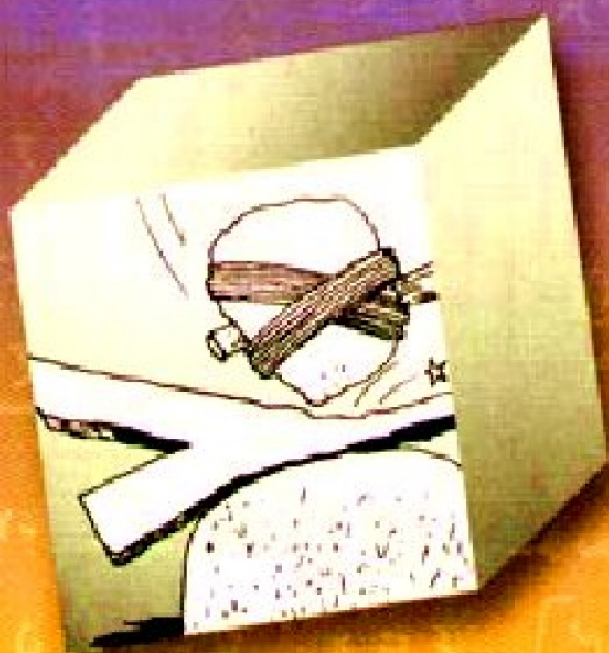


МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ



Практикум
Тренинги
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Построение графиков функций элементарными методами

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ



С.-Петербург
Москва
2011

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
заслуженный учитель РФ Т. И. Куршиш,
заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц.

Шахмейстер А. Х.

Ш32 Построение графиков функций элементарными методами. — 3-е изд.,
исправленное и дополненное — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» :
М.: Издательство МЦНМО, 2011. — 184 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-021-7,
978-5-91281-049-7, ISBN 978-5-94057-790-4

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного
курса математики, содержит большое количество разноуровневого
тренировочного материала. В книге представлена программа для про-
ведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, сту-
дентов педагогических вузов, учителей.

© Шахмейстер А. Х., 2011
© Куликов Ю. Н., обложка, 2011
© ООО «Петроглиф», 2011

ISBN 978-5-94057-790-4 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-021-7 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91281-049-7 (ООО «Виктория плюс»)

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ МЕТОДАМИ

Научный редактор серии *А. В. Семенов*
Художник *Ю. Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С. С. Афонин*
Корректоры *Е. Г. Никитина, И. Б. Смирнов, А. Б. Смирнов*

Подписано к печати 24.04.2011 г. Формат 60х90¹/₁₆. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11,5 печ. л. Тираж 2500 экз. Заказ № 177.

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография». 180004, г. Псков, ул. Ротная, 34.

*Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:*

*Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Владимира Леонидовича Ильина*

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса для учащихся 9-11 классов
(30 уроков).**

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 5	Асимптоты (стр. 5 – 15) Практикум (И.Ф.П.Г.) (1, 2, 4, 6, 7, 9).
6 – 10	Наклонная асимптота (стр. 42 – 44) Тренировочная работа (1, 2, 4, 6, 7, 10, 12)
11 – 17	Графики сложных функций (стр. 40, 58, 62 – 74) Тренировочная работа (11, 13, 14, 15). Проверочные задания (27, 29).
18 – 25	Проверочные задания (стр. 71 – 129) Проверочные задания (1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 21, 25, 28, 30).
26 – 30	Зачетные карточки (стр. 130 – 183) Карточка 1 (2, 3). Карточка 2 (1, 2). Карточка 3 (1, 3). Карточка 4 (2, 3). Карточка 5 (1, 2, 3). Карточка 7 (2, 3). Карточка 8 (1, 3). Карточка 9 (2). Карточка 10 (2, 3).

Программа подготовлена, составлена и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1

АСИМПТОТЫ

Вводные замечания

Пусть x стремится к бесконечности.

$$x = 1, 2, 3, \dots, 10^{100}, \dots \quad x \rightarrow +\infty,$$

тогда дробь $\frac{1}{x}$ стремится к нулю:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{10^{100}}; \dots \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0.$$

Итак, если $(x \rightarrow +\infty)$, то $(\frac{1}{x} \rightarrow 0)$.

Очевидно, что

$$\text{если } x \rightarrow +\infty, \text{ то дробь } \frac{1}{x-10} \rightarrow 0;$$

$$\text{если } x \rightarrow +\infty, \text{ то дробь } \frac{1}{x^2-10^{10}} \rightarrow 0 \text{ и т.д.}$$

Интересно, а что будет, если дробь имеет вид $\frac{x+2}{x^2+2}$?

Так как степень числителя меньше степени знаменателя,

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(\frac{x+2}{x^2+2} \rightarrow 0 \right).$$

Обобщая, можно сделать вывод,

$$\text{что любая дробь вида } \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n}$$

при $x \rightarrow +\infty$ стремится к нулю, если $m < n$.

Пример. Если $x \rightarrow \infty$, то $\frac{2x^5 - 3x^2 + 1}{7x^6 + 5x^4 - x^2 + 19} \rightarrow 0$.

Покажем это.

Представим дробь

$$\begin{aligned} \frac{2x^5 - 3x^2 + 1}{7x^6 + 5x^4 - x^2 + 19} &= \frac{x^6 \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^6} \right)}{x^6 \left(7 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{19}{x^6} \right)} = \\ &= \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^6}}{7 + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{19}{x^6}} \rightarrow \frac{0-0+0}{7+0-0+0}, \text{ если } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

так как при $x \rightarrow \infty$ $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^4} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^6} \rightarrow 0$,
тогда и вся дробь стремится 0.

Рассмотрим вновь дробь $\frac{1}{x}$.

Если x стремится к нулю, т.е. $x = 1; 0,1; 0,01; \dots; 10^{-n}; \dots$,
то $\frac{1}{x} = 1; 10; 100; \dots; 10^n$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Итак, если $(x \rightarrow 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \right)$,

причем важно, что **слева**, т.е. $-1; -10^{-1}; \dots; (-10^{-n})$.

Из $(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \rightarrow -\infty \right)$;

из $(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \right)$, где

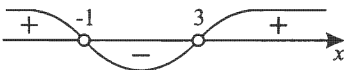
$x \rightarrow \underline{0 - 0}$ — обозначение стремления к нулю **слева**,
 $x \rightarrow \underline{0 + 0}$ — обозначение стремления к нулю **справа**.

Аналогично для дроби $\frac{1}{x-2}$.

Из $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty \right)$;

из $(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty \right)$.

Сложнее, если дробь $\frac{1}{x^2 - 2x - 3}$, тогда вначале выясним интервалы знакопостоянства дроби, т.е. где она положительна, а где отрицательна.



$$\begin{aligned} \text{Значит, } (x \rightarrow 3 + 0) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow +\infty \right); \\ (x \rightarrow 3 - 0) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow -\infty \right); \\ (x \rightarrow -1 + 0) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow -\infty \right); \\ (x \rightarrow -1 - 0) &\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow +\infty \right). \end{aligned}$$

Примечание. Необходимо отметить, что x принимает не только рациональные, но и любые вещественные значения. В данном случае не имеет значения, принимает ли x только натуральные, целые, рациональные или вещественные значения. Разумеется, с позиции строгой научной теории необходимо было бы дать четкие определения предела функции в точке и предела функции на бесконечности. Но это была бы другая книга. Здесь же опора идет на интуитивное представление.

Далее на протяжении всей книги будем обозначать:

$D(y)$ — область определения функции y ,

$E(y)$ — область (множество) значений функции y .

Вертикальная асимптота

Определение: прямая вида $x = a$ называется вертикальной асимптотой для $y = f(x)$, если из $(x \rightarrow a \pm 0) \Rightarrow (f(x) \rightarrow \pm\infty)$.

1. Пусть $y = \frac{2}{x-3}$.

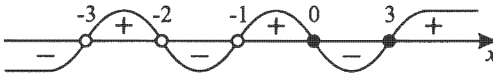
Тогда прямая $x = 3$ есть вертикальная асимптота (обозначается пунктирной прямой), так как при $(x \rightarrow 3 \pm 0) \Rightarrow (y \rightarrow \pm\infty)$.

2. Пусть $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

Здесь уже три вертикальных асимптоты,

так как $(x+1)(x+2)(x+3) = 0$ при $\begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$

Выясним интервалы знакопостоянства y .



Итак, $(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;
 $(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;
 $(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

3. Пусть $y = \frac{x-2}{(x^2-4)x}$.

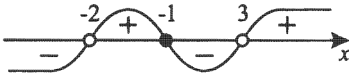
Здесь необходимо вначале упростить вид функции, т.е. сократить на $(x-2)$, не забыв, что в новом виде $y = f(x)$; $x = 2 \notin D(f)$, т.е. $x = 2$ не есть вертикальная асимптота, хотя ясно, что наличие вертикальной асимптоты связано с равенством знаменателя нулю.

Далее отметим, что $x = -2$; $x = 0$ есть вертикальные асимптоты. Читатель может самостоятельно проверить это по определению асимптоты.

4. Пусть $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 6x + 9)(x + 2)}$. Разложив на множители и сократив, имеем $y = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)^2(x+2)}$.

$y = \frac{x+1}{(x-3)(x+2)}$, но здесь $x = 3$ — вертикальная асимптота, так как и после сокращения на $(x-3)$ в знаменателе находится $x-3$.

Выясним интервалы знакопостоянства



Тогда $(x \rightarrow 3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow 3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;
 $(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

т.е. прямые $x = 3$; $x = -2$ являются вертикальными асимптотами.

5. Пусть $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

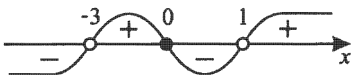
$D(y)$: $x \neq 1$. Очевидно, что вертикальные асимптоты связаны с $D(y)$, т.е. с условием равенства знаменателя нулю.

Итак, $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Убедимся в этом, ведь степень числителя выше степени знаменателя.

Действительно, при $x \rightarrow 1$ знаменатель стремится к нулю, а числитель — к числу 4, но при делении числа 4 на число, очень близкое к нулю, получаем число, модуль которого очень большой (бесконечность).

Так как $y = \frac{x(x+3)}{x-1}$, то распределение знаков функции будет



Итак, $(x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$,
 $(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$,

т.е. $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Горизонтальная асимптота

Определение: прямая вида $y = b$ называется горизонтальной асимптотой, если при $(x \rightarrow \pm\infty) \Rightarrow (f(x) \rightarrow b)$.

1. $y = \frac{1}{x-2}$.

$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (\frac{1}{x-2} \rightarrow 0)$, т.е. $y = 0$ есть горизонтальная асимптота (обозначается пунктирной прямой).

2. $y = \frac{2}{x+3} + 4$.

Из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (\frac{2}{x+3} \rightarrow 0)$,

т.е. из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 4)$.

Итак, $y = 4$ — горизонтальная асимптота (обозначается пунктирной прямой).

3. $y = \frac{3-x}{x+1}$. Выделяем целую часть

$$\frac{3-x}{x+1} = \frac{-x-1+4}{x+1} = -1 + \frac{4}{x+1}$$

$$\frac{3-x}{x+1} = -1 + \frac{4}{x+1}; \quad - \frac{-x+3}{-x-1} \left| \frac{x+1}{-1} \right.$$

Итак, из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (\frac{4}{x+1} \rightarrow 0) \Rightarrow (y \rightarrow -1)$.

$y = -1$ является горизонтальной асимптотой.

4. $y = \frac{x+2}{x^2+2}$.

При $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (\frac{x+2}{x^2+2} \rightarrow 0)$. Так как степень числителя равна 1, а степень знаменателя равна 2, т.е. степень числителя меньше степени знаменателя, то $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

5. $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. Аналогично: степень числителя 2, а степень знаменателя 3, значит, $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$.

6. $y = \frac{x^2-x-2}{2x^2+3x+2}$. Здесь степень числителя равна степени знаменателя, что же делать?

Вынесем x^2 и в числителе, и в знаменателе:

$$\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Так как из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \rightarrow 0\right)$

и из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \rightarrow \frac{1-0-2\cdot 0}{2+3\cdot 0+2\cdot 0} = \frac{1}{2}\right)$,

то из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(y \rightarrow \frac{1}{2}\right)$, т. е. равно отношению коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя.

$$7. y = \frac{3x^2+2x}{x^2+4};$$

$$\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Итак, $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 3)$,

так как $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \rightarrow 0\right)$

и $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} \rightarrow 0\right)$,

то из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{3x^2+2x}{x^2+4} \rightarrow \frac{3+0}{1+0} = 3\right)$.

Выводы

- I. Если степени числителя и знаменателя дробно-рациональной функции $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$ совпадают ($n = m$), то горизонтальной асимптотой является прямая $y = \frac{a_0}{b_0}$ (то есть y равно отношению коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя).
- II. Если степень числителя меньше степени знаменателя ($n < m$), то горизонтальной асимптотой является ось абсцисс $y = 0$.

Области существования графика на координатной плоскости

Определение: графиком функции называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональному равенству: $\Gamma_y = \{(x; y) | y = f(x)\}$.

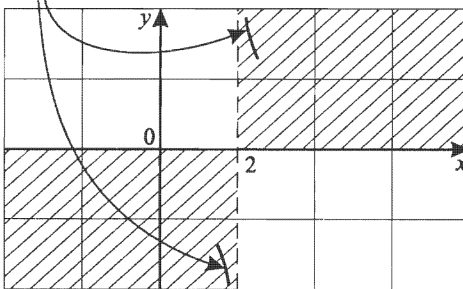
1. $y = \frac{1}{x-2}$. $D(y): x \neq 2$.

$y > 0$ при $x > 2$, $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

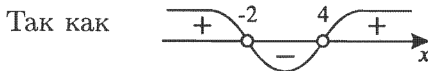
$y < 0$ при $x < 2$, $(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

то $x = 2$ — вертикальная асимптота (рисуеться пунктирной прямой). Область существования $y = f(x)$ заштрихована.

Обозначение приближения к асимптоте



2. $y = \frac{3}{x^2 - 2x - 8}$. $D(y): x \neq -2; x \neq 4$.



$y > 0$ при $x > 4$ и $x < -2$;

$y < 0$ при $-2 < x < 4$;

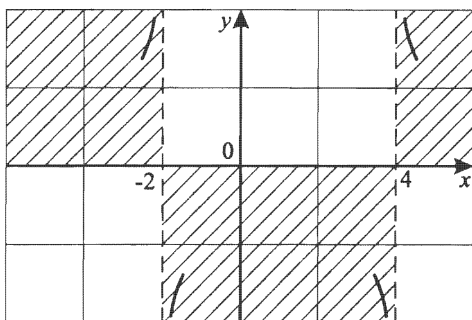
$(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

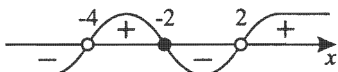
$(x \rightarrow 4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

$(x \rightarrow 4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$x = 4$; $x = -2$ — вертикальные асимптоты.



3. $y = \frac{x+2}{x^2+2x-8}$. $D(y): x \neq -4; x \neq 2$.



$$(x \rightarrow -4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

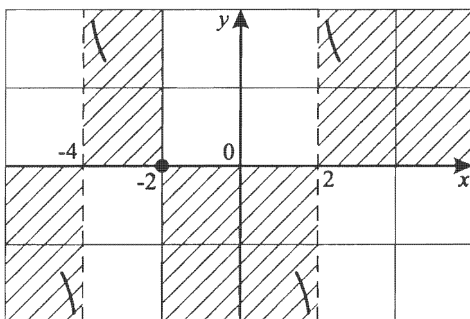
$$(x \rightarrow -4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty).$$

Здесь корень $x = -2$ рисуется сплошной линией,

$x = -4; x = 2$ — вертикальные асимптоты.



4. $y = \frac{(x-1)^2}{x(x^2-9)}$. $D(y): x \neq -3; x \neq 0; x \neq 3$.



$$(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

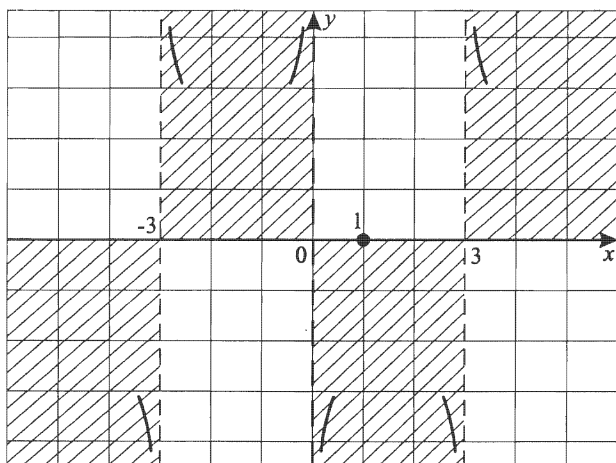
$$(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

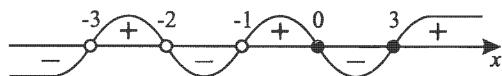
$$(x \rightarrow 3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$x = 1$ — корень (нуль) функции;

$x = 0$; $x = 3$; $x = -3$ — вертикальные асимптоты.



5. $y = \frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. $D(y): x \neq -3; x \neq -2; x \neq -1$.



$$(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty).$$



В данном пункте очень важно понимать, что мы здесь имеем дело с бесконечными областями в виде прямых углов или прямоугольников, задаваемых двумя переменными x и y в виде неравенств.

Скажем, в примере 2 самая левая область задается неравенствами $\begin{cases} x < -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$, средняя область — $\begin{cases} -2 < x < 4 \\ y < 0 \end{cases}$ и так далее.

Вопрос: для чего выделять эти области?

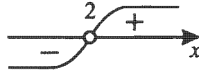
Ответ: только в этих областях присутствует графический эскиз функции.

Примечание Вполне может быть, что какие-то асимптоты графика функции совпадают с осями координат. В этом случае, по умолчанию, на сплошные линии осей накладываются пунктиры, обозначающие асимптоты.

Практикум. Исследование функций и построение графиков (И.Ф.П.Г.)

1. $y = \frac{1}{x-2}$.

$D(y): x \neq 2$.



$x = 2$ — вертикальная асимптота,

так как из $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow \infty)$;

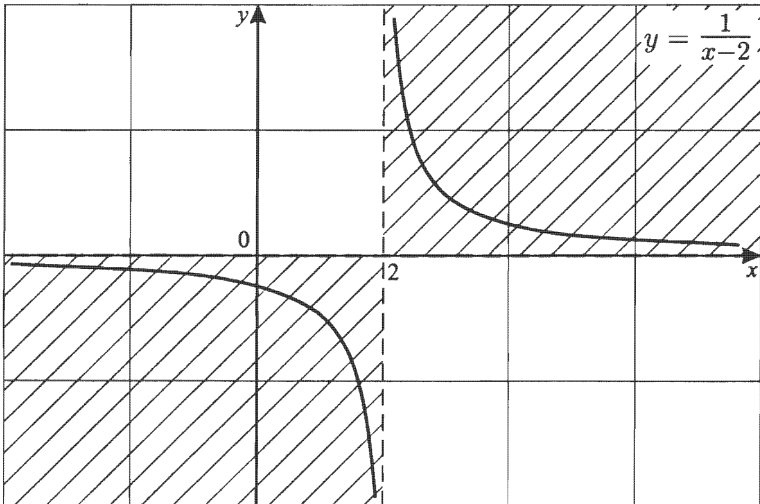
из $(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

Области существования эскиза графика:

$y > 0; x > 2$; $y < 0; x < 2$.

$y = 0$ — горизонтальная асимптота,

так как $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$.

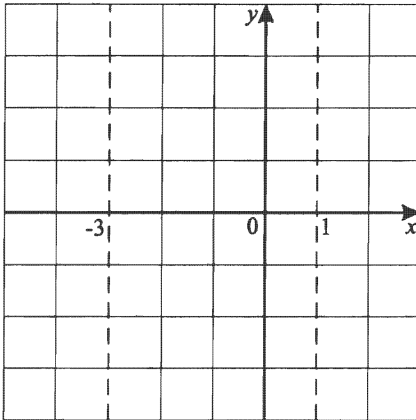


Эскиз графика $y = f(x)$. Узнаем гиперболу, сдвинутую вправо на 2.

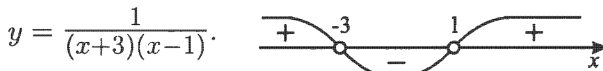
2. $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$.

1) $D(y): x \neq -3; x \neq 1$.

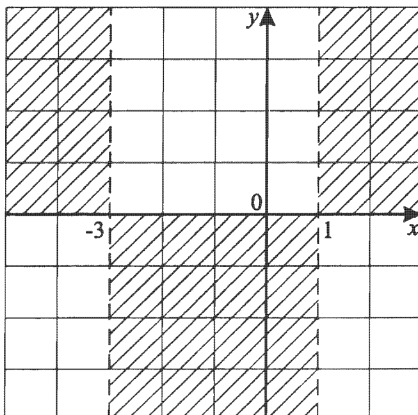
Похоже, $x = -3, x = 1$ — вертикальные асимптоты.



2) Выясним интервалы знакопостоянства.

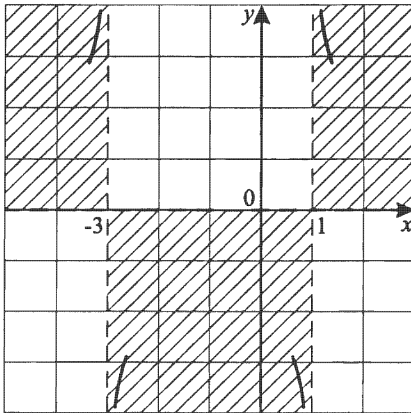


Теперь, учитывая интервалы знакопостоянства, заштриховываем легкими штрихами области возможного существования графика функции.

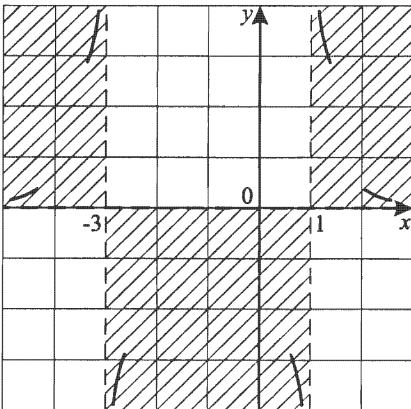


- 3) $(x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;
 $(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;
 $(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$.

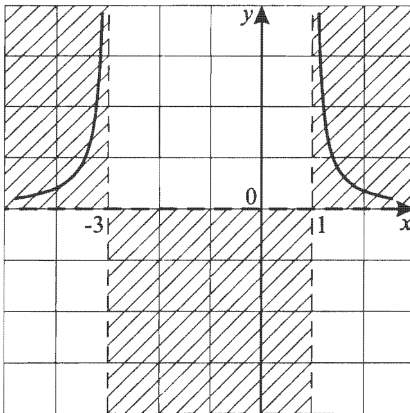
Зная, что $x = -3$ и $x = 1$ — вертикальные асимптоты, изобразим приближения к ним графика.



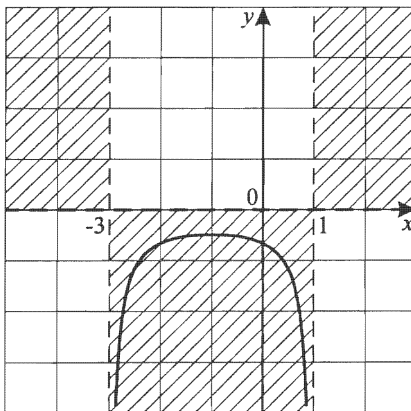
- 4) Так как $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$, то $y = 0$ — горизонтальная асимптота, которая обозначается на графике.



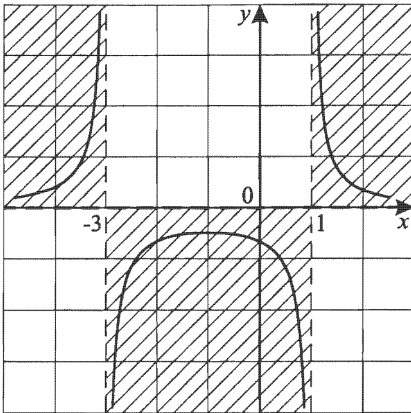
- 5) Плавной кривой соединим асимптотические приближения на интервале $x > 1$ и $x < -3$.



- 6) На интервале $-3 < x < 1$ сложнее, так как надо от асимптотического приближения к $(-\infty)$ вблизи $x = -3$ перейти к $(-\infty)$ вблизи $x = 1$, но это возможно сделать только в виде плавной горки.



Итак, $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$. Эскиз готов.



7) Контрольные точки. Они необходимы, чтобы более точно построить эскиз графика $y = f(x)$.

а) Пусть $x = 2$. $y(2) = \frac{1}{2^2+2 \cdot 2-3} = \frac{1}{5}$, т.е. $A\left(2; \frac{1}{5}\right)$ принадлежит графику. Зафиксировали кривую на $x > 1$, т.е. на $(1; +\infty)$.

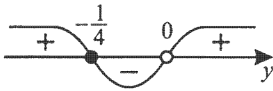
б) $x = 0$. $y(0) = -\frac{1}{3}$; $B\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения графика с осью ординат. Тем самым зафиксировали кривую на $(-3; 1)$. Достижение кривой наибольших значений на $(-3; 1)$ — тема отдельного исследования.

в) $x = -4$. $y(-4) = \frac{1}{16-8-3} = \frac{1}{5}$. $C\left(-4; \frac{1}{5}\right)$ принадлежит графику, т.е. зафиксировали кривую на $(-\infty; -3)$. Получаем более точный эскиз графика.

8) В данном случае можно элементарными методами выяснить множество всех значений функции, т.е. $E(y)$, где $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$.

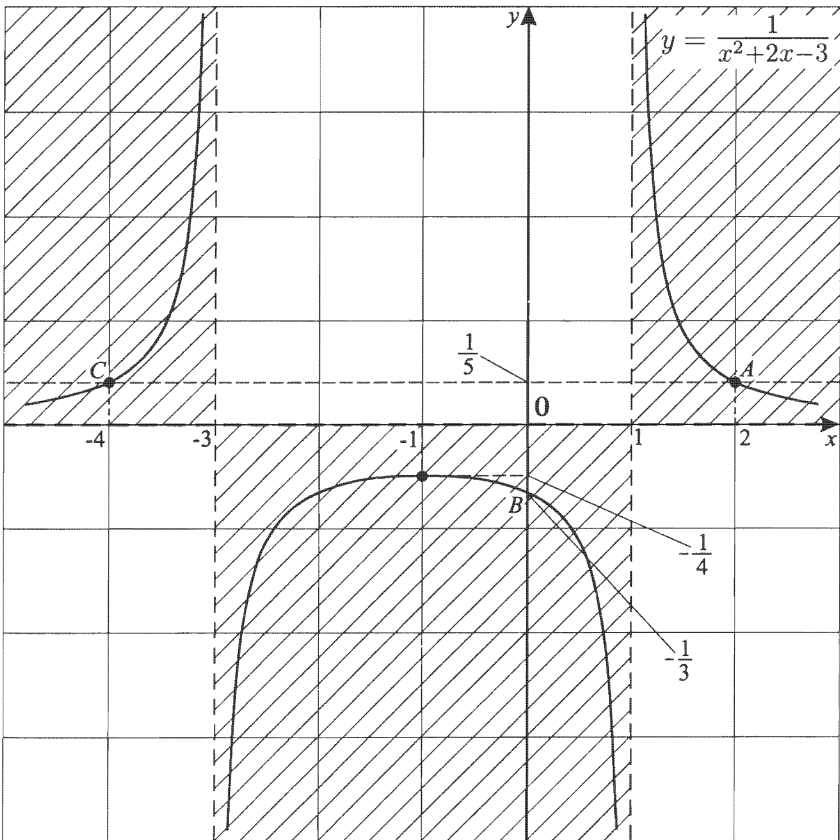
Полагая y как параметр, решим вопрос исследованием возможности существования корней у параметрического уравнения $yx^2 + 2xy - 3y = 1$.

Таким образом, $yx^2 + 2xy - 3y - 1 = 0$; $y \neq 0$, тогда $D = y^2 + 3y^2 + y = 4y^2 + y = y(4y + 1) \geq 0$.



Итак, $E(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup (0; +\infty)$, т.е. на $(-3; 1)$ наибольшее значение функции равно $-\frac{1}{4}$. Так как при $y = -\frac{1}{4}$ $D = 0$, то $x = -1$.

Итак, при $x = -1$ $y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{4}$.

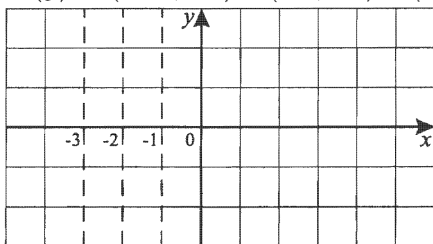


Получили окончательный эскиз графика функции

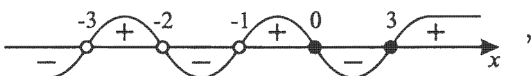
$$y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$3. y = \frac{x^2 - 3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

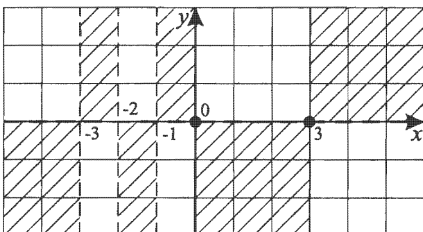
$$1) D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty).$$



2) Интервалы знакопостоянства



что дает возможность заштриховать области существования графика функции.



3) Асимптоты

$$(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0).$$

4) Плавно соединим асимптотические приближения.

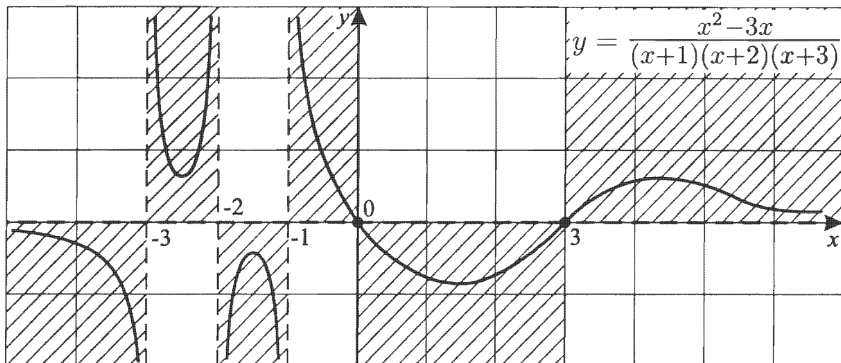
На $(-\infty; -3)$ — аналог гиперболы;

на $(-3; -2)$ — кривая в виде ямки;

на $(-2; -1)$ — кривая в виде горки;

на $(-1; 0)$ соединим плавно $(0; 0)$ с асимптотическим приближением к $x = -1$;

на $[0; 3]$ плавно соединяя $(0; 0)$ и $(3; 0)$, имеем ямку; на $[3; +\infty)$ плавно соединяя $(3; 0)$ с асимптотическим приближением к $y = 0$, имеем вид горки.



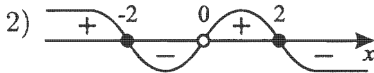
Итак, приближенный вид графика есть. Рассматривая контрольные точки на каждом интервале, можно уточнить эскиз. Можно более точно установить минимальные и максимальные значения, используя мощный аппарат дифференциального исчисления, но это тема отдельного исследования.

Целью же данной книги является развитие графического мышления и интуиции, когда, только взглянув на вид функции, мы уже можем в первые пять секунд представить приблизительный эскиз графика и характер поведения на том или ином интервале с определенной степенью точности.

Примечание. Весьма полезно строить графики рассматриваемых функций на миллиметровке. Так как, зачастую в книге рассматривается, из-за технических трудностей и из-за ограниченности графического поля только приблизительный эскиз графика. Для большей доступности и наглядности иногда нарушается масштабность.

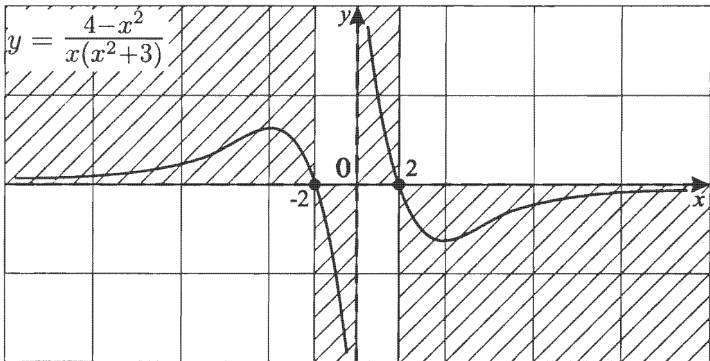
$$4. y = \frac{4-x^2}{x(x^2+3)}.$$

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. $x = 0$ — вертикальная асимптота ($x^2 + 3 \neq 0$ для любого x).



3) $(x \rightarrow 0+0) \Rightarrow (y \rightarrow \infty)$;
 $(x \rightarrow 0-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

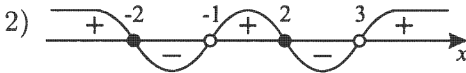
4) $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$.



5) Важно обратить внимание на тот факт, что так как функция нечетная (т.е. область определения ее — симметричное относительно нуля множество и для всех $x \in D(y)$ $y(-x) = -y(x)$), то график центрально симметричен относительно начала координат — точки $(0; 0)$.

$$5. y = \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} \cdot \frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+1)}.$$

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty).$

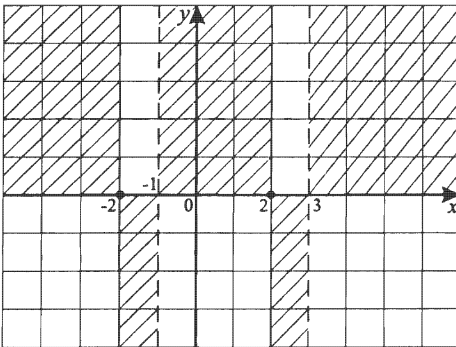


3) $(x \rightarrow 3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2).$

Выясним, когда график пересекает горизонтальную асимптоту:

$$\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = 2; \quad 2x^2 - 8 = 2x^2 - 4x - 6;$$

$$4x = 2; \quad x = \frac{1}{2}; \quad y = 2.$$



4) Выясним область изменения функции $E(y).$

$$\frac{2x^2-8}{x^2-2x-3} = y; \quad yx^2 - 2xy - 3y = 2x^2 - 8;$$

$$(y - 2)x^2 - 2xy - 3y + 8 = 0; \quad y \neq 2;$$

$$D = y^2 + (3y - 8)(y - 2) = 4y^2 - 14y + 16 \geq 0.$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 16 < 0, \text{ так как } \begin{cases} a > 0, \\ D < 0, \end{cases}$$

то $4y^2 - 14y + 16 > 0$ при всех $y.$

Значит $E(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, но так как при $x = \frac{1}{2}$ $y = 2$, то окончательно имеем $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

5) Контрольные точки:

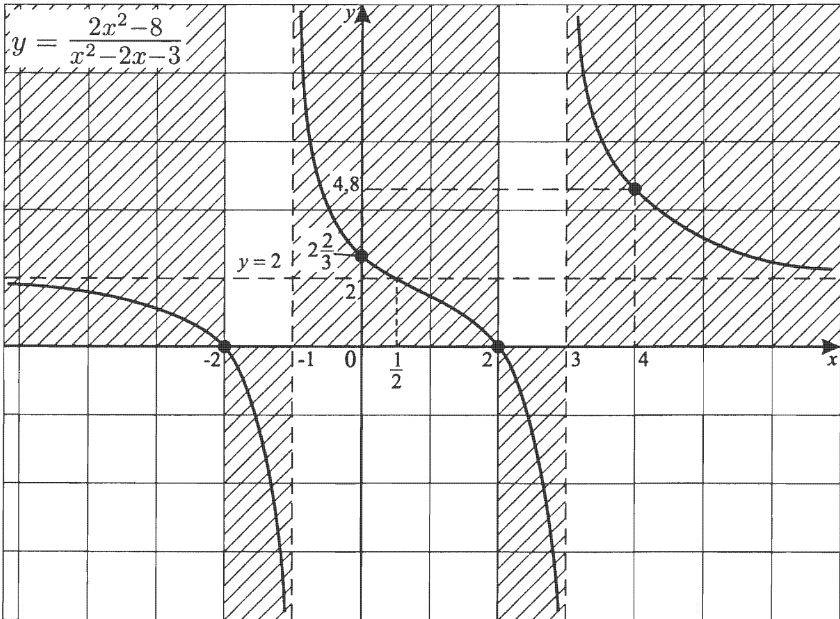
$$x = 0; y = 2\frac{2}{3};$$

$$x = -1,5; y = -1\frac{5}{9};$$

$$x = 4; y = 4,8;$$

$$x = -3; y = \frac{5}{6}.$$

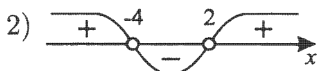
Эскиз графика:



Здесь интересно отметить, что на каждом из интервалов непрерывности, т.е. на $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ и $(3; \infty)$, функция $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 2x - 3}$ убывает, но убывающей не является.

6. $y = \frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} \cdot \frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} = \frac{2x^2+3}{(x+4)(x-2)}$.

1) $D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; +\infty)$.



3) $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

$(x \rightarrow -4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

$(x \rightarrow -4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2)$,

так как $\frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} = \frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}$,

и из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}} \rightarrow \frac{2+0}{1+0-0} = 2 \right)$.

Выясним, пересекает ли график функции горизонтальную асимптоту.

$\frac{2x^2+3}{x^2+2x-8} = 2$; $2x^2 + 3 = 2x^2 + 4x - 16$; $4x = 19$;

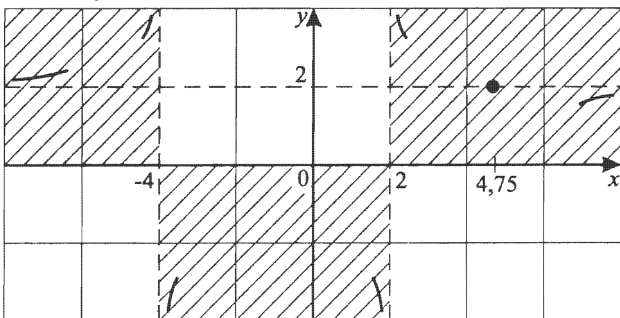
$x = 4,75$, а это значит, что $(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2-0)$;

$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2+0)$,

так как при $x > 2$ график пересекает горизонтальную асимптоту в точке $A(4,75; 2)$,

и $(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2-0)$ как бы снизу.

Так как нет пересечения с $y = 2$, при $x < -4$ кривая выше $y = 2$.



4) Попробуем найти наибольшее и наименьшее значения, т. е. $E(y)$ для $y = \frac{2x^2+3}{x^2+2x-8}$.

$$yx^2 + 2xy - 8y = 2x^2 + 3;$$

$$y^2 + 2xy - 8y = 2x^2 + 3;$$

$$(y-2)x^2 + 2xy - 8y - 3 = 0; \quad y \neq 2;$$

$$D = y^2 + (8y+3)(y-2) = 9y^2 - 13y - 6 \geq 0;$$

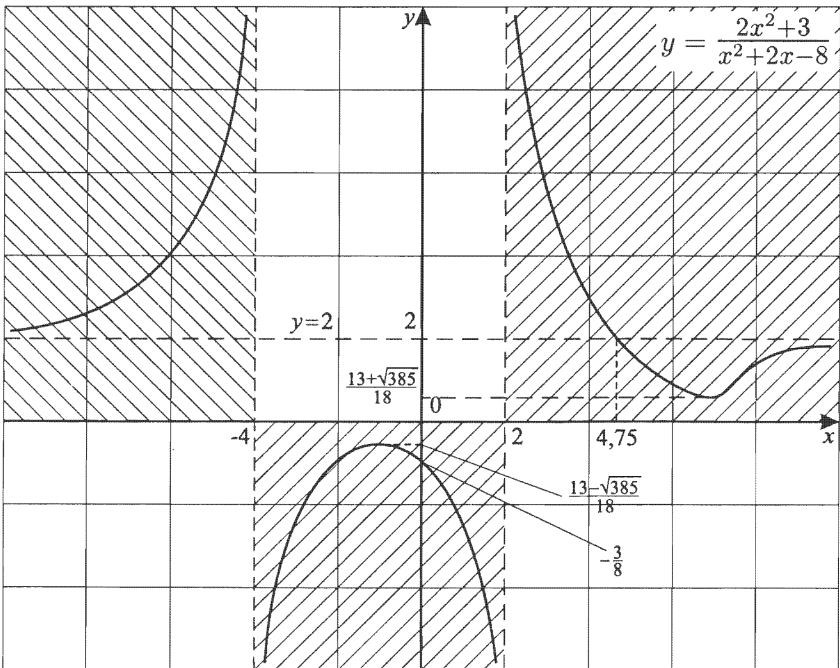
$$y_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169+216}}{18} = \frac{13 \pm \sqrt{385}}{18}$$

$$\left(\frac{13 - \sqrt{385}}{18} \approx \frac{7}{18}, \quad \frac{13 + \sqrt{385}}{18} \approx \frac{5}{6} \right)$$

$$\text{Итак, } D(y) = \left(-\infty; \frac{13 - \sqrt{385}}{18} \right] \cup \left[\frac{13 + \sqrt{385}}{18}; +\infty \right).$$

Выявление, при каких x достигается $y_{\text{наиб}}$; $y_{\text{наим}}$ возможно, но технически достаточно сложно.

Итак, приблизительный эскиз графика построен.

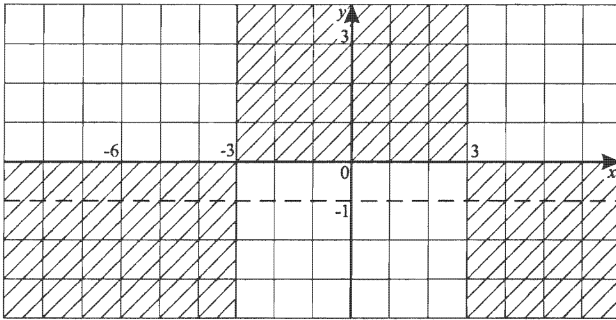
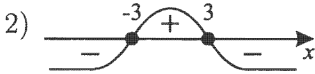


7. $y = \frac{9-x^2}{x^2+2x+3}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Для $x^2 + 2x + 3 > 0$ при всех x ,

так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -2 < 0. \end{cases}$



3) $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow -1)$.

Выясним, пересекает ли график функции горизонтальную асимптоту.

$$\frac{9-x^2}{x^2+2x+3} = -1; \quad 9 - x^2 = -x^2 - 2x - 3; \quad x = -6.$$

4) Найдем $E(y)$.

$$y = \frac{9-x^2}{x^2+2x+3};$$

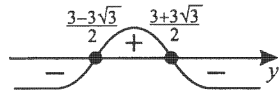
$$yx^2 + 2xy + 3y = 9 - x^2;$$

$$(y+1)x^2 + 2xy + 3y - 9 = 0; \quad y \neq -1;$$

$$D = y^2 - (3y-9)(y+1) = -2y^2 + 6y + 9 =$$

$$= -2(y^2 - 3y - 4,5) \geq 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+18}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}.$$



$$D(y) = (-\infty; +\infty); \quad E(y) = \left[\frac{3-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \right].$$

5) Контрольные точки: $x = 0$; $y = 3$.

- 6) При желании мы можем установить, при каких значениях x функция достигает наибольшее или наименьшее значения.

Действительно, для $(y+1)x^2 + 2xy + 3y - 9 = 0$;

$$y \neq -1, \quad x_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{D}}{y+1}.$$

Пусть $y_1 = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$, тогда $D = 0$, и $x_1 = \frac{-y}{y+1}$.

Подставляя y_1 , получаем

$$x_1 = \frac{-\frac{3+3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+3\sqrt{3}}{2} + 1} = -\frac{3+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}.$$

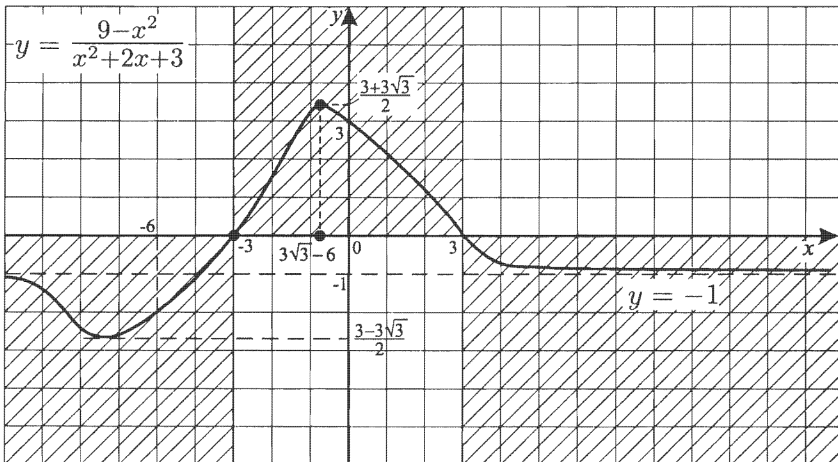
Домножая на сопряженное,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{(3+2\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})}{25-(3\sqrt{3})^2} = -\frac{15+15\sqrt{3}-9\sqrt{3}-27}{25-27} = \\ &= -\frac{-12+6\sqrt{3}}{-2} = -6 + 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Итак, при $x_1 = -6 + 3\sqrt{3}$ $y_{\text{наиб}} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично для x_2 .

Эскиз графика:



8. $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) $y > 0$ для всех x ,

так как $x^2 + x + 1 > 0$, $x^2 - x + 1 > 0$.

3) $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1)$.

4) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1$;

$x^2 + x + 1 = x^2 - x + 1$; $x = 0$.

5) Найдем $E(y)$.

$yx^2 - yx + y = x^2 + x + 1$;

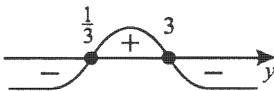
$(y-1)x^2 - (y+1)x + y-1 = 0$; $y \neq 1$;

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 =$

$= (y+1+2y-2)(y+1-2y+2) =$

$= (3y-1)(3-y) \geq 0$;

$$x_{1,2} = \frac{y+1 \pm \sqrt{(3y-1)(3-y)}}{2(y-1)}.$$



Но при $y = 1$ $x = 0$.

Итак, $E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3 \right]$.

При $y = 3$ $x = 1$, так как $D = 0$,

при $y = \frac{1}{3}$ $x = -1$, так как $D = 0$.

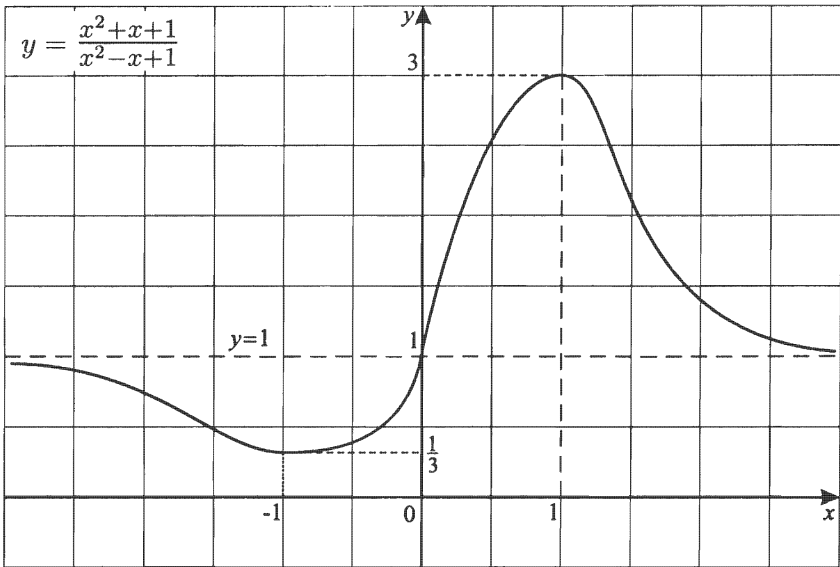
Но можно иначе. Для $ax^2 + bx + c = 0$ абсцисса вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

т. е. для $(y-1)x^2 - (y+1)x + (y-1) = 0$ $x_0 = \frac{y+1}{2(y-1)}$.

$x_1 = \frac{3+1}{2(3-1)} = 1$, где $y_1 = 3$;

$x_2 = \frac{\frac{1}{3}+1}{2\left(\frac{1}{3}-1\right)} = -1$, где $y_2 = \frac{1}{3}$.



Примечание. Если и в числителе, и в знаменателе есть функции не выше квадратичной, то можно вычислить не только $E(y)$, но и при каких x достигаются точные границы на $E(y)$ (если они есть) элементарными методами.

Теперь можно точно установить интервалы монотонности:

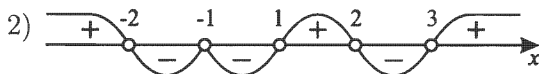
- а) функция возрастает на $[-1; 1]$;
- б) функция убывает на $(-\infty; -1]$;
- в) функция убывает на $[1; \infty)$.

9. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

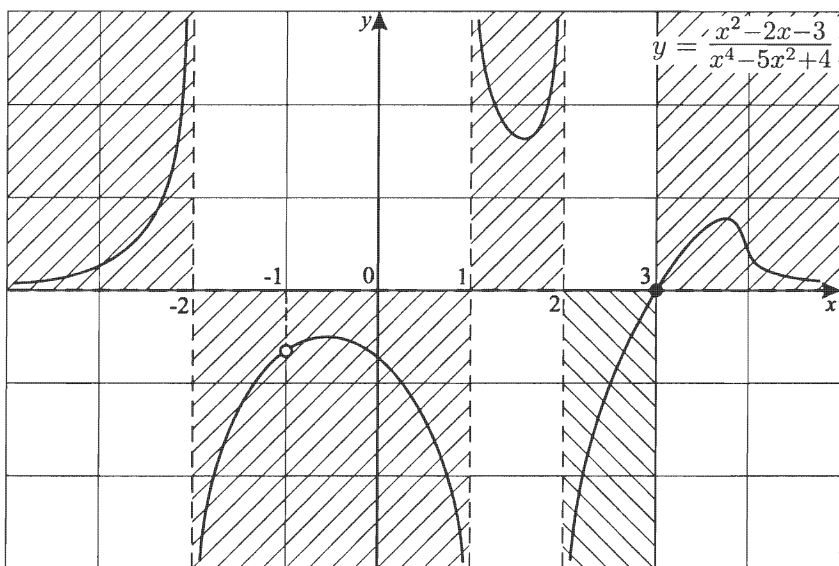
$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{(x-2)(x+2)(x-1)}$$

при $x \neq -1$.

1) $D(y)$: $x \neq \pm 2$; $x \neq \pm 1$.



3) $x = 2$; $x = 1$; $x = -2$ — вертикальные асимптоты,
 $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

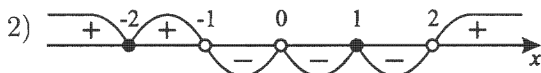


Если требуется уточнить эскиз графика, то полагая, что $x = 0$, получим $y = -0,75$. Ясно, что при рассмотрении дополнительных контрольных точек эскиз графика корректируется, хотя общий характер графика не изменится.

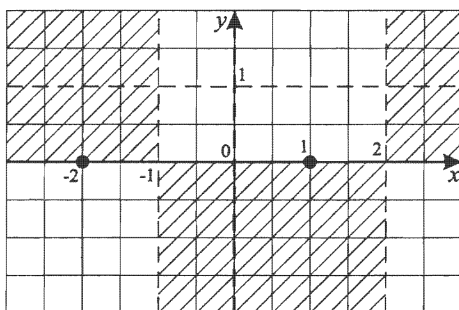
$$10. y = \frac{(x^2+x-2)^2}{x^2(x^2-x-2)}.$$

$$\frac{(x^2+x-2)^2}{x^2(x^2-x-2)} = \frac{(x+2)^2(x-1)^2}{x^2(x-2)(x+1)}.$$

1) $D(y): x \neq 0; x \neq 2; x \neq -1.$



- 3) $x = 0; x = 2; x = -1$ — вертикальные асимптоты,
 $y = 1$ — горизонтальная асимптота.



Выясним пересечение с горизонтальной асимптотой:

$$\frac{(x^2+x-2)^2}{x^2(x^2-x-2)} = 1;$$

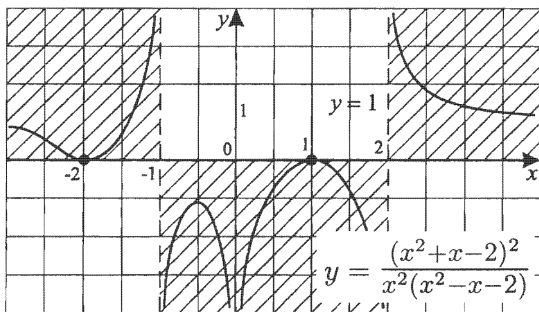
$$x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x = x^4 - x^3 - 2x^2;$$

$$3x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Для решения кубического уравнения необходимо знать формулы Кардано, хотя существование одного корня вытекает из следствий:

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (3x^3 - x^2 - 4x + 4 \rightarrow +\infty), \text{ а также}$$

$$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (3x^3 - x^2 - 4x + 4 \rightarrow -\infty).$$



Можно более точно установить, сколько корней имеет $3x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. $3x^3 = x^2 + 4x - 4$.

Этот вопрос можно решить графически

$$y_1 = 3x^3,$$

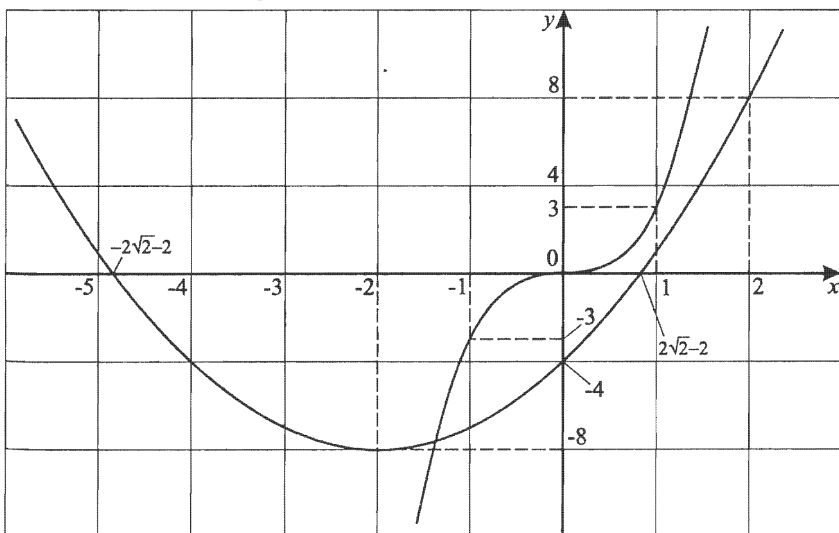
$$y_2 = x^2 + 4x - 4 = (x + 2)^2 - 8$$

При $y_2 = 0$ $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 2 \\ x = -2\sqrt{2} - 2. \end{cases}$

Очевидно существование единственного корня, так как при $x = 1$ $y_1(1) = 3$, $y_2(1) = 1$;

при $x > 1$ на $(1; +\infty)$ $y_1 = x^3$ растет быстрее, чем $y_2 = x^2 + 4x - 4$.

Точек пересечения больше нет.



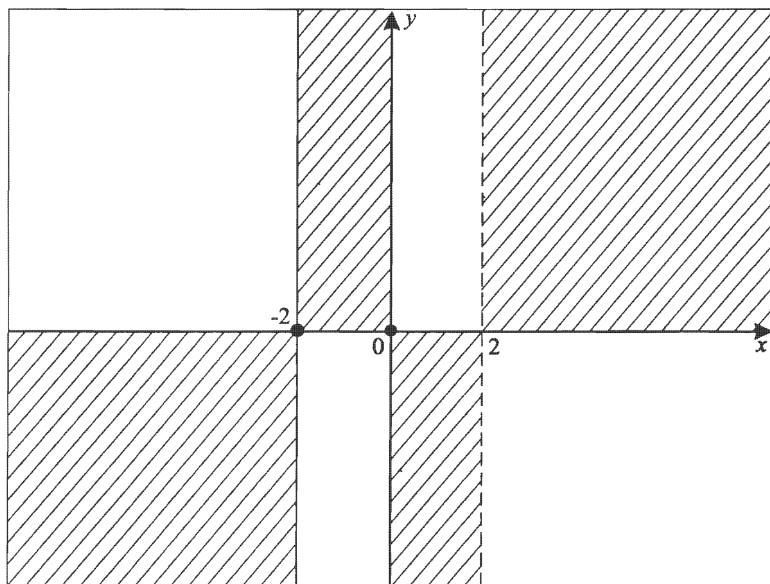
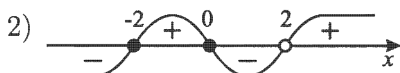
Наклонная асимптота

Определение: прямая вида $y = ax + b$ называется наклонной асимптотой, если для $y = f(x)$ из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow ((f(x) - (ax + b)) \rightarrow 0)$.

Примечание. Наклонная асимптота существует для дробно-рациональной функции, если степень числителя на единицу больше степени знаменателя.

1. $y = \frac{x^2+2x}{x-2}$, т.е. $y = \frac{x(x+2)}{x-2}$.

1) $D(y): x \neq 2$.



3) $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow \infty)$; $(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$,
значит, $x = 2$ — вертикальная асимптота.

Но степень числителя больше степени знаменателя на единицу, значит есть наклонная асимптота.

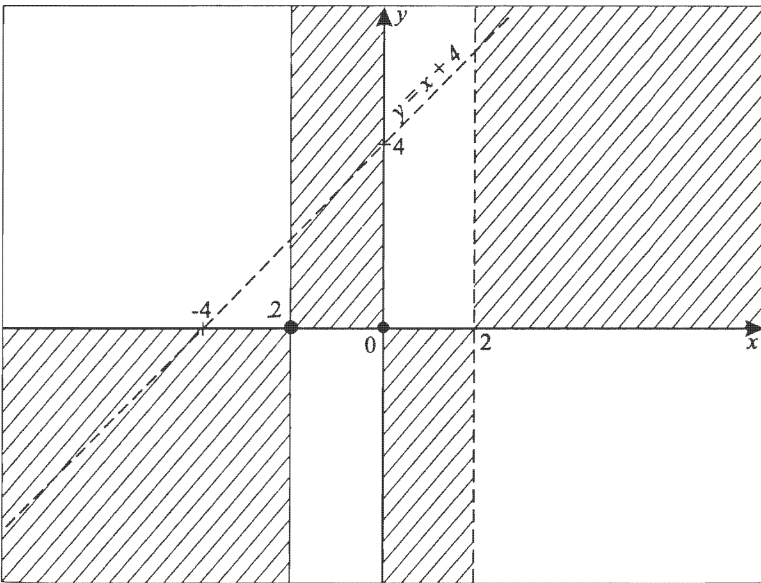
Выделим целую часть делением уголком

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x & x - 2 \\ -x^2 - 2x & x + 4 \\ \hline 4x & \\ -4x - 8 & \\ \hline & 8 \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^2+2x}{x-2} = x + 4 + \frac{8}{x-2}$.

Ясно, что при $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{x^2+2x}{x-2} \rightarrow (x+4)\right)$.

Наклонную асимптоту обозначим пунктирной прямой.



Так как $y = x + 4 + \frac{8}{x-2}$, где $\frac{8}{x-2} \neq 0$, значит, график не пересекает наклонную асимптоту $y = x + 4$.

При $(x \rightarrow \infty)$ график стремится к асимптоте сверху. При $(x \rightarrow 2+0)$ график стремится к $x = 2$ справа (т.е. при $x > 2$ образует яму).

При $(x \rightarrow 2-0)$ график стремится к $x = 2$ слева, проходит через корни (нули) функции $x = 0$ и $x = -2$.

При $(x \rightarrow -\infty)$ график стремится к $y = x + 4$ снизу (т.е. при $x < 2$ образует горку).

4) Найдем $E(y)$.

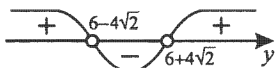
$$y = \frac{x^2 + 2x}{x - 2};$$

$$yx - 2y = x^2 + 2x;$$

$$x^2 + (2 - y)x + 2y = 0;$$

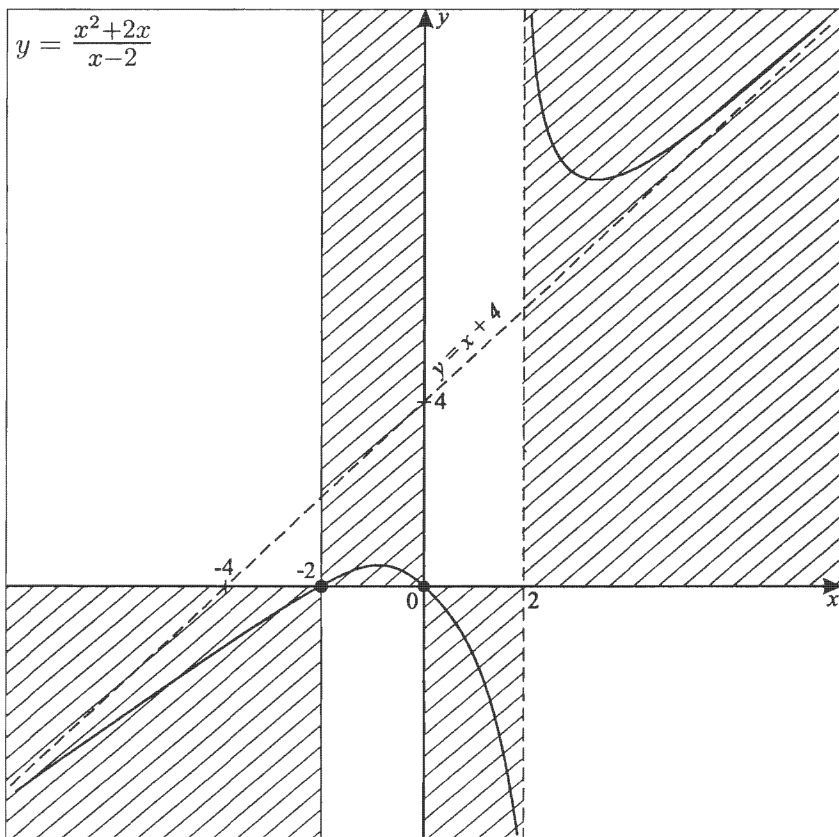
$$D = (2 - y)^2 - 8y = y^2 - 12y + 4 \geq 0;$$

$$y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 4} = 6 \pm 4\sqrt{2}.$$



Следовательно, $E(y) = (-\infty; 6 - 4\sqrt{2}] \cup [6 + 4\sqrt{2}; \infty)$.

Эскиз графика готов.



$$\begin{array}{r}
 2. \ y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 2} \\
 - \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} \left| \frac{x^2 + x - 2}{x - 4} \right. \\
 \hline
 \quad - 4x^2 + 4x - 1 \\
 - \quad - 4x^2 - 4x + 8 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 8x - 9
 \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 2} = x - 4 + \frac{8x - 9}{x^2 + x - 2}$.

Выясним, при каких x график функции пересекает наклонную асимптоту. Это возможно только, если дробь $\frac{8x - 9}{x^2 + x - 2} = 0$, т. е. при $x = 1,125$.

$$\begin{array}{r}
 3. \ y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x + 1} \\
 - \frac{x^4 - \quad 5x^2 + \quad 4}{x^4 + x^3 + x^2} \left| \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 5} \right. \\
 \hline
 \quad - x^3 - 6x^2 + \quad 4 \\
 - \quad - x^3 - x^2 - x \\
 \hline
 \qquad \quad - 5x^2 + x + 4 \\
 - \quad - 5x^2 - 5x - 5 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 6x + 9
 \end{array}$$

Так как степень числителя на два больше степени знаменателя, здесь асимптотической кривой является уже парабола $y = x^2 - x - 5$.

График $y(x)$ пересекает асимптотическую параболу при $6x + 9 = 0$; $x = -1,5$.

Примечание. Общий план исследования функции с наклонной асимптотой или асимптотической кривой, естественно, не изменяется.

В дальнейшем мы рассмотрим примеры графиков с асимптотическими кривыми (в виде параболы, гиперболы).

Тренировочная работа

Исследуйте функции и постройте графики.

$$1. y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}.$$

$$2. y = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}.$$

$$3. y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 9x}.$$

$$4. y = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2 + 1}.$$

$$5. y = \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 + 6x + 9)}{(x+1)^3}.$$

$$6. y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2}.$$

$$7. y = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 9x}.$$

$$8. y = \frac{x^3 + 1}{x}.$$

$$9. y = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{(x+1)^2}.$$

$$10. y = \frac{(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 9)}{\frac{1}{4}(x^2 - x^4)}.$$

$$11. y = e^{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}}.$$

$$12. y = \frac{e^x}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$13. y = \log_2(6 - x - x^2).$$

$$14. y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}}.$$

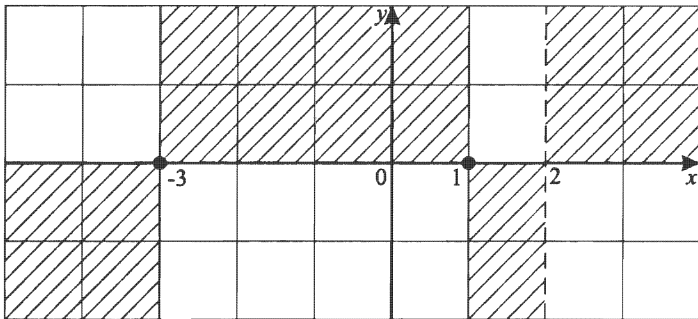
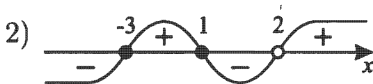
$$15. y = e^{\frac{x - x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}}.$$

Решение тренировочной работы

$$1. y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}.$$

$$y = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty);$$



$$3) (x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 3 & x - 2 \\ -x^2 - 2x & x + 4 \\ \hline 4x - 3 & \\ -4x - 8 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

$y = x + 4$ — наклонная асимптота.

$$y = x + 4 + \frac{5}{x-2};$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow x + 4).$$

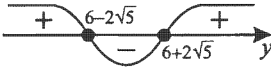
Так как $\frac{5}{x-2} \neq 0$, то пересечения графика $y(x)$ с наклонной асимптотой нет.

$$4) \text{ Выясним } E(y) \text{ для } y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}.$$

$$yx - 2y = x^2 + 2x - 3; \quad x^2 + (2 - y)x + 2y - 3 = 0;$$

$$D = (2 - y)^2 - 4(2y - 3) = y^2 - 12y + 16 \geq 0;$$

$$y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 16} = 6 \pm 2\sqrt{5}.$$



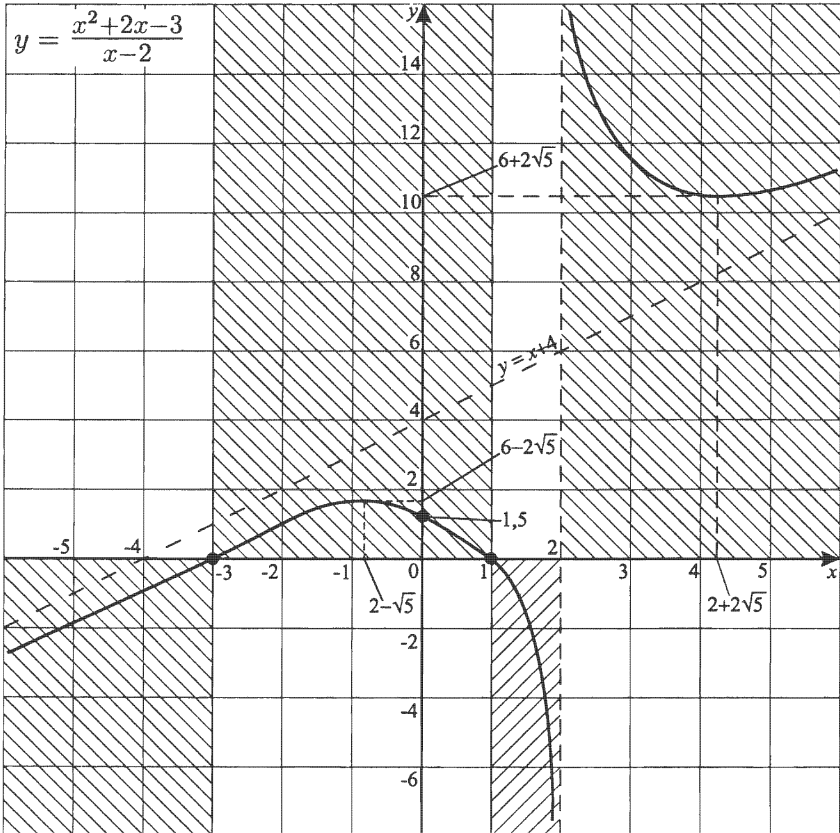
$$E(y) = (-\infty; 6 - 2\sqrt{5}] \cup [6 + 2\sqrt{5}; +\infty).$$

Для $x^2 + (2 - y)x + 2y - 3 = 0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы, т. е. $x_0 = \frac{y-2}{2}$.

Пусть $y_1 = 6 + 2\sqrt{5}$, $x_1 = \frac{6+2\sqrt{5}-2}{2} = 2 + \sqrt{5}$;

$$y_2 = 6 - 2\sqrt{5}, \quad x_2 = \frac{6-2\sqrt{5}-2}{2} = 2 - \sqrt{5}.$$

Эскиз графика:

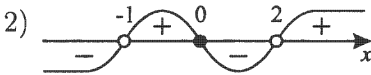


Обратите внимание, что деления на осях разномасштабны.

2. $y = \frac{x^3}{x^2-x-2}$.

Так как $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, то $y = \frac{x^3}{(x-2)(x+1)}$.

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$;



3) $(x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$; $(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;
 $(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$; $(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 + 2x} \quad \left| \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \right.$$

$$\frac{-x^2 - x - 2}{3x + 2}$$

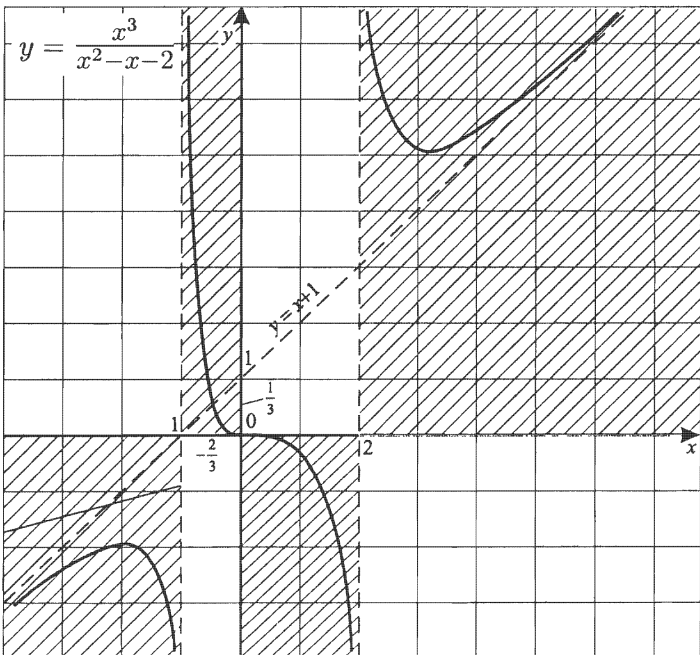
$x = -1, x = 2$ — вертикальные асимптоты,

$y = x + 1$ — наклонная асимптота.

$$y = \frac{x^3}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

При $3x + 2 = 0 \quad x = -\frac{2}{3}$.

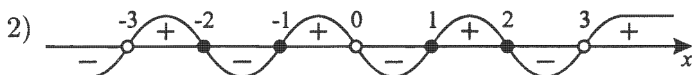
График $y(x)$ пересекает наклонную асимптоту.



$$3. y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 9x}.$$

$$y = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)}{x(x+3)(x-3)}.$$

$$1) D(y): x \neq \pm 3; x \neq 0.$$



$$3) (x \rightarrow 3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

$x = 0; x = 3; x = -3$ — вертикальные асимптоты.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^2 + 4 & x^3 - 9x \\ - x^4 - 9x^2 & \hline \hline 4x^2 + 4 & x \end{array}$$

$y = x$ — наклонная асимптота.

$$y = x + \frac{4x^2 + 4}{x^3 - 9x}.$$

Так как $4x^2 + 4 \neq 0$ для всех x , то пересечения графика функции и асимптоты нет.

$$4) \text{ Так как } y(-x) = \frac{(-x)^4 - 5(-x)^2 + 4}{(-x)^3 - 9(-x)} = -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 9x} = -y(x), \text{ то функция — нечетная.}$$

Значит график — центрально-симметричен относительно начала координат.

5) Контрольные точки:

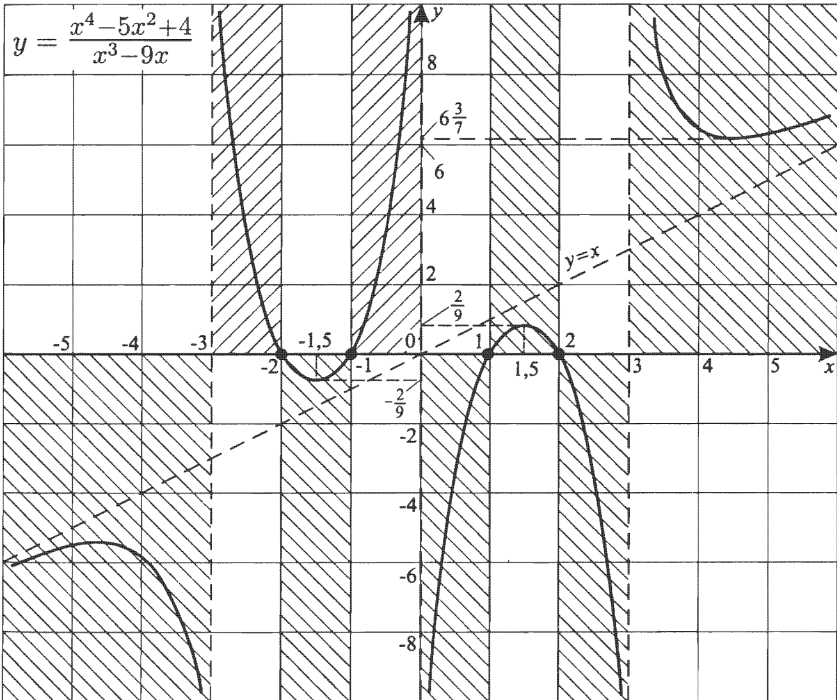
$$x = -4; y = -6\frac{3}{7};$$

$$x = 4; y = 6\frac{3}{7};$$

$$x = 1,5; y \approx \frac{2}{9};$$

$$x = -1,5; y \approx -\frac{2}{9}.$$

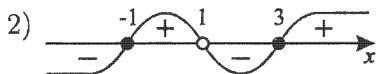
Эскиз графика:



Обратите внимание, деления на осях разномасштабны.

$$4. y = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2+1}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; +\infty).$$



$$3) (x+1)(x-1)(x-3) = (x^2-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x + 3 & x^2 + 1 \\ \hline x^3 + & x \\ \hline -3x^2 - 2x + 3 & \\ -3x^2 - & 3 \\ \hline -2x + 6 & \end{array}$$

$$y = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x^2+1} = x - 3 + \frac{6-2x}{x^2+1}.$$

$y = x - 3$ — наклонная асимптота.

При $6 - 2x = 0$; $x = 3$ график пересекает наклонную асимптоту.

4) Вертикальной асимптоты нет,
так как $x^2 + 1 \neq 0$ для всех x .

5) Контрольные точки:

$$x = 0; y = 3;$$

$$x = 4; y = \frac{15}{17},$$

т. е. график ниже асимптоты на интервале $(3; +\infty)$.

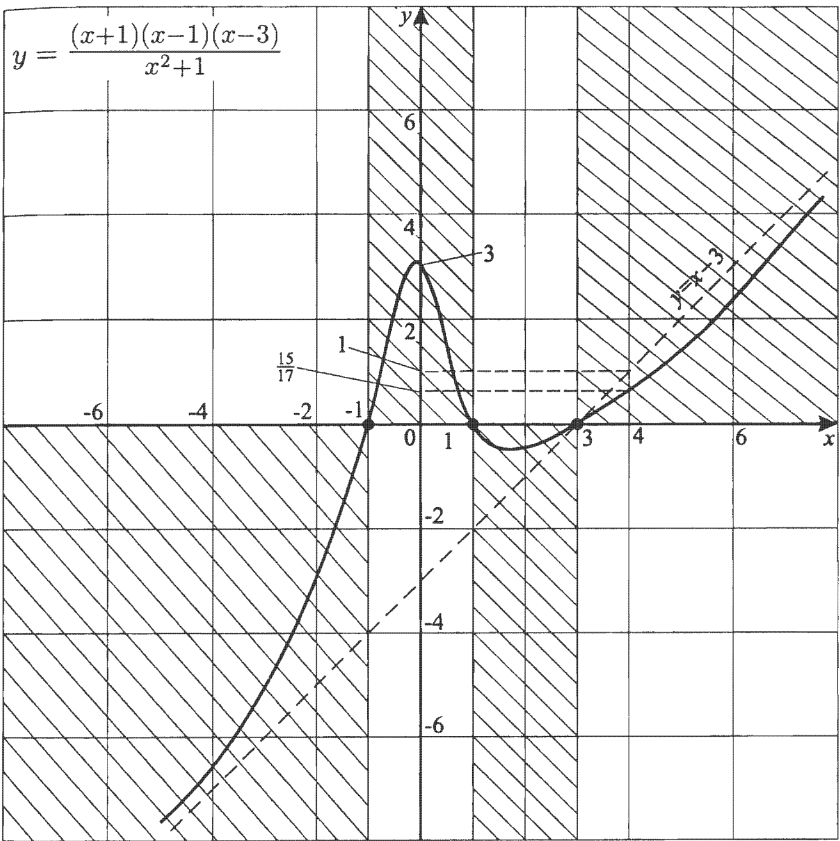
Выясним в точке $(3; 0)$: график функции касается прямой $y = x - 3$ или пересекает ее.

$$y = x - 3;$$

$$y_1 = 4 - 3 = 1.$$

Очевидно, пересекает,

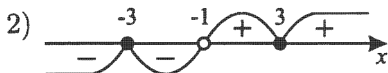
$$\text{так как } y(4) = \frac{(4+1)(4-1)(4-3)}{4^2+1} = \frac{15}{17} < 1.$$



$$5. y = \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 + 6x + 9)}{(x+1)^3}.$$

$$\frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 + 6x + 9)}{(x+1)^3} = \frac{(x-3)^2(x+3)^2}{(x+1)^3}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$



$$3) \begin{array}{r} (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 6x + 9) = x^4 - 18x^2 + 81 \\ \begin{array}{r} x^4 - \quad \quad 18x^2 + \quad \quad 81 \\ x^4 + 3x^3 + \quad 3x^2 + \quad x \\ \hline -3x^3 - 21x^2 - \quad x + 81 \\ - \quad -3x^3 - \quad 9x^2 - 9x - 3 \\ \hline \quad \quad -12x^2 + 8x + 84 \end{array} \left| \begin{array}{l} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \hline x - 3 \end{array} \right. \end{array}$$

$$y = x - 3 - \frac{4(3x^2 - 2x - 21)}{(x+1)^3};$$

$$3x^2 - 2x - 21 = 0;$$

$x = 3$; $x = -\frac{7}{3}$ — абсциссы точек пересечения асимптоты с графиком.

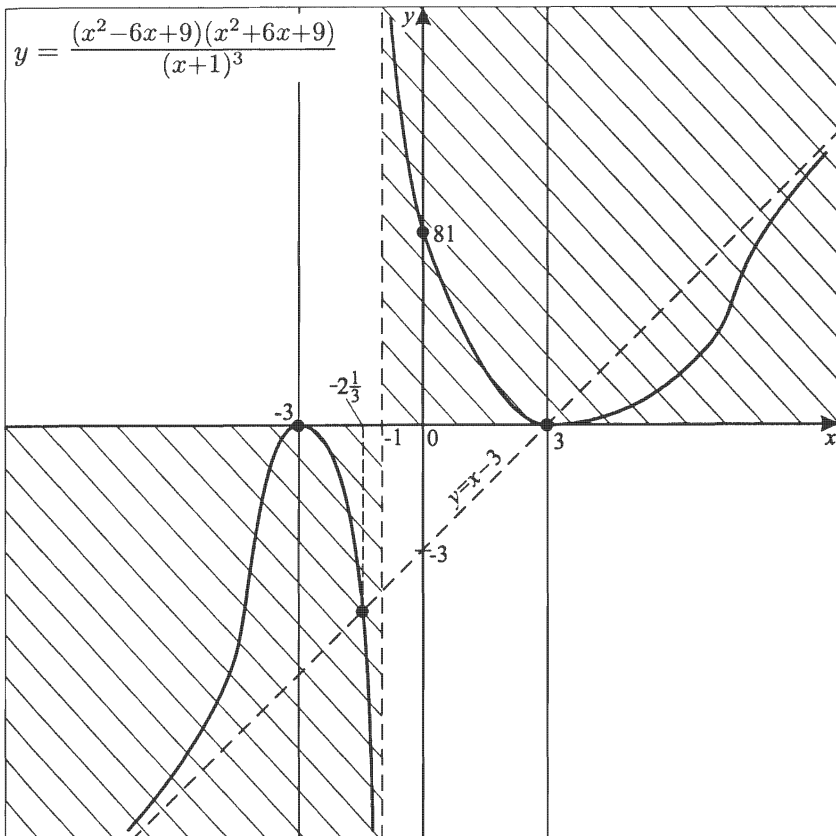
4) $x = -1$ — вертикальная асимптота, так как

$$(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

5) $x = 0$; $y = 81$.

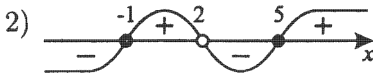
Эскиз графика:



Деления на осях разномасштабны.

$$6. y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$$



$$3) \begin{array}{r} x^2 - 4x - 5 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{x^2 - 2x} \quad \quad | \quad x - 2 \\ -2x - 5 \quad \quad \quad | \\ - \quad \quad \quad \quad \quad | \\ \underline{-2x + 4} \quad \quad \quad | \\ -9 \quad \quad \quad \quad \quad | \end{array}$$

$$y = x - 2 - \frac{9}{x - 2};$$

$y = x - 2$ — наклонная асимптота.

Очевидно, что график функции не пересекает наклонную асимптоту.

4) $x = 2$ — вертикальная асимптота, так как

$$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

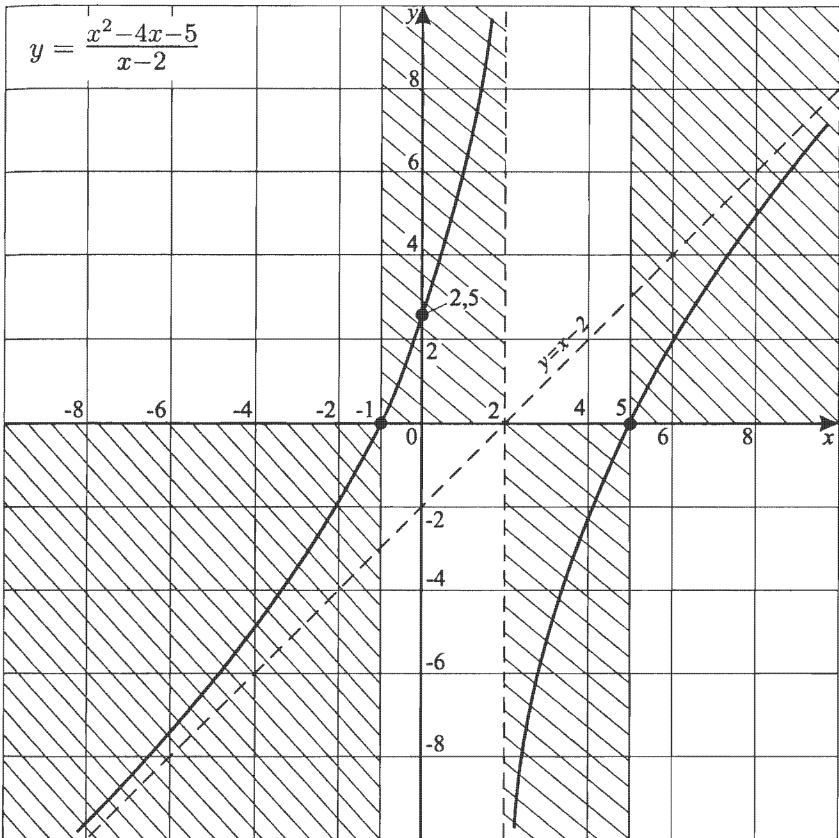
$$(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

5) $yx - 2y = x^2 - 4x - 5; x^2 - (4 + y)x + 2y - 5 = 0;$

$$D = (4 + y)^2 - 4(2y - 5) = y^2 + 36 > 0 \text{ при всех } y;$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty);$$

6) $x = 0; y = 2, 5.$



Из графического эскиза полезно подчеркнуть, что

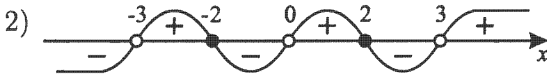
а) функция возрастает на $(-\infty; 2)$;

б) функция возрастает на $(2; \infty)$,

но все же она не является возрастающей функцией.

$$7. y = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 9x}.$$

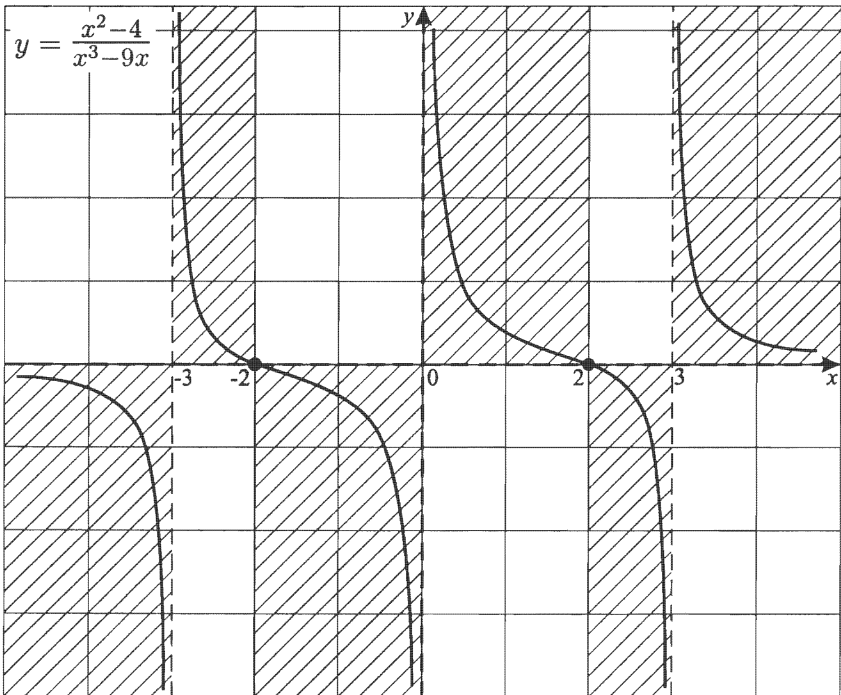
$$1) D(y): x \neq \pm 3; x \neq 0.$$



$$3) x = 3; x = -3; x = 0 \text{ — вертикальные асимптоты.}$$

$$4) (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$$

$$y = 0 \text{ — горизонтальная асимптота.}$$



Из эскиза графика следует, что функция кусочно-монотонная — на каждом из интервалов непрерывности убывает, но убывающей не является.

$$8. y = \frac{x^3+1}{x}.$$

$$\frac{x^3+1}{x} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$



$$3) y = \frac{x^3+1}{x} = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$(x \rightarrow 0+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

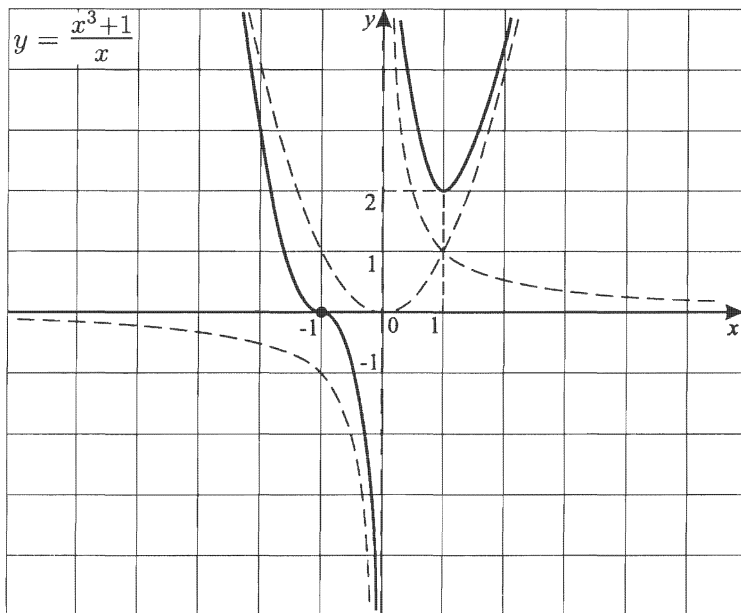
$$(x \rightarrow 0-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow x^2).$$

Можно и иначе: $(x \rightarrow 0) \Rightarrow (y \rightarrow \frac{1}{x})$.

Итак, имеются две **асимптотические кривые**:

$y = \frac{1}{x}$ и $y = x^2$. Контрольная точка $x = 1$; $y = 2$.



$$9. y = \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{(x+1)^2}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

$$\begin{aligned} 2) x^3 - x^2 - 9x + 9 &= x^2(x-1) - 9(x-1) = \\ &= (x-1)(x-3)(x+3); \\ y &= \frac{(x-1)(x-3)(x+3)}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r|l} 3) & \begin{array}{r} x^3 - x^2 - 9x + 9 \\ x^3 + 2x^2 + x \\ \hline -3x^2 - 10x + 9 \\ -3x^2 - 6x - 3 \\ \hline -4x + 12 \end{array} \\ & \begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ x - 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= x - 3 - \frac{4(x-3)}{(x+1)^2}; \\ y &= x - 3 - \text{наклонная асимптота,} \\ &\text{так как } (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow x - 3). \end{aligned}$$

б) Выясним, в точке $(3; 0)$ график функции касается $y = x - 3$ или пересекает ее.

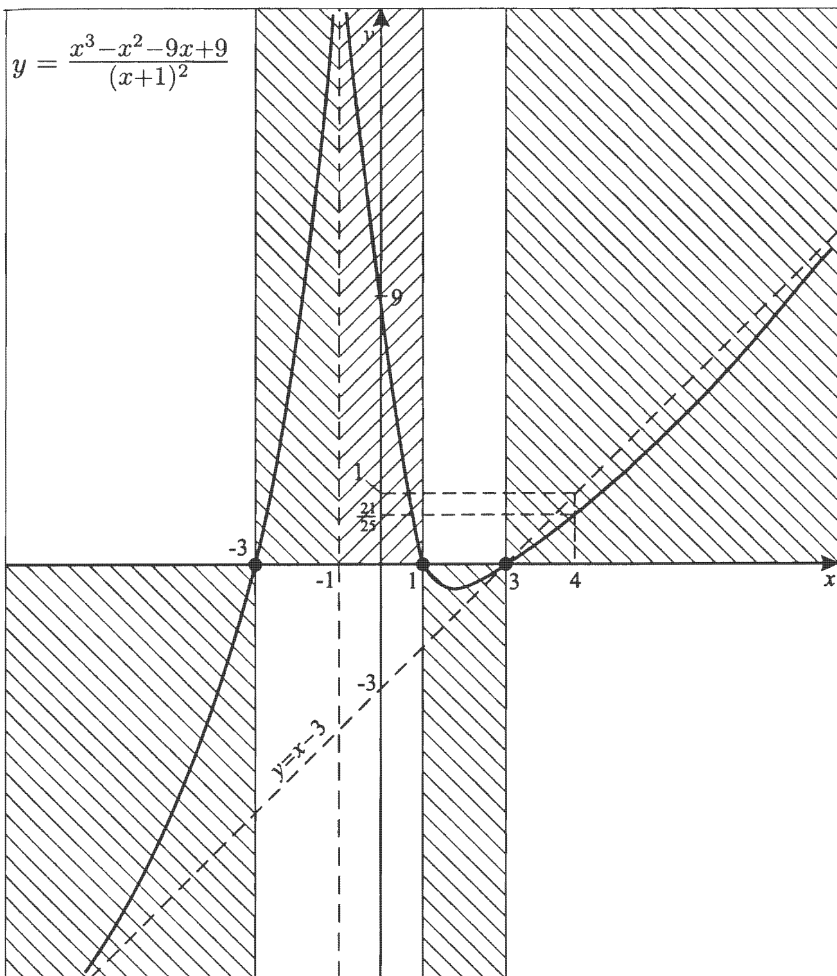
Так как при $x = 4$ $y = \frac{21}{25}$, $\frac{21}{25} < 1$ то пересекает.

$$(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty),$$

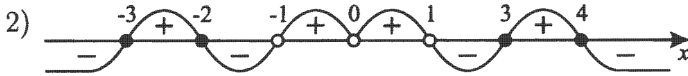
поэтому $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Эскиз графика:



$$10. y = \frac{(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 9)}{\frac{1}{4}(x^2 - x^4)}.$$

1) $D(y): x \neq \pm 1; x \neq 0$.



3) $x = 0; x = 1; x = -1$ — вертикальные асимптоты.

4) $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow -4)$.

5) $\frac{(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 9)}{\frac{1}{4}(x^2 - x^4)} = -4;$

$$x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72 = x^4 - x^2;$$

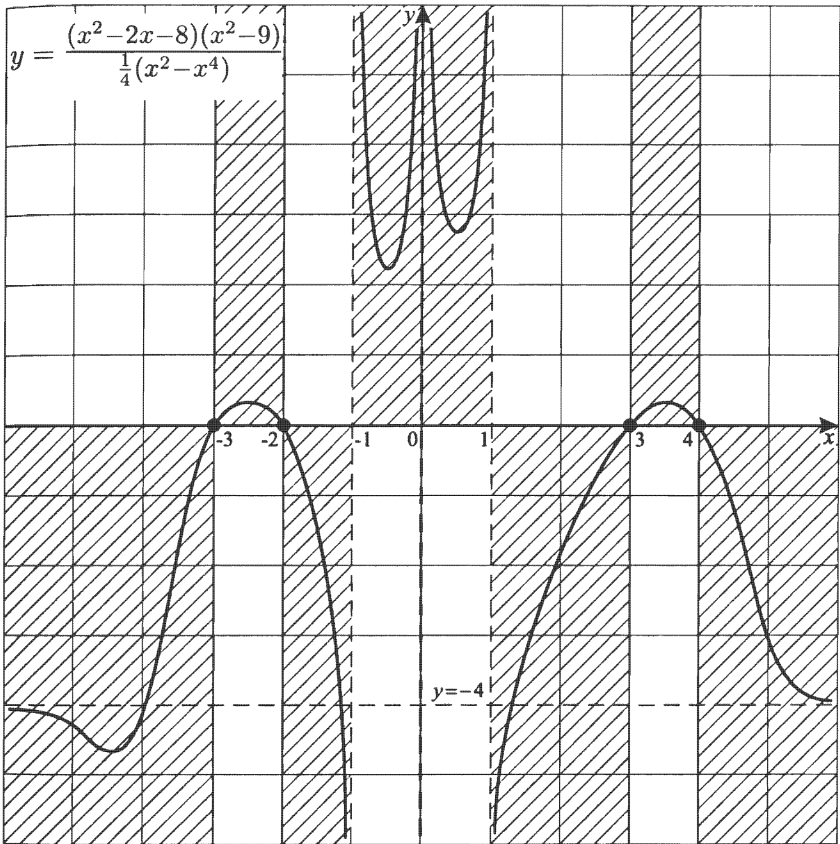
$$2x^3 + 16x^2 - 18x - 72 = 0 \quad (\varphi(x) = 0).$$

У графика $y = \varphi(x)$:

- а) на $(-2; -1)$ существует точка пересечения с осью абсцисс, так как $\varphi(-2) > 0$, а $\varphi(-1) < 0$, а значит, существует корень в силу непрерывности;
- б) на $(1; 3)$ существует точка пересечения с осью абсцисс, так как также есть корень ($\varphi(1) < 0$, $\varphi(3) > 0$);
- в) $\varphi(-10) < 0$, $\varphi(-3) > 0$, значит, третий корень на $(-10; -3)$.

Более точно это можно сделать, лишь используя формулы Кардано или используя исследование функции с помощью производной.

Непосредственная проверка $y\left(\frac{1}{2}\right) > y\left(-\frac{1}{2}\right)$ делает возможным предположить, что кривая на $(0; 1)$ находится ниже кривой на $(-1; 0)$, хотя точно это возможно утверждать, лишь используя аппарат производных.



$$11. y = e^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.$$

I. Построим $t(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

$$1) D(t) = (-\infty; +\infty),$$

так как $x^2 - x + 1 > 0$ при всех x , т. к.

$$\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -3 < 0. \end{cases}$$

$$2) t > 0 \text{ при всех } x,$$

так как $x^2 + x + 1 > 0$ при всех x ;

$$\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -3 < 0. \end{cases}$$

$$3) (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow 1),$$

так как $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, $t = 1$ — горизон-

тальная асимптота.

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1.$$

$x = 0$ — абсцисса точки пересечения графика $t(x)$ и $t = 1$.

$$4) \text{ Найдем } E(t), \text{ где } t = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

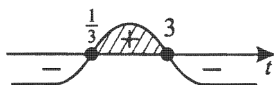
$$tx^2 - tx + t = x^2 + x + 1;$$

$$(t-1)x^2 - (t+1)x + t-1 = 0 \quad (t \neq 1);$$

$$D = (t+1)^2 - 4(t-1)^2 =$$

$$= (t+1+2t-2)(t+1-2t+2) =$$

$$= (3t-1)(3-t) \geq 0.$$



Но при $t = 1$ $x = 0$,

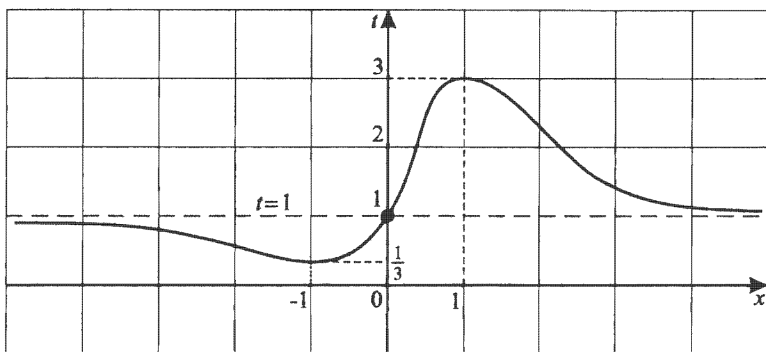
$$\text{тогда } E(t) = \left[\frac{1}{3}; 3 \right].$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; x_0 = \frac{t+1}{2(t-1)}.$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, x_1 = -1;$$

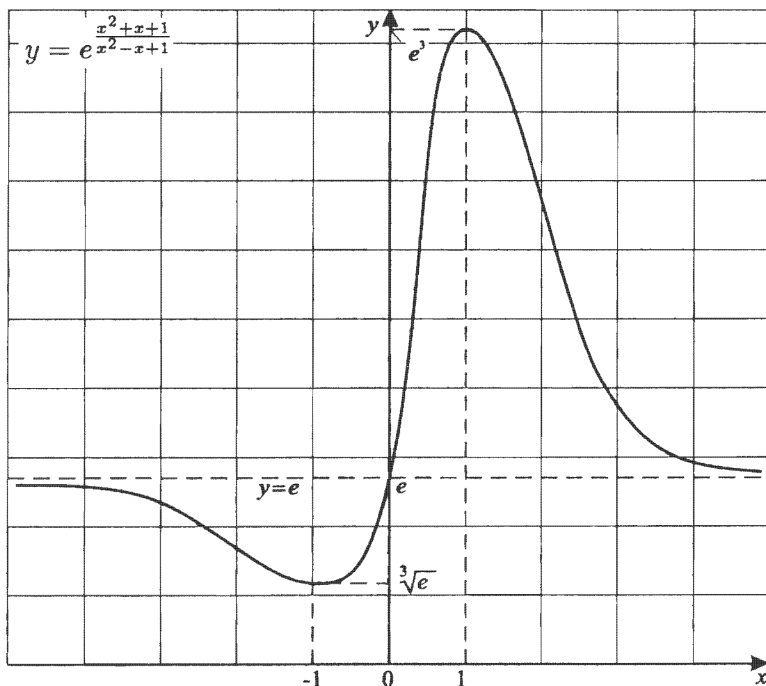
$$t_2 = 3, x_2 = 1;$$

$$t_{\max} = 3, t_{\min} = \frac{1}{3}.$$



II. $y = e^{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$. Так как $y = e^x$ — возрастающая, то $y = e^{t(x)}$ повторяет кусочную монотонность $y=t(x)$.
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow 1) \Rightarrow (y \rightarrow e)$;
 $y_{\max} = y(1) = e^3$, $y_{\min} = y(-1) = e^{\frac{1}{3}}$.

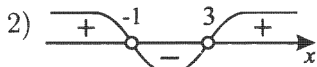
Эскиз графика:



Деления на осях разного масштаба.

$$12. y = \frac{e^x}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases}$$



$$y = \frac{e^x}{(x-3)(x+1)}.$$

$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 3 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow +\infty) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Так как $y = e^x$ растет быстрее, чем $y = x^2 - 2x - 3$,

то из $(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(\frac{e^x}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow +\infty\right)$,

но $y = e^x \rightarrow 0$ при $(x \rightarrow -\infty)$, тогда

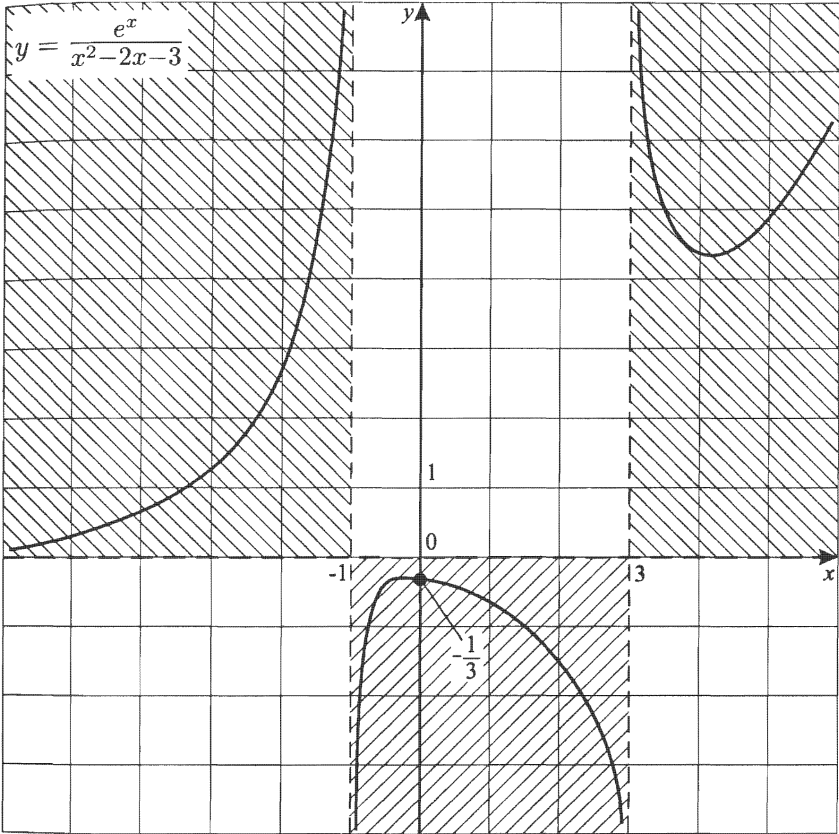
$$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (e^x \rightarrow 0) \Rightarrow \left(\frac{e^x}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow 0\right).$$

4) Можно уточнить эскиз графика контрольными точками.

$$x = 0; y = -\frac{1}{3};$$

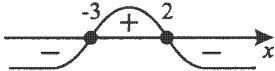
$$x = 4; y = \frac{e^4}{5} \approx 10,9.$$

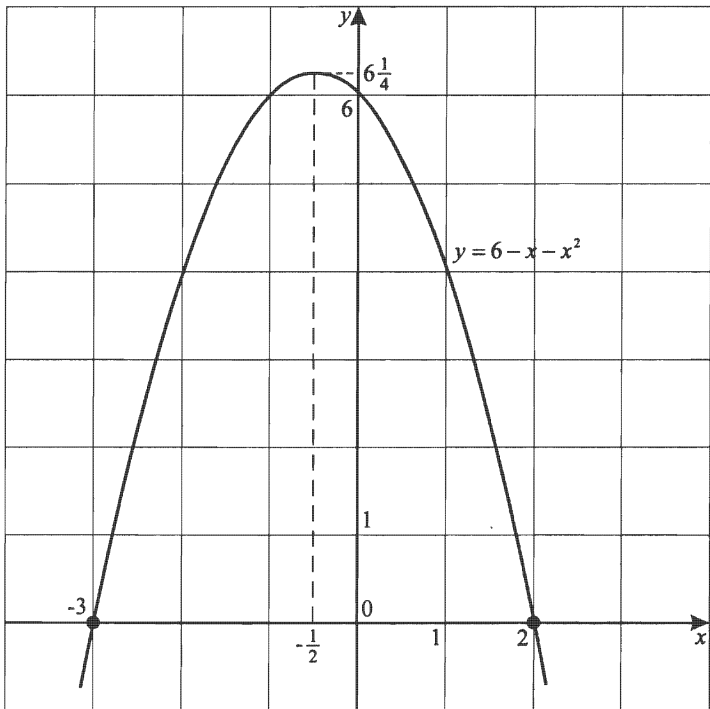
Здесь для нахождения y_{\max} и y_{\min} требуется исследование функции с помощью производной.



13. $y = \log_2(6 - x - x^2)$.

$$\begin{aligned} \text{а) } t(x) &= 6 - x - x^2 = -(x^2 + x - 6) = -\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4}\right) = \\ &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$t(x) = 0, x = -3; x = 2.$ 



б) $D(y) = (-3; 2)$.

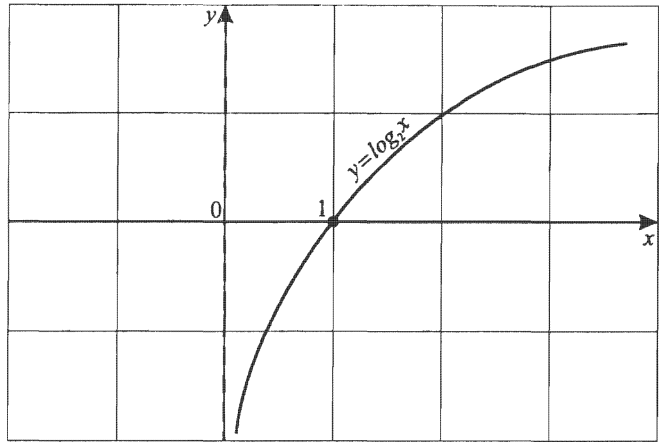
1) Известно, что график $y = \log_2 x$ таков, что $(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

2) Тогда для $y = \log_2(6 - x - x^2)$

$$(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty) \text{ и}$$

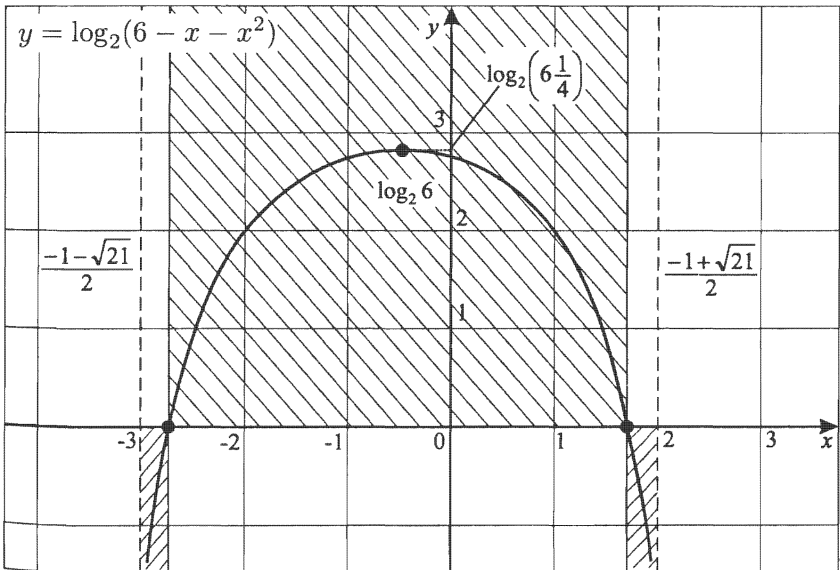
$$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

$t_{\max} = 6\frac{1}{4}$. $y = \log_2 t$ — возрастающая, поэтому $y = \log_2(6 - x - x^2)$ повторяет кусочную монотонность $y = t(x)$.



$$y = 0; \log_2(6 - x - x^2) = 0; x^2 + x - 5 = 0.$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}.$$



$$14. \quad y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}.$$

В общем случае $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$ не является дробно-рациональной функцией, но введя вспомогательную дробно-рациональную функцию $t(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$, можно успешно строить график $y = e^{\frac{x^2}{x^2-2x-3}}$.

$$I. \quad 1) \quad t(x) = \frac{x^2}{x^2-2x-3};$$

$$D(t): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases}$$



$$3) \quad (x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow 1),$$

$$\text{так как } \frac{x^2}{x^2-2x-3} = \frac{x^2}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})} = \frac{1}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}};$$

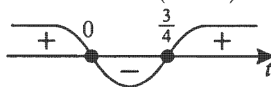
$$4) \quad \frac{x^2}{x^2-2x-3} = 1; \quad x = -1,5, \text{ т.е. точка } (-1,5; 1) \text{ — точка пересечения графиков } t(x) \text{ и } t = 1.$$

$$5) \quad \text{Выясним } E(t).$$

$$t = \frac{x^2}{x^2-2x-3}; \quad tx^2 - 2tx - 3t = x^2;$$

$$(t-1)x^2 - 2tx - 3t = 0;$$

$$D = t^2 + 3t(t-1) = 4t^2 - 3t = t(4t-3) \geq 0.$$

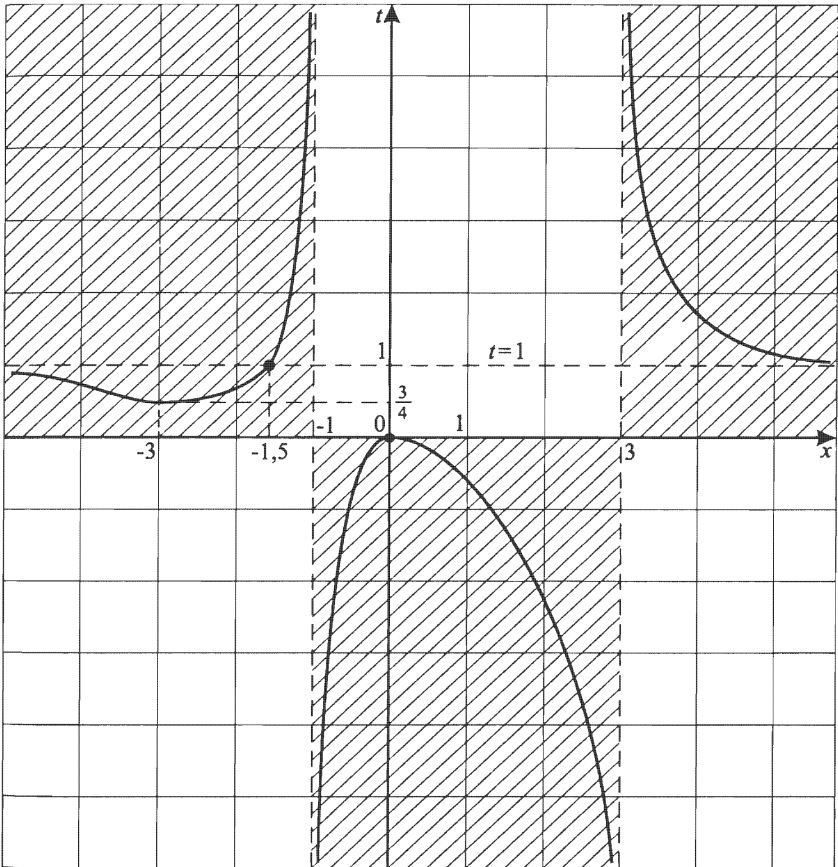


$$E(t) = (-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right).$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad x_0 = \frac{t}{t-1};$$

$$t_1 = 0, \quad x_1 = 0; \quad t_2 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-1} = -3.$$

Эскиз графика $t(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$ готов.



II. Теперь, зная эскиз графика $t(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}$, будем строить $y = e^{\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3}}$.

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

2) $y > 0$ для всех $x \in D(y)$, так как $y = e^{t(x)} > 0$.

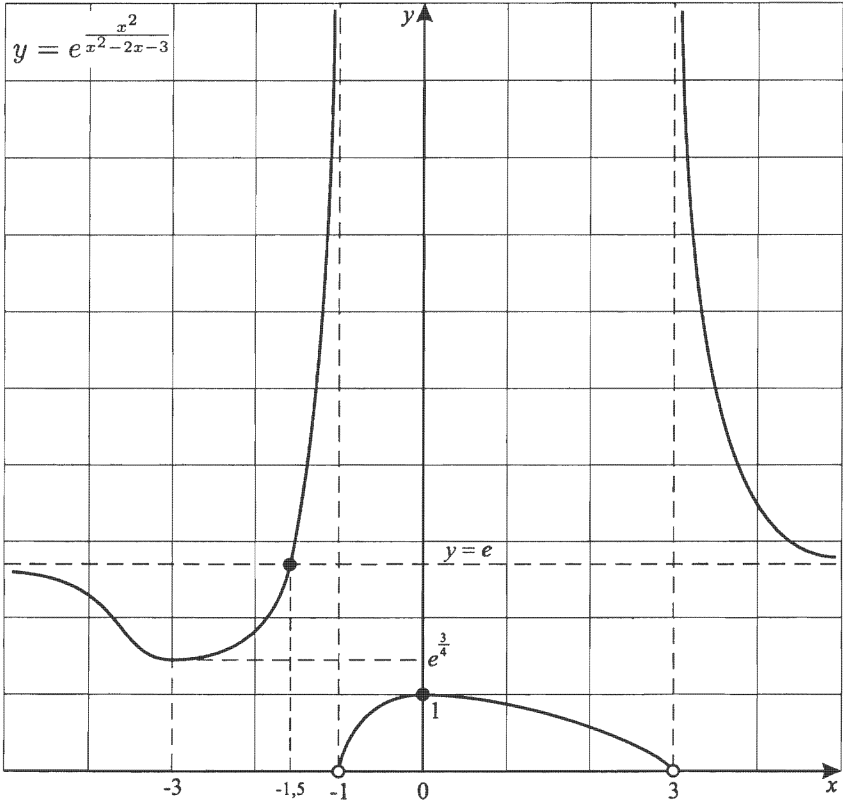
$$3) (x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty),$$

$$(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0),$$

$$\text{так как из } (x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (e^x \rightarrow 0).$$

$$\begin{aligned}(x \rightarrow -1 + 0) &\Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0); \\(x \rightarrow -1 - 0) &\Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\(x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (t \rightarrow 1) \Rightarrow (y \rightarrow e).\end{aligned}$$

- 4) $t = 1$ при $x = -1,5$, значит $y = e$ при $x = -1,5$.
Если $x_1 = 0$, то $t_1 = 0$, $y_1 = 1$, если $x_2 = -3$,
то $t_2 = \frac{3}{4}$, $y_2 = e^{\frac{3}{4}}$. $y_{\min} = e^{\frac{3}{4}}$; $y_{\max} = 1$.



- 5) Так как $y = e^x$ — монотонно возрастающая, то для $y = e^{t(x)}$ характер кусочной монотонности сохранится тот же, что и для $t(x)$.
Плавно соединяем $A(-1; 0)$; $B(0; 1)$; $C(3; 0)$ и получим горку.
Далее аналогично строим на $(-\infty; -1)$ и на $(3; +\infty)$.

$$15. y = e^{\frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}}.$$

I. Для построения $y(x)$ построим

$$t(x) = \frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}.$$

$$1) D(t): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

$$2) \frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)} = \frac{x(1-x)(1+x)}{(x-3)(x+1)(x+2)} = \\ = \frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)}.$$



3) Очевидно, что $x = -1$ не является вертикальной асимптотой.

$$(x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow -1).$$

$$4) t(-1) = \frac{-(1+1)}{(-1-3)(-1+2)} = \frac{1}{2}.$$

Точка $(-1; \frac{1}{2})$ исключается из графика $t = t(x)$.

Выясним, существуют ли точки пересечения графика $t = t(x)$ и $t = -1$, или их нет.

$$\frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)} = -1;$$

$$x - x^2 = -x^2 + x + 6;$$

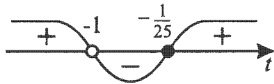
$$0 = 6,$$

т. е. нет общих точек.

5) Найдем $E(t)$.

$$t = \frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)};$$

$$\begin{aligned}
 tx^2 - tx - 6t &= x - x^2; \\
 (t+1)x^2 - (t+1)x - 6t &= 0; \\
 D &= (t+1)^2 + 24t(t+1) = (t+1)(25t+1) \geq 0.
 \end{aligned}$$



$$E(t) = (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{25}; +\infty\right).$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; x_0 = \frac{1}{2};$$

$$t_1 = -\frac{1}{25}; x_1 = \frac{1}{2};$$

$$t_{\min} = -\frac{1}{25}.$$

- 6) Можно доказать, что график функции $t = t(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$,

$$\text{т. е. } \forall a \in D(t): t\left(\frac{1}{2} + a\right) = t\left(\frac{1}{2} - a\right).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 t\left(\frac{1}{2} + a\right) &= \frac{(0,5+a)(0,5-a)(1,5+a)}{(a-2,5)(a+1,5)(a+2,5)} = \\
 &= \frac{(0,5+a)(0,5-a)}{(a-2,5)(a+2,5)}
 \end{aligned}$$

$$(a \neq -1,5);$$

$$\begin{aligned}
 t\left(\frac{1}{2} - a\right) &= \frac{(0,5-a)(0,5+a)(1,5-a)}{-(2,5+a)(1,5-a)(2,5-a)} = \\
 &= \frac{(0,5+a)(0,5-a)}{(a-2,5)(a+2,5)}
 \end{aligned}$$

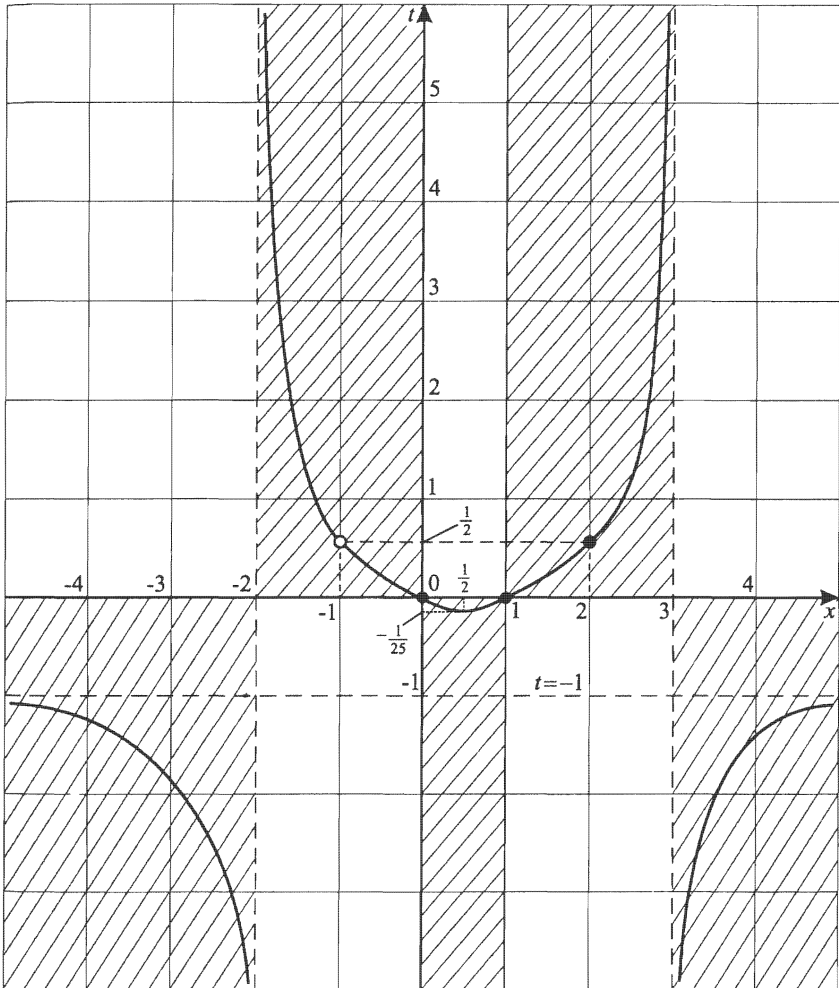
$$(a \neq 1,5).$$

Подставляя вместо a переменную x , получаем $x \neq -1$ и $x \neq 2$.

Строго говоря, симметрии графика относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ нет, так как $2 \in D(y)$, а $-1 \notin D(y)$.

Но если положить $x \neq -1$ и $x \neq 2$, то на этих интервалах график функции $t = t(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$, а тогда и график $y = y(x)$ при этих условиях симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$.

Эскиз $t(x) = \frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}$ Готов.



II. Теперь, используя график $y = y(x)$, построим

$$y = e^{\frac{x-x^3}{(x-3)(x+1)(x+2)}}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

2) Так как $e^{t(x)} > 0$, то $y > 0$ при всех x из области определения.

3) Так как $x \neq -1$, $y = e^{\frac{x(1-x)}{(x-3)(x+2)}}$.

$$(x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$$

$$(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow -1) \Rightarrow \left(y \rightarrow \frac{1}{e}\right).$$

4) Контрольные точки:

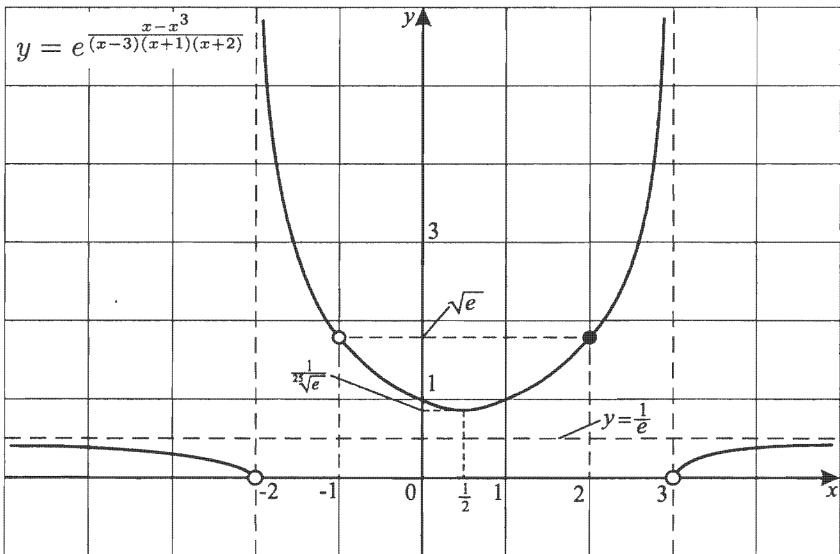
$$x_1 = 0; \quad t_1 = 0; \quad y_1 = 1;$$

$$x_2 = 1; \quad t_2 = 0; \quad y_2 = 1;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}; \quad t_3 = -\frac{1}{25}; \quad y_3 = e^{-\frac{1}{25}};$$

$$x_4 = -1; \quad t_4 = \frac{1}{2}; \quad y_4 = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$y_{\min} = y(x_3) = e^{-\frac{1}{25}} = y\left(\frac{1}{2}\right).$$



2

Проверочные задания

Условия проверочных заданий

Исследуйте функции и постройте их графики.

1. $y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 9}$.

2. $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}$.

3. $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

4. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

5. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

6. $y = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$.

7. $y = \frac{1}{x^3 - 3x}$.

$$8. y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)}.$$

$$9. y = \frac{1}{2x(1-2x^2)}.$$

$$10. y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$$

$$11. y = \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}.$$

$$12. y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}.$$

$$13. y = \frac{x^3-1}{x}.$$

$$14. y = \frac{-4x^3+8x}{x^3-1}.$$

$$15. y = \frac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)}.$$

$$16. y = \frac{x(x^2-3x+2)}{(x-3)(x^2+3x+2)}.$$

$$17. y = \frac{x^2+x-2}{x-3}.$$

$$18. y = \frac{3x^3}{3x^2+4x-4}.$$

$$19. y = \frac{(x-6)^2}{x^5-3x^3+2x^2}.$$

$$20. y = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

$$21. y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 9x}.$$

$$22. y = \frac{x^3 - 9x}{x^2 + x + 2}.$$

$$23. y = \frac{-4x^3 + 12x}{x^2 + x - 2}.$$

$$24. y = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 4x}.$$

$$25. y = \frac{1}{x^2(x^2 - 3x + 2)}.$$

$$26. y = \frac{x^2(x^2 - 3x + 2)}{(x + 3)(x + 1)}.$$

$$27. y = e^{\frac{x^3 - 3x}{x^4 - 5x^2 + 4}}.$$

$$28. y = \frac{x + 3}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

$$29. y = e^{\frac{x^3 - 3x}{x^2 - x - 2}}.$$

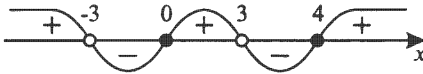
$$30. y = e^{\frac{1}{\sin x}}.$$

Решения проверочных заданий

$$1. y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 9}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

$$2) y = \frac{x(x-4)}{(x+3)(x-3)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 3 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 3 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -3 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 9} = \frac{1 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}}.$$

Итак, из $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1)$;

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

Выясним, пересекает ли горизонтальная асимптота график $y = y(x)$.

Для этого решим уравнение $y(x) = 1$.

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 9} = 1,$$

$$x^2 - 4x = x^2 - 9,$$

$$x = 2,25.$$

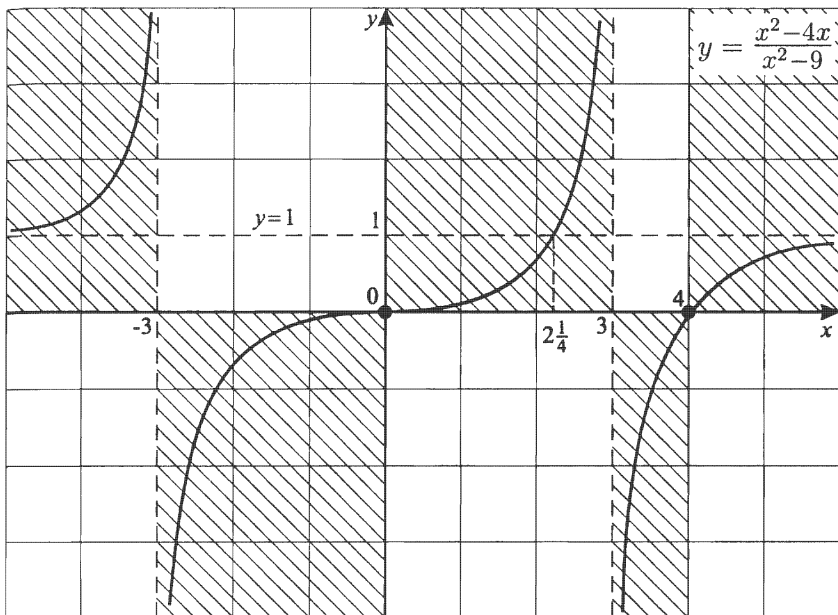
4) Отметим, что функция кусочно-монотонная и на каждом интервале непрерывности возрастает, т. е.

на $(-\infty; -3)$ $y = y(x)$ возрастает,

на $(-3; 3)$ $y = y(x)$ возрастает,

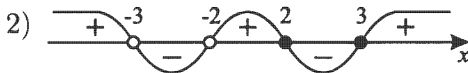
на $(3; \infty)$ $y = y(x)$ возрастает,

но возрастающей функцией не является.



$$2. y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq -3. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow -2 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}.$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1).$$

$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} = 1$, $x = 0$ — абсцисса точки пересечения горизонтальной асимптоты и графика $y = y(x)$;

4) Найдем $E(y)$.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} = y;$$

$$yx^2 + 5xy + 6y = x^2 - 5x + 6;$$

$$(y - 1)x^2 + 5(y + 1)x + 6(y - 1) = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-5(y+1) \pm \sqrt{25(y+1)^2 - 24(y-1)^2}}{2(y-1)} =$$

$$= \frac{-5(y+1) \pm \sqrt{y^2 + 98y + 1}}{2(y-1)};$$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= -49 \pm \sqrt{(49)^2 - 1} = -49 \pm \sqrt{(49 - 1)(49 + 1)} = \\ &= -49 \pm \sqrt{50 \cdot 48} = -49 \pm 5 \cdot 4\sqrt{6} = -49 \pm 20\sqrt{6}. \end{aligned}$$



$$E(y) = (-\infty; -49 - 20\sqrt{6}] \cup [-49 + 20\sqrt{6}; +\infty).$$

$$\text{При } D = 0 \quad x_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ т. е. } x_0 = -\frac{5(y+1)}{2(y-1)}.$$

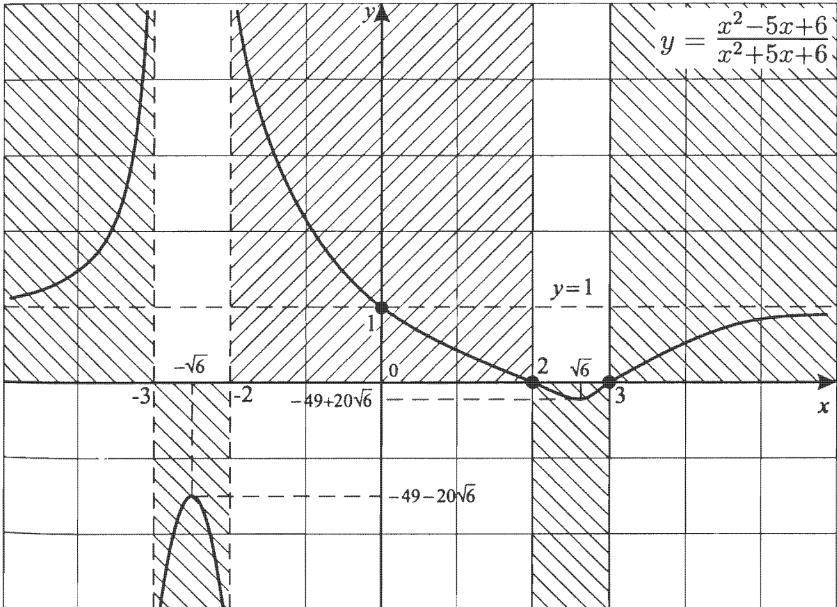
5) При каких x $y = -49 + 20\sqrt{6}$; $y = -49 - 20\sqrt{6}$?

Пусть $y_1 = -49 + 20\sqrt{6}$, тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5(-48+20\sqrt{6})}{2(-50+20\sqrt{6})} = -\frac{-12+5\sqrt{6}}{-5+2\sqrt{6}} = \\ &= -\frac{(-12+5\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{(2\sqrt{6})^2-25} = -\frac{-60+60+\sqrt{6}}{24-25} = +\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Аналогично для $y_2 = -49 - 20\sqrt{6}$:

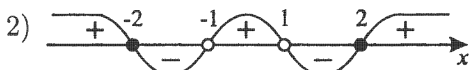
$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{5(-49-20\sqrt{6}+1)}{2(-49-20\sqrt{6}-1)} = -\frac{5 \cdot 4(12+5\sqrt{6})}{2 \cdot 10(5+2\sqrt{6})} = \\ &= -\frac{(12+5\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = -\frac{\sqrt{6}}{25-24} = -\sqrt{6}. \end{aligned}$$



$$3. y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

$$y = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$



$$3) (x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1);$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1;$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 1;$$

$$-4 = -1; \text{ нет решений,}$$

т. е. пересечения нет.

$$4) \text{ Найдем } E(y).$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1};$$

$$yx^2 - y = x^2 - 4;$$

$$(y - 1)x^2 = y - 4;$$

$$x^2 = \frac{y - 4}{y - 1} \geq 0.$$



$$\text{Итак, } E(y) = (-\infty; 1) \cup [4; +\infty).$$

$$5) \text{ Отметим, что}$$

а) $D(y)$ есть симметричное множество;

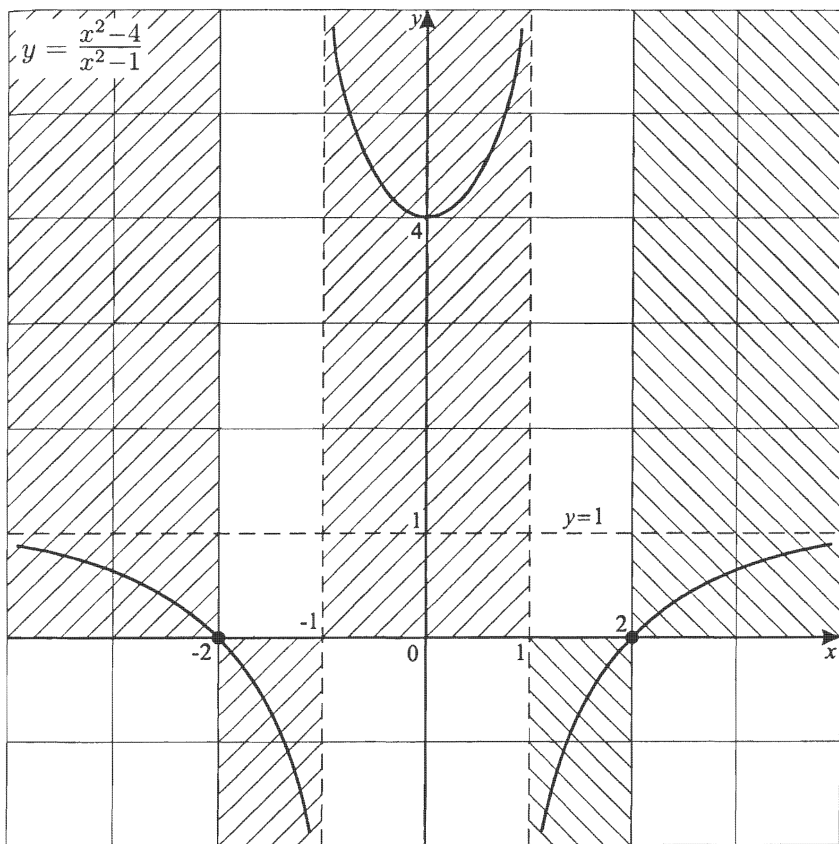
б) для всех x $y(-x) = y(x)$, (функция четная)

т. е. график ее симметричен относительно Oy .

$$6) \text{ Можно точно указать интервалы монотонности:}$$

а) $y = y(x)$ возрастает на $[0; 1)$ и на $(1; \infty)$;

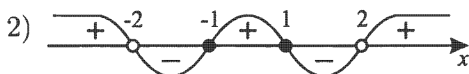
б) $y = y(x)$ убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 0]$.



$$4. y = \frac{x^2-1}{x^2-4}.$$

$$y = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$



$$3) (x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

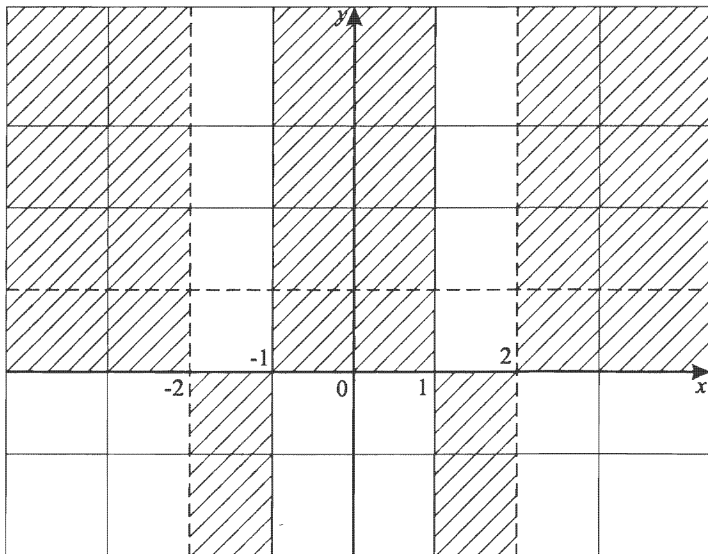
$$(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

$$\text{При } (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1).$$



$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} = 1, \text{ нет решений, т. е.}$$

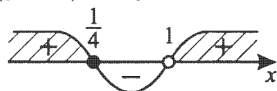
пересечений с горизонтальной асимптотой нет.

4) Найдем $E(y)$.

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-4};$$

$$yx^2 - 4y = x^2 - 1 \quad x^2(y-1) = 4y-1;$$

$$x^2 = \frac{4y-1}{y-1} \geq 0.$$



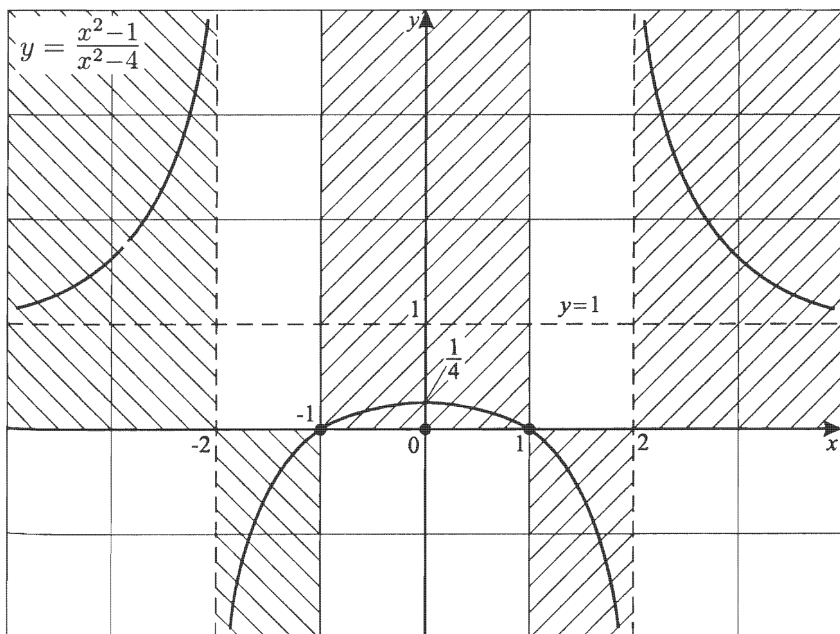
$$E(y) = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right] \cup (1; +\infty).$$

5) Учитывая, что $y = y(x)$ — четная, график $y = y(x)$ симметричен относительно оси Oy , так как $y(-x) = y(x)$ и $D(y)$ — симметричное множество. И так как $y(0) = \frac{1}{4}$, можно полагать $y(0) = y_{\max} = \frac{1}{4}$.

6) При необходимости эскиз графика можно уточнить, используя контрольные точки:

а) $x = 3; y = \frac{9-1}{9-4} = 1,6;$

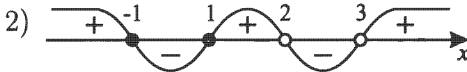
б) в силу четности: $x = -3; y = 1,6.$



$$5. y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}.$$

$$y = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-3)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \end{aligned}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}, \quad (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1); \quad y = 1 -$$

горизонтальная асимптота.

$$4) \frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 1;$$

$$x^2 - 1 = x^2 - 5x + 6; \quad 5x = 7;$$

$x = 1,4$ — абсцисса точки пересечения графика $y = y(x)$ и горизонтальной асимптоты.

5) Найдем $E(y)$.

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6};$$

$$yx^2 - 5xy + 6y = x^2 - 1;$$

$$(y-1)x^2 - 5xy + 6y + 1 = 0; \quad (y \neq 1);$$

$$x_{1,2} = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 4(y-1)(6y+1)}}{2(y-1)} = \frac{5y \pm \sqrt{y^2 + 20y + 4}}{2(y-1)};$$

$$D \geq 0; \quad y^2 + 20y + 4 \geq 0;$$

$$y_{1,2} = -10 \pm 4\sqrt{6}.$$



$$E(y) = (-\infty; -10 - 4\sqrt{6}] \cup [-10 + 4\sqrt{6}; +\infty).$$

$$\text{При } D = 0 \quad x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad x_0 = \frac{5y}{2(y-1)}.$$

Пусть $y_1 = -10 - 4\sqrt{6}$; $x_1 = \frac{5y_1}{2(y_1-1)}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5(-10-4\sqrt{6})}{2(-11-4\sqrt{6})} = \frac{5(5+2\sqrt{6})(11-4\sqrt{6})}{11^2-(4\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{5(55-48+2\sqrt{6})}{25} = \frac{7+2\sqrt{6}}{5} \approx 2,4. \end{aligned}$$

Пусть $y_2 = -10 + 4\sqrt{6}$; $x_2 = \frac{5y_2}{2(y_2-1)}$;

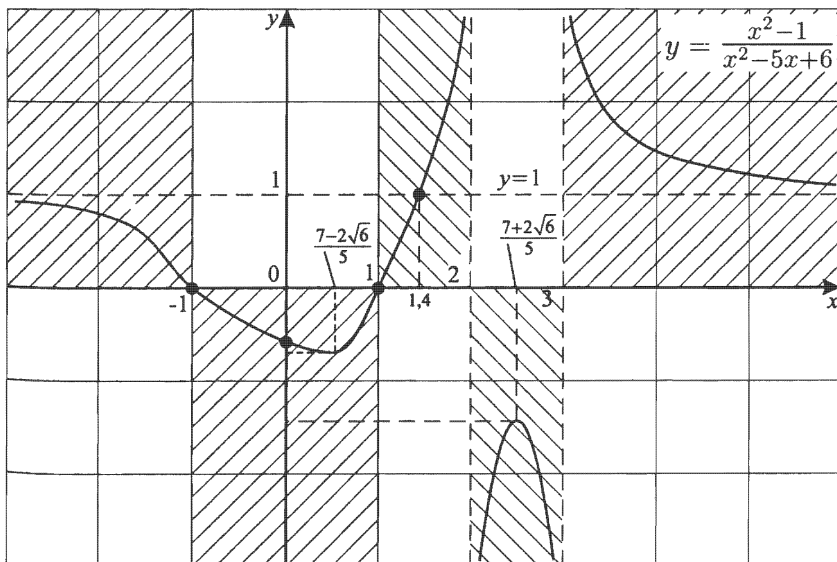
$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5(-10+4\sqrt{6})}{2(-11+4\sqrt{6})} = -\frac{5(-10+4\sqrt{6})(11+4\sqrt{6})}{2(11-4\sqrt{6})(11+4\sqrt{6})} = \\ &= \frac{7-2\sqrt{6}}{5} \approx 0,4. \end{aligned}$$

6) Контрольные точки $x = 0$; $y = -\frac{1}{6}$.

Выясним, что больше — $-10 + 4\sqrt{6}$ или $-\frac{1}{6}$.

Допустим, $-10 + 4\sqrt{6} < -\frac{1}{6} \iff 4\sqrt{6} < 9\frac{5}{6} \iff 24\sqrt{6} < 59 \iff 576 \cdot 6 < 59^2 \iff 3456 < 3481$ — истина, значит, действительно, $-10 + 4\sqrt{6} < -\frac{1}{6}$.

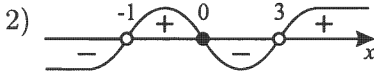
Эскиз графика:



6. $y = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$.

$$y = \frac{x}{(x-3)(x+1)}.$$

1) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$.



3) $(x \rightarrow 3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$$(x \rightarrow 3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$$
;

$$(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$$
;

$$(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$$
;

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0),$$

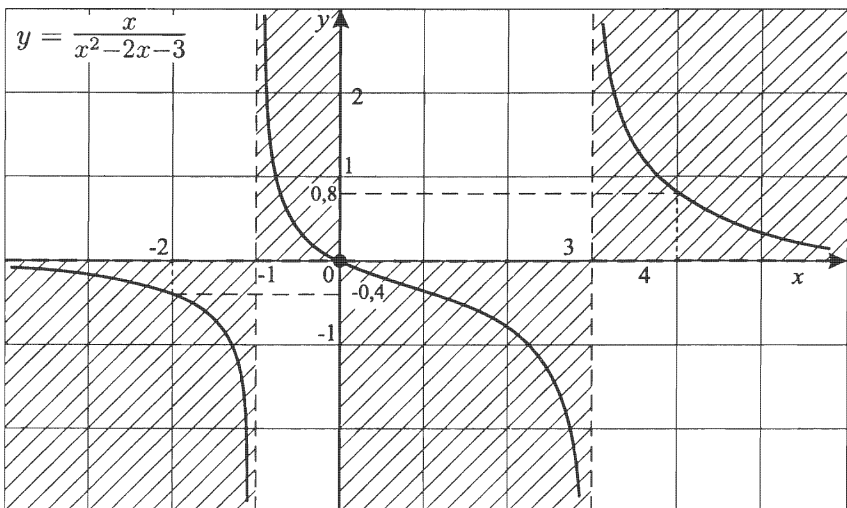
так как степень числителя меньше степени знаменателя;

4) Контрольные точки:

$$x = 4; y = \frac{4}{(4-3)(4+1)} = 0,8;$$

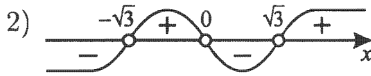
$$x = -2; y = \frac{-2}{(-2-3)(-2+1)} = -0,4.$$

Теперь, плавно соединяя известные точки, получим график (эскиз).



$$7. y = \frac{1}{x^3 - 3x}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{3}, \\ x \neq 0. \end{cases}$$



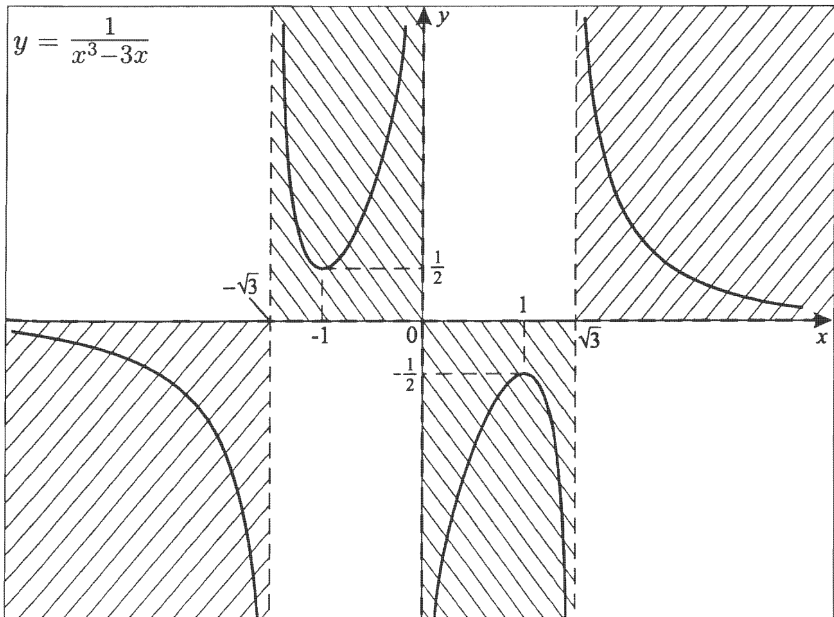
$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow \sqrt{3} + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \sqrt{3} - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -\sqrt{3} + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -\sqrt{3} - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

4) Контрольные точки:

$$x = 2; y = \frac{1}{2}; \quad x = -1; y = \frac{1}{2};$$

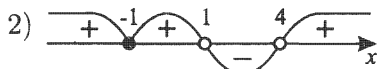
$$x = 1; y = -\frac{1}{2}; \quad x = -2; y = -\frac{1}{2}.$$

Это эскиз, поэтому глубина ямки и высота горки приближенные (минимаксные значения).



$$8. y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 4+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 4-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \end{aligned}$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x})^2}{x^2(1-\frac{1}{x})(1-\frac{4}{x})} = \frac{(1+\frac{1}{x})^2}{(1-\frac{1}{x})(1-\frac{4}{x})}.$$

$$\text{Из } (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1);$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)} = 1;$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x + 4;$$

$$x = \frac{3}{7}.$$

4) Найдем $E(y)$.

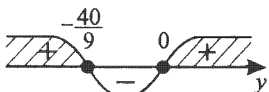
$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x-4)} = y;$$

$$x^2 + 2x + 1 = yx^2 - 5xy + 4y;$$

$$(y-1)x^2 - (5y+2)x + 4y - 1 = 0 \quad (y \neq 1);$$

$$x_{1,2} = \frac{5y+2 \pm \sqrt{9y^2+40y}}{2(y-1)};$$

$$D = 9y^2 + 40y \geq 0.$$



$$\text{Но при } y = 1 \quad x = \frac{3}{7}.$$

$$E(y) = \left(-\infty; -\frac{40}{9}\right] \cup [0; +\infty).$$

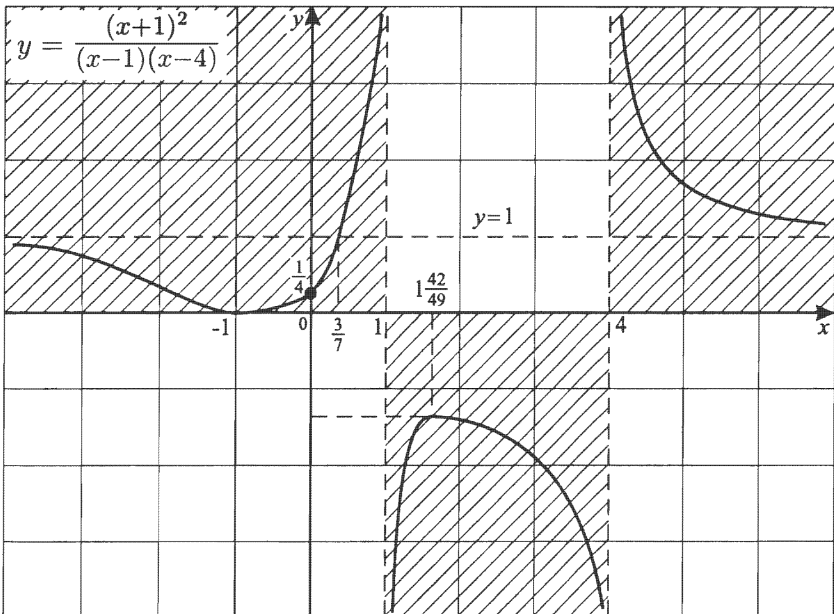
$$\text{При } D = 0 \quad x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad x_0 = \frac{5y+2}{2(y-1)}.$$

$$x_1 = \frac{5y_1+2}{2(y_1-1)}; y_1 = -\frac{40}{9};$$

$$x_1 = \frac{-\frac{200}{9}+2}{2\left(-\frac{40}{9}-1\right)} = \frac{182}{98} = \frac{91}{49} = 1\frac{42}{49}.$$

$$x_2 = \frac{5y_2+2}{2(y_2-1)}; y_2 = 0; x_2 = -1.$$

Эскиз графика:



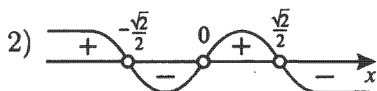
Отметим, что можно точно указать интервалы монотонности:

а) $y = y(x)$ возрастает на $[-1; 1)$ и на $\left(1; 1\frac{42}{49}\right]$;

б) $y = y(x)$ убывает на $(-\infty; -1]$, на $\left[1\frac{42}{49}; 4\right)$ и на $(4; \infty)$.

$$9. y = \frac{1}{2x(1-2x^2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$3) (x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0).$$

4) Контрольные точки:

$$x = -1; y = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{1}{2}; y = 2;$$

$$x = -\frac{1}{2}; y = -2;$$

$$x = 1; y = -\frac{1}{2}.$$

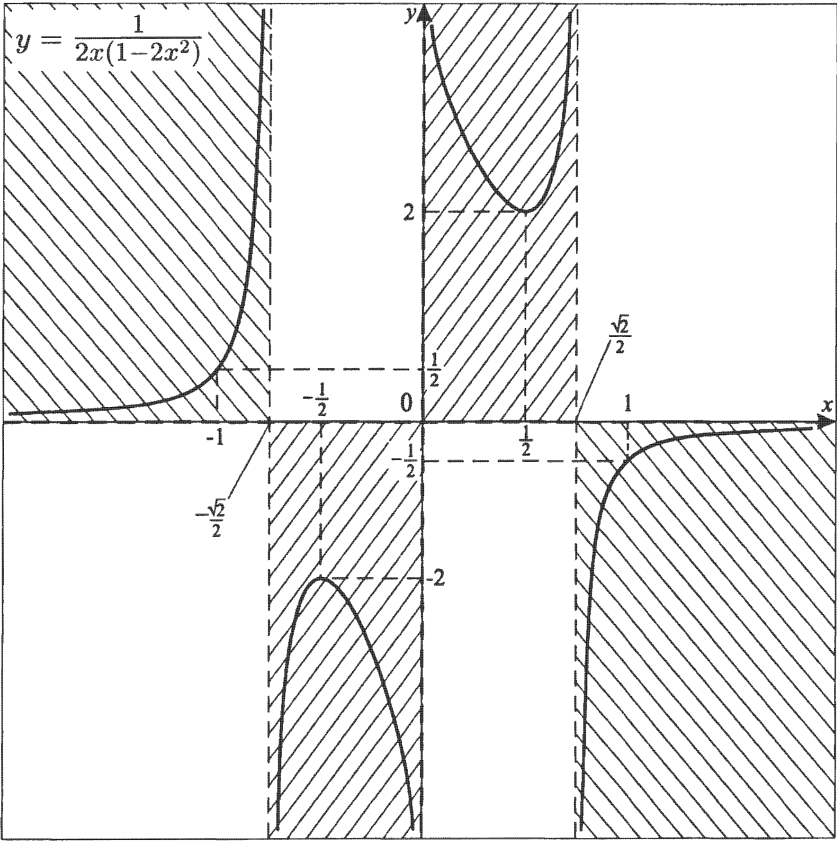
Очевидно, что минимаксные значения приближенные.

Можно отметить, что так как $y = y(x)$ — нечетная, т. е.

а) $D(y)$ — симметричное множество;

б) $y(-x) = -y(x)$,

то график $y = y(x)$ центрально-симметричен относительно начала координат — точки $(0; 0)$.



$$10. y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; +\infty).$$

$$x^2 - x + 1 > 0 \text{ при всех } x,$$

$$x^2 + x + 1 > 0 \text{ при всех } x$$

$$\text{так как } \begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$2) y > 0 \text{ при всех } x.$$

$$3) (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1),$$

$$\text{так как } \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Выясним, пересекает ли горизонтальная асимптота график $y = y(x)$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1;$$

$$x^2 - x + 1 = x^2 + x + 1;$$

$x = 0$ — пересекает.

$$4) \text{ Найдем } E(y).$$

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1};$$

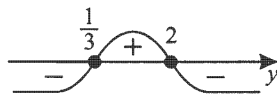
$$yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1;$$

$$(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0 \quad (\text{при } y = 1 \quad x = 0),$$

$$y \neq 1,$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(y-1)^2}}{2(y-1)} = \\ &= \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(y+1+2y-2)(y+1-2y+2)}}{2(y-1)} = \\ &= \frac{-(y+1) \pm \sqrt{(3y-1)(3-y)}}{2(y-1)}. \end{aligned}$$

$$D = (3y - 1)(3 - y) \geq 0.$$



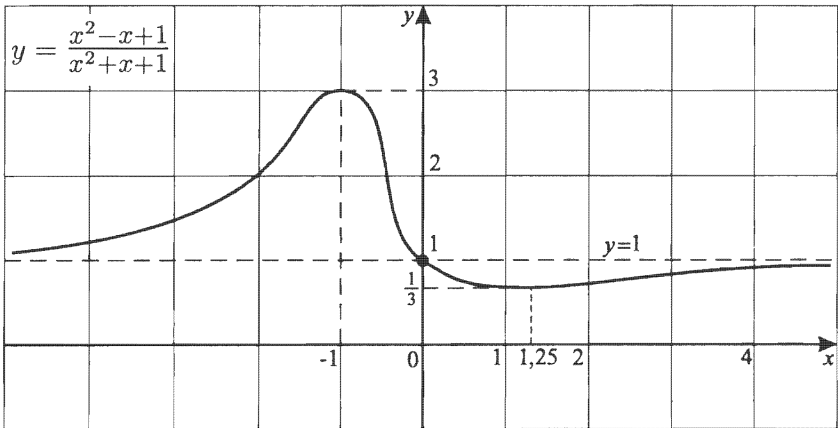
$$E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3\right] \quad (\text{так как } y = 1 \text{ при } x = 0).$$

$$\text{При } D = 0 \quad x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$x_0 = -\frac{y+1}{2(y-1)};$$

$$y_1 = \frac{1}{3}; \quad x_1 = -\frac{\frac{1}{3}+1}{2\left(\frac{1}{3}-1\right)} = -\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{4}{3}} = 1,25;$$

$$y_2 = 3; \quad x_2 = -\frac{3+1}{2(3-1)} = -\frac{4}{4} = -1.$$



В данном случае мы можем точно указать интервалы монотонности:

на $(-\infty; -1]$ $y = y(x)$ возрастает;

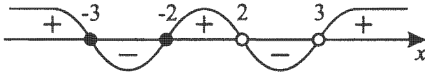
на $[-1; 1,25]$ $y = y(x)$ убывает;

на $[1,25; \infty)$ $y = y(x)$ возрастает.

$$11. y = \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 1). \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} \right).$$

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} = 1;$$

$x = 0$ (абсцисса точки пересечения графика $y = y(x)$ с горизонтальной асимптотой $y = 1$).

$$4) \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} = y;$$

$$x^2 + 5x + 6 = yx^2 - 5xy + 6y;$$

$$(y-1)x^2 - 5(y+1)x + 6(y-1) = 0; \quad y \neq 1;$$

$$D = [5(y+1)]^2 - 24(y-1)^2 = y^2 + 98y + 1 \geq 0;$$

$$y_{1,2} = -49 \pm \sqrt{49^2 - 1} = -49 \pm 20\sqrt{6}.$$



Но при $y = 1$ $x = 0$.

$$E(y) = (-\infty; -49 - 20\sqrt{6}] \cup [-49 + 20\sqrt{6}; +\infty).$$

$$\text{Для } (y-1)x^2 - 5(y+1)x + 6y - 6 = 0$$

$$x_0 = \frac{5(y+1)}{2(y-1)} \quad (\text{при } D = 0).$$

а) пусть $y_1 = -49 - 20\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{(-49 - 20\sqrt{6} + 1)}{(-49 - 20\sqrt{6} - 1)} = \frac{5(-48 - 20\sqrt{6})}{2(-50 - 20\sqrt{6})} = \\ &= \frac{5 \cdot 4(12 + 5\sqrt{6})}{2 \cdot 10(5 + 2\sqrt{6})} = \frac{(12 + 5\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})}{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} = \\ &= \frac{60 - 60 + \sqrt{6}}{25 - 24} = \sqrt{6}; \end{aligned}$$

б) пусть $y_2 = -49 + 20\sqrt{6}$.

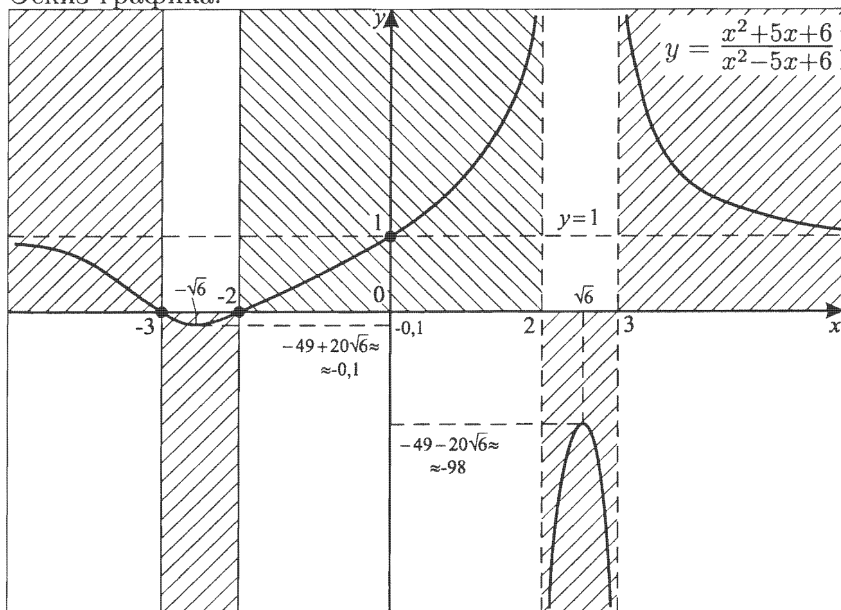
$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{(-49 + 20\sqrt{6} + 1)}{(-49 + 20\sqrt{6} - 1)} = \frac{5(-48 + 20\sqrt{6})}{2(-50 + 20\sqrt{6})} = \\ &= \frac{-12 + 5\sqrt{6}}{-5 + 2\sqrt{6}} = \frac{(-12 + 5\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})}{(-5 + 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} = \\ &= \frac{-60 + 60 + \sqrt{6}}{24 - 25} = -\sqrt{6}. \end{aligned}$$

5) Из эскиза видно, что:

а) $y = y(x)$ возрастает на $[-\sqrt{6}; 2]$ и на $(2; \sqrt{6}]$;

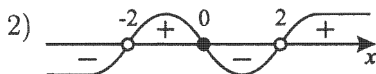
б) $y = y(x)$ убывает на $(-\infty; -\sqrt{6}]$, на $[\sqrt{6}; 3]$ и на $(3; \infty)$.

Эскиз графика:



12. $y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$.

1) $D(y): x \neq \pm 2$.



3) $(x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

$(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$.

Так как степень числителя выше степени знаменателя, выделим целую часть.

$$\frac{x^3+2x}{x^2-4} \Big| \frac{x^2-4}{x} \\ \underline{x^3-4x} \quad 6x$$

Таким образом, $\frac{x^3+2x}{x^2-4} = x + \frac{6x}{x^2-4}$.

Итак, $y = x$ — наклонная асимптота.

4) Контрольные точки:

$x = -3; y = \frac{-27-6}{9-4} = -\frac{33}{5} = -6,6$;

$x = 3; y = \frac{27+6}{9-4} = \frac{33}{5} = 6,6$.

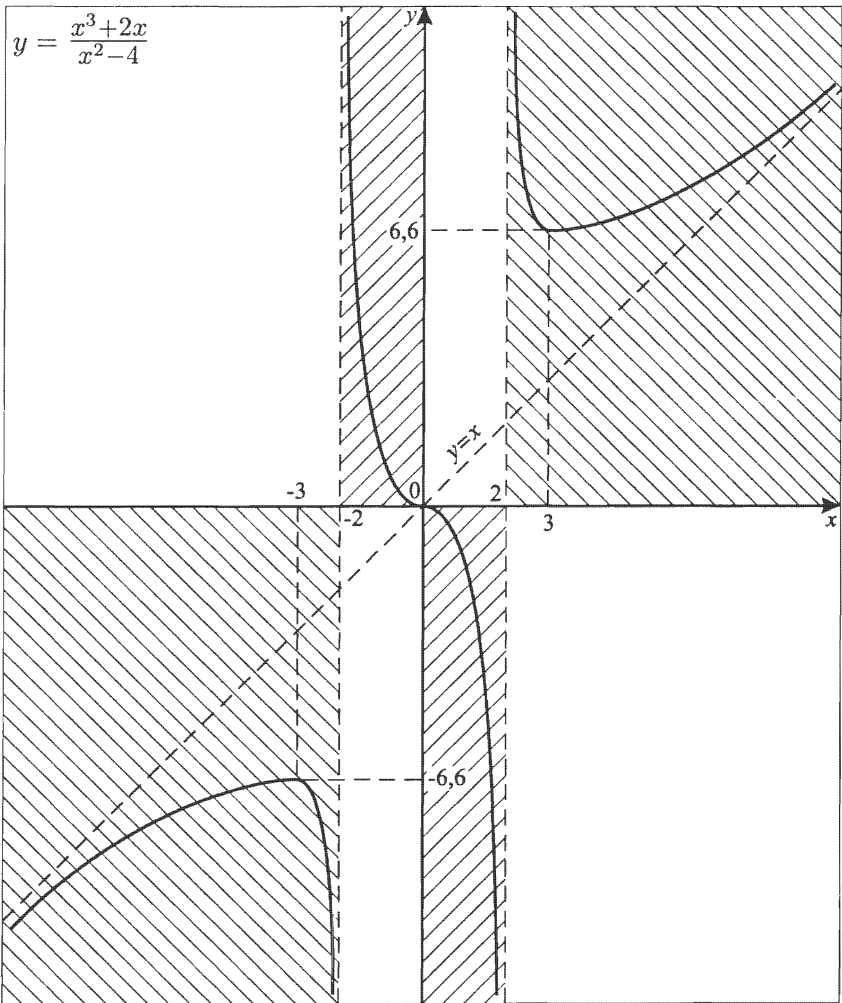
Разумеется, минимаксные значения вычислены весьма приближенно, но эскиз графика ясен.

5) $y(x)$ — нечетная, так как

а) $D(y)$ — симметричное множество относительно нуля;

б) $y(-x) = -y(x)$,

значит, график $y = \frac{x^3+2x}{x^2-4}$ центрально-симметричен относительно начала координат.



13. $y = \frac{x^3 - 1}{x}$.

1) $D(y) \quad x \neq 0$.

2) $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$ ($x^2 + x + 1 > 0$ для всех x);



3) $(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty)$;

$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty)$;

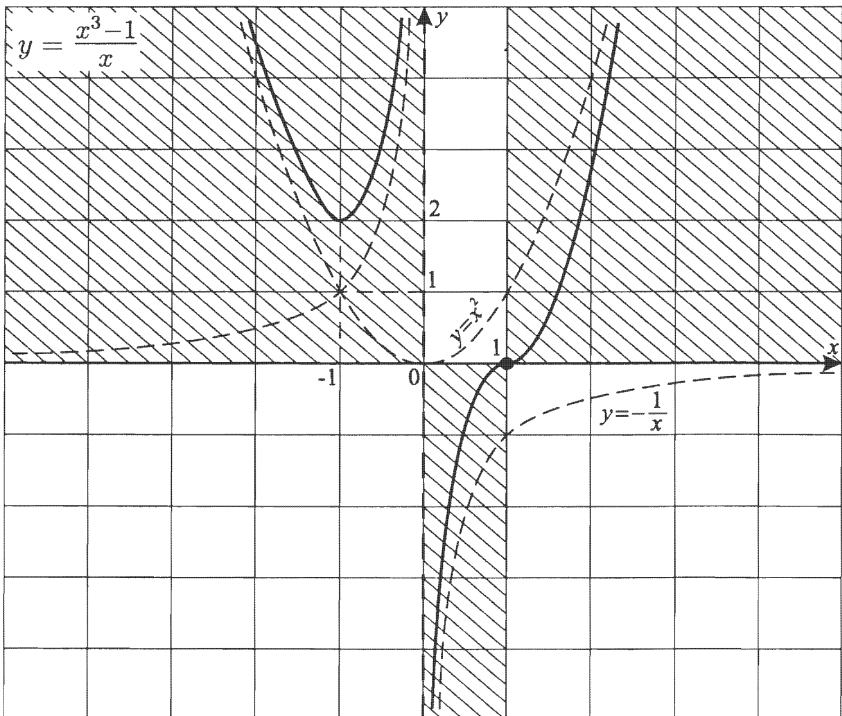
$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow x^2)$.

Асимптотические кривые $y = -\frac{1}{x}$ и $y = x^2$.

4) Контрольные точки: $x = 1; y = 0$;

$x = -1; y = 2$; $x = -2; y = 4,5$;

$x = 2; y = 3,5$; $x = -\frac{1}{2}; y = 2,25$.

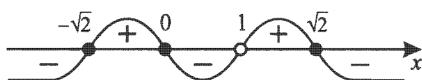


$$14. y = \frac{-4x^3 + 8x}{x^3 - 1}.$$

$$1) D(y): x \neq 1.$$

$$2) y = \frac{-4x(x^2 - 2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}.$$

$x^2 + x + 1 > 0$ для всех x , так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D < 0. \end{cases}$



$$3) (x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow -4),$$

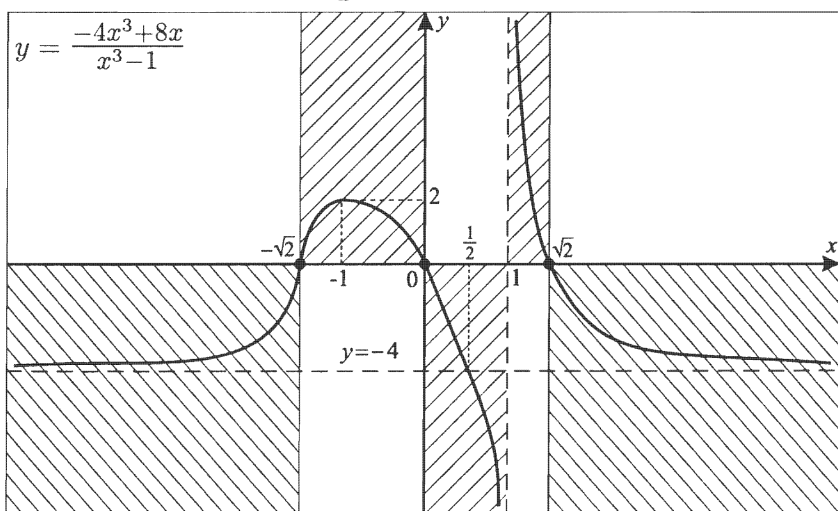
$$\text{так как } \frac{-4x^3 + 8x}{x^3 - 1} = \frac{-4 + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3}}.$$

Выясним наличие точек пересечения графика $y=y(x)$ и $y = -4$.

$$\frac{-4x^3 + 8x}{x^3 - 1} = -4; \quad -4x^3 + 8x = -4x^3 + 4; \quad x = \frac{1}{2}.$$

4) Контрольные точки:

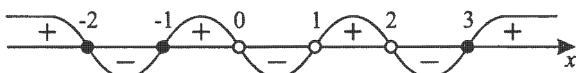
$$x = -1; \quad y = \frac{-4}{-2} = 2. \quad \text{Эскиз готов.}$$



$$15. y = \frac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x-3)(x+1)(x+2)}{x(x-1)(x-2)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)} &= \frac{x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \\ &= \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} \end{aligned}$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1).$$

Выясним, при каких x горизонтальная асимптота $y = 1$ пересекает график функции.

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x(x^2-3x+2)} = 1;$$

$$x^3 - 7x - 6 = x^3 - 3x^2 + 2x;$$

$$3x^2 - 9x - 6 = 0; \quad x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

4) Контрольные точки:

$$x = 4; \quad y = \frac{(4-3)(4+1)(4+2)}{4(4-1)(4-2)} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4};$$

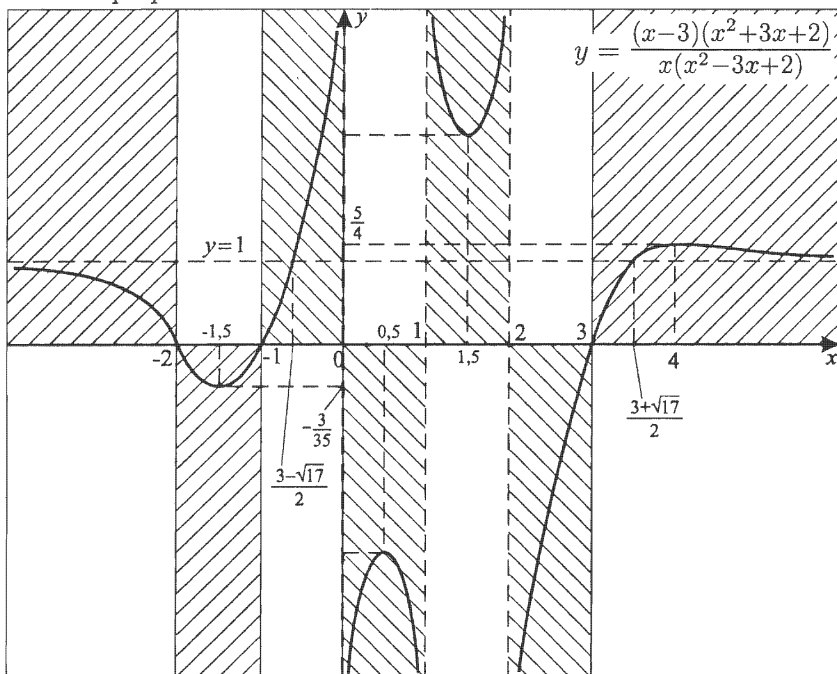
$$\begin{aligned} x = -1,5; \quad y &= \frac{(-1,5-3)(-1,5+1)(-1,5+2)}{-1,5(-1,5-1)(-1,5-2)} = \\ &= \frac{-4,5(-0,5)0,5}{-1,5(-2,5)(-3,5)} = -\frac{45 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 25 \cdot 35} = -\frac{3}{35}; \end{aligned}$$

$$x = 0,5; \quad y = -25;$$

$$x = 1,5; \quad y = 35.$$

Минимаксные значения весьма приближенные, но характер (эскиз) графика достаточно ясен.

Эскиз графика:



$$16. y = \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x-3)(x^2 + 3x + 2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 3 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \end{aligned}$$

$$\frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x-3)(x^2 + 3x + 2)} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\left(1 - \frac{3}{x}\right)\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)},$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1).$$

4) Выясним, пересекаются ли горизонтальная асимптота и график $y = y(x)$.

$$\frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x-3)(x^2 + 3x + 2)} = 1;$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 7x - 6;$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Отметим, что рассматривая контрольные значения, имеем приближенные минимаксные значения.

$$5) x = -1,5; y = \frac{-1,5(-1,5-1)(-1,5-2)}{(-1,5-3)(-1,5+1)(-1,5+2)} =$$

$$= -\frac{15 \cdot 25 \cdot 35}{45 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{35}{3} = -11\frac{2}{3};$$

$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)}{(0,5-3)(0,5+1)(0,5+2)} = -\frac{5 \cdot 5 \cdot 15}{25 \cdot 15 \cdot 25} = -\frac{1}{25};$$

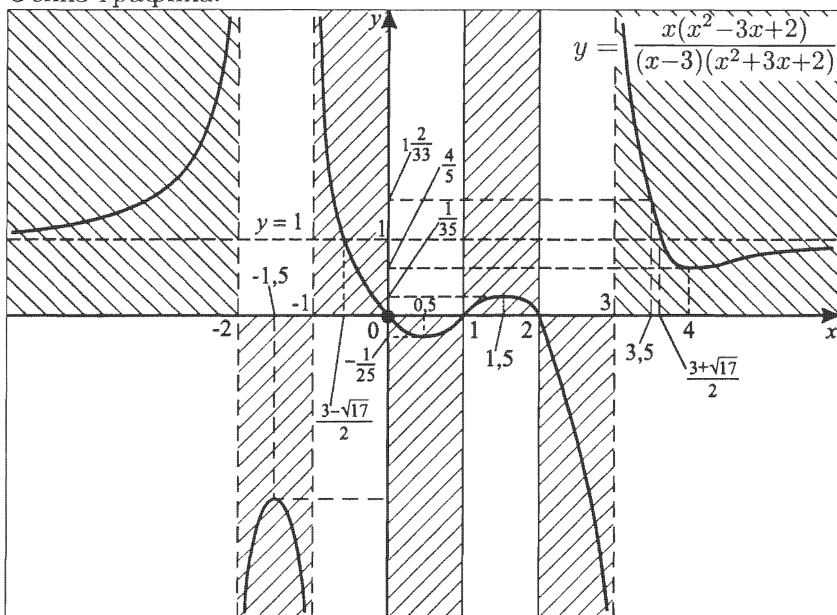
$$x = 1,5; y = \frac{1,5(1,5-1)(1,5-2)}{(1,5-3)(1,5+1)(1,5+2)} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 25 \cdot 35} = \frac{1}{35};$$

$$x = 3,5 < \frac{3+\sqrt{17}}{2};$$

$$y = \frac{3,5(3,5-1)(3,5-2)}{(3,5-3)(3,5+1)(3,5+2)} = \frac{35 \cdot 25 \cdot 15}{5 \cdot 45 \cdot 55} = \frac{35}{33};$$

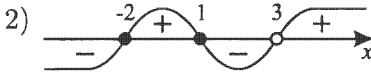
$$x = 4, y = \frac{4(4-1)(4-2)}{(4-3)(4+1)(4+2)} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

Эскиз графика:



$$17. y = \frac{x^2+x-2}{x-3}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$



$$3) (x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

Так как степень числителя выше степени знаменателя, выделим целую часть.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 2 & x - 3 \\ \hline x^2 - 3x & x + 4 \\ \hline 4x - 2 & \\ -4x + 12 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

так как $y = x + 4 + \frac{10}{x-3}$, значит $y = x + 4$ — наклонная асимптота.

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow x + 4).$$

Выясним, пересекает ли наклонная асимптота график $y = y(x)$.

$$y = x + 4, \text{ т.е. } x + 4 + \frac{10}{x-3} = x + 4.$$

Очевидно, $\frac{10}{x-3} = 0$; корней нет,

значит, не пересекает.

$$4) E(y)$$

$$y = \frac{x^2+x-2}{x-3};$$

$$yx - 3y = x^2 + x - 2;$$

$$x^2 + (1-y)x + 3y - 2 = 0;$$



$$x_{1,2} = \frac{y-1 \pm \sqrt{(y-1)^2 - 4(3y-2)}}{2} = \frac{y-1 \pm \sqrt{y^2 - 14y + 9}}{2}.$$

$$D(y) \geq 0, \text{ т.е. } y^2 - 14y + 9 \geq 0 \quad \begin{cases} y \geq 7 + 2\sqrt{10}, \\ y \leq 7 - 2\sqrt{10}. \end{cases}$$

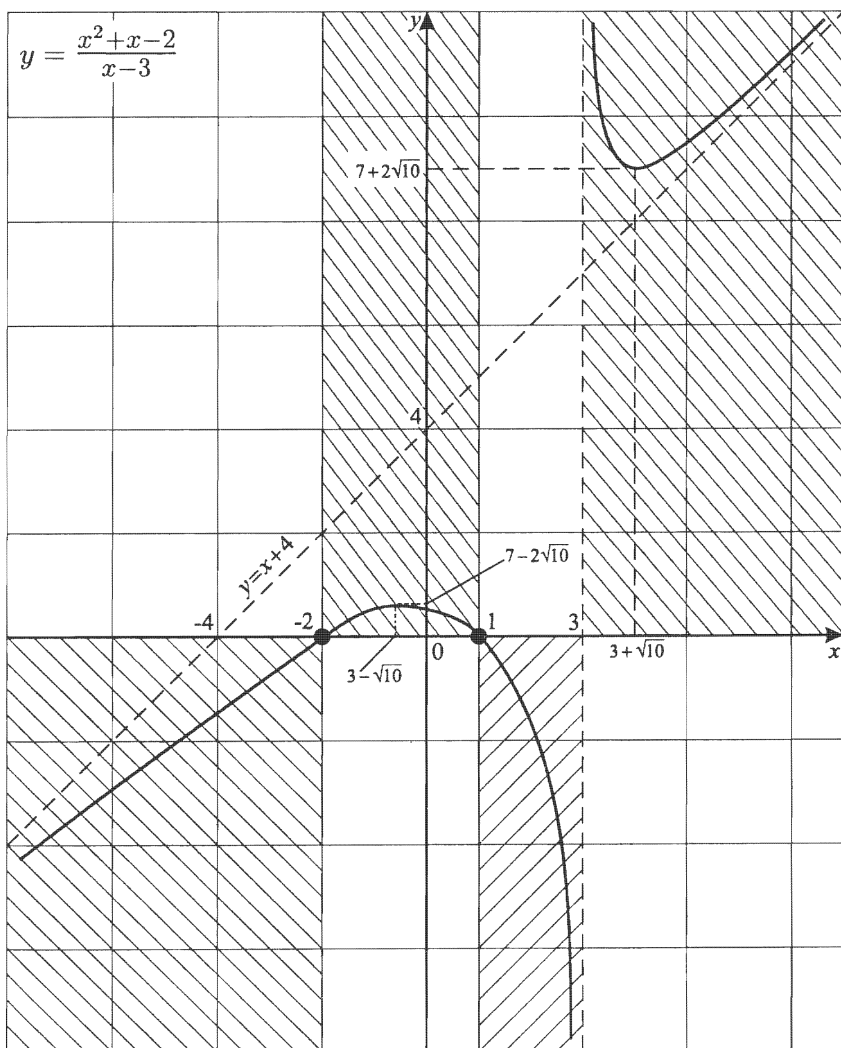
При $D = 0$ для $x^2 + (1 - y)x + 3y - 2 = 0$;

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ т. е. } x_0 = \frac{y-1}{2}.$$

$$x_1 = \frac{y_1-1}{2}; \quad x_1 = 3 + \sqrt{10};$$

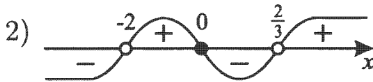
$$y_2 = 7 - 2\sqrt{10}; \quad x_2 = 3 - \sqrt{10}.$$

Эскиз графика:



$$18. y = \frac{3x^3}{3x^2+4x-4}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq \frac{2}{3}. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow \frac{2}{3} + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \frac{2}{3} - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty). \end{aligned}$$

Так как степень числителя больше степени знаменателя, то существует наклонная асимптота. Для ее нахождения выделим целую часть.

$$\begin{array}{r} \frac{3x^3}{3x^2+4x-4} - \frac{4x}{3} \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 4x - 4 \\ x - \frac{4}{3} \end{array} \right. \\ \hline -4x^2 + 4x \\ -4x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} \\ \hline \frac{28}{3}x - \frac{16}{3} \end{array}$$

$$\frac{3x^3}{3x^2+4x-4} = x - \frac{4}{3} + \frac{28x-16}{3(3x^2+4x-4)}.$$

Выясним, пересекает ли наклонная асимптота график функции $y = y(x)$.

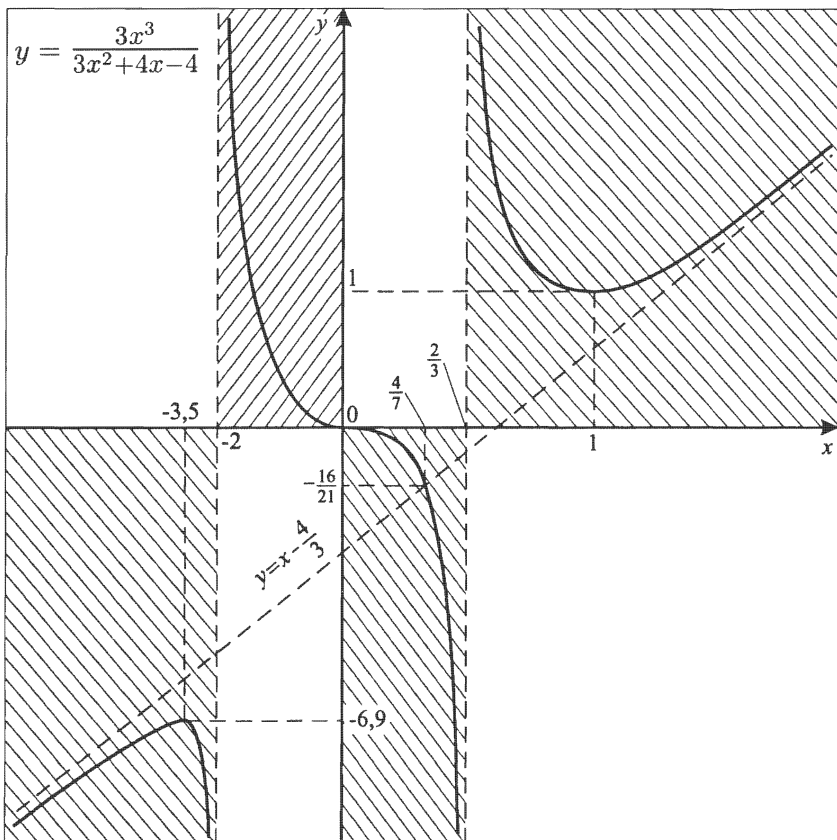
Очевидно, что это возможно, если $28x - 16 = 0$, т. е. $x = \frac{4}{7}$.

4) Контрольные точки:

$$x = 1; y = 1;$$

$$x = -3,5; y \approx -6,9.$$

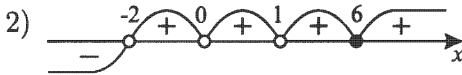
Эскиз графика



$$19. y = \frac{(x-6)^2}{x^5 - 3x^3 + 2x^2}.$$

$$1) y = \frac{(x-6)^2}{x^2(x-1)^2(x+2)}.$$

$$D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty). \end{aligned}$$

Так как степень числителя меньше степени знаменателя, то существует горизонтальная асимптота, причем ею является ось Ox , т.е. $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;

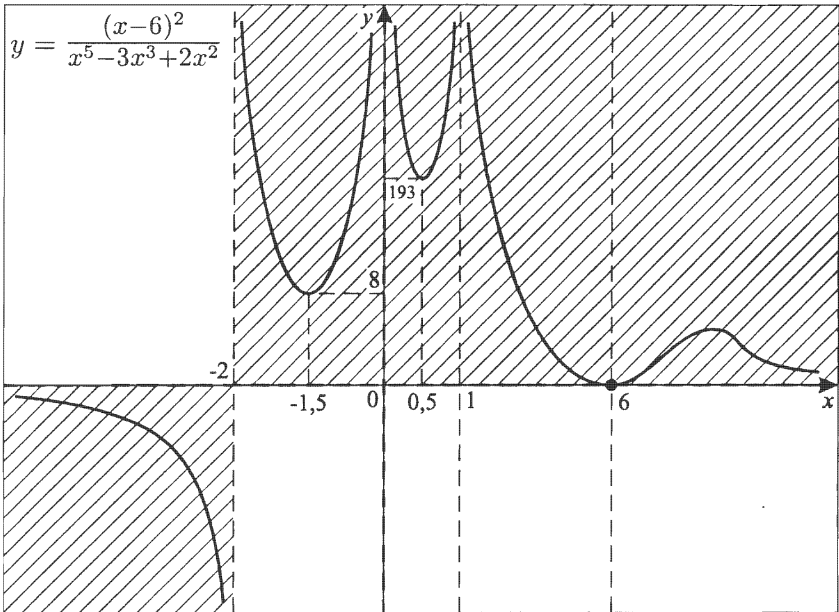
4) Контрольные точки:

$$x = -1,5; y = 8;$$

$$x = 0,5; y \approx 193.$$

Определить, при каких x существует наибольшее значение функции на $(6; +\infty)$ приближенно или при исследовании с помощью производных технически очень сложно, но характер поведения графика функции понятен. Эскиз готов.

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб

Примечание. $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2$.

Так как $\varphi(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, то

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad -3x + 2 \quad | \quad x - 1 \\
 -x^3 + x^2 \quad \quad \quad | \quad x^2 + x - 2 \\
 \hline
 x^2 - 3x + 2 \\
 -x^2 + x \\
 \hline
 -2x + 2 \\
 -2x + 2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Но $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Тогда $\varphi(x) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$, что и было использовано в пункте 1.

$$20. y = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x^2 \neq 1; \\ x^2 \neq 4. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x^2 - 3)(x^2 + 1)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \end{aligned}$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}},$$

$$\text{т. е. из } (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1);$$

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

$$\frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4} = 1; \quad x^4 - 2x^2 - 3 = x^4 - 5x^2 + 4;$$

$$3x^2 = 7; \quad x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Значит, горизонтальная асимптота пересекает график функции в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 .

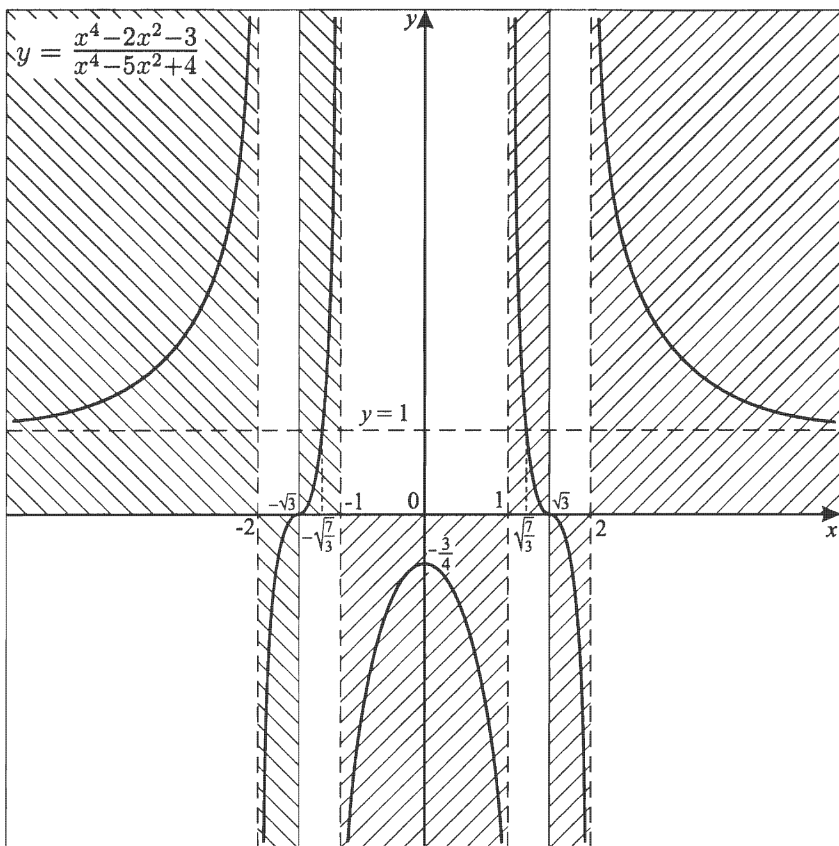
$$4) y(-x) = \frac{(-x)^4 - 2(-x)^2 - 3}{(-x)^4 - 5(-x)^2 + 4} = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4} = y(x),$$

т. е. $y = y(x)$ — четная, значит график ее симметричен относительно оси Oy .

5) Контрольные точки:

$$x = 0; \quad y = -\frac{3}{4} \text{ (оказывается точкой максимума).}$$

Эскиз готов.

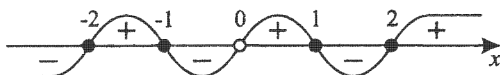


Примечание. Из эскиза графика очевидно, что в правой полуплоскости на интервалах непрерывности $[0; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; \infty)$ функция убывает, а в левой на интервалах непрерывности $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$ и $(-1; 0]$ — возрастает.

$$21. y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 9x}.$$

$$1) D(y): x \neq 0.$$

$$2) y = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{x(x^2+9)}.$$



$$3) (x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty).$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^2 + 4 & x^3 + 9x \\ \hline x^4 + 9x^2 & x \\ \hline -14x^2 + 4 & \end{array}$$

$$\text{Итак, } y = x + \frac{4 - 14x^2}{x^3 + 9x^2};$$

$y = x$ — наклонная асимптота.

При $4 - 14x^2 = 0$, т. е.

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{7}}; \quad y_1 = \sqrt{\frac{2}{7}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{2}{7}}; \quad y_2 = -\sqrt{\frac{2}{7}}$$

график $y = y(x)$ пересекает наклонную асимптоту.

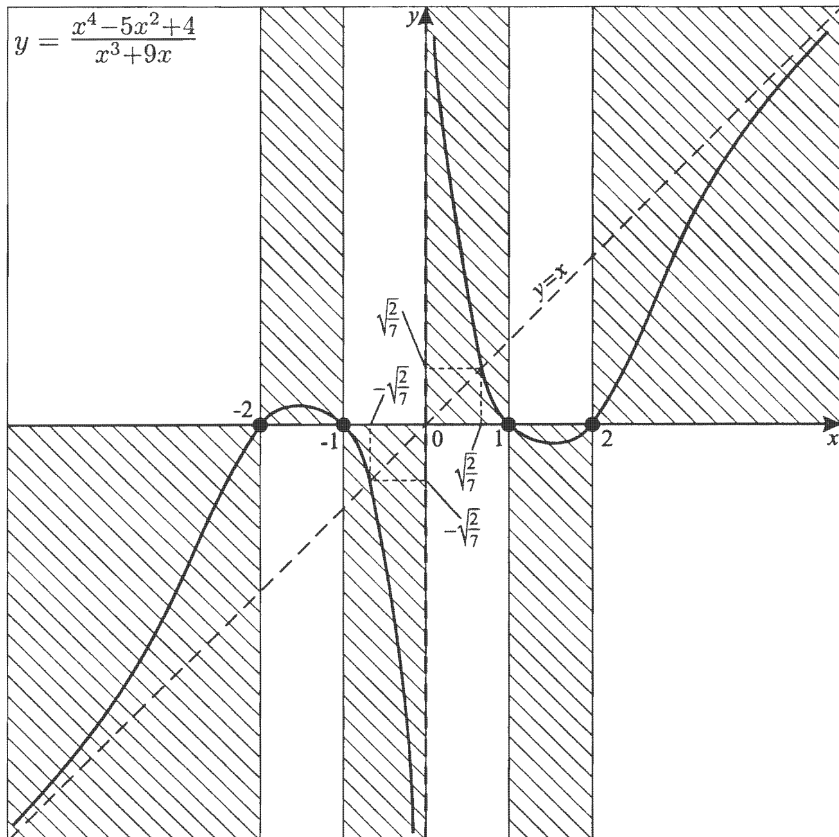
4) а) $D(y)$ — симметричное множество;

$$\text{б) } y(-x) = \frac{(-x)^4 - 5(-x)^2 + 4}{(-x)^3 + 9(-x)} = -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 9x} = -y(x).$$

Значит $y = y(x)$ — нечетная функция, т. е. график $y = y(x)$ центрально-симметричен относительно начала координат.

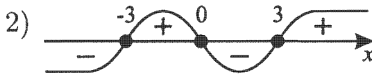
Эскиз графика построен.

Эскиз графика:



$$22. y = \frac{x^3 - 9x}{x^2 + x + 2}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; +\infty), \text{ т.к. } x^2 + x + 2 \neq 0.$$



$$\begin{array}{r|l} -x^3 & -9x \\ \hline x^3 + x^2 + 2x & | x^2 + x + 2 \\ \hline -x^2 - 11x & | x - 1 \\ -x^2 - x - 2 & \\ \hline -10x + 2 & \end{array}$$

$$\text{Итак, } y = x - 1 + \frac{2 - 10x}{x^2 + x + 2};$$

$y = x - 1$ — наклонная асимптота.

При $2 - 10x = 0$, т.е. $x = 0,2$, график $y = y(x)$ пересекает наклонную асимптоту.

$$3) (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow x - 1);$$

4) Контрольные точки:

$$x = 0,2;$$

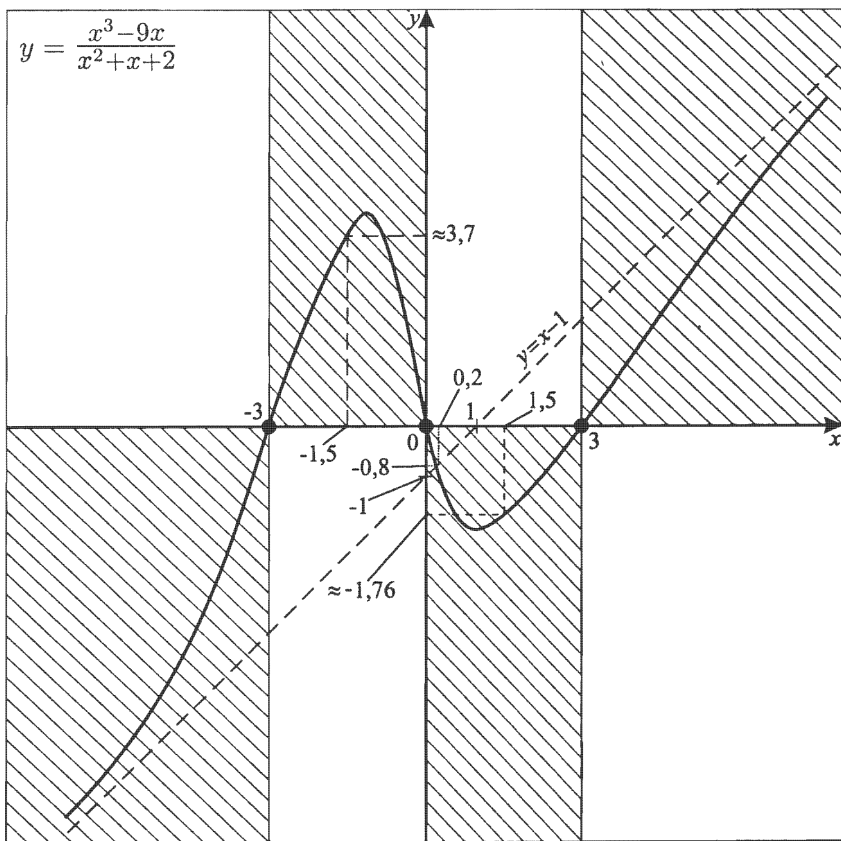
$$y = \frac{0,2(0,2-3)(0,2+3)}{0,04+0,2+2} = -\frac{0,2 \cdot 2,8 \cdot 3,2}{2,24} = -0,8;$$

$$x = 1,5;$$

$$y = \frac{1,5(1,5-3)(1,5+3)}{(1,5)^2+1,5+2} = -\frac{1,5 \cdot 1,5 \cdot 4,5}{5,75} \approx -1,76;$$

$$x = -1,5;$$

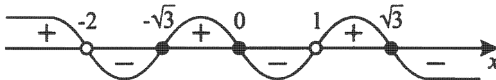
$$y = \frac{-1,5(-1,5-3)(-1,5+3)}{(-1,5)^2-1,5+2} = \frac{1,5 \cdot 4,5 \cdot 1,5}{2,75} \approx 3,68.$$



23. $y = \frac{-4x^3+12x}{x^2+x-2}$.

1) $D(y): \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

2) $y = \frac{-4x(x^2-3)}{(x+2)(x-1)}$.



3) $(x \rightarrow 1+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 1-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty).$

$$\begin{array}{r} -4x^3 + 12x \\ -4x^3 - 4x^2 + 8x \\ \hline 4x^2 + 4x \\ -4x^2 + 4x - 8 \\ \hline 8 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x - 2 \\ -4x + 4 \end{array} \right.$$

Таким образом, $\frac{-4x^3+12x}{x^2+x-2} = -4x + 4 + \frac{8}{x^2+x-2}$.

Итак, $y = -4x + 4$ — наклонная асимптота.

Так как $8 \neq 0$, то пересечений с графиком $y = y(x)$ нет.

4) Контрольные точки:

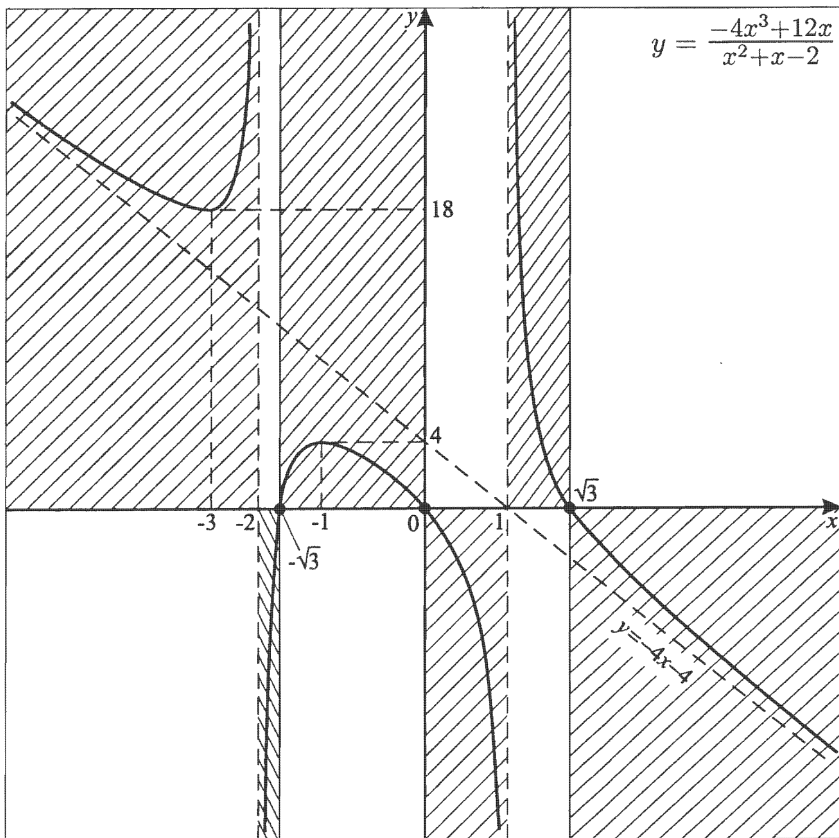
$$x = -1;$$

$$y = \frac{-4(-1)-12}{1-1-2} = \frac{-8}{-2} = 4;$$

$$x = -3;$$

$$y = \frac{108-36}{9-3-2} = \frac{72}{4} = 18.$$

Эскиз графика:

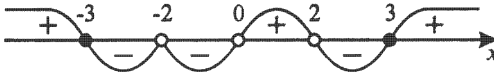


На осях дан разный масштаб.

$$24. y = \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 4x}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x-3)(x+3)(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}.$$



- 3) Очевидно, что хотя $-2 \notin D(y)$, $x = -2$ не является вертикальной асимптотой:

$$(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1),$$

$$\text{так как } \frac{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}{x^3 - 4x} = \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{18}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

- 4) Выясним наличие пересечения горизонтальной асимптоты с графиком $y = y(x)$.

$$\frac{x^2 - 9}{x(x-2)} = 1; \quad x^2 - 9 = x^2 - 2x; \quad x = 4,5.$$

- 5) Контрольные точки будем вычислять в уже преобразованной в результате сокращения функции

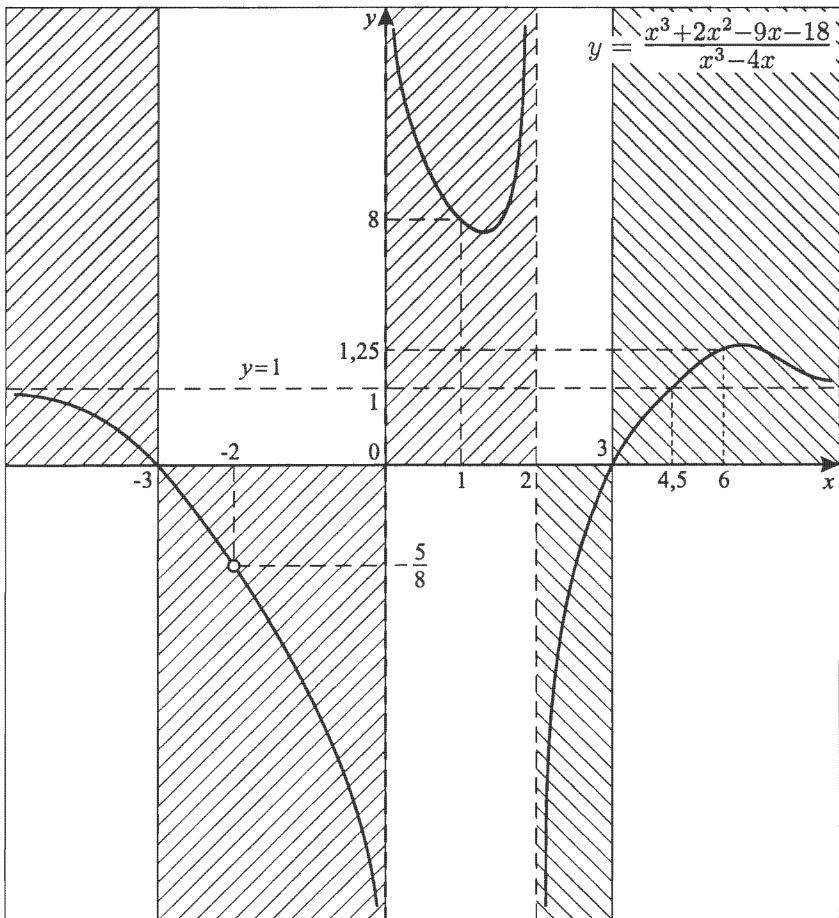
$$y = \frac{x^2 - 9}{x(x-2)}:$$

$$x = -2; \quad y = \frac{-5}{-2(-2-2)} = -\frac{5}{8} \text{ — эту точку необходимо из графика } y = y(x) \text{ исключить;}$$

$$x = 1; \quad y = \frac{1-9}{1(1-2)} = 8;$$

$$x = 6; \quad y = \frac{36-9}{6(6-2)} = \frac{27}{24} = 1,125.$$

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

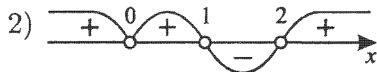
Примечание. Так как $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$, $\varphi(-2) = 0$, то

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ \hline x^3 + 2x^2 & x^2 - 9 \\ \hline -9x - 18 & \\ -9x - 18 & \end{array}$$

Тогда $\varphi(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 3)$.

$$25. y = \frac{1}{x^2(x^2 - 3x + 2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 2 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

4) Контрольные точки:

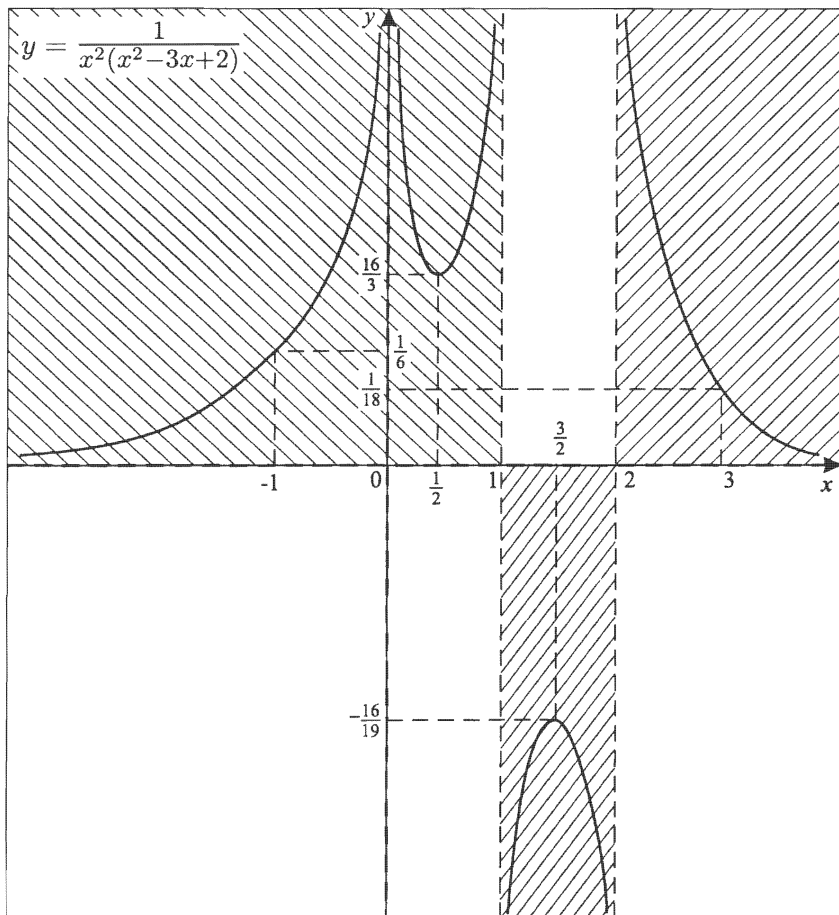
$$x = -1; y = \frac{1}{1(1+3+2)} = \frac{1}{6};$$

$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{\frac{1}{4}(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2)} = \frac{16}{3};$$

$$x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{\frac{9}{4}(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2)} = -\frac{16}{9};$$

$$x = 3; y = \frac{1}{9(9-9+2)} = \frac{1}{18}.$$

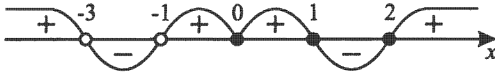
Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

$$26. y = \frac{x^2(x^2-3x+2)}{(x+3)(x+1)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq -1. \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^2(x-1)(x-2)}{(x+3)(x+1)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow -1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

$$\frac{x^2(x^2-3x+2)}{(x+3)(x+1)} = \frac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2+4x+3}.$$

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\ - x^4 + 4x^3 + 3x^2 \\ \hline -7x^3 - x^2 \\ - -7x^3 - 28x^2 - 21x \\ \hline 27x^2 + 21x \\ - 27x^2 + 108x + 81 \\ \hline -87x - 81 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 \\ x^2 - 7x + 27 \end{array} \right.$$

$$\text{Итак, } y = x^2 - 7x + 27 - \frac{87x+81}{x^2+4x+3};$$

$$y = (x - 3,5)^2 + 14,75 - \frac{87x+81}{x^2+4x+3}.$$

При $87x+81=0$ $x = -\frac{81}{87}$ — абсцисса точки пересечения графика $y = y(x)$ и асимптотической кривой $y = x^2 - 7x + 27$ (парабола).

4) Контрольные точки:

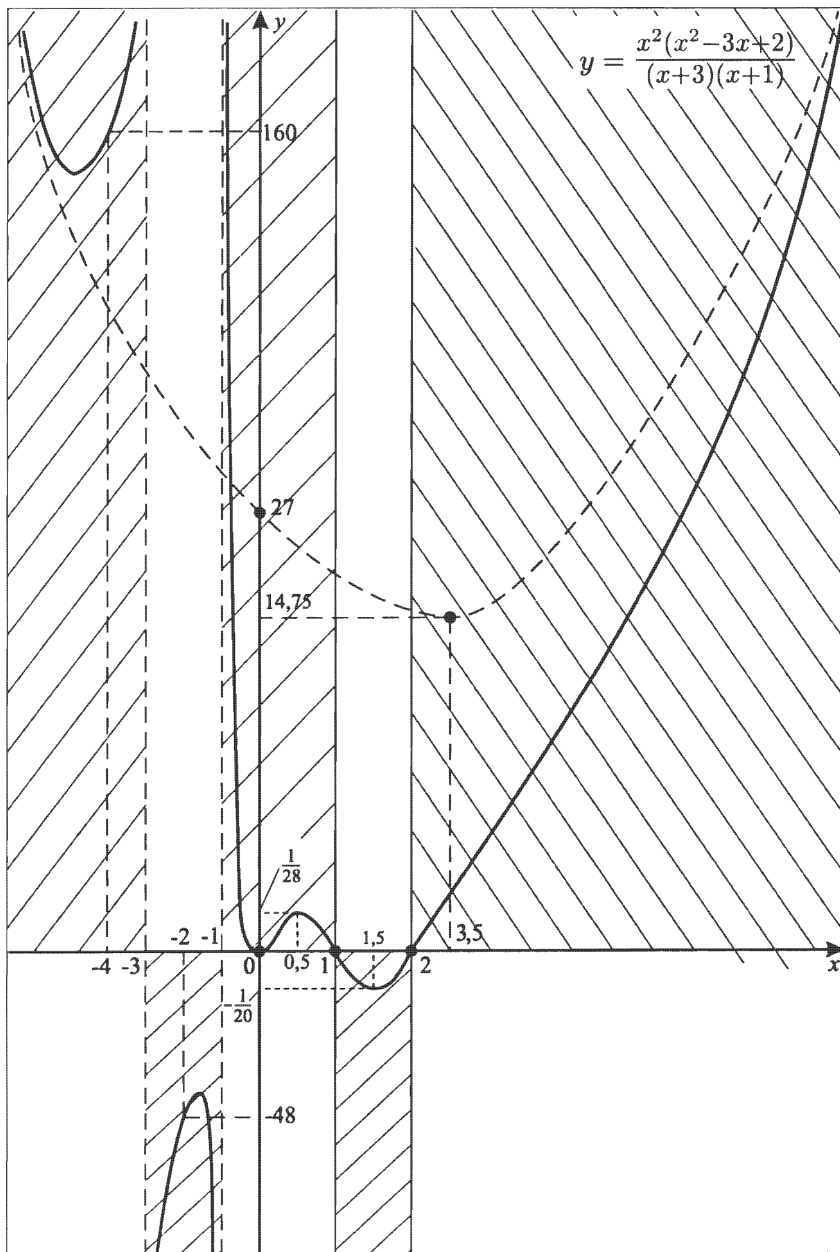
$$x_1 = -4; y_1 = \frac{16(16+12+2)}{-1 \cdot (-3)} = \frac{16 \cdot 30}{3} = 160;$$

$$x_2 = -2; y_2 = \frac{4(4+6+2)}{1 \cdot (-1)} = -48;$$

$$x_3 = 0,5; y_3 = \frac{0,25(0,25-1,5+2)}{3,5 \cdot 1,5} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{28};$$

$$x_4 = 1,5; y_4 = \frac{\frac{9}{4}(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2)}{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2}} = -\frac{1}{20}.$$

Эскиз графика:



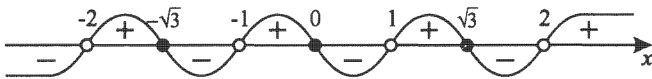
На осях дан разный масштаб.

$$27. y = e^{\frac{x^3-3x}{x^4-5x^2+4}}.$$

Построим вначале $t(x) = \frac{x^3-3x}{x^4-5x^2+4}$.

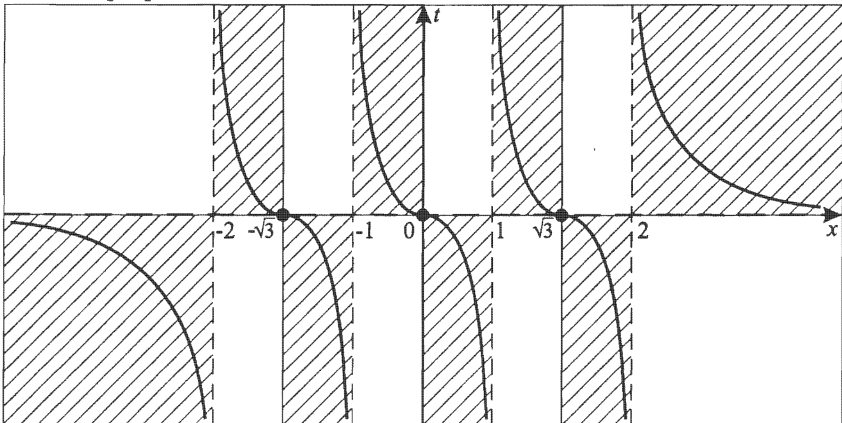
$$1) D(t): \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

$$2) t = \frac{x(x^2-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (t \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (t \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (t \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (t \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1+0) &\Rightarrow (t \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -1-0) &\Rightarrow (t \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (t \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (t \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Эскиз графика:

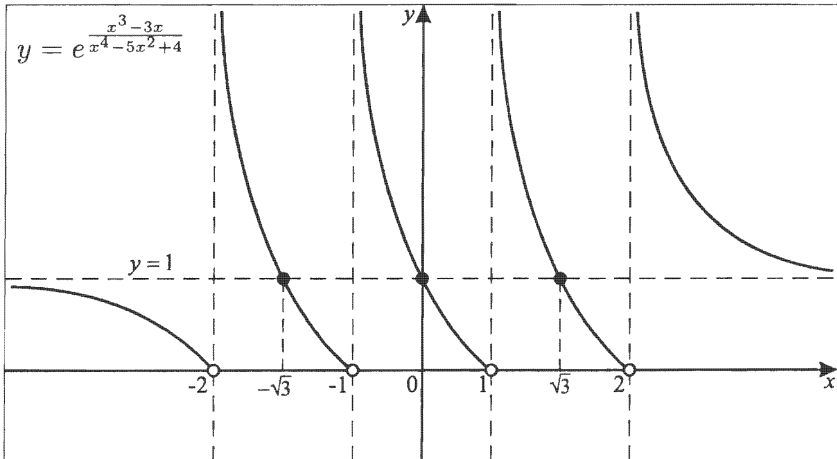


4) Строим $y = y(x)$.

$$a) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

- б) $y > 0$ для всех $x \in D(y)$, так как $a^m > 0$ для всех m ;
- в) $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t(x) \rightarrow 0) \Rightarrow (y \rightarrow 1)$.
- г) абсциссы точек пересечения для $t(x)$ и оси Ox те же, что и абсциссы точек пересечения горизонтальной асимптоты $y = 1$ и графика $y = y(x)$.
 $x_1 = \sqrt{3}; y_1 = 1$;
 $x_2 = 0; y_2 = 1$;
 $x_3 = -\sqrt{3}; y_3 = 1$.

Эскиз готов.



$$28. y = \frac{x+3}{x^4-5x^2+4}.$$

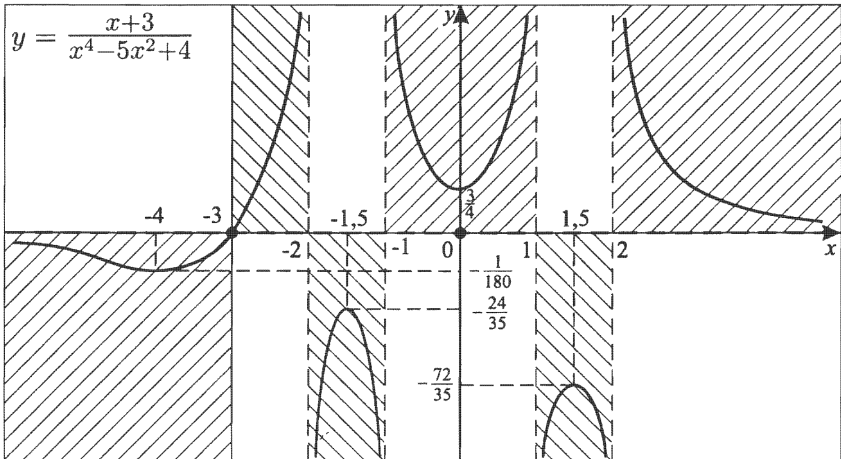
$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & (x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ & (x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ & (x \rightarrow 1+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ & (x \rightarrow 1-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ & (x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ & (x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ & (x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ & (x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ & (x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

4) Контрольные точки:

$$\begin{aligned} x = -4; y = -\frac{1}{180}; \quad x = -1,5; y = -\frac{24}{35}; \\ x = 0; y = \frac{3}{4}; \quad x = 1,5; y = -2\frac{2}{35}. \end{aligned}$$

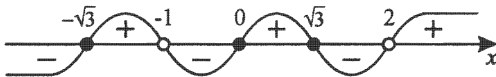


29. $y = e^{\frac{x^3-3x}{x^2-x-2}}$.

1) $t(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-x-2}$.

$$D(t): \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

2) $t(x) = \frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-2)(x+1)}$.



3) $(x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty)$;

$(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty)$;

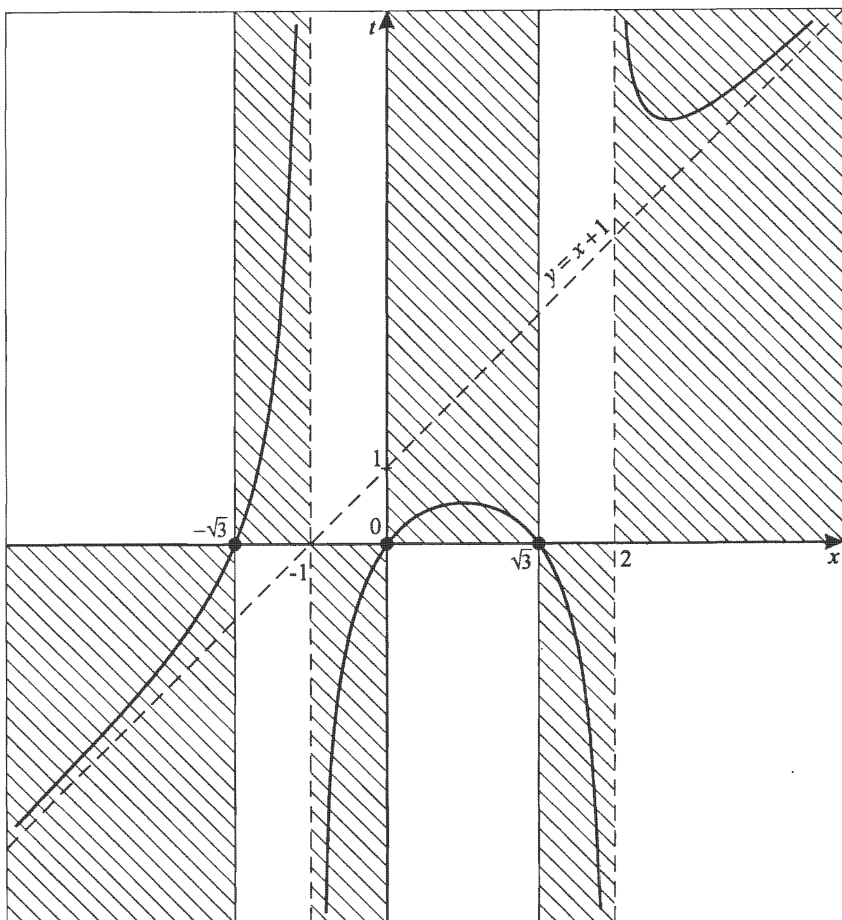
$(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -3x \\ \hline x^3 - x^2 - 2x & x^2 - x - 2 \\ \hline & x + 1 \\ \hline & x^2 - x \\ \hline & x^2 - x - 2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^3-3x}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{2}{x^2-x-2}.$$

Так как $\frac{2}{x^2-x-2} \neq 0$ при всех x , значит $t = x + 1$ не пересекает график $t = t(x)$.



$$4) y = e^{\frac{x^3-3x}{x^2-x-2}}.$$

а) $D(y): \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -1; \end{cases}$

б) $y > 0$ при всех x ;

в) $(x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;

$(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;

$(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;

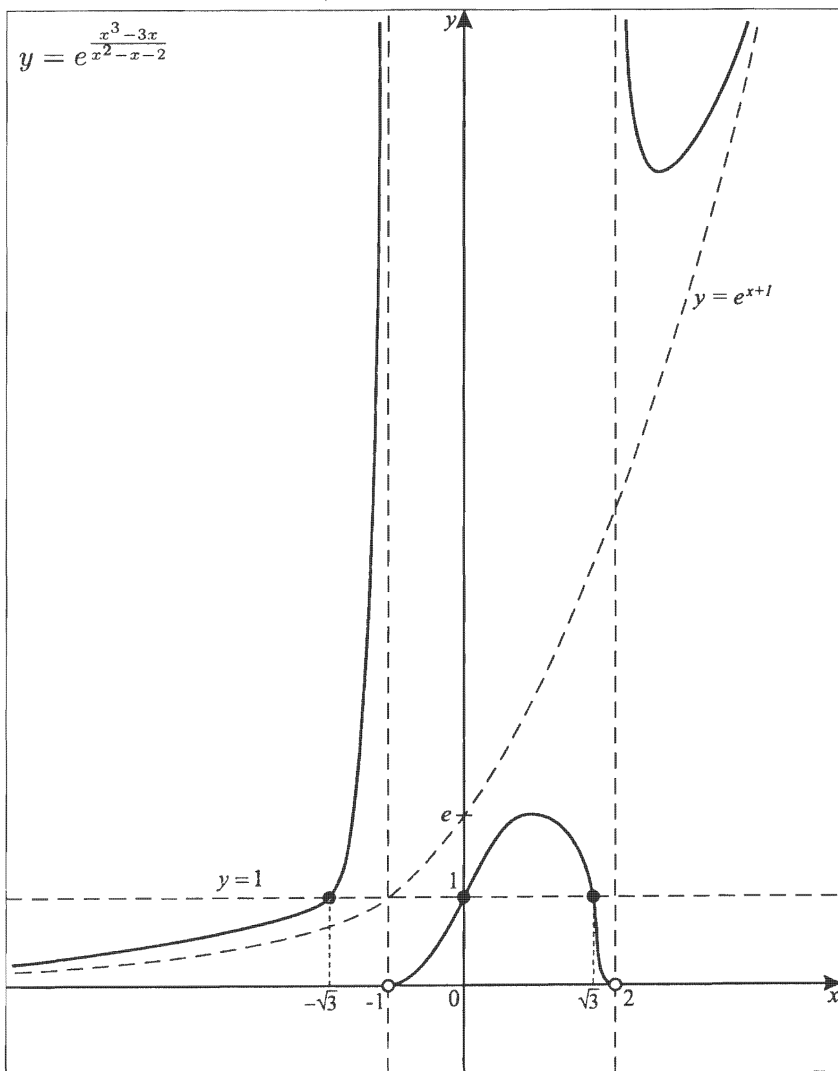
$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t(x) \rightarrow x+1) \Rightarrow (y \rightarrow e^{x+1})$;

$$\text{г) } y(0) = e^0 = 1;$$

$$y(-\sqrt{3}) = e^0 = 1; \quad y(\sqrt{3}) = e^0 = 1.$$

Пересекает ли график $y = y(x)$ асимптотическую кривую $y = e^{x+1}$?

Нет, так как график $y = y(x)$ и $y = x + 1$ не пересекаются. Итак, эскиз готов.

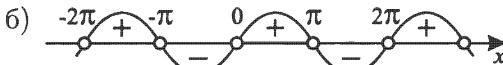


30. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

Построим вспомогательный график $t(x)$.

1) $t(x) = \frac{1}{\sin x}$, $k \in \mathbb{Z}$

а) $D(t)$: $\sin x \neq 0$ $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$



в) выясним периодичность:

$D(t)$ — симметричное множество.

$$\frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x}; \quad \frac{\sin(x+T) - \sin x}{\sin x \cdot \sin(x+T)} = 0,$$

т. е. $\sin(x+T) = \sin x$, но $\varphi(x) = \sin x$ — периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$;

г) рассмотрим $y = t(x)$ на $(-\pi; \pi)$:

$$(x \rightarrow \pi - 0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$$

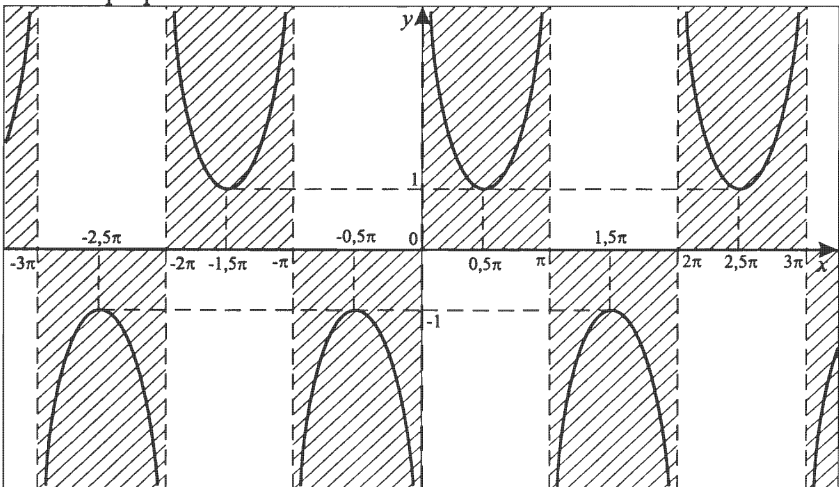
$$(x \rightarrow -\pi + 0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$$

д) $\varphi(x) = \sin x$ для $\varphi_{\max} = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow t\left(\frac{\pi}{2}\right) = t_{\min} = 1;$$

$$\varphi_{\min} = \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t\left(-\frac{\pi}{2}\right) = t_{\max} = -1.$$

Эскиз графика:



$$2) y = e^{\frac{1}{\sin x}}.$$

а) $D(y): x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z};$

б) $y > 0$ при всех x из $D(y)$

в) $(x \rightarrow \pi - 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$

$(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$

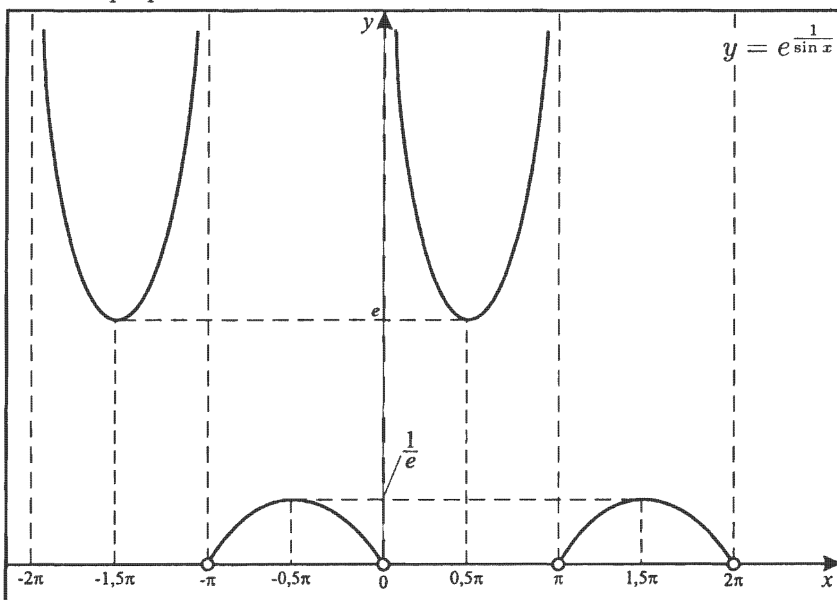
$(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$

$(x \rightarrow -\pi + 0) \Rightarrow (t(x) \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0);$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^1 = y_{\max};$

$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-1} = y_{\min}.$

Эскиз графика:



На осях дан разный масштаб.

3

Зачетные карточки

Условия зачетных карточек

Исследуйте функции и постройте графики.

Карточка 1

1. $y = \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2}$.

2. $y = \frac{x^3+x}{x^2-2x+2}$.

3. $y = \frac{(x+3)(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

Карточка 2

1. $y = \frac{(x+3)^2(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}$.

2. $y = \frac{(x-1)(x-4)}{x(x+1)^2}$.

3. $y = \frac{4(x^4-4x^2)}{(x+3)(x-1)^2}$.

Карточка 3

1. $y = \frac{4(x^4 - 4x^2)}{(x+3)^2(x-1)^2}.$

2. $y = \frac{x^4 - 4x^2}{(x+3)^2(x-1)}.$

3. $y = \frac{x+3}{x^2(x^2 - 3x + 2)}.$

Карточка 4

1. $y = \frac{(x+3)^2(x-1)}{-\frac{1}{4}x^4 + x^2}.$

2. $y = \frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)}.$

3. $y = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}.$

Карточка 5

1. $y = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}.$

2. $y = \frac{(x+1)^2x}{(x-1)(x-4)}.$

3. $y = \frac{(x-4)^2}{x(x+1)(x+3)}.$

Карточка 6

1. $y = \frac{x^2 + x - 2}{(x-3)(4x-x^2)}.$

2. $y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 4}.$

3. $y = \frac{(x^2 + 3x + 2)(x-4)}{x^2 + 2x - 3}.$

Карточка 7

1. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x + 4}$.

2. $y = \frac{2(x^2 + 2x - 3)^2}{(x^2 + 3x + 2)(x - 4)}$.

3. $y = \frac{x^2 - x - 6}{(x^2 - 5x + 4)x}$.

Карточка 8

1. $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3}$.

2. $y = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}$.

3. $y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x+4)x}$.

Карточка 9

1. $y = \frac{2(x^2 + 3x + 2)(x - 4)}{(x - 1)(x^2 - 9)}$.

2. $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 6x^2 + 8x}$.

3. $y = e^{\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}}$.

Карточка 10

1. $y = \frac{(x-3)(x^2+2x-3)}{(x^2-3x-4)(x+2)}$.

2. $y = \frac{(x-3)(4x-x^2)}{x^2+x-2}$.

3. $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

Решения зачетных карточек

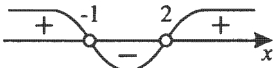
Зачетная карточка 1

$$1. y = \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{2x^2+x+2}{(x-2)(x+1)};$$

$2x^2 + x + 2 > 0$ при всех x , так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -15 < 0. \end{cases}$



$$3) (x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2),$$

$$\text{так как } \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2} = \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}.$$

Выясним возможность пересечения графика $y=y(x)$

и $y = 2$.

$$\frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2} = 2;$$

$$2x^2 + x + 2 = 2x^2 - 2x - 4; \quad x = -2.$$

4) Найдем $E(y)$.

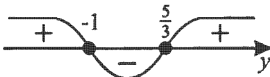
$$y = \frac{2x^2+x+2}{x^2-x-2};$$

$$yx^2 - yx - 2y = 2x^2 + x + 2;$$

$$(y-2)x^2 - (y+1)x - 2(y+1) = 0 \quad (y \neq 2);$$

$$D = (y+1)^2 + 8(y+1)(y-2) = (y+1)(y+1+8y-16) =$$

$$= (y+1)(9y-15) \geq 0.$$



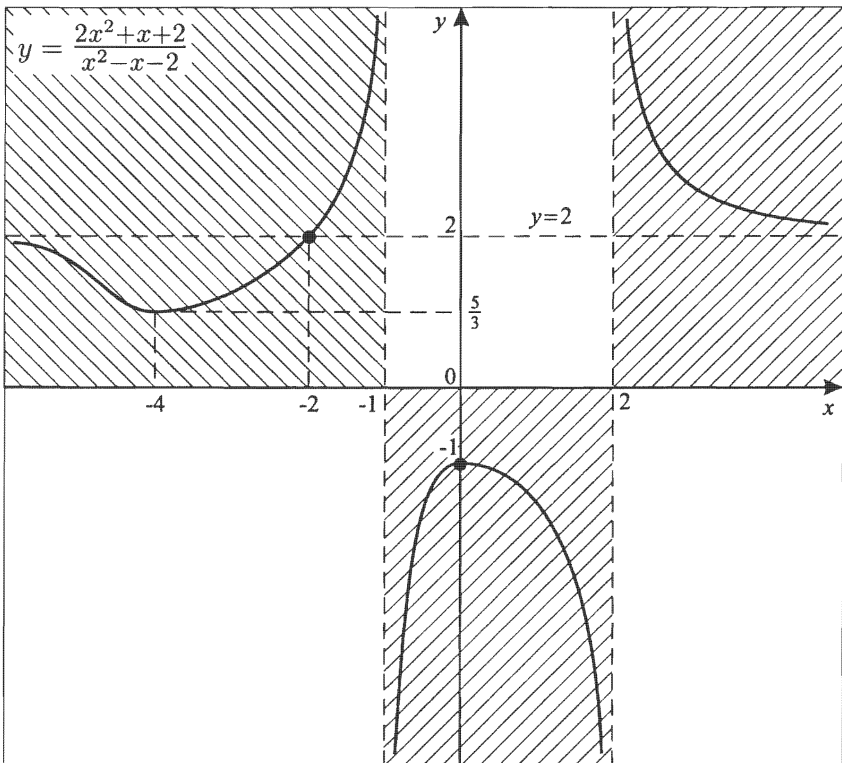
Но при $y = 2$ $x = -2$,

тогда $E(y) = (-\infty; -1] \cup [1\frac{2}{3}; \infty)$.

$x_0 = -\frac{b}{2a}$; $x_0 = \frac{y+1}{2(y-2)}$.

Пусть $y_1 = -1$; $x_1 = 0$.

Пусть $y_2 = \frac{5}{3}$; $x_2 = -4$; $y_{\max} = -1$; $y_{\min} = \frac{5}{3}$.



Примечания. На $(-\infty; -4]$ $y = y(x)$ убывает;

на $[-4; -1)$ $y = y(x)$ возрастает;

на $(-1; 0]$ $y = y(x)$ возрастает;

на $[0; 2)$ $y = y(x)$ убывает;

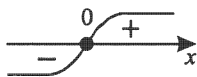
на $(2; \infty)$ $y = f(x)$ убывает.

$$2. y = \frac{x^3+x}{x^2-2x+2}.$$

$$1) D(y) = (-\infty; +\infty);$$

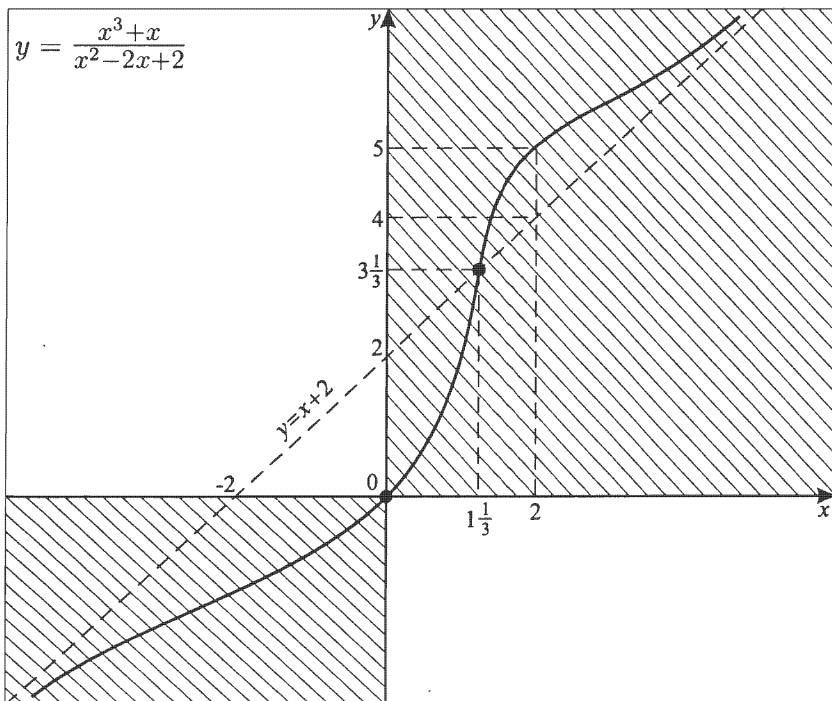
$x^2 - 2x + 2 > 0$ при всех x , так как $\begin{cases} a = 1 > 0, \\ D = -1 < 0. \end{cases}$

$$2) y = \frac{x(x^2+1)}{x^2-2x+2}.$$



$$3) \begin{array}{r} x^3 + x \\ - x^3 - 2x^2 + 2x \\ \hline 2x^2 - x \\ - 2x^2 - 4x + 4 \\ \hline 3x - 4 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^2 - 2x + 2 \\ x + 2 \end{array}$$

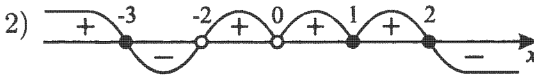
$y = x + 2 + \frac{3x-4}{x^2-2x+2}$. При $x_1 = \frac{4}{3}$ график $y = y(x)$ пересекает $y = x + 2$; $y_1 = 3\frac{1}{3}$.



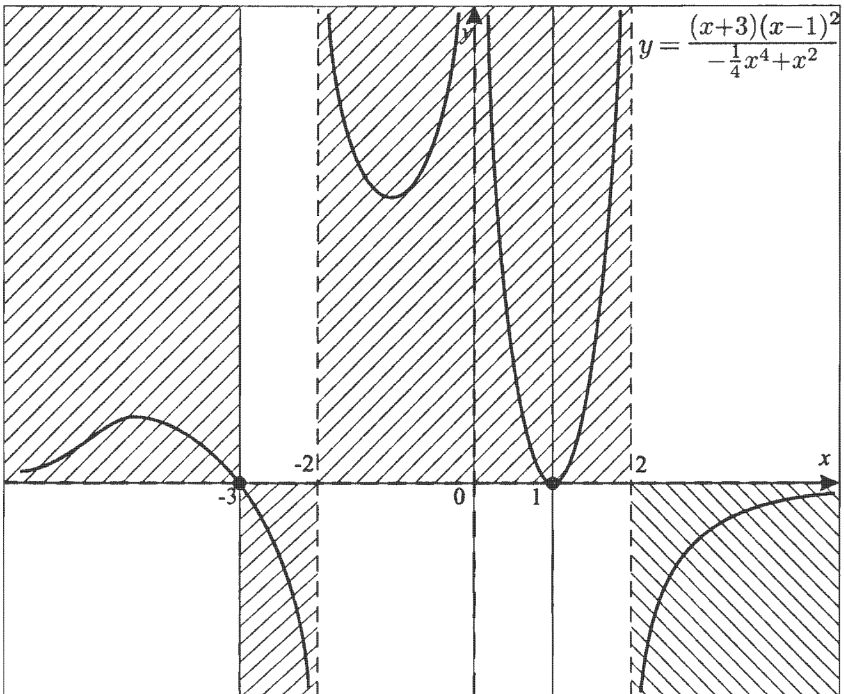
$$3. y = \frac{(x+3)(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}.$$

$$y = \frac{-4(x+3)(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

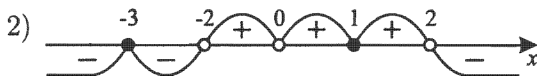


Зачетная карточка 2

$$1. y = \frac{(x+3)^2(x-1)^2}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}.$$

$$y = \frac{-4(x+3)^2(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow -4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{так как } \frac{-4(x+3)^2(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)} &= \frac{-4x^4\left(1+\frac{3}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{x^4\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \\ &= \frac{-4\left(1+\frac{3}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}. \end{aligned}$$

Выясним точки пересечения графика $y = y(x)$ и $y = -4$.

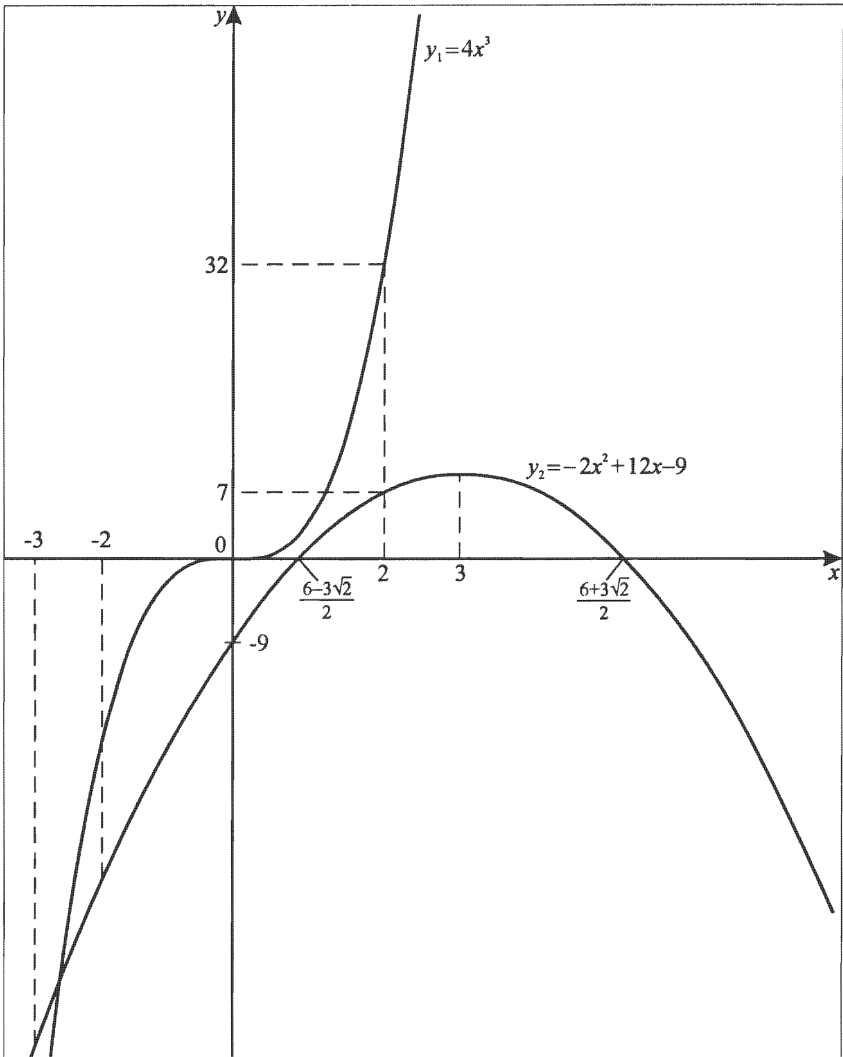
$$\frac{-4(x+3)^2(x-1)^2}{x^2(x+2)(x-2)} = -4; \quad (x^2 + 2x - 3)^2 = x^4 - 4x^2$$

$$((a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac);$$

$$x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 - 6x^2 - 12x = x^4 - 4x^2;$$

$$4x^3 + 2x^2 - 12x + 9 = 0; \quad 4x^3 = -2x^2 + 12x - 9.$$

Решим это уравнение графически.



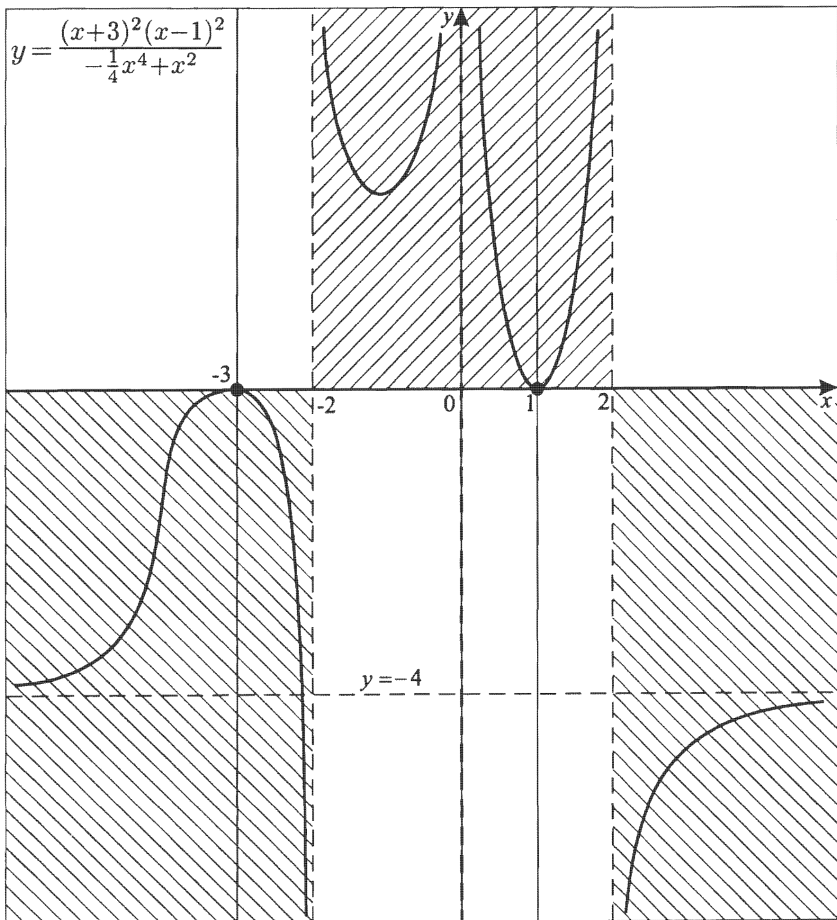
$$y_1 = 4x^3; \quad y_2 = -2x^2 + 12x - 9.$$

Пусть $t(x) = 4x^3 + 2x^2 - 12x + 9 = 0$.

Так как $(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty)$;

$(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty)$, то
существует один корень на $(-3; -2)$.

На $(-2; +\infty)$ и на $(-\infty; -3)$ корней нет.

**Примечание.**

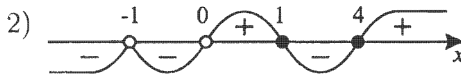
$y_1(-2) = -32$; $y_2(-2) = -41$, тогда $y_1(-2) > y_2(-2)$.

$y_1(-3) = -108$; $y_2(-3) = -63$, тогда $y_1(-3) < y_2(-3)$.

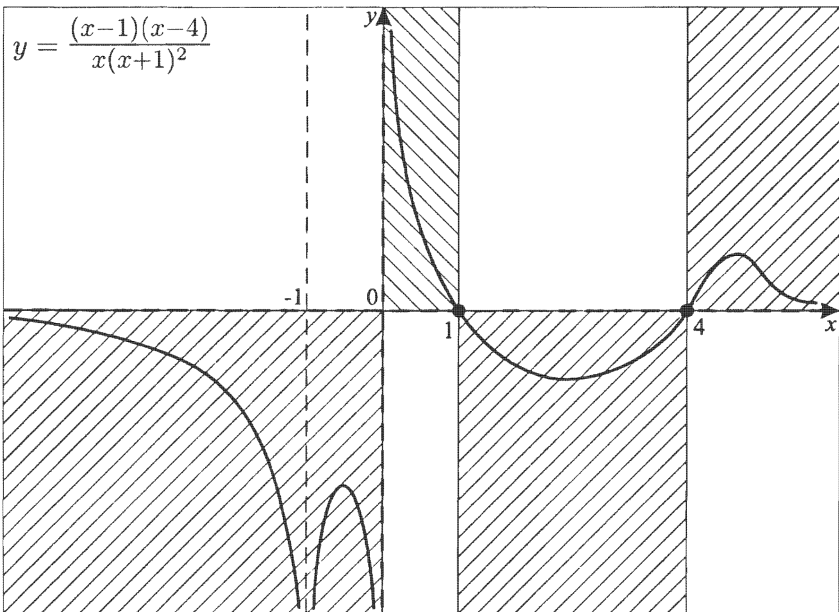
На $(-\infty; -3)$ корней нет, так как $y_1 = 4x^3$ возрастает на $(-\infty; -3)$ быстрее, чем $y_2 = -2x^2 + 12x - 9$.

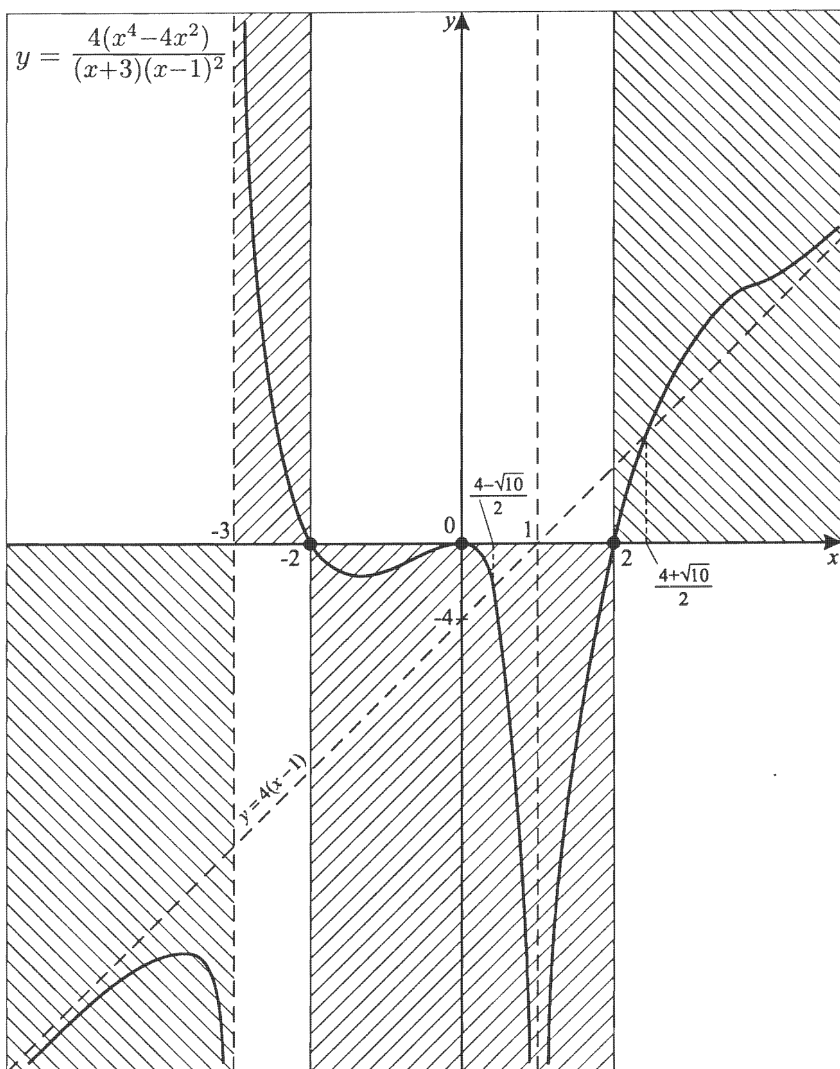
$$2. y = \frac{(x-1)(x-4)}{x(x+1)^2}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$



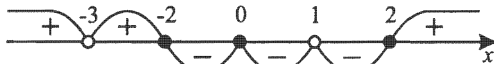


Зачетная карточка 3

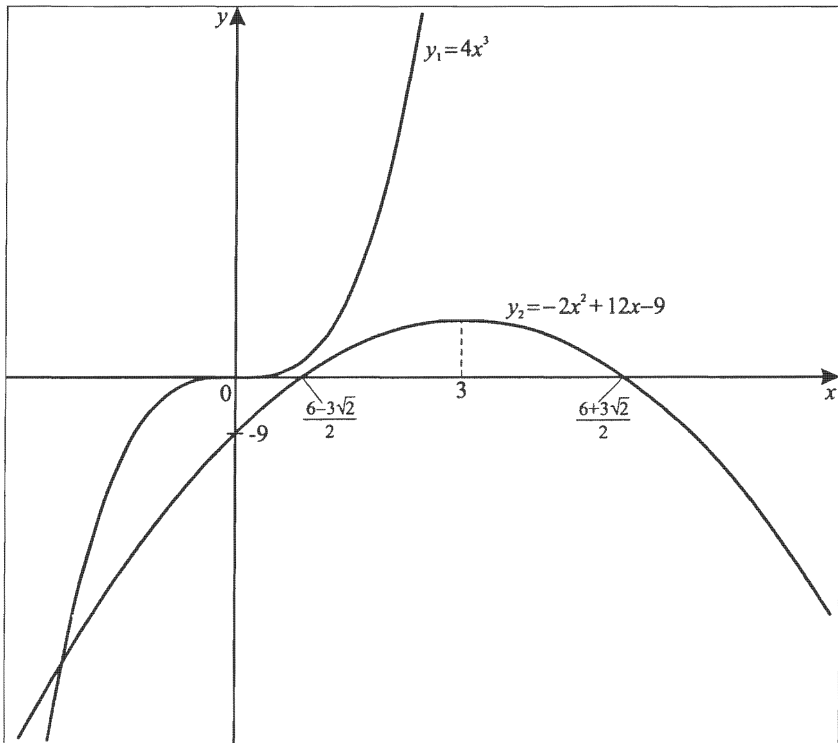
$$1. y = \frac{4(x^4 - 4x^2)}{(x+3)^2(x-1)^2}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{4x^2(x+2)(x-2)}{(x+3)^2(x-1)^2}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 4). \end{aligned}$$



Выясним наличие точек пересечения графика $y=y(x)$ и $y=4$.

$$4x^2(x+2)(x-2) = 4(x+3)^2(x-1)^2;$$

$$x^4 - 4x^2 = (x^2 + 2x - 3)^2;$$

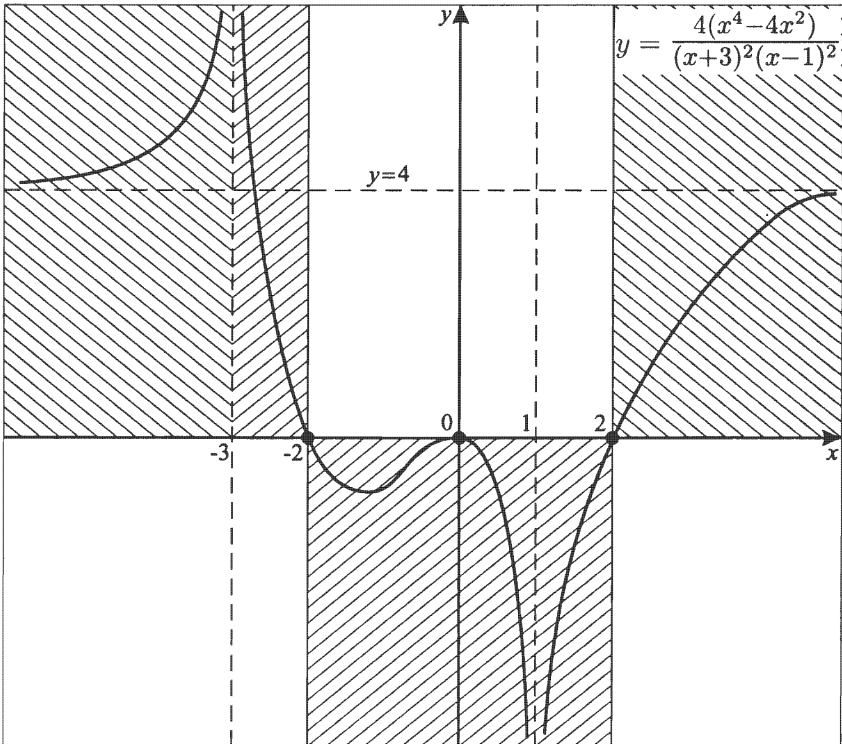
$$x^4 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 - 6x^2 - 12x;$$

$$4x^3 + 2x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Решим это уравнение графически.

$$y_1 = 4x^3; \quad y_2 = -2x^2 + 12x - 9.$$

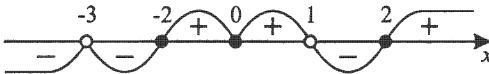
Один корень на $(-3; -2)$ очевиден, так как переход от $+\infty$ к 0 возможен только при пересечении $y=4$ (см. график). Так как $y_1 = 4x^3$ возрастает быстрее, чем $y_2 = -2x^2 + 12x - 9$ на $(-\infty; -3)$, то других корней нет. А на $(-2; +\infty)$ корней вообще нет. Итак, только одна точка пересечения (см. стр. 138).



$$2. y = \frac{x^4 - 4x^2}{(x+3)^2(x-1)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{x^2(x+2)(x-2)}{(x+3)^2(x-1)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -3 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty). \end{aligned}$$

$$(x+3)^2(x-1) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & -4x^2 \\ -x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x & \\ \hline & -5x^3 - 7x^2 + 9x \\ - & -5x^3 - 25x^2 - 15x + 45 \\ \hline & 18x^2 + 24x - 45 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \\ x - 5 \end{array} \right.$$

Итак, $y = x - 5 + \frac{3(6x^2 + 8x - 15)}{(x+3)^2(x-1)}$; $y = x - 5$ — наклонная асимптота.

$$6x^2 + 8x - 15 = 0;$$

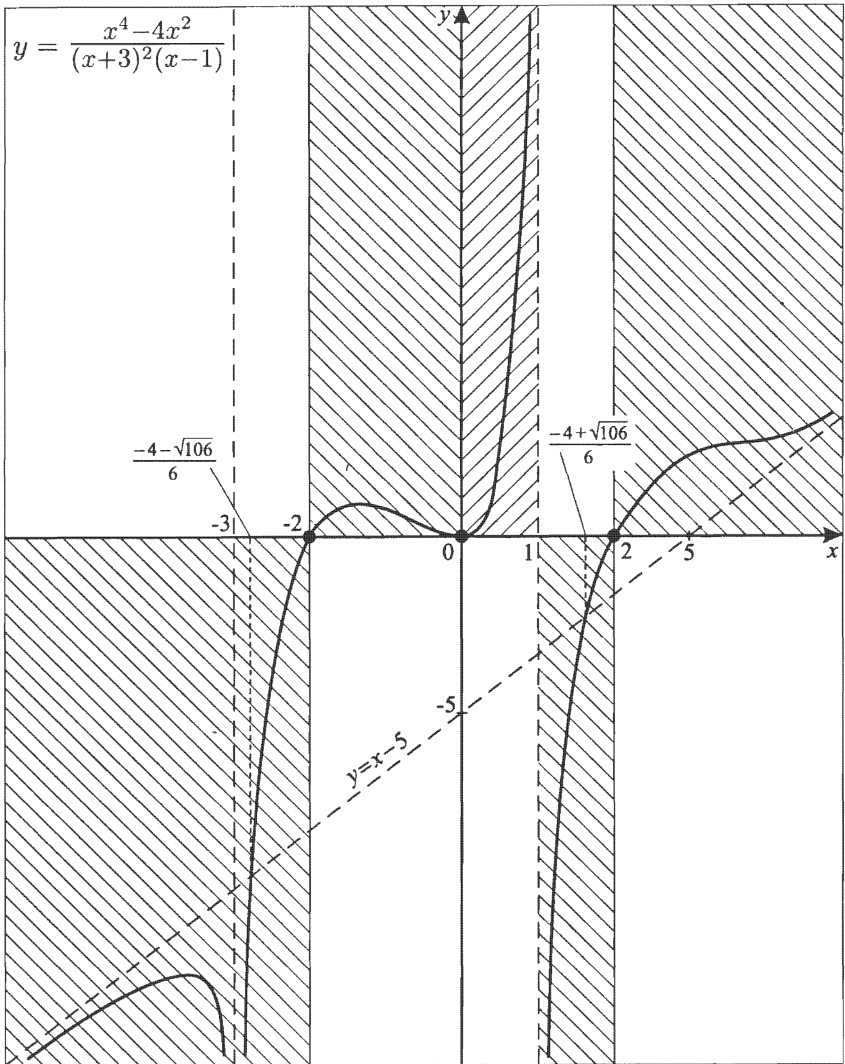
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+90}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{106}}{6};$$

$$y_1 = \frac{-4 + \sqrt{106}}{6} - 5 = \frac{-34 + \sqrt{106}}{6};$$

$$y_2 = \frac{-4 - \sqrt{106}}{6} - 5 = \frac{-34 - \sqrt{106}}{6}.$$

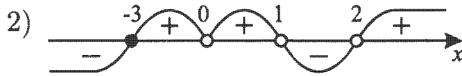
Имеем координаты точек пересечения:

$$\left(\frac{-4 + \sqrt{106}}{6}; \frac{-34 + \sqrt{106}}{6} \right) \text{ и } \left(\frac{-4 - \sqrt{106}}{6}; \frac{-34 - \sqrt{106}}{6} \right).$$

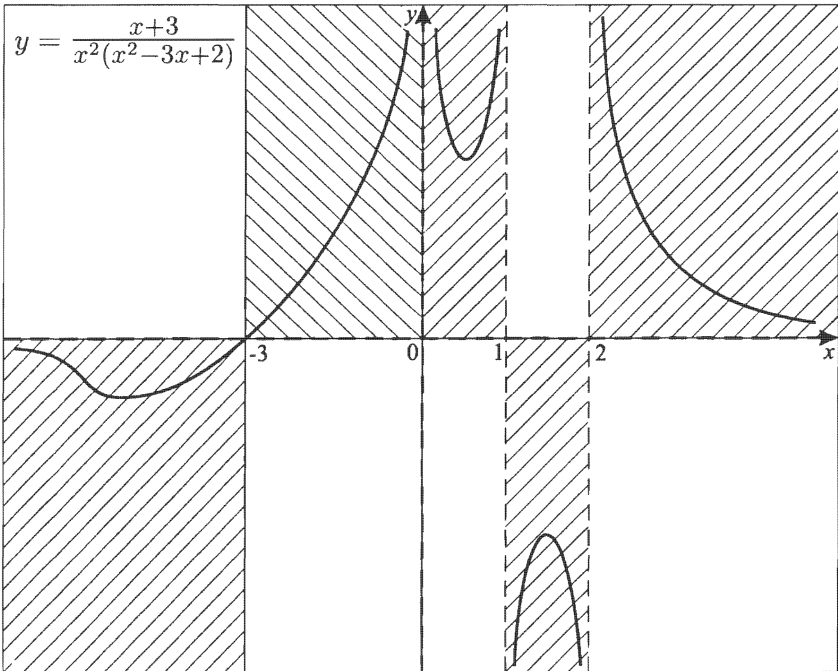


3. $y = \frac{x+3}{x^2(x^2-3x+2)}$.

1) $D(y): \begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1; \\ x \neq 0. \end{cases}$



- 3) $(x \rightarrow 2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow 1+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow 1-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 0+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 0-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0).$

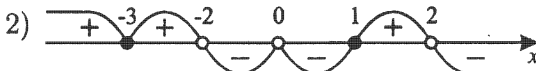


Зачетная карточка 4

$$1. y = \frac{(x+3)^2(x-1)}{-\frac{1}{4}x^4+x^2}.$$

$$y = \frac{-4(x+3)^2(x-1)}{x^2(x-2)(x+2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

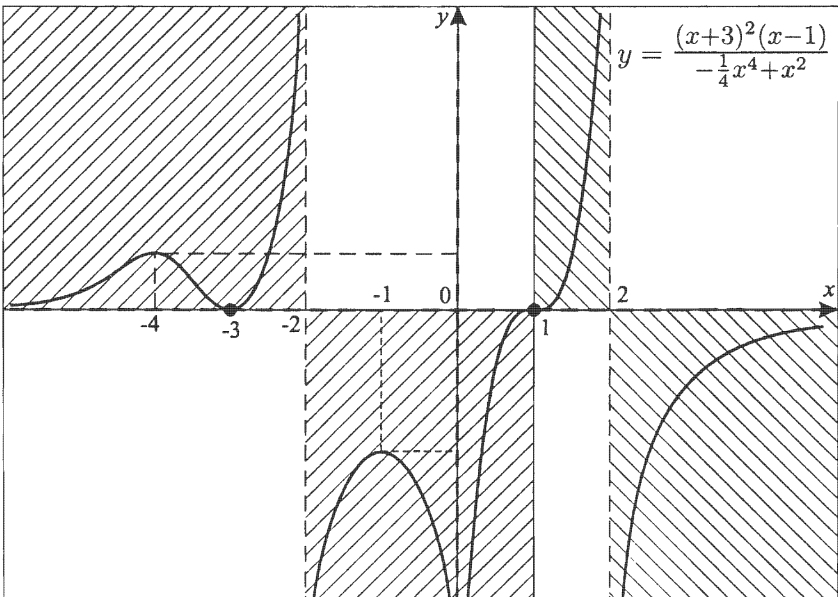


$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

4) Контрольные точки:

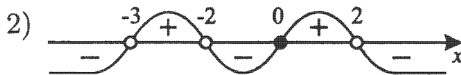
$$x = -1, y = -10\frac{2}{3}, \quad x = -4,4; y \approx \frac{2}{9}.$$

Эскиз графика:



$$2. y = \frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 2, \\ x \neq -3. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow -2), \end{aligned}$$

$$\text{так как } \frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)} = \frac{2}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)}.$$

Найдем точки пересечения графика $y = y(x)$ и $y = -2$.

$$\frac{2x^3}{(4-x^2)(x+3)} = -2;$$

$$2x^3 = -2(-x^3 - 3x^2 + 4x + 12);$$

$$3x^2 - 4x - 12 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+36}}{3} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{3}.$$

4) Контрольные точки:

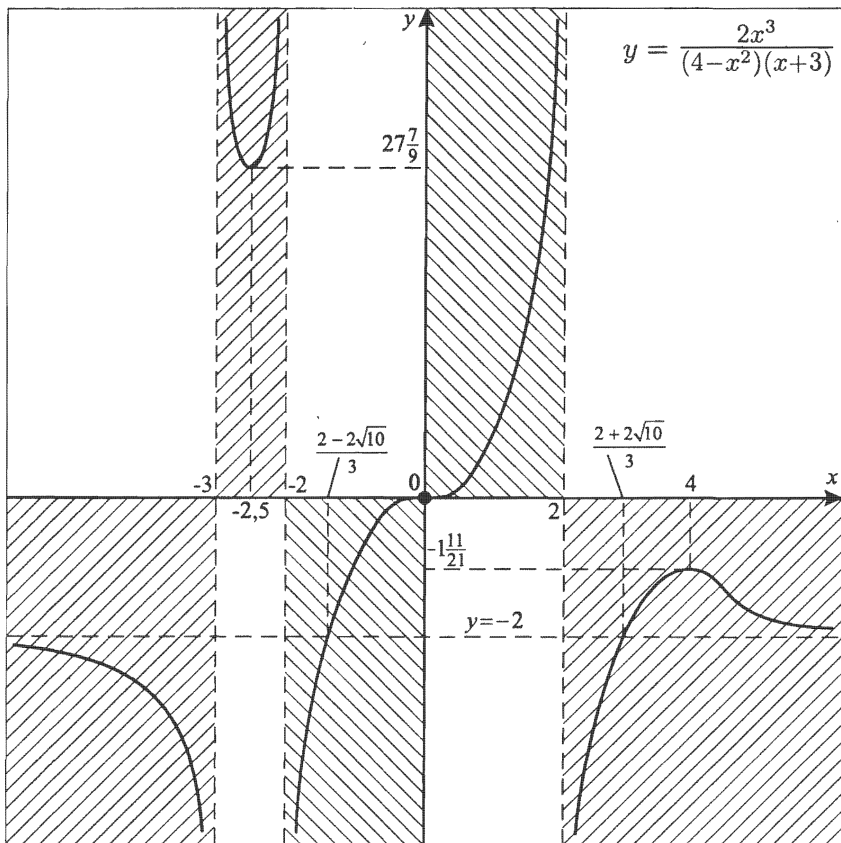
$$x = -2,5;$$

$$y(-2,5) = \frac{-2 \cdot \frac{125}{8}}{\left(4 - \frac{25}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{250}{9} = 27\frac{7}{9};$$

$$x = 4;$$

$$y(4) = \frac{2 \cdot 64}{(4-16)(4+3)} = -\frac{32}{21} = -1\frac{11}{21}.$$

Эскиз графика:



На осях разный масштаб.

$$3. y = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}.$$

$$1) D(y): x \neq 4.$$



$$3) (x \rightarrow 4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2} = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - 8x + 16}.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 3x & x^2 - 8x + 16 \\ -x^3 - 8x^2 + 16x & x + 6 \\ \hline 6x^2 - 19x & \\ -6x^2 - 48x + 96 & \\ \hline 29x - 96 & \end{array}$$

$$y = x + 6 + \frac{29x - 96}{(x-4)^2}; y = x + 6 \text{ — наклонная асимптота.}$$

$$29x - 96 = 0; x = 3\frac{9}{29}.$$

При необходимости можно установить координаты точки пересечения асимптоты $y = x + 6$ с графиком функции $y = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}$.

Для этого необходимо вычислить

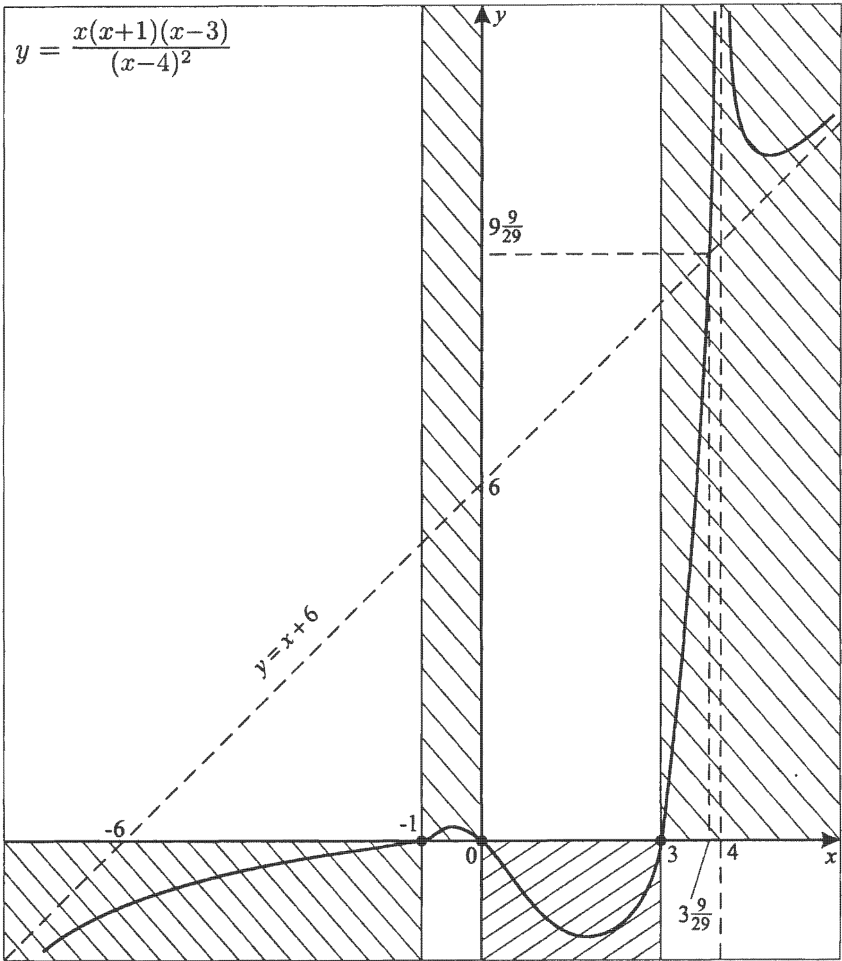
$$y\left(3\frac{9}{29}\right) = \frac{3\frac{9}{29} \cdot 4\frac{9}{29} \cdot \frac{9}{29}}{\left(\frac{20}{29}\right)^2}, \text{ где } y(x) = \frac{x(x+1)(x-3)}{(x-4)^2}.$$

Это технически возможно, но можно проще, так как при $x = 3\frac{9}{29}$ дробь $\frac{29x-96}{(x-4)^2} = 0$, т. е.

$$y\left(3\frac{9}{29}\right) = 3\frac{9}{29} + 6 + 0$$

$$\text{(ведь } y(x) = x + 6 + \frac{29x-96}{(x-4)^2}\text{).}$$

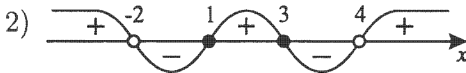
$$\text{Итак, } y\left(3\frac{9}{29}\right) = 9\frac{9}{29}.$$



Зачетная карточка 5

1. $y = \frac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$.

1) $D(y): \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 4. \end{cases}$



- 3) $(x \rightarrow 4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 2).$

Выясним возможные точки пересечения графика $y = y(x)$ и $y = 2$.

$$\frac{2(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-4)} = 2;$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 4x - 16; \quad x = 5,5.$$

4) Найдем $E(y)$.

$$y = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x - 8};$$

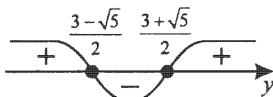
$$yx^2 - 2xy - 8y = 2x^2 - 8x + 6;$$

$$(y - 2)x^2 - 2(y - 4)x - 8y - 6 = 0;$$

$$D = (y - 4)^2 + (8y + 6)(y - 2) =$$

$$= y^2 - 8y + 16 + 8y^2 - 10y - 12 = 9y^2 - 18y + 4 \geq 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 36}}{9} = \frac{9 \pm \sqrt{45}}{9} = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{9} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{3}.$$



$$E(y) = \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{3}; +\infty\right).$$

Для $(y - 2)x^2 - 2(y - 4)x - 8y - 6 = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad x_0 = \frac{y-4}{y-2}.$$

Пусть $y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{3}$;

$$x_1 = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{3}-4}{\frac{3-\sqrt{5}}{3}-2} = \frac{-9-\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}} = \frac{9+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(9+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{9-5} =$$

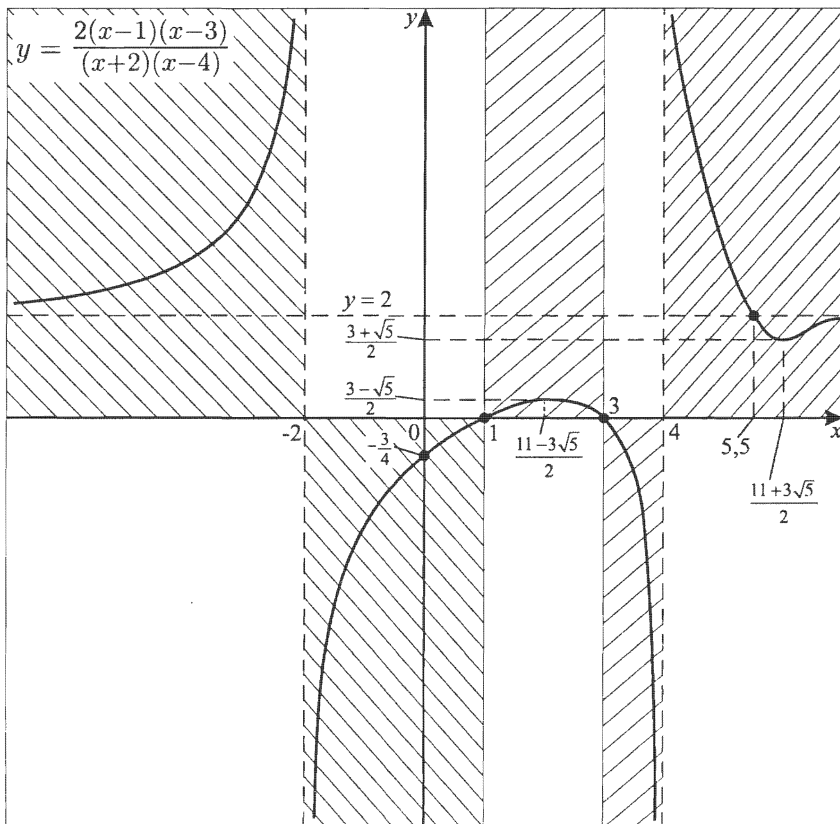
$$= \frac{1}{4}(27-5-6\sqrt{5}) = \frac{22-6\sqrt{5}}{4} = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}.$$

Пусть $y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{3}$;

$$x_2 = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{3}-4}{\frac{3+\sqrt{5}}{3}-2} = \frac{-9+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{5}} = \frac{9-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(9-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{9-5} =$$

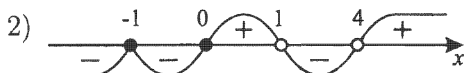
$$= \frac{1}{4}(27-5+6\sqrt{5}) = \frac{22+6\sqrt{5}}{4} = \frac{11+3\sqrt{5}}{2}.$$

5) Контрольные точки: $x = 0$; $y = -\frac{3}{4}$.



$$2. y = \frac{(x+1)^2 x}{(x-1)(x-4)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$3) (x \rightarrow 4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$\frac{(x+1)^2 x}{(x-1)(x-4)} = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + x & x^2 - 5x + 4 \\ -x^3 - 5x^2 + 4x & x + 7 \\ \hline 7x^2 - 3x & \\ -7x^2 - 35x + 28 & \\ \hline 32x - 28 & \end{array}$$

Таким образом, $y = x + 7 + \frac{32x - 28}{(x-1)(x-4)}$; $y = x + 7$ — наклонная асимптота.

$$32x - 28 = 0; x = \frac{7}{8}.$$

$y\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8} + 7 = 7\frac{7}{8}$, значит, $\left(\frac{7}{8}; 7\frac{7}{8}\right)$ — координаты точки пересечения.

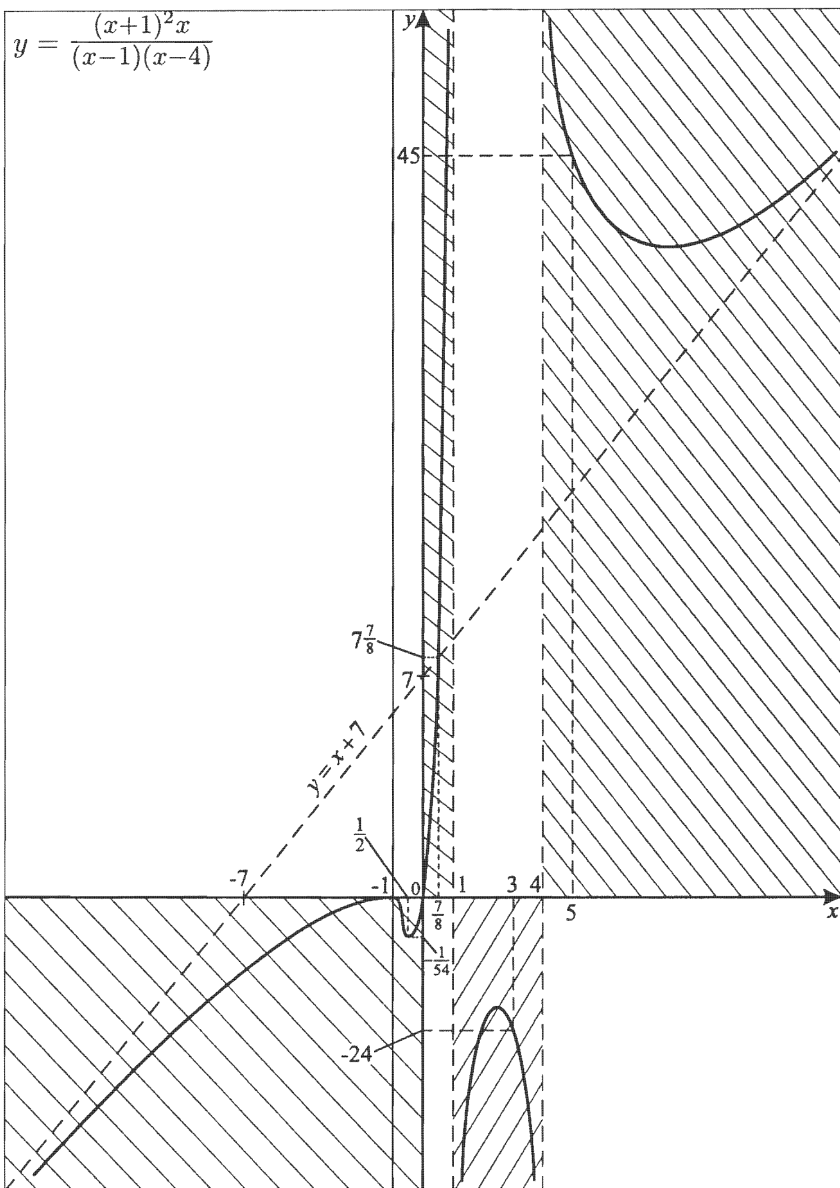
4) Контрольные точки:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{2}} = -\frac{1}{54};$$

$$y(3) = \frac{16 \cdot 3}{2 \cdot (-1)} = -24;$$

$$y(5) = \frac{36 \cdot 5}{4 \cdot 1} = 45.$$

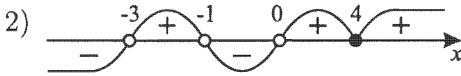
Эскиз графика:



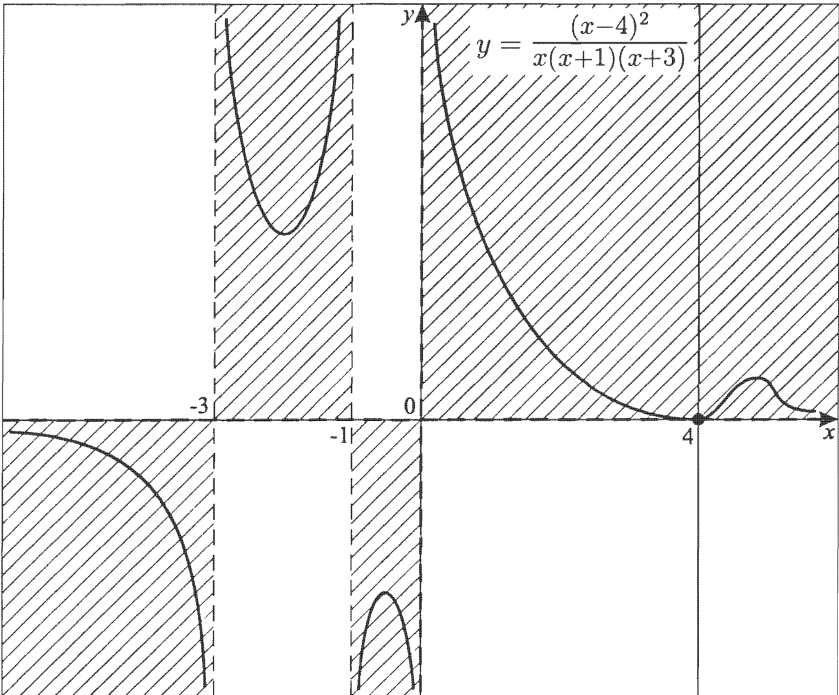
На осях дан разный масштаб.

3. $y = \frac{(x-4)^2}{x(x+1)(x+3)}$.

1) $D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -3. \end{cases}$



3) $(x \rightarrow 0 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 0 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0).$

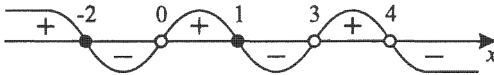


Зачетная карточка 6

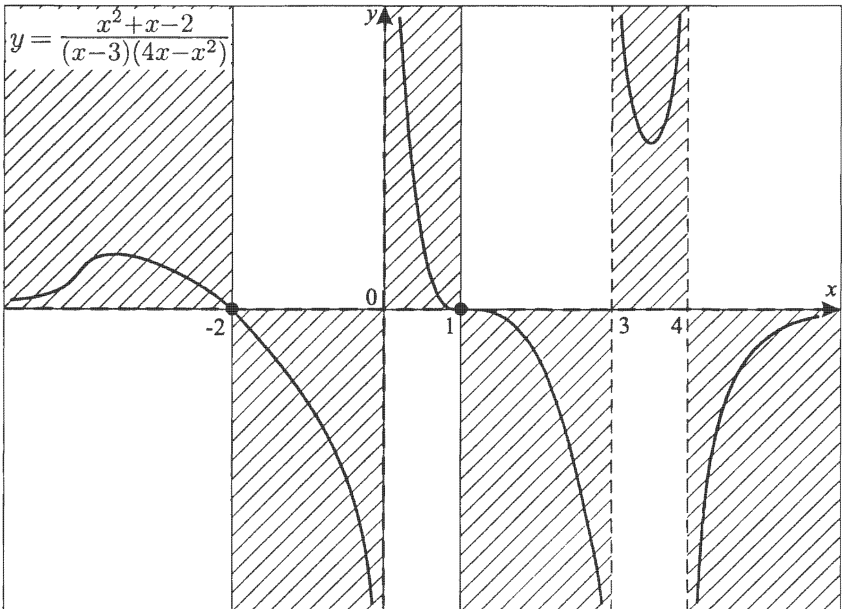
$$1. y = \frac{x^2+x-2}{(x-3)(4x-x^2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(4-x)x}.$$



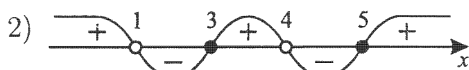
$$\begin{aligned} 3) (x \rightarrow 4+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 4-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$



$$2. y = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$y = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-4)}.$$

$$1) D(y) \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$3) (x \rightarrow 4 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 4 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1),$$

$$\text{так как } \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 4} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{8}{x} + \frac{15}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}.$$

Выясним, при каких x график пересекается с горизонтальной асимптотой.

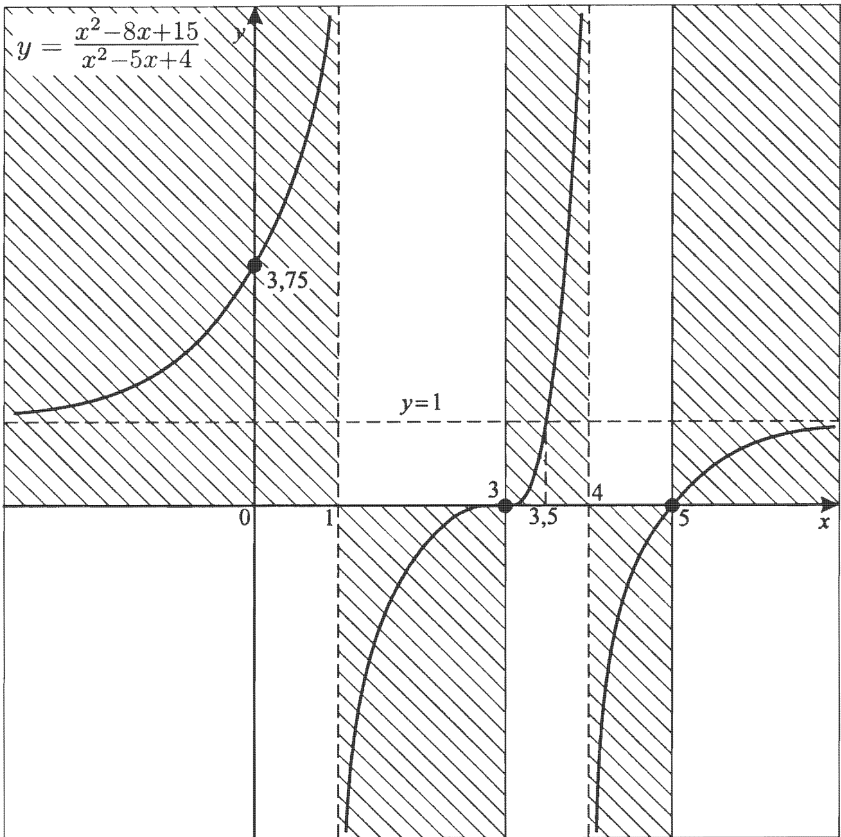
$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 4} = 1;$$

$$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 5x + 4;$$

$$3x = 11;$$

$$x = 3\frac{2}{3}.$$

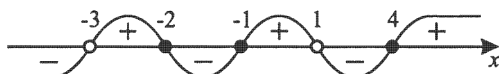
- 4) Функция $y = y(x)$ возрастает на $(-\infty; 1)$, $(1; 4)$ и $(4; \infty)$, но не является возрастающей.



$$3. y = \frac{(x^2+3x+2)(x-4)}{x^2+2x-3}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x+1)(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-1)}.$$



$$3) (x \rightarrow 1+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 1-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -3+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -3-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

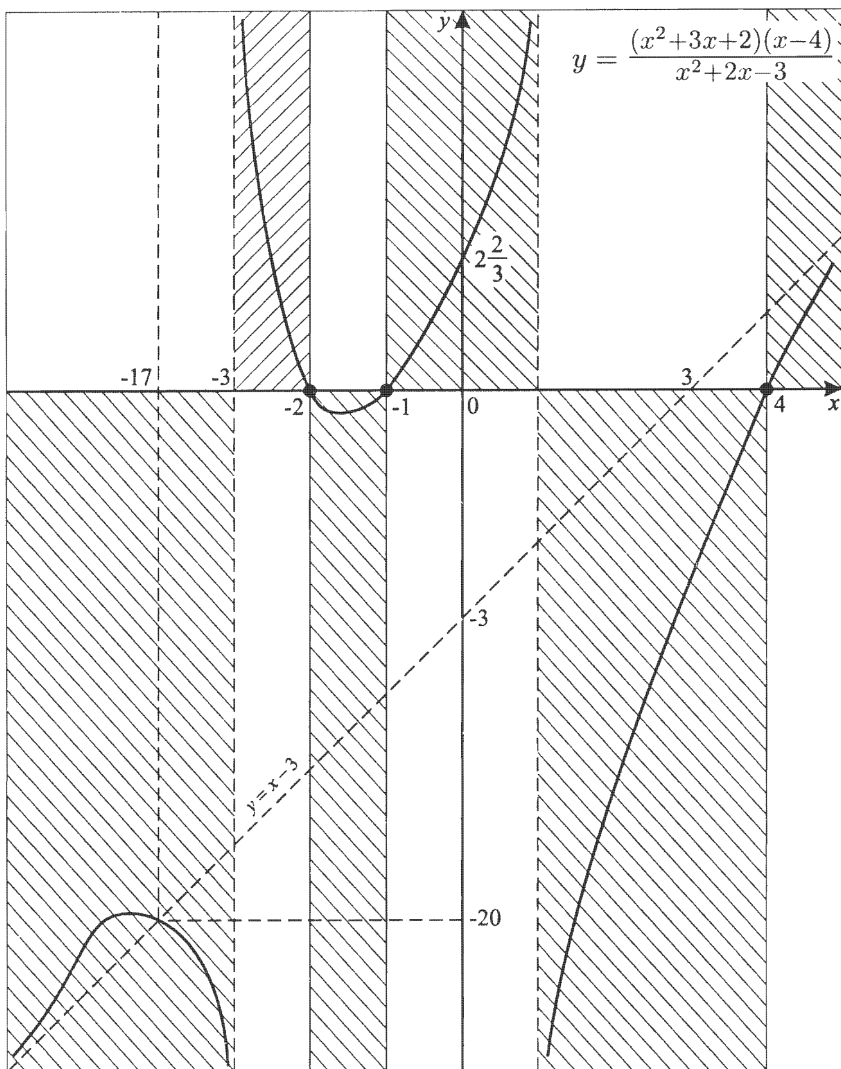
$$(x^2 + 3x + 2)(x - 4) = x^2 - x^2 - 10x - 8$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 10x - 8 & x^2 + 2x - 3 \\ x^3 + 2x^2 - 3x & x - 3 \\ \hline -3x^2 - 7x - 8 & \\ -3x^2 - 6x + 9 & \\ \hline & -x - 17 \end{array}$$

$y = x - 3 - \frac{x+17}{x^2+2x-3}$; $y = x - 3$ — наклонная асимптота.

При $x = -17$ $y = -17 - 3 = -20$, т.е. график $y = y(x)$ пересекает $y = x - 3$, и $(-17; -20)$ — точка пересечения.

$$4) \text{ Контрольная точка: } x = 0; y = 2\frac{2}{3}.$$

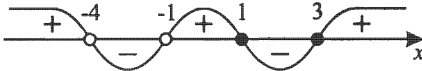


Зачетная карточка 7

$$1. y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x + 4}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+4)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow -1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -4 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -4 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 1). \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x + 4} = 1; x = -\frac{1}{9}.$$

4) Найдем $E(y)$.

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x + 4};$$

$$yx^2 + 5yx + 4y = x^2 - 4x + 3;$$

$$(y-1)x^2 + (5y+4)x + 4y - 3 = 0 \quad (y \neq 1);$$

$$\begin{aligned} D &= (5y+4)^2 - 4(y-1)(4y-3) = \\ &= 25y^2 + 40y + 16 - 16y^2 + 28y - 12 = \\ &= 9y^2 + 68y + 4 \geq 0; \end{aligned}$$

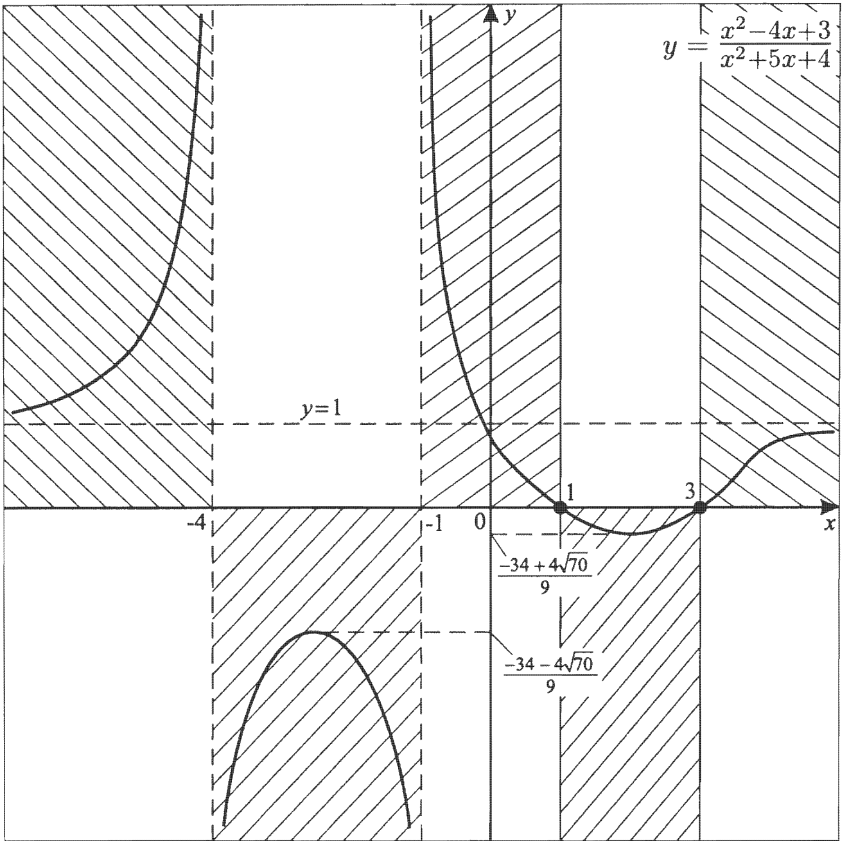
$$y_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{1156 - 36}}{9} = \frac{-34 \pm 4\sqrt{70}}{9};$$

$$E(y) = \left(-\infty; \frac{-34 - 4\sqrt{70}}{9} \right] \cup \left[\frac{-34 + 4\sqrt{70}}{9}; +\infty \right).$$

$$\text{Так как } x_0 = -\frac{b}{2a},$$

$$\text{то для } (y-1)x^2 + (5y+4)x + 4y - 3 = 0 \quad x_0 = -\frac{5y+4}{2(y-1)}.$$

При желании можно точно указать координаты y_{\max} и y_{\min} .



Действительно, пусть $y_1 = \frac{-34+4\sqrt{70}}{9}$, тогда

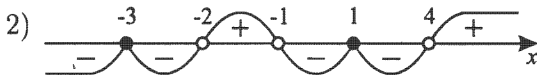
$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{\frac{5(-34+4\sqrt{70})}{9}+4}{2\left(\frac{-34+4\sqrt{70}}{9}-1\right)} = -\frac{-170+20\sqrt{70}+36}{-68+8\sqrt{70}-18} = \\
 &= -\frac{-134+20\sqrt{70}}{-86+8\sqrt{70}} = -\frac{-67+10\sqrt{70}}{-43+4\sqrt{70}} = \\
 &= -\frac{(-67+10\sqrt{70})(4\sqrt{70}+43)}{(4\sqrt{70}-43)(4\sqrt{70}+43)} = \\
 &= -\frac{-268\sqrt{70}+40\cdot 70-67\cdot 43+430\sqrt{70}}{16\cdot 70-43^2} = \\
 &= -\frac{162\sqrt{70}-81}{-729} = \frac{81(2\sqrt{70}-1)}{729} = \frac{2\sqrt{70}-1}{9} \approx 1,7.
 \end{aligned}$$

Аналогично находится x_2 .

$$2. y = \frac{2(x^2+2x-3)^2}{(x^2+3x+2)(x-4)}.$$

$$y = \frac{2(x+3)^2(x-1)^2}{(x+1)(x+2)(x-4)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -1; \\ x \neq -2; \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$3) (x \rightarrow 4+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 4-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x^2 + 2x - 3)^2 = x^4 + 4x^2 + 9 + 4x^3 - 6x^2 - 12x = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9;$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x - 4) = x^3 - x^2 - 10x - 8.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 24x + 18 & x^3 - x^2 - 10x - 8 \\ - 2x^4 - 2x^3 - 20x^2 - 16x & 2x + 10 \\ \hline 10x^3 + 16x^2 - 8x + 18 & \\ - 10x^3 - 10x^2 - 100x - 80 & \\ \hline 26x^2 + 92x + 98 & \end{array}$$

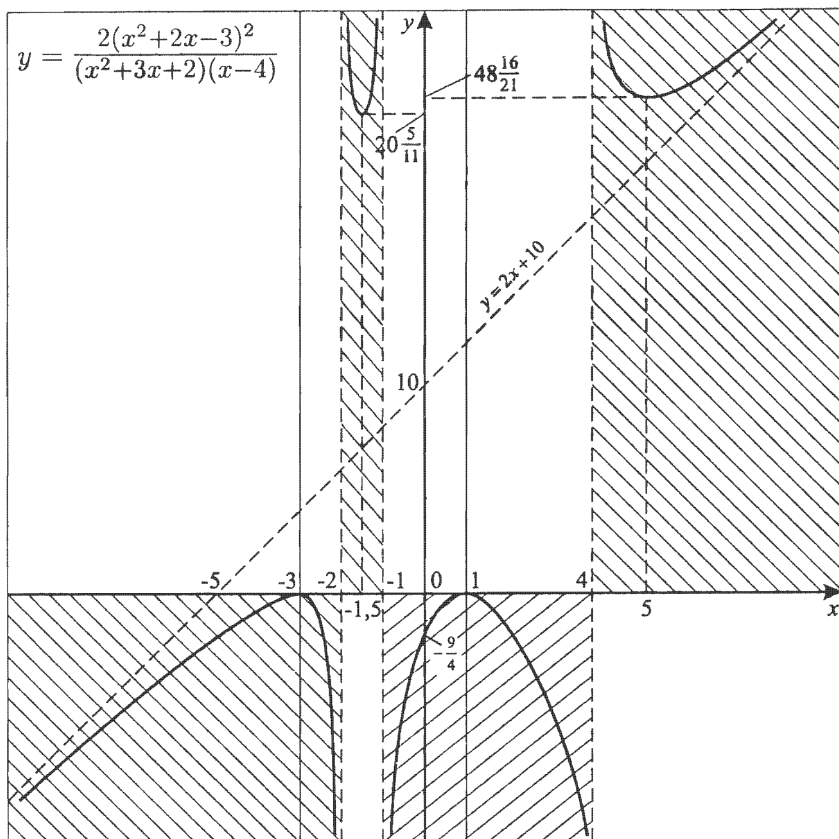
$$y = 2x + 10 + \frac{2(13x^2+46x+49)}{(x+1)(x+2)(x-4)}; y = 2x + 10 \text{ — наклонная асимптота.}$$

$13x^2 + 46x + 49 = 0; D = 529 - 637 < 0$ — точек пересечения нет.

4) Контрольные точки:

$$y(-1,5) = \frac{2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{4}}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{225}{11} = 20\frac{5}{11};$$

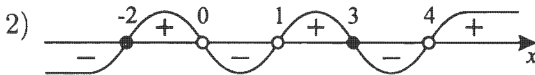
$$y(5) = \frac{2 \cdot 8^2 \cdot 4^2}{6 \cdot 7 \cdot 1} = \frac{1024}{21} = 48\frac{16}{21}.$$



$$3. y = \frac{x^2 - x - 6}{(x^2 - 5x + 4)x}.$$

$$y = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x-4)x}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 4 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 4 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 1 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0 + 0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 0 - 0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

4) Контрольные точки

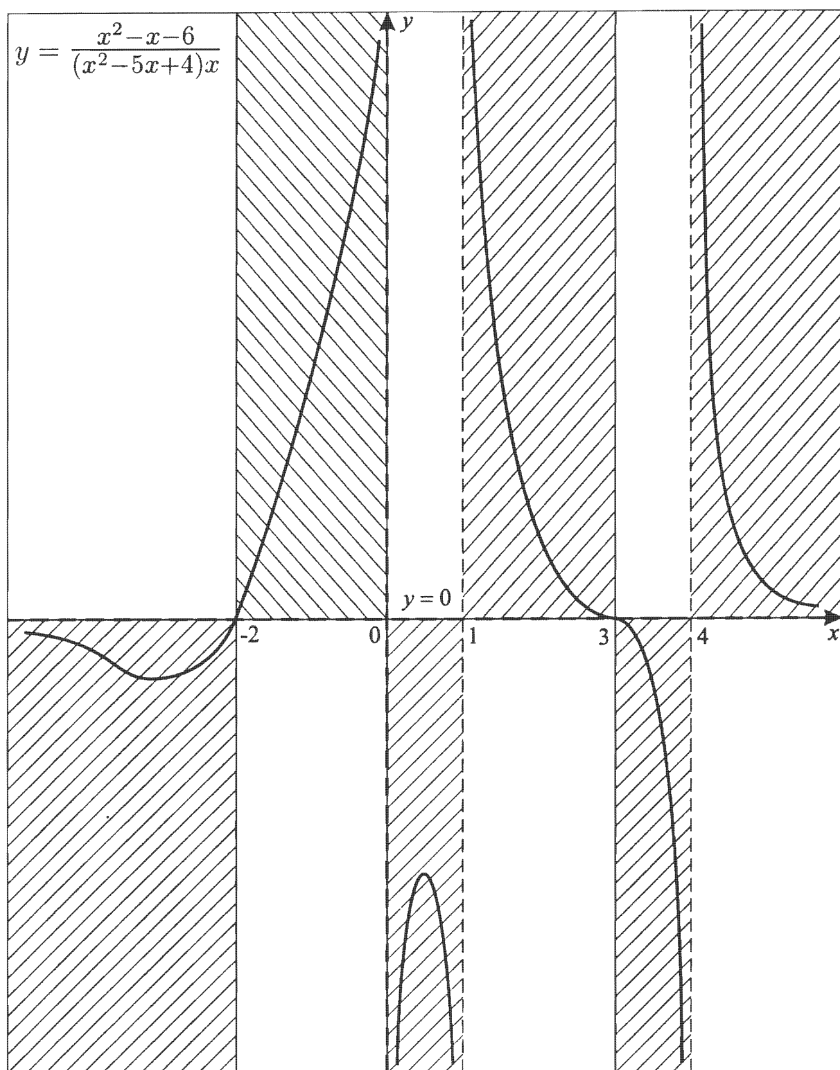
$$x = -3; y = -\frac{1}{14};$$

$$x = \frac{1}{2}; y = -7\frac{1}{7};$$

$$x = 2; y = 1;$$

$$x = 5; y = 0,7.$$

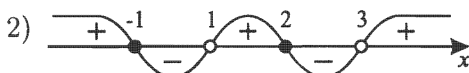
Примечание. Так как точно вычислить минимаксные значения y у нас нет возможности, то эскиз графика будет достаточно приближенным, хотя характер поведения функции ясен.



Зачетная карточка 8

$$1. y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



$$3) (x \rightarrow 3 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 3 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$$

$$(x \rightarrow 1 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$$

$$(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 1),$$

$$\text{Так как } \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}},$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3} = 1;$$

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 4x + 3;$$

$$x = \frac{5}{3};$$

$\left(1\frac{2}{3}; 1\right)$ — координаты точки пересечения.

4) Найдем $E(y)$.

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$yx^2 - 4yx + 3y = x^2 - x - 2 \quad (y \neq 1);$$

$$(y - 1)x^2 - (4y - 1)x + 3y + 2 = 0;$$

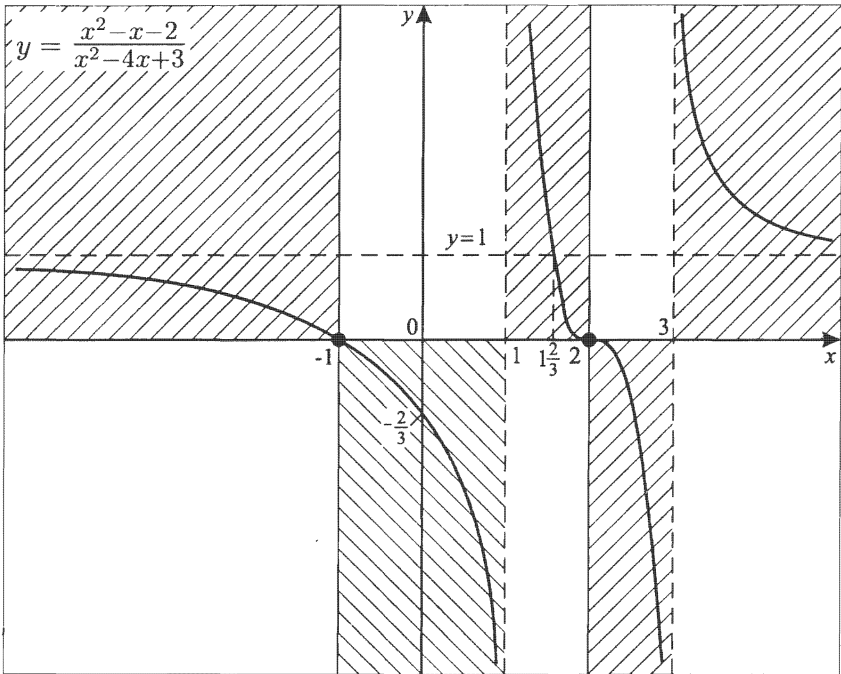
$$D = (4y - 1)^2 - 4(y - 1)(3y + 2) =$$

$$= 16y^2 - 8y + 1 - 12y^2 + 4y + 8 = 4y^2 - 4y + 9;$$

$$D = 4y^2 - 4y + 9 > 0 \text{ при всех } y.$$

т. е. $E(y) = (-\infty; +\infty)$ (так как $y = 1$ при $x = 1\frac{2}{3}$).

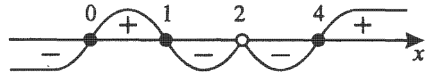
5) Контрольные точки: $x = 0$; $y = -\frac{2}{3}$.



Примечание. Из эскиза графика следует, что на каждом интервале непрерывности функция убывает. Действительно, на $(-\infty; 1)$ функция $y(x)$ убывает, на $(1; 3)$ функция $y(x)$ убывает, на $(3; \infty)$ функция $y(x)$ убывает, но не является убывающей.

2. $y = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}$.

1) $D(y): x \neq 2$. 2)



3) $(x \rightarrow 2 + 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

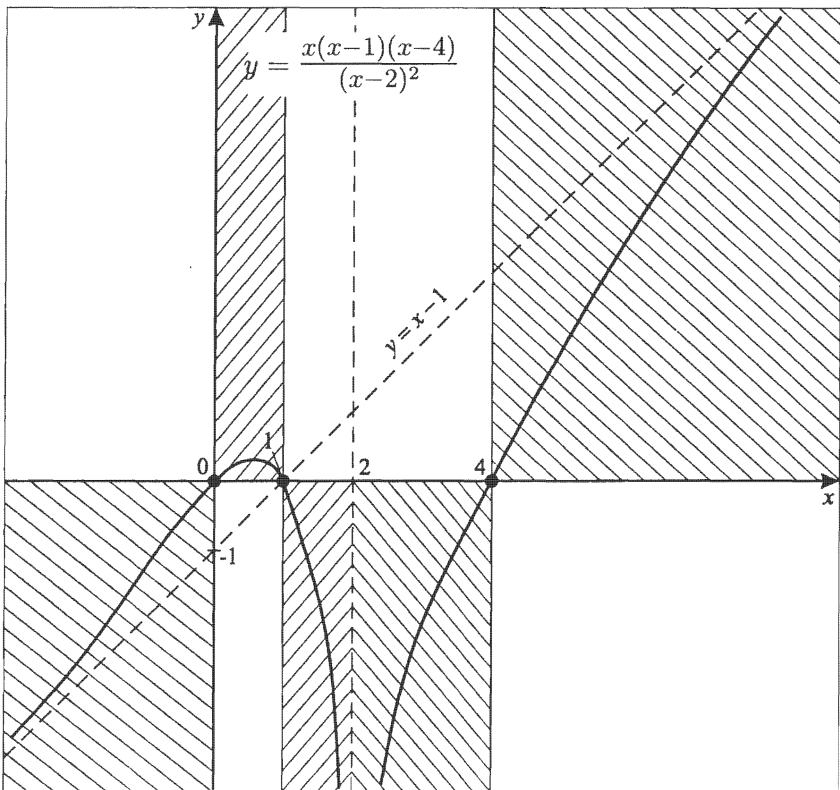
$(x \rightarrow 2 - 0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty)$;

$x(x-1)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 4x$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 4x & x^2 - 4x + 4 \\ - x^3 - 4x^2 + 4x & x - 1 \\ \hline - x^2 & \end{array}$$

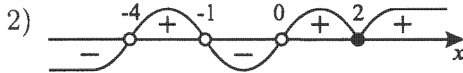
$$\begin{array}{r} - x^2 + 4x - 4 \\ - - 4x + 4 \\ \hline - 4x + 4 \end{array}$$

$y = x - 1 + \frac{4 - 4x}{(x-2)^2}$; $4 - 4x = 0$; $x = 1$.



$$3. y = \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x+4)x}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq -4. \end{cases}$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 0+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 0-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -4+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -4-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 0). \end{aligned}$$

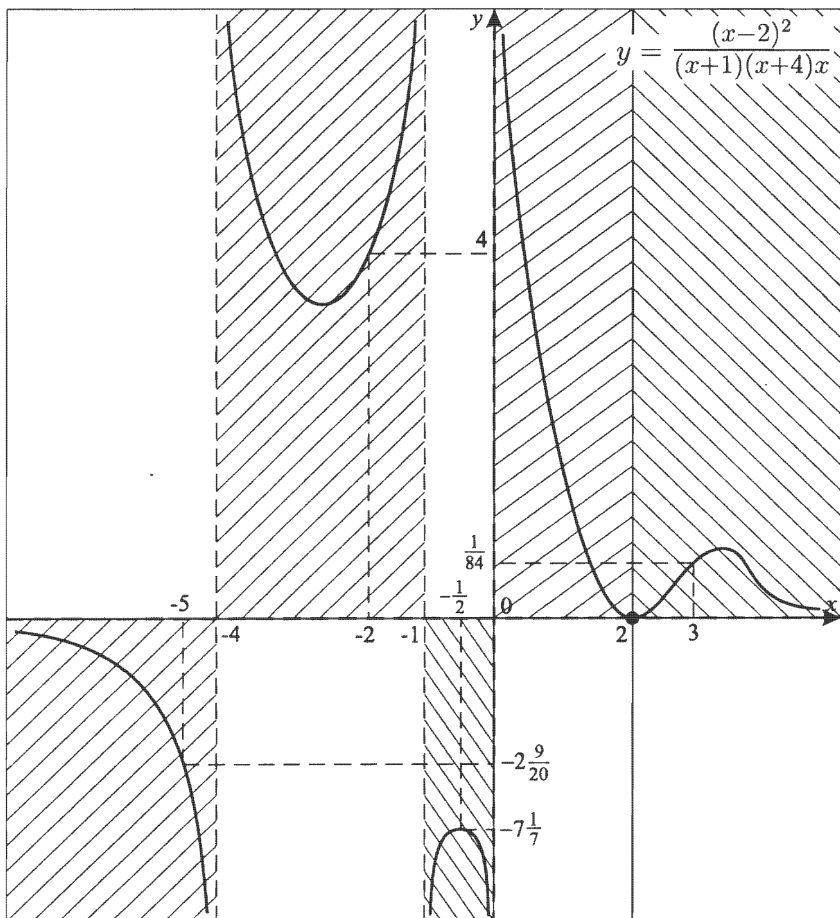
4) Контрольные точки:

$$y(-2) = \frac{16}{-1 \cdot 2 \cdot (-2)} = 4;$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{50}{7} = -7\frac{1}{7};$$

$$y(3) = \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{1}{84};$$

$$y(-5) = \frac{49}{-4 \cdot (-1) \cdot (-5)} = -2\frac{9}{20}.$$

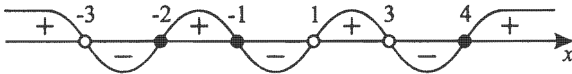


Зачетная карточка 9

$$1. y = \frac{2(x^2+3x+2)(x-4)}{(x-1)(x^2-9)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq \pm 3, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

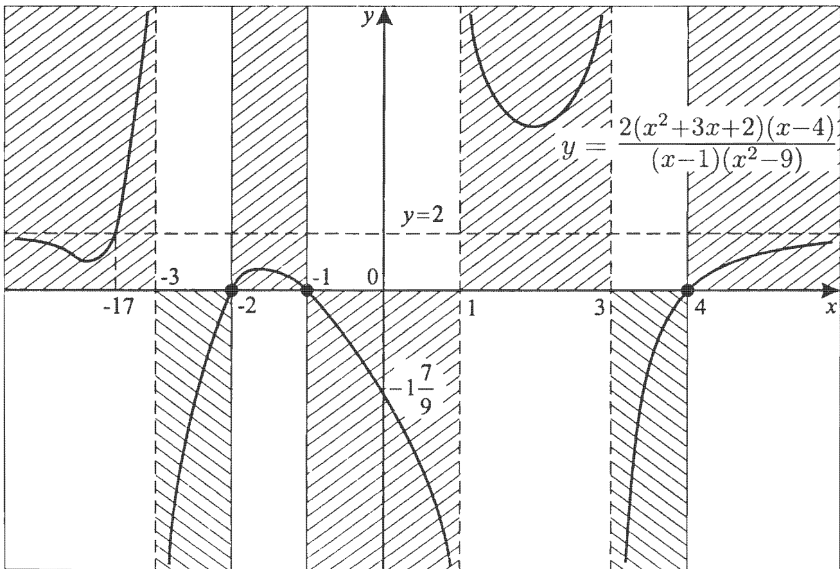
$$2) y = \frac{2(x+1)(x+2)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+3)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow 3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -3-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 2). \end{aligned}$$

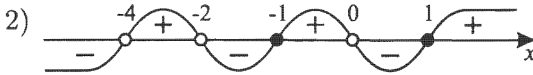
$$\frac{2(x^2+3x+2)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+3)} = 2.$$

$$x^3 - x^2 - 10x - 8 = x^3 - x^2 - 9x + 9; \quad x = -17.$$

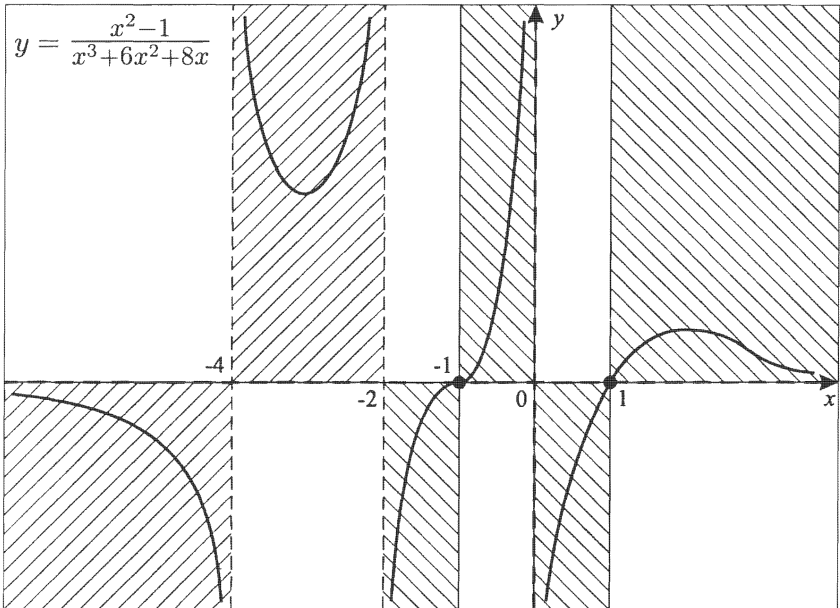


2. $y = \frac{x^2-1}{x^3+6x^2+8x}$.

1) $y = \frac{x^2-1}{x(x+2)(x+4)}$. $D(y): \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4. \end{cases}$



- 3) $(x \rightarrow 0+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow 0-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -2+0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow -2-0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -4+0) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -4-0) \Rightarrow (y \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0).$

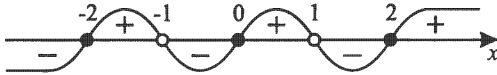


3. $y = e^{\frac{x^3-4x}{x^2-1}}$.

I. Построим вначале $t(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-1}$.

1) $D(t): \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2) $t(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$.



3) $(x \rightarrow 1+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$

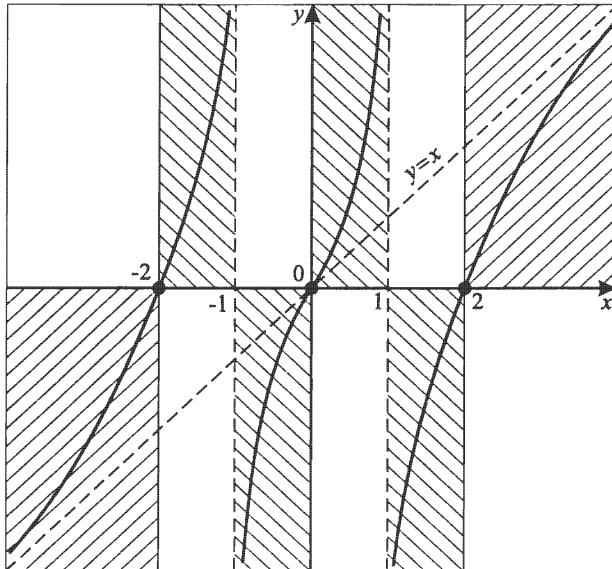
$(x \rightarrow 1-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$

$(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$

$(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$

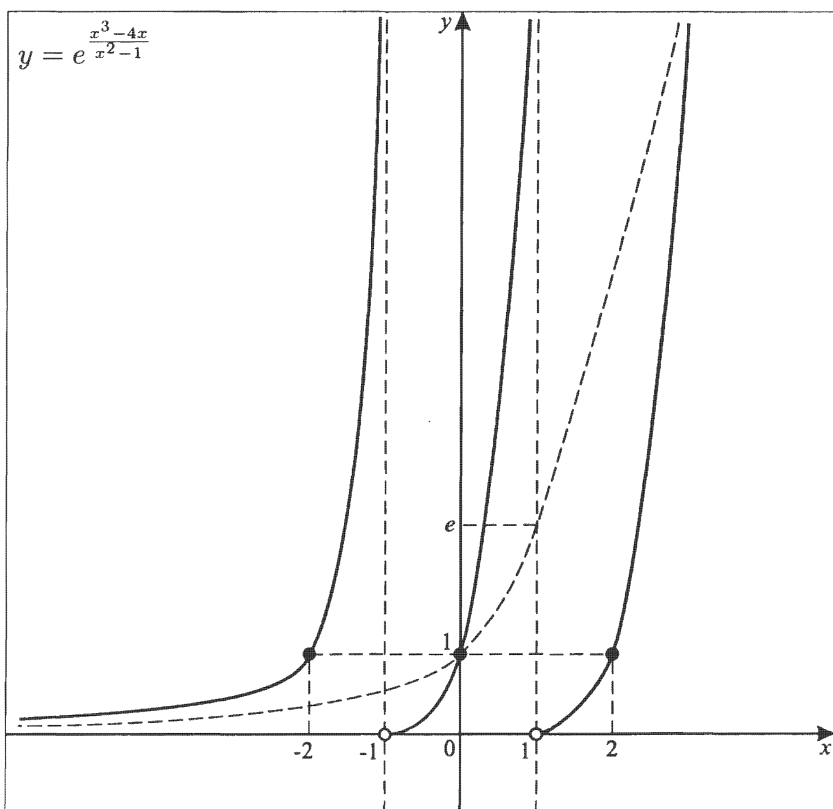
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x & x^2 - 1 \\ \hline x^3 - x & x \\ \hline -3x & \end{array}$$

$t(x) = x - \frac{3x}{x^2-1}$; $x = 0$; $(0; 0)$ — точка пересечения графика $y = t(x)$ и $y = x$.



II. Теперь уже можно строить $y = e^{\frac{x^3-4x}{x^2-1}}$.

- 1) $D(y)$: $x \neq \pm 1$.
- 2) $y > 0$ при всех $x \in D(y)$.
- 3) $(x \rightarrow 1+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow 1-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -1+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow -1-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow x) \Rightarrow (y \rightarrow e^x)$;
 $(x \rightarrow -\infty) \Rightarrow (t \rightarrow -x) \Rightarrow (y \rightarrow e^x)$.
- 4) Контрольные точки:
 $x = 0$; $y = 1$;
 $x = 2$; $y = 1$;
 $x = -2$; $y = 1$.



Зачетная карточка 10

$$1. y = \frac{(x-3)(x^2+2x-3)}{(x^2-3x-4)(x+2)}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq -1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x-3)(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+1)(x+2)}.$$



$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 4+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow 4-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow -1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty); \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty); \\ (x \rightarrow \infty) &\Rightarrow (y \rightarrow 1); \end{aligned}$$

$y = 1$ — горизонтальная асимптота.

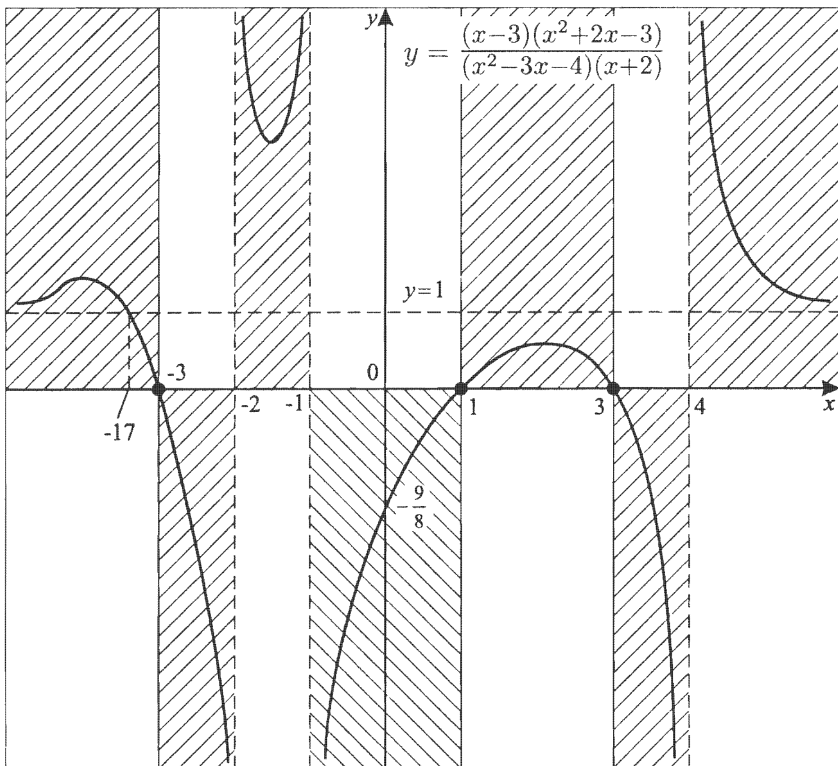
$$\frac{(x-3)(x^2+2x-3)}{(x^2-3x-4)(x+2)} = 1;$$

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^3 - x^2 - 10x - 8;$$

$$x = -17; y = 1;$$

$(-17; 1)$ — точка пересечения графика $y = y(x)$ и $y = 1$.

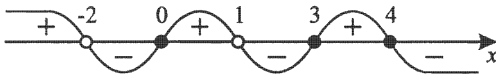
Эскиз графика:



$$2. y = \frac{(x-3)(4x-x^2)}{x^2+x-2}.$$

$$1) D(y): \begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{(x-3)x(4-x)}{(x+2)(x-1)}.$$



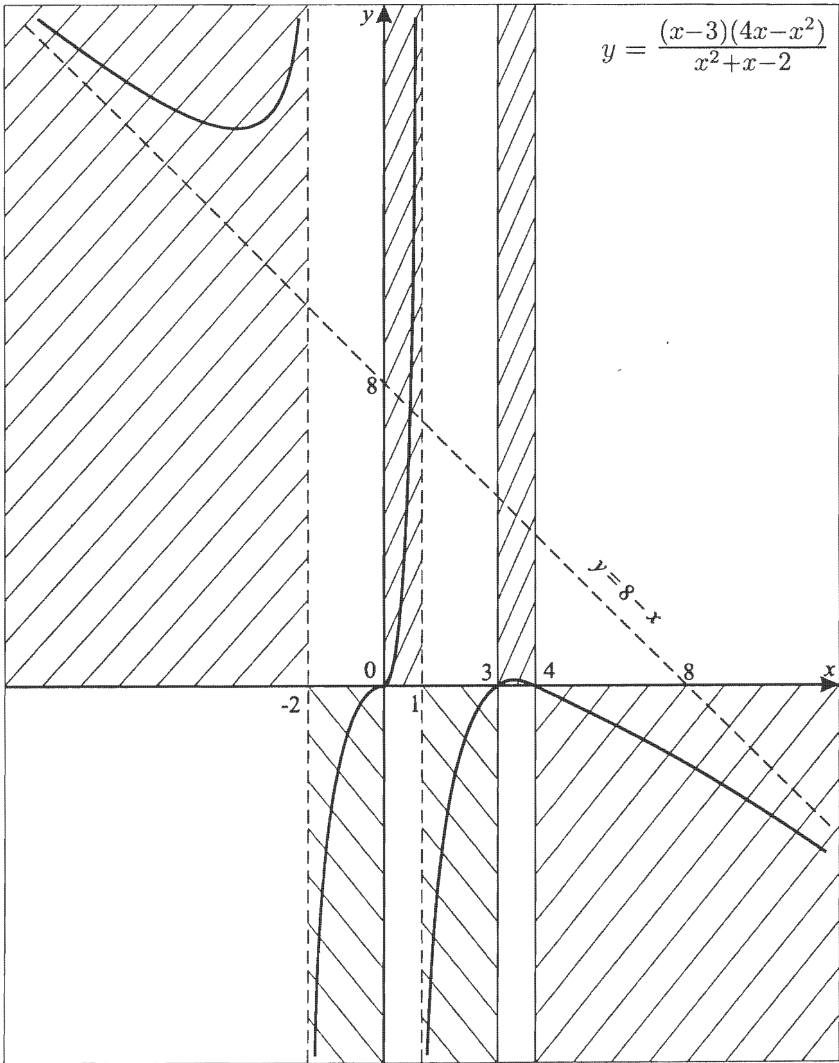
$$3) \begin{aligned} (x \rightarrow 1+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty) \\ (x \rightarrow 1-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -2+0) &\Rightarrow (y \rightarrow -\infty) \\ (x \rightarrow -2-0) &\Rightarrow (y \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

$$y = \frac{-x^3+7x^2-12x}{x^2+x-2}.$$

$$\begin{array}{r|l} -x^3+7x^2-12x & x^2+x-2 \\ -x^3-x^2+2x & -x+8 \\ \hline 8x^2-14x & \\ -8x^2+8x-16 & \\ \hline -22x+16 & \end{array}$$

$$y = -x + 8 - \frac{22x-16}{x^2+x-2}.$$

$x = \frac{8}{11}$ — абсцисса точки пересечения графиков $y = y(x)$ и $y = -x + 8$.

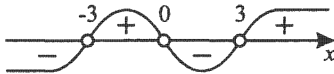


3. $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

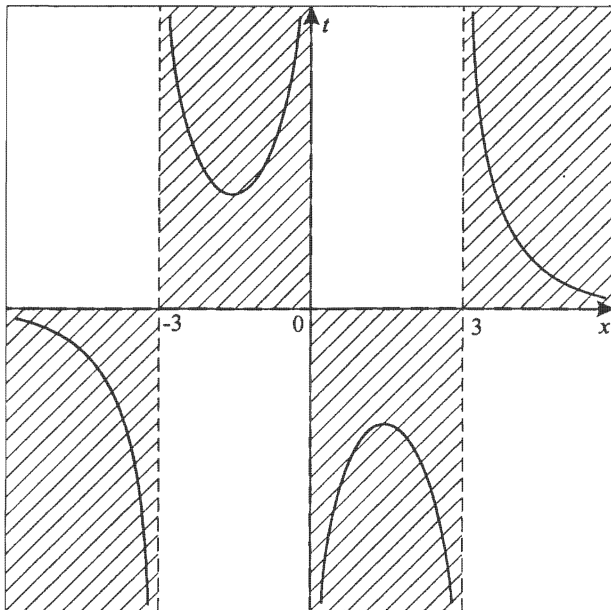
I. Вначале построим $t(x) = \frac{4+x^2}{x^3-9x}$.

1) $D(t): \begin{cases} x \neq \pm 3, \\ x \neq 0. \end{cases}$

2) $t(x) = \frac{4-x^2}{x(x+3)(x-3)}$.

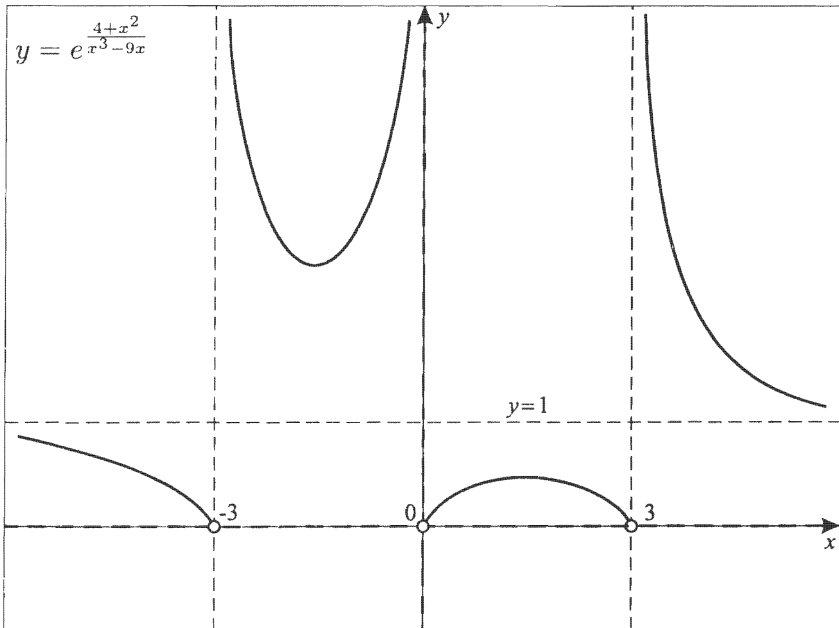


- 3) $(x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow 0+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow 0-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -3+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty);$
 $(x \rightarrow -3-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty);$
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0).$



II. Теперь уже можно построить $y = e^{\frac{4+x^2}{x^3-9x}}$.

- 1) $D(y): \begin{cases} x \neq \pm 3, \\ x \neq 0. \end{cases}$
- 2) $y > 0$ для любого $x \in D(y)$;
- 3) $(x \rightarrow 3+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow 3-0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow 0+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow 0-0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -3+0) \Rightarrow (t \rightarrow +\infty) \Rightarrow (y \rightarrow +\infty)$;
 $(x \rightarrow -3+0) \Rightarrow (t \rightarrow -\infty) \Rightarrow (y \rightarrow 0)$;
 $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow (t \rightarrow 0) \Rightarrow (y \rightarrow 1)$.



Содержание

Программа элективного курса	4
1. Асимптоты	5
Вводные замечания.	5
Вертикальная асимптота	8
Горизонтальная асимптота.	10
Области существования графика на координатной плоскости.	12
Практикум (И.Ф.П.Г.)	16
Наклонная асимптота	36
Тренировочная работа	40
Решение тренировочной работы	41
2. Проверочные задания	71
Условия проверочных заданий	71
Решения проверочных заданий	74
3. Зачетные карточки	130
Условия зачетных карточек.	130
Решения зачетной карточки 1	133
Решения зачетной карточки 2	137
Решения зачетной карточки 3	143
Решения зачетной карточки 4	148
Решения зачетной карточки 5	153
Решения зачетной карточки 6	158
Решения зачетной карточки 7	163
Решения зачетной карточки 8	169
Решения зачетной карточки 9	174
Решения зачетной карточки 10	178

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.

E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «Виктория плюс»

В Санкт-Петербурге: (812) 516-5811, (812) 516-5805,

В Москве (филиал): (495) 488-3005

E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»

193171, С.-Петербург, Фарфоровская 18, кв 1.

Тел.: (812) 943-8076; факс: (812) 560-0524.

E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru