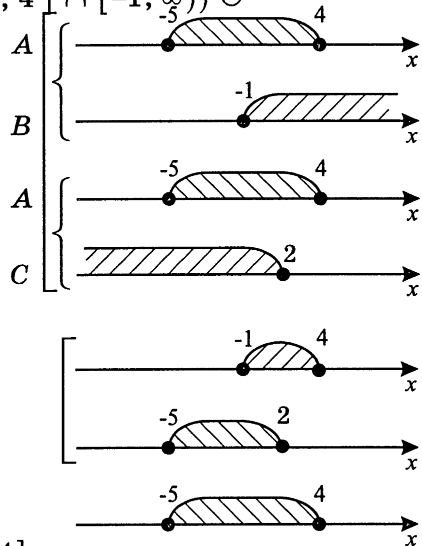
$= [-5;4]$.





Ответ:
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = [-5;4]$.

8. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = ([-5;\ 4\ ] \cap [-1;\ \infty)) \cup$
$\cup([-5;\ 4\ ] \cap (-\infty;2\ ]) =$
$= [-1;\ 4\ ] \cap [-5;\ 2\ ] =$
$= [-5;\ 4\ ]$



Ответ:
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = [-5;4]$.

Примечание. Результаты решения примеров 5, 6, 7 и 8 совпали. Что это, случайность или закономерность?
Увы, это случайность, связанная с особенностями подбора множеств A, B и C.

Совпадение множеств в заданиях 5, 7 – II закон дистрибутивности;

Совпадение множеств в заданиях 6, 8 – I закон дистрибутивности.

Тренировочная работа 2

Самостоятельно выполните упражнения и проверьте полученные решения.
Дано:

$A = [-3; 4]$;

$B = [-2; \infty)$;

$C = (-\infty; 3]$.

1. $A \cap B$.

2. $A \cup B$.

3. $A \cup (B \cap C)$.

4. $(A \cup B) \cap C$.

5. $A \cap (B \cup C)$.

6. $(A \cap B) \cup C$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

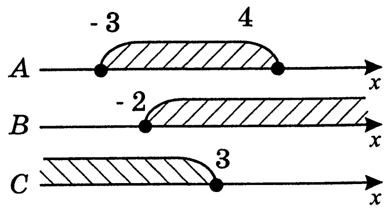
Решение тренировочной работы 2

Дано:

$A = [-3; 4];$

$B = [-2; \infty);$

$C = (-\infty; 3].$



1. $B \cup (A \cap C) = [-2;\infty) \cup [-3;3] = [-3;\infty).$

2. $B \cap (A \cup C) = [-2;\infty) \cap (-\infty;4] = [-2;4].$

3. $C \cup (A \cap B) = (-\infty;3] \cup [-2;4] = (-\infty;4].$

4. $C \cap (A \cup B) = (-\infty;3] \cap [-3;\infty) = [-3;3].$

5. $C \cap (A \cap B) = (-\infty;3] \cap [-2;4] = [-2;3].$

6. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (-\infty;4] \cap (-\infty;\infty) = (-\infty;4].$

7. $(A \cap B) \cup (A \cap C) = [-2;4] \cup [-3;3] = [-3;4].$

8. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = [-3;\infty) \cap (-\infty;\infty) = [-3;\infty).$

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = [-3;3] \cup [-2;3] = [-3;3].$

10. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = [-2;4] \cup [-2;3] = [-2;4].$

Примечания.

Результаты примеров 2 и 10 совпадают.

В данном случае выполняется первый закон дистрибутивности,

т.е. $B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C)$,

аналогично совпадают и результаты примеров 4 и 9.

Результаты примеров 3 и 6 совпадают. В данном случае выполняется второй закон дистрибутивности,

т.е. $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B).$

Применение операций над множествами к решению неравенств

Рассмотрим ряд неравенств, при решении которых, возможно использование операций объединения и пересечения.

1. $a \cdot b \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

2. $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

3. $a \cdot b \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

4. $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

5. $\frac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

6. $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

7. $\frac{a}{b} \leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geqslant 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

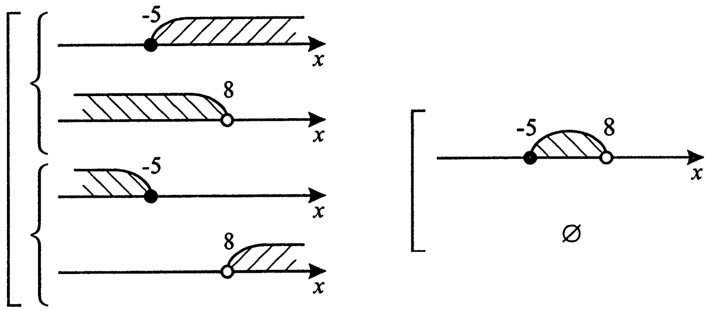
8. $\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Практикум 3

Решите неравенства:

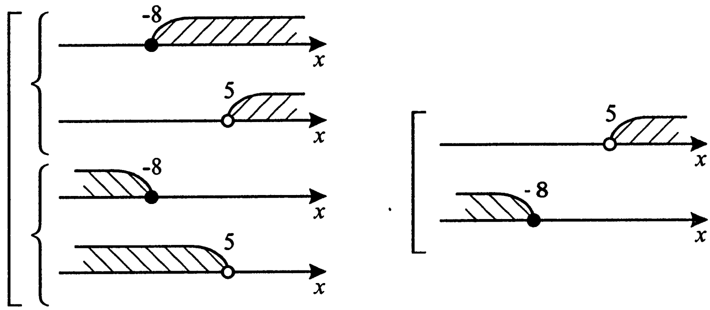
1. $\frac{x+5}{x-8} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 5 \geqslant 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 5 \leqslant 0 \\ x - 8 > 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -5 \\ x < 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -5 \\ x > 8 \end{cases} \end{array}\right..$

В дальнейшем, если равносильность не нарушается, то (по умолчанию) знаки равносильности не ставятся.



Ответ: $[5;8)$.

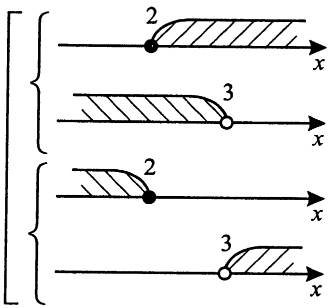
2. $\frac{x+8}{x-5} \geqslant 0; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 8 \geqslant 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 8 \leqslant 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -8 \\ x > 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -8 \\ x < 5 \end{cases} \end{array}\right..$

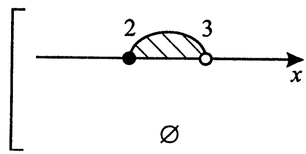


Ответ: $(-\infty;-8] \cup (5;\infty)$.

Если применить метод интервалов, то решения будут проще, но данный метод позволяет развить логику рассуждений.

3. $\frac{x-2}{3-x} \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \leqslant 0 \\ 3-x < 0 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 3 > x \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 2 \\ 3 < x \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x > 3 \end{cases}\end{array}\right.$.

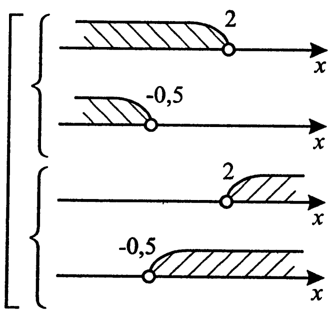




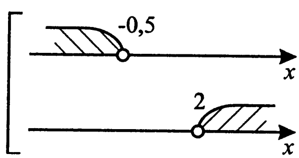
Ответ: $[2;3)$.

4. $(-x+2)(2x+1) < 0$.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} -x+2 > 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+2 < 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2 > x \\ 2x < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < x \\ 2x > -1 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x < 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}\end{array}\right.$.



или



Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup (2;\infty)$.

Практикум 4

Некоторые неравенства, результаты решения которых полезно иметь в виду:

1. $a^2 > 0$ $\qquad (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

2. $a^2 \geqslant 0$ $\qquad (-\infty; \infty)$;

3. $a^2 \leqslant 0$ $\qquad \{0\}$;

4. $a^2 < 0$ $\qquad \varnothing$;

5. $a^2 + b^2 \geqslant 0$ $\qquad$ при любых a и b;

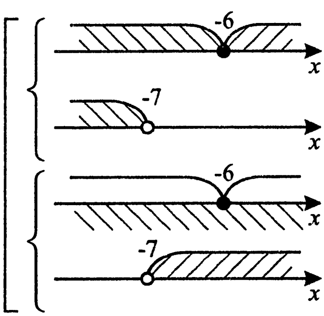
6. $a^2 + b^2 > 0$ $\qquad \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$;

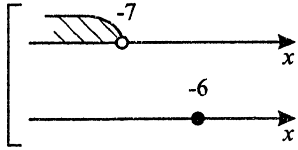
7. $a^2 + b^2 \leqslant 0$ $\qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$;

8. $a^2 + b^2 < 0$ $\qquad \varnothing$.

Примечание. $a^2 + b^2 = 0$ только при $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

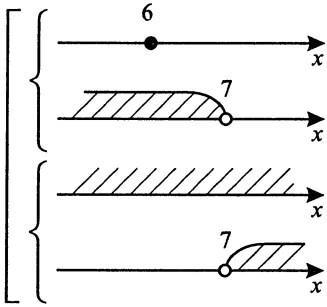
1. $\dfrac{(x+6)^2}{x+7} \leqslant 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+6)^2 \geqslant 0 \\ x + 7 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+6)^2 \leqslant 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

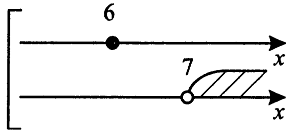




Ответ: $(-\infty; -7) \cup \{6\}$.

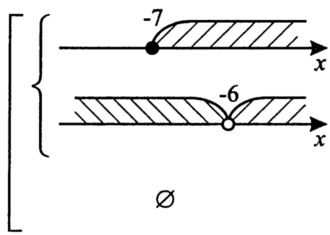
2. $\dfrac{(x-6)^2}{x-7} \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-6)^2 \leqslant 0 \\ x-7<0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-6)^2 \geqslant 0 \\ x-7>0 \end{cases} \end{array}\right.$.





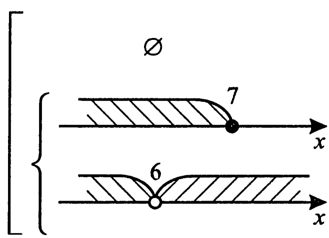
Ответ: $(7;\infty) \cup \{6\}$.

3. $\dfrac{x+7}{(x+6)^2} \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7 \geqslant 0 \\ (x+6)^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \leqslant 0 \\ (x+6)^2 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.



Ответ: $[-7;-6) \cup (-6;\infty)$.

4. $\dfrac{x-7}{(x-6)^2} \leqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-7 \geqslant 0 \\ (x-6)^2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-7 \leqslant 0 \\ (x-6)^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.



Ответ: $(-\infty;6) \cup (6;7]$.

5. $(x^2-4)^2 + [x(x-2)]^2 \leqslant 0$; $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x(x-2)=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Ответ: $\{2\}$.

6. $\left(x(x+2)(x-1)\right)^2 + \left(x(x-1)\right)^2 > 0$.

Выясним, при каких x

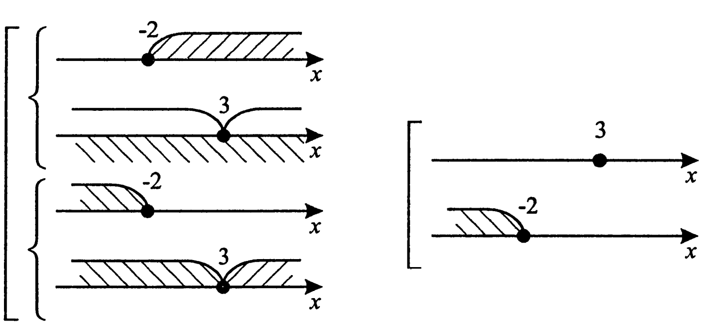
$\left(x(x+2)(x-1)\right)^2 + \left(x(x-1)\right)^2 = 0$.

$$\begin{cases} x(x+2)(x-1) = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \quad \text{при } \{0; 1\}$$

Исключим эти значения.

Ответ: при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (1;\infty)$.

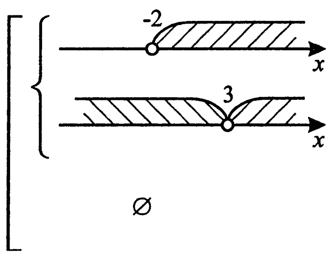
7. $(x-3)^2(x+2) \leqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ (x-3)^2 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \leqslant 0 \\ (x-3)^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$.



Ответ: $(-\infty;-2] \cup \{3\}$.

8. $(x-3)^2(x+2) > 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 > 0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 < 0 \\ (x-3)^2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$



Ответ: $(-2;3) \cup (3;\infty)$.

Тренировочная работа 3

1. $(x - 7)(x + 6) \geqslant 0$.

2. $\dfrac{x + 6}{x - 7} \leqslant 0$.

3. $\dfrac{(x - 3)^2}{x - 7} < 0$.

4. $\dfrac{x^2}{(x - 7)(x + 6)} \geqslant 0$.

5. $\dfrac{(x - 4)^2}{(x + 7)(x - 6)} \leqslant 0$.

6. $\dfrac{(x + 4)^2}{(x+3)(x-2)} \leqslant 0$.

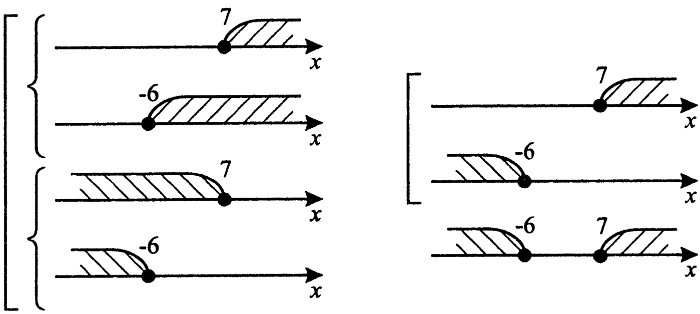
7. $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4x + 4)^2 \leqslant 0$.

8. $(x^3 - 4x)^2 + (x^3 - 2x^2)^2 > 0$.

Решение тренировочной работы 3

1. $(x-7)(x+6) \geqslant 0$;

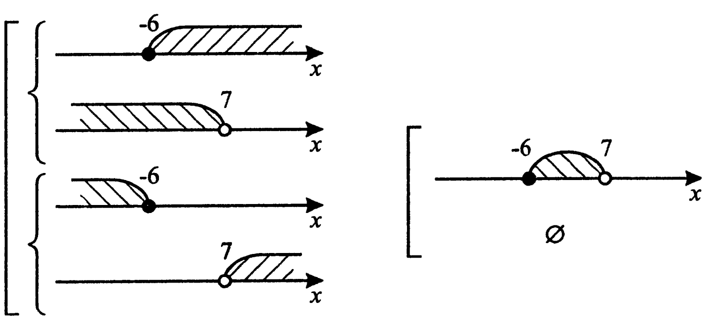
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-7\geqslant 0\\x+6\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-7\leqslant 0\\x+6\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 7\\x\geqslant -6\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant 7\\x\leqslant -6\end{cases}\end{array}\right..$$



Ответ: $(-\infty;-6]\cup[7;\infty)$.

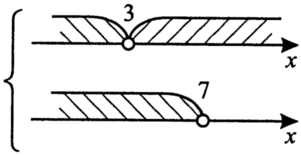
2. $\dfrac{x+6}{x-7} \leqslant 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+6\geqslant 0\\x-7< 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+6\leqslant 0\\x-7> 0\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -6\\x< 7\end{cases}\\ \begin{cases}x\leqslant -6\\x> 7\end{cases}\end{array}\right..$$



Ответ: $[-6;7)$.

3. $\dfrac{(x-3)^2}{x-7} < 0;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)^2 > 0\\ x-7 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)^2 < 0\\ x-7 > 0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \neq 3\\ x < 7\end{cases}\\ \varnothing\end{array}\right..$

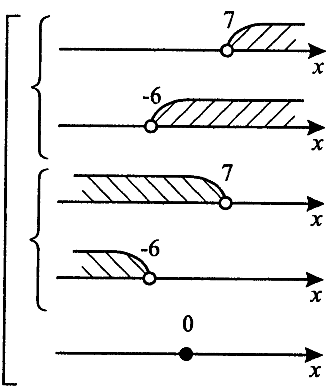


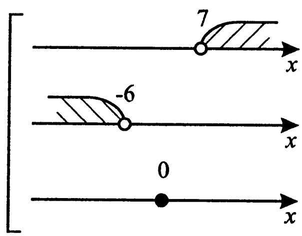
Ответ: $(-\infty;3) \cup (3;7)$.

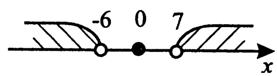
4. $\dfrac{x^2}{(x-7)(x+6)} \geqslant 0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2 \geqslant 0\\ (x-7)(x+6) > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2 \leqslant 0\\ (x-7)(x+6) < 0\end{cases}\end{array}\right.;$ $\quad (x^2 \geqslant 0$ при любых $x)$ $\quad \left[\begin{array}{l}(x-7)(x+6) > 0\\ \begin{cases}x = 0\\ (x-7)(x+6) < 0\end{cases}\end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-7 > 0\\ x+6 > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-7 < 0\\ x+6 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ (0-7)(0+6) < 0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 7\\ x > -6\end{cases}\\ \begin{cases}x < 7\\ x < -6\end{cases}\\ x = 0\end{array}\right..$





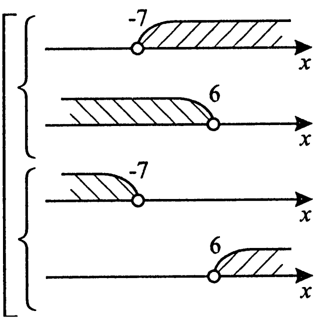


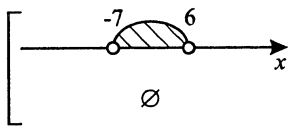
Ответ: $(-\infty;-6) \cup \{0\} \cup (7;\infty)$.

5. $\dfrac{(x-4)^2}{(x+7)(x-6)} \leqslant 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-4)^2 \geqslant 0\\(x+7)(x-6)<0\end{cases}\\ \begin{cases}(x-4)^2 \leqslant 0\\(x+7)(x-6)>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left((x-4)^2 \geqslant 0 \text{ при } \forall x\right)\ \left[\begin{array}{l}(x+7)(x-6)<0\\ \begin{cases}x=4\\(x+7)(x-6)>0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7>0\\x-6<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+7<0\\x-6>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\11\cdot(-2)>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-7\\x<6\end{cases}\\ \begin{cases}x<-7\\x>6\end{cases}.\\ \quad\varnothing\end{array}\right.$$



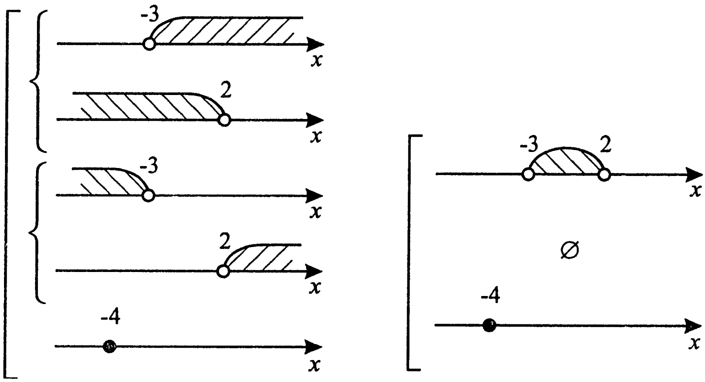


Ответ: $(-7;6)$.

6. $\dfrac{(x+4)^2}{(x+3)(x-2)} \leqslant 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+4)^2 \geqslant 0\\(x+3)(x-2)<0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+4)^2 \leqslant 0\\(x+3)(x-2)>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left((x+4)^2 \geqslant 0 \text{ при } \forall x\right)\ \left[\begin{array}{l}(x+3)(x-2)<0\\ \begin{cases}x=-4\\(x+3)(x-2)>0\end{cases}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>0\\x-2<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0\\x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-4\\(-4+3)(-4-2)>0\end{cases}\end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\x<2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\x>2\end{cases}\\ x=-4\end{array}\right. .$$



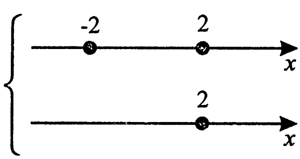
Ответ: $\{-4\} \cup (-3;\, 2)$.

7. $\left(x^2-4\right)^2+\left(x^2-4x+4\right)^2 \leqslant 0;$

$$\left(x^2-4\right)^2+\left(x^2-4x+4\right)^2=0;$$

$$\begin{cases}x^2-4=0\\x^2-4x+4=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}(x+2)(x-2)=0\\(x-2)^2=0\end{cases}.$$



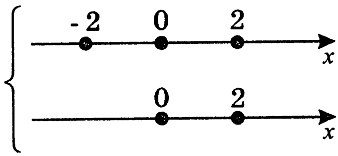
Ответ: $\{2\}$.

8. $\left(x^3 - 4x\right)^2 + \left(x^3 - 2x^2\right)^2 > 0.$

Для этого выясним, когда $\left(x^3 - 4x\right)^2 + \left(x^3 - 2x^2\right)^2 = 0$, и исключим эти значения, так как

$$\left(a^2 + b^2 > 0 \quad \begin{cases} \forall a, b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \right); \qquad \begin{cases} x^3 - 4x = 0 \\ x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x(x-2)(x+2) = 0 \\ x^2(x-2) = 0 \end{cases};$$



$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$.

Зачетная работа 2

1. $(6 - x)(x + 2) < 0$.

2. $\dfrac{x + 2}{6 - x} \geqslant 0$.

3. $\dfrac{(x + 7)^2}{x + 3} \geqslant 0$.

4. $\dfrac{(x + 3)^2}{x^2 - 1} \leqslant 0$.

5. $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} \leqslant 0$.

6. $\dfrac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 1)^2} \leqslant 0$.

7. $(4 - x)(x + 1)(x - 3) > 0$.

8. $\dfrac{(x + 2)(1 - x)}{(x^2 - 9)^2 + (x^2 + 2x - 3)^2} \leqslant 0$.

Мощность множества

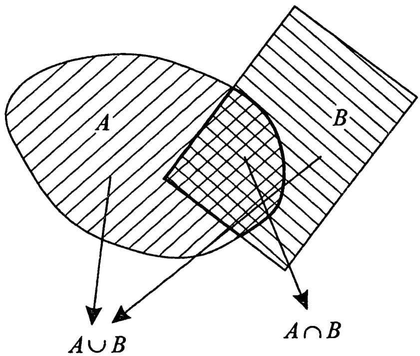
Определение 6. *Для конечного множества* A *через* $m(A)$ *обозначим число элементов в множестве* A.

$\varnothing$ – таким символом обозначается множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называется пустым. Очевидно, $m(\varnothing) = 0$.

Теорема. Для любых конечных множеств справедливо утверждение $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Примечание.

Если $A \cap B \neq 0$, то в число $m(A) + m(B)$ входит дважды число $m(A \cap B)$, как часть числа $m(A)$ и как часть числа $m(B)$, но в число $m(A \cup B)$ число $m(A \cap B)$ входит только один раз (см. рис.).



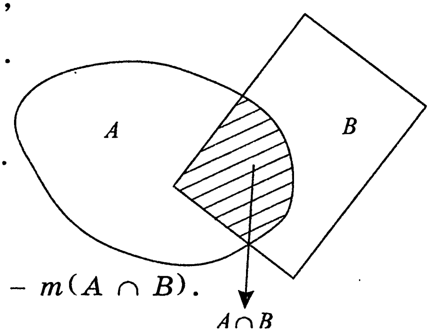
$m(A)$ называется мощностью множества A.

Для **бесконечных** множеств, например множества **рациональных** чисел, мощность множества называется ***счетной***. Для **иррациональных** чисел мощность множества – **континуум**.

Практикум 5

I. Какое условие надо наложить на A и B, чтобы были справедливы следующие утверждения, если $A \neq B$?

1. $m(A) + m(B) > m(A \cup B)$;
2. $m(A \cup B) = m(A)$;
3. $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$;
4. $m(A) + m(B) < m(A \cup B)$.



1. $m(A) + m(B) > m(A \cup B)$.

Очевидно, что при $A \cap B \neq \varnothing$, так как

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Ответ: при $A \cap B \neq \varnothing$.

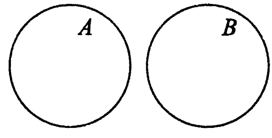
2. $m(A \cup B) = m(A)$:

1) если $B = \varnothing$, тогда $A \cup B = A \cup \varnothing = A$;

2) $B \subset A$, так как при этом $A \cup B = A$, то $m(A \cup B) = m(A)$.

Ответ: при $B \subset A$.

Примечание. $\varnothing \subset B$.



3. $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$.

Если $A \cap B = \varnothing$, тогда $m(A \cap B) = 0$, и, с учетом результатов теоремы получим, что $m(A) + m(B) = m(A \cup B)$

Ответ: при $A \cap B = \varnothing$.

4. $m(A) + m(B) < m(A \cup B)$.

Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,

то это невозможно, так как $m(A \cap B) \geqslant 0$ всегда.

Ответ: утверждение ложно при любых A и B.

II. 1. Экзамен по математике сдавали 250 человек.
Отметку ниже пяти получили 180 человек.
Выдержали экзамен 210 человек.
Сколько человек получили отметку три или четыре?

1) Пусть A – множество человек, выдержавших экзамен. Тогда $m(A) = 210$.

B – множество человек, получивших отметку ниже пяти, т.е. $m(B) = 180$.

2) $A \cup B$ – множество человек, сдававших экзамен. Тогда $m(A \cup B) = 250$. С другой стороны, по теореме $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

3) $A \cap B$ – множество человек, сдавших экзамен на три или четыре.
Тогда $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$.

Подставляя уже известные данные, имеем
$m(A \cap B) = 210 + 180 - 250 = 140$.

Ответ: 140 человек получили отметку три или четыре.

2. В школе 1400 учеников, из них 1200 учеников умеют кататься на лыжах. 952 ученика умеют кататься на коньках. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 учеников.
Сколько учеников умеют кататься на лыжах и на коньках?

Из условия задачи следует, что только 1340 учащихся умеют кататься на коньках или лыжах.

1) Пусть A – множество учащихся, умеющих кататься на лыжах, тогда $m(A) = 1200$.

2) Пусть B – множество учащихся, умеющих кататься на коньках, тогда $m(B) = 952$.

3) $A \cup B$ – множество учащихся, умеющих кататься на лыжах или на коньках, тогда по теореме
$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, где $A \cap B$ – множество учащихся, умеющих кататься и на лыжах, и на коньках.

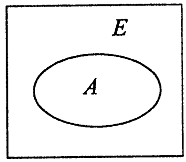
Тогда $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$,
значит $m(A \cap B) = 1200 + 952 - 1340 = 812$.
$m(A \cap B) = 812$.

Ответ: 812 учеников школы умеют кататься и на лыжах, и на коньках.

Дополнение

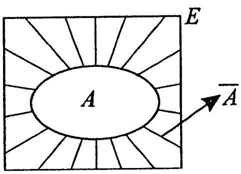
Определение 7. *Пусть E — есть основное или универсальное множество, где $A \subset E$, тогда*

$$\begin{cases} A \cup E = E \\ A \cap E = A \end{cases} \qquad A \subset E.$$



Определение 8. *Множество всех элементов универсального множества E, не принадлежащих множеству A, называется дополнением множества A до E.*

Обозначается $\overline{A}_E$ или просто $\overline{A}$, если известно универсальное множество E.



Из определения следует:

1. $\begin{cases} A \cup \overline{A} = E \\ A \cap \overline{A} = \varnothing \end{cases}$; 2. $\overline{\varnothing} = E$;

3. $\overline{E} = \varnothing$; 4. $E \cap \overline{A} = \overline{A}$;

5. $\overline{A} \cup E = E$; 6. $\overline{\overline{A}} = A$.

Свойства дополнений:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Примечание. Эти свойства дополнений обладают свойствами двойственности.

Доказательство:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

   1) Докажем $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   Пусть $x \in \overline{A \cup B}$, т.е. $x \notin A \cup B$,
   тогда $x \notin A$ и $x \notin B$.

   Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, т.е. $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$;
   $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   2) Докажем $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

   Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, т.е. $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$,
   т.е. $x \notin A$ или $x \notin B$, отсюда $x \notin A \cup B$.

   Таким образом, $x \in \overline{A \cup B}$.

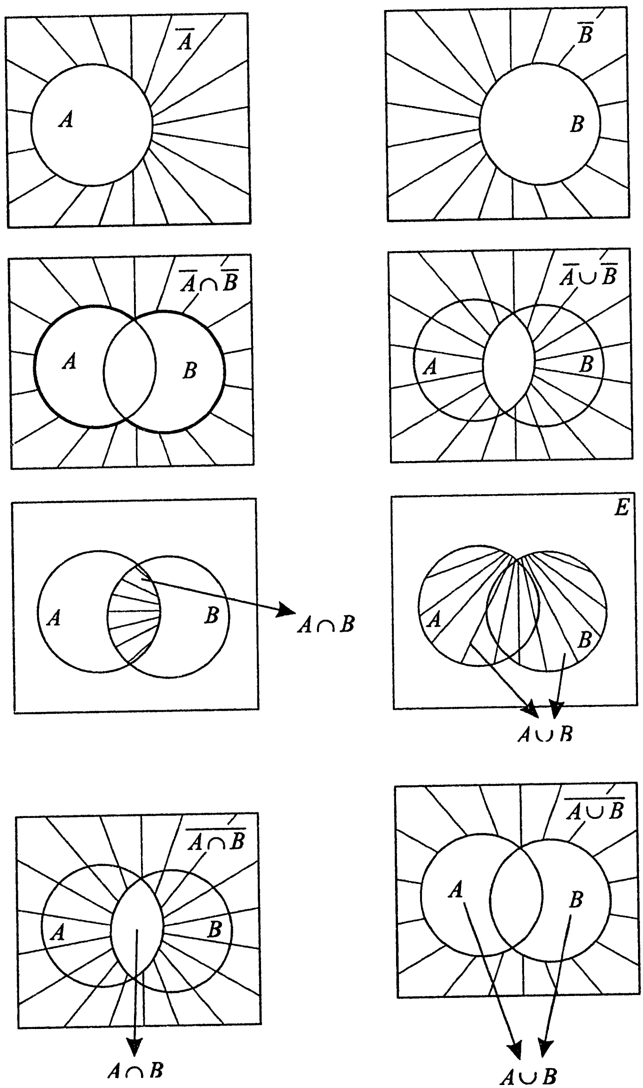
   Итак, мы доказали, что

$$\begin{cases} \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Доказательство попробуйте провести самостоятельно, аналогично предыдущему.

Практикум 6

Графические решения и иллюстрации операций над множествами, связанные с дополнением.



Обратите внимание на одинаковые картинки и подумайте, с какими свойствами это связано.

Практикум 7

Дано:

$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\};$

$B = \{2; 3; 5; 8; 10\};$

$A = \{1; 3; 4; 8\}.$

Найти:

1. $\overline{(A \cup B)}$.
2. $\overline{A}_E$.
3. $\overline{B}_E$.
4. $\overline{(A \cap B)}_E$.
5. $\overline{A}_E \cup \overline{B}_E$.
6. $\overline{A \cap \overline{B}_E}$.
7. $\overline{A}_E \cap \overline{B}_E$.
8. $\overline{\overline{A}_E \cup B}$.

Решение практикума 7

1. $\overline{(A \cup B)} = \overline{\{1; 2; 3; 4; 5; 8; 10\}} = \{6; 7; 9\}$.
2. $\overline{A}_E = \{2; 5; 6; 7; 9; 10\}$.
3. $\overline{B}_E = \{1; 4; 6; 7; 9\}$.
4. $\overline{(A \cap B)}_E = \overline{\{3; 8\}}_E = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}$.
5. $\overline{A}_E \cup \overline{B}_E = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 9; 10\}$.
6. $\overline{A \cap \overline{B}_E} = \overline{\{1; 4\}}_E = \{2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
7. $\overline{A}_E \cap \overline{B}_E = \{6; 7; 9\}$.
8. $\overline{\overline{A}_E \cup B} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = A \cap \{1; 4; 6; 7; 9\} = \{1; 4\}$.

Тренировочная работа 4

1. Найдите:

$A = \{1; 2; 5; 7; 8; 10; 11\}$;

$B = \{2; 5; 6; 10; 12\}$;

$C = \{5; 7; 8; 12\}$.

1) $A \cap B$.

2) $A \cup B$.

3) $A \cup (B \cap C)$.

4) $(A \cup B) \cap C$.

5) $A \cap (B \cup C)$.

6) $(A \cap B) \cup C$.

7) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

8) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$.

9) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

10) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2. $M = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$;

$N = \{4; 8; 12\}$; $K = \{2; 6; 12; 14\}$.

1) $\overline{N_M} \cap \overline{K_M}$.

2) $\overline{N_M} \cup \overline{K_M}$.

3) $\overline{(N \cap K)_M}$.

4) $\overline{(N \cup K)_M}$.

3. Графически иллюстрируйте:

1) $A \cup \overline{B}$; 3) $\overline{A \cup \overline{B}}$; 5) $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$;

2) $\overline{A} \cap B$; 4) $\overline{A \cup B}$; 6) $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right)$.

Решение тренировочной работы 4

1. Найдите:

$A = \{1; 2; 5; 7; 8; 10; 11\}$;

$B = \{2; 5; 6; 10; 12\}$;

$C = \{5; 7; 8; 12\}$.

1) $A \cap B = \{2; 5; 10\}$.

2) $A \cup B = \{1; 2; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12\}$.

3) $A \cup (B \cap C) = \{1; 2; 5; 7; 8; 10; 11; 12\}$.

4) $(A \cup B) \cap C = \{5; 7; 8; 12\}$.

5) $A \cap (B \cup C) = \{2; 5; 7; 8; 10\}$.

6) $(A \cap B) \cup C = \{2; 5; 7; 8; 10; 12\}$.

7) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{2; 5; 6; 7; 8; 10; 12\}$.

8) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{2; 5; 10; 12\}$.

9) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{5; 7; 8; 12\}$.

10) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2; 5; 7; 8; 10; 12\}$.

2. $M = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$;

$N = \{4; 8; 12\}$;

$K = \{2; 6; 12; 14\}$.

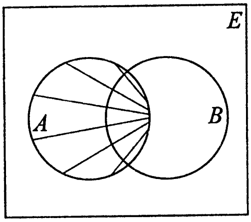
1) $\overline{N_M} \cap \overline{K_M} = \{2; 6; 10; 14\} \cap \{4; 8; 10\} = \{10\}$.

2) $\overline{N_M} \cup \overline{K_M} = \{2; 6; 10; 14\} \cup \{4; 8; 10\} = \{2; 4; 6; 8; 10; 14\}$.

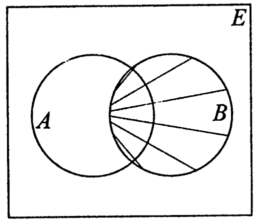
3) $\overline{(N \cap K)_M} = \overline{\{12\}_M} = \{2; 4; 6; 8; 10; 14\}$.

4) $\overline{(N \cup K)_M} = \overline{\{2; 4; 6; 8; 12; 14\}_M} = \{10\}$.

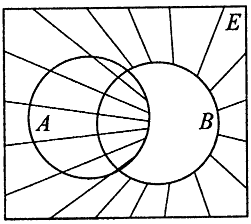
3. Графические иллюстрации операций над множествами и дополнения до E, где



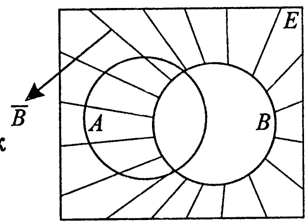
и



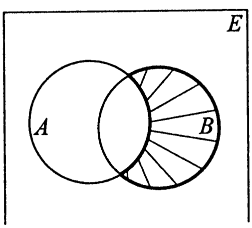
1) $A \cup \overline{B}$



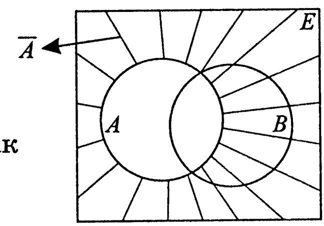
так как



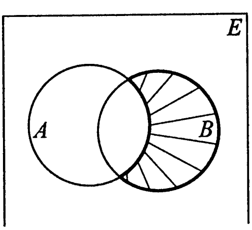
2) $\overline{A} \cap B$



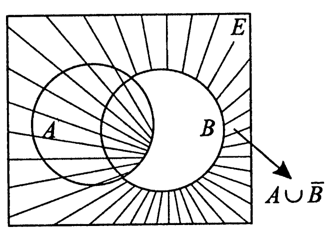
так как



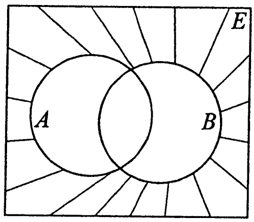
3) $\overline{A \cup \overline{B}}$



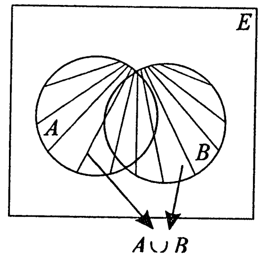
так как



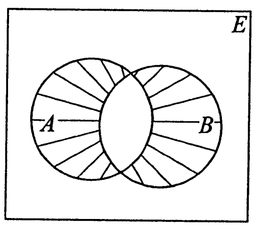
4) $\overline{A \cup B}$



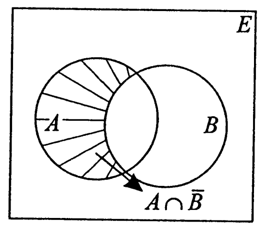
так как



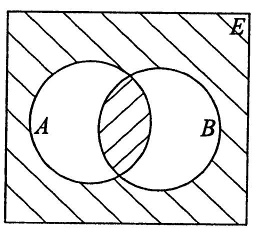
5) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$



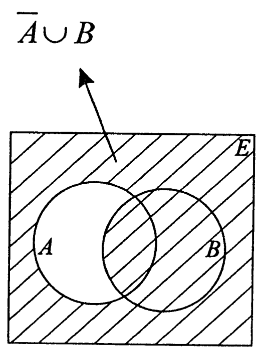
так как



6) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$



так как



Практикум 8

Вернемся и попробуем теперь с позиций новых знаний решить задачу, которую мы раньше решили (см. с. 39).

1. В школе 1400 учеников из них 1200 учеников умеют кататься на лыжах. 952 ученика умеют кататься на коньках. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 учеников. Сколько учеников умеют кататься на лыжах и на коньках?

Пусть

1) E – множество всех учеников школы; $m(E) = 1400$.

2) A – множество всех учеников школы, умеющих кататься на лыжах; $m(A) = 1200$.

   $\overline{A}$ – множество всех учеников школы, не умеющих кататься на лыжах.

3) B – множество всех учеников школы, умеющих кататься на коньках; $m(B) = 952$. $\overline{B}$ – множество всех учеников школы, не умеющих кататься на коньках.

4) $\overline{A} \cap \overline{B}$ – множество всех учеников школы, не умеющих кататься ни на лыжах, ни на коньках.

Но $m\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 60$, так как $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Поскольку $\begin{cases} (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = E \\ (A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \varnothing \end{cases}$,

то $m(A \cup B) = m(E) - m(\overline{A \cup B})$,

т.е. $m(A \cup B) = 1400 - 60 = 1340$.

Тогда, так как $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$,

то $m(A \cap B) = 1200 + 952 - 1340$,

значит $m(A \cap B) = 812$.

Ответ: 812 учеников школы умеют кататься и на лыжах, и на коньках.

2. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский, 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Пусть

1) A – множество туристов, знающих английский язык.

Тогда $m(A) = 70$.

2) B – множество туристов, знающих французский язык.

Тогда $m(B) = 45$.

3) $A \cap B$ – множество туристов, знающих и английский, и французский язык.

Тогда $m(A \cap B) = 23$.

4) Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, значит $m(A \cup B) = 70 + 45 - 23 = 92$.

5) Так как

$$\left.\begin{array}{l}(A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = E \\ (A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \varnothing\end{array}\right| \Rightarrow m(\overline{A \cup B}) = m(E) - m(A \cup B),$$

где $\overline{A \cup B}$ – множество туристов, не знающих ни английского, ни французского языка.

$$m\left(\overline{A \cup B}\right) = 100 - 92 = 8.$$

Ответ: 8 туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка.

Рассмотрим более сложную задачу.

3. В олимпиаде по математике для школьников приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии.

1) По алгебре решили задачу 20 человек.

2) По геометрии решили задачу 18 человек.

3) По тригонометрии решили задачу 18 человек.

4) По алгебре и геометрии решили задачу 7 человек.

5) По алгебре и тригонометрии решили задачу 8 человек.

6) По геометрии и тригонометрии решили задачу 9 человек.

7) Ни одной задачи не решили 3 человека.

Вопросы:

1) Сколько учащихся решили все задачи?

2) Сколько учащихся решили только две задачи?

3) Сколько учащихся решили только одну задачу?

Итак, попытаемся, используя понятие дополнения, решить задачу.

1) Пусть

E – множество всех учеников, учавствовавших в олимпиаде;

A – множество учеников, решивших задачу по алгебре;

B – множество учеников, решивших задачу по геометрии;

C – множество учеников, решивших задачу по тригонометрии.

По условию

$m(A) = 20;\qquad m(A \cap B) = 7;$

$m(B) = 18;\qquad m(A \cap C) = 8;$

$m(C) = 18;\qquad m(B \cap C) = 9.$

Так как $\begin{matrix}(A \cup B \cup C) \cup \overline{(A \cup B \cup C)} = E \\ (A \cup B \cup C) \cap \overline{(A \cup B \cup C)} = \varnothing\end{matrix}$,

то $m(A \cup B \cup C) + m\overline{(A \cup B \cup C)} = m(E)$;

$m\overline{(A \cup B \cup C)}$ – количество учеников не решивших ни одной задачи, т.е. $m\overline{(A \cup B \cup C)} = 3$.

Значит $m(A \cup B \cup C) = 40 - 3 = 37$,

где $A \cup B \cup C$ – множество учеников, решивших хотя бы одну задачу.

2) Выясним чему равны:

а) $m(A \cup B)$;

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,

тогда $m(A \cup B) = 20 + 18 - 7 = 31$;

б) $m(A \cup C)$;

$m(A \cup C) = m(A) + m(C) - m(A \cap C)$,

тогда $m(A \cup C) = 20 + 18 - 8 = 30$.

в) $m(B \cup C)$;

$m(B \cup C) = m(B) + m(C) - m(B \cap C)$,

тогда $m(B \cup C) = 18 + 18 - 9 = 27$.

3) Используя полученные результаты, продолжим решение:

а) $m(A \cap B \cap C) = m(A \cap B) + m(C) - m((A \cap B) \cup C)$;

$m((A \cap B) \cup C) = m[(A \cup C) \cap (B \cup C)] =$

$= m(A \cup C) + m(B \cup C) - m[(A \cup C) \cup (B \cup C)] =$

$= m(A \cup C) + m(B \cup C) - m(A \cup B \cup C)$.

Тогда $m((A \cap B) \cup C) = 30 + 27 - 37 = 20$,

значит $m(A \cap B \cap C) = 7 + 18 - 20 = 5$ – число учеников, решивших все три задачи.

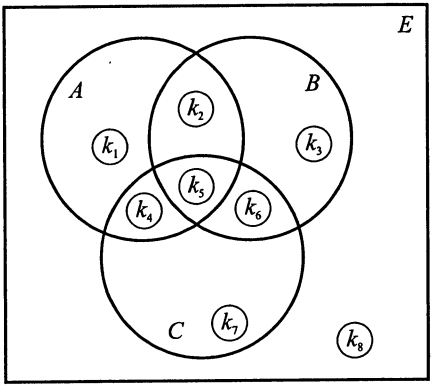
б) $m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - 3m(A \cap B \cap C)$ – число учеников решивших только две задачи, т.е.

$m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - 3m(A \cap B \cap C) =$

$= 7 + 8 + 9 - 3 \cdot 5 = 9$.

в) $m(A \cup B \cup C) - (5 + 9) = 37 - 5 - 9 = 23$ – число учеников решивших только одну задачу.

Попробуем это решение иллюстрировать графически, тогда возможно оно станет более понятно, хотя и с несколько иных позиций. Обозначим разбиение универсального множества E множествами A; B; C.



k_1 – множество учеников, решивших только задачу по алгебре;

k_2 – множество учеников, решивших только две задачи, по алгебре и по геометрии;

k_3 – множество учеников, решивших только задачу по геометрии;

k_4 – множество учеников, решивших только две задачи, по алгебре и тригонометрии;

k_5 – множество всех учеников, решивших все три задачи;

k_6 – множество всех учеников, решивших только две задачи, по геометрии и тригонометрии;

k_7 – множество всех учеников, решивших только задачу по тригонометрии;

k_8 – множество всех учеников, не решивших ни одной задачи.

Тогда

$m(k_5) = m(A \cap B \cap C) = 5$;

$$m(k_2) = m(A \cap B) - m(A \cap B \cap C) = 7 - 5 = 2;$$

$$m(k_4) = m(A \cap C) - m(A \cap B \cap C) = 8 - 5 = 3;$$

$$m(k_6) = m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C) = 9 - 5 = 4;$$

$$m(k_1) = m(A) - m(k_2) - m(k_4) - m(k_5) = 20 - 2 - 3 - 5 = 10;$$

$$m(k_3) = m(B) - m(k_2) - m(k_6) - m(k_5) = 18 - 2 - 4 - 5 = 7;$$

$$m(k_7) = m(C) - m(k_4) - m(k_6) - m(k_5) = 18 - 3 - 4 - 5 = 6.$$

Тогда очевидно, что

$m(k_2) + m(k_4) + m(k_6) = 2 + 3 + 4 = 9$ – число учеников, решивших только две задачи;

$m(k_1) + m(k_3) + m(k_7) = 10 + 7 + 6 = 23$ – число учеников, решивших только одну задачу.

Ответ: 5 учеников решили три задачи; 9 учеников решили только по две задачи; 23 ученика решили только по одной задаче.

Тренировочная работа 5

1. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать; 27 умеют играть в шахматы; 5 не умеют ни плавать, ни играть в шахматы.

Вопрос. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

2. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B, C. Результаты опроса оказались таковы:

книгу A – читали 25 учеников;

книгу B – читали 22 ученика;

книгу C – читали 22 ученика;

книги A или B читали 33 ученика;

книги A или C читали 32 ученика;

книги B или C читал 31 ученик;

все книги читали 10 учеников.

Вопросы:

1) Сколько учеников прочли только книгу A?
2) Сколько учеников прочли только книгу B?
3) Сколько учеников прочли только книгу C?
4) Сколько учеников прочли только одну книгу?
5) Сколько учеников прочли хотя бы одну книгу?
6) Сколько учеников не прочитали ни одной книги?

Решение тренировочной работы 5

1. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать; 27 умеют играть в шахматы; 5 не умеют ни плавать, ни играть в шахматы.

Вопрос. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

E – количество ребят в отряде; $m(E) = 40$;

A – множество ребят, умеющих плавать; $m(A) = 30$;

B – множество ребят, умеющих играть в шахматы; $m(B) = 27$;

$\overline{A}$ – множество ребят, не умеющих плавать.

$\overline{B}$ – множество ребят, не умеющих играть в шахматы.

$\overline{A} \cap \overline{B}$ – множество ребят, не умеющих ни плавать, ни играть в шахматы.

$m\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 5$, так как $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

и $\begin{cases} (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = E \\ (A \cup B) \cap \overline{A \cup B} = \varnothing \end{cases}$, то

$$m(A \cup B) + m\left(\overline{A \cup B}\right) = m(E),$$

т.е. $m(A \cup B) = 40 - 5 = 35$.

С другой стороны, по теореме

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B),$$

значит $m(A \cap B) = 30 + 27 - 35 = 22$.

Ответ: 22 человека из отряда умеют и плавать, и играть в шахматы.

2. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B, C. Результаты опроса оказались таковы:

книгу A читали 25 учеников;

книгу B читали 22 ученика;

книгу C читали 22 ученика;

книги A или B читали 33 ученика;

книги A или C читали 32 ученика;

книги B или C читал 31 ученик;

все книги читали 10 учеников.

Вопросы:

1) Сколько учеников прочли только книгу A?
2) Сколько учеников прочли только книгу B?
3) Сколько учеников прочли только книгу C?
4) Сколько учеников прочли только одну книгу?
5) Сколько учеников прочли хотя бы одну книгу?
6) Сколько учеников не прочитали ни одной книги?

Пусть E – множество учеников в классе.

$m(E) = 40;$

$m(A) = 25;$

$m(B) = 22;$

$m(C) = 22;$

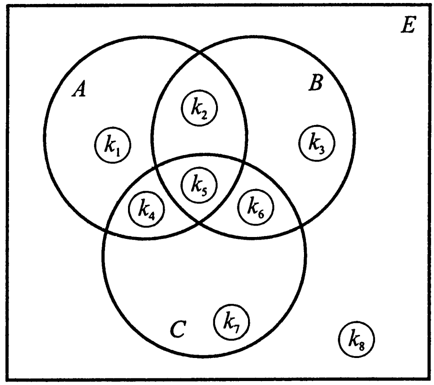
$m(A \cup B) = 33;$

$m(A \cup C) = 32;$

$m(B \cup C) = 31;$

$m(A \cap B \cap C) = 10.$

Попробуем иллюстрировать задачу.



Разобьем множество учеников, прочитавших хотя бы одну книгу, на семь подмножеств

k_1; k_2; k_3; k_4; k_5; k_6; k_7 .

k_1 – множество учеников, прочитавших только книгу A ;

k_3 – множество учеников, прочитавших только книгу B ;

k_7 – множество учеников, прочитавших только книгу C ;

k_2 – множество учеников, прочитавших книги A и B и не читавших книгу C ;

k_4 – множество учеников, прочитавших книги A и C и не читавших книгу B ;

k_6 – множество учеников, прочитавших книги B и C и не читавших книгу A ;

k_5 – множество учеников, прочитавших книги A, B и C .

Теперь понятно, на какие вопросы надо ответить с позиции операций над множествами.

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ m(k_2) = m(A \cap B) - m(A \cap B \cap C) \\
2)\ m(k_4) = m(A \cap C) - m(A \cap B \cap C) \\
3)\ m(k_5) = m(A \cap B \cap C) \\
4)\ m(k_6) = m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C)
\end{array}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(k_1) = m(A) - m(k_2) - m(k_4) - m(k_5).$$

Аналогично рассуждая, имеем:

$$m(k_3) = m(B) - m(k_2) - m(k_6) - m(k_5);$$

$$m(k_7) = m(C) - m(k_4) - m(k_5) - m(k_6).$$

Найдем $m(A \cap B)$; $m(A \cap C)$; $m(B \cap C)$.

1) $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B)$,
т.е. $m(A \cap B) = 25 + 22 - 33 = 14$.

2) $m(A \cap C) = m(A) + m(C) - m(A \cup C)$,
т.е. $m(A \cap C) = 25 + 22 - 32 = 15$.

3) $m(B \cap C) = m(B) + m(C) - m(B \cup C)$,
т.е. $m(B \cap C) = 22 + 22 - 31 = 13$.

Тогда

$m(k_1) = 25 - 4 - 5 - 10 = 6;$
$m(k_3) = 22 - 4 - 3 - 10 = 5;$
$m(k_5) = 22 - 5 - 3 - 10 = 4;$

$m(k_1) + m(k_3) + m(k_7) =$
$= 6 + 5 + 4 = 15$
число учеников, прочитавших только одну книгу.

$$m(A \cup B \cup C) = m(A \cup B) + m(C) - m((A \cup B) \cap C).$$

Из рисунка ясно, что

$m(C) - m((A \cup B) \cap C) = m(k_7) = 4$, тогда

$m(A \cup B \cup C) = 33 + 4 = 37$ – число учеников,

прочитавших хотя бы одну книгу.

Так как в классе 40 учеников, то 3 ученика
не прочитали ни одной книги.

Ответ: 1) 6 учеников прочли только книгу A.

2) 5 учеников прочли только книгу B.

3) 4 ученика прочли только книгу C.

4) 15 учеников прочли только одну книгу.

5) 37 учеников прочли хотя бы одну книгу из A, B, C.

6) 3 ученика не прочитали ни одной книги.

Разность двух множеств

Определение 9. *Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, не принадлежащих множеству B.*

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пример:

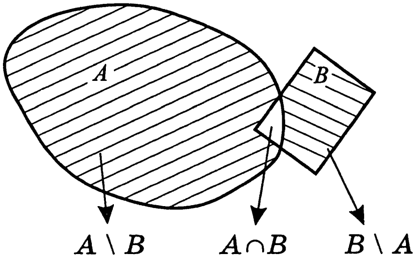
$A = \{1; 3; 4; 6; 8\}$; $B = \{4; 5; 6; 7; 9\}$;

$A \setminus B = \{1; 3; 8\}$; $B \setminus A = \{5; 7; 9\}$.

Покажем графические изображения разности множеств $A \setminus B$ в различных случаях.

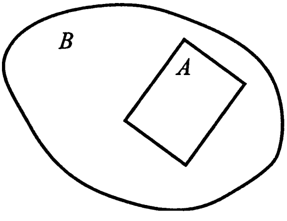
$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$

1. $A \cap B \neq \varnothing$.



2. Если $A \subset B$,

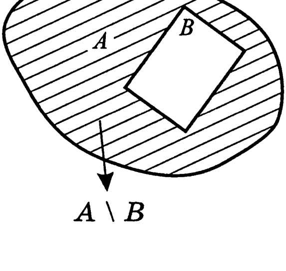
т.е. $\left\| \begin{matrix} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{matrix} \right.$, то $A \setminus B = \varnothing$;



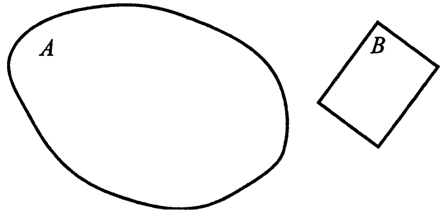
3. $B \subset A$,

тогда $(A \setminus B) \cup B = A$,

так как $\left\| \begin{matrix} A \cap B = B \\ A \cup B = A \end{matrix} \right.$.

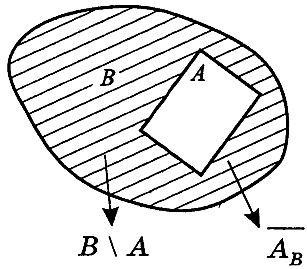


4. Если $A \cap B = \varnothing$, то $A \setminus B = A$.



Примечание.

Если $A \subset B$, то $\boxed{\overline{A_B} = B \setminus A}$.



Теорема.

$$\boxed{A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$$

Доказательство:

1. Пусть $x \in (A \setminus (B \cup C))$, тогда $x \in A$ и $x \notin (B \cup C)$, и так как $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$, а так как $x \in A$ и $x \notin C$, то $x \in A \setminus C$.
   Значит, $x \in A \setminus C$; $x \in A \setminus B$, тогда $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, т.е. $(A \setminus (B \cup C)) \subset ((A \setminus B) \cap (A \setminus C))$.
2. Пусть $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, значит $x \in (A \setminus B)$ и $x \in (A \setminus C)$, и так как $x \in (A \setminus B)$, значит $x \in A$ и $x \notin B$. $x \in (A \setminus C)$, значит $x \in A$ и $x \notin C$, отсюда $x \in A$ и $x \notin (B \cup C)$, т.е. $x \in (A \setminus (B \cup C))$. Следовательно, $((A \setminus B) \cap (A \setminus C)) \subset (A \setminus (B \cup C))$. Отсюда по определению равенства двух множеств
   $\boxed{A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)}$.

Самостоятельно докажите:

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Практикум 9

1. Дано:

$A = \{3;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$;

$B = \{1;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 11\}$;

$C = \{2;\ 3;\ 7;\ 10;\ 12\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap C$.
2) $A \setminus (B \cap C)$.
3) $(A \setminus C) \cap B$.
4) $C \setminus (A \setminus B)$.
5) $C \setminus (A \cap B)$.
6) $(B \cup C) \setminus A$.
7) $(A \cup B) \setminus C$.
8) $(A \cup C) \setminus B$.

2. Дано:

$A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$;

$B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$;

$D = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap D$.
2) $A \setminus (B \cap D)$.
3) $(A \setminus B) \cup D$.
4) $(A \setminus D) \cup B$.

Решение практикума 9

1. Дано:

$A = \{3;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$;

$B = \{1;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 11\}$;

$C = \{2;\ 3;\ 7;\ 10;\ 12\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap C = \{3;7;10\} \cap \{2;3;7;10;12\} = \{3;7;10\}$.

2) $A \setminus (B \cap C) = \{3;6;7;8;9;10\} \setminus \varnothing = \{3;6;7;8;9;10\}$.

3) $(A \setminus C) \cap B = \{6;8;9\} \cap \{1;4;6;8;9;11\} = \{6;8;9\}$.

4) $C \setminus (A \setminus B) = \{2;3;7;10;12\} \setminus \{3;7;10\} = \{2;12\}$.

5) $C \setminus (A \cap B) = \{2;3;7;10;12\} \setminus \{6;8;9\} = \{2;3;7;10;12\}$.

6) $(B \cup C) \setminus A = \{1;2;3;4;6;7;8;9;10;11;12\} \setminus \{3;6;7;8;9;10\} =$
$= \{1;2;4;11;12\}$.

7) $(A \cup B) \setminus C = \{1;3;4;6;7;8;9;10;11\} \setminus \{2;3;7;10;12\} =$
$= \{1;4;6;8;9;11\}$.

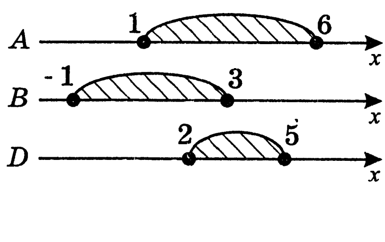
8) $(A \cup C) \setminus B = \{2;3;6;7;8;9;10;12\} \setminus \{1;4;6;8;9;11\} =$
$= \{2;3;7;10;12\}$.

2. Дано:

$A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$;

$B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$;

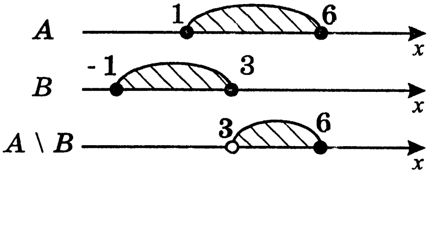
$D = \{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$.



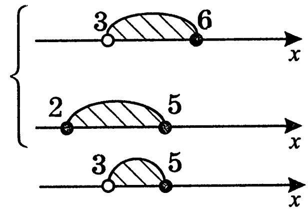
Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap D$.

а) $A \setminus B$



б) $(A \setminus B) \cap D$



$(A \setminus B) \cap D$

Ответ: $(A \setminus B) \cap D = (3;5]$.

И в математической записи:

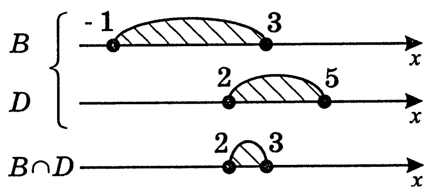
Так как $A \setminus B = (3;6]$, то $(A \setminus B) \cap D = (3;6] \cap [2;5] =$

$= (3;5]$.

Ответ: $(A \setminus B) \cap D = (3;5]$.

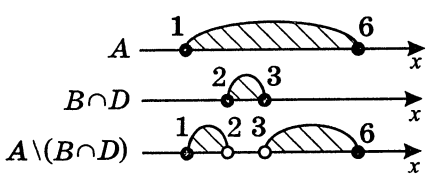
2) $A \setminus (B \cap D)$

а)



$B \cap D = [2;3]$

б)



Ответ: $A \setminus (B \cap D) = [1;2) \cup (3;6]$.

И в математической записи:

Так как $B \cap D = [-1;3] \cap [2;5] = [2;3]$,

то $A \setminus (B \cap D) = [1;6] \setminus [2;3] = [1;2) \cup (3;6]$.

Ответ: $A \setminus (B \cap D) = [1;2) \cup (3;6]$.

Примечание. Так как $(B \cap D) \subset A$, то

$A \setminus (B \cap D) = \overline{(B \cap D)}_A$.

3) $(A \setminus B) \cup D$.

Так как $A \setminus B = (3;6]$, то

$(A \setminus B) \cup D = (3;6] \cup [2;5] = [2;6]$.

Ответ: $(A \setminus B) \cup D = [2;6]$.

4) $(A \setminus D) \cup B$.

Так как $D \subset A$, то $A \setminus D = \overline{D_A} = [1;2) \cup (5;6]$, тогда

$(A \setminus D) \cup B = [1;2) \cup (5;6] \cup [-1;3] = [-1;3] \cup (5;6]$.

Ответ: $(A \setminus D) \cup B = [-1;3] \cup (5;6]$.

Тренировочная работа 6

1. Дано:

$A = \{1; 2; 5; 7; 9; 11\}$;

$B = \{2; 5; 9; 10; 11\}$;

$C = \{1; 4; 6; 7\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2) $(A \cap B) \setminus C$.

3) $(A \setminus B) \cup C$.

4) $(B \cup C) \setminus A$.

5) $(A \setminus B) \setminus (A \cap B)$.

2. Дано:

$A = \{x \mid \ 2 \leqslant x \leqslant 7\}$;

$B = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$;

$C = \{x \mid \ 3 \leqslant x \leqslant 6\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cup C$.

2) $(A \setminus C) \cup B$.

3) $A \setminus (C \cap B)$.

4) $(A \cup B) \setminus C$.

5) $A \cup (B \setminus C)$.

Решение тренировочной работы 6

1. Дано:

$A = \{1;2;5;7;9;11\}$;

$B = \{2;5;9;10;11\}$;

$C = \{1;4;6;7\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1;7\} \cap \{2;5;9;11\} = \varnothing$.

2) $(A \cap B) \setminus C = \{2;5;9;11\} \setminus \{1;4;6;7\} = \{2;5;9;11\}$.

3) $(A \setminus B) \cup C = \{1;7\} \cup \{1;4;6;7\} = \{1;4;6;7\}$.

4) $(B \cup C) \setminus A = \{1;2;4;5;6;7;9;10;11\} \setminus \{1;2;5;7;9;11\} =$
$= \{4;6;10\}$.

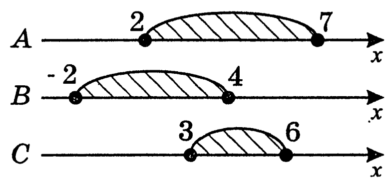
5) $(A \setminus B) \setminus (A \cap B) = \{1;7\} \setminus \{2;5;9;11\} = \{1;7\}$.

2. Дано:

$A = \{x \mid \ 2 \leqslant x \leqslant 7\}$;

$B = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$;

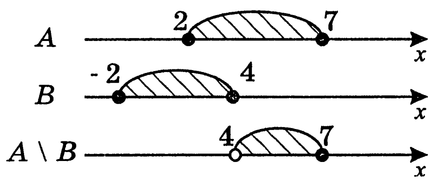
$C = \{x \mid \ 3 \leqslant x \leqslant 6\}$.



Найдите:

1) $(A \setminus B) \cup C$.

Найдем $A \setminus B$.

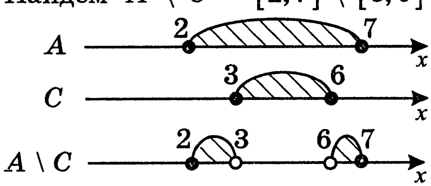


Из графической иллюстрации следует, что
$A \setminus B = (4;7]$, тогда $(A \setminus B) \cup C =$
$= (4;7] \cup [3;6] = [3;7]$.

Ответ: $(A \setminus B) \cup C = [3;7]$.

2) $(A \setminus C) \cup B$.

Найдем $A \setminus C = [2;7] \setminus [3;6] = [2;3) \cup (6;7]$.



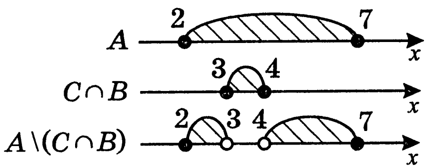
Тогда $(A \setminus C) \cup B = [2;3) \cup (6;7] \cup [-2;4]$.

Ответ: $(A \setminus C) \cup B = (6;7] \cup [-2;4]$.

3) $A \setminus (C \cap B)$.

Так как $C \cap B = [3;6] \cap [-2;4] = [3;4]$,

то $A \setminus (C \cap B) = [2;7] \setminus [3;4] = [2;3) \cup (4;7]$.



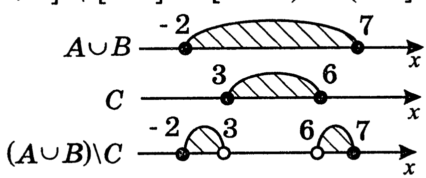
Ответ: $A \setminus (C \cap B) = [2;3) \cup (4;7]$.

4) $(A \cup B) \setminus C$.

Так как

$A \cup B = [2;7] \cup [-2;4] = [-2;7]$, то $(A \cup B) \setminus C =$

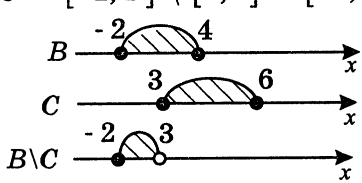
$= [-2;7] \setminus [3;6] = [-2;3) \cup (6;7]$.



Ответ: $(A \cup B) \setminus C = [-2;3) \cup (6;7]$.

5) $A \cup (B \setminus C)$.

$B \setminus C = [-2;4] \setminus [3;6] = [-2;3)$.



Значит $A \cup (B \setminus C) = [2;7] \cup [-2;3) = [-2;7]$.

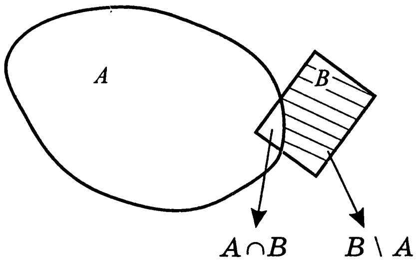
Ответ: $A \cup (B \setminus C) = [-2;7]$.

Практикум 10

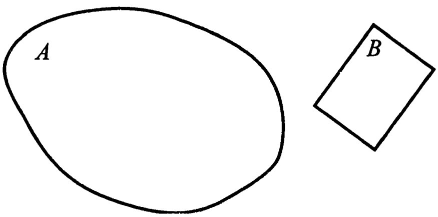
Какие условия надо наложить на A, B и C, чтобы были справедливы следующие утверждения?

1. $m(A) + m(B \setminus A) = m(A \cup B)$.

1) Если $A \cap B \neq \varnothing$, то тогда $(A \cap B) \subset A$, но $(A \cap B) \not\subset (B \setminus A)$, значит $m(A) + m(B \setminus A) = m(B \cup A)$.



2) Если $A \cap B = \varnothing$, тогда $B \setminus A = B$ и $m(A \cap B) = 0$,

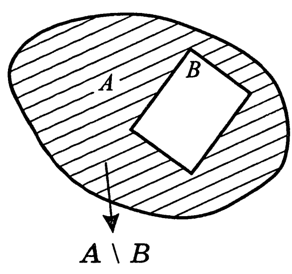


и так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, то $m(A) + m(B \setminus A) = m(A \cup B)$.
В данном случае утверждение справедливо для любых A и B.

2. $m(A) - m(B) = m(A \setminus B)$,

т.е. $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$.

Если $B \subset A$, то $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$ и $B \cup (A \setminus B) = A$, тогда $m(A) = m(B) + m(A \setminus B)$.
В других случаях это не верно.

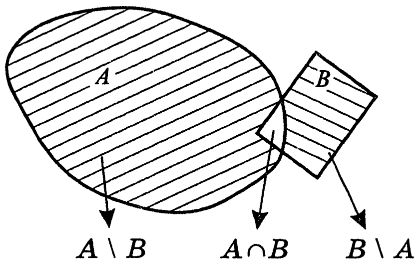


3. $m(A) - m(B \cap A) = m(A \cup B)$, т.е. $m(A) = m(B \cap A) + m(A \cup B)$.

Это возможно только при $B = \varnothing$.

4. $m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(A \cup B) - m(A \cap B)$.

1) Пусть $B \cap A \neq \varnothing$.

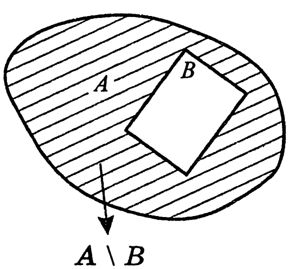


Тогда очевидно, что

$m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) = m(A \cup B)$.

2) Пусть $B \subset A$.

Тогда $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$.



$B \setminus A = \varnothing$; $\quad m(B \setminus A) = 0$;

$A \cap B = B$; $\quad m(A \cap B) = m(B)$;

$A \cup B = A$; $\quad m(A \cup B) = m(A)$.

Тогда действительно

$m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) =$

$= m(A \setminus B) + 0 + m(B) = m(A \cup B)$.

т.е. истина.

3) При $A \subset B$ доказательство аналогичное.

4) При $A \cap B = \varnothing$.

$m(A \setminus B) = m(A)$;

$m(B \setminus A) = m(B)$;

$m(A \cap B) = 0$;

$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$;

Тогда $m(A \setminus B) + m(B \setminus A) + m(A \cap B) = m(A \cup B)$.

5) $A = B$ (это частный случай при $B \subset A$).

$A \setminus B = \varnothing$;

$B \setminus A = \varnothing$;

$A \cup B = A = B$;

$A \cap B = A = B$;

$m(A \setminus B) = 0$;

$m(B \setminus A) = 0$;

$m(A \cup B) = m(A \cap B)$.

Тогда $0 + 0 + m(A \cap B) = m(A \cup B)$,
что и требовалось доказать.

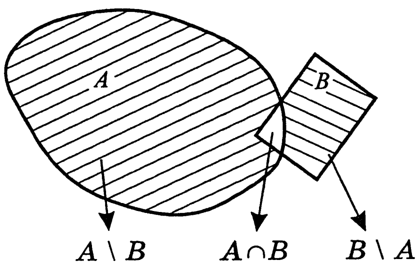
Итак, это утверждение

$\boxed{m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(A \cup B) - m(A \cap B)}$ –

есть теорема, справедливая для любых A и B.

5. $m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)$.

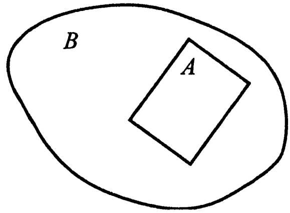
Пусть $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда изобразим $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.



Из графической иллюстрации следует истинность утверждения $m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)$.

Аналогичны случаи:

1) $A \subset B$

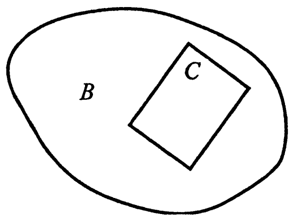


Тогда

а) $A \cap B = A$;
$A \cup B = B$;
$A \setminus B = \varnothing$; $m(A \setminus B) = 0$; $B \setminus A \neq \varnothing$,
значит $m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(B \setminus A)$.

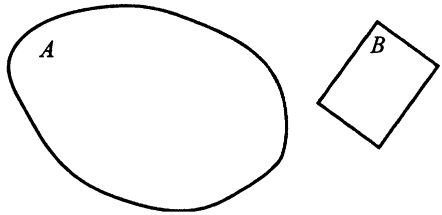
б) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A$,
значит $m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(B \setminus A)$.
Утверждение верно.

2) $B \subset A$.



Рассуждения аналогичные.

3) $A \cap B = \varnothing$.



а) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B$; $(A \cap B = \varnothing)$;

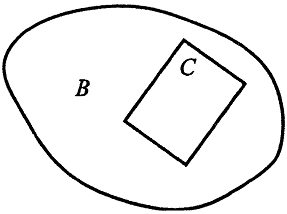
б) $A \setminus B = A$; $m(A \setminus B) = m(A)$;
$B \setminus A = B$; $m(B \setminus A) = m(B)$.

Итак, $\boxed{m((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)}$.

Это справедливо для любых A и B.

6. $m(B \setminus C) + m(C) = m(B)$.

Пусть $C \subset A$.



Тогда

$B \cap C = C$; $m(B \cap C) = m(C)$;

$B \cup C = B$; $m(B \cup C) = m(B)$;

Тогда $m(B \setminus C) = m(B) - m(C)$.

В других случаях утверждение ложно.

Тренировочная работа 7

1. Дано:

$A = \{3;6;7;8;9;10\}$;

$B = \{1;4;6;8;9;11\}$;

$C = \{2;3;7;10;12\}$.

Найдите:

1) $C \setminus (A \setminus B)$.

2) $B \setminus (A \setminus C)$.

3) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$.

4) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$.

5) $(B \cup C) \setminus A$.

2. Дано:

$A = \{1;2;5;7;9;11\}$;

$B = \{2;5;9;10\}$;

$C = \{1;4;6;7\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

2) $(A \cap B) \setminus C$.

3) $(A \setminus B) \cup C$.

4) $(B \cup C) \setminus A$.

5) $(A \setminus B) \setminus (A \cap B)$.

3. Какое условие надо наложить на A, C и B, чтобы были справедливы следущие утверждения?

1) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A \cup B)$.

2) $m(B \setminus A) + m(A) = m(B)$.

3) $m(C) + m(B) > m(C \cup B)$.

Решение тренировочной работы 7

1. Дано:

$A = \{3;6;7;8;9;10\}$;

$B = \{1;4;6;8;9;11\}$;

$C = \{2;3;7;10;12\}$.

Найдите:

1) $C \setminus (A \setminus B) = C \setminus \{3;7;10\} = \{2;12\}$.

2) $B \setminus (A \setminus C) = B \setminus \{6;8;9\} = \{1;4;11\}$.

3) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = \{3;7;10\} \setminus \{6;8;9\} = \{3;7;10\}$.

4) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) =$

$= \{1;3;4;6;7;8;9;10;11\} \setminus \{3;7;10\} =$

$= \{1;4;6;8;9;11\}$.

5) $(B \cup C) \setminus A = \{1;2;3;4;6;7;8;9;10;11;12\} \setminus A =$

$= \{1;2;4;11;12\}$.

2. Дано:

$A = \{1;2;5;7;9;11\}$;

$B = \{2;5;9;10\}$;

$C = \{1;4;6;7\}$.

Найдите:

1) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1;7;11\} \cap \{2;5;9;11\} = \{11\}$.

2) $(A \cap B) \setminus C = \{2;5;9\} \setminus C = \{2;5;9\}$.

3) $(A \setminus B) \cup C = \{1;7;11\} \cup C = \{1;4;6;7;11\}$.

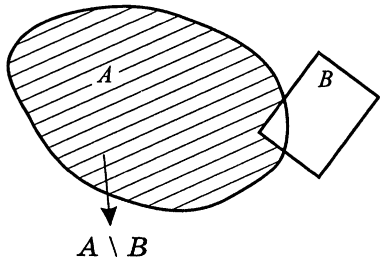
4) $(B \cup C) \setminus A = \{1;2;4;5;6;7;9;10\} \setminus A = \{4;6;10\}$.

5) $(A \setminus B) \setminus (A \cap B) = \{1;7;11\} \setminus \{2;5;9\} = \{1;7;11\}$.

3. Какое условие надо наложить на A, B и C, чтобы были справедливы утверждения?

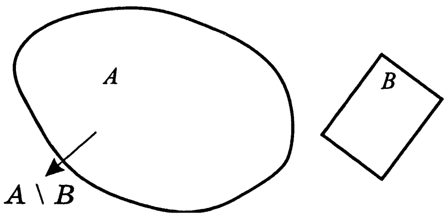
1) $m(B)+m(A\setminus B)=m(A\cup B)$;

а) $A\cap B\neq\varnothing$.



Утверждение верно.

б) $A\cap B=\varnothing$.

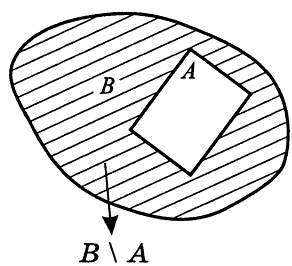


Очевидно, что $m(A\setminus B)=m(A)$.

Значит, в этом случае утверждение справедливо.

Итак, для любых A и B
$m(B)+m(A\setminus B)=m(A\cup B)$.

2) $m(B\setminus A)+m(A)=m(B)$.



Пусть $A\subset B$.

Тогда

$$\left\|\begin{array}{l} A\cap B=A; \\ A\cup B=B. \end{array}\right.$$

Утверждение в данном случае справедливо, в остальных случаях – нет.

3) $m(C)+m(B)>m(C\cup B)$.

Если $C\cap B\neq\varnothing$, то утверждение справедливо при любых C и B.

Проверочная работа 2

1. $A = \{1;2;4;5;7;8;10;11\}$;

$B = \{2;3;5;6;8;9;11\}$;

$D = \{1;3;4;6;7;9;10\}$.

1) $(A \setminus B) \cap D$.

2) $A \setminus (B \cap D)$.

3) $(A \setminus B) \cup D$.

4) $(A \setminus D) \cup B$.

5) $(A \setminus D) \cap B$.

6) $(D \cup B) \setminus A$.

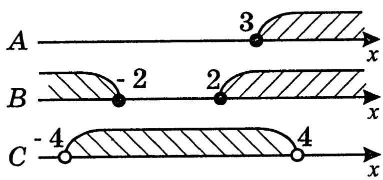
7) $(A \cup B) \setminus D$.

8) $A \cup (B \setminus D)$.

2. $A = \{x | x \geqslant 3\}$;

$B = \{x | x \geqslant 2$ или $x \leqslant -2\}$;

$C = \{x | -4 < x < 4\}$.



1) $A \cup B \cup C$.

2) $A \cap B \cap C$.

3) $A \cup (B \cap C)$.

4) $A \setminus B$.

5) $A \cup (C \setminus B)$.

6) $A \cap (C \setminus B)$.

7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.

8) $(A \setminus B) \setminus C$.

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

10) $(A \cup B) \cap C$.

11) $A \cap (B \cup C)$.

12) $(A \cap B) \cup C$.

13) $B \setminus C$.

14) $(A \cup C) \setminus B$.

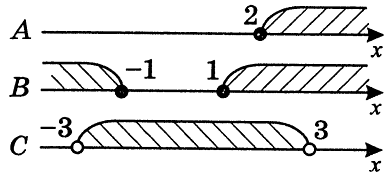
15) $(A \cap C) \setminus B$.

16) $(A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

17) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$.

Тренировочная работа 8



1. $A = \{x | x \geqslant 2\}$;

$B = \{x | x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 1\}$;

$C = \{x | -3 < x < 3\}$.

1) $A \cup B \cup C$.

2) $A \cap B \cap C$.

3) $A \cup (B \cap C)$.

4) $A \setminus B$.

5) $A \cup (C \setminus B)$.

6) $A \cap (C \setminus B)$.

7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.

8) $(A \setminus B) \setminus C$.

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

10) $(A \cup B) \cap C$.

11) $A \cap (B \cup C)$.

12) $(A \cap B) \cup C$.

13) $B \setminus C$.

14) $(A \cup C) \setminus B$.

15) $(A \cap C) \setminus B$.

16) $(A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

17) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$.

2. $A = \{1;3;5;9\}$;

$B = \{2;4;10\}$;

$E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

1) $A \cup \overline{B}$.

2) $\overline{A} \cap B$.

3) $\overline{A \cup B}$.

4) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $A \cap \overline{B}$.

6) $\overline{A \cup \overline{B}}$.

7) $\overline{A \cap B}$.

8) $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$.

9) $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right)$.

10) $\overline{(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}$.

11) $E \setminus (A \cup B)$.

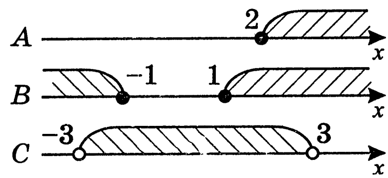
12) $(E \cap A) \setminus B$.

Решение тренировочной работы 8

1. $A = \{x | x \geqslant 2\}$;

$B = \{x | x \leqslant -1$ или $x \geqslant 1\}$;

$C = \{x | -3 < x < 3\}$.



1) $A \cup B \cup C = (-\infty; \infty)$.

2) $A \cap B \cap C = [2; 3)$.

3) $A \cup (B \cap C) = A \cup (-3; -1] \cup [1; 3) = (-3; -1] \cup [1; \infty)$.

4) $B \setminus A = ((-\infty; -1] \cup [1; \infty)) \setminus [2; \infty) = (-\infty; -1] \cup [1; 2)$.

5) $A \cup (C \setminus B) = [2; \infty) \cup (-1; 1)$.

6) $A \cap (C \setminus B) = [2; \infty) \cap (-1; 1) = \varnothing$.

7) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = [3; \infty) \cap ((-\infty; -3] \cup [3; \infty)) = [3; \infty)$.

8) $(A \setminus B) \setminus C = \varnothing \setminus C = \varnothing$.

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A = (-\infty; -1] \cup [1; 2)$ (так как $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$).

10) $(A \cup B) \cap C = ((-\infty; -1] \cup [1; \infty)) \cap (-3; 3) = (-3; -1] \cup [1; 3)$.

11) $A \cap (B \cup C) = A \cap (-\infty; \infty) = [2; \infty)$ $(B \cup C = (-\infty; \infty))$.

12) $(A \cap B) \cup C = [2; \infty) \cup C = (-3; \infty)$.

13) $B \setminus C = (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$.

14) $(A \cup C) \setminus B = (-3; \infty) \setminus B = (-1; 1)$.

15) $A \setminus (A \cap C) = [2; \infty) \setminus [2; 3) = [3; \infty)$.

16) $(B \cap C) \setminus (A \cap C) = ((-3; -1] \cup [1; 3)) \setminus [2; 3) = (-3; -1] \cup [1; 2)$.

17) $(B \setminus C) \setminus (A \setminus C) = ([3; \infty) \cup (-\infty; -3]) \setminus [3; \infty) = (-\infty; -3]$.

18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) = (-3; \infty) \setminus [2; \infty) = (-3; 2)$.

2. $A = \{1; 3; 5; 9\}$;

$B = \{2; 4; 10\}$;

$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

1) $A \cup \overline{B} = A \cup \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

2) $\overline{A} \cap B = \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} \cap B = \{2; 4; 10\}$.

3) $\overline{A \cup B} = \overline{\{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}} = \{6; 7; 8\}$.

4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} \cup \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} = E$.

5) $A \cap \overline{B} = A \cap \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} = \{1; 3; 5; 9\}$.

6) $\overline{A \cup \overline{B}} = \overline{\{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}} = \{2; 4; 10\}$.

7) $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

8) $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = \{2; 4; 10\} \cup \{1; 3; 5; 9\} =$

$= \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}$.

9) $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup B\right) = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\} \cap \{2; 4; 6; 7; 8; 10\} =$

$= \{6; 7; 8\}$.

10) $\overline{(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)} = \overline{\varnothing \cup \{6; 7; 8\}} = \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}$.

11) $E \setminus (A \cup B) = E \setminus \{1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\} = \{6; 7; 8\}$.

12) $(E \cap A) \setminus B = \{1; 3; 5; 9\}$.

Проверочная работа 3

1. Решите системы и совокупности неравенств, неравенства.

1) $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x > 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 5 \\ x \leqslant 6 \end{array}\right. \end{cases}.$

2) $\left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x \leqslant 4 \\ \begin{cases} x > 5 \\ x \geqslant 6 \end{cases} \end{array}\right..$

3) $\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \leqslant 0.$

4) $\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)(x+2)} \geqslant 0.$

5) $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leqslant 0.$

6) $x^2(x-3)(x+2) \geqslant 0.$

7) $(x^2-4)^2+(x^2-2x-8)^2 \leqslant 0.$

8) $\dfrac{(x+2)(1-x)}{(x^2-9)^2+(x^2-2x-3)^2} \leqslant 0.$

2. $A = \{1;3;5;8;9;10\}$;

$B = \{2;4;6;8;9\}$;

$E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

1) $A \cap \overline{B}$.

2) $\overline{A} \cup B$.

3) $\overline{A \cup B}$.

4) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A \cap \overline{\overline{B}}}$.

6) $\overline{A \cap B}$.

7) $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.

8) $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)$.

9) $E \setminus (A \cup B)$.

10) $E \setminus \left(A \cap \overline{B}\right)$.

11) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

12) $\left(E \setminus \overline{A}\right) \cap \left(E \setminus \overline{B}\right)$.

3. Решите задачу.

В течение недели в кинотеатре шли фильмы A, B и C. Каждый из 40 школьников видел либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

Сколько школьников видели все три фильма?

Зачетная работа 3

1. Решите системы и совокупности неравенств, неравенства.

1) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ x < 4 \\ \begin{cases} x > 5 \\ x \geqslant 6 \end{cases} \end{array}\right.$.

2) $\begin{cases} x > 3 \\ x \geqslant 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 5 \\ x \leqslant 6 \end{array}\right. \end{cases}$.

3) $\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)} \geqslant 0$.

4) $\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \geqslant 0$.

5) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leqslant 0$.

6) $(4-x)^2(x-1)(x+2) \leqslant 0$.

7) $(x^3-9x)^2+(x^3-3x^2)^2 > 0$.

8) $\dfrac{-(x+2)(4+x)}{(x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2} \leqslant 0$.

2. $A = \{3; 5; 7; 10\}$;

$B = \{1; 6; 9; 10; 12\}$;

$E = \{1; 3; 5; 6; 7; 9; 10; 11; 12\}$.

1) $A \cap \overline{B}$.

2) $\overline{A} \cup B$.

3) $\overline{A \cup B}$.

4) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A \cap \overline{B}}$.

6) $\overline{A \cap B}$.

7) $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.

8) $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)$.

9) $E \setminus (A \cup B)$.

10) $E \setminus \left(A \cap \overline{B}\right)$.

11) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

12) $\left(E \setminus \overline{A}\right) \cap \left(E \setminus \overline{B}\right)$.

3. В течение недели в кинотеатре шли фильмы A, B и C. Каждый из 40 школьников видел, либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

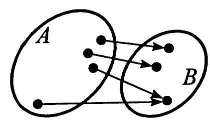
Сколько школьников видели только один фильм?

2

Функции

Введение

Определение 1. *Под* ***функцией*** *мы будем понимать такой закон или правило соответствия между элементами множеств A и B, по которому* ***каждому*** *элементу множества A соответствует вполне* ***определенный*** *элемент из множества B.*



Практикум 11

Рассмотрим примеры различных соответствий и выясним, какие из них являются функциями.

Пример 1.

Стрелочками указывается, какому элементу из множества A соответствует в элемент множества B. Все переходы образуют соответствия. В данном случае это будет **функциональное** соответствие. Почему? Потому что:

$$\begin{array}{l} A=\{1;\ 2;\ 4;\ 6\} \\ \quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ B=\{3;\ 7;\ 9;\ 11;\ 12\} \end{array}$$

во-первых, все элементы из множества A использованы;

во-вторых, каждому элементу из множества A соответствует вполне определенный элемент из множества B, т.е. нет элемента из множества A, который бы соответствовал двум элементам в множестве B. (Так же как один человек может сесть только на один стул и не может сесть одновременно на два стула, стоящих в разных углах большого зала. А то, что не все элементы из множества B использованы, так в определении функции этого требования нет.)

Пример 2. $A=\{1;2;5;7;10\}$

$$B=\{\ 2\ ;\ 9\ \}$$

Данное соответствие является функцией, так как: все элементы из множества A использованы; то, что часть элементов из множества A переходит в один и тот же элемент множества B, не противоречит определению.
(Действительно, несколько человек могут сесть на один и тот же диван.)

Пример 3. $A=\{1;3;4;7;-10\}$

$$B=\{4;7;11;12\}$$

Данное соответствие функцией <u>не является</u>, так как для элемента 7 из множества A не нашелся элемент из множества B, в который он перешел.

Пример 4. $A=\{\ 1\ ;\ 3\ ;\ 5\ \}$

$$B=\{\ 2\ ;4\ ;6\ ;7\ \}$$

Данное соответствие функцией <u>не является</u>, так как нашелся элемент $3 \in A$, который переходит сразу в два элемента из множества B.
Теперь нужно договорится, что понимать под областью определения функционального соответствия (функции).

Определение 2. *Под* ***областью определения функции*** *мы будем понимать все элементы из множества* A *и обозначать ее* $D(f)$ (или $D(y)$), где $y = f(x)$ – функциональное соответствие.

Определение 3. *Под* ***областью (множеством) значений функционального соответствия (функции), или областью изменения функции*** *мы будем понимать множество всех элементов из множества* B*, для которых нашлись элементы из множества* A*, которые в них перешли. Обозначим это множество* $E(f)$*.*

Примечание. Область изменения функции $E(f)$ может не совпадать с B.

Пример 5.

Рассмотрим функцию из примера 1.

$E(f) = \{3; 7; 9; 11\}$,

где $B = \{3; 7; 9; 11; 12\}$, $E(f) \subset B$ (всегда),

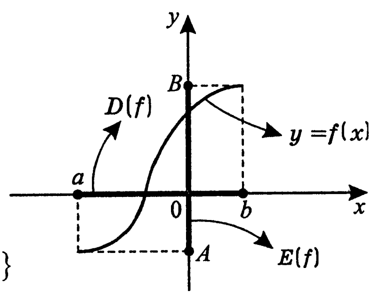
но $E(f) \neq B$.

Определение 4. *Множество <u>всех</u> точек плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональному равенству $y = f(x)$, называется* ***графиком функции,***

т.е. $\Gamma(y = f(x)) = \{(x_0; y_0) | y_o = f(x_0)\}$ (Г – график).

Рассмотрим на графике функции иллюстрацию того, что такое $D(f)$ и $E(f)$. Итак,

$[a; b] = D(f)$, а $[A; B] = E(f)$



Примечание.

Если $y = f(x)$ не является функцией, то

$\Gamma(y = f(x)) = \{(x_0; y_0) | y_o = f(x_0)\}$

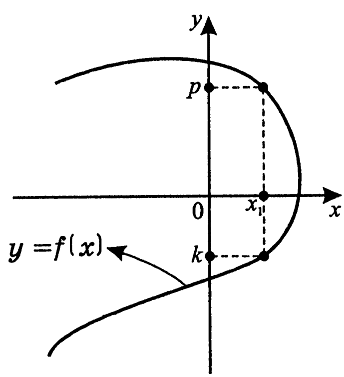
– есть график соответствия.

Рассмотрим примеры нефункциональных соответствий, чтобы лучше понять, что такое функция.

Пример 6.

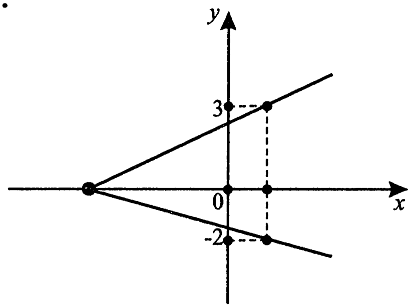
Здесь $\left[\begin{array}{l} f(x_1) = p \\ f(x_1) = k \end{array}\right.$,

где $p \neq k$.



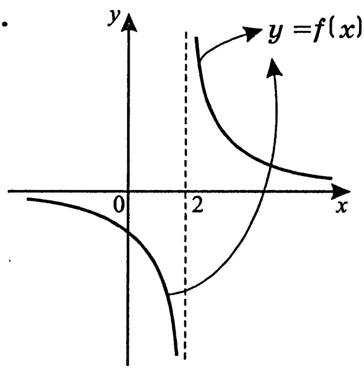
Значит, данный пример – график соответствия, которое не является функциональным, так как нашелся x, который переходит сразу в два элемента – p и k.

Пример 7.



Вопрос: является ли данный график соответствия функциональным? Ответ – нет. По аналогичным причинам это соответствие не является функциональным.

Пример 8.

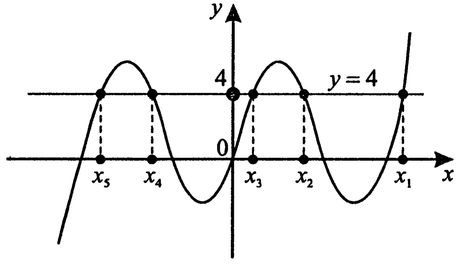


Это пример графика соответствия, которое, во-первых, является функцией, и, во-вторых, график которого состоит из двух ветвей.

Интересно, что $D(f) = (-\infty;2) \cup (2;\infty)$. Значение $x = 2 \notin D(f)$, т.е. для $x = 2$ нет элемента, в который он перейдет.

Пример 9.

Здесь интересно то, что элементы x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 переходят в один элемент $y = 4$ соответственно. Это пример графика функционального соответствия.



Тренировочная работа 9

1. Даны соответствия. Выяснить, какие из них являются функциональными, а какие нет.

1) $A = \{2; 7; 10; 11\}$

$B = \{4; 6; 8; 9\}$

2) $A = \{2; 7; 10; 11\}$

$B = \{4; 6; 8\}$

3) $A = \{1; 4; 6; 9; 12\}$

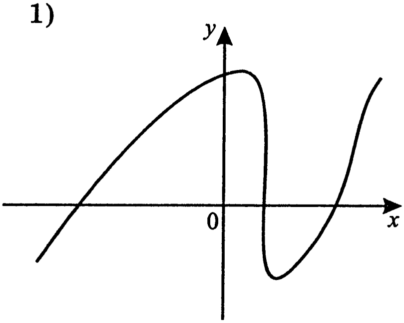
$B = \{4; -2; 3; -1\}$

4) $A = \{2; 4; 6; 7\}$

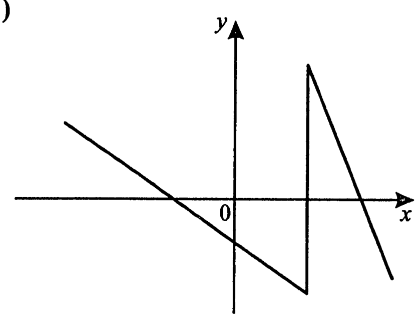
$B = \{1; 4; 5; 10\}$

2. Даны графики соответствий. Какие из них являются функциональными, а какие нет?

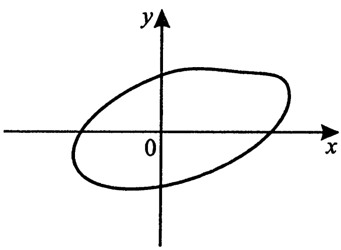
1)



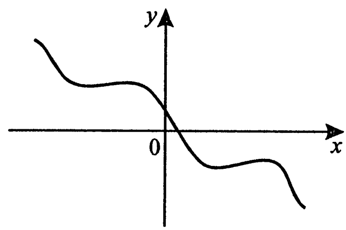
2)



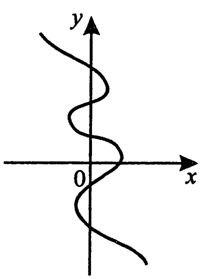
3)



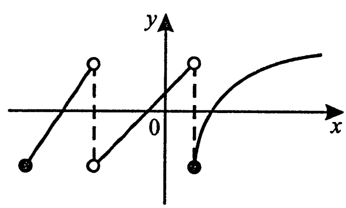
4)



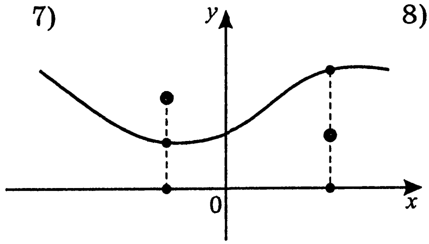
5)



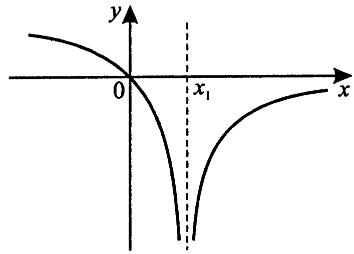
6)



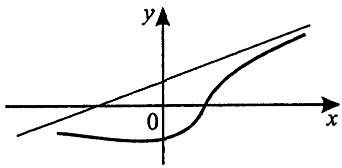
7)



8)

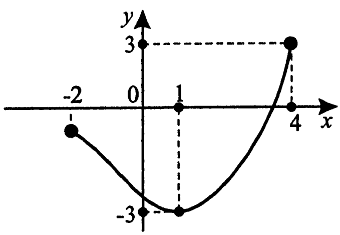


9)

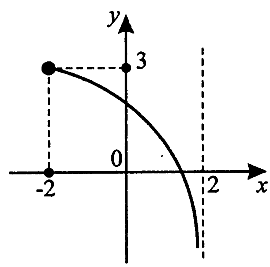


3. По графику определить $D(f)$ и $E(f)$.

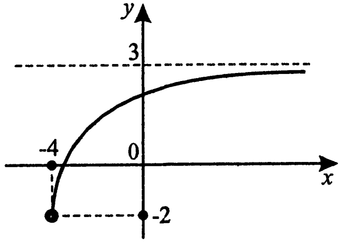
1)



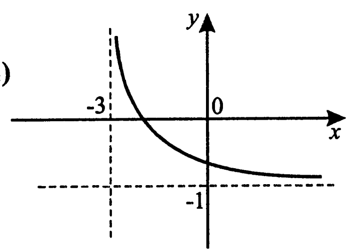
2)



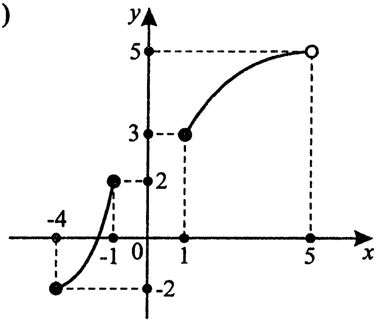
3)



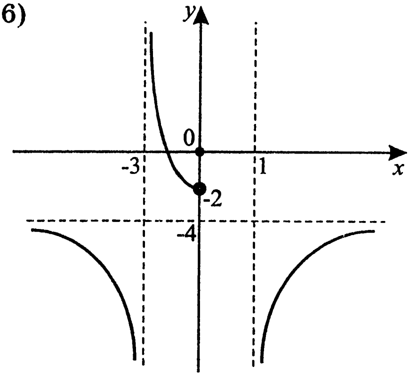
4)



5)



6)



Ответы на тренировочную работу 9

1. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет;

2. 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) да;
5) нет; 6) да; 7) нет; 8) да; 9) нет.

3. 1) $D(f) = [-2; 4]$; $E(f) = [-3; 3]$.

2) $D(f) = [-2; 2)$; $E(f) = (-\infty; 3]$.

3) $D(f) = [-4; \infty)$; $E(f) = [-2; 3)$.

4) $D(f) = (-3; \infty)$;

$E(f) = (-1; \infty)$.

5) $D(f) = [-4; -1] \cup [1; 5)$;

$E(f) = [-2; 2] \cup [3; 5)$.

6) $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 0] \cup (1; \infty)$;

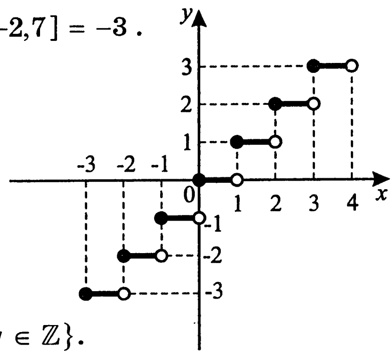
$E(f) = (-\infty; -4) \cup [-2; \infty)$.

Специальные функции

Рассмотрим некоторые специальные функции и их графики.

Определение. ***Целой частью числа*** *называется наибольшее целое число, не превосходящее само число.* Обозначается $[x]$ (функция целой части).

Примеры. $[2{,}5] = 2$; $\left[4\frac{2}{3}\right] = 4$; $[-2{,}7] = -3$.



Построим график $y = [x]$.

Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$;

$1 \leqslant x < 2$, то $[x] = 1$;

$2 \leqslant x < 3$, то $[x] = 2$;

$-1 \leqslant x < 0$, то $[x] = -1$;

$-2 \leqslant x < -1$, то $[x] = -2$;

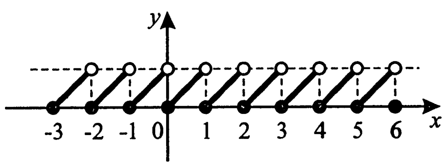
$D([x]) = (-\infty; \infty)$; $E([x]) = \{y \mid y \in \mathbb{Z}\}$.

Определение. ***Дробной частью числа*** *называется* разность между самим числом и его целой частью. *Обозначается*: $\{x\} = x - [x]$.

Примеры.

$\{4{,}72\} = 4{,}72 - [4{,}72] = 4{,}72 - 4 = 0{,}72$.

$\{-3{,}74\} = -3{,}74 - [-3{,}74] = -3{,}74 - (-4) = 0{,}26$, т.е. дробная часть всегда положительна. Построим график $y = \{x\}$.



Пусть $0 \leqslant x < 1$, то $\{x\} = x$;

$1 \leqslant x < 2$, то $\{x\} = x - 1$;

$2 \leqslant x < 3$, то $\{x\} = x - 2$;

$-1 \leqslant x < 0$, то $\{x\} = x + 1$;

$-2 \leqslant x < -1$, то $\{x\} = x + 2$;

$D(\{x\}) = (-\infty; \infty)$; $E(\{x\}) = [0; 1)$.

3

Последовательности

Введение

Определение. ***Последовательностью*** *называется функция натурального аргумента, т.е. функция, область определения которой является подмножеством множества всех натуральных чисел.*

Можно дать и иное определение.

Определение. ***Последовательностью*** *называется занумерованный ряд чисел. Естественно, два данных определения равнозначны, или равносильны.*

Рассмотрим примеры последовательностей.

1. $1; 4; 5; 7; 9; 10; 20; \ldots$
2. $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$
3. $-n; -\frac{1}{2}n; -\frac{1}{3}n; \ldots$
4. $\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}; \ldots$
5. $2^2; 3^2; 4^2; 5^2; \ldots$
6. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \ldots$
7. $1; 3; 7; 13; 19; 29; \ldots$
8. $\frac{1}{2\cdot3}; \frac{1}{3\cdot4}; \frac{1}{4\cdot5}; \frac{1}{5\cdot6}; \ldots$
9. $\frac{1}{1+2}; \frac{3}{4+5}; \frac{6}{7+8}; \frac{9}{10+11}; \ldots$
10. $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{7}; \ldots$

Если нам удастся угадать, или мы знаем закон, по которому образуются члены этой последовательности, то можно написать функциональную зависимость аналитически (если это возможно вообще).

Практикум 12

1. Проверьте аналитическую форму n-го члена последовательности для приведенных на с. 93 последовательностей:

2) $a_n = \frac{1}{n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$;

3) $a_k = -\frac{n}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}$, где n – постоянная;

4) $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{5}$, где $n \in \mathbb{N}$.

2. Попробуйте сами угадать и проверьте предлагаемую закономерность для последовательностей:

5) $2^2; 3^2; 4^2; 5^2; \dots;$

6) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots;$

8) $\frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4}; \frac{1}{4 \cdot 5}; \frac{1}{5 \cdot 6}; \dots;$

10) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{7}; \dots$

Ответы: 5) $a_n = (n+1)^2$; $n \in \mathbb{N}$;

6) $a_n = \frac{n}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$;

8) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$; $n \in \mathbb{N}$;

10) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$.

Классификация и виды последовательностей

Вопрос. Каким общим свойством обладают последовательности 1, 3, 5 (см. с. 93)?

Ответ: для этих последовательностей характерно то, что каждый их член, начиная со второго, больше предыдущего. Учитывая, что эти свойства могут существенно характеризовать последовательность, дадим определение.

Определение 1. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***строго возрастающей****, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. для любого* $n \in \mathbb{N}$*, начиная со второго* $a_n > a_{n-1}$.

Определение 2. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***строго убывающей****, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. для любого* $n \in \mathbb{N}$*, начиная со второго* $a_n < a_{n-1}$.

Для удобства, на будущее, будем называть последовательность $\{a_n\}$

а) строго возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$.

б) строго убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$.

Примечания.

Если для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geqslant a_n$ – последовательность называется возрастающей в широком смысле или неубывающей.

Если для $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \leqslant a_n$ – последовательность называется убывающей в широком смысле или невозрастающей.

Последовательности строго возрастающие или строго убывающие называются строго монотонными.

Последовательности невозрастающие или неубывающие называются монотонными в широком смысле.

Практикум 13

1. Пусть $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Выясним, какая это последовательность, возрастающая или убывающая. Уточним, чему равен a_{n+1}; для этого вместо n в $a_n = \frac{2n}{n+1}$ подставим $n+1$, т.е. $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)+1}$; значит $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+2}$.

   Рассмотрим разность:

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2[(n+1)^2 - n(n+2)]}{(n+2)(n+1)} =$$

   $$= \frac{2(n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N},$$

   значит $a_{n+1} > a_n$. По определению это значит, что последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей.

2. Определить вид последовательности $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.

   Выясним, чему равно $a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+2}{n^2+2n+2}$.

   Теперь рассмотрим, чему равна разность.

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n^2+2n+2} - \frac{n+1}{n^2+1} =$$

   $$= \frac{(n+2)(n^2+1) - (n+1)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

   $$= \frac{n^3 + 2n^2 + n + 2 - n^3 - 3n^2 - 4n - 2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-n^2 - 3n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} =$$

   $$= \frac{-n(n+3)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0; \quad -n(n+3) < 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Значит, $a_{n+1} < a_n$, т.е. последовательность для $\forall n \in \mathbb{N}$ является убывающей.

   Рассмотрим какие общие свойства у последовательностей 2, 4, 6, 9, 10 (см. с. 93).

   Ответ: все члены этих последовательностей принадлежат интервалу $(-1;1)$, т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad -1 < a_n < 1$.

Дадим теперь соответствующие определения.

Определение 3. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***ограниченной сверху****, если существует число* M *такое, что все члены последовательности меньше или равны числу* M*, т.е. для* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant M$.

Определение 4. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***ограниченной снизу****, если существует число* K *такое, что все члены последовательности больше или равны числу* K*, т.е. для* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant K$.

Определение 5. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***ограниченной****, если она ограничена сверху и снизу, т.е. для* $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in [K; M]$.

3. Выясните монотонность и ограничена или нет последовательность $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3}$.

Выпишем первые несколько членов, чтобы, может быть удастся, понять характер поведения последовательности:

$$a_1 = \frac{2+1}{1+3} = \frac{3}{4}; \quad a_2 = \frac{2\cdot 2^2+1}{2^2+3} = \frac{9}{7}; \quad a_3 = \frac{2\cdot 3^2+1}{3^2+3} = \frac{19}{12};$$

$$a_4 = \frac{2\cdot 4^2+1}{4^2+3} = \frac{33}{19}; \quad a_5 = \frac{2\cdot 5^2+1}{5^2+3} = \frac{51}{28}.$$

Похоже, она возрастающая. Проверим это.

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2+3} = \frac{2n^2+4n+3}{n^2+2n+4}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n^2+4n+3}{n^2+2n+4} - \frac{2n^2+1}{n^2+3} =$$

$$= \frac{(n^2+3)(2n^2+4n+3)-(2n^2+1)\left(n^2+2n+4\right)}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{2n^4+4n^3+9n^2+12n+9-2n^4-4n^3-9n^2-2n-4}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{10n+5}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} > 0 \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Первое, что бросается в глаза – это то, что $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+3} > 0$, т.е. $\{a_n\}$ ограничена снизу; с другой стороны, очевидно, что $a_n < 2$, т.е. ограничена сверху. Проверим предположение, что $a_n < 2$,

т.е. $\frac{2n^2+1}{n^2+3} - 2 = \frac{2n^2+1-2n^2-6}{n^2+3} = \frac{-5}{n^2+3} < 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$,

т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < 2$. Мы доказали ограничение сверху. Итак, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in (0; 2)$, что и требовалось доказать.

4. Выясните, ограничена ли последовательность

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+3};\ a_1 = \frac{3}{4};\ a_2 = \frac{5}{7};\ a_3 = \frac{7}{12};\ a_4 = \frac{9}{19}.$$

Похоже, $\{a_n\}$ – убывающая. Проверим это.

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+3} = \frac{2n+3}{n^2+2n+4}$$

Рассмотрим

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n^2+2n+4} - \frac{2n+1}{n^2+3} =$$

$$= \frac{(2n+3)(n^2+3)-(2n+1)(n^2+2n+4)}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+6n+9-2n^3-5n^2-10n-4}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{-2n^2-4n+5}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} < 0$$

$$\left(-2n^2-4n+5 = -2(n+1)^2+7 < 0 \quad \text{для} \quad \forall n \in \mathbb{N}\right).$$

Значит $a_{n+1} < a_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\{x_n\}$ – убывающая, но, очевидно, $a_n = \frac{2n+1}{n^2+3} > 0$.

С другой стороны, очевидно, раз $\{x_n\}$ – убывающая, то $a_n < a_1 = \frac{3}{4}$. Значит для $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in \left(0; \frac{3}{4}\right]$,

т.е. $\{x_n\}$ – ограниченная.

Способы задания функции

1. **Аналитический способ** задания, т.е. в виде формулы. Например:

   1) $f(x) = 3x^3 - 4x$.

   2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - \sin x}$.

   3) $f(x) = 2^{\cos\log_2(3x-1)}$ и т.д.

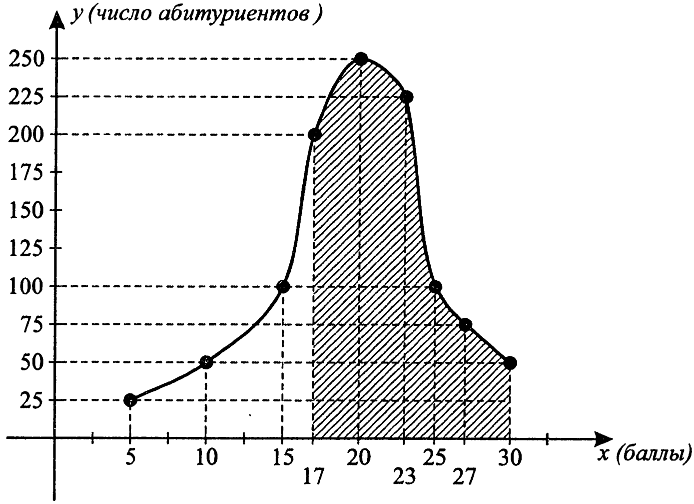
2. **Табличный способ.** Он применяется при исследованиях зависимости каких-то параметров от температуры, давления, массы и т.д. в неизвестных еще явлениях или процессах. Приходится экспериментально выявлять эти закономерности. Для этого составляются таблицы данного эксперимента. Например, зависимость линейных размеров неизвестного сплава от температуры нагрева, если при $t^0 = 0^0$ длину бруска принимаем за единицу.

Пример 1.

№ эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8
Значения температуры t, ^{0}C	2	5	8	11	14	17	20	23
Изменение длины бруска данного сплава L, %	0,1	0,4	0,5	0,7	0,7	1,1	1,5	2

3. **Графический способ.** Он очень удобен для представления результатов экспериментов в виде графиков и диаграмм. (Это очень наглядно.)

   Пример 2.
   Вступительные экзамены сдавали 3000 абитуриентов. Допустим, что максимально возможное число набранных баллов – 30. Поступило 1800 человек. Интересно, как распределилось число абитуриентов в зависимости от количества набранных ими баллов?



Из графика видно, что наибольшее количество поступивших набрало 20 баллов, и только немногие – 30 (проходной балл 17 баллов), значительная часть – больше 17 баллов и очень мало – 5–10 баллов и т.д.

Для данной задачи можно составить и диаграммы по набранным баллам, по предметам, по возрасту, полу и т.д.

4. Рассмотрим ряд чисел $3; 7; 13; 19; 29\ldots$ и т.д. Попытка записать закон аналитически в виде формулы обречена на провал. Но при внимательном рассмотрении ряда чисел можно догадаться, что даны простые числа через одно. Это – **словесный или описательный** способ задания функции.

5. Рассмотрим еще один способ задания последовательности – **рекуррентный** (на латыне – «возвращаясь назад»).

Пример 3.

Пусть $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \end{array}\right|$ называются начальными условиями,

$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ – рекуррентное соотношение.

Найдите первые десять членов последовательности.

$a_3 = 2a_1 + a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$;

$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$;

$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2 \cdot 5 + 11 = 21$;

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 2 \cdot 11 + 21 = 43$;

$a_7 = 2a_5 + a_6 = 2 \cdot 21 + 43 = 85$;

$a_8 = 2a_6 + a_7 = 2 \cdot 43 + 85 = 171$;

$a_9 = 2a_7 + a_8 = 2 \cdot 85 + 171 = 341$;

$a_{10} = 2a_8 + a_9 = 2 \cdot 171 + 341 = 683$ и т. д.

Очевидно, чтобы вычислить a_{10}, необходимо знать все предыдущие члены последовательности, что в ряде случаев неудобно. Зато характер взаимоотношений с рядом стоящими членами – понятен. Впервые исследования последовательностей, заданных таким образом, провел итальянский математик Леонардо из Пизано (Фибоначчи) (1180–1240).

Продолжение классификации последовательностей

Рассмотрим последовательности:

1. $\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \ldots$

2. $-1; +\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots$

3. $2; -4; 6; -8; 10; \ldots$

4. $1; 54; 7; 6; 9; 8 \ldots$

Ясно, что те виды классификации, которые мы уже определили, не подходят. Хотя, конечно, их можно назвать колеблющимися. Попробуем подойти к определению такого вида последовательностей иначе.

Определение 6. *Последовательность, все члены которой равны между собой, называется* ***постоянной,***

т.е. $x_{n+1} = x_n$ *для* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 7. *Если последовательность не является возрастающей в строгом и широком смысле; убывающей в строгом и широком смысле; постоянной, то она называется* ***колеблющейся.***

Тренировочная работа 10

Выясните и докажите, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая или убывающая, ограниченная или нет .

1. $x_n = \frac{2n+3}{4-3n}$.

2. $x_n = \frac{n^2}{n^2+3}$.

3. $x_n = \frac{n^2+3}{2n+5}$.

4. $x_n = \frac{2n-1}{n^2-n+1}$.

Решение тренировочной работы 10

1. Последовательность $x_n = \dfrac{2n+3}{4-3n}$.

1) $x_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+3}{4-3(n+1)} = \dfrac{2n+5}{1-3n}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+5}{1-3n} - \frac{2n+3}{4-3n} =$$
$$= \frac{(2n+5)(4-3n)-(2n+3)(1-3n)}{(1-3n)(4-3n)} =$$
$$= \frac{8n + 20 - 6n^2 - 15n - 2n - 3 + 6n^2 + 9n}{(1-3n)(4-3n)} =$$
$$= \frac{17}{(1-3n)(4-3n)} = \frac{17}{(3n-1)(3n-4)} > 0.$$

Тогда $x_{n+1} > x_n$, значит $\{x_n\}$ – возрастает только начиная со второго номера.

2) Вычислим первые члены последовательности.

$x_1 = \dfrac{2\cdot1+3}{4-3\cdot1} = 5$;

$x_2 = \dfrac{2\cdot2+3}{4-3\cdot2} = \dfrac{7}{-2} = -3{,}5$;

$x_3 = \dfrac{2\cdot3+3}{4-3\cdot3} = \dfrac{9}{-5} = -1{,}8$;

$x_4 = \dfrac{2\cdot4+3}{4-3\cdot4} = \dfrac{11}{-8} = -1{,}375$;

$x_5 = \dfrac{2\cdot5+3}{4-3\cdot5} = \dfrac{13}{-11} = -1\dfrac{2}{11}$;

$x_6 = \dfrac{2\cdot6+3}{4-3\cdot6} = \dfrac{15}{-14} = -1\dfrac{1}{14}$ и т.д.

Начиная со второго номера $\{x_n\}$ – возрастает, поэтому $x_n \geqslant x_2$, т.е. $x_n \geqslant -3{,}5$, т.е. ограничена снизу.

Очевидно, что $x_n = \dfrac{2n+3}{4-3n} < 0$ для $\forall n \geqslant 2$, тогда $x_n \leqslant 5$
Докажем это. Рассмотрим

$$x_n - 5 = \frac{2n+3}{4-3n} - 5 = \frac{2n+3-20+15n}{4-3n} =$$
$$= \frac{17n-17}{4-3n} = -\frac{17(n-1)}{3n-4} \leqslant 0 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, мы доказали, что $x_n \in [-3{,}5; 5]$ для $\forall n \in \mathbb{N}$,

т.е. последовательность $x_n = \frac{2n+3}{4-3n}$ ограничена.

Ответ: последовательность $\{x_n\}$ ограничена ;

$\{x_n\}$ – общего вида в смысле возрастания
или убывания;

$\{x_n\}$ – возрастет, начиная только со второго номера.

2. $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+3}$.

1) $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2+3} = \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n+4}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+4} - \frac{n^2}{n^2+3} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+1)(n^2+3) - n^2(n^2+2n+4)}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2+3n^2+6n+3-n^4-2n^3-4n^2}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} =$$

$$\frac{6n+3}{(n^2+3)(n^2+2n+4)} > 0,$$

т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$, значит $\{x_n\}$ – возрастающая.

2) Вычислим значения первых членов последовательности.

$x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{4}{7}$; $x_3 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; $x_4 = \frac{16}{19}$; $x_5 = \frac{25}{28}$.

Тогда, так как $\{x_n\}$ – возрастающая, то $x_n \geqslant x_1 = \frac{1}{4}$,

тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geqslant x_1 = \frac{1}{4}$, т.е. ограничена снизу.

Характер изменения последовательности наталкивает на предположение об ограниченности сверху.

Предположим, что $x_n < 1$, и попробуем это доказать.

Рассмотрим

$$x_n - 1 = \frac{n^2}{n^2+3} - 1 = \frac{n^2 - n^2 - 3}{n^2+3} = -\frac{3}{n^2+3} < 0.$$

Итак, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \left[\frac{1}{4};1\right)$.

Ответ: последовательность $x_n = \frac{n^2}{n^2+3}$ возрастающая и ограниченная.

3. $x_n = \frac{n^2+3}{2n+5}$.

1) $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3}{2(n+1)+5} = \frac{n^2+2n+4}{2n+7}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n^2+2n+4}{2n+7} - \frac{n^2+3}{2n+5} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+4)(2n+5)-(n^2+3)(2n+7)}{(2n+7)(2n+5)} =$$

$$= \frac{2n^3+9n^2+18n+20-2n^3-7n^2-6n-21}{(2n+5)(2n+7)} =$$

$$= \frac{2n^2+12n-1}{(2n+5)(2n+7)} > 0,$$

для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$, значит $\{x_n\}$ – возрастающая.

2) Для $x_n = \frac{n^2+3}{2n+5}$ степень числителя выше степени знаменателя. Выделим целую часть методом деления уголком.

Тогда $x_n = \frac{1}{2}n - 1{,}25 + \frac{9{,}25}{2n+5}$.

При $(n \to \infty)$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{9{,}25}{2n+5} \to 0\right)$, и так как

$y_n = \frac{1}{2}n - 1{,}25$ – возрастающая и неограниченная сверху последовательность, тогда и

$x_n = \frac{1}{2}n - 1{,}25 + \frac{9{,}25}{2n+5}$ неограничена сверху.

Но так как $x_n > 0$, то $\{x_n\}$ ограничена снизу.

Ответ: последовательность $x_n = \frac{n^2+3}{2n+5}$ возрастающая, неограниченная сверху и ограничена снизу.

4. $x_n = \dfrac{2n-1}{n^2-n+1}$.

1) $x_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{(n+1)^2-(n+1)+1} = \dfrac{2n+1}{n^2+n+1}$;

$x_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+1}$;

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{2n+1}{n^2+n+1} - \dfrac{2n-1}{n^2-n+1} =$

$= \dfrac{(2n+1)(n^2-n+1)-(2n-1)(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} =$

$= \dfrac{2n^3+n-n^2+1-2n^3-n^2-n+1}{n^4+n^2+1} = \dfrac{-2(n^2-1)}{n^4+n^2+1} \leqslant 0$,

тогда $x_{n+1} \leqslant x_n$, значит $\{x_n\}$ – убывающая в широком смысле.

2) Вычислим первые значения последовательности $x_n = \dfrac{2n-1}{n^2-n+1}$:

$x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{3}{3} = 1$; $x_3 = \dfrac{5}{7}$; $x_4 = \dfrac{7}{13}$; $x_5 = \dfrac{9}{21}$.

Так как $\{x_n\}$ – убывающая в широком смысле, то $x_n \leqslant x_1$, т.е. $\{x_n\}$ – ограниченная сверху.

Но так как $2n-1>0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $n^2-n+1>0$ также при $\forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n = \dfrac{2n-1}{n^2-n+1} > 0$.

Итак, мы установили, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in (0;1]$.

Ответ: последовательность $x_n = \dfrac{2n-1}{n^2-n+1}$ убывающая и ограниченная.

Предел последовательности

Практикум 14 (введение)

1. Дано: $x_n = \frac{4n+1}{2n+3}$.

Выясним, начиная с какого номера члена последовательности, выполняется $|x_n - 2| < 0{,}1$.

Так как $x_n - 2 = \frac{4n+1}{2n+3} - 2 = \frac{4n+1-4n-6}{2n+3} = \frac{-5}{2n+3}$,

то $|x_n - 2| = \left|\frac{-5}{2n+3}\right| = \frac{5}{2n+3} < 0{,}1$.

Решая неравенство, имеем $\frac{5}{0{,}1} < 2n + 3$,

т.е. $2n > \frac{5}{0{,}1} - 3$.

Тогда $n > \frac{4{,}7}{0{,}2} = 23{,}5$,

т.е. для $\forall n > 23 \Rightarrow |x_n - 2| < 0{,}1$,

т.е. $2 - 0{,}1 < x_n < 2 + 0{,}1$

(так как $|\alpha| < \beta \Leftrightarrow -\beta < \alpha < \beta$).

Попробуем графически иллюстрировать эту задачу. Для этого вначале выясним монотонность этой последовательности (возрастание или убывание).

$$x_{n+1} = \frac{4(n+1)+1}{2(n+1)+3} = \frac{4n+5}{2n+5};$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+5}{2n+5} - \frac{4n+1}{2n+3} =$$

$$= \frac{(2n+3)(4n+5)-(2n+5)(4n+1)}{(2n+5)(2n+3)} =$$

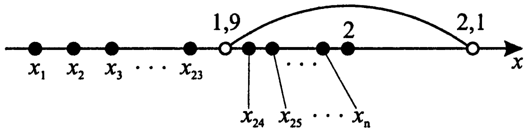
$$= \frac{8n^2+22n+15-8n^2-22n-5}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{10}{(2n+5)(2n+3)} > 0,$$

т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad x_{n+1} > x_n$, значит x_n – возрастающая.

Здесь $x_1 = 1$; $\quad x_2 = \frac{9}{7}$; ... ;

$$x_{23} = \frac{4 \cdot 23+1}{2 \cdot 23+3} = \frac{93}{49} = 1\frac{44}{49}\,; \qquad \left|1\frac{44}{49} - 2\right| = \frac{5}{49} > 0{,}1\,;$$

$$x_{24} = \frac{4 \cdot 24+1}{2 \cdot 24+3} = \frac{97}{51} = 1\frac{46}{51}\,; \qquad \left|1\frac{46}{51} - 2\right| = \frac{5}{51} < 0{,}1\,.$$



Интересно, что: $x_{23} \notin (1{,}9;\, 2{,}1)$; $x_{24} \in (1{,}9;\, 2{,}1)$, т.е. для $\forall n > 23$ $\quad x_n \in (1{,}9;\, 2{,}1)$.

2. Дано: $x_n = \dfrac{3n+2}{4n+1}$.

1) Выяснить, начиная с какого номера для всех членов последовательности, выполняется: $\left|x_n - \dfrac{3}{4}\right| < 0{,}01$.

$$x_n - \frac{3}{4} = \frac{3n+2}{4n+1} - \frac{3}{4} = \frac{12n+8-12n-3}{4(4n+1)} = \frac{5}{4(4n+1)}, \text{ тогда}$$

$$\left|\frac{5}{4(4n+1)}\right| < 0{,}01\,.$$

По свойству неравенств, содержащих модуль,

$$|\,\alpha\,| < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \alpha > -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{4(4n+1)} < 0{,}01 \\ \dfrac{5}{4(4n+1)} > -0{,}01 \end{cases}$$

Второе неравенство в системе верно всегда (для $\forall n \in \mathbb{N}$), так как положительное число больше отрицательного.

$$\text{Тогда } \frac{5}{4(4n+1)} < 0{,}01, \quad \left(\text{так как } \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \dfrac{1}{a} > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \dfrac{1}{b} > a \end{cases}\right).$$

$$\frac{5}{4 \cdot 0{,}01} < 4n + 1; \qquad 4n > \frac{5}{0{,}04} - 1;$$

$$n > \frac{5-0{,}04}{0{,}16} = \frac{4{,}96}{0{,}16} = 31\,,$$

т.е. для $\forall n > 31$ $\quad \left|x_n - \dfrac{3}{4}\right| < 0{,}01$.

Таким образом, $-0{,}01 < x_n - \frac{3}{4} < 0{,}01$,

тогда $\frac{3}{4} - 0{,}01 < x_n < \frac{3}{4} + 0{,}01$;

$x_n \in \left(\frac{3}{4} - 0{,}01;\ \frac{3}{4} + 0{,}01\right)$, или $x_n \in (0{,}74; 0{,}76)$

для $\forall n > 31$.

Выясним, какой характер монотонности этой последовательности (возрастание или убывание).

$$x_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{4(n+1)+1} = \frac{3n+5}{4n+5};$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3n+5}{4n+5} - \frac{3n+2}{4n+1} =$$

$$= \frac{(3n+5)(4n+1)-(4n+5)(3n+2)}{(4n+5)(4n+1)} =$$

$$= -\frac{5}{(4n+5)(4n+1)} < 0,$$

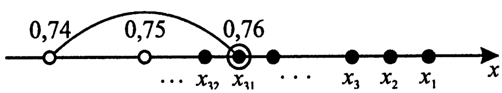
$\{x_n\}$ – убывающая.

$x_1 = 1;\ \ldots;$

$$x_{31} = \frac{3\cdot(31)+2}{4\cdot 31+1} = \frac{95}{125} = \frac{19}{25};$$

$\left|\frac{19}{25} - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{100} = 0{,}01$; т.е. $\left|x_{31} - \frac{3}{4}\right|$ не меньше 0,01.

$x_{32} = \frac{3\cdot 32+2}{4\cdot 32+1} = \frac{98}{129}$; $\left|\frac{98}{129} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{392-387}{129\cdot 4}\right| = \frac{5}{516} < 0{,}01$.



2) Продолжим исследование этого вопроса. Выясним, начиная с какого номера $\left|x_n - \frac{3}{4}\right| < 0{,}001$, т.е. когда $\left(x_n - \frac{3}{4} = \frac{5}{4(4n+1)}\right)$

$$\begin{cases} \frac{5}{4(4n+1)} < 0{,}001 \\ \frac{5}{4(4n+1)} > -0{,}001 \text{ – это верно для } \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким образом, $\frac{5}{4\cdot 0{,}001} < 4n+1$;

$n > \frac{5-0{,}004}{0{,}016} = \frac{4{,}996}{0{,}016} = \frac{4996}{16} = 312{,}25$,

т.е. для $\forall n > 312 \Rightarrow \left|x_n - \frac{3}{4}\right| < 0{,}001$, т.е. $x_n \in (0{,}749; 0{,}751)$.

3) Интересно, что этот процесс приближения к $\frac{3}{4}$ можно продолжить. Попытаемся осмыслить и обобщить. Выясним, начиная с какого номера члена последовательности $\left|x_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$, где ε (эпсилон, буква греческого алфавита) обозначает положительную, сколь угодно малую величину.

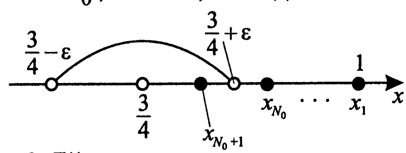
Тогда $\left|\frac{5}{4(4n+1)}\right| < \varepsilon$, т.е. $\begin{cases} \frac{5}{4(4n+1)} < \varepsilon, \\ \frac{5}{4(4n+1)} > -\varepsilon \end{cases}$ – это верно $\forall n \in \mathbb{N}$;

$\frac{5}{4(4n+1)} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{4\cdot\varepsilon} < 4n+1$; $4n > \frac{5}{4\varepsilon} - 1$; $n > \frac{5-4\varepsilon}{16\varepsilon}$.

Тогда $N_0 = \left[\frac{5-4\varepsilon}{16\varepsilon}\right]$ (функция целой части),

так как для $\forall \varepsilon > 0$ нашелся N_0, такой, что для

$\forall n > N_0 \Rightarrow \left|x_n - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$.



В этом случае говорят, что число 0,75 является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$ и записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{4}$, или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4}$.

Определение. *Число a называется* ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, *если для любого положительного ε найдется или существует такой номер члена числовой последовательности N_0 (как функция от ε), что для любых n, больших этого номера N_0, справедлива принадлежность n-го члена последовательности x_n интервалу $(a-\varepsilon_0;\ a+\varepsilon_0)$. Записывается это так:*

$\forall \varepsilon > 0;\ \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$,

или $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$.

Вопрос.

Почему строгое определение предела последовательности было сформулировано только в середине XIX века немецким математиком Карлом Теодором Вильгельмом Вейерштрассом (1815–1897), хотя еще во времена Архимеда (287–212 до н.э.) были известны методы вычисления, использующие, хотя интуитивно, идеи предельного перехода?

Ответ.

До середины XIX века в математике использовались только так называемые назывные определения, например, равнобедренным треугольником называется треугольник, две стороны которого равны между собой, где перечисляются некоторые свойства объекта и ему присваивается какое-то имя-определение. Для того, чтобы дать определение предела числовой последовательности $\{x_n\}$, необходимо описание некоего **процесса** изменения. И если данную последовательность можно охарактеризовать этим **процессом** изменения, то говорят, что $\{x_n\}$ имеет предел, если нет – последовательность $\{x_n\}$ предела не имеет.

Вопрос.

Что значит доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел?

Ответ.

Это значит установить функциональную зависимость номера N_0 от ε, например как в предыдущем случае, где $N_0 = \left[\frac{5-4\varepsilon}{16\varepsilon}\right]$.

Действительно, для $\forall\varepsilon > 0$ можно найти соответствующий номер, начиная с которого все члены последовательности $x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ (эпсилон окрестности числа a).

Рассмотрим несколько значений.

1. $\varepsilon = 0{,}02$, тогда $N_0 = \left[\frac{5-0{,}08}{16\cdot 0{,}02}\right] = \left[\frac{4{,}92}{0{,}32}\right] = [15{,}3] = 15$,

   т.е. для $\forall n > 15 \Rightarrow x_n \in (0{,}73; 0{,}77)$.

2. $\varepsilon = 0{,}003$; $N_0 = \left[\frac{5-0{,}012}{16\cdot 0{,}003}\right] = \left[\frac{4{,}988}{0{,}048}\right] = [103{,}9] = 103$,

   т.е. для $\forall n > 103 \Rightarrow x_n \in (0{,}747; 0{,}753)$.

Тренировочная работа 11

Дано: $x_n = \frac{5n+3}{4n-1}$. Выяснить:

1. Монотонность;
2. Ограниченность;
3. Начиная с какого номера все члены последовательности $\{x_n\}$ таковы, что справедливо неравенство $\left|x_n - \frac{5}{4}\right| < 0{,}01$;
4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{5}{4}$.

Решение тренировочной работы 11

Дано: $x_n = \frac{5n+3}{4n-1}$.

1. $x_{n+1} = \frac{5(n+1)+3}{4(n+1)-1} = \frac{5n+8}{4n+3}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{5n+8}{4n+3} - \frac{5n+3}{4n-1} =$$
$$= \frac{(5n+8)(4n-1)-(5n+3)(4n+3)}{(4n+3)(4n-1)} =$$
$$= \frac{20n^2+27n-8-20n^2-27n-9}{(4n+3)(4n-1)} =$$
$$= \frac{-17}{(4n+3)(4n-1)} < 0$$

Таким образом, $x_{n+1} < x_n$, т.е. $\{x_n\}$ – убывающая.

2. Вычислим $x_1 = \frac{8}{3}$, тогда $x_n \leqslant \frac{8}{3}$, т.е. ограничена сверху. С другой стороны, очевидно, что $x_n > 0$, так как $\frac{5n+3}{4n-1} > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \left(0;2\frac{2}{3}\right]$.

3. $\left|x_n - \frac{5}{4}\right| < 0{,}01$, т.е. $\begin{cases} x_n - \frac{5}{4} < 0{,}01, \\ x_n - \frac{5}{4} > -0{,}01. \end{cases}$ Рассмотрим

$$x_n - \frac{5}{4} = \frac{5n+3}{4n-1} - \frac{5}{4} = \frac{20n+12-20n+5}{4(4n-1)} = \frac{17}{4(4n-1)};$$

$\left|x_n - \frac{5}{4}\right| = \frac{17}{4(4n-1)}$, т.е. $\frac{17}{4(4n-1)} < 0{,}01$; $\frac{17}{4\cdot 0{,}01} < 4n - 1$;

$4n > \frac{17}{0{,}04} + 1$, тогда $n > \frac{17+0{,}04}{0{,}16} = \frac{17{,}04}{0{,}16} = 106{,}5$,

т.е. $[106{,}5] = 106$.

Значит $\forall n > 106 \Rightarrow \left|x_n - \frac{5}{4}\right| < 0{,}01$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1{,}25$.

$$|x_n - 1{,}25| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17}{4(4n-1)} < \varepsilon, \\ \frac{17}{4(4n-1)} > -\varepsilon \end{cases}$$ – верно для $\forall n \in \mathbb{N}$,

т.е. $\frac{17}{4(4n-1)} < \varepsilon$; $\frac{17}{4\varepsilon} < 4n - 1$; $4n > \frac{17+4\varepsilon}{4\varepsilon}$; $n > \frac{17+4\varepsilon}{16\varepsilon}$.

Тогда $N_0 = \left[\frac{17+4\varepsilon}{16\varepsilon}\right]$,

т.е. для $\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_0 \left(N_0 = \left[\frac{17+4\varepsilon}{16\varepsilon}\right]\right) \mid \forall n > N_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ |x_n - 1{,}25| < \varepsilon$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1{,}25$,

что и требовалось доказать.

Проверочная работа 4

Дано: $x_n = \frac{2n+3}{3n+4}$. Выяснить:

1. Монотонность.
2. Ограниченность.
3. Начиная с какого номера все члены последовательности $\{x_n\}$ таковы, что справедливо неравенство $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01$.
4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Историческая справка

Функция – одно из основных общенаучных понятий; оно выражает взаимосвязь между различными объектами. Первые попытки описать это понятие принадлежат немецкому ученому *Готфриду Вильгельму Лейбницу* (1646–1716) – физику, математику, философу.

Под функцией понималось «выражение, составленное каким-то образом из переменной величины и постоянных величин».

Леонард Эйлер (1707–1783) – математик, механик, физик и астроном, по происхождению швейцарец; работал в России и Германии. Под функцией Эйлер понимал аналитическое выражение, но готов был понимать под функцией то, что можно «вычертить карандашом на листе бумаги». Эйлер считал, что класс функций, являющихся «произвольно начерченными кривыми» шире класса функций, заданных аналитически.

Д'Аламбер Жан Лерон (1717–1783) – французский математик, механик и философ, возражал, считая, что тогда нет разницы.

Даниил Бернулли (1706–1782) – швейцарский ученый, пошел дальше, введя понятие многолистной функции.

Современное понятие функции принадлежит русскому математику *Николаю Ивановичу Лобачевскому* (1792–1856), известному более, как создатель неевклидовой геометрии.

Некоторые вопросы логики доказательства

Определение. *Если из истинности утверждения A следует истинность утверждения B,*

[Записывают это так: из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$]

то говорят, что истинность утверждения A достаточна для истинности утверждения B, а истинность утверждения B необходима для истинности утверждения A, или что $(A - И)$ есть признак $(B - И)$, а $(B - И)$ есть свойство $(A - И)$, т.е. истинность A есть признак истинности B, а истинность B есть свойство истинности A.

Пример. Утверждение A – ($ABCD$ – параллелограмм). Утверждение B – (противоположные углы равны: $\angle B = \angle D$). Сформулируем логическую цепочку из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$.

Такая логическая цепочка истинности называется **теоремой**. В данном случае, действительно, из того, что нам дан параллелограмм, следует, что два противоположных угла равны: $\angle B = \angle D$.

Таким образом можно утверждать, что факт (A) (четырехугольник есть параллелограмм) достаточен для того, чтобы в четырехугольнике два противоположных угла были равны, т.е. он являлся бы параллелограммом – факт (B).

Увы, логическая цепочка из $(B - И) \Rightarrow (A - И)$ ложная, так как равенство только двух противоположных углов недостаточно для того чтобы четырехугольник являлся параллелограммом.

В рамках обычных рассуждений (т.е. в рамках двузначной логики) из истинности утверждения A возможны только две логические цепочки: либо из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$, либо из $(A - И) \Rightarrow (\neg B - И)$ (из истинности утверждения A следует истинность отрицания B), где $\neg$ – символ отрицания. Например, какое-то число либо кратно двум, либо оно некратно двум.

Эту особенность можно использовать для доказательства. Действительно если какую-то логическую цепочку, например, первую, из $(A - И) \Rightarrow (B - И)$ нельзя доказать напрямую, то предполагают истинной другую логическую цепочку, а именно вторую – из $(A - И) \Rightarrow (\neg B - И)$ (из истинности утверждения A следует истинность отрицания B).

Если проводя в дальнейшем логические рассуждения, мы приходим к противоречию типа $2 = 3$, то значит наше предположение о том, что данная логическая цепочка истинна – ложно. А это значит, что верна первая логическая цепочка, так как других больше нет.

Такой способ рассуждения иногда называется доказательством от противного или методом исключенного третьего. В ряде случаев такой способ доказательства является весьма эффективным, а иногда и единственным. В дальнейшем будет приведен пример доказательства теоремы методом от противного.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Факт A – наличие предела для x_n.

Факт B – что этот предел единственный.

Дано: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Докажем, что существует ед. число a, такое что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ т.е. из $(A - \text{и}) \Rightarrow (B - \text{и})$.

Доказательство проведем методом исключенного третьего, т.е. *предположим*, что из $(A - \text{и}) \Rightarrow (\neg B - \text{и})$, значит, из существования предела последовательности следует его неединственность.

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Rightarrow \quad \exists a \neq b \left|\,\left|\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \end{cases}\right.\right.$.

Для определенности пусть $a > b$:

1) так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то по определению

для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 | \forall n > N_1 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

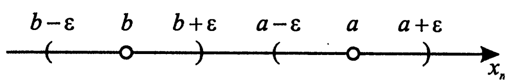
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то по определению

для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 | \forall n > N_2 \quad \Rightarrow \quad b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$.

Выберем $N_3 \left| \begin{matrix} N_3 > N_1 \\ N_3 > N_2 \end{matrix} \right.$, тогда

для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_3 | \forall n > N_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon} \\ b - \varepsilon < \underline{x_n < b + \varepsilon} \end{cases}$.

На картинке это выглядит так:



Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_3 | \forall n > N_3 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2}$. Так как утверждение должно быть справедливо для $\forall \varepsilon$, то в том числе и для ε_0, тогда с учетом того, что $\left.\begin{matrix} b + \varepsilon_0 = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\ a - \varepsilon_0 = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \end{matrix}\right|$,

получается, что для $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2}$ $\quad \exists N_3 \mid \forall n > N_3$ верно

$\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}$.

Но это ложное утверждение, т.е. противоречие.

Вывод. Полученное противоречие доказывает, что предположение о том, что из существования предела следует его неединственность – ложно, а это значит, что из существования предела последовательности $\{x_n\}$ следует его единственность.

Рассмотрим несколько иной способ доказательства этой части рассуждений:

1) так как $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$,

то для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = b$, то для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \mid \forall n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $N_3 \left| \begin{matrix} N_3 > N_1 \\ N_3 > N_2 \end{matrix} \right.$, тогда

для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_3 \mid \forall n > N_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$, тогда

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Мы воспользовались известным неравенством, содержащим модуль: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$,

т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_3 \mid \forall n > N_3 \quad \Rightarrow \quad |a - b| < \varepsilon$.

Это должно выполняться для $\forall \varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon_0 = \frac{a-b}{2}$ $\quad (a > b)$, тогда $|a - b| < \frac{a-b}{2}$, из чего следует $1 < \frac{1}{2}$ – что ложно.

Полезно знать ряд теорем о пределах.

Теорема 2. Теорема о пределах в неравенствах.

Пусть $\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n \\ \forall n > N;\quad x_n \geqslant y_n\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n .$

Примечание.

Можно сформулировать более общее утверждение.

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n \\ \forall n > N;\quad x_n > y_n\end{array}\right| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n ,$$

т.е., переходя к пределу в строгих неравенствах, можем получить нестрогое неравенство.

Теорема 3. Любая последовательность, имеющая предел, ограничена.

Теорема 4. Теорема о сжатой переменной (иногда ее называют теоремой о двух городовых).

Пусть

$$\left.\begin{array}{ll}1) & x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad \text{для} \quad \forall n > N_1 \\ 2) & \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a .$$

Рассмотрим пример использования теоремы для вычисления пределов.

Дано: $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Существует ли предел последовательности y_n?

Так как $n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant y_n \leqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ – наибольшая дробь суммы;

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ – наименьшая дробь суммы.

Необходимо учесть, что

1) $\sqrt{n^2+n} < n+1 \quad (n^2+n < n^2+2n+1;\ n+1>0)$;

тогда $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \dfrac{1}{n+1}$, значит $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} > \dfrac{n}{n+1}$;

2) $\sqrt{n^2+1} > n \quad (n^2+1 > n^2;\ 1>0)$,

тогда $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{1}{n}$; значит $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{n}{n} = 1$.

Тогда $\dfrac{n}{n+1} < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant y_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} < 1$, т.е. $\dfrac{n}{n+1} < y_n < 1$.

Переходя к пределу $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} 1$, можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$.

Тогда $1 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant 1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Теорема 5 (Теорема Больцано – Коши – Вейерштрасса)[1]. Всякая монотонная, ограниченная последовательность имеет предел.

Примечание. Пусть $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2n}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n} = 0$, то ясно, что условие ограниченности является необходимым условием, хотя и недостаточным. А вот условие монотонности и не необходимо, и не является достаточным.

---

[1] Бернард Больцано (1781–1848) – чешский математик и философ, в начале XIX в. наряду с *Коши* дал определение предела, дифференциала и интеграла, а также предложил строгое математическое доказательство теоремы о непрерывной на отрезке функции; был предшественником *Кантора* в исследовании бесконечных множеств.

Луи Коши (1789–1857) – французкий математик; автор классических курсов математического анализа, основаных на систематическом применении понятия предела; один из основоположников теории аналитических функций, автор трудов по теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории чисел, геометрии.

Карл Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик; автор трудов по математическому анализу, теории функции, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре; разработал схему логического обоснования математического анализа.

Алгебраические операции над пределами

Выполним численные эксперименты.

Пусть $a_n = \frac{2n}{n+1}$; $b_n = \frac{n+2}{n}$.

Составим таблицу значений последовательностей.

№	1	2	3	4	5	...	100	...	Наблюдения и выводы
a_n	1	1,333	1,5	1,60	1,67	...	1,98	...	$a_n \to 2$
b_n	3	2	1,667	1,5	1,4	...	1,02	...	$b_n \to 1$
$a_n + b_n$	4	3,333	3,167	3,1	3,067	...	3,001	...	$a_n + b_n \to 3$
$a_n \cdot b_n$	3	2,667	2,5	2,4	2,333	...	2,019	...	$a_n \cdot b_n \to 2$
$\frac{a_n}{b_n}$	0,333	0,667	0,9	1,067	1,19	...	1,941	...	$\frac{a_n}{b_n} \to 2$

Эти наблюдения позволяют сформулировать ряд теорем.

Теорема 6. Предел алгебраической суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей.

Пусть $\left.\begin{array}{l} \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Приведем важный контрпример, обьясняющий необходимость существования предела для каждой последовательности.

Пусть

$a_n = n + \frac{n+1}{n}$; тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (предела нет),

$b_n = \frac{4-n^2}{n}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ (предела нет),

но $a_n + b_n = \frac{n+5}{n}$; тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1$,

значит $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Дело в том, что не существует предел для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Теорема 7. Предел произведения двух последовательностей, имеющих пределы, равен произведению пределов этих последовательностей.

Пусть $\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Теорема 8. Предел частного двух последовательностей, имеющих пределы, равен частному пределов этих последовательностей, если предел делителя не равен нулю.

Пусть $\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}}$.

Следствия из теорем:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где λ – const (постоянная).

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\underbrace{a_n + b_n + c_n + \ldots + k_n}_{m\ \text{слагаемых}}\Big) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \ldots + \lim\limits_{n\to\infty} k_n}_{\substack{m\ \text{слагаемых} \\ (m-\text{фиксированное число})}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^m$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

Применение теорем о пределах к вычислению пределов

Практикум 15

1. Вычислите.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{4n^2+n-3}=$$

Теорией о частном пока воспользоваться нельзя, так как имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}=$$

Вынесем n^2 в числителе и знаменателе.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}=$$

Теперь теоремой 8 можно воспользоваться.

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}=$$

В данном случае можно воспользоваться теоремой о сумме.

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}=$$

Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

$$=\frac{3-0+0}{4+0-0}=\frac{3}{4}=0{,}75\,.$$

В дальнейшем столь подробную детализацию приводить не будем.

2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} =$

Домножим на сопряженное выражение относительно числителя и знаменателя.

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(n-n+1)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{(n+1-n)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}+1}{1+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}} = 2\cdot\frac{\sqrt{1+0}+1}{1+\sqrt{1-0}} = 2\cdot\frac{1+1}{1+1} = 2.$$

4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Тренировочная работа 12

Вычислите:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n+2}{\sqrt{2}\cdot n^2+3n-5}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-1}{6n^3+n+2}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(5+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2-\sqrt{n^2+5n}\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots\right)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n+3)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt[4]{n^3+n^2}\right)\right)$.

Решение тренировочной работы 12

Вычислите:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+2}{\sqrt{2}\cdot n^2+3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{2}+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{2}+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{2-0+0}{\sqrt{2}+0-0}=\sqrt{2}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-1}{6n^3+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(3-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(6+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}=$$

$$=\frac{3-0}{6+0+0}=\frac{1}{2}.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=5+0=5.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(3+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=3+0=3.$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n}}{(n^2+1)-(n^2-n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{1+0}=2.$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^2+5n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-5n}{n+\sqrt{n^2+5n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot(-5)}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{n}}\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-5)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{n}}\right)}=\frac{-5}{1+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)}}=\frac{-5}{1+\sqrt{1+0}}=-2{,}5\,.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+3n^2+2}\right)=$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+1-n^3-3n^2-2}{\sqrt[3]{\left(n^3+2n^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2n^2+1\right)\left(n^3+3n^2+2\right)}+\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2+2\right)^2}}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2-1}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}\right)^2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt[3]{(1+0+0)^2}+\sqrt[3]{(1+0+0)(1+0+0)}+\sqrt[3]{(1+0+0)^2}}=-\frac{1}{3}\,.$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots\right).$

Необходимо написать n-й член последовательности.

Рассмотрим последовательность 1; 4; 7; 10 (явно арифметическая прогрессия),

где $\left.\begin{array}{l} a_1=1 \\ d=3 \end{array}\right| \Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d$,

т.е. $a_n=1+(n-1)3=3n-2$,

а $a_{n+1}=3(n+1)-2=3n+1$.

Итак, n-й член первоначальной последовательности равен $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Представим тогда каждый член суммы в виде разности двух дробей и выполним почленно сложение в левой и правой частях равенств.

Примечание. Вопросы, связанные с арифметической прогрессией, мы будем рассматривать более подробно несколько позже.

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}}\right)$$
$$\frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right)$$
$$+ \quad \frac{1}{7\cdot 10} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right)$$
....
$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n+1-1}{3n+1} = \frac{n}{3n+1} \right).$$

Сложив последовательно левые и правые части равенств, заметим, что каждый второй член разности взаимно уничтожится с последующим первым членом разности,

тогда $S_n = \dfrac{n}{3n+1}$.

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{3}$,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots\right) = \dfrac{1}{3}$.

9. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)^2-(n-1)^2\right)\left((n+1)^2+(n-1)^2\right)}{(n+1+n-1)\left((n+1)^2-(n+1)(n-1)+(n-1)^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot 2(2n^2+2)}{2n(n^2+3)} = 2\cdot\lim_{n\to\infty} 2 = 4.$$

10. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+3)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-n(n-1)(n-3)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{(n+3)^3}+\sqrt{n(n-1)(n-3)}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}+3n^2+3n+1-\cancel{n^3}+4n^2-3n}{\sqrt{n}\sqrt{n^3}\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(7+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}\right)} =$$

$$= \frac{7+0}{\sqrt{(1+0)^3}+\sqrt{(1-0)(1-0)}} = 3{,}5.$$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8}+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^{5/3}}-9\right)}{n^2\left(\frac{3}{n}-\sqrt[4]{9+\frac{1}{n^8}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{5/3}}-9}{\frac{3}{n}-\sqrt[4]{9+\frac{1}{n^8}}} =$$

$$= \frac{0-9}{0-\sqrt[4]{9+0}} = \frac{9}{\sqrt[4]{9}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt[4]{n^3+n^2}\right)\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+n^2}\right)}{\sqrt[4]{n^3+n}+\sqrt[4]{n^3+n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}(n^3+n-(n^3+n^2))}{\left(\sqrt[4]{n^3+n}+\sqrt[4]{n^3+n^2}\right)\left(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}\left(n-n^2\right)}{n^{3/4}\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)\cdot n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n^{2\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{0-1}{\left(\sqrt[4]{1+0}+\sqrt[4]{1+0}\right)\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

Проверочная работа 5

Вычислите:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+3n)(n^2+n+1)}{5n^3-3n^2+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3}+3}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^3-2n^2+1}-\sqrt[3]{2n^3+n^2+1}\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\ldots\right)$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2)^4-(n+2)^4}{(n-2)^3+(n+2)^3}$.

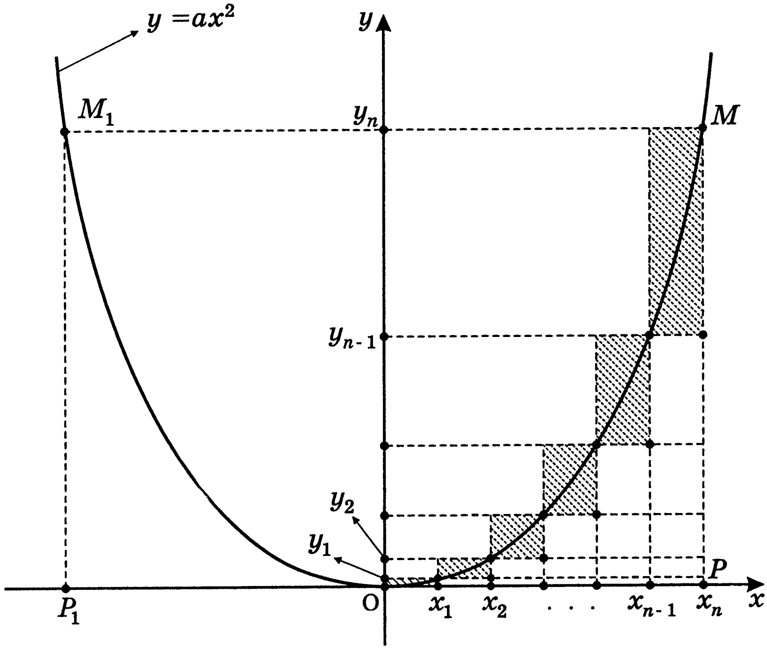
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+6n^2+12n+8}-\sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}-16n^2}{4n-\sqrt[5]{32n^{10}+1}}$.

Применение теории пределов для вычисления площадей

Задача. Вычислить площадь криволинейного треугольника ОРМ (см. чертеж), ограниченного Г $y = ax^2$ (графиком), осью абсцисс и прямой $x = P$.

1. Разобьем $[OP]$ на N равных частей и построим на них ряд прямоугольников, находящихся внутри криволинейного треугольника и вне его (объемлющих). Q – площадь криволинейного треугольника OPM.



Фигура Q'_n состоит ступенчатых фигур внутри криволинейного треугольника.

Q''_n состоит из ступенчатых фигур, объемлющих криволинейный треугольник. Ясно, что $Q'_n < Q < Q''_n$.

Далее $\frac{OP}{n} \cdot PM = \frac{x}{n} \cdot y$ – площадь наибольшего прямоугольника. Она равна разности площадей $Q''_n - Q'_n = \frac{x \cdot y}{n}$, так как разность для каждого из прямоугольников отмечена заштрихованным прямоугольником и вкладывается в большой прямоугольник. При $(n \to \infty)$ следует $\left(\frac{xy}{n} \to 0\right)$, т.е. что $(Q''_n - Q'_n) \to 0$, значит $\lim\limits_{n\to\infty} Q''_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q'_n = Q$.

1) Рассмотрим абсциссы точек деления отрезка OP.

$$\frac{1}{n}x;\ \frac{2}{n}\ x;\ \frac{3}{n}x;\ \ldots\ \frac{k}{n}x;\ \ldots\ \frac{n}{n}x$$

$$\left(OP = x;\ x_1 = \frac{1}{n}x;\ x_2 = \frac{2}{n}x;\ldots;x_n = \frac{n}{n}x\right).$$

2) Рассмотрим ординаты этих точек (высоты прямоугольников).

$a \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2; a\left(\frac{2}{n}\right)^2 x^2;\ a\left(\frac{3}{n}\right)^2; \ldots a\left(\frac{k}{n}\right)^2 x^2; \ldots; a\left(\frac{n}{n}\right)^2 x^2$, где

$$y_1 = ax_1^2 = a\left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2;\ y_2 = ax_2^2 = a\left(\frac{2}{n}\right)^2 x^2;\ldots;y_k = a\left(\frac{k}{n}\right)^2 x^2;$$

$$y_n = a\left(\frac{n}{n}\right)^2 x^2.$$

Тогда площадь Q_n как сумма прямоугольников равна

$$Q''_n = a\left(\frac{1}{n}\right)^2 x^2 \cdot \frac{x}{n} + a\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + a\left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + \ldots$$

$$\ldots + a\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} + \ldots + a\left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{n} =$$

$$= \frac{ax^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + \ldots + n^2) =$$

$= \frac{ax^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$ на основании известного тождества Архимеда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. $Q = \lim\limits_{n\to\infty} Q''_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{ax^3}{3} = \frac{y \cdot x}{3}$, где

Q – площадь криволинейного треугольника OPM;

ax^3 – постоянная, вынесенная за знак предела;

$ax^2 = y$.

Обозначим $S_{п.с.}$ площадь параболического сегмента.

$S_{PMM_1P_1} = 2xy$.

Значит $S_{п.с.} = S_{PMM_1P_1} - 2S_{OPM} = 2xy - \frac{2xy}{3} = \frac{4}{3}xy$, тогда

$S_{п.с.} = \frac{2}{3}S_{PMM_1P_1}$.

Тогда площадь параболического сегмента равна $\frac{2}{3}$ площади объемлющего его прямоугольника.
(Теорема Архимеда, доказанная им самим.)

4

Прогрессии

Арифметическая прогрессия

Рассмотрим несколько последовательностей.

$\{a_n\}$ – 1; 4; 7; 10; 13; ...

$\{b_n\}$ – 2; 6; 10; 14; 18; ...

$\{c_n\}$ – 7; 2; −3; −8; −13; ...

Все они обладают одним интересным свойством. Интересно, а каким? Если внимательно присмотреться и проанализировать, то можно заметить, что:

в последовательности $\{a_n\}$ все члены последовательности, стоящие рядом, отличаются на 3;

в последовательности $\{b_n\}$ все члены последовательности, стоящие рядом, отличаются на 4;

в последовательности $\{c_n\}$ все члены последовательности, стоящие рядом, отличаются на −5.

Выделим такой тип последовательностей и дадим ему имя.

Определение 1. *Последовательность $\{a_n\}$ называется* ***арифметической прогрессией****, если разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим, есть величина постоянная, которая обозначается d и называется разностью прогрессии.*

Иногда определяют и так.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ***арифметической прогрессией,*** *если она задана рекуррентным соотношением*

$a_{n+1} = a_n + d$.

Здесь d – разность прогрессии; a_1 – заданное начальное условие (первый член последовательности).

Очевидно, что по смыслу определения совпадают.

Рассмотрим закономерность образования арифметической прогрессии и попытаемся выявить функциональную зависимость n-го члена прогрессии от его номера.

Итак, дано $a_{n+1} = a_n + d$.

$n = 1;\quad a_2 = a_1 + d$;

$n = 2;\quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$;

$n = 3;\quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$;

$n = 4;\quad a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$;

Прослеживается закономерность

$a_n = a_1 + (n-1)d$,

т.е. получили формулу n-го члена. Строгое доказательство этого факта возможно только с использованием метода математической индукции.

Для следующих последовательностей запишем формулу n-го члена.

1. $\{a_n\}$ – 1; 4; 7; 10; 13; ...

   Очевидно, что $a_1 = 1; d = 3$; тогда $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3$, т.е. $a_n = 3n - 2$.

2. $\{b_n\}$ – 2; 6; 10; 14; 18; ...

   Ясно, что здесь $b_1 = 2;\ d = 4$; тогда $b_n = 2 + (n-1) \cdot 4$; т.е. $b_n = 4n - 2$.

3. $\{c_n\}$ – 7; 2; –3; –8; –13; ...

   Здесь $c_1 = 7; d = -5$; тогда $c_n = 7 + (n-1) \cdot (-5)$, т.е. $c_n = -5n + 12$.

Интересно отметить, что во всех рассматриваемых случаях, n-й член прогрессии есть линейная функция. Может быть это всегда так?

Теорема 1.

Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы a_n являлась линейной функцией (от n).

Необходимость.

Пусть $\{a_n\}$ арифметическая прогрессия. Тогда, как было уже показано, $a_n = a_1 + (n-1)d$, т.е. $a_n = nd + a_1 - d$.

Так как $f(x) = ax + b$ есть линейная функция и $x \in \mathbb{N}$, это значит, что $\begin{matrix} a = d \\ b = a_1 - d \end{matrix}$, т.е. a_n – линейная функция, где $f(n) = nd + a_1 - d$.

Достаточность.

Пусть a_n линейная функция, т.е. $a_n = a \cdot x + b$. Так как $n \in \mathbb{N}$ и $x = n$, то $a_n = a \cdot n + b$, тогда $a_{n+1} = a(n+1) + b$.

Рассмотрим $a_{n+1} - a_n = (a(n+1) + b) - (an + b)$.

Отсюда следует, что $a_{n+1} - a_n = a$, где a – величина постоянная. Тогда $a_{n+1} = a_n + a$, а это значит по определению, что a_n – арифметическая прогрессия.

Теорема доказана.

Теорема 2.

Пусть $\{a_n\}$ арифметическая прогрессия.

Тогда $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, т.е. сумма двух членов прогрессии, стоящих в левой части выражения, совпадает с суммой двух членов этой же прогрессии из правой части, если суммы их индексов равны.

Доказательство проведем напрямую.

$$
\begin{array}{rrl}
 & a_{n-k+1} & = a_1 + (n-k+1-1)d = a_1 + (n-k)d \\
+ & a_k & = a_1 + (k-1)d \\
\hline
 & a_k + a_{n-k+1} & = a_1 + (n-k)d + a_1 + (k-1)d = 2a_1 + (n-1)d =
\end{array}
$$

$= a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$, что и требовалось доказать.

Таким образом, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Рассмотрим характеристическое свойство арифметической прогрессии, т.е. теорему о признаке арифметической прогрессии.

Теорема 3.

Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы любой ее член, начиная со второго, был равен среднему арифметическому рядом стоящих ее членов, т.е. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

Достаточность.

Пусть для последовательности $\{a_n\}$ выполняется соотношение $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, тогда $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, что можно преобразовать в $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$. Это значит, что разность между любыми, рядом стоящими членами последовательности, величина постоянная, или что $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

Необходимость.

Пусть $\{a_n\}$ арифметическая прогрессия, т.е. $a_{n+1} = a_1 + nd$.

Тогда $\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_{n+2} = a_1 + (n+1)d \end{array}\right|$.

Тогда сложим почленно левые и правые части равенств.

$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_1 + (n-1)d + a_1 + (n+1)d}{2} = a_1 + nd$.

Таким образом, получим, что $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Что и требовалось доказать.

Практикум 16

Дано: $\{a_n\}$ – $\div$ (так будет обозначаться арифметическая прогрессия), определенная следующими условиями.

1. $\begin{cases} a_2 + a_8 = 10 \\ a_3 + a_{14} = 31 \end{cases}$

Найти: $a_1 = ?$; $d = ?$

Выразим a_2, a_8, a_3, a_4 через a_1 и d. Получим

$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 7d = 10 \\ a_1 + 2d + a_1 + 13d = 31 \end{cases}$; $\begin{cases} 2a_1 + 8d = 10 \\ 2a_1 + 15d = 31 \end{cases}$.

Вычтем из второго уравнения первое . Получим $7d = 21$; $d = 3$. Подставляя, имеем $a_1 = -7$.

Ответ: $a_1 = -7$; $d = 3$.

2. $\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 54 \end{cases}$

Найти: $a_1 = ?$; $d = ?$

Поступим аналогичным образом.

$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 36 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 + 3d = 12 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases}$,

$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ (12 - 3d + d)(12 - 3d + 2d) = 54 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ 2(6 - d)(12 - d) = 54 \end{cases}$;

$72 - 18d + d^2 = 27;$

$d^2 - 18d + 45 = 0;$

$d = 15; a_1 = -33;$

$d = 3;\ a_1 = 3.$

Ответ: $a_1 = -33$; $d = 15$ или $a_1 = 3$; $d = 3$.

Задача. Найти сумму всех двузначных чисел, кратных 3. Можно, конечно, решать задачу «в лоб», но это уж больно утомительно. Попробуем иначе. Выпишем сумму членов последовательности таких чисел в прямом и обратном порядке и, сложив почленно, получим двойную сумму.

$$+\begin{array}{l} 12 + 15 + 18 + 21 + \ldots + 93 + 96 + 99 \\ \underline{99 + 96 + 93 + 90 + \ldots + 18 + 15 + 12} \\ (12 + 99) + (15 + 96) + (18 + 93) + \ldots + (93 + 18) + (96 + 15) + (99 + 18) \end{array},$$

т.е. $111 + 111 + 111 + \ldots + 111 + 111 + 111 = 2S_n$.

Сколько же членов в этой последовательности? Решим этот вопрос.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 99 \\ a_1 = 12 \\ d = 3 \end{array}\right| \qquad n = ?$$

Так как $a_n = a_1 + (n-1)d$, то после преобразований

получим $\boxed{n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}}$, т.е. $n = \frac{99-12+3}{3} = 30$.

Значит $2S_{30} = 111 \cdot 30 = 3330$; $S_{30} = 1665$.

Попробуем теперь вывести общую формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Теорема 4. О выводе формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Запишем в прямом и обратном порядке сумму первых n членов арифметической прогрессии и сложим почленно левую и правую часть равенств.

$$+\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ \underline{S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-k+1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1} \\ 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_k + a_{n-k+1}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Так как по теореме 2 суммы индексов в каждой сумме в скобках совпадают, то все они равны между собой. Тогда

$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$. Значит $\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$.

С учетом $a_n = a_1 + (n-1)d$ формула

примет несколько иной вид: $\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n}$.

Практикум 17

1. Найти: сумму всех двузначных чисел, кратных 4.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 4 \end{array}\right|$$

Так как $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$, получим $n = \frac{96-12+4}{4} = 22$.

Тогда $S_{22} = \frac{a_1 + a_{22}}{2} \cdot 22$, т.е.

$S_{22} = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 54 \cdot 22 = 1188$.

Ответ: $S_n = 1188$.

2. Решить уравнение.

$2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + x = 155$

Ясно, что здесь слагаемые левой части являются членами арифметической прогрессии.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_n = x \\ S_n = 155 \\ d = 3 \end{array}\right|$$

Найдем n.

1) $n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$; $\quad n = \frac{x-2+3}{3} = \frac{x+1}{3}$;

2) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Можно записать $155 = \frac{2+x}{2} \cdot \frac{x+1}{3}$;

$155 \cdot 6 = x^2 + 3x + 2$; $\quad x^2 + 3x - 928 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+928 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm 61}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x = -32 \notin [0;\infty) \\ x = 29 \end{array}\right.$.

Ответ: $x = 29$.

Примечание. Необходимо также проверить, что при $x = 29$ $\quad n \in \mathbb{N}$. Действительно, $n = \frac{29+1}{3} = 10 \in \mathbb{N}$.

3. $\begin{cases} S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1 \\ S_4 + a_7 = 0{,}1 \end{cases}.$

Найти a_1 и d, где $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

$$S_5 = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1 + 2d)5 = 5a_1 + 10d;$$

$$S_4 = \frac{2a_1+3d}{2}4 = (2a_1 + 3d)2 = 4a_1 + 6d;$$

$$S_2 = \frac{2a_1+d}{2}\cdot 2 = 2a_1 + d.$$

Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d - (2a_1 + d) - (a_1 + 4d) = 0{,}1 \\ 4a_1 + 6d + a_1 + 6d = 0{,}1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 5d = 0{,}1 \\ 5a_1 + 12d = 0{,}1 \end{cases}\left|\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}\right.; \quad -\begin{cases} 10a_1 + 25d = 0{,}5 \\ 10a_1 + 24d = 0{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} d = 0{,}3 \\ a_1 = -0{,}7 \end{cases};$$

Ответ: $a_1 = -0{,}7$; $d = 0{,}3$.

4. $\frac{x-1}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots$

Найти: S_n.

Так как $a_n - a_{n-1} = \frac{x-(2n-1)}{x} - \frac{x-(2(n-1)-1)}{x} = -\frac{2}{x} = const$, то мы имеем дело с арифметической прогрессией по определению.

Используя формулу $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, получим

$$S_n = \frac{2\cdot\frac{x-1}{x}+(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)}{2}\cdot n = \frac{2x-2-2n+2}{2x}\cdot n =$$

$$= \frac{2(x-n)n}{2x} = \frac{n(x-n)}{x}.$$

Ответ: $S_n = \frac{n(x-n)}{x}$.

Рассмотрим еще один признак арифметической прогрессии.

Теорема 5. Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ являлась арифметической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы сумма первых n членов последовательности была функцией не выше второй степени относительно n.

Необходимость.

Пусть a_n – $\div$ (арифметическая прогрессия),

тогда $S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$, т.е. $S_n = \frac{d \cdot n^2}{2} + \frac{2a_1-d}{2} \cdot n$.

Очевидно, что эта функция не выше второй степени относительно n.

Достаточность.

Пусть сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$

равна $S_n = ax^2 + bx + c$, где $x \in \mathbb{N}$,

т.е. $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$.

Тогда $S_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1) + c$;

$a_n = S_n - S_{n-1} = (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) - (a(n-1)^2 + b(n-1) + c) =$

$= a(2n-1) + b = 2an + b - a$.

Очевидно, что это линейная функция относительно n, значит по теореме 1 $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

Примечание. Из доказательства *необходимости* следует, что $S_n = an^2 + bn$, поэтому, если $S_n = an^2 + bn + c$, то необходимо сделать проверку см. с. 145.

Практикум 18

1. Дано: $S_n = 2n^2 - n$, где S_n – сумма n первых членов последовательности.

1) Выяснить, является ли эта последовательность арифметической прогрессией.

2) Вычислить $a_5 \cdot a_6$.

1) S_n есть квадратичная функция,

значит $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.

2) Найдем a_n:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 - n) - (2(n-1)^2 - (n-1)) =$$
$$= \cancel{2n^2} - n - \cancel{2n^2} + 4n - 2 + n - 1 =$$
$$= 4n - 3;\ \text{т.е. } a_n = 4n - 3.$$

Тогда $\begin{array}{l} a_5 = 4 \cdot 5 - 3 = 17 \\ a_6 = 4 \cdot 6 - 3 = 21 \end{array} \Bigg| \quad a_5 \cdot a_6 = 17 \cdot 21 = 357.$

Ответ: $a_5 \cdot a_6 = 357$.

2. Сумма первых n членов последовательности равна $S_n = 2n^3 - 21n^2 + 75n$. Найти значение наименьшего члена последовательности.

Очевидно, что мы имеем дело не с арифметической прогрессией, так как S_n – функция третьей степени.

Найдем

$$a_n = S_n - S_{n-1} =$$
$$= 2n^3 - 21n^2 + 75n - \left(2(n-1)^3 - 21(n-1)^2 + 75(n-1)\right) =$$
$$= 2\left(n^3 - (n-1)^3\right) - 21\left(n^2 - (n-1)^2\right) + 75 =$$
$$= 2(n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1) - 21(n^2 - n^2 + 2n - 1) + 75 =$$
$$= 6n^2 - 48n + 98.$$

$a_n = 6n^2 - 48n + 98$ – это квадратичная функция.

$a_n = a_{\min}$ при $n_0 = -\frac{-48}{2 \cdot 6} = 4$ (так как $x_0 = -\frac{b}{2a}$ для $y = ax^2 + bx + c$), т.е. a_4 – наименьший член последовательности. Вычислим значение

$a_4 = 6 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 98$, т.е. $a_4 = 2$.

Ответ: наименьший член этой последовательности: $a_4 = 2$.

3. Дано:

$\{a_n\} - \div$

$a_3 + a_9 = 8$

$S_{11} = ?$

$$+\begin{array}{l} a_3 = a_1 + 2d \\ a_9 = a_1 + 8d \\ \hline a_3 + a_9 = 2a_1 + 10d = 8. \end{array}$$

Тогда $a_1 + 5d = 4$.

С другой стороны, $S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = (a_1 + 5d) \cdot 11$, значит $S_{11} = 4 \cdot 11 = 44$.

Ответ: $S_{11} = 44$.

4. Дано:

$\{a_n\} - \div$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 56$

$a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 112$

$a_1 = 11$

$S_n = ?$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 56 \\ a_1 + (n-4)d + a_1 + (n-3)d + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d = 112 \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 56 \\ 4a_1 + (4n - 10)d = 112 \end{cases}$; $-\begin{cases} 2a_1 + 3d = 28 \\ 2a_1 + (2n - 5)d = 56 \end{cases}$;

$(8-2n)d=-28;\quad (4-n)d=-14;\quad (n-4)d=14.$

Так как $a_1=11,\quad 2\cdot 11+3\cdot d=28;\quad d=2$, тогда

$(n-4)\cdot 2=14;\quad n=11.$

$$S_{11}=\frac{2a_1+10d}{2}\cdot 11=(a_1+5d)\cdot 11=(11+10)\cdot 11=231.$$

Ответ: $S_{11}=231$.

5. Найти: сумму всех двузначных чисел, кратных или 3, или 4.

Пусть A_3 – все двузначные числа, кратные трем;

A_4 – все двузначные числа, кратные четырем;

$m(A_3\cup A_4)=m(A_3)+m(A_4)-m(A_3\cap A_4);$

$A_3\cap A_4$ – множество всех чисел, кратных 12.

1) Вычислим сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=12\\ a_n=99\\ d=3 \end{array}\right| \quad n=\frac{a_n-a_1+d}{d};\ \text{то}\quad n=\frac{99-12+3}{3}=30,$$

$S_n=?$

тогда $S_{30}=\dfrac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=\dfrac{12+99}{2}\cdot 30=1665$,

т.е. $S(A_3)=1665$.

2) Вычислим сумму всех двузначных чисел кратных 4.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=12\\ a_n=96\\ d=4 \end{array}\right| \quad n=\frac{96-12+4}{4}=22;\quad S_{22}=\frac{12+96}{2}\cdot 22=1188,$$

$S_n=?$

т.е. $S(A_4)=1188$.

Вычислим сумму всех двузначных чисел, кратных 12.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 12 \end{array}\right| \quad n = \frac{96-12+12}{12} = 8;$$

$S_n = ?$

$$S_8 = \frac{2\cdot 12+7\cdot 12}{2}\cdot 8 = 54\cdot 8 = 432, \text{ т.е. } S(A_3 \cap A_4) = 432.$$

Так как $m(A_3 \cup A_4) = m(A_3) + m(A_4) - m(A_3 \cap A_4)$,

то $S(A_3 \cup A_4) = S(A_3) + S(A_4) - S(A_3 \cap A_4)$.

Тогда $S(A_3 \cup A_4) = 1665 + 1188 - 432 = 2421$.

Ответ: сумма всех двузначных чисел, кратных или 3, или 4, равна 2421.

Примечания.

Под $S(A_3)$ мы будем понимать ***сумму*** всех двузначных чисел, кратных 3.

Под $S(A_4)$ мы будем понимать ***сумму*** всех двузначных чисел, кратных 4.

Под $S(A_3 \cup A_4)$ мы будем понимать ***сумму*** всех двузначных, чисел кратных или 3, или 4.

Под $S(A_3 \cap A_4)$ мы будем понимать ***сумму*** всех двузначных чисел, кратных 3 и 4.

6. Дано: $S_n = 2n^2 - n - 6$, S_n – сумма первых n членов последовательности. Докажите, что такая последовательность не является арифметической прогрессией.

Рассуждая как в примере 1. Получим $a_n = 4n - 3$.

Но $S_1 = a_1 = -5$, а используя формулу $a_n = 4n - 3$ получим $a_1 = 1$. Пришли к противоречию. Значит $\{a_n\}$ арифметической прогрессией не является.

Тренировочная работа 13

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_7 = 4 \\ a_3^2 + a_7^2 = 122 \end{array}\right|$$

$a_1 = ?; \quad d = ?$

2. Решить уравнение

$1 - 5 - 11 - .... - x = -207$

$x = ?$

3. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34 \\ a_2 \cdot a_3 = 28 \end{array}\right|$$

$a_1 = ?; \ d = ?$

4. $a; b; c$ – последовательные члены арифметической прогрессии.

Доказать, что

$$\frac{2}{9}(a + b + c)^3 = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b).$$

5. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} S_n = 820 \\ a_1 = 3 \\ d = 4 \end{array}\right|$$

$a_n = ?$

Решение тренировочной работы 13

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_7 = 4 \\ a_3^2 + a_7^2 = 122 \end{array}\right|$$

$a_1 = ?\quad d = ?$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 6d = 4 \\ (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 6d)^2 = 122 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2 \\ (a_1 + 2d)^2 + (a_1 + 6d)^2 = 122 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2 \\ (2 - 3d + 2d)^2 + (2 - 3d + 6d)^2 = 122 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2 \\ (2 - d)^2 + (2 + 3d)^2 = 122 \end{cases};$$

Решим второе уравнение.

$4 - 4d + d^2 + 4 + 12d + 9d^2 = 122$;

$10d^2 + 8d - 114 = 0$;

$5d^2 + 4d - 57 = 0$;

$$\left[\begin{array}{ll} d = 3; & a_1 = -7 \\ d = -3{,}8; & a_1 = 13{,}4 \end{array}\right.$$

Ответ: 1) $a_1 = -7;\quad d = 3$;

2) $a_1 = 13{,}4;\ d = -3{,}8$.

2. $1 - 5 - 11 - \ldots - x = -207$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = -6 \\ a_n = -x \\ S_n = -207 \end{array}\right|$$

$x = ?$

В левой части уравнения имеем дело с членами арифметической прогрессией, где разность равна $d = -6$.

$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$, т.е. $n = \frac{-x-1-6}{-6} = \frac{x+7}{6}$; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, тогда $-207 = \frac{(1-x)(x+7)}{2\cdot 6}$; $-x^2 - 6x + 7 + 207\cdot 12 = 0$;

$x^2 + 6x - 2491 = 0$;

$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 2491} = -3 \pm 50$; $\left[\begin{array}{l} x = -53 \notin [0;\infty) \\ x = 47 \end{array}\right.$.

Ответ: $x = 47$.

3. $\{a_n\}$ – $\div$

$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 34$

$a_2 \cdot a_3 = 28$

$a_1 = ?\quad d = ?$

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 34 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 28 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4a_1 + 10d = 34 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 28 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ \left(\frac{17-5d}{2} + d\right)\left(\frac{17-5d}{2} + 2d\right) = 28 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ (17 - 3d)(17 - d) = 112 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ 3d^2 - 68d + 177 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{17-5d}{2} \\ \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = \frac{59}{3} \end{array}\right. \end{cases};$$

1) $\begin{cases} d = 3 \\ a_1 = \frac{17-5\cdot 3}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} d = 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} d = 19\frac{2}{3} \\ a_1 = \frac{17-5\cdot\frac{59}{3}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} d = 19\frac{2}{3} \\ a_1 = -40\frac{2}{3} \end{cases}$;

Ответ: 1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a_1 = -40\frac{2}{3} \\ d = 19\frac{2}{3} \end{cases}$.

4. $a;b;c;$ – $\div$ Докажите, что тогда

$$\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b).$$

Так как мы имеем дело с арифметической прогрессией, то $\begin{matrix} b = a + d \\ c = a + 2d \end{matrix}$, тогда левая часть выражения будет

$$L = \frac{2}{9}(a + a + d + a + 2d)^3 = \frac{2}{9}(3a + 3d)^3 =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot 27(a+d)^3 = 6(a+d)^3.$$

Правая будет иметь вид

$$\Pi = a^2(a+d+a+2d) + (a+d)^2(a+a+2d) + (a+2d)^2(a+a+d) =$$

$$= a^2(2a + 3d) + 2(a+d)^3 + (a^2 + 4ad + 4d^2)(2a + d) =$$

$$= 2a^3 + 3a^2d + 2(a+d)^3 + 2a^3 + 9a^2d + 12ad^2 + 4d^3 =$$

$$= 4a^3 + 12a^2d + 12ad^2 + 4d^3 + 2(a+d)^3 =$$

$$= 4(a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3) + 2(a+d)^3 = 6(a+d)^3,$$

т.е. $\boxed{L = \Pi}$, что и требовалось доказать.

5. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} S_n = 820 \\ a_1 = 3 \\ d = 4 \end{array}\right| \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n; \quad 820 = \frac{6 + 4(n-1)}{2} n;$$

$a_n = ?$

$$820 = 2n^2 + n; \quad 2n^2 + n - 820 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} n = 20 \\ n = -20{,}5 \notin \mathbb{N} \end{array}\right.;$$

$a_{20} = a_1 + 19d;$

$a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79.$

Ответ: $a_{20} = 79$.

Геометрическая прогрессия

Рассмотрим еще несколько последовательностей и попытаемся сформулировать их общие свойства.

$\{A_n\}$ – $1; 4; 16; 64; 256; \ldots$

$\{B_n\}$ – $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}; \ldots$

$\{C_n\}$ – $\frac{2}{5}; -\frac{4}{25}; \frac{8}{125}; -\frac{16}{625}; \frac{32}{3125}; \ldots$

$\{P_n\}$ – $3; 3; 3 \ldots$

Наблюдения подсказывают, что каждый член этих последовательностей отличается в k раз от предыдущего.

Для $\{A_n\} - k = 4$;

$\{B_n\} - k = \frac{1}{3}$;

$\{C_n\} - k = -\frac{2}{5}$;

$\{P_n\} - k = 1$.

Теперь сформулируем более точно их особенности и дадим имя.

Определение 2. *Последовательность называется **геометрической прогрессией**, если отношение любого члена последовательности, начиная со второго, к предыдущему члену есть величина постоянная, равная q, называемому знаменателем прогрессии.*

Или возможно другое определение: *последовательность b_n, заданная рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, называется геометрической прогрессией.*

Здесь $q \neq 0$ – постоянная величина, называемая знаменателем прогрессии; $b_1 \neq 0$ – начальное значение.

(Геометрическая прогрессия обозначается $\{b_n\}$ – $\div\!\div$.)

Рассмотрим закономерность образования геометрической прогрессии и попытаемся выявить функциональную зависимость n-го члена геометрической прогрессии от его номера.

$b_2 = b_1 \cdot q;$
$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2;$
$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3;$
$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^4.$

Значит $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Строгое доказательство возможно только с использованием метода математической индукции.

Практикум 19

1. Записать общий член прогрессий.

1) $\{b_n\}$ – $\div$ 1; 4; 16; 64; 256 ...

(Предполагается, что характер изменения постоянный.)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Так как} & b_1 = 1;\ q = 4 \\ \text{и} & b_n = b_1 \cdot q^{n-1}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{, то } b_n = 1 \cdot 4^{n-1}, \\ \text{т. е. } b_n = 4^{n-1}.\end{array}$$

2) $\{b_n\}$ – $\div$ – $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{243}; \ldots$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Так как} & b_1 = \frac{1}{3};\ q = \frac{1}{3} \\ \text{и} & b_n = b_1 \cdot q^{n-1}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{, то } b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \\ \text{т. е. } b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.\end{array}$$

3) $\{b_n\}$ – $\div$ $\frac{2}{5}; -\frac{4}{25}; \frac{8}{125}; -\frac{16}{625}; \frac{32}{3125}; \ldots$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Так как} & b_1 = \frac{2}{5};\ q = -\frac{2}{5} \\ \text{и} & b_n = b_1 \cdot q^{n-1}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{, то } b_n = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}, \\ \text{т. е. } b_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}.\end{array}$$

2. Доказать, что последовательность, заданная $b_n = 5^{3n}$, является геометрической прогрессией.

Рассмотрим $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{5^{3(n+1)}}{5^{3n}} = 5^3$ – это постоянная величина. Так как $b_{n+1} = 125 \cdot b_n$, то по определению последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией.

3. Выяснить, принадлежит ли число $\frac{3750}{243}$ последовательности 2; $\frac{10}{3}$; $\frac{50}{9}$; ..., и найти его номер, если это так.

Так как $b_1 = 2$; $b_2 = \frac{10}{3}$; $b_3 = \frac{50}{9}$, $\frac{b_2}{b_1} = \frac{5}{3}$; $\frac{b_3}{b_2} = \frac{5}{3}$, то это геометрическая прогрессия.

Здесь $q = \frac{5}{3}$, а $b_n = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$, тогда $\frac{3750}{243} = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$;

$\frac{1875}{243} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$; $\quad \frac{3 \cdot 625}{3 \cdot 81} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

Тогда $\left(\frac{5}{3}\right)^{4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \;\Rightarrow\; 4 = n - 1$, т.е. $n = 5$.

Итак, $b_5 = \frac{3750}{243}$, т.е. число $\frac{3750}{243}$ есть пятый член геометрической прогрессии.

4. $\{b_n\}$ – ∺

$$\begin{array}{l} b_1 + b_2 = 8 \\ \underline{b_4 + b_5 = 216} \\ b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q = 8 \\ b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 = 216 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 + q) = 8 \\ b_1 q^3 (1 + q) = 216 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

тогда $q^3 = 27$; $q = 3$, а $b_1 = 2$.

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 3$.

5. b_n – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_4 = -\frac{5}{2} \\ \underline{b_6 = -\frac{5}{8}} \\ b_1 = ? \end{array}\right| \quad \begin{cases} b_1 \cdot q^3 = -\frac{5}{2} \\ b_1 \cdot q^5 = -\frac{5}{8} \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1} \quad \left(b_4 = b_1 \cdot q^3,\; b_6 = b_1 \cdot q^5\right)$$

$$q^2 = \frac{1}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} q = \frac{1}{2};\quad b_1 = -20 \\ q = -\frac{1}{2};\quad b_1 = 20. \end{array}\right.$$

Ответ: $b_1 = 20$ или $b_1 = -20$.

Характеристические свойства (критерии) геометрической прогрессии

Теорема 6.

Для того, чтобы последовательность являлась геометрической прогрессией необходимо и достаточно, чтобы квадрат любого последующего члена последовательности был равен произведению рядом стоящих членов последовательности.

$$\boxed{b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}} \quad \text{для} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство:

Необходимость.

Пусть $\{b_n\} - \div\div$, тогда

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}; \quad b_{n+2} = b_1 \cdot q^{n+1}; \quad b_{n+1} = b_1 \cdot q^n;$$

$$\left.\begin{array}{l} b_n \cdot b_{n+2} = b_1^2 \cdot q^{2n} \\ b_{n+1}^2 = b_1^2 \cdot q^{2n} \end{array}\right|, \text{ значит } b_n \cdot b_{n+2} = b_{n+1}^2.$$

Достаточность.

Пусть для любого члена последовательности выполняется соотношение $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$.

Тогда $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = q$,

т.е. отношение любого члена последовательности, начиная со второго, к предыдущему есть величина постоянная.

Это значит, что по определению

последовательность $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия,

что и требовалось доказать.

Примечание. Теорема верна и в более общем виде,

т.е. $\boxed{b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m}}$ для $\forall n > m$; $n; m \in \mathbb{N}$.

Задача. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= 2 \\ q &= 3 \end{aligned}\right|$$

$S_n = ?$

1. Выпишем сумму членов последовательности

   $S_n = 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \ldots + 2\cdot 3^{n-1}$.

   Умножим обе части выражения на 3.

   $3S_n = 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \ldots + 2\cdot 3^{n-1} + 2\cdot 3^n$.

2. Вычтем последовательно из первого равенства второе равенство и сгруппируем второй член первого равенства с первым членом второго равенства.

   Получим $S_n - 3S_n =$

   $= 2 + \underline{(2\cdot 3 - 2\cdot 3)} + \underline{(2\cdot 3^2 - 2\cdot 3^2)} + \ldots + \underline{(2\cdot 3^{n-1} - 2\cdot 3^{n-1})} + (0 - 2\cdot 3^n)$.

   Все выражения в скобках, кроме последнего, взаимно уничтожаются и остается $-2S_n = 2 - 2\cdot 3^n$.

   Тогда $S_n = 3^n - 1$, что и требовалось найти.

Теорема 7.

Сумма первых членов геометрической прогрессии равна

1. $\boxed{S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$; $q \neq 1$.

2. $\boxed{S_n = n\cdot b_1}$, если $q = 1$.

Доказательство проведем аналогично.

$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n$.

Преобразуем формулу для S_n.

1) $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}$.

   Умножим обе части равенства на $q \neq 0$.

2) Получим

   $S_n\cdot q = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n$.

   Вычтем из первого равенства второе.

Получим $S_n - S_n q = b_1 - b_1 q^n$.

Группируя, получим $S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n)$.

а) $q \neq 1$; $\boxed{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$;

б) при $q = 1$ $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = b_n$, тогда $\boxed{S_n = nb_1}$.

Примечание.

Иногда полезно, зная, что $b_n = b_1 q^{n-1}$ и $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, использовать другой вид $S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$.

Теорема доказана полностью.

Практикум 20

1. $\left.\begin{array}{l} b_n = 3\cdot 2^n \\ \hline S_5 = ? \end{array}\right|$. Так как $\left.\begin{array}{l} b_n = 3\cdot 2^n \\ b_{n-1} = 3\cdot 2^{n-1} \end{array}\right|$,

то $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{3\cdot 2^n}{3\cdot 2^{n-1}} = 2 = q$ и $b_1 = 3\cdot 2^1 = 6$,

(имеем дело с $\{b_n\} - \div\!\!\div$)

то $S_5 = \dfrac{6(1-2^5)}{1-2} = 6(32-1) = 186$.

Ответ: $S_5 = 186$.

2. $\{b_n\} - \div\!\!\div$

$\left.\begin{array}{l} b_7 - b_4 = -216 \\ b_5 - b_4 = -72 \\ S_n = 1023 \\ \hline b_1 = ? \\ q = ? \\ n = ? \end{array}\right|$ $\begin{cases} b_1q^6 - b_1q^3 = -216 \\ b_1q^4 - b_1q^3 = -72 \end{cases}$,

$\begin{cases} b_1q^3(q^3-1) = -216 \\ b_1q^3(q-1) = -72 \end{cases}$, $\boxed{1} : \boxed{2}$ при $q \neq 1$

и получим $q^2 + q + 1 = 3$; $q^2 + q - 2 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} q = -2 \\ q = 1 \text{ – не подходит } (q \neq 1). \end{array}\right.$

Подставим во второе уравнение. Получим

$b_1(-8)(-2-1) = -72$, $b_1 = -3$. Тогда $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 1023$.

Подставляя значения b_1 и q, имеем $\dfrac{-3\cdot(1-(-2)^n)}{1+2} = 1023$,

т.е. $-1 + 1\cdot(-2)^n = 1023$; $(-2)^n = 1024 = 2^{10}$, т.е. $n = 10$.

Ответ: $b_1 = -3$; $q = -2$; $n = 10$.

3. $\{a; b; c; d\} - \div\div$

Доказать, что тогда

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(b^2 + c^2 + d^2\right) = (ab + bc + cd)^2 .$$

Доказательство.

Так как $a; b; c; d - \div\div$, то $\begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \\ bc = ad \end{cases}$

по свойству геометрической прогрессии.

Рассмотрим

$$L = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(b^2 + c^2 + d^2\right) =$$

$$= a^2b^2 + \underline{b^4} + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + \underline{\underline{c^4}} + a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2 =$$

$$= a^2b^2 + \underline{a^2c^2} + 2b^2c^2 + a^2c^2 + \underline{\underline{b^2d^2}} + a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2 =$$

$$= a^2b^2 + a^2d^2 + c^2d^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 ;$$

$$\Pi = (ab + bc + cd)^2 = a^2b^2 + \underline{b^2c^2} + c^2d^2 + \underline{\underline{2ab^2c}} + \underline{\underline{2bc^2d}} + \underline{\underline{\underline{2abcd}}} =$$

$$= \underline{\underline{2a^2c^2}} + \underline{\underline{2b^2d^2}} + \underline{\underline{\underline{2b^2c^2}}} + a^2b^2 + c^2d^2 + \underline{a^2d^2} .$$

Значит $L = \Pi$, что и требовалось доказать.

4. $\{b_n\} - \div\div$

$$\begin{array}{l|} b_{m+n} = 9 \\ b_{m-n} = 4 \\ \hline b_m = ? \end{array} \qquad b_m^2 = b_{m+n} \cdot b_{m-n} = 9 \cdot 4; \quad b_m^2 = 36$$

по свойству геометрической прогрессии.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} b_m = 6 \\ b_m = -6 \end{array}\right.$.

Тренировочная работа 14

1. $\{a; b; c; d\}$ – ∺

Доказать, что $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$.

2. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - b_3 + b_5 = -65 \\ b_1 + b_1q^6 = -325 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

3. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_5 = 17 \\ b_2 + b_6 = 34 \\ S_n = 31 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \\ n = ? \end{array}$$

4. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - b_5 = 15 \\ b_1 + b_3 = 20 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

5. Разделите число 2730 на 6 частей числами так, чтобы отношения каждой части к последующей было равно 0,25.

6. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

7. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} a &= b_5 \\ b &= b_{13} \\ c &= b_{22} \end{aligned}\right| \quad a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = ?$$

8. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} & b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{15} = 15 \\ & \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \ldots + \frac{1}{b_{15}} = 60 \end{aligned}\right| \quad b_8 = ?$$

9. Найдите x, если $\left\{\sqrt{x-5};\ \sqrt[4]{10x+4};\ \sqrt{x+2}\right\} - \div\div$

10. Сумма членов геометрической прогрессии, стоящих на нечетных номерах, равна 138, а на четных – 69. Найти знаменатель такой прогрессии, если $n = 1990$.

Решение тренировочной работы 14

1. $\{a; b; c; d\}$ – $\div\!\div$

Доказать, что $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$.

Доказательство проведем, используя характеристические признаки геометрической прогрессии.

$b^2 = ac$;

$c^2 = bd$;

$a \cdot d = b \cdot c$;

$$(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 =$$
$$= a^2 - \underline{2ac} + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - \underline{\underline{2bd}} + d^2 =$$
$$= a^2 - \underline{2b^2} + c^2 + b^2 - \underline{\underline{2cb}} + c^2 + b^2 - \underline{\underline{2c^2}} + d^2 =$$
$$= a^2 - \underline{\underline{2ad}} + d^2 = (a-d)^2.$$

Таким образом, $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$, что и требовалось доказать.

2. $\{b_n\}$ – $\div\!\div$

$$\begin{array}{l|l} b_1 - b_3 + b_5 = -65 & b_1 = ? \\ b_1 + b_1 q^6 = -325 & q = ? \\ \hline \end{array}$$

Выразим все члены прогрессии данной системы через b_1 и q.

$$\begin{cases} b_1 - b_1 q^2 + b_1 q^4 = -65 \\ b_1 + b_1 q^6 = -325 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 - q^2 + q^4) = -65 \\ b_1(1 + q^6) = -325 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = 5.$$

Так как $1 + q^6 = (1+q^2)(1-q^2+q^4)$, то $1 + q^2 = 5$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = -2 \end{array}\right. \\ b_1 = \dfrac{-65}{1-q^2+q^4} \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -2 \\ b_1 = -5 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: 1) $b_1 = -5$; $q = 2$; 2) $b_1 = -5$; $q = -2$.

3. $\{b_n\}$ – $\div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_5 = 17 \\ b_2 + b_6 = 34 \\ S_n = 31 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \\ n = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q^4 = 17 \\ b_1q + b_1q^5 = 34 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 + q^4) = 17 \\ b_1q(1 + q^4) = 34 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}; \quad q = 2;$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ b_1 = \dfrac{17}{1+q^4} \end{cases}; \quad \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases},$$

но $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 31$, тогда

$$\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2} = 31; \quad 2^n - 1 = 31; \quad 2^n = 32; \quad 2^n = 2^5;$$

т.е. $n = 5$.

Ответ: $n = 5$; $b_1 = 1$; $q = 2$.

4. $\{b_n\}$ – $\div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - b_5 = 15 \\ b_1 + b_3 = 20 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 - b_1q^4 = 15 \\ b_1 + b_1q^2 = 20 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 - q^4) = 15 \\ b_1(1 + q^2) = 20 \end{cases}; \quad \boxed{1} : \boxed{2};$$

$$\frac{1 - q^4}{1 + q^2} = \frac{3}{4}; \quad 1 - q^2 = \frac{3}{4}; \quad q^2 = \frac{1}{4};$$

$$\left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{2} \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = \dfrac{20}{1+\frac{1}{4}} \end{cases} \\ \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2} \\ b_1 = \dfrac{20}{1+\frac{1}{4}} \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2} \\ b_1 = 16 \end{cases} \end{array}\right.;$$

Ответ: 1) $q = \frac{1}{2}$; $b_1 = 16$; 2) $q = -\frac{1}{2}$; $b_1 = 16$.

5. Разделите число 2730 на 6 частей числами так, чтобы отношения каждой части к последующей было равно 0,25. Составим таблицу, зная что

$b_6 = b_1 q^5 = b_1 4^5 = 1024 b_1$ и

$S_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 2730$.

2	8	32	128	512	2048	$S_6 = 2730$
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$b_1 = 2$ $q = 4$

$S_6 = \dfrac{b_1(1-q^6)}{1-q}$, т.е. $2730 = \dfrac{b_1(1-1024\cdot 4)}{1-4}$; $2730 = \dfrac{4095}{3} b_1$;

$b_1 = 2$.

Итак, имеем числа 2; 8; 32; 64; 128; 512; 2084, которые делят число 2730 на 6 частей, так что отношение каждой части к последующей равно 0,25.

6. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 21 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 21 \\ b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 = 189 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 21 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 189 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$9 = \dfrac{b_1(1+q^2+q^4)}{1+q+q^2}$.

Так как $q^4 + q^2 + 1 = (q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)$, то

$$\begin{cases} b_1(1 - q + q^2) = 9 \\ b_1(1 + q + q^2) = 21 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}; \quad \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{7}{3},$$

тогда $4q^2 - 10q + 4 = 0$.

Так как $2q^2 - 5q + 2 = 0$, то $\left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = \dfrac{9}{1-q+q^2} \end{cases} \\ \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = \dfrac{9}{1-q+q^2} \end{cases} \end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = 12 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: 1) $b_1 = 3$ и $q = 2$; 2) $b_1 = 12$ и $q = \frac{1}{2}$.

7. $\{b_n\} - \div\!\div$

$$\left.\begin{array}{l} a = b_5 \\ b = b_{13} \\ c = b_{22} \end{array}\right| \quad a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = ?$$

Так как $\left\{\begin{array}{l} a = b_5 = b_1 \cdot q^4 \\ b = b_{13} = b_1 \cdot q^{12} \\ c = b_{22} = b_1 \cdot q^{21} \end{array}\right|$,

тогда $\begin{array}{l} a^{-9} = b_1^{-9} \cdot q^{-36} \\ b^{17} = b_1^{17} \cdot q^{12\cdot17} \\ c^{-8} = b_1^{-8} \cdot q^{21\cdot(-8)} \end{array}$.

Отсюда $a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = b_1^{-9+17-8} \cdot q^{-36+12\cdot17+21\cdot(-8)} =$

$= b_1^0 \cdot q^{204-36-168} = b_1^0 \cdot q^0 = 1$.

Ответ: $a^{-9} \cdot b^{17} \cdot c^{-8} = 1$.

8. $\{b_n\}$ – $\div\!\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{15}=15 \\ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}+\ldots+\dfrac{1}{b_{15}}=60 \end{array}\right| \qquad b_8=?$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^{14}=15 \\ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_1q}+\dfrac{1}{b_1q^2}+\ldots+\dfrac{1}{b_1q^{14}}=60 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2+\ldots+q^{14})=15 \\ \dfrac{1}{b_1}(1+q^{-1}+q^{-2}+\ldots+q^{-14})=60 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 15=b_1(1+q+q^2+\ldots+q^{14})=b_1\cdot\dfrac{1-q^{15}}{1-q}=b_1\cdot\dfrac{q^{15}-1}{q-1} \\ 60=\dfrac{1}{b_1}(1+q^{-1}+\ldots+q^{-14})=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^{15}}{1-\dfrac{1}{q}}\cdot\left(\dfrac{1}{b_1}\right)=\dfrac{(q^{15}-1)}{(q-1)q^{15}}\cdot\left(\dfrac{q}{b_1}\right) \end{cases};$$

$$\boxed{2}:\boxed{1}\quad 4=\frac{\dfrac{(q^{15}-1)q}{(q-1)q^{15}}}{\dfrac{q^{15}-1}{q-1}}\cdot\frac{1}{b_1^2}; \qquad 4=\frac{1}{b_1^2\cdot q^{14}};$$

$$\left[\begin{array}{l} b_1q^7=\dfrac{1}{2} \\ b_1q^7=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right., \ \text{т.е.} \ \left[\begin{array}{l} b_8=\dfrac{1}{2} \\ b_8=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $b_8=\frac{1}{2}$ или $b_8=-\frac{1}{2}$.

9. Найдите x, если $\left\{\sqrt{x-5};\ \sqrt[4]{10x+4};\ \sqrt{x+2}\right\}$ – $\div\!\div$

$x=?$

Так как $b_2^2=b_1\cdot b_3$, то $\left(\sqrt[4]{10x+4}\right)^2=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x+2}$;

$D(У)=[5,\infty)$;

$10x+4=(x-5)(x+2)$;

$x^2 - 13x - 14 = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x = 14 \\ x = -1 \notin D(У) \end{array}\right. .$$

Ответ: при $x = 14$ числа $\sqrt{x-5}$; $\sqrt[4]{10x+4}$; $\sqrt{x+2}$ образуют геометрическую прогрессию.

10. $n = 1990$; $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + \ldots + b_{1989} = 138 \\ b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{1990} = 69 \end{array}\right| \quad q = ?$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots + q^{1988}) = 138 \\ b_1(q + q^3 + q^5 + \ldots + q^{1989}) = 69 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots + q^{1988}) = 138 \\ b_1 q(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots + q^{1988}) = 69 \end{cases}.$$

Значит $q = \dfrac{69}{138}$; $q = 0{,}5$.

Ответ: $q = 0{,}5$.

Примечание. Очевидно, что на этот вопрос можно было ответить, не зная n.

Так как $\begin{cases} b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{2n-1} = 138 \\ b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{2n} = 69 \end{cases}$, то

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 + q^4 \ldots + q^{2(n-1)}) = 138 \\ b_1 q(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2(n-1)}) = 69 \end{cases},$$

значит $q = \dfrac{69}{138}$; $q = 0{,}5$.

Практикум 21

Рассмотрим более сложные задачи.

1. При каких a корни уравнения $x^3 + x^2 + a = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

Так как $x_1; x_2; x_3$ – корни, то $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, т.е. $(x - x_1)(x - x_1 - d)(x - x_1 - 2d) = 0$;

$\left(x^2 - x\left(x_1 + x_1 + d\right) + x_1\left(x_1 + d\right)\right)(x - x_1 - 2d) = 0$;

$x^3 - x^2(2x_1 + d) + x \cdot x_1(x_1 + d) - x^2(x_1 + 2d) +$
$+x(2x_1 + d)(x_1 + 2d) - x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) = 0$;

$x^3 - 3x^2(x_1 + d) + x(3x_1^2 + 6x_1d + 2d^2) - x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) = 0$;

По теореме Виета для $x^3 + px^2 + kx + c = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = k \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c \end{cases}, \text{ для } x^3 + x^2 + a = 0.$$

Тогда $\begin{cases} 3(x_1 + d) = -1 \\ 3x_1^2 + 6x_1d + 2d^2 = 0 \\ x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) = -a \end{cases}$;

$$\begin{cases} x_1 + d = -\frac{1}{3} \\ (x_1)_{1,2} = \left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)d \qquad \text{из второго уравнения} \\ a = -x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\left(-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + d = -\frac{1}{3} \\ x_1 + d = -\frac{1}{3} \\ a = -x(x_1 + d)(x_1 + 2d) \end{cases}; \quad \begin{cases} d = \mp\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a = -x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d) \end{cases}$$

Пусть $x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогда $x_2 = -\frac{1}{3}$ и $x_3 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$a = -\left(-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ значит } a = -\frac{2}{27}.$$

Примечание. Если $x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$, тогда, очевидно, также $a = -\frac{2}{27}$.

2. Вычислите $\sqrt{\underbrace{1111111111111111}_{16\text{раз}} - \underbrace{22222222}_{8\text{раз}}}$.

Психологически очень пугает. Но если подумать и понять, что

$$1111111111111111 = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{16} =$$

$$= \frac{1(1-10^{16})}{1-10} = \frac{10^{16}-1}{9}$$

и $22222222 = 2(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^8) =$

$$= 2\cdot\frac{1(1-10^8)}{1-10} = 2\cdot\frac{10^8-1}{9}, \text{ тогда}$$

$$1111111111111111 - 22222222 = \frac{10^{16}-1}{9} - 2\cdot\frac{10^8-1}{9} =$$

$$= \frac{10^{16}-2\cdot10^8+1}{9} = \left(\frac{10^8-1}{3}\right)^2.$$

Следовательно $\sqrt{1111111111111111 - 22222222} = \frac{10^8-1}{3} =$

$$= \frac{99999999}{3} = 33333333.$$

3. При каких целых значениях a и b корни уравнения $x^3 + bx^2 + 2bx + a = 0$ образуют геометрическую прогрессию?

Пусть $x_1; x_2; x_3$ – корни, где $x_2 = x_1 q$ и $x_3 = x_1^2 q$, значит

$(x - x_1)(x - x_1 q)(x - x_1 q^2) = 0$; $((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0)$

$(x^2 - x\cdot x_1(1+q) + x_1^2 q)(x - x_1 q^2) = 0$;

$$x^3 - x^2 x_1(1+q) + x\cdot x_1^2 q - x^2 x_1\cdot q^2 + x\cdot x_1^2\cdot q^2(1+q) - x_1^3 q^3 = 0.$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_1(1+q+q^2) = -b \\ x_1^2(1+q+q^2)q = 2b; \\ x_1^3 q^3 = -a \end{cases}$ $\boxed{2} : \boxed{1}$;

$x_1 q = -2 \;\Rightarrow\; a = 8$, т.е. $x^3 + bx^2 + 2bx + 8 = 0$;
$d = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm 8$; d – делители числа 8.

Проверим и составим таблицу.

x	1	−1	2	−2	4	−4	8	−8
b	−3	7	−2	любое	−3	7	−6,5	10,5

1) $b = -3$; $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$;
$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x + 2) = 0$;
$(x + 2)(x^2 - 5x + 4) = 0$;
$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$, т.е. 1; −2; 4 $-\div\!\div$ $\begin{cases} b_1 = 1 \\ q = -2 \end{cases}$,
т.е. при $a = 8$ $b = -3$;

2) $b = 7$; $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$;
$(x + 2)(x^2 + 5x + 4) = 0$;
$\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right.$, т.е. −4; −2; −1 $-\div\!\div$, где $\begin{cases} b_1 = -4 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$,
т.е. при $a = 8$ $b = 7$;

3) $b = -2$; $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$;
$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 2x(x + 2) = 0$;
$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$, т.е. 2; −2; 2 $-\div\!\div$, где $\begin{cases} b_1 = 2 \\ q = -1 \end{cases}$.

4) Исследуем $x^3 + bx^2 + 2bx + 8 = 0$. Так как $f(-2) = 0$, то

$$\begin{array}{l|l} x^3 + bx^2 + 2bx + 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x^2} & x^2 + (b-2)x + 4\,. \\ (b-2)x^2 + 2bx & \\ \underline{(b-2)x^2 + 2(b-2)x} & \\ \qquad\qquad 4x + 8 & \\ \qquad\qquad \underline{4x + 8} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Тогда $x^2 + (b-2)x + 4 = 0$

x	1	−1	2	−2	4	−4
b	−3	7	−2	6	−3	7

$x = \pm 1; \pm 2; \pm 4$.

$b = -3$

$b = 7$ – уже исследованы.

$b = -2$

5) При $b = 6$ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$, т.е. $(x+2)^3 = 0$.

$-2;\ -2;\ -2$ – $\div\div$, где $\begin{cases} b_1 = -2 \\ q = 1 \end{cases}$.

Ответ: 1) $\begin{cases} a = 8 \\ b = 7 \end{cases}$ $-4;\ -2;\ -1$, где $b_1 = -4$; $q = \dfrac{1}{2}$;

2) $\begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \end{cases}$ $1;\ -2;\ 4$, где $b_1 = 1$; $q = -2$;

3) $\begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$ $-2;\ -2;\ -2$, где $b_1 = -2$; $q = 1$;

4) $\begin{cases} a = 8 \\ b = -2 \end{cases}$ $2;\ -2;\ 2$, где $b_1 = 2$; $q = -1$.

Проверочная работа 6

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{m} \\ a_m = \dfrac{1}{n} \end{array}\right| \qquad S_{mn} = ?$$

2. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -3{,}5 \\ d = 0{,}5 \\ S_n = 8{,}5 \end{array}\right| \qquad n = ?$$

3. $\{a_n\} - \div \qquad a_n \in \mathbb{N}; \quad d \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 40 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 104 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} n = ? \\ a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

4. У отца было пять сыновей, которые рождались с интервалом в 3 года. В первый раз в 5 лет каждый получал 5 книг и через год на одну книгу больше. В сумме они получили 325 книг. Сколько лет было в это время каждому из них?

5. При каких x числа $\sqrt{2x+9}$; $\sqrt{5x}$; $\sqrt{8x+9}$ образуют прогрессию и какую, если $x \in \mathbb{Z}$?

6. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = 8 \\ b_4 + b_5 = 216 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

7. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 54 \\ \underline{S_3 = 78} \end{array}\right| \quad S_5 = ?$$

8. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_4 - b_1 = 52 \\ \underline{b_1 + b_2 + b_3 = 26} \end{array}\right| \quad b_6 = ?$$

9. Докажите, что $b_3 \cdot b_5 \cdot b_7 \cdot \ldots \cdot b_{2n+1} = b_1^n q^{n^2+n}$, если $\{b_n\} - \div\div$.

10. Из прямоугольника со сторонами 20 и 12 вырезали ромб, вершины которого есть середины сторон прямоугольника. А из ромба вырезали прямоугольник, вершины которого есть середины сторон ромба и т. д. Вычислить суммарную площадь всех таких фигур при десяти таких разрезаниях.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотрим геометрическую прогрессию $\{b_n\}$:

$b_1; b_2; b_3; \dots; b_n; \dots,$ где $|q| \neq 1$. Такая последовательность называется бесконечной. При каких q существует $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$?

Попытаемся выяснить и доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (для тех, кто не изучал логарифмы, это доказательство можно опустить). Итак, для того чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \quad \Rightarrow \quad |q^n| < \varepsilon$.

Итак, надо чтобы $|q^n| < \varepsilon$. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10:

$\lg |q|^n < \lg\varepsilon; \quad n \cdot \lg |q| < \lg\varepsilon$.

1. Если $|q| > 1$, то $\lg |q| > 0$, тогда $n < \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ и $n < N_0 = \left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$ и тогда нет предела q^n, так как необходимо $n > N_0$, а не наоборот.
2. Если $|q| < 1$, то $\lg |q| < 0$, тогда $n > \dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ и отсюда следует, что для
   $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0\left(N_0 = \left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right] + 1\right) \mid \forall n > N_0 \quad \Rightarrow \quad |q^n - 0| < 0$,
   т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (при $|q| < 1$).

Теорема 8. Докажем, что сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии существует и равна

$\boxed{S = \dfrac{b_1}{1-q}}$ $(|q| < 1)$.

Доказательство.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1 - q^n) =$$

$$= \frac{b_1}{1-q}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{b_1}{1-q}(1 - 0) = \frac{b_1}{1-q}, \text{ т.е. } \boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Примечание. b_1, q – постоянные, и поэтому $\dfrac{b_1}{1-q}$ можно вынести за знак предела.

Практикум 22

1. Вычислите.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Так как $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$, т.е. $|q|<1$, то $S=\frac{b_1}{1-q}$.

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

2. Обратить в обыкновенную дробь 0,(3).

$$0,(3)=0,33333\ldots=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots+\frac{3}{10^n}+\ldots$$

$\begin{cases} b_1=\frac{3}{10} \\ q=\frac{1}{10} \end{cases}$. Тогда $S=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{3}$. Итак, $0,(3)=\frac{1}{3}$.

3. Вычислите $\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}+1}+\frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}+\ldots$,

где $b_1=\sqrt{3}$; $\quad b_2=\frac{3}{\sqrt{3}+1}$; $\quad q=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$;

$$S=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=3+\sqrt{3}.$$

4. Решите уравнение.

$$2+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=3 \quad (|x|<1),$$

где $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=2$.

$S=\frac{b_1}{1-q}$; $\begin{matrix} b_1=1 \\ q=x \end{matrix}$, т.е. $2=\frac{1}{1-x}$; $1-x=\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2}$.

5. Вычислите, если сумма ряда существует:

$$S=\frac{7}{3}-\frac{7}{3^2}+\frac{7}{3^3}-\frac{7}{3^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{7}{3^n}+\ldots,$$

тогда $\begin{matrix} b_1=\frac{7}{3} \\ q=-\frac{1}{3} \end{matrix}$; $\quad S=\frac{b_1}{1-q}$; $\quad S=\frac{\frac{7}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{7}{4}=1,75$.

6. Сумма ряда существует. Вычислите ее.

$$S = \frac{48}{5} + \frac{72}{5^2} + \frac{48}{5^3} + \frac{72}{5^4} + \ldots;$$

$$S_1 = \frac{48}{5} + \frac{48}{5^3} + \frac{48}{5^5} + \ldots;$$

$$S_1 = \frac{\frac{48}{5}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{48\cdot 5}{24} = 10;$$

$$S_2 = \frac{72}{5^2} + \frac{72}{5^4} + \frac{72}{5^6}\ldots;$$

$$S_2 = \frac{\frac{72}{5^2}}{1-\frac{1}{5^2}} = \frac{72}{24} = 3;$$

$$S = S_1 + S_2 = 13.$$

7. $\{b_n\} - \div\div$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = 56 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2 + \ldots = 448 \end{array}\right| \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} + \ldots = 56 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 + \ldots + b_1^2q^{2(n-1)} + \ldots = 448 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots) = 56 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2(n-1)} + \ldots) = 448 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} = 56 \\ b_1^2 \cdot \dfrac{1}{1-q^2} = 448 \end{cases} \quad \boxed{1} : \boxed{2}; \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b_1}(1+q) = \dfrac{1}{8} \\ b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} = 56 \end{cases} \quad \boxed{1} \cdot \boxed{2};$$

$$\frac{1+q}{1-q} = 7; \qquad \begin{cases} q = \dfrac{3}{4} \\ b_1 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} = 56 \end{cases}; \qquad \begin{cases} q = \dfrac{3}{4} \\ b_1 = 14 \end{cases}, \text{ т.е. } 14;\ \frac{21}{2};\ \frac{63}{8};\ \ldots$$

Практикум 23

Рассмотрим более сложные примеры на геометрические прогрессии.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots+\frac{n}{3^n}\right).$

Пусть $(S_1)_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}$,

тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(S_1)_n=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}=S_1;$

$(S_2)_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n};$

$\lim\limits_{n\to\infty}(S_2)_n=\dfrac{\frac{1}{3^2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=S_2;$

$(S_3)_n=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n};$

$\lim\limits_{n\to\infty}(S_3)_n=\dfrac{\frac{1}{3^3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}=S_3$ и так далее;

$(S_k)_n=\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{3^n};$

$\lim\limits_{n\to\infty}(S_k)_n=\dfrac{\frac{1}{3^k}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}=S_k.$

Итак,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots+\frac{n}{3^n}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_k+S_n)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\right)=$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}=0{,}75.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\frac{16}{2^4}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}\right)$.

Пусть $(S_1)_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}(S_1)_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1=S_1;$$

$$(S_2)_n=3\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_2)_n=3\cdot\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=3\cdot\frac{1}{2}=S_2;$$

$$(S_3)_n=5\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_3)_n=5\cdot\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}=5\cdot\frac{1}{2^2}=S_3;$$

$$(S_4)_n=7\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_4)_n=7\cdot\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}}=7\cdot\frac{1}{2^3}=S_4;$$

$$(S_k)_n=(2k-1)\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_k)_n=(2k-1)\cdot\frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2k-1}{2^{k-1}}$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\frac{16}{2^4}+\ldots+\frac{n^2}{2^n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_k+\ldots+S_n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}\right).$$

Пусть $\left(S_1^1\right)_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_1^1\right)_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = S_1^1;$$

$$\left(S_2^1\right)_n = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_2^1\right)_n = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2 = S_2^1;$$

$$\left(S_3^1\right)_n = 2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_3^1\right)_n = 2\cdot\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 = S_3^1;$$

$$\left(S_4^1\right)_n = 2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_4^1\right)_n = 2\cdot\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = S_4^1;$$

………………………………………………………

$$\left(S_k^1\right)_n = 2\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_k^1\right)_n = 2\cdot\frac{\frac{1}{2^{k-1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-3}} = S_k^1.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(S_1^1+S_2^1+S_3^1+S_4^1+\ldots+S_n^1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 4+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4+2 = 6.$$

Тренировочная работа 15

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{5n^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+2n-1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n-3}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n}{1+5+5^2+5^3+\ldots+5^n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}\right)$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+\ldots+\dfrac{5^n+2^n}{10^n}\right)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}+\dfrac{1}{n}\right)$.

8. $2{,}3(45)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot12}+\ldots\right)$.

10. В круг вписан правильный треугольник, а в него вписан круг и так далее до бесконечности. Вычислить площадь всех таких фигур.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}-\dfrac{7}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n-1}{4^n}\right)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{4}{4^2}+\dfrac{9}{4^3}-\dfrac{16}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{n^2}{4^n}\right)$.

Решение тренировочной работы 15

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{5n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{5n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10n}=0{,}1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{\frac{1+2n-1}{2}\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot 2}{2^n\left(1-\frac{3}{2^n}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2^n}\right)}=\dfrac{2}{1-0}=2$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n}{1+5+5^2+5^3+\ldots+5^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1(1-2^n)}{(1-2)}\cdot\dfrac{(1-5)}{1(1-5^n)}=$

$=4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{5^n-1}=4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{5^n}}\right)=$

$=4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{5^n}}\right)=$

$=4\cdot 0\cdot\dfrac{1-0}{1-0}=0$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}\right)=$

$$\left|\begin{array}{l} b_1=\sqrt{3} \\ q=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=1{,}5\sqrt{3}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right)$.

Заметим, что

$$\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5};$$
$$\frac{29}{100}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2};$$

....

$$\frac{5^n+2^n}{10^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^n};$$

Пусть $S'_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$, тогда

$$S''_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n};\quad S_n=S'_n+S''_n;$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S'_n+S''_n)=\lim_{n\to\infty}S'_n+\lim_{n\to\infty}S''_n=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{4}=1{,}25.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}+\frac{1}{n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=$$

(Так как $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ – тождество Архимеда.)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\cdot n^2}=\frac{1}{3}.$$

8. $2{,}3(45) = 2{,}3 + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \frac{45}{10^7} + \ldots =$

$$= 2{,}3 + \frac{\frac{45}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = 2{,}3 + \frac{45}{99 \cdot 10} =$$

$$= 2\frac{3}{10} + \frac{1}{22} = 2\frac{3 \cdot 22 + 10}{220} = 2\frac{19}{55}.$$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 12} + \ldots\right)$

Выясним n-й член последовательности 3; 6; 9; 12 ...,

где $\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ d = 3 \end{array}\right|$ $a_n = a_1 + (n-1)d$, т.е. $a_n = 3 + (n-1)3 = 3n$.

Тогда $a_{n+1} = 3(n+1)$, т.е. n-й член равен $\frac{1}{3n \cdot 3(n+1)}$.

Представим себе каждый член последовательности в виде алгебраической разности

$$\frac{1}{3\cdot 6} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right);$$

$$\frac{1}{6\cdot 9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right);$$

$$\frac{1}{9\cdot 12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right);$$

....

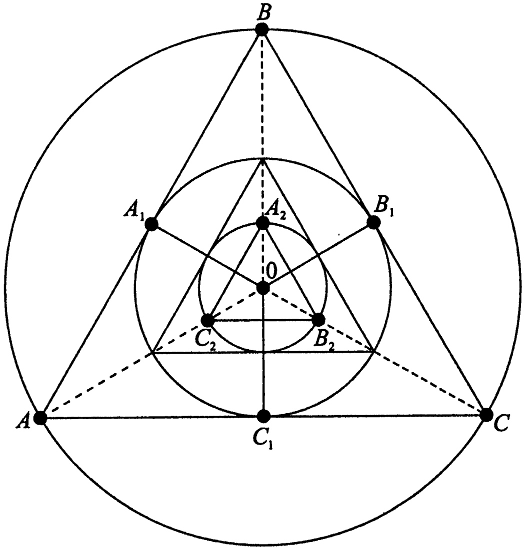
$$\frac{1}{3n\cdot(3(n+1))} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+1)}\right).$$

Суммируя, убеждаемся, что в правой части каждое второе слагаемое предыдущей строчки взаимно уничтожается с первым слагаемым в последующей строчке. Остается первое слагаемое из первой строчки и второе слагаемое последней строчки.

$$\frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 12} + \ldots + \frac{1}{3n\cdot 3(n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(n+1)}\right),$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 12} + \ldots + \frac{1}{3n\cdot 3(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{9(n+1)} = \frac{1}{9}$.

10. В круг вписан правильный треугольник, а в него вписан круг и так далее, до бесконечности. Вычислить площадь всех таких фигур.



Пусть R – радиус круга $S_1 = \pi R^2$;

$AB = 2R \cdot \sin 60° = R\sqrt{3}$; $S_1' = \frac{1}{2}\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sin 60° = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$;

$R_1 = R \cdot \sin 30° = \frac{R}{2}$; $S_2 = \frac{1}{4}\pi R^2$;

$A_1B_1 = 2R_1 \cdot \sin 60° = R_1\sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$;

$S_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \sin 60° = \frac{3}{16}R^2\sqrt{3}$ и т.д.

$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \pi R^2 + \frac{1}{4}\pi R^2 + \frac{1}{16}\pi R^2 + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\pi R^2$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\pi R^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right)\right) = \pi R^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi R^2$;

$S_1' + S_2' + S_3' + \ldots + S_n' = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} + \frac{3}{16}R^2\sqrt{3} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=R^2\sqrt{3}\,;$$

$$S=\frac{4}{3}\pi R^2+R^2\sqrt{3}=\frac{R^2(4\pi+3\sqrt{3})}{3}.$$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4^2}+\frac{5}{4^3}-\frac{7}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{4^n}\right).$

Пусть $(S_1)_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$;

$$\lim_{n\to\infty}(S_1)_n=\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}=S_1\,;$$

$$(S_2)_n=2\left(-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_2)_n=2\cdot\frac{-\frac{1}{4^2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=S_2\,;$$

$$(S_3)_n=2\left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{4^{n+2}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_3)_n=2\cdot\frac{\frac{1}{4^3}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^2=S_3\,;$$

$$(S_4)_n=2\left(-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}-\frac{1}{4^6}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{1}{4^{n+3}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_4)_n=2\cdot\frac{-\frac{1}{4^4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)^3=S_4\,;$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4^2}+\frac{5}{4^3}-\frac{7}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{4^n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}-\frac{2}{25}=\frac{3}{25}=0{,}12\,.$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{4^2}+\frac{9}{4^3}-\frac{16}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{4^n}\right)$.

Пусть $(S_1)_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$;

$$\lim_{n\to\infty}(S_1)_n = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} = S_1;$$

$$(S_2)_n = 3\left(-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_2)_n = 3\cdot\frac{-\frac{1}{4^2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = S_2;$$

$$(S_3)_n = 5\left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{4^{n+2}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_3)_n = 5\cdot\frac{\frac{1}{4^3}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{5}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = S_3;$$

$$(S_4)_n = 7\left(-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{4^{n+3}}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_4)_n = 7\cdot\frac{-\frac{1}{4^4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = S_4;$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{4^2}+\frac{9}{4^3}-\frac{16}{4^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{4^n}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$.

Пусть

$$(S_1')_n = \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1};$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_1')_n = \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{25} = S_1';$$

$$(S_2')_n = 2\left(\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_2')_n = 2\cdot\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{2}{25} = S_2';$$

$$(S_3')_n = 2\left(\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_3')_n = 2\cdot\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4^2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{25}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = S_3';$$

$$(S_4')_n = 2\cdot\left(-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots + (-1)^{n+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_4')_n = 2\cdot\frac{-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = S_4',$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(S_1' + S_2' + S_3' + \ldots + S_n') =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{25} - \frac{2}{25} + \frac{2}{25}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{25}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{2}{25}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + (-1)^n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{25}\right) =$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{-\frac{2}{25}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{25} - \frac{8}{125} = \frac{12}{125} = 0{,}096.$$

5

Зачетные карточки

Зачетная карточка 1

1. $\{a_n\} - \div$

$$\begin{array}{l|l} a_3 + a_5 = 14 & \\ S_{12} = 129 & n = ? \\ \underline{S_n = 195} & \end{array}$$

2. Решите уравнение

$2 + 5 + 8 + \ldots + x = 532.$

3. $\{b_n\} - \div\div$

$$\begin{array}{l|l} S_2 = 4 & S_5 = ? \\ \underline{S_3 = 13} & \end{array}$$

4. $\{a_1; a_2; a_3\} - \div$

$$\begin{array}{l|l} \{a_1; (a_2 - 1); (a_3 + 1)\} - \div\div & a_1 = ? \\ & a_2 = ? \\ \underline{a_1 + a_2 + a_3 = 21} & a_3 = ? \end{array}$$

5. $a_n = -2n^3 + 15n^2$.

Найдите наибольший член последовательности.

6. $x(x^4 - 2(a+2)x^2 + a^2) = 0$.

При каких a уравнение имеет пять корней, образующих арифметическую прогрессию? Найти корни.

7. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 84 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} b_1 &= ? \\ q &= ? \end{aligned}$$

8. $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$.

Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию. При каких a это возможно?

9. Вычислите:

$$\sqrt{\underbrace{4444444444}_{10\ \text{раз}} - \underbrace{88888}_{5\ \text{раз}}} =$$

10. $\{b_n\} - \div\div$

$$\begin{aligned} b_1 - b_5 &= 1{,}92, \\ b_1 + b_3 &= 2{,}4 \end{aligned} \qquad |q| < 1.$$

S – сумма данной бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Вычислите $\dfrac{S^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$.

Зачетная карточка 2

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{aligned} S_n - a_2 &= 103 \\ S_n - a_n &= 88 \\ S_n - a_2 - a_{n-1} &= 87\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right| \quad n = ?$$

2. Решите уравнение

$x - 1 + x - 3 + \ldots + x - 27 = 70.$

3. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_4 &= 11\tfrac{2}{3} \\ b_2 + b_3 &= 10 \end{aligned}\right| \quad S_5 = ?$$

4. $\{b_1; b_2; b_3\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} &\{(b_3 - 4); b_2; b_1\} - \div \\ &b_1 + b_2 + b_3 = 28 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} b_1 &= ? \\ b_2 &= ? \\ b_3 &= ? \end{aligned}$$

5. $a_n = -n^3 + 8n^2$.

Найдите наибольший член последовательности.

6. $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$

При каких a уравнение имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию? Найти эти корни.

7. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 12 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 336 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} b_1 &= ? \\ q &= ? \end{aligned}$$

8. $x^3 - 3x^2 - 6x - b = 0$.

Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию.

При каких b это возможно?

9. Вычислите:

$\sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999}$.

10. $\{b_n\}$ – $\div\div$; $|q| < 1$;

$S = 9$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$\underline{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = 40{,}5}\,\Big|$ $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots = ?$

Зачетная карточка 3

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} S_3 = 6 \\ \underline{a_1 + a_3 + a_5 = 10{,}5} \end{array}\right| \begin{array}{l} d = ? \\ a_1 = ? \end{array}$$

2. $x^2 - 4x + a = 0$, где $x_1;\ x_2$ – корни;

$x^2 - 36x + b = 0$, где $x_3;\ x_4$ – корни;

$\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\} - ∺$

$a = ?$

$b = ?$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые не делятся ни на три, ни на четыре.

4. Решите уравнение

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x-2}{2x+1} + \ldots + \frac{1}{2x+1} = 3\,.$$

5. $\{b_n\} - ∺$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{51} = 28 \\ \underline{S_2 = b_2 + b_4 + \ldots + b_{52} = 7} \end{array}\right| \quad q = ?$$

6. $\left\{5^{5x};\ 10^{\frac{3x^2+3}{4}};\ 32^x\right\} - ∺$

$x = ?$

7. $1 + 11 + 111 + \ldots$

$S_n = ?$

8. Решите уравнение

$x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \ldots = 1 - 3x$,

полагая, что левая часть – сумма бесконечно убывающей прогрессии.

9. $x_n = \dfrac{3n-2}{6n+3}$.

Выясните:

1. Монотонность.
2. Ограниченность.
3. Докажите существование предела последовательности (по определению).

10. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + n^2}{(n+1)(n-3)(n+4)}.$$

Зачетная карточка 4

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 54 \end{array}\right| \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

2. $x^2 - 6x + a = 0$, где $x_1; x_2$ – корни

$x^2 - 24x + b = 0$, где $x_3; x_4$ – корни

$$\left.\{x_1; x_2; x_3; x_4\} - ∺ \right| \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \end{array}$$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на шесть или на семь.

4. Решить уравнение

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{2x-2}{2x} + \frac{2x-3}{2x} + \ldots + \frac{1}{2x} = 3.$$

5. $\left. 9 + 99 + 999 + \ldots + \ldots = S_{100} \right| \; S_{100} = ?$

6. $\{b_n\} - ∺$

$$\left.\begin{array}{l} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \\ b_1 + b_2 + b_3 = -9 \end{array}\right| \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

7. $\{a; b; c\} - ∺$

$$\left.\begin{array}{l} \{(a-1); b; (c-1)\} - \div \\ \\ \{(a-1); (b-2); (c-4)\} - ∺ \end{array}\right| \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

8. Решите уравнение, считая, что левая часть – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$x^2 - 2x^3 + 4x^4 - 8x^5 + \ldots = 2x + 1.$

9. $x_n = \dfrac{4n+2}{8n-3}$.

Выясните

1. Монотонность;
2. Ограниченность;
3. Докажите существование предела последовательности (по определению).

10. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots\right)^2}{\left(2+4+6+8+\ldots\right)^3}.$$

Зачетная карточка 5

1. Решите уравнение $3 + 7 + 11 + \ldots + x = 136$.

2. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 7 \\ \{b_1;\, b_2;\, (b_3 - 1)\} \div \\ S_n = 255 \end{array}\right| \quad n = ?$$

3. $\{a;\, b;\, c\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} a;\ b;\ c \in \mathbb{N} \\ a;\ b;\ c \text{ – стороны треугольника} \\ a \cdot b \cdot c = 216 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{342} = \frac{1}{342}(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1)$$

5. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5.

6. Даны четыре числа $a;\, b;\, c;\, p$.

$$\left.\begin{array}{l} \{a;\, b;\, c\} \text{ – } \div \\ \{b;\, c;\, p\} \text{ – ∺} \\ a + b + c = 54 \\ b + c + p = 126 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \\ p = ? \end{array}$$

7. Вычислите

$$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{n(n + 1)} - n\right).$$

8. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ \ldots\ \sqrt[2n]{2}\right).$$

9. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 25 \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{100}}+\sqrt{a_{101}}}=1 \end{array}\right| \quad d = ?$$

10. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

(n – радикалов).

Зачетная карточка 6

1. Решите уравнение

$$\left(x^3+1\right)+\left(2x^3+3\right)+\left(3x^3+5\right)+\ldots+\left(10x^3+19\right)=45.$$

2. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} S_3=54 \\ a_1;\ a_2-9;\ a_3-6\ -\ ∺ \end{array}\right| \begin{array}{l} a_1=? \\ d=? \end{array}$$

3. $\{a;b;c\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} a;\ b;\ c\in\mathbb{N} \\ a;\ b;\ c - \text{стороны треугольника} \\ a+b+c=15 \end{array}\right| \begin{array}{l} a=? \\ b=? \\ c=? \end{array}$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{11}{24}.$$

5. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 4.

6. Даны четыре числа $p;k;t;m$.

$$\left.\begin{array}{l} \{p;k;t\} - \div \\ \{k;t;m\} - ∺ \\ p+k+t=12 \\ k+t+m=19 \end{array}\right| \begin{array}{l} p=? \\ k=? \\ t=? \\ m=? \end{array}$$

7. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right).$$

8. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+3n-1}\right).$$

9. $\{b_n\}$ – $\div\div$

$$\begin{array}{l|l} S_{10}=20 & \\ S'_{10}=\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\ldots+\dfrac{1}{b_{10}}=10 & b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_{10}=\ ? \\ \hline \end{array}$$

10. $\{a_n\}$ – $\div$; $a_n\neq 0$.

Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right),$$ через a_1 и d.

6
Решения

Решение проверочной работы 1

$A = \{1; 3; 4; 6; 10\}$;

$B = \{2; 4; 5; 6; 9; 11\}$;

$C = \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}$.

Найти:

1. $A \cap B = \{4; 6\}$.

2. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\}$.

3. $A \cup (B \cap C) = A \cup \{2; 4; 6; 9\} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 10\}$.

4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\} \cap C =$
$= \{2; 4; 6; 9; 10\}$.

5. $A \cap (B \cup C) = A \cap \{2;4;5;6;7;9;10;11\} = \{4; 6; 10\}$.

6. $(A \cap B) \cup C = \{4; 6\} \cup \{2; 4; 6; 7; 9; 10\} =$
$= \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) =$
$= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 10; 11\} \cap \{2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
$= \{2; 4; 5; 6; 9; 10; 11\}$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{4; 6\} \cup \{2; 4; 6; 9\} = \{2; 4; 6; 9\}$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{4; 6; 10\} \cup \{2; 4; 6; 9\} =$
$= \{2; 4; 6; 9; 10\}$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$
$= \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 9; 10\} \cap \{2; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\} =$
$= \{2; 4; 6; 7; 9; 10\}$.

Решение проверочной работы 2

1. $A = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$;

$B = \{2; 3; 5; 6; 8; 9; 11\}$;

$D = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\}$.

Найти:

1) $(A \setminus B) \cap D = \{1; 4; 7; 10\} \cap \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\} =$

$= \{1; 4; 7; 10\}$.

2) $A \setminus (B \cap D) = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\} \setminus \{3; 6; 9\} =$

$= \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$.

3) $(A \setminus B) \cup D = \{1; 4; 7; 10\} \cup \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\} =$

$= \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\}$.

4) $(A \setminus D) \cup B = \{2; 5; 8; 11\} \cup \{2; 3; 5; 6; 8; 9; 11\} =$

$= \{2; 3; 5; 6; 8; 9; 11\}$.

5) $(A \setminus D) \cap B = \{2; 5; 8; 11\} \cap \{2; 3; 5; 6; 8; 9; 11\} =$

$= \{2; 5; 8; 11\}$.

6) $(D \cup B) \setminus A =$

$= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \setminus \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\} =$

$= \{3; 6; 9\}$.

7) $(A \cup B) \setminus D =$

$= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\} \setminus \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10\} =$

$= \{2; 5; 8; 11\}$.

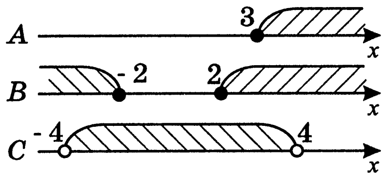
8) $A \cup (B \setminus D) = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\} \cup \{2; 5; 8; 11\} =$

$= \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$.

2. $A = \{x | x \geqslant 3\}$;

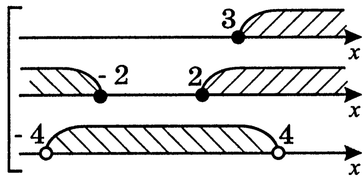
$B = \{x | x \geqslant 2 \cup x \leqslant -2\}$;

$C = \{x | -4 < x < 4\}$.

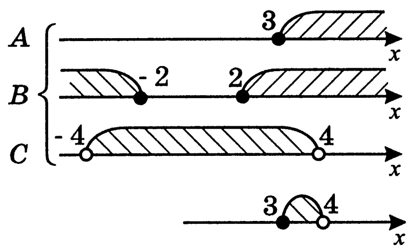


Найти:

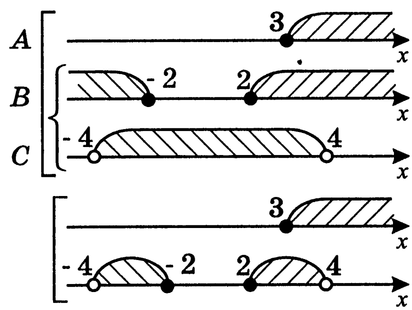
1) $A \cup B \cup C = (-\infty; \infty)$.



2) $A \cap B \cap C = [3; 4)$.



3) $A \cup (B \cap C) = (-4; -2] \cup [2; \infty)$.



4) $A \setminus B = \varnothing$.

5) $A \cup (C \setminus B) = [3; \infty) \cup (-2; 2) =$

$= (-2; 2) \cup [3; \infty)$.

6) $A \cap (C \setminus B) = [3; \infty) \cap (-2; 2) = \varnothing$.

7) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) =$

$= \varnothing \cap ((-\infty;-4] \cup [4;\infty)) = \varnothing$.

8) $(A \setminus B) \setminus C = \varnothing \setminus C = \varnothing$.

9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = ((-\infty;-2] \cup [2;\infty)) \setminus [3;\infty) =$

$= (-\infty;-2] \cup [2;3)$.

10) $(A \cup B) \cap C = (-4;-2] \cup [2;4)$.

11) $A \cap (B \cup C) = [3;\infty)$.

12) $(A \cap B) \cup C = (-4;\infty)$.

13) $B \setminus C = (-\infty;-4] \cup [4;\infty)$.

14) $(A \cup C) \setminus B = (-2;2)$.

15) $(A \cap C) \setminus B = \varnothing$.

16) $(A \cap C) \setminus (B \cap C) = [3;4) \setminus ((-4;-2] \cup [2;4)) = \varnothing$.

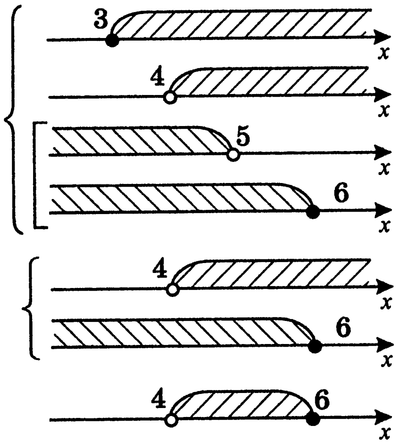
17) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = [4;\infty) \setminus ((-\infty;-4] \cup [4;\infty)) = \varnothing$.

18) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) = (-4;\infty) \setminus [3;\infty) = (-4;3)$.

Решение проверочной работы 3

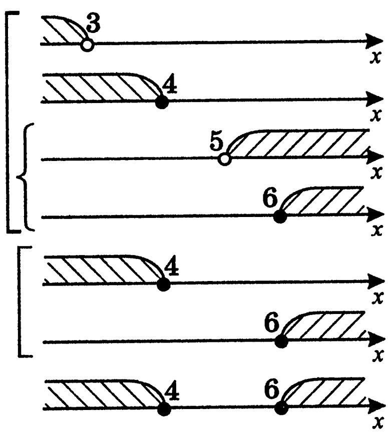
1. Решить неравенства.

1) $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x > 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 5 \\ x \leqslant 6 \end{array}\right. \end{cases}.$



Ответ: $(4; 6]$.

2) $\left[\begin{array}{l} x < 3 \\ x \leqslant 4 \\ \begin{cases} x > 5 \\ x \geqslant 6 \end{cases} \end{array}\right.$.



Ответ: $(-\infty; 4] \cup [6; \infty)$.

3) $\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \leqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+1)^2 \geqslant 0 \\ (x+3)(x-2) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)^2 \leqslant 0 \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

а) рассмотрим неравенства для знаменателя.
$(x+3)(x-2)<0$, если

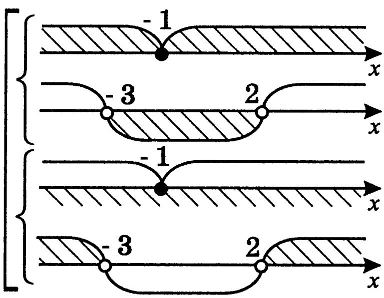
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>0\\x-2<0\end{cases}\\\begin{cases}x+3<0\\x-2>0\end{cases}\end{array}\right.\quad \text{т.е.}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\x<2\end{cases}\\\begin{cases}x<-3\\x>2\end{cases}\quad\varnothing\end{array}\right.$$

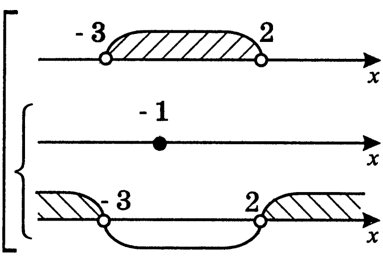
Итак, $-3<x<2$.

б) Если же $(x+3)(x-2)>0$, то решение

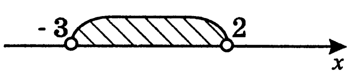
$$\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-3\end{array}\right..$$

Учитывая эти результаты, исходная совокупность систем примет вид





Тогда



Ответ: $(-3;2)$.

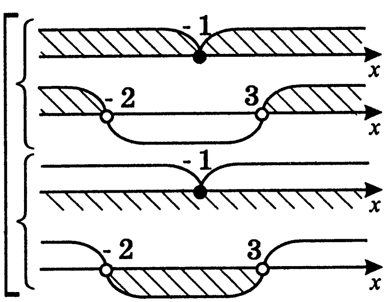
4) $\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)(x+2)} \geqslant 0$.

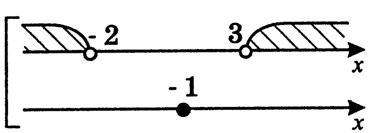
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+1)^2 \geqslant 0\\ (x-3)(x+2) > 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)^2 \leqslant 0\\ (x-3)(x+2) < 0\end{cases}\end{array}\right..$$

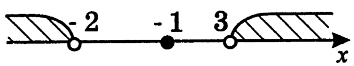
а) $(x-3)(x+2) > 0$,

если $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3>0\\ x+2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0\\ x+2<0\end{cases}\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ x>-2\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ x<-2\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<-2\end{array}\right..$

б) Аналогично $(x-3)(x+2) < 0$ при $-2 < x < 3$.







Ответ: $(-\infty;-2) \cup \{-1\} \cup \{3;\infty\}$.

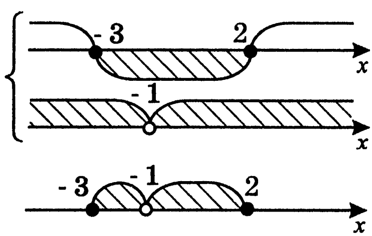
5) $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2} \leqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}(x+3)(x-2)\geqslant 0\\ (x+1)^2<0\end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases}(x+3)(x-2)\leqslant 0\\ (x+1)^2>0\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как $(x+3)(x-2)\leqslant 0$ равносильно

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}x+3\geqslant 0\\ x-2\leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases}x+3\leqslant 0\\ x-2\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x\geqslant -3\\ x\leqslant 2\end{cases} \\ \begin{cases}x\leqslant -3\\ x\geqslant 2\end{cases} \quad \varnothing\end{array}\right.,$$

то исходная совокупность примет вид



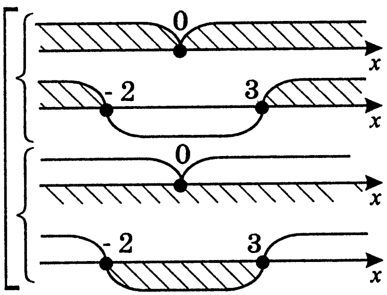
Ответ: $[-3;-1)\cup(-1;2]$.

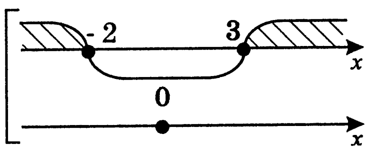
6) $x^2(x-3)(x+2)\geqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}x^2\geqslant 0\\ (x-3)(x+2)\geqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases}x^2\leqslant 0\\ (x-3)(x+2)\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right..$$

Так как $(x-3)(x+2)\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases}x-3\leqslant 0\\ x+2\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x\geqslant 3\\ x\geqslant -2\end{cases} \\ \begin{cases}x\leqslant 3\\ x\leqslant -2\end{cases}\end{array}\right.,$

то исходная совокупность примет вид





Ответ: $(-\infty;-2] \cup \{0\} \cup [3;\infty)$.

7) $(x^2-4)^2+(x^2-2x-8)^2 \leqslant 0$.

Возможно только если:

$$\begin{cases}(x^2-4)^2=0\\(x^2-2x-8)^2=0\end{cases};\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\x=-2\end{array}\right.\end{cases};\qquad x=-2.$$

Ответ: $x=-2$.

8) $\dfrac{(x+2)(1-x)}{(x^2-9)^2+(x^2-2x-3)^2} \leqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+2)(1-x)\geqslant 0\\(x^2-9)^2+(x^2-2x-3)^2<0\end{cases} \quad \varnothing\\ \begin{cases}(x+2)(1-x)\leqslant 0\\(x^2-9)^2+(x^2-2x-3)^2>0\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как $(x+2)(1-x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 1-x \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2 \leqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.;$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant -2 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \leqslant -2 \end{array}\right.,$$

то исходная совокупность примет вид

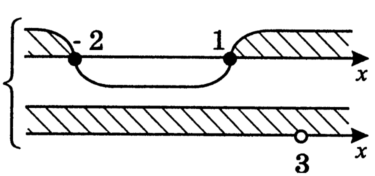
$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant 1 \\ x \leqslant -2 \end{array}\right..$$

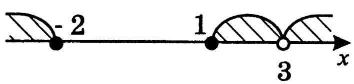
Выясним, когда $\left(x^2-9\right)^2+\left(x^2-2x-3\right)^2=0$, и исключим эти значения x.

$$\begin{cases} \left(x^2-9\right)^2=0 \\ \left(x^2-2x-3\right)^2=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}; \qquad x=3.$$

Итак,





Ответ: $(-\infty;-2] \cup [1;3) \cup (3;\infty)$.

2. $A = \{1; 3; 5; 8; 9; 10\}$;

$B = \{2; 4; 6; 8; 9\}$;

$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Найти:

1) $A \cap \overline{B} = A \cap \{1; 3; 5; 7; 10\} = \{1; 3; 5; 10\}$.

2) $\overline{A} \cup B = \{2; 4; 6; 7\} \cup B = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}$.

3) $\overline{A \cup B} = \overline{\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\}} = \{7\}$.

4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{2; 4; 6; 7\} \cup \{1; 3; 5; 7; 10\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10\}$.

5) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{\{1; 3; 5; 10\}} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}$.

6) $\overline{A \cap B} = \overline{\{8; 9\}} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10\}$.

7) $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) =$

$= (A \cap \{1; 3; 5; 7; 10\}) \cup (\{2; 4; 6; 7\} \cap B) =$

$= \{1; 3; 5; 10\} \cup \{2; 4; 6\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 10\}$.

8) $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) =$

$= \{2; 4; 6; 7; 8; 9\} \cap \{1; 3; 5; 7; 8; 9; 10\} = \{7; 8; 9\}$.

9) $E \setminus (A \cup B) = E \setminus \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\} = \{7\}$.

10) $E \setminus \left(A \cap \overline{B}\right) = E \setminus \{1; 3; 5; 10\} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9\}$.

11) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \{2; 4; 6; 7\} \cap \{1; 3; 5; 7; 10\} = \{7\}$.

12) $\left(E \setminus \overline{A}\right) \cap \left(E \setminus \overline{B}\right) = A \cap B = \{8; 9\}$.

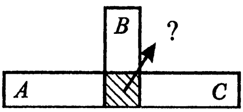
3. В течение недели в кинотеатре шли фильмы A, B и C. Каждый из 40 школьников видел либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.

Фильм B видели 16 школьников.

Фильм C видели 19 школьников.

Сколько школьников видели все три фильма?



Условие задачи можно иллюстрировать данной картинкой, так как нет школьников, которые смотрели бы только два фильма. Поэтому

$m(A \cap B) = m(A \cap B \cap C)$;

$m(A \cap C) = m(A \cap B \cap C)$;

$m(B \cap C) = m(A \cap B \cap C)$;

т.е. $m(A) + m(B) + m(C) - 2m(A \cap B \cap C) = 40$.

Так как $m(A) = 13$; $m(B) = 16$; $m(C) = 19$, то

$m(A \cap B \cap C) = \frac{13+16+19-40}{2}$; $m(A \cap B \cap C) = 4$.

Ответ: только 4 школьника видели все три фильма.

Решение проверочной работы 4

Дано: $x_n = \frac{2n+3}{3n+4}$. Выяснить:

1. Монотонность.
2. Ограниченность.
3. Начиная с какого номера все члены последовательности x_n таковы, что справедливо неравенство $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01$.
4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

1. $x_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+4} = \frac{2n+5}{3n+7}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+5}{3n+7} - \frac{2n+3}{3n+4} =$$
$$= \frac{(2n+5)(3n+4)-(2n+3)(3n+7)}{(3n+7)(3n+4)} =$$
$$= \frac{6n^2+23n+20-6n^2-23n-21}{(3n+7)(3n+4)} = \frac{-1}{(3n+7)(3n+4)} < 0,$$

т.е. $x_{n+1} < x_n$, значит $\{x_n\}$– убывающая.

2. Вычислим $x_1 = \frac{5}{7}$, тогда $x_n < x_1 = \frac{5}{7}$;

$x_n > 0$, так как $\frac{2n+3}{3n+4} > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда

$\forall n \in \mathbb{N}$; $x_n \in \left(0;\frac{5}{7}\right]$.

3. Выяснить, начиная с какого номера члена последовательности $\{x_n\}$, $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01$.

$$x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2}{3} = \frac{6n+9-6n-8}{3(3n+4)} = \frac{1}{3(3n+4)}.$$

Значит $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{1}{3(3n+4)}\right| = \frac{1}{3(3n+4)}$, т.е. $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3(3n+4)} < 0{,}01$,

$\frac{1}{3 \cdot 0{,}01} < 3n + 4; \qquad 3n > \frac{1}{0{,}03} - 4;$

$n > \frac{1-0{,}12}{0{,}09} = \frac{0{,}88}{0{,}09} = \frac{88}{9} = 9\frac{7}{9}$,

т.е. для $\forall n > 9 \;\Rightarrow\; \left|x_n - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

$\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3(3n+4)} < \varepsilon; \qquad \frac{1}{3\varepsilon} < 3n + 4;$

$3n > \frac{1-12\varepsilon}{3\varepsilon}; \quad n > \frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}$.

Пусть $N_0 = \left[\frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$. К сожалению, при $\varepsilon = \frac{1}{3}$

$N_0 = \left[\frac{1-12\cdot\frac{1}{3}}{9\cdot\frac{1}{3}}\right] = -1$, но $N_0 \in N$. Чтобы в будущем не

иметь проблем положим $N_0 = \left|\frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}\right| + 1$, тогда для

$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_0\left(N_0 = \left|\left[\frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}\right]\right| + 1\right) \big| \forall n > N_0 \;\Rightarrow\; \left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Решение проверочной работы 5

Вычислить.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2+3n)\left(n^2+n+1\right)}{5n^3-3n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+5n^2+5n+2}{5n^3-3n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(3+\frac{5}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{3+0+0+0}{5-0+0}=\frac{3}{5}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\frac{3}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{1+0}-\sqrt{2-0}}{\sqrt{1+0}+0}=\frac{1-\sqrt{2}}{1}=1-\sqrt{2}.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3-n^2+n-1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{4}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{1}{1+1}=0{,}5.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^3-2n^2+1}-\sqrt[3]{2n^3+n^2+1}\right)=$

Домножим на неполный квадрат суммы числитель и знаменатель данного выражения.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{2n^3-2n^2+1}-\sqrt[3]{2n^3+n^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{(2n^3-2n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(2n^3-2n^2+1)(2n^3+n^2+1)}+\sqrt[3]{(2n^3+n^2+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(2n^3-2n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(2n^3-2n^2+1)(2n^3+n^2+1)}+\sqrt[3]{(2n^3+n^2+1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2n^3}-2n^2+1-\cancel{2n^3}-n^2-1}{\sqrt[3]{(2n^3-2n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(2n^3-2n^2+1)(2n^3+n^2+1)}+\sqrt[3]{(2n^3+n^2+1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}\right)}=$$

$$=\frac{-3}{\sqrt[3]{(2-0+0)^2}+\sqrt[3]{(2-0+0)(2+0+0)}+\sqrt[3]{(2+0+0)^2}}=\frac{-3}{3\sqrt[3]{4}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots\right).$

2; 5; 8; 11; ... – очевидно, что мы имеем дело с арифметической прогрессией.

$$\left.\begin{array}{l}a_1=2\\ d=3\end{array}\right|\quad a_n=a_1+(n-1)d;\quad \text{тогда}\quad a_n=2+(n-1)3,$$

т.е. $a_n=3n-1$

Значит n-й член суммы равен $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$, и

тогда получим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right).$

Для вычисления предела последовательности учтем, что

$$\frac{1}{2\cdot5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{5\cdot8}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)$$
$$\frac{1}{8\cdot11}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)$$
$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right).$$

Сложив почленно левые и правые части равенств, получим

$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=$$

$$=\frac{n}{2(3n+2)}.$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(3n+2)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+0}=\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-2)^4-(n+2)^4}{(n-2)^3+(n+2)^3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n-2)^2+(n+2)^2\right)\left((n-2)^2-(n+2)^2\right)}{(n-2+n+2)\left((n-2)^2-(n-2)(n+2)+(n+2)^2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-4n+4+n^2+4n+4\right)(n-2+n+2)(n-2-n-2)}{2n\left(n^2-4n+4-n^2+4+n^2+4n+4\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left(n^2+4\right)n\cdot(-4)}{2n\left(n^2+12\right)}=-8\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{n^2+12}=$$

$$=-8\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{12}{n^2}\right)}=-8\cdot\frac{1+0}{1+0}=-8.$$

7. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+6n^2+12n+8}-\sqrt{n(n+1)(n+3)}}{\sqrt{n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}+6n^2+12n+8-\cancel{n^3}-4n^2-3n}{\sqrt{n+3}\left(\sqrt{(n+2)^3}+\sqrt{n(n+1)(n+3)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+9n+8}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}+\sqrt{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{9}{n}+\frac{8}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)}=$$

$$=\frac{2+0+0}{\sqrt{1+0}\left(\sqrt{(1+0)^3}+\sqrt{(1+0)(1+0)}\right)}=\frac{2}{1\cdot(1+1)}=1\,.$$

8. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}-16n^2}{4n-\sqrt[5]{32n^{10}+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}-16\right)}{n^2\left(\frac{4}{n}-\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}-16}{\frac{4}{n}-\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}=\frac{0-16}{0-\sqrt[5]{32+0}}=\frac{-16}{-2}=8\,.$$

Решение проверочной работы 6

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{m} \\ a_m = \dfrac{1}{n} \end{array}\right| \; S_{mn} = ?$$

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d = \dfrac{1}{m} \\ a_m = a_1 + (m-1)d = \dfrac{1}{n} \end{cases}; \qquad d(n-m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n};$$

$$a_1 = \frac{1}{m} - (n-1)d = \frac{1}{m} - \frac{n-1}{mn} = \frac{1}{mn};$$

$$S_{mn} = \frac{2\cdot\frac{1}{mn} + \frac{1}{mn}(mn-1)}{2} \cdot mn = \frac{2+mn-1}{2} = \frac{mn+1}{2}.$$

Ответ: $S_{mn} = \dfrac{mn+1}{2}$.

2. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = -3{,}5 \\ d = 0{,}5 \\ S_n = 8{,}5 \end{array}\right| \; n = ?$$

$$\frac{2(-3{,}5)+(n-1)\cdot 0{,}5}{2} \cdot n = 8{,}5;$$

$$(-7 + (n-1)\cdot 0{,}5)\cdot n = 17;$$

$$n^2 - 15n - 34 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} n = 17 \\ n = -2 \notin \mathbb{N} \end{array}\right..$$

Ответ: $n = 17$.

3. $\{a_n\} - \div$; $a_n \in \mathbb{N}$; $d \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 40 \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 104 \end{array}\right| \; n = ? \; a_1 = ? \; d = ?$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 40 \\ a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + a_1(n-3)d + a_1 + (n-4)d = 104 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4a_1 + 6d = 40 \\ 4a_1 + (4n-10)d = 104 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2a_1 + 3d = 20 \\ (n-4)d = 16 \end{cases};$$

$4nd - 16d = 64.$

Очевидно $n > 4$. Так как у нас дана система двух уравнений с тремя неизвестными и $a_n \in \mathbb{N}$; $d \in \mathbb{N}$, то можно простым перебором найти их.

$n = 5$; $d = 16$; $a_1 = -14$ не подходит;

$n = 6$; $d = 8$; $a_1 = -2$ не подходит

и так далее.

Подходит $n = 8$; $d = 4$; $a_1 = 4$ и $n = 12$; $d = 2$; $a_1 = 7$.

Пример можно перебирать по d.

Ответ: $n = 8$; $d = 4$; $a_1 = 4$; $n = 12$; $d = 2$; $a_1 = 7$.

Примечание. При $n > 20$ $\quad d \notin \mathbb{N}$.

4. У отца было пять сыновей, которые рождались с интервалом в 3 года. В первый раз в 5 лет каждый в подарок получал 5 книг и каждый последующий год на одну книгу больше. Сколько было каждому из сыновей лет, когда общее число книг, подаренных им, составило 325 книг.

Пусть младшему сыну в этой семье было x лет, тогда с учетом разницы в 3 года им было

x; $x + 3$; $x + 6$; $x + 9$; $x + 12$ лет.

Первый раз каждый получил 5 книг и в дальнейшем получал на одну книгу больше.

Младший получал $(x - 4)$ раз книги.

Далее по старшинству остальные получали книги $(x - 1)$, $(x + 2)$, $(x + 5)$, $(x + 8)$ раз. Получим прогрессию, где $a_1 = 5$, $d = 1$.

Самый младший получил в сумме книг

$$S_1 = \frac{2\cdot 5+(x-4-1)\cdot 1}{2}\cdot(x-4) = \frac{(x+5)(x-4)}{2}.$$

Далее по старшинству

$$S_2 = \frac{2\cdot5+(x-1-1)\cdot1}{2}\cdot(x-1) = \frac{(x+8)(x-1)}{2};$$

$$S_3 = \frac{2\cdot5+(x+2-1)\cdot1}{2}\cdot(x+2) = \frac{(x+11)(x+2)}{2};$$

$$S_4 = \frac{2\cdot5+(x+5-1)\cdot1}{2}\cdot(x+5) = \frac{(x+14)(x+5)}{2};$$

$$S_5 = \frac{2\cdot5+(x+8-1)\cdot1}{2}\cdot(x+8) = \frac{(x+17)(x+8)}{2};$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 325;$$

$$\frac{(x+5)(x-4)}{2} + \frac{(x+8)(x-1)}{2} + \frac{(x+11)(x+2)}{2} +$$
$$+\frac{(x+14)(x+5)}{2} + \frac{(x+17)(x+8)}{2} = 325.$$

Получим $x^2 + 13x - 90 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -18 \text{ —не подходит} \\ x = 5. \end{array}\right.$

Ответ: итак, 5; 8; 11; 14; 17 лет было сыновьям, когда в сумме все они получили 325 книг.

5. При каких x и какую прогрессию образуют числа $\sqrt{2x+9}$; $\sqrt{5x}$; $\sqrt{8x+9}$, если $x \in \mathbb{Z}$?

1) По признаку геометрической прогрессии

$\left(\sqrt{5x}\right)^2 = \sqrt{2x+9}\cdot\sqrt{8x+9}$, тогда

$$\begin{cases} (5x)^2 = (2x+9)(8x+9) \\ x \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 25x^2 = 16x^2 + 90x + 81 \\ x \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 90x - 81 = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 10x - 9 = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 + \sqrt{34} \\ x = 5 - \sqrt{34} \end{array}\right. ; \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad x = 5 + \sqrt{34} \notin \mathbb{Z}.$$

2) По признаку арифметической прогрессии

$\sqrt{5x} = \frac{\sqrt{2x+9}+\sqrt{8x+9}}{2}$, тогда

$2\sqrt{5x} = \sqrt{2x+9} + \sqrt{8x+9}$;

$\begin{cases} 4 \cdot 5x = 2x + 9 + 2\sqrt{16x^2 + 90x + 81} + 8x + 9 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} 5x - 9 = \sqrt{16x^2 + 90x + 81} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant 1{,}8 \\ 25x^2 - 90x + 81 = 16x^2 + 90x + 81 \end{cases}$;

$\begin{cases} x \geqslant 1{,}8 \\ 9x(x - 20) = 0 \end{cases}$ $x = 20$;

при $x = 20$ получим 7; 10; 13 (значения корней при $x = 20$).

Ответ: при $x = 20$ эти числа образуют арифметическую прогрессию.

6. $\{b_n\} - \div\div$;

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = 8 \\ b_4 + b_5 = 216 \end{array}\right| \quad q = ?; \quad b_1 = ?$$

$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 8 \\ b_1 q^3 + b_1 q^4 = 216 \end{cases}$;

$\begin{cases} b_1(1 + q) = 8 \\ b_1 q^3(1 + q) = 216 \end{cases}$;

$\begin{cases} q^3 = 27 \\ b_1(1 + q) = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} q = 3 \\ b_1 = 2 \end{cases}$.

Ответ: $b_1 = 2$; $q = 3$.

7. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 54 \\ S_3 = 78 \end{array}\right| \; S_5 = ?$$

$$\begin{cases} b_1 = 54 \\ \dfrac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 78 \end{cases}; \qquad \begin{cases} b_1 = 54 \\ 54(1+q+q^2) = 78 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1 = 54 \\ 54q^2 + 54q - 24 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} b_1 = 54 \\ 9q^2 + 9q - 4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1 = 54 \\ \left[\begin{array}{l} q = -\dfrac{4}{3} \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}.$$

1) Пусть $\begin{cases} b_1 = 54 \\ q = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$, тогда

$$S_5 = \frac{54\left(1-\left(-\frac{4}{3}\right)^5\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{2\cdot 27 + 2\cdot 3^3\cdot\frac{4^5}{3^5}}{1+\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{2\cdot 27 + \frac{2\cdot 4^5}{3^2}}{\frac{7}{3}} = \frac{54\cdot 9 + 2\cdot 1024}{7\cdot 3} = \frac{2534}{7\cdot 3} = \frac{362}{3} = 120\frac{2}{3}.$$

2) Пусть $\begin{cases} b_1 = 54 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, тогда

$$S_5 = \frac{54\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{54 - \frac{2\cdot 27}{3^5}}{\frac{2}{3}} = \frac{54 - \frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{54\cdot 9 - 2}{6} = 80\frac{2}{3}$$

Ответ: $S_5 = 120\frac{2}{3}$ или $S_5 = 80\frac{2}{3}$.

8. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_4 - b_1 = 52 \\ \underline{b_1 + b_2 + b_3 = 26} \end{array}\right| \quad b_6 = ?$$

$$\begin{cases} b_1q^3 - b_1 = 52 \\ b_1 + b_1q^1 + b_1q^2 = 26 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(q^3 - 1) = 52 \\ b_1(1 + q + q^2) = 26 \end{cases}; \quad \boxed{2} : \boxed{1}$$

$$\begin{cases} q - 1 = 2 \\ b_1(1 + q + q^2) = 26 \end{cases};$$

$$\begin{cases} q = 3 \\ b_1(1 + 3 + 9) = 26 \end{cases};$$

$$\begin{cases} q = 3 \\ b_1 = 2 \end{cases};$$

$b_6 = b_1 \cdot q^5$; т. е. $b_6 = 2 \cdot 3^5 = 486$.

Ответ: $b_6 = 486$.

9. Доказать, что $b_3 \cdot b_5 \cdot b_7 \cdot \ldots \cdot b_{2n+1} = b_1^n q^{n^2+n}$,

если $\{b_n\} - \div\div$.

Доказательство.

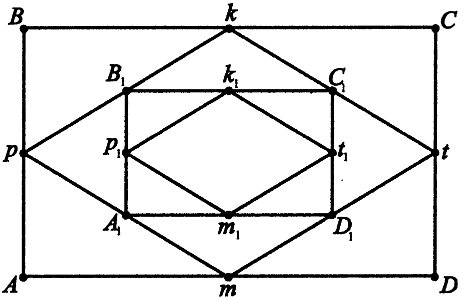
$b_3 \cdot b_5 \cdot b_7 \cdot \ldots \cdot b_{2n+1} = b_1 \cdot q^2 \cdot b_1q^4 \cdot b_1q^6 \cdot \ldots \cdot b_1q^{2n} =$

$= b_1^n \cdot q^{2+4+6+\ldots+2n} = b_1^n \cdot q^{n^2+n}$,

что и требовалось доказать,

так как $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \frac{2+2n}{2} \cdot n = n(n+1)$.

10. Из прямоугольника со сторонами 20 и 12 вырезали ромб, вершины которого есть середины сторон прямоугольника. А из ромба вырезали прямоугольник, вершины которого есть середины сторон ромба и т. д. Вычислить суммарную площадь всех таких фигур при десяти таких разрезаниях.



1) $S_{ABCD} = 12 \cdot 20 = 240$;

2) $S_{pktm} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 = 120$;

3) $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 20 = 60$.

Итак, ясно, что площади последовательно вырезаемых фигур (независимо от их вида) образуют геометрическую прогрессию, где $q = \frac{1}{2}$.

$$S_{10} = \frac{240\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 480 - 30 \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{2^{10}} =$$

$$= 480 - \frac{30}{64} = 479\frac{17}{32}.$$

Решение зачетной работы 1

Дано:

$A = \{2; 3; 5; 8; 10\}$;

$B = \{1; 4; 5; 6; 9; 10\}$;

$C = \{2; 4; 8; 9\}$.

Найти:

1. $A \cap B = \{5; 10\}$.

2. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\}$.

3. $A \cup (B \cap C) = A \cup \{9\} = \{2; 3; 5; 8; 9; 10\}$.

4. $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\} \cap \{2; 4; 8; 9\} =$

$= \{2; 4; 8; 9\}$.

5. $A \cap (B \cup C) = \{2;3;5;8;10\} \cap \{1;2;4;5;6;8;9;10\} =$

$= \{2; 5; 8;10\}$.

6. $(A \cap B) \cup C = \{5; 10\} \cup \{2; 4; 8; 9\} =$

$= \{2; 4; 5; 8; 9; 10\}$.

7. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10\} \cap$

$\cap \{1; 2; 4; 5; 6; 8; 9; 10\} = \{1; 2; 4; 5; 6; 9; 10\}$.

8. $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{5;10\} \cup \{4; 9\} = \{4; 5; 9;10\}$.

9. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2; 8\} \cup \{4; 9\} = \{2; 4; 8; 9\}$.

10. $(A \cup C) \cap (B \cup C) =$

$= \{2; 3; 4; 5; 8; 10\} \cap \{1; 2; 4; 5; 6; 8; 9; 10\} =$

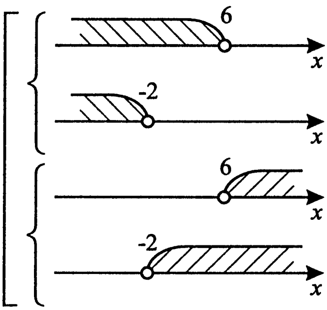
$= \{2; 4; 5; 8; 10\}$.

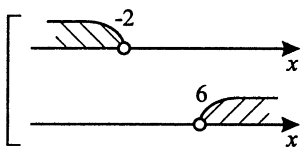
Решение зачетной работы 2

Решить неравенства.

1. $(6 - x)(x + 2) < 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6 - x > 0\\ x + 2 < 0\end{cases}\\ \begin{cases}6 - x < 0\\ x + 2 > 0\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x < 6\\ x < -2\end{cases}\\ \begin{cases}x > 6\\ x > -2\end{cases}\end{array}\right..$$



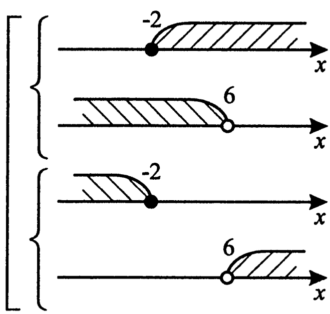


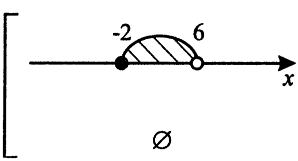
Примечание. Неравенство $6 > x$ равносильно $x < 6$, читать можно как справа налево, так и слева направо.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (6; \infty)$.

2. $\frac{x+2}{6-x} \geqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x + 2 \geqslant 0\\ 6 - x > 0\end{cases}\\ \begin{cases}x + 2 \leqslant 0\\ 6 - x < 0\end{cases}\end{array}\right.;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant -2\\ x < 6\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant -2\\ x > 6\end{cases}\end{array}\right..$$

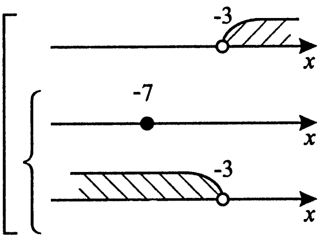


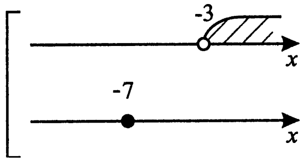


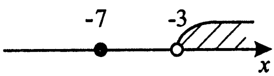
Ответ: $[-2; 6)$.

3. $\dfrac{(x+7)^2}{x+3} \geqslant 0\,.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+7)^2 \geqslant 0\\ x+3>0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+7)^2 \leqslant 0\\ x+3<0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left((x+7)^2 \geqslant 0 \text{ при любых } x\right)\quad \left[\begin{array}{l}x>-3\\ \begin{cases}x=-7\\ x<-3\end{cases}\end{array}\right.$$







Ответ: $\{-7\} \cup (-3;\infty)$.

4. $\dfrac{(x+3)^2}{x^2-1} \leqslant 0;$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+3)^2 \geqslant 0\\ x^2-1<0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+3)^2 \leqslant 0\\ x^2-1>0\end{cases}\end{array}\right.;$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\forall x\\ (x-1)(x+1)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ x^2-1>0\end{cases}\end{array}\right.;$

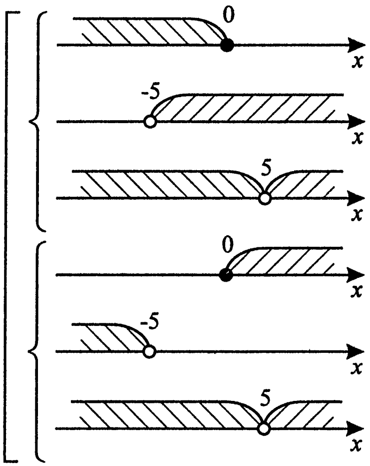
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1>0\\ x+1<0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1<0\\ x+1>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ 3^2-1>0\end{cases}\end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ x<-1\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\\ x>-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ \forall x\end{cases}\end{array}\right.\quad \varnothing$$

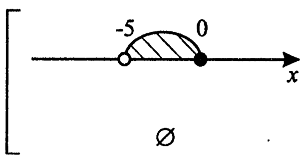
Ответ: $(-1;1) \cup \{-3\}$.

5. $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} \leqslant 0$

$$\frac{(x-5)x}{(x-5)(x+5)} \leqslant 0; \quad \begin{cases} \dfrac{x}{x+5} \leqslant 0 \\ x \neq 5 \end{cases};$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x + 5 > 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 5 < 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x > -5 \\ x \neq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < -5 \\ x \neq 5 \end{cases} \end{array}\right..$$





Ответ: $(-5; 0]$.

6. $\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leqslant 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(x+2) \geqslant 0 \\ (x-1)^2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-3)(x+2) \leqslant 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \begin{array}{l} \left((x-1)^2 < 0; \varnothing\right) \\ \begin{cases} (x-3)(x+2) \leqslant 0; \\ x \neq 1 \end{cases} \end{array}$$

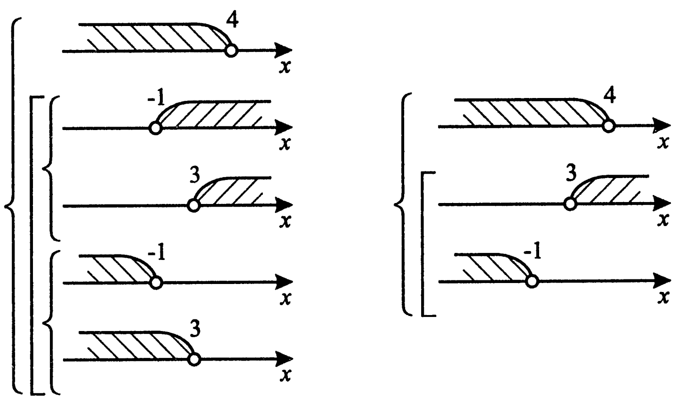
$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\geqslant 0\\ x+2\leqslant 0\end{cases}\quad\varnothing\\ \begin{cases}x-3\leqslant 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 1\end{array}\right.;\qquad \begin{cases}x\leqslant 3\\ x\geqslant -2\\ x\neq 1\end{cases}.$$

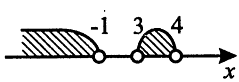
Ответ: $[-2;1)\cup(1;3]$.

7. $(4-x)(x+1)(x-3)>0$.

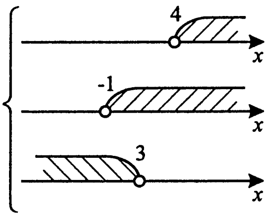
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x>0\\ (x+1)(x-3)>0\end{cases}\\ \begin{cases}4-x<0\\ (x+1)(x-3)<0\end{cases}\end{array}\right.;$$

а) $$\left\{\begin{array}{l}x<4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>0\\ x-3>0\end{cases};\\ \begin{cases}x+1<0\\ x-3<0\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.$$





б) $\begin{cases} x > 4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>0 \\ x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad \varnothing \end{array}\right. \end{cases};$



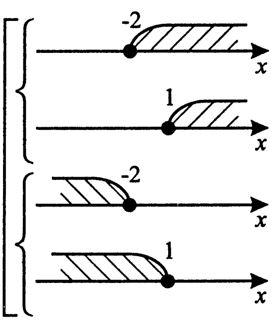
$\varnothing$

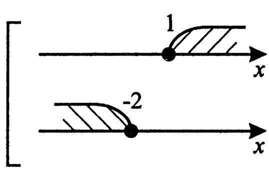
Ответ: $(-\infty;-1) \cup (3;4)$.

8. $\dfrac{(x+2)(1-x)}{(x^2-9)^2+(x^2+2x-3)^2} \leqslant 0.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)(1-x) \geqslant 0 \\ (x^2-9)^2+(x^2+2x-3)^2 < 0 \end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases} (x+2)(1-x) \leqslant 0 \\ (x^2-9)^2+(x^2+2x-3)^2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.;$

а) $(x+2)(1-x) \leqslant 0;$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 1-x \leqslant 0 \end{cases}; \\ \begin{cases} x+2 \leqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$

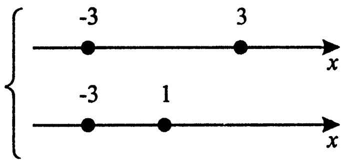




б) $\left(x^2 - 9\right)^2 + \left(x^2 + 2x - 3\right)^2 > 0$

Исключим $\left(x^2 - 9\right)^2 + \left(x^2 + 2x - 3\right)^2 = 0$

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases};$$



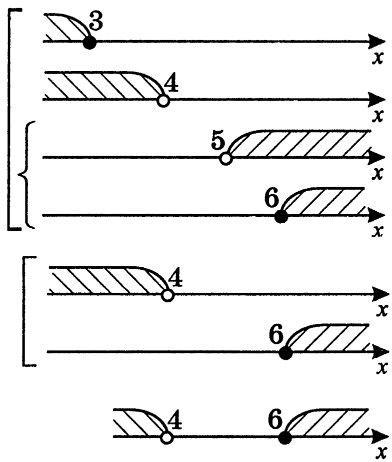
$x = -3$.

Ответ: $(-\infty;-3) \cup (-3;-2] \cup [1;\infty)$.

Решение зачетной работы 3

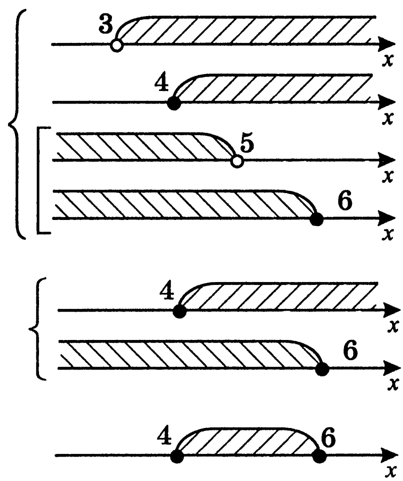
1. Решить неравенства.

1) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 3 \\ x < 4 \\ \begin{cases} x > 5 \\ x \geqslant 6 \end{cases} \end{array}\right.$



Ответ: $(-\infty;4) \cup [6;\infty)$.

2) $\begin{cases} x > 3 \\ x \geqslant 4 \\ \left[\begin{array}{l} x < 5 \\ x \leqslant 6 \end{array}\right. \end{cases}$.



Ответ: $[4;6]$.

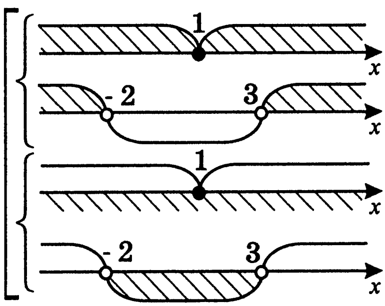
3) $\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)} \geqslant 0$.

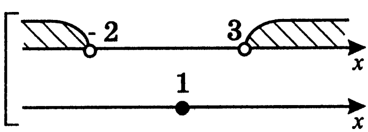
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-1)^2 \geqslant 0\\(x-3)(x+2) > 0\end{cases}\\\begin{cases}(x-1)^2 \leqslant 0\\(x-3)(x+2) < 0\end{cases}\end{array}\right..$$

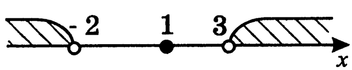
Пусть $(x-3)(x+2) > 0$, тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3 > 0\\x+2 > 0\end{cases}\\\begin{cases}x-3 < 0\\x+2 < 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 3\\x > -2\end{cases}\\\begin{cases}x < 3\\x < -2\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}x > 3\\x < -2\end{array}\right..$$

При решении учтем, что $(x-3)(x+2) < 0$ есть дополнение до прямой $(x-3)(x+2) > 0$ без $x = 3$ и $x = -2$.







Ответ: $(-\infty;-2) \cup \{1\} \cup (3;\infty)$.

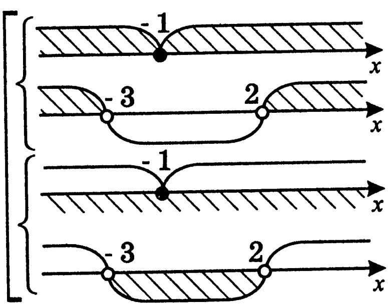
4) $\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)(x-2)} \geqslant 0$.

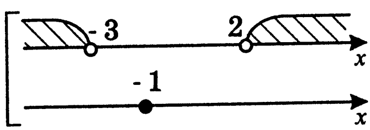
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+1)^2 \geqslant 0\\(x+3)(x-2) > 0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)^2 \leqslant 0\\(x+3)(x-2) < 0\end{cases}\end{array}\right..$$

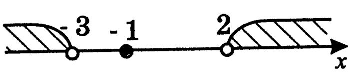
Пусть $(x+3)(x-2) > 0$, тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3>0\\x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3<0\\x-2<0\end{cases}\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-3\\x>2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-3\\x<2\end{cases}\end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l}x>2\\x<-3\end{array}\right..$$

Тогда решением $(x+3)(x-2) < 0$ будет $-3 < x < 2$.







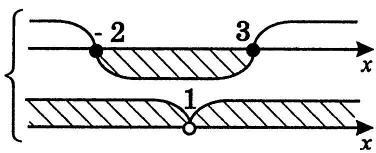
Ответ: $(-\infty;-3) \cup \{-1\} \cup (2;\infty)$.

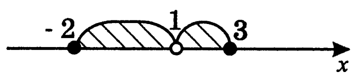
5) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2} \leqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}(x-3)(x+2) \geqslant 0 \\ (x-1)^2 < 0\end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases}(x-3)(x+2) \leqslant 0 \\ (x-1)^2 > 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Тогда $(x-3)(x+2) \leqslant 0$ при

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}x-3 \geqslant 0 \\ x+2 \leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases}x-3 \leqslant 0 \\ x+2 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. ; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x \geqslant 3 \\ x \leqslant -2\end{cases} \quad \varnothing \\ \begin{cases}x \leqslant 3 \\ x \geqslant -2\end{cases} \quad -2 \leqslant x \leqslant 3\end{array}\right.$$





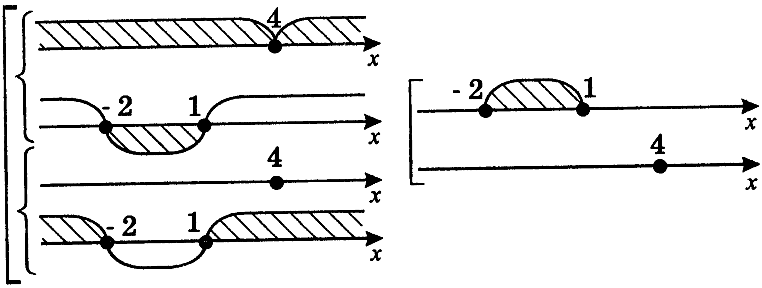
Ответ: $[-2;1) \cup (1;3]$.

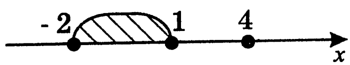
6) $(4-x)^2(x-1)(x+2) \leqslant 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}(4-x)^2 \geqslant 0 \\ (x-1)(x+2) \leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases}(4-x)^2 \leqslant 0 \\ (x-1)(x+2) \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(x-1)(x+2) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x-1 \geqslant 0 \\ x+2 \leqslant 0\end{cases} \\ \begin{cases}x-1 \leqslant 0 \\ x+2 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 1\\ x \leqslant -2\end{cases} \quad \varnothing\\ \begin{cases}x \leqslant 1\\ x \geqslant -2\end{cases} \quad -2 \leqslant x \leqslant 1\end{array}\right.$$





Ответ: $[-2;1] \cup \{4\}$.

7) $(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 > 0$.

Очевидно, что неравенство справедливо для любых x, кроме случая, когда $(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 = 0$.
Найдем эти значения x и исключим из решения.
Так как

$$(x^3 - 9x)^2 + (x^3 - 3x^2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x^3 - 9x)^2 = 0\\ (x^3 - 3x^2)^2 = 0\end{cases};$$

$$\begin{cases}x(x^2 - 9) = 0\\ x^2(x - 3) = 0\end{cases}; \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 3\\ x = -3.\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x = 0\\ x = 3\end{array}\right.\end{cases} \qquad \{0;3\}$$

Исключив эти значения x, получим решение неравенства.

Ответ: $(-\infty;0) \cup (0;3) \cup (3;\infty)$.

8) $\dfrac{-(x+2)(4+x)}{(x^2-1)^2+(x^2-3x-4)^2} \leqslant 0.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-(x+2)(4+x) \geqslant 0\\ \left(x^2-1\right)^2+\left(x^2-3x-4\right)^2<0\end{cases} \quad \varnothing\\ \begin{cases}-(x+2)(4+x) \leqslant 0\\ \left(x^2-1\right)^2+\left(x^2-3x-4\right)^2>0\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как $-(x+2)(4+x) \leqslant 0$ при

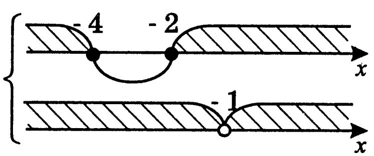
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2 \geqslant 0\\ x+4 \geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+2 \leqslant 0\\ x+4 \leqslant 0\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant -2\\ x \geqslant -4\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant -2\\ x \leqslant -4\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x \geqslant -2\\ x \leqslant -4\end{array}\right.;$$

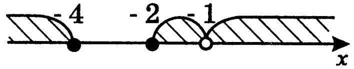
$$\left(x^2-1\right)^2+\left(x^2-3x-4\right)^2>0;$$

$$\forall x \Big| \quad \left(x^2-1\right)^2+\left(x^2-3x-4\right)^2 \neq 0$$

Для этого решим, когда $\left(x^2-1\right)^2+\left(x^2-3x-4\right)^2=0$, и исключим эти значения x.

$$\begin{cases}\left(x^2-1\right)^2=0\\ \left(x^2-3x-4\right)^2=0\end{cases}; \quad \begin{cases}(x+1)(x-1)=0\\ (x-4)(x+1)=0\end{cases}. \quad x \neq -1$$





Ответ: $(-\infty;-4] \cup [-2;-1) \cup (-1;\infty)$.

2. $A = \{3;5;7;10\}$;

$B = \{1;6;9;10;12\}$;

$E = \{1;3;5;6;7;9;10;11;12\}$.

Найти:

1) $A \cap \overline{B} = A \cap \{3;5;7;11\} = \{3;5;7\}$.

2) $\overline{A} \cup B = \{1;6;9;11;12\} \cup B = \{1;6;9;10;11;12\}$.

3) $\overline{A \cup B} = \overline{\{1;3;5;6;7;9;10;12\}} = \{11\}$.

4) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1;6;9;11;12\} \cup \{3;5;7;11\} =$

$= \{1;3;5;6;7;9;11;12\}$.

5) $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap \{3;5;7;11\}} = \overline{\{3;5;7\}} = \{1;6;9;10;11;12\}$.

6) $\overline{A \cap B} = \overline{\{10\}} = \{1;3;5;6;7;9;11;12\}$.

7) $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \{3;5;7\} \cup \{1;6;9;12\} =$

$= \{1;3;5;6;7;9;12\}$.

8) $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = \{1;6;9;10;11;12\} \cap \{3;5;7;10;11\} =$

$= \{10;11\}$.

9) $E \setminus (A \cup B) = E \setminus \{1;3;5;6;7;9;10;12\} = \{11\}$.

10) $E \setminus \left(A \cap \overline{B}\right) = E \setminus \{3;5;7\} = \{1;6;9;10;11;12\}$.

11) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \{1;6;9;11;12\} \cap \{3;5;7;11\} = \{11\}$.

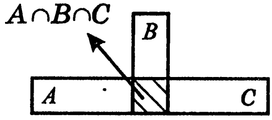
12) $\left(E \setminus \overline{A}\right) \cap \left(E \setminus \overline{B}\right) = A \cap B = \{10\}$.

3. Решите задачу.

В течение недели в кинотеатре шли фильмы A, B и C. Каждый из 40 школьников видел либо все три фильма, либо один из трех.

Фильм A видели 13 школьников.
Фильм B видели 16 школьников.
Фильм C видели 19 школьников.

Сколько школьников видели только по одному фильму?



Так как нет школьников, которые смотрели бы только два фильма,

$m(A \cap B) = m(A \cap B \cap C)$;
$m(A \cap C) = m(A \cap B \cap C)$;
$m(B \cap C) = m(A \cap B \cap C)$.

Таким образом,

$m(A) + m(B) + m(C) - 2m(A \cap B \cap C) = 40$;

$m(A \cap B \cap C) = \frac{13+16+19-40}{2}$;

$m(A \cap B \cap C) = 4$.

Тогда $m(A) - m(A \cap B \cap C) = 13 - 4 = 9$ – число школьников, видевших только фильм A;
Тогда $m(B) - m(A \cap B \cap C) = 16 - 4 = 12$ – число школьников, видевших только фильм B.
Тогда $m(C) - m(A \cap B \cap C) = 19 - 4 = 15$ – число школьников, видевших только фильм C.

Ответ: только фильм A видели 9 школьников;
только фильм B видели 12 школьников;
только фильм C видели 15 школьников;

только по одному фильму видели 36 школьников.

Решение зачетной карточки 1

1. $\{a_n\} - \div$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 + a_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \\ S_n = 195 \end{array}\right| \quad n = ?$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 4d = 14 \\ \dfrac{2a_1 + (12-1)d}{2} \cdot 12 = 129 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_1 + 3d = 7 \\ 12a_1 + 66d = 129 \end{cases} \Bigg| \cdot 12;$$

$$\begin{cases} 12a_1 + 36d = 84 \\ 12a_1 + 66d = 129 \end{cases} \quad \boxed{2} - \boxed{1}; \qquad \begin{cases} a_1 + 3d = 7 \\ d = 1{,}5 \end{cases};$$

$$30d = 45$$

$$\begin{cases} a_1 = 2{,}5 \\ d = 1{,}5 \end{cases}; \quad d = 1{,}5.$$

Вот теперь можно определить n.

Так как $\dfrac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2} \cdot n = S_n$,

то $\dfrac{2 \cdot 2{,}5 + (n-1)1{,}5}{2} \cdot n = 195$;

$n(5 + 1{,}5n - 1{,}5) = 390$;

$n(10 + 3n - 3) = 780$;

$3n^2 + 7n - 780 = 0$;

$$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 9360}}{6} = \frac{-7 \pm 97}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} n = 15 \\ n = -17\frac{1}{3} \notin \mathbb{N} \end{array}\right..$$

Ответ: $n = 15$.

2. Решите уравнение.

$2 + 5 + 8 + \ldots + x = 532.$

Если проанализировать левую часть уравнения, то ясно, что мы имеем дело с арифметической прогрессией, где

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ d = 3 \\ a_n = x \\ S_n = 532 \end{array}\right|$$

Найдем, сколько членов у этой прогрессии.

$n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$, т.е. $n = \dfrac{x - 2 + 3}{3}$. Итак, $n = \dfrac{x+1}{3}$, но

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, тогда $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{2+x}{2} = 532$. Решим это

уравнение $x^2 + 3x - 3190 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -58 \notin \mathbb{N} \\ x = 55 \end{array}\right.$.

Так как $n = \dfrac{55+1}{3} = 18\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.

Ответ: $\varnothing$.

3. $\{b_n\}$ – $\div\!\div$

$$\left.\begin{array}{l} S_2 = 4 \\ S_3 = 13 \end{array}\right| \quad S_5 = ?$$

$\begin{cases} b_1 + b_2 = 4 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 13 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} b_1(1 + q) = 4 \\ b_1(1 + q + q^2) = 13 \end{cases}$ $\boxed{2} : \boxed{1}$;

$\dfrac{1 + q + q^2}{1+q} = \dfrac{13}{4}$; $\quad 4q^2 - 9q - 9 = 0$;

$q_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+144}}{8} = \dfrac{9 \pm 15}{8}$; $\quad \left[\begin{array}{l} q = 3 \\ q = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

1) Пусть $q = 3$, тогда $b_1(1 + 3) = 4$; $b_1 = 1$;

$S_5 = \dfrac{b_1(1-q^5)}{1-q}$, т.е. $S_5 = \dfrac{1(1-3^5)}{1-3} = 121$.

2) Пусть $q = -\frac{3}{4}$, тогда $b_1\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 4;\quad b_1 = 16;$

$$S_5 = \frac{16\left(1-\left(-\frac{3}{4}\right)^5\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}, \text{т.е. } S_5 = 11\frac{5}{16}.$$

Ответ: 1) $S_5 = 11\frac{5}{16}$ при $q = -\frac{3}{4}$; $b_1 = 16$;

2) $S_5 = 121$ при $q = 3$; $b_1 = 1$.

4. $\{a_1\}; \{a_2\}; \{a_3\}$ – $\div$

$\{a_1; (a_2 - 1); (a_3 + 1)\}$ – $\because$	$a_1 = ?$
$a_1 + a_2 + a_3 = 21$	$a_2 = ?$ $a_3 = ?$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \end{aligned};$$

Так как для геометрической прогрессии $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$,

то $(a_2 - 1)^2 = a_1(a_3 + 1)$,

т.е. $(a_1 + d - 1)^2 = a_1(a_1 + 2d + 1)$.

Известно, что

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$a_1^2 + d^2 + 1 + 2a_1d - 2a_1 - 2d = a_1^2 + 2a_1d + a_1$;

$d^2 - 2d - 3a_1 + 1 = 0$, но $a_1 + a_2 + a_3 = 21$, т.е.

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21$. Получим систему

$$\begin{cases} a_1 + d = 7 \\ d^2 - 2d - 3a_1 + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 7 - d \\ d^2 - 2d - 3(7 - d) + 1 = 0 \end{cases}.$$

Решение уравнения $d^2 + d - 20 = 0$ $\left[\begin{aligned} d &= 4 \\ d &= -5 \end{aligned}\right.$.

1) Пусть $d = 4$, тогда $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_3 = 11$.

2) Пусть $d = -5$, тогда $a_1 = 12$, т.е. $a_1 = 12$; $a_2 = 7$; $a_3 = 2$.

Ответ: 1) $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_3 = 11$;

2) $a_1 = 12$; $a_2 = 7$; $a_3 = 2$.

5. $a_n = -2n^3 + 15n^2$.

Найти наибольший член последовательности.

Вычислим несколько первых значений и попытаемся понять характер изменений последовательности.

$a_1 = -2 + 15 = 13$

$a_2 = -16 + 60 = 44$

$a_3 = -2 \cdot 27 + 135 = 81$

$a_4 = -2 \cdot 64 + 240 = 112$

Похоже, последовательность возрастает.
Вычислим на всякий случай еще несколько значений.

$a_5 = -2 \cdot 125 + 375 = 125$; $a_6 = -2 \cdot 216 + 540 = 108$.

Вот неожиданность. Значит последовательность стала убывать. Если подумать, то это закономерно.

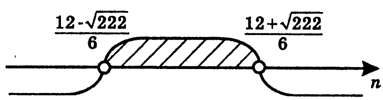
Рассмотрим промежуток монотонности $\{a_n\}$.

$a_{n+1} = -2(n+1)^3 + 15(n+1)^2$;

$a_{n+1} - a_n = -2(n+1)^3 + 15(n+1)^2 + n^3 - 15(n+1)^2 =$

$= -6n^2 + 24n + 13$.

$$n_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{222}}{6}$$



Итак, при $n > \frac{12 \pm \sqrt{222}}{6}$ $\{a_n\}$ убывает, причем ближайшее $n = 5$.

Тогда $a_5 = 125$ – наибольший член последовательности $\{a_n\}$.

6. $x\left(x^4 - 2(a + 2)x^2 + a^2\right) = 0$, где $\{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\} - \div$.

При каких значениях параметра a это возможно?
Найти корни при данном значении параметра a.

Так как один из корней равен нулю, возможны разные случаи.

1) Пусть $x_1 = 0$, тогда $\begin{array}{l} x_2 = d \\ x_3 = 2d \\ x_4 = 3d \\ x_5 = 4d \end{array}$.

Для $x^4 - 2(a+2)x^2 + a^2 = 0$

а) $f(d) = 0$
б) $f(2d) = 0$ $\quad \begin{cases} d^4 - 2(a + 2)d^2 + a^2 = 0 \\ 16d^4 - 8(a + 2)d^2 + a^2 = 0 \end{cases} \Bigg| \cdot 16$

$$-\begin{cases} 16d^4 - 32(a + 2)d^2 + 16a^2 = 0 \\ 16d^4 - 8(a + 2)d^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -24(a + 2)d^2 + 15a^2 = 0.}$$

Если $a = -2$, то уравнение имеет только 1 корень.

Пусть $a \neq -2$, тогда $d^2 = \dfrac{5a^2}{8(a+2)}$.

Подставим в первое уравнение системы

и получим $\left(\dfrac{5a^2}{8(a+2)}\right)^2 - 2(a + 2) \cdot \dfrac{5a^2}{8(a+2)} + a^2 = 0$.

Преобразовывая

$25a^4 - 80(a + 2)^2 \cdot a^2 + 64(a + 2)^2 a^2 = 0$

и полагая $a \neq 0$, имеем $25a^2 - 16(a + 2)^2 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} (5a + 4(a + 2)) = 0 \\ 5a - 4(a + 2) = 0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{8}{9} \\ a = 8 \end{array}\right.$.

Если $a = 0$, то $x^3(x^2 - 4) = 0$.

Есть только три различных корня.

а) $a = -\dfrac{8}{9}$, тогда $x^4 - 2 \cdot \dfrac{10}{9}x^2 + \dfrac{64}{81} = 0$;

$81x^4 - 180x^2 + 64 = 0$;

$(x^2)_{1,2} = \dfrac{90 \pm \sqrt{90^2 - 81 \cdot 64}}{81} = \dfrac{90 \pm 9 \cdot 6}{81}$;

$$\left[\begin{aligned} x^2 &= \frac{16}{9} \\ x^2 &= \frac{4}{9} \end{aligned}\right.$$, т.е. в итоге имеем $-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}$.

б) $a = 8$, тогда $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$; $\left[\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}\right.$;

т.е. $-4; -2; 0; 2; 4$.

В этом случае решений нет, так как $x_1 \neq 0$.

2) Пусть $x_2 = 0$, тогда $\begin{aligned} x_1 &= -d \\ x_3 &= d \\ x_4 &= 2d \\ x_5 &= 3d \end{aligned}$, решение аналогичное.

Вывод: при любых случаях всегда один из корней равен d или $2d$, поэтому при $x_3 = 0$ мы получим те же самые значения.

Ответ: 1) при $a = -\frac{8}{9}$ корни этого уравнения

$-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}$;

2) при $a = 8$ корни этого уравнения

$-4; -2; 0; 2; 4$.

7. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 14 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 84 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} b_1 &= ? \\ q &= ? \end{aligned}$$

Так как $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, то $\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 14 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 84 \end{cases}$;

$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 84 \end{cases}$; $\boxed{2} : \boxed{1}$;

$\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 14 \\ \dfrac{b_1^2(1+q^2+q^4)}{b_1(1+q+q^2)} = 6 \end{cases}$;

$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=14 \\ b_1\left(1-q+q^2\right)=6 \end{cases}$; $\boxed{1}:\boxed{2}$; $\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=14 \\ \dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2}=\dfrac{7}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right)=14 \\ 3+3q+3q^2=7-7q+7q^2 \end{cases}$,

тогда из второго уравнения получим $4q^2-10q+4=0$.

Решая, находим $\left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

1) Пусть $q=2$, тогда $b_1=\dfrac{14}{1+2+2^2}$; $b_1=2$.

2) Пусть $q=\dfrac{1}{2}$; тогда $b_1=\dfrac{14}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=8$.

Ответ: 1) $q=2$; $b_1=2$; 2) $q=\dfrac{1}{2}$; $b_1=8$.

8. $x^3+3x^2-6x+a=0$. Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию. При каких значениях параметра a это возможно?

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3+3x^2-6x+a$,

где x_1; x_2; x_3 – корни.

$\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right)(x-x_3)=$

$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1\cdot x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$.

Тогда $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3 \\ x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-6 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-a \end{cases}$. Эту систему

можно было получить сразу, если знать теорему Виета для кубического уравнения.

Для $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x \cdot x_3 = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

где x_1; x_2; x_3 – корни.

Так как $\begin{matrix} x_2 = x_1 \cdot q \\ x_3 = x_1 \cdot q^2 \end{matrix}$, то систему можно записать

$$\begin{cases} x_1 + x_1 q + x_1 q^2 = -3 \\ x_1^2 q + x_1^2 q^2 + x_1^2 q^3 = -6 \\ x_1^3 q^3 = -a \end{cases} \boxed{2} : \boxed{1}.$$ Получим

$$\begin{cases} x_1\left(1 + q + q^2\right) = -3 \\ x_1 q = 2 \\ \left(x_1 q\right)^3 = -a \end{cases}, \text{ тогда } a = -8;$$

$\dfrac{1+q+q^2}{q} = -\dfrac{3}{2}$; тогда $2q^2 + 5q + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} q = -2 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$;

$a = -8$, т.е. в данном случае

1) $q = -2$; $x_1 = \dfrac{-3}{1-2+4} = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -4$;

т.е. $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -4$;

2) $q = -\dfrac{1}{2}$; $x_1 = \dfrac{-3}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Ответ: при $a = -8$

1) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -4$;

2) $x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Примечание. Корни уравнения могут образовывать две разные геометрические прогрессии.

9. Вычислить $\sqrt{\underbrace{4444444444}_{10\ цифр} - \underbrace{88888}_{5\ цифр}}$.

$$2\sqrt{1111111111 - 2 \cdot 11111} =$$

$$= 2\sqrt{1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^9 - 2\left(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4\right)} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1(1-10^{10})}{1-10} - 2\left(\frac{1-10^5}{1-10}\right)} = 2\sqrt{\frac{10^{10}-2\cdot10^5+1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(10^5 - 1\right) = \frac{2\cdot 99999}{3} = 66666.$$

10. $\{b_n\} - \div\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - b_5 = 1{,}92 \\ b_1 + b_3 = 2{,}4 \end{array}\right| |q| < 1;$$

S – сумма бесконечно убывающей данной геометрической прогрессии.

Вычислите $\dfrac{S^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$

$$\begin{cases} b_1(1 - q^4) = 1{,}92 \\ b_1\left(1 + q^2\right) = 2{,}4 \end{cases} \boxed{1} : \boxed{2};$$

$$\begin{cases} (1 - q^2) = 0{,}8 \\ b_1\left(1 + q^2\right) = 2{,}4 \end{cases}; \quad \begin{cases} q^2 = \dfrac{1}{5} \\ b_1 = \dfrac{2{,}4}{1+\frac{1}{5}} \end{cases}; \quad \begin{cases} q^2 = \dfrac{1}{5} \\ b_1 = 2 \end{cases};$$

$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ – сумма бесконечно убывающей прогрессии.

1) Для $b_1 = 2$; $\quad q = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$;

$$S = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{10}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2};$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2 + \ldots = b_1^2\left(1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2n} + \ldots\right);$$

$$S_1 = \frac{b_1^2}{1 - q^2} = \frac{2^2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{20}{4} = 5;$$

$$\frac{S^2}{S_1} = \frac{0{,}25\left(30 + 10\sqrt{5}\right)}{5} = 1{,}5 + 0{,}5\sqrt{5}.$$

2) Если $b_1 = 2$; $q = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, то так как $q < 0$, то последовательность не является убывающей (она колеблющаяся).

Ответ: $\dfrac{S^2}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots} = 1{,}5 + 0{,}5\sqrt{5}.$

Решение зачетной карточки 2

1. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} S_n - a_2 = 103 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - a_2 - a_{n-1} = 87\frac{1}{2} \end{array}\right| \quad n = ?$$

$$\begin{cases} S_n - a_2 = 103 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - a_2 - a_{n-1} = 87{,}5 \end{cases} \qquad \boxed{1} - \boxed{2};$$

$$\begin{cases} a_n - a_2 = 15 \\ S_n - a_n = 88 \\ S_n - (a_1 + a_n) = 87{,}5 \end{cases} \qquad \boxed{2} - \boxed{3};$$

$$\begin{cases} a_n - a_2 = 15 \\ a_1 = 0{,}5 \\ \frac{(a_1 + a_n)}{2}n - (a_1 + a_n) = 87{,}5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + (n - 1)d - a_1 - d = 15 \\ a_1 = 0{,}5 \\ (a_1 + a_n)(n - 2) = 175 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (n - 2)d = 15 \\ a_1 = 0{,}5 \\ (2a_1 + (n - 1)d)(n - 2) = 175 \end{cases};$$

$$\begin{cases} d = \frac{15}{n-2} \\ a_1 = 0{,}5 \\ \left(1 + \frac{(n-1)15}{n-2}\right)(n - 2) = 175 \end{cases};$$

$$\begin{cases} d = \dfrac{15}{n-2} \\ a_1 = 0{,}5 \\ n - 2 + 15n - 15 = 175 \end{cases}; \quad \begin{cases} d = \dfrac{15}{n-2} \\ a_1 = 0{,}5 \\ 16n = 192 \end{cases}; \quad n = 12.$$

Ответ: $n = 12$.

2. Решите уравнение

$x - 1 + x - 3 + x - 5 + \ldots + x - 27 = 70$.

В записи левой части просматривается арифметическая прогрессия. Полагая, что это так, имеем $\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_n = x - 27 \\ d = -2 \end{cases}$,

тогда $n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$; $n = \dfrac{x-27-(x-1)+(-2)}{-2}$; $n = 14$;

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 70$, т.е. $\dfrac{x-1+x-27}{2} \cdot 14 = 70$;

$x - 1 + x - 27 = 10$;

$2x = 38$;

$x = 19$;

Ответ: $x = 19$.

3. $\{b_n\}$ — $\div\div$

$b_1 + b_4 = 11\frac{2}{3}$

$b_2 + b_3 = 10$

$S_5 = ?$

Преобразуем:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^3 = 11\frac{2}{3} \\ b_1 q + b_1 q^2 = 10 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1(1 + q^3) = 11\frac{2}{3} \\ b_1 q(1 + q) = 10 \end{cases} \quad \boxed{1} : \boxed{2};$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+q^3}{q(1+q)} = \dfrac{35}{30} \\ b_1 q(1 + q) = 10 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 - q + q^2 = \frac{7}{6} q \\ b_1 q(1 + q) = 10 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \\ b_1q(1+q) = 10 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{3}{2} \\ q = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \\ b_1q(1+q) = 10 \end{cases};$$

$$1)\ \begin{cases} q = 1{,}5 \\ b_1 = 2\dfrac{2}{3} \end{cases}; \qquad S_5 = \frac{\dfrac{8}{3}\cdot\left(1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^5\right)}{1-\dfrac{3}{2}} = 35\frac{1}{6};$$

$$2)\ \begin{cases} q = \dfrac{2}{3} \\ b_1 = 9 \end{cases}; \qquad S_5 = \frac{9\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5\right)}{1-\dfrac{2}{3}} = 23\frac{4}{9}.$$

Ответ: 1) $S_5 = 23\frac{4}{9}$ при $q = \frac{2}{3}$; $b_1 = 9$;

2) $S_5 = 35\frac{1}{6}$ при $q = 1{,}5$; $b_1 = 2\frac{2}{3}$.

4. $\{b_1; b_2; b_3\} - \div\div$

$(b_3 - 4); b_2; b_1 - \div$	$b_1 = ?$
$b_1 + b_2 + b_3 = 28$	$b_2 = ?$
	$b_3 = ?$

Так как для арифметической прогрессии $b_2 = \frac{b_1 + b_3 - 4}{2}$, то $2b_1q = b_1 + b_1q^2 - 4$. Система приобретает вид

$$\begin{cases} b_1(1 - 2q + q^2) = 4 \\ b_1 + b_1q + b_1q^2 = 28 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1(1 - q)^2 = 4 \\ b_1(1 + q + q^2) = 28 \end{cases} \qquad \boxed{1} : \boxed{2}; \qquad \frac{1-2q+q^2}{1+q+q^2} = \frac{1}{7},$$

т.е. $7q^2 - 14q + 7 = 1 + q + q^2$;

$6q^2 - 15q + 6 = 0$.

Сокращая, имеем $2q^2 - 5q + 2 = 0$;

$q = 2;\quad b_1(1-2)^2 = 4;\qquad b_1 = 4;$
$q = \frac{1}{2};\quad b_1(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 28;\quad b_1 = 16;$

1) $b_1 = 4;\ q = 2;\ b_2 = 8;\ b_3 = 16$;

2) $b_1 = 16;\ q = \frac{1}{2};\ b_2 = 8;\ b_3 = 4$.

Ответ: 1) $b_1 = 4;\ b_2 = 8;\ b_3 = 16$;

2) $b_1 = 16;\ b_2 = 8;\ b_3 = 4$.

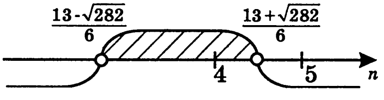
5. $a_n = -n^3 + 8n^2$. Найдите наибольший член последовательности.

Интересно, как же это сделать? Вычислять подряд все значения $a_1; a_2; a_3; \ldots.\ a_n$ это смешно. Попробуем вначале проанализировать промежутки монотонности последовательности a_n.

$a_{n+1} = -(n+1)^3 + 8(n+1)^2$;

$a_{n+1} - a_n = -(n+1)^3 + 8(n+1)^2 - n^3 - 8n^2 =$
$= -3n^2 + 13n + 7$;

$n_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{281}}{6}$



Значит, при $n > \frac{13 \pm \sqrt{281}}{6}$ $\{a_n\}$ убывает, а при $n < \frac{13 \pm \sqrt{281}}{6}$ – возрастает.

Вычислим значения a_n при ближайших к числу $\frac{13 \pm \sqrt{281}}{6}$ натуральных значениях n.

$a_4 = -64 + 8 \cdot 16 = 64;\quad a_5 = -125 + 8 \cdot 25 = 75.$

Итак, наибольшим членом последовательности $\{a_n\}$ является $a_5 = 75$.

Ответ: $a_5 = 75$ – наибольший член последовательности $a_n = -n^3 + 8n^2$.

6. $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0.$

При каких a уравнение имеет четыре корня, образующие арифметическую прогрессию? Найти эти корни.

Так как по теореме Виета для уравнений 4-й степени

$$\left(\begin{array}{c} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \dfrac{a_4}{a_0} \end{array}\right)$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (a + 10)^2$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_1 + d + x_1 + 2d + x_1 + 3d = 0 \\ x_1(x_1 + d)(x_1 + 2d)(x_1 + 3d) = (10 + a)^2 \end{cases}.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x_1^2 = 3(a + 10) \\ x_1^2 = -3(a + 10) \end{array}\right.$.

Подставляя x_1^2 в уравнение, получим

$$\left[\begin{array}{l} [3(a + 10)]^2 + (a - 3)3(a + 10) + (a + 10)^2 = 0 \\ [3(a + 10)]^2 - (a - 3)3(a + 10) + (a + 10)^2 = 0 \end{array}\right.;$$

при $a = -10$ уравнение не имеет четырех различных корней.

$$\left[\begin{array}{l} 9(a + 10) + 3(a - 3) + a + 10 = 0 \\ 9(a + 10) - 3(a - 3) + a + 10 = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} a = -7 \\ a = -15\frac{4}{7} \end{array}\right..$$

1) Пусть $a = -7$. Тогда уравнение принимает вид:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = 1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

и корни образуют арифметическую прогрессию.

2) Пусть $a = -15\frac{4}{7}$, тогда

$$x^4 + \left(-15\frac{4}{7} - 3\right)x^2 + \left(-15\frac{4}{7} + 10\right)^2 = 0;$$

$$x^4 - \frac{130}{7}x^2 + \left(\frac{39}{7}\right)^2 = 0; \quad 49x^4 - 910x^2 + 39^2 = 0;$$

$$\left(x^2\right)_{1,2} = \frac{455 \pm \sqrt{455^2 - 49\cdot 39^2}}{49} =$$

$$= \frac{5\cdot 91 \pm \sqrt{5^2\cdot 13^2\cdot 7^2 - 7^2\cdot 13^2\cdot 3^2}}{49} =$$

$$= \frac{5\cdot 91 \pm 13\cdot 7\sqrt{25-9}}{49} = \frac{5\cdot 13 \pm 13\cdot 4}{7}; \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{13\cdot 9}{7} \\ x^2 = \frac{13}{7} \end{array}\right.,$$

$$\text{тогда} \left[\begin{array}{l} x = 3\sqrt{\frac{13}{7}} \\ x = \sqrt{\frac{13}{7}} \\ x = -\sqrt{\frac{13}{7}} \\ x = -3\sqrt{\frac{13}{7}} \end{array}\right. .$$

Ответ: 1) при $a = -7$ $\quad x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = -3$;

2) при $a = -15\frac{4}{7}$ $\quad x_1 = 3\sqrt{\frac{13}{7}}$; $\quad x_2 = \sqrt{\frac{13}{7}}$;

$x_3 = -\sqrt{\frac{13}{7}}$; $\quad x_4 = -3\sqrt{\frac{13}{7}}$.

7. $\{b_n\}$ – $\div\!\div$

$$\begin{array}{l|l} b_1 + b_2 + b_3 = 12 & b_1 = ? \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 336 & q = ? \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 12 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 336 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1\left(1 + q + q^2\right) = 12 \\ b_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right) = 336 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} \dfrac{b_1\left(1+q^2+q^4\right)}{1+q+q^2} = 28 \\ b_1\left(1 + q + q^2\right) = 12 \end{cases},$$

т.е. $\begin{cases} b_1\left(1 - q + q^2\right) = 28 \\ b_1\left(1 + q + q^2\right) = 12 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$

$$\begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \dfrac{3}{7} \\ b_1\left(1 + q + q^2\right) = 12 \end{cases}.$$

Решим первое уравнение $3 - 3q + 3q^2 = 7 + 7q + 7q^2$.

$4q^2 + 10q + 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} q = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

1) $q = -2$; $b_1\left(1 - 2 + 2^2\right) = 12$; $b_1 = 4$;

2) $q = -\frac{1}{2}$; $b_1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 12$; $b_1 = 16$;

Ответ: 1) $q = -2$; $b_1 = 4$; 2) $q = -\frac{1}{2}$; $b_1 = 16$.

8. $x^3 - 3x^2 - 6x - b = 0$.

Решите уравнение, если корни образуют геометрическую прогрессию.

При каких b это возможно?

Так как по теореме Виета для

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{a_2}{a_0}, \text{ то} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = -6. \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = b \end{cases}$$

Учитывая, что $\{x_1;\ x_2;\ x_3\}$ – $\div\div$,

$$\begin{cases} x_1 + x_1q + x_1q^2 = 3 \\ x_1^2q + x_1^2q^2 + x_1^2q^3 = -6; \\ x_1^3q^3 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = 3 \\ x_1^2q(1 + q + q^2) = -6 \qquad \boxed{2} : \boxed{1}; \qquad x_1q = -2, \\ (x_1q)^3 = b \end{cases}$$

тогда $b = -8$.

Уравнение приобретает вид

$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0; \quad f(-2) = 0.$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x^2 - 6x + 8 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 5x + 4 \\ \quad -5x^2 - 6x & \\ \quad \underline{-5x^2 - 10x} & \\ \qquad\quad 4x + 8 & \\ \qquad\quad \underline{4x + 8} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Ответ: при $b = -8$

$x_1 = 1; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 4; \quad (q = -2).$

9. Вычислите $\sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999}$.

Так как

$$9999999999 = 9{\cdot}10^9+9{\cdot}10^8+9{\cdot}10^7+\ldots+9{\cdot}10^1+9{\cdot}10^0 =$$

$$= \frac{9\left(1-10^{10}\right)}{1-10}$$

$$99999 = 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 =$$

$$= \frac{9\left(1-10^5\right)}{1-10}, \text{ то } \sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999} =$$

$$= \sqrt{\frac{9\left(1-10^{10}\right)-2{\cdot}9\left(1-10^5\right)}{1-10}} = \sqrt{\frac{9\left(10^{10}-2{\cdot}10^5+1\right)}{9}} =$$

$$= 10^5 - 1 = 99999.$$

Ответ: $\sqrt{9999999999 - 2 \cdot 99999} = 99999$.

10. $\{b_n\} - \div\div;\ |q| < 1$

$S = 9$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$\underline{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = 40{,}5} \mid\ b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots = ?$

1) $S = \dfrac{b_1}{1-q}$; $\dfrac{b_1}{1-q} = 9$;

2) $S_1 = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 + \ldots$;

$$S_1 = \frac{b_1^2}{1 - q^2} = 40{,}5.$$

Решим систему

$$\begin{cases} b_1 = 9(1 - q) \\ b_1^2 = \dfrac{81}{2}\left(1 - q^2\right) \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} b_1 = 9(1-q) \\ b_1 = \frac{9}{2}(1+q) \end{cases}; \quad 9(1-q) = \frac{9}{2}(1+q).$$

Значит $\begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ b_1 = 6 \end{cases}$;

3) $S_2 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots + b_n^3 + \ldots;$

$$S_2 = \frac{b_1^3}{1-q^3};$$

$$S_2 = \frac{6^3}{1-\frac{1}{3^3}} = \frac{216 \cdot 27}{26} = 224\frac{4}{13}.$$

Ответ: $b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + \ldots + b_n^3 + \ldots = 224\frac{4}{13}$.

Решение зачетной карточки 3

1. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} S_3 = 6 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 10{,}5 \end{array}\right| \begin{array}{l} d = ? \\ a_1 = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 10{,}5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 6 \\ a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d = 10{,}5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + d = 2 \\ a_1 + 2d = 3{,}5 \end{cases} \quad \boxed{2} - \boxed{1}; \qquad \begin{cases} d = 1{,}5 \\ a_1 = 0{,}5 \end{cases}.$$

Ответ: $d = 1{,}5$; $a_1 = 0{,}5$.

2. $x^2 - 4x + a = 0$, где $x_1; x_2$ – корни;

$x^2 - 36x + b = 0$, где $x_3; x_4$ – корни;

$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\} - \div\div \qquad \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \end{array}$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_3 + x_4 = 36 \\ x_3 \cdot x_4 = b \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$.

Так как $\begin{cases} x_2 = x_1 \cdot q \\ x_3 = x_1 \cdot q^2 \\ x_4 = x_1 \cdot q^3 \end{cases}$, то $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 + x_1 q = 4 \\ x_1 \cdot x_1 q = a \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 + x_3 q = 36 \\ x_3 \cdot x_3 q = b \end{cases} \end{array}\right.$, тогда

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x_1(1 + q) = 4 \\ x_1^2 q = a \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 q^2(1 + q) = 36 \\ x_1^2 q^5 = b \end{cases} \end{array}\right.; \qquad \begin{cases} q^2 = 9 \\ x = \frac{4}{1+q} \end{cases}; \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -3 \\ x = -2 \end{cases} \end{array}\right..$$

1) $x = 1; \quad q = 3;$

$$a = x_1^2 q = 3; \quad b = x_1^2 q^5 = 3^5 = 243;$$

2) $x = -2; \quad q = -3;$

$$a = x_1^2 q = -12; \quad b = x_1^2 q^5 = -4 \cdot 3^5 = -972.$$

Ответ: 1) $a = 3; \quad b = 243;$

2) $a = -12; \quad b = -972.$

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые не делятся ни на три, ни на четыре.

На самом деле для решения задачи необходимо выяснить сумму двузначных чисел, делящихся или на три, или на четыре, а затем исключить их из суммы всех двузначных чисел.

1) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ a = 3 \end{array}\right| \quad n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \dfrac{99-12+3}{3} = 30;$

$$S_{30} = \frac{12+99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$$

A – множество двузначных чисел, кратных трем;
$S(A)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных трем.
$S(A) = 1665.$

2) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ a = 4 \end{array}\right| \quad n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \dfrac{96-12+4}{4} = 22;$

$$S_{22} = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 108 \cdot 11 = 1188.$$

B – множество двузначных чисел, кратных четырем;
$S(B)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных четырем;
$A \cap B$ – множество двузначных чисел, кратных 12.

3) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ a = 12 \end{array}\right| \quad n = \frac{96-12+12}{12} = 8;$

$S_8 = \frac{12+96}{2} \cdot 8 = 108 \cdot 4 = 432;$

$S(A \cap B)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных двенадцати.

Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, то

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B);$

$S(A \cup B) = 1665 + 1188 - 432 = 2421;$

$S(A \cup B)$ – сумма всех двузначных чисел, кратных или трем, или четырем.

4) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 99 \\ a = 1 \end{array}\right| \quad n = \frac{99-10+1}{1} = 90;$

$S_{90} = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 4905$ – сумма всех двузначных чисел.

5) $4905 - 2421 = 2484$ – сумма всех двузначных чисел, не делящихся ни на три, ни на четыре.

Ответ: искомая сумма 2484.

4. Решите уравнение

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x-2}{2x+1} + \ldots + \frac{1}{2x+1} = 3.$$

$$\frac{2x}{2x+1} + \frac{2x-1}{2x+1} + \frac{2x-2}{2x+1} + \ldots + \frac{1}{2x+1} = 3; \quad x \neq -\frac{1}{2};$$

$$2x + (2x - 1) + (2x - 2) + \ldots + 1 = 3(2x + 1).$$

Очевидно, что в левой части арифметическая прогрессия

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2x \\ a_n = 1 \\ d = -1 \end{array}\right| \quad n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad$ т. е. $n = \frac{1-2x-1}{-1} = 2x;$

$$\frac{2x+1}{2} \cdot 2x = 3(2x+1);$$

$$2x^2 + x = 6x + 3;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \notin D(y) \end{array}\right. .$$

Ответ: $x = 3$.

5. $\{b_n\} - \div\div$

$$\begin{array}{l|l} S_1 = b_1 + b_3 + b_5 + \ldots + b_{51} = 28 & \\ S_2 = b_2 + b_4 + \ldots + b_{52} = 7 & q = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} S_1 = b_1\left(1 + q^2 + q^4 + \ldots. + q^{50}\right) = 28 \\ S_2 = b_1 q\left(1 + q^2 + q^4 + \ldots. + q^{50}\right) = 7 \end{cases} \qquad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$q = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $q = \frac{1}{4}$.

6. $\left\{5^{5x}; 10^{\frac{3x^2+3}{4}}; 32^x\right\} - \div\div \qquad x = ?$

Так как мы имеем дело с геометрической прогрессией, то $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$, т.е. $\left(10^{\frac{3x^2+3}{4}}\right)^2 = 5^{5x} \cdot 2^{5x}$.

Тогда $10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 5^{5x} \cdot 2^{5x}$, т.е. $\frac{3x^2+3}{2} = 5x$;

$$3x^2 - 10x + 3 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x = 3$; $x = \frac{1}{3}$.

7. $1 + 11 + 111 + \ldots$

$S_n = ?$

Данный ряд чисел можно представить так:

$$S_n = 1 + (1 + 10) + (1 + 10 + 10^2) + (1 + 10 + 10^2 + 10^3) + \ldots$$

$$\ldots + (1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}).$$

Очевидно, мы имеем дело с суммой членов геометрической прогрессии.

$$S_n = \frac{1(1-10^1)}{1-10} + \frac{1(1-10)^2}{1-10} + \frac{1(1-10^3)}{1-10} + \ldots + \frac{1(1-10^n)}{1-10}.$$

Запишем в обратном порядке.

$$S_n = \frac{1}{9}(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^2 + 10^1 - n).$$

$$S_n = \frac{1}{9}\left(\frac{10(1-10^n)}{1-10} - n\right) = \frac{1}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)$$

(n – число единиц в сумме).

Ответ: $S_n = \frac{1}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)$.

8. Решите уравнение, полагая, что левая часть – сумма бесконечно убывающей прогрессии.

$x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + .. = 1 - 3x$.

$x = ?$

$\boxed{S = \frac{b}{1-q}}$ – формула суммы бесконечно убывающей прогрессии.

Рассмотрим левую часть.

$$L = x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + \ldots =$$

$$= x^2\left(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots\right) = x^2 \cdot \frac{1}{1-3x},$$

т.е. уравнение приобретает вид $\frac{x^2}{1-3x} = 1 - 3x$.

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 - 3x \\ x = 3x - 1 \end{array}\right.; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{1}{2}$.

9. $x_n = \frac{3n-2}{6n+3}$.

Выясните:

1. Монотонность;
2. Ограниченность;
3. Докажите существование предела последовательности (по определению).

1) $x_{n+1} = \frac{3(n+1)-2}{6(n+1)+3} = \frac{3n+1}{6n+9}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3n+1}{6n+9} - \frac{3n-2}{6n+3} =$$

$$= \frac{(3n+1)(2n+1)-(3n-2)(2n+3)}{3(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{6n^2+5n+1-6n^2-5n+6}{3(2n+1)(2n+3)} = \frac{7}{3(2n+1)(2n+3)} > 0,$$

т.е. для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} > x_n$, значит последовательность $\{x_n\}$ строго возрастающая.

2) $x_n = \frac{3n-2}{6n+3}$. Вычислим несколько значений последовательности: $x_1 = \frac{1}{9}$; $x_2 = \frac{4}{15}$; $x_3 = \frac{7}{21}$; ... ; $x_{10} = \frac{28}{63}$;...; $x_{100} = \frac{298}{603}$. Так как $\{x_n\}$ возрастающая, то для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geqslant \frac{1}{9}$, т.е. ограничена снизу. Похоже, что $x_n \to 0{,}5$. Проверим $x_n < 0{,}5$ или нет.

$$\frac{3n-2}{6n+3} - \frac{1}{2} = \frac{6n-4-6n-3}{2 \cdot 3(2n+1)} = -\frac{7}{6(2+1)} < 0.$$

Действительно, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < 0{,}5$.

Итак, для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in \left[\frac{1}{9}; 0{,}5\right)$.

Мы доказали ограниченность $\{x_n\}$.

3) Попытаемся доказать, что $x_n \to 0{,}5$, т.е. для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \Rightarrow \mid x_n - 0{,}5 \mid < \varepsilon$, тогда

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{6(2n+1)} < \varepsilon; & \text{для } \forall n \in \mathbb{N} - \text{это истинно;} \\ -\dfrac{7}{6(2n+1)} > -\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{7}{6(2n+1)} < \varepsilon. \end{cases}$$

Так как $\varepsilon > 0$ и $2n + 1 > 0$, то $\frac{7}{6\varepsilon} < 2n + 1$;

т.е. $\frac{7-6\varepsilon}{12\varepsilon} < n$. Пусть $N_0 = \left|\left[\frac{7-6\varepsilon}{12\varepsilon}\right]\right| + 1$, тогда для

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \left(N_0 = \left|\left[\frac{7-6\varepsilon}{12\varepsilon}\right]\right| + 1\right) \Big| \forall n > N_0 \Rightarrow |x_n - 0{,}5| < \varepsilon$.

Это по определению значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0{,}5$,

что и требовалось доказать.

10. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{(n+1)(n-3)(n+4)} =$$

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

тождество Архимеда.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)(n-3)(n+4)} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)}{(n-3)(n+4)} =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{1}{6} \frac{2+0}{(1-0)(1+0)} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{(n+1)(n-3)(n+4)} = \frac{1}{3}$.

Решение зачетной карточки 4

1. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 + a_4 + a_6 = 36 \\ a_2 \cdot a_3 = 54 \end{array}\right| \begin{array}{l} a_1 = ? \\ d = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 36 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 12 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ (12 - 3d + d)(12 - 3d + 2d) = 54 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ 2(6 - d)(12 - d) = 54 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ d^2 - 18d + 72 = 27 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ d^2 - 18d + 45 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 = 12 - 3d \\ \left[\begin{array}{l} d = 3 \\ d = 15 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} d = 15 \\ a_1 = -33 \end{cases} \end{array}\right.;$$

Ответ: 1) $a_1 = 3$; $d = 3$;

2) $a_1 = -33$; $d = 15$.

2. $x^2 - 6x + a = 0$, где x_1; x_2 – корни;

$x^2 - 24x + b = 0$, где x_3; x_4 – корни;

$$\left.\{x_1; x_2; x_3; x_4\} - \div\div \right| \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \end{array}$$

По теореме Виета $\begin{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 + x_4 = 24 \\ x_3 \cdot x_4 = b \end{cases} \end{cases}.$

Так как $\begin{cases} x_2 = x_1 q \\ x_3 = x_1 q^2 \\ x_4 = x_1 q^3 \end{cases}$, то $\begin{cases} x_1(1+q) = 6 \\ x_1^2 \cdot q = a \\ x_1 q^2 (1+q) = 24 \\ x_1^2 q^5 = b \end{cases}$;

$\begin{cases} x_1(1+q) = 6 \\ x_1 q^2 (1+q) = 24 \end{cases}$ $\boxed{2} : \boxed{1}$; $\begin{cases} q^2 = 2 \\ x = \dfrac{6}{1+q} \end{cases}$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} q = -2 \\ x = -6 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $x = 2$; $q = 2$;

$a = x_1^2 q = 8$; $b = x_1^2 q^5 = 2^7 = 128$.

2) $x = -6$; $q = -2$;

$a = x_1^2 q = -72$; $b = x_1^2 q^5 = -1152$.

Ответ: 1) $a = 8$; $b = 128$;
2) $a = -72$; $b = -1152$.

3. Найти сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на шесть или на семь.

Пусть A – множество всех двузначных чисел, кратных шести;

B – множество всех двузначных чисел, кратных семи.

1) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 6 \end{array}\right|$ $n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$; $n = \dfrac{96-12+6}{6} = 15$;

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15;$$

$$S_{15} = \frac{12+96}{2} \cdot 15 = 54 \cdot 15 = 810.$$

Сумма чисел, делящихся на 6, $S(A) = 810$.

$$2)\quad \left.\begin{array}{l} a_1 = 14 \\ a_n = 98 \\ d = 7 \end{array}\right| \quad n = \frac{98-14+7}{7} = 13;$$

$$S_{13} = \frac{14+98}{2} \cdot 13 = 56 \cdot 13 = 728.$$

Сумма всех двузначных чисел, кратных семи, $S(B) = 728$.

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} a_1 = 42 \\ a_n = 84 \\ d = 42 \end{array}\right| \quad n = \frac{84-42+42}{42} = 2;$$

$$S_2 = \frac{42+84}{2} \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126.$$

$S(A \cap B) = 126$ – сумма всех двузначных чисел, кратных 42.

Так как $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$;

$S(A \cup B) = 810 + 728 - 126 = 1412$.

Ответ: сумма всех двузначных чисел, кратных или шести, или семи, равна 1412.

4. Решите уравнение

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{2x-2}{2x} + \frac{2x-3}{2x} + \ldots + \frac{1}{2x} = 3.$$

$$2x - 1 + 2x - 2 + 2x - 3 + \ldots + 1 = 6x \ (x \neq 0).$$

Понимая, что левая часть уравнения связана с арифметической прогрессией, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2x - 1 \\ a_n = 1 \\ d = -1 \end{array}\right| \quad n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{1-(2x-1)-1}{-1} = 2x - 1,$$

тогда $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$,

т.е. $\dfrac{2x-1+1}{2}(2x - 1) = 6x$; $2x^2 - 7x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \quad \text{но} \quad x \neq 0 \\ x = 3{,}5 \end{array}\right..$$

Ответ: $x = 3{,}5$.

5. $\underline{9 + 99 + 999 + \ldots + \ldots = S_{100}}\Big|\; S_{100} = ?$

Очевидно, имеем дело с суммами геометрических прогрессий, где $q = 10$.

Представим левую часть

$$9 + 99 + 999 + \ldots =$$
$$= 9 + (9 + 9 \cdot 10^1) + (9 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2) + \ldots$$
$$\ldots + (9 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 + \ldots + 9 \cdot 10^{99}) =$$
$$= 9 + \frac{9(1-10^2)}{1-10} + \frac{9(1-10^3)}{1-10} + \ldots + \frac{9(1-10^{100})}{1-10} =$$
$$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots + 10^{100} - 1 =$$
$$= 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{100} - 100 = \frac{10(1-10^{100})}{1-10} - 100 =$$
$$= \frac{1}{9}(10^{101} - 10 - 900) = \frac{1}{9}(10^{101} - 910).$$

Ответ: $S_{100} = \frac{1}{9}(10^{101} - 910)$.

6. $\{b_n\}$ – $\div\!\div$

$$\left.\begin{array}{l} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 189 \\ \underline{b_1 + b_2 + b_3 = -9} \end{array}\right| \begin{array}{l} b_1 = ? \\ q = ? \end{array}$$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 189 \\ b_1 + b_1q + b_1q^2 = -9 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_1^2(1 + q^2 + q^4) = 189 \\ b_1(1 + q + q^2) = -9 \end{cases} \quad \boxed{2} : \boxed{1}.$$

Так как $1 + q^2 + q^4 = (1 + q + q^2)(1 - q + q^2)$, то

$$\begin{cases} b_1(1 - q + q^2) = -21 \\ b_1(1 + q + q^2) = -9 \end{cases} \qquad \boxed{2} : \boxed{1};$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \dfrac{3}{7} \\ b_1(1 + q + q^2) = -9 \end{cases}$$

Решим первое уравнение $3 - 3q + 3q^2 = 7 + 7q + 7q^2$;

$$4q^2 + 10q + 4 = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} q = -2; \quad b_1 = -3 \\ q = -\frac{1}{2}; \quad b_1 = -12 \end{array}\right. .$$

Ответ: 1) $b_1 = -3$; $q = -2$;

2) $b_1 = -12$; $q = -\frac{1}{2}$.

7. $\{a; b; c\} - \div\div$

$\{(a - 1); b; (c - 1)\} - \div$

$\{(a - 1); (b - 2); (c - 4)\} - \div\div$

$a = ?$
$b = ?$
$c = ?$

Так как $\{a; b; c\} - \div\div$, то $\begin{array}{l} b = aq \\ c = aq^2 \end{array}$. Из условий

$\{(a - 1); b; (c - 1)\} - \div$, тогда $2b = a - 1 + c - 1$, т.е.

$2aq = a + aq^2 - 2$; $\quad aq^2 - 2aq + a - 2 = 0$.

Из условий также следует, что

$\{(a - 1); (b - 2); (c - 4)\} - \div\div$,

т.е. $(b - 2)^2 = (a - 1)(c - 4)$,

значит $(aq - 2)^2 = (a - 1)(aq^2 - 4)$.

Преобразуя, имеем

$a^2q^2 - 4aq + 4 = a^2q^2 - aq^2 - 4a + 4$;

$aq^2 - 4aq + 4a = 0$. Полагая $a \neq 0$, получим

$q^2 - 4q + 4 = 0$, т.е. $q = 2$.

Так как $aq^2 - 2aq + a - 2 = 0$, то

$a \cdot 4 - 4a + a - 2 = 0$; $a = 2$.

Итак, $a = 2$; $b = 2 \cdot 2 = 4$; $c = 2 \cdot 2^2 = 8$.

Ответ: $a = 2; b = 4; c = 8$.

8. Решите уравнение

$x^2 - 2x^3 + 4x^4 - 8x^5 + \ldots = 2x + 1$

$x^2(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots) = 2x + 1$ – в левой части четко просматривается сумма бесконечно убывающей прогрессии. Так как $S = \frac{b_1}{1-q}$ для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то

$x^2\left(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots\right) = 2x + 1 \quad (|2x| < 1)$.

Тогда уравнение приобретает вид $x^2 \cdot \frac{1}{1+2x} = 2x + 1$;

$(2x + 1)^2 - x^2 = 0$; $(2x + 1 + x)(2x + 1 - x) = 0$;

$$(3x + 1)(x + 1) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

9. $x_n = \frac{4n+2}{8n-3}$

Выясните:

1. Монотонность
2. Ограниченность
3. Докажите существование предела последовательности (по определению).

1) $x_{n+1} = \frac{4(n+1)+2}{8(n+1)-3} = \frac{4n+6}{8n+5}$;

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+6}{8n+5} - \frac{4n+2}{8n-3} =$$

$$= \frac{(4n+6)(8n-3)-(4n+2)(8n+5)}{(8n+5)(8n-3)} =$$

$$= -\frac{28}{(8n+5)(8n-3)} < 0,$$

т.е. $\{x_n\}$ – убывающая последовательность.

2) Так как $\{x_n\}$ убывающая,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{5} = 1{,}2;\ x_n \leqslant \frac{6}{5} \\ x_n = \frac{4n+2}{8n-3} > 0 \end{array}\right| \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in (0;1{,}2].$$

3) Вычислим первые значения членов последовательности.

$$x_2 = \frac{10}{13}; \quad x_3 = \frac{2}{3}; \quad x_{10} = \frac{42}{77}; \quad x_{100} = \frac{402}{797}.$$

Возникает гипотеза, что $\left(x \to \frac{1}{2}\right)$ по определению

для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \mid \forall n > N_0 \ \Rightarrow \left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, если

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

$$x_n - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{8n-3} - \frac{1}{2} = \frac{8n+4-8n+3}{2(8n-3)} = \frac{7}{2(8n-3)};$$

$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$; значит $\left|\frac{7}{2(8n-3)}\right| < \varepsilon$;

$$\begin{cases} \frac{7}{2(8n-3)} < \varepsilon \\ \frac{7}{2(8n-3)} > -\varepsilon \quad \text{для } (\forall n \in \mathbb{N} - \text{верно}). \end{cases}$$

Тогда $\frac{7}{2(8n-3)} < \varepsilon$; значит $\frac{7}{2\cdot\varepsilon} < 8n - 3$ $(\varepsilon > 0)$;

$\frac{7}{2\varepsilon} + 3 < 8n$; $\quad n > \frac{7+6\varepsilon}{16\varepsilon}$, тогда $N_0 = \left[\frac{7+6\varepsilon}{16\varepsilon}\right] + 1$.

Получили, что для

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N_0\left(N_0 = \left[\frac{7+6\varepsilon}{16\varepsilon}\right] + 1\right)\middle|\forall n > N_0 \ \Rightarrow\ \left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{8n-3} = \dfrac{1}{2}$,

что и требовалось доказать.

10. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots)^2}{(2+4+6+8+\ldots)^3}$.

1) $S' = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \ldots =$

$= 4\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 + \ldots\right);$

$S'_n = 4\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1);$

2) $S'' = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots).$

$S''_n = 2\cdot\dfrac{1+n}{2}\cdot n = n(n+1);$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots)^2}{(2+4+6+8+\ldots)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(S'_n)^2}{(S''_n)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)\right)^2}{(n(n+1))^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{9}n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{n^3(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{9}\cdot\frac{(n+1)^2(2n+1)^2}{n(n+1)^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4(2n+1)^2}{9n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}{9n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{4+0+0}{1+0} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots)^2}{(2+4+6+8+\ldots)^3} = 1\dfrac{7}{9}$.

Решение зачетной карточки 5

1. Решите уравнение $3 + 7 + 11 + \ldots + x = 136$.
Очевидно, что левая часть уравнения связана с суммой членов арифметической прогрессии.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_n = x \\ d = 4 \end{array}\right| \qquad n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}; \quad n = \frac{x-3+4}{4} = \frac{x+1}{4};$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{3+x}{2} \cdot \frac{x+1}{4} = 136.$$

Получим квадратное уравнение

$$(3 + x)(x + 1) = 136 \cdot 8;$$

$$x^2 + 4x - 1085 = 0;$$
$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 1085} = -2 \pm 33;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 31 \\ x = -35, \ \text{но } x > 0 \ \text{(из условий уравнения).} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 31$.

2. $\{b_n\}$ – ∺

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 7 \\ \{b_1; b_2; (b_3 - 1)\} - \div \\ S_n = 255 \end{array}\right| \quad n = ?$$

Так как $\{b_n\}$ – ∺, то $\begin{array}{l} b_2 = b_1 \cdot q \\ b_3 = b_1 \cdot q^2 \end{array}$.

Запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 7 \\ 2b_1 q = b_1 + b_1 q^2 - 1; \\ S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 255 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=7 \\ b_1(1-2q+q^2)=1 \qquad \boxed{1} : \boxed{2}; \\ \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=255 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=7 \\ b_1=\dfrac{1}{(1-q)^2} \\ \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=255 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 2q^2-5q+2=0 \\ b_1=\dfrac{1}{(1-q)^2} \\ \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=255 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ b_1=\dfrac{1}{(1-q)^2} \\ \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}=255 \end{cases};$$

1) $$\begin{cases} q=2 \\ b_1=1 \\ \dfrac{1-2^n}{1-2}=255 \end{cases}; \qquad \begin{cases} q=2 \\ b_1=1 \\ 2^n=256 \end{cases};$$

$$\begin{cases} q=2 \\ b_1=1 \\ n=8\ (2^8=256) \end{cases};$$

2) $$\begin{cases} q=\dfrac{1}{2} \\ b_1=4 \\ \dfrac{4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=255 \end{cases}; \qquad \begin{cases} q=\dfrac{1}{2} \\ b_1=4 \\ 2^{3-n}=263; \quad n\notin\mathbb{N} \end{cases}.$$

Ответ: $n=8$.

3. $\{a; b; c\}$ – $\div\!\!\div$

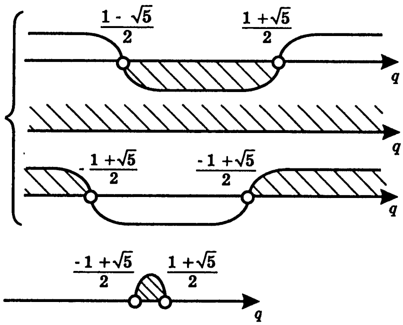
$$\left.\begin{array}{l} a;\ b;\ c \in \mathbb{N} \\ a;\ b;\ c \text{ – стороны треугольника} \\ a \cdot b \cdot c = 216 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

Так как $\{a; b; c\}$ – $\div\!\!\div$, то $\begin{array}{l} b = aq \\ c = aq^2 \end{array}$.

Так как a, b, c – стороны треугольника,

то $\begin{cases} a + b > c \\ a + c > b, \\ b + c > a \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} a + aq > aq^2 \\ a + aq^2 > aq; \\ aq + aq^2 > a \end{cases}$

тогда $\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \\ q^2 - q + 1 > 0. \\ q^2 + q - 1 > 0 \end{cases}$



Так как $a; b; c \in \mathbb{N}$, то $q > 0$ и $q \in \mathbb{N}$;

$q = 1 \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ – других натуральных q нет.

Тогда $a = b = c$, т.е. $a^3 = 216$, т.е. $a = 6$.

Ответ: $a = 6$; $b = 6$; $c = 6$.

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{342} = \frac{1}{342}\cdot(1+3+5+\ldots+2n-1).$$

Левую часть представим в виде

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{342} = \frac{1}{18} - \frac{1}{19}$$

Итак, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{342} = 1 - \frac{1}{19}$;

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{342} = \frac{18}{19}.$$

Правая часть, как видно, связана с суммой членов арифметической прогрессии $(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_n = 2n - 1 \\ d = 2 \end{array}\right| \quad n = \frac{a_n - a_1 + d}{2}; \qquad n = \frac{2n-1-1+2}{2} = n;$$

$$S_n = \frac{1+2n-1}{2}\cdot n = n^2.$$

Тогда $\frac{18}{19} = \frac{n^2}{342}$;

$$\frac{18\cdot18\cdot19}{19} = n^2; \quad 18^2 = n^2; \qquad n = 18.$$

Ответ: $n = 18$.

5. Найти сумму всех двузначных, чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5. Выясним, чему равна сумма всех двузначных чисел, делящихся или на 3, или на 5, а затем исключим из суммы всех двузначных чисел.

1) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ d = 3 \end{array}\right| \quad n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{2}; \qquad n = \dfrac{99-12+3}{3} = 30.$

Пусть A – множество всех двузначных чисел, делящихся на три.

Тогда $S_{30} = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$

$S_{30} = \dfrac{12+99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$

Сумма всех двузначных чисел, делящихся на три, $S(A) = 1665$.

2) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 95 \\ d = 5 \end{array}\right| \quad n = \dfrac{95-10+5}{5} = 18.$

B – множество всех двузначных чисел, делящихся на пять, тогда

$S_{18} = \dfrac{10+95}{2} \cdot 18 = 105 \cdot 9 = 945.$

$S(B) = 945$ – сумма всех двузначных чисел, делящихся на пять.

3) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 15 \\ a_n = 90 \\ d = 15 \end{array}\right| \quad n = \dfrac{90-15+15}{15} = 6.$

$A \cap B$ – множество всех двузначных чисел, делящихся на пятнадцать, тогда

$S_6 = \dfrac{15+90}{2} \cdot 6 = 105 \cdot 3 = 315.$

$S(A \cap B) = 315$ – сумма всех двузначных чисел, делящихся на пятнадцать.

4) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$;

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$;

$S(A \cup B) = 1665 + 945 - 315 = 2295$;

$A \cup B$ – множество всех двузначных чисел, делящихся или на три, или на пять.

5) $S = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905$ – сумма всех двузначных чисел.

$4905 - 2295 = 2610$ – сумма всех двузначных чисел, не делящихся ни на три, ни на пять.

Ответ: искомая сумма – 2610.

6. Даны четыре числа $a; b; c; p$.

$$\begin{array}{l|l} \{a; b; c\} - \div & a = ? \\ \{b; c; p\} - ∺ & b = ? \\ a + b + c = 54 & c = ? \\ b + c + p = 126 & p = ? \end{array}$$

Так как $\{a; b; c\} - ∺$, то $\begin{cases} b = a + d \\ c = a + 2d \end{cases}$;

1) так как $\{b; c; p\} - ∺$; $\begin{matrix} c = b \cdot q \\ p = bq^2 \end{matrix}$;

$$\begin{cases} a + a + d + a + 2d = 54 \\ b + bq + bq^2 = 126 \\ b = a + d \end{cases}; \quad \begin{cases} a + d = 18 \\ b(1 + q + q^2) = 126 \\ b = a + d \end{cases}.$$

Тогда $18(1 + q + q^2) = 126$; $q^2 + q - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = -3 \end{array}\right.$.

2) $q = 2;\ b = 18;\ c = b \cdot q;\ c = 36;$

$d = c - b = 36 - 18 = 18;$

$a = b - d;\ a = 0;$

$p = c \cdot q;\ p = 36 \cdot 2 = 72.$

Итак, $a = 0;\ b = 18;\ c = 36;\ p = 72.$

3) $q = -3;\ b = 18;\ c = b \cdot q;\ c = -54;$

$d = c - b = -54 - 18 = -72;$

$a = b - d;\ a = 18 - (-72) = 90;$

$p = c \cdot q;\ p = -54 \cdot (-3) = 162,$

т.е. $a = 90;\ b = 18;\ c = -54;\ p = 162.$

Ответ: 1) $a = 0;\ b = 18;\ c = 36;\ p = 72;$

2) $a = 90;\ b = 18;\ c = -54;\ p = 162.$

7. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)} - n\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)} - n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)} - n\right) = \frac{1}{2}$.

8. Вычислите.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}\right) =$$

$$= 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)} = 2^1.$$

Так как $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$,

то при $n \to \infty$ мы имеем дело с суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}; \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}\right) = 2.$

9. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 25 \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{100}}+\sqrt{a_{101}}} = 1 \end{array}\right| \; d = ?$$

Домножим на сопряженное выражение числитель и знаменатель каждой дроби левой суммы.

$$\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{a_3-a_4} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{100}}-\sqrt{a_{101}}}{a_{100}-a_{101}} = 1.$$

Так как $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \ldots = a_{100} - a_{101} = -d$, то

$$\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_4} + \ldots + \sqrt{a_{100}} - \sqrt{a_{101}} = -d,$$

тогда $\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{101}} = -d$.

Так как $a_1 = 25$, то $\sqrt{25} + d = \sqrt{a_{101}}$;

$a_{101} = a_1 + 100d$;

$$\left.\begin{array}{l} (5 + d)^2 = a_{101} \\ 25 + 10d + d^2 = 25 + 100d \end{array}\right| \; d^2 - 90d = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = 90 \end{array}\right..$$

Ответ: $d = 90, d = 0$.

10. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}\,. \qquad (n \text{ – радикалов}).$$

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$.

$$x_1 = \sqrt{c}$$
$$x_2 = \sqrt{c+\sqrt{c}} \qquad\qquad (x_n > 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \sqrt{c + x_{n-1}}$$

Докажем, что она имеет предел.

Докажем, что она возрастающая.

Рассмотрим

$$x_2 - x_1 = \sqrt{c+\sqrt{c}} - \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+\sqrt{c}}+\sqrt{c}} > 0,$$

тогда $x_2 > x_1$;

$$x_3 - x_2 = \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}} - \sqrt{c+\sqrt{c}} =$$

$$= \sqrt{c+x_2} - \sqrt{c+x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{c+x_2}+\sqrt{c+x_1}} > 0,$$

значит $x_3 > x_2$.

Аналогично

$x_4 - x_3 > 0$;

$x_n - x_{n-1} > 0$.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{c+x_n} - \sqrt{c+x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{c+x_n}+\sqrt{c+x_{n-1}}} > 0,$$

тогда, так как $x_n > x_{n-1}$, то $x_{n+1} > x_n$.

Итак, $\{x_n\}$ – возрастающая. Более строго это можно доказать только методом математической индукции.

Выясним, что отсюда следует.

Так как $x_{n+1} > x_n$ и $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$,

то $\sqrt{c + x_n} > x_n$, значит $c + x_n > x_n^2$,

т.е. $x_n^2 - x_n - c < 0$; $\qquad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$;

$$\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2} < x_n < \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

А это значит, что $\{x_n\}$ ограничена (так как c – постоянная), а по теореме Вейерштрасса любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$,

так как $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$, то в предельном варианте

$a = \sqrt{c + a}$; $\qquad a^2 = c + a$; $\qquad a^2 - a - c = 0$;

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

Возвращаясь к примеру, видим, что $c = 2$, тогда

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4\cdot 2}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} = 2$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} = 2$.

Решение зачетной карточки 6

1. Решите уравнение

$$\left(x^3+1\right)+\left(2x^3+3\right)+\left(3x^3+5\right)+\ldots+\left(10x^3+19\right)=45.$$

Левую часть можно представить

$$\left(x^3+2x^3+3x^3+\ldots+10x^3\right)+\left(1+3+5+\ldots+19\right)=45.$$

Очевидно, что в левой части мы имеем дело с суммами арифметических прогрессий.

$$S_1=x^3+2x^3+3x^3+\ldots+10x^3;$$

$$S_1=\frac{x^3+10x^3}{2}\cdot 10=11x^3\cdot 5=55x^3;$$

$$S_2=1+3+5+\ldots+19;$$

$$S_2=\frac{1+19}{2}\cdot 10=20\cdot 5=100.$$

Уравнение приобретает вид $55x^3+100=45$;

$x^3=-1; \qquad x=-1.$

Ответ: $x=-1$.

2. $\{a_n\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} S_3=54 \\ \{a_1;\, a_2-9;\, a_3-6\} \;-\; \div\div \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} a_1=? \\ d=? \end{array}$$

Так как $b_2^2=b_1\cdot b_3$,

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=54 \\ (a_2-9)^2=a_1(a_3-6) \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d=54 \\ (a_1+d-9)^2=a_1(a_1+2d-6) \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1+d=18 \\ 81=a_1(12+d) \end{cases}; \quad \begin{cases} d=18-a_1 \\ 81=a_1(12+18-a_1) \end{cases};$$

$$a_1^2-30a_1+81=0; \quad \left[\begin{array}{l} a_1=3\;;\; d=15 \\ a_1=27;\; d=-9 \end{array}\right..$$

Ответ: 1) $a_1=3$; $\quad d=15$;

2) $a_1=27$; $\quad d=-9$.

3. $\{a; b; c\}$ – $\div$

$$\left.\begin{array}{l} a;\ b;\ c \in \mathbb{N} \\ a;\ b;\ c \text{ – стороны треугольника} \\ a + b + c = 15 \end{array}\right| \begin{array}{l} a = ? \\ b = ? \\ c = ? \end{array}$$

Из условий следует

$$\begin{array}{l} b = a + d \\ c = a + 2d \end{array};\quad \begin{cases} a + a + d > a + 2d \\ a + a + 2d > a + d \\ a + d + a + 2d > a \end{cases}$$

(правило треугольника);

$$\begin{cases} a > d \\ a > -d \\ a > -3d \end{cases}.$$

Но $a + b + c = 15$,

т.е. $a + a + d + a + 2d = 15$;

$a + d = 5$.

Проанализируем:

так как $a;\ b;\ c \in \mathbb{N}$ и $a > d$, то

$a = 2; d = 1$, тогда $2 + 1 = 5$ – ложь;

$a = 3; d = 1$, тогда $3 + 1 = 5$ – ложь;

$a = 3; d = 2$, тогда $3 + 2 = 5$ – истина;

$a = 4; d = 1$, тогда $4 + 1 = 5$ – истина;

$a = 4; d = 2$, тогда $4 + 2 = 5$ – ложь.

Ответ: 1) $a = 3;\ b = 5;\ c = 7$;

2) $a = 4;\ b = 5;\ c = 6$.

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{11}{24}.$$

Проанализируем члены левой части.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\\
&\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\\
+\ &\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\\
\hline
&\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Почленно сложим члены левой и правой части: в сумме остаются только первый и последний член – все остальные взаимно уничтожатся.

Тогда $\dfrac{n}{2(n+2)} = \dfrac{11}{24}$; $\quad 12n = 11n + 22.$

Ответ: $n = 22$.

5. Найти сумму всех двузначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 4.

Вычислим сумму всех двузначных чисел, делящихся или на три, или на четыре, а затем исключим их из суммы всех двузначных чисел.

1) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 99 \\ d = 3 \end{array}\right|$ $\quad n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$; $\quad n = \dfrac{99-12+3}{3} = 30$;

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_{30} = \frac{12+99}{2} \cdot 30 = 111 \cdot 15 = 1665.$$

A – множество всех двузначных чисел, кратных трем. $S(A) = 1665$ – сумма всех двузначных чисел, кратных трем.

2) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 4 \end{array}\right|$ $\quad n = \dfrac{96-12+4}{4} = 22.$

B – множество всех двузначных чисел, кратных четырем.

$$S_{22} = \frac{12+96}{2} \cdot 22 = 108 \cdot 11 = 1188.$$

$S(B) = 1188$ – сумма всех двузначных чисел, кратных четырем.

3) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \\ a_n = 96 \\ d = 12 \end{array}\right|$ $\quad n = \dfrac{96-12+12}{12} = 8.$

$A \cap B$ – множество всех двузначных чисел, кратных 12.

$$S_8 = \frac{12+96}{2} \cdot 8 = 108 \cdot 4 = 432$$

$S(A \cap B) = 432$ – сумма всех двузначных чисел, кратных 12.

$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B);$

$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B);$

$S(A \cup B) = 1665 + 1188 - 432 = 2421,$

где $A \cup B$ – множество всех двузначных чисел, делящихся или на три, или на четыре.

4) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \\ a_n = 99 \\ d = 1 \end{array}\right|$ $\quad n = \dfrac{99-10+1}{1} = 90.$

$S_{90} = \dfrac{10+99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905$ – сумма всех двузначных чисел.

Таким образом, $4905 - 2421 = 2484$ – сумма всех двузначных чисел, не делящихся ни на три, ни на четыре.

Ответ: искомая сумма – 2484.

6. Даны четыре числа $p; k; t; m$.

$$\left.\begin{array}{l} \{p; k; t\} - \div \\ \{k; t; m\} - \div\div \\ p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} p = ? \\ k = ? \\ t = ? \\ m = ? \end{array}$$

Из условий следует

$$\begin{cases} k = p + d \\ t = p + 2d \\ t = k \cdot q \\ m = k \cdot q^2 \end{cases} \quad \begin{cases} p + k + t = 12 \\ k + t + m = 19 \end{cases};$$

$$\begin{cases} p + p + d + p + 2d = 12 \\ k + kq + kq^2 = 19 \end{cases}; \quad \begin{cases} p + d = 4 \\ k(1 + q + q^2) = 19 \end{cases},$$

но $k = p + d$, т.е. $k = 4$.

тогда $\begin{cases} p + d = 4 \\ 4 \cdot (1 + q + q^2) = 19 \end{cases}$, т.е. $4q^2 + 4q - 15 = 0$;

$$(q_{1,2}) = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{4} = \frac{-2 \pm 8}{4}.$$

1) $\left[\begin{array}{l} q = \frac{3}{2} \\ q = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$, тогда 2) $\begin{array}{l} t = k \cdot q = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6 \\ t = k \cdot q = 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -10 \end{array}$;

3) $\begin{array}{l} m = kq^2 = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9 \\ m = kq^2 = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25 \end{array}$;

4) $d = t - k \left[\begin{array}{l} d = 2 \\ d = -14 \end{array}\right.$;

5) $p = k - d \quad \left[\begin{array}{l} p = 2 \\ p = 18 \end{array}\right.$.

Ответ: 1) $p = 2$; $k = 4$; $t = 6$; $m = 9$; $\left(q = \frac{3}{2}; d = 2\right)$;

2) $p = 18$; $k = 4$; $t = -10$; $m = 25$; $\left(q = -\frac{5}{2};\ d = -14\right)$.

7. Вычислите.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1-\left(n^2-n+1\right)}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}=$$

$$=\frac{2(1-0)}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}}=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=1.$

8. Вычислите.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+3n-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-1-n^3-3n+1}{\sqrt[3]{\left(n^3+2n^2-1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2n^2-1\right)\left(n^3+3n-1\right)}+\sqrt[3]{\left(n^3+3n-1\right)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)^2}\right)}=$$

$$=\frac{2-0}{\sqrt[3]{(1+0-0)^2}+\sqrt[3]{(1+0-0)(1+0-0)}+\sqrt[3]{(1+0-0)^2}}=$$

$$=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+3n-1}\right)=\frac{2}{3}.$

9. $\{b_n\}$ – $\div\!\div$

$$S_{10} = 20$$

$$S'_{10} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{10}} = 10 \qquad b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{10} = ?$$

Так как $\{b_n\}$ – $\div\!\div$, $S_{10} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{10}$, где

$$S_{10} = \frac{b_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}.$$

Если рассмотреть

$$b'_1 = \frac{1}{b_1}$$

$$b'_2 = \frac{1}{b_2}$$

....

$b'_{10} = \dfrac{1}{b_{10}}$, то $\{b'_n\}$– $\div\!\div$, где $q' = \dfrac{1}{q}$.

Тогда $S'_{10} = \dfrac{\frac{1}{b_1}\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{q}} = \dfrac{q\left(q^{10}-1\right)}{b_1(q-1)q^{10}}$;

$\dfrac{S_{10}}{S'_{10}} = \dfrac{\frac{b_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}}{\frac{q\left(q^{10}-1\right)}{b_1(q-1)q^{10}}} = 2$, тогда $\dfrac{b_1\left(q^{10}-1\right)}{q-1} \cdot \dfrac{b_1(q-1)q^{10}}{q\left(q^{10}-1\right)} = 2$.

Значит $b_1^2 \cdot q^9 = 2$;

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots \cdot b_{10} = b_1^{10} \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^9 = b_1^{10} \cdot q^{1+2+3+\ldots+9} = b_1^{10} \cdot q^{45}$$

(так как $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = \dfrac{1+9}{2} \cdot 9 = 45$);

$b_1^{10} \cdot q^{45} = \left(b_1^2 \cdot q^9\right)^5$, так как $b_1^2 \cdot q^9 = 2$, то

$b_1^{10} \cdot q^{45} = 2^5 = 32$.

Ответ: $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{10} = 32$.

10. $\{a_n\}$ – $\div$; $a_n \neq 0$.

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1\cdot a_2}+\dfrac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right)$.

Так как $a_n = a_1 + (n-1)d$, то

$$\frac{1}{a_1\cdot a_2}=\frac{1}{a_1(a_1+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+d}\right);$$

$$\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(a_1+(n-1)d)(a_1+nd)}=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1+(n-1)d}-\frac{1}{a_1+nd}\right).$$

Складывая почленно левую и правые части равенств и учитывая, что каждое второе слагаемое в предыдущей скобке взаимно уничтожается с каждым первым слагаемым в последующей скобке, получим

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+nd}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\cdot\frac{nd}{a_1(a_1+nd)}=\frac{n}{a_1(a_1+nd)}.$$

Значит

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_1(a_1+nd)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{na_1\left(\dfrac{a_1}{n}+d\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1\left(\dfrac{a_1}{n}+d\right)}=\frac{1}{a_1(0+d)}=\frac{1}{a_1d}.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1\cdot a_2}+\dfrac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{a_1d}$.

Содержание

1. Множества ... 5
Введение ... 5
Свойства включений ... 7
Операции над множествами ... 8
Свойства операций ... 10
Практикум 1 ... 13
Тренировочная работа 1 ... 15
Проверочная работа 1 ... 17
Зачетная работа 1 ... 18
Практикум 2 ... 19
Тренировочная работа 2 ... 22
Применение операций над множествами к решению неравенств ... 24
Практикум 3 ... 25
Практикум 4 ... 27
Тренировочная работа 3 ... 30
Зачетная работа 2 ... 36
Мощность множества ... 37
Практикум 5 ... 38
Дополнение ... 41
Практикум 6 ... 43
Практикум 7 ... 44
Тренировочная работа 4 ... 45
Практикум 8 ... 49
Тренировочная работа 5 ... 55
Разность двух множеств ... 60
Практикум 9 ... 62
Тренировочная работа 6 ... 66
Практикум 10 ... 69
Тренировочная работа 7 ... 74
Проверочная работа 2 ... 77
Тренировочная работа 8 ... 78

Проверочная работа 3 81
Зачетная работа 3 83

2. Функции 85
Введение 85
Практикум 11 85
Тренировочная работа 9 89
Специальные функции 92

3. Последовательности 93
Введение 93
Практикум 12 94
Классификация и виды последовательностей 95
Практикум 13 96
Способы задания функции 99
Продолжение классификации последовательностей 102
Тренировочная работа 10 102
Предел последовательности 107
Практикум 14 (введение) 107
Тренировочная работа 11 112
Проверочная работа 4 113
Историческая справка 114
Некоторые вопросы логики доказательств 114
Основные теоремы о пределах 116
Алгебраические операции над пределами 120
Применение теорем о пределах к вычислению пределов 122
Практикум 15 122
Тренировочная работа 12 124
Проверочная работа 5 129
Применение теории пределов для вычисления площадей . 130
4. Прогрессии 133
Арифметическая прогрессия 133
Практикум 16 137
Практикум 17 139
Практикум 18 142
Тренировочная работа 13 146
Геометрическая прогрессия 150

Практикум 19 152
Характеристические свойства (критерии) геометрической прогрессии 154
Практикум 20 157
Тренировочная работа 14 159
Практикум 21 167
Проверочная работа 6 171
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 173
Практикум 22 174
Практикум 23 176
Тренировочная работа 15 179

5. Зачетные карточки 187
Зачетная карточка 1 187
Зачетная карточка 2 189
Зачетная карточка 3 191
Зачетная карточка 4 193
Зачетная карточка 5 195
Зачетная карточка 6 197

6. Решения 199
Решение проверочной работы 1 199
Решение проверочной работы 2 200
Решение проверочной работы 3 203
Решение проверочной работы 4 211
Решение проверочной работы 5 213
Решение проверочной работы 6 217
Решение зачетной работы 1 224
Решение зачетной работы 2 225
Решение зачетной работы 3 231
Решение зачетной карточки 1 239
Решение зачетной карточки 2 249
Решение зачетной карточки 3 259
Решение зачетной карточки 4 266
Решение зачетной карточки 5 274
Решение зачетной карточки 6 284

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИИ.
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОГРЕССИИ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Е.И. Герасимчук*
Компьютерная верстка *К. В. Шевяков*
Компьютерный набор *Е. А. Жданов, К. В. Шевяков*
Корректоры *Е.Г. Никитина, И.Б. Смирнов, А.Б. Смирнов*

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,
В Москве (филиал): (495) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.
Тел.: (812) 560-0598; факс: (812) 560-0524.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

Подписано к печати 06.10.2008. Формат 60x90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 18,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № 1030.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография».
180004, г. Псков, ул. Ротная, 34

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

---

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами в ЕГЭ.
13. Введение в математический анал
14. Комплексные числа.