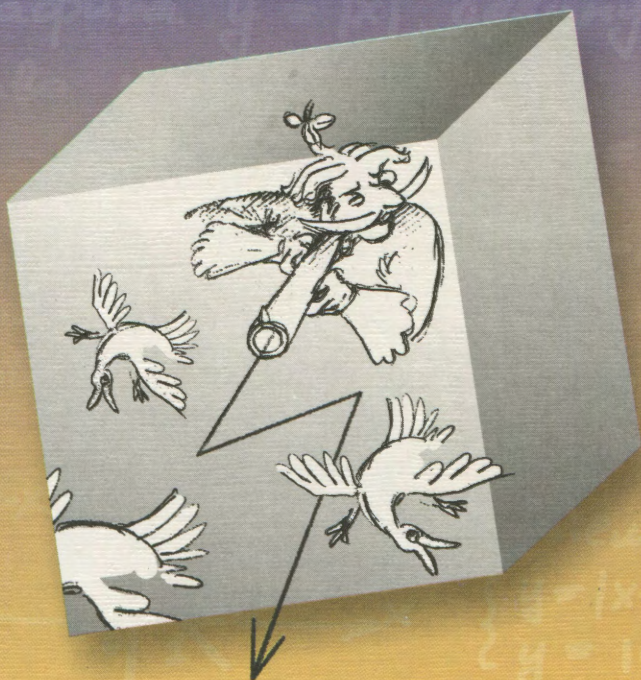


А.Х. Шахмейстер

# ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ



Практикум  
Тренинг  
Контроль

**А. Х. Шахмейстер**

# Построение и преобразования графиков. Параметры

Часть 1. Линейные функции и уравнения

---

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,  
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ



С.-Петербург  
Москва  
2014

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.141я71.6

**Редактор:**

Кандидат пед. наук, доцент кафедры  
математики МИОО А. В. Семенов.

**Рекомендовано**

Московским институтом открытого образования (МИОО)  
и Московским центром непрерывного математического  
образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников,  
абитуриентов и преподавателей.

**Шахмейстер А.Х.**

**Ш32** Построение и преобразования графиков. Параметры.  
Часть 1. Линейные функции и уравнения / А.Х. Шахмейстер —  
М. : Издательство МЦНМО : СПб. : «Петроглиф» : «Виктория  
плюс», 2014. — 176 с. : илл. — ISBN 978-5-4439-0105-3,  
ISBN 978-5-98712-212-9, ISBN 978-5-91673-109-5.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школь-  
ного курса математики, содержит большое количество разноуровневого  
тренировочного материала. В книге представлена программа для про-  
ведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах.  
Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов  
педагогических вузов, учителей.

ISBN 978-5-4439-0105-3 (Издательство МЦНМО)  
ISBN 978-5-98712-212-9 (ООО «Петроглиф»)  
ISBN 978-5-91673-109-5 (ООО «Виктория плюс»)

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.141я71.6



© Шахмейстер А.Х., 2014  
© Дольник Е.В., обложка, 2014  
© ООО «Петроглиф», 2014

*Посвящается памяти Заслуженных  
учителей России:*

*Бориса Германовича Зива  
Иосифа Яковлевича Веребейчика  
Арона Рувимовича Майзелиса  
Таисии Ивановны Курсиш  
Владимира Леонидовича Ильина*

## **Предисловие**

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачки по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

**Программа элективного курса для учащихся 7-11 классов  
(32 урока).**

<b>№№ уроков</b>	<b>Название темы</b> В скобках указаны номера заданий	<b>Страницы</b>
1-2 3-5	<b>Линейная функция.</b> Теория. Самостоятельная работа 1 Упражнения	5-42 5-12 13
6-7	<i>Вариант 1</i> (1, 3). <i>Вариант 2</i> (2, 3) <i>Вариант 3. Вариант 4</i> (1, 2) Самостоятельная работа 2	14-37
8-9	<i>Вариант 1</i> (4, 7, 8). <i>Вариант 2</i> (1, 4, 8). Самостоятельная работа 3 <i>Вариант 1</i> (1, 3, 4, 6, 8, 13, 14). <i>Вариант 2</i> (3, 10, 11, 12, 15, 16).	38 39-42
10-11 12-13 14-15 16-17	<b>Уравнения прямых. Виды симметрии</b> Практикум 1 (1(a,b) 2, 3) Практикум 2 (1, 2, 4 (частично)) Тренировочная работа 1 (1, 3, 6, 8(a), 9(a,b)) Самостоятельная работа 4 (1, 3, 4, 7 (частично))	43-82 44-53 54-59 60-81 82
18-20 21-22 23-24 25-26	<b>Кусочно-линейная функция</b> Примеры (1, 2, 4, 5, 7, 9, 10). Анализ (1, 3, 4, 9, 10). Тренировочная работа 2 (2, 3, 5). Тренировочная работа 3 <i>Вариант 1</i> (2 (частично), 3 (a,b), 4 (b), 6). <i>Вариант 2</i> (частично).	83-127 83-93 94-99 100-108 109-127
27-32	<b>Графики и параметры</b> Практикум 3 (1, 2(a), 3, 4, 6 (частично), 7 (a,b)) Самостоятельная работа 5 <i>Вариант 2</i> Самостоятельная работа 6 <i>Вариант 1</i> (1, 2 (b), 3) Самостоятельная работа 7 (4, 6, 7, 9) Самостоятельная работа 8 <i>Вариант 1</i> .	128-156 128-150 151-152 153 154 155

Программа разработана по материалам книги и апробирована на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

# 1

## Линейная функция

### *График линейной функции*

**Определение 1.**<sup>1</sup> Под функцией мы будем понимать такой закон или правило соответствия между элементами множеств  $A$  и  $B$ , по которому каждому элементу множества  $A$  соответствует вполне определенный элемент из множества  $B$ .

**Определение 2.** Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют функциональному равенству  $y = f(x)$ , называется графиком функции, т. е.  $\Gamma(y = f(x)) = \{(x_0; y_0) \mid y_0 = f(x_0)\}$  ( $\Gamma$  — график).

**Определение 3.** Линейной функцией называется функция вида  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  — конкретные заданные числа.

Так как прямая однозначно определяется двумя ее различными точками, то для построения графика функции  $y = kx + b$  достаточно построить две точки графика (или указать их точные координаты).

Действительно, пусть  $A(-2; 3) \in \Gamma(y = kx + b)$ , т. е. точка  $A$  принадлежит графику функции  $y = kx + b$ , и  $B(1; 4) \in \Gamma(y = kx + b)$ .

<sup>1</sup> А. Х. Шахмейстер. Множества. Функции. Последовательности. СПб., М., 2008, 2014. С. 85–92.

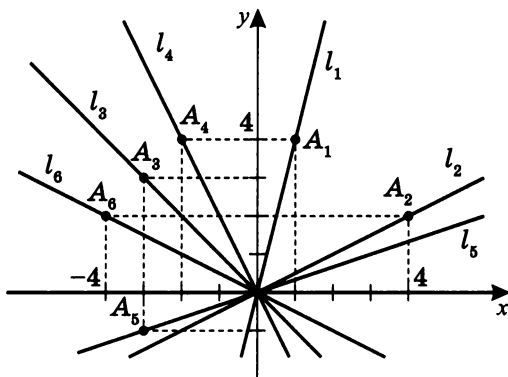
$$\text{Тогда } \begin{cases} 3 = k \cdot (-2) + b \\ 4 = k \cdot 1 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} 3 = -2k + b \\ 4 = k + b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 3 + 2k \\ b = 4 - k \end{cases};$$

$$(3 + 2k = 4 - k); \quad \begin{cases} 3 = -2k + b \\ 1 = 3k \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 3\frac{2}{3} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Значит, функция будет иметь вид:  $y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$ .

Следовательно, двух точек, принадлежащих графику функции  $y = kx + b$ , достаточно для однозначного определения значений  $k$  и  $b$ .

**Пример.** Напишите уравнение графиков  $y = kx$  ( $y = kx + b$ , где  $b = 0$ ), данных на чертеже.



**Решение.**

а)  $A_1(1; 4) \in \Gamma(y = kx)$ .

Подставляя координаты точки  $A_1$  в уравнение прямой  $y = kx$ , получим  $4 = k \cdot 1$ ;  $k = 4$ , т.е.  $l_1: y = 4x$ .

б)  $A_2(4; 2) \in \Gamma(y = kx)$ .

Подставляя координаты точки  $A_2$  в уравнение прямой  $y = kx$ , получим  $2 = k \cdot 4$ ;  $k = \frac{1}{2}$ , т.е.  $l_2: y = \frac{1}{2}x$ .

в)  $A_3(-3; 3) \in \Gamma(y = kx)$ .

Подставляя координаты точки  $A_3$  в уравнение прямой  $y = kx$ , получим  $3 = k \cdot (-3)$ ;  $k = -1$ , т.е.  $l_3: y = -x$ .

г)  $A_4(-2; 4) \in \Gamma(y = kx)$ .

Подставляя координаты точки  $A_4$  в уравнение прямой  $y = kx$ , получим

$$4 = k \cdot (-2); \quad k = -2, \text{ т. е. } \boxed{l_4 : y = -2x}.$$

д)  $A_5(-3; -1) \in \Gamma(y = kx)$ .

Подставляя координаты точки  $A_5$  в уравнение прямой  $y = kx$ , получим  $-1 = k \cdot (-3)$ ;  $k = \frac{1}{3}$ , т. е.  $\boxed{l_5 : y = \frac{1}{3}x}$ .

е)  $A_6(-4; 2) \in \Gamma(y = kx)$ .

Подставляя координаты точки  $A_6$  в уравнение прямой  $y = kx$ , получим  $2 = k \cdot (-4)$ ;  $k = -\frac{1}{2}$ , т. е.  $\boxed{l_6 : y = -\frac{1}{2}x}$ .

### Примечания

1. Для  $y = kx$   $O(0; 0) \in \Gamma(y = kx)$ .

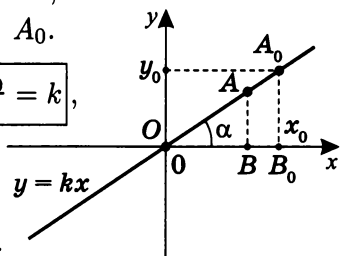
2. Пусть  $A_0(x_0; y_0) \in \Gamma(y = kx)$ .

Можно показать, что  $k = \frac{y_0}{x_0}$  —

угловой коэффициент для  $y = kx$ ,  
независимый от выбора точки  $A_0$ .

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{A_0B_0}{OB_0} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k},$$

где  $k = \operatorname{tg} \alpha$  —  
угловой коэффициент<sup>2</sup>.



Убедимся в этом на примерах:

а)  $A_1(1; 4)$ ;  $k = \frac{4}{1} = 4$ ;      г)  $A_4(-2; 4)$ ;  $k = \frac{4}{-2} = -2$ ;

б)  $A_2(4; 2)$ ;  $k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ;      д)  $A_5(-3; -1)$ ;  $k = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ ;

в)  $A_3(-3; 3)$ ;  $k = \frac{3}{-3} = -1$ ;      е)  $A_6(-4; 2)$ ;  $k = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ .

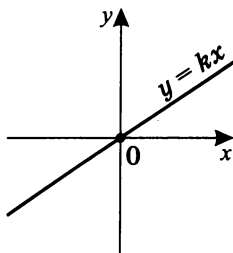
3. Тема отдельного разговора — это *доказательство* того, что любая прямая, непараллельная оси ординат, задается уравнением вида:  $y = kx + b$ .

<sup>2</sup> А. Х. Шахмейстер. Планиметрия. СПб., М., 2011. С. 63, 64 и Тригонометрия, СПб., М., 2013. С. 18–19.

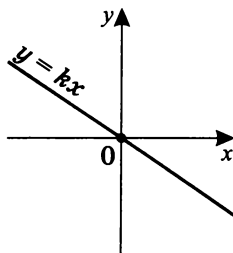


Графики линейных функций  $y = kx + b$ 

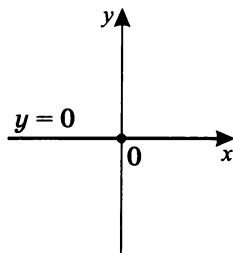
$k > 0; b = 0$



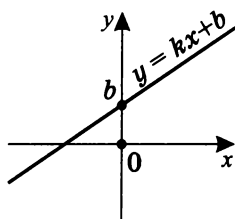
$k < 0; b = 0$



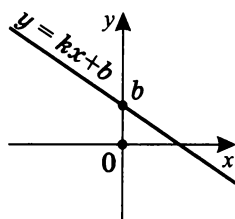
$k = 0; b = 0$



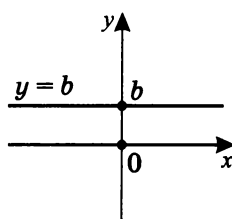
$k > 0; b > 0$



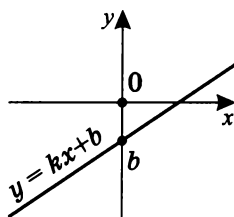
$k < 0; b > 0$



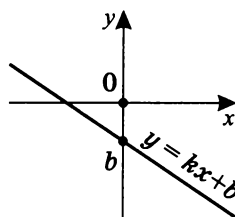
$k = 0; b > 0$



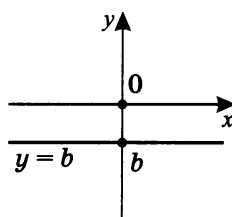
$k > 0; b < 0$



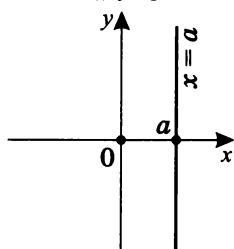
$k < 0; b < 0$



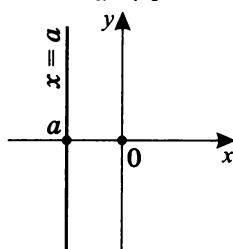
$k = 0; b < 0$

Графики уравнения  $x = a$ 

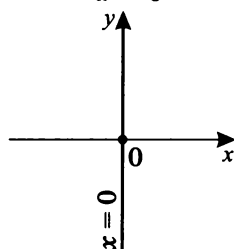
$a > 0$



$a < 0$



$a = 0$



## Примечания

1. Необходимо отметить, что общий вид *любой* прямой, принадлежащей плоскости, определен в виде уравнения  $\boxed{mx + ny + c = 0}$  при  $m^2 + n^2 \neq 0$ .
  - а) При  $\begin{cases} n = 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$   $x = -\frac{c}{m}$  (прямая параллельна  $Oy$ ).  
В этом случае  $mx + ny + c = 0$  функциональным соответствием не является.
  - б) При  $\begin{cases} n \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$   $y = -\frac{m}{n}x - \frac{x}{n}$ ; полагая  $-\frac{m}{n} = k$ ,  $-\frac{c}{n} = b$ , получим привычный вид  $y = kx + b$ , причем прямая вида  $y = kx + b$  всегда непараллельна оси  $Oy$ .
  - в) При  $\begin{cases} m = 0 \\ n \neq 0 \end{cases}$   $y = -\frac{c}{n}$  (прямая параллельна  $Ox$ ).
2. Если у прямых  $f(x) = k_1x + b_1$  и  $g(x) = k_2x + b_2$ :
  - а)  $k_1 \neq k_2$ , то прямые пересекаются;
  - б)  $k_1 = k_2$  и  $b_1 \neq b_2$ , то прямые параллельны;
  - в)  $k_1 = k_2$  и  $b_1 = b_2$ , то прямые совпадают (параллельны).
3. Наглядное правило: если «идти» по графику функции слева направо (по стрелке направления оси  $Ox$ ), то если мы при этом поднимаемся вверх, то функция возрастающая, а если опускаемся вниз — убывающая.
4. Тогда прямые  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_5$  из примера — графики возрастающих функций, а прямые  $l_3$ ,  $l_4$  и  $l_6$  — графики убывающих функций.
5. Отметим, что при  $k > 0$  функция  $y = kx + b$  — возрастающая, а при  $k < 0$  — убывающая, независимо от  $b$ .
6. График прямой  $y = kx$  иногда называют *графиком прямой пропорциональности*, а число  $k$  — *коэффициентом пропорциональности*.

## Уравнение $y = kx$

Рассмотрим построение графиков функции  $y = kx$  при различных значениях  $k$ .

Возьмем для примера  $k = 2$ ;  $k = \frac{1}{2}$ ;  $k = -3$  и  $k = -\frac{1}{3}$ .

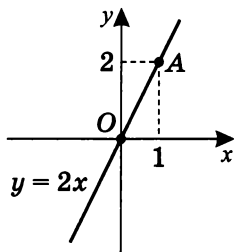
1.  $k = 2$ ;  $y = 2x$ .

Составим таблицу значений:

$x$	$y$	Координаты точек
1	2	$A(1; 2)$
0	0	$O(0; 0)$

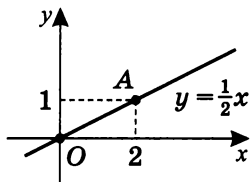
Построим по двум точкам

график  $y = 2x$ .



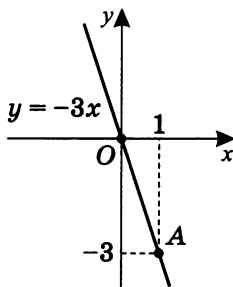
2.  $k = \frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{1}{2}x$ .

$x$	$y$	Координаты точек
2	1	$A(2; 1)$
0	0	$O(0; 0)$



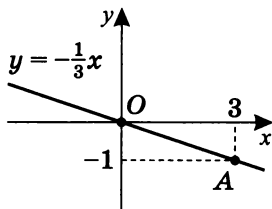
3.  $k = -3$ ;  $y = -3x$ .

$x$	$y$	Координаты точек
1	-3	$A(1; -3)$
0	0	$O(0; 0)$



4.  $k = -\frac{1}{3}$ ;  $y = -\frac{1}{3}x$ .

$x$	$y$	Координаты точек
3	-1	$A(3; -1)$
0	0	$O(0; 0)$



### Примечания

- Обратите внимание, график функции  $y = kx$  всегда проходит через точку начала координат.
- Значения  $x$  и  $y$  подбираем для удобства так, чтобы это были одновременно целые числа.

**Уравнение  $kx = a$** 

Рассмотрим уравнение  $kx = a$ .

1. Если  $\begin{cases} k = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ , уравнение принимает вид  $0 \cdot x = 0$ , т. е.  $0 = 0$  — истина.

Значит, любое  $x$  ( $\forall x$ ) есть решение уравнения.

2. Если  $\begin{cases} k = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ , уравнение принимает вид  $0 \cdot x = a$ , т. е.  $0 = a \neq 0$  — ложь.

Значит, решения нет (нет корней уравнения).

3. если  $\begin{cases} k \neq 0 \\ a - \text{любое} \end{cases}$ , тогда  $x = \frac{a}{k}$ , т. е. существует единственное решение уравнения.

Можно отметить, что при этом:

если  $\begin{cases} k > 0 \\ a > 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} k < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ , то  $x > 0$ ;

если  $\begin{cases} k > 0 \\ a < 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} k < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ , то  $x < 0$ ;

если  $\begin{cases} a = 0 \\ k - \text{любое} \end{cases}$ , то  $x = 0$ .

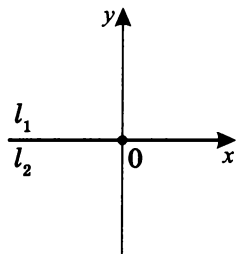
### Геометрическая интерпретация решения уравнения $kx = a$

Уравнение можно рассматривать как равенство двух функций,  $y = kx$  и  $y = a$ , а нахождение корней есть нахождение абсцисс точек пересечения их графиков, представляющих из себя прямые  $l_1$  и  $l_2$ .

$$1. \begin{cases} k = 0 \\ a = 0 \end{cases},$$

тогда  $l_1: y = 0$ ,  $l_2: y = 0$ .

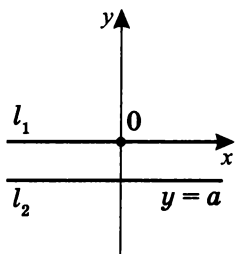
Две прямые  $l_1$  и  $l_2$  сливаются в одну, значит, есть бесконечное множество решений.



$$2. \begin{cases} k = 0 \\ a \neq 0 \end{cases},$$

тогда  $l_1: y = 0$ ,  $l_2: y = a \neq 0$ .

Две прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны, значит, нет общих точек, и решений нет.

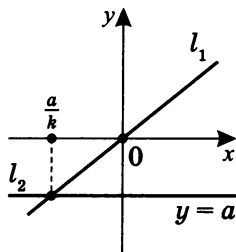


$$3. \begin{cases} k \neq 0 \\ a - \text{любое} \end{cases},$$

тогда прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются.

Значит, существует единственное решение  $x = \frac{a}{k}$ .

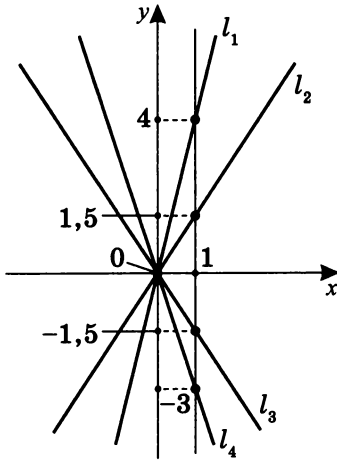
На данном рисунке  $k > 0$ , но можно иллюстрировать решение при любых знаках  $k$  и  $a$ .



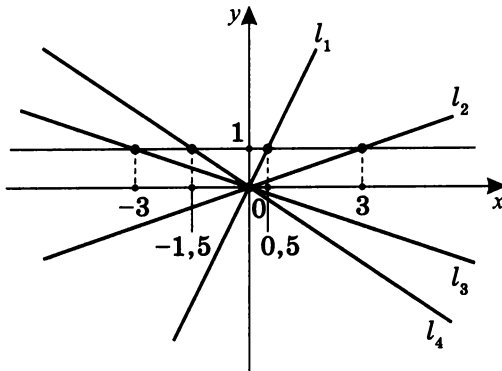
**Самостоятельная работа 1**

Даны графики прямых вида  $y = kx + b$ . Определите значения  $k$  и  $b$  для прямых  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $l_4$ .

1.



2.



## Упражнения

### Вариант I

1. Постройте график функций вида  $y = kx + b$ , заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
-3	$l_5$	$l_6$	$l_7$	$l_8$
4	$l_9$	$l_{10}$	$l_{11}$	$l_{12}$
-1	$l_{13}$	$l_{14}$	$l_{15}$	$l_{16}$

$$l_1: y = 2x - 1; \quad l_{10}: y = 4x + 2;$$

$$l_7: y = -3x - 3; \quad l_{16}: y = -x + 4.$$

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1.  $l_5: y = -3x - 1$  и  $l'_5: y = -3x$ ;

$l_{13}: y = -x - 1$  и  $l'_{13}: y = -x$ .

2.  $l_5$  и  $l_{13}$ .

б)  $l_9: y = 4x - 1$  и  $l_{12}: y = 4x + 4$ .

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_2$ ;  $l_6$ ;  $l_3$ ;  $l_7$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

## Вариант II

1. Постройте график функций вида  $y = kx + b$ , заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
-3	$l_5$	$l_6$	$l_7$	$l_8$
4	$l_9$	$l_{10}$	$l_{11}$	$l_{12}$
-1	$l_{13}$	$l_{14}$	$l_{15}$	$l_{16}$

$$l_5: y = -3x - 1; \quad l_{14}: y = -x + 2;$$

$$l_{11}: y = 4x - 3; \quad l_4: y = 2x + 4.$$

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1.  $l_2: y = 2x + 2$  и  $l'_2: y = 2x$ ;

$$l_{10}: y = 4x + 2 \text{ и } l'_{10}: y = 4x.$$

2.  $l_2$  и  $l_{10}$ .

б)  $l_7: y = -3x - 3$  и  $l_6: y = -3x + 2$ .

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_1$ ;  $l_4$ ;  $l_5$ ;  $l_8$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.



### Вариант III

1. Постройте график функций вида  $y = kx + b$ , заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
-3	$l_5$	$l_6$	$l_7$	$l_8$
4	$l_9$	$l_{10}$	$l_{11}$	$l_{12}$
-1	$l_{13}$	$l_{14}$	$l_{15}$	$l_{16}$

$$l_9: y = 4x - 1; \quad l_2: y = 2x + 2;$$

$$l_{15}: y = -x - 3; \quad l_8: y = -3x + 4.$$

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1.  $l_3: y = 2x - 3$  и  $l'_3: y = 2x$ ;

$l_{11}: y = 4x - 3$  и  $l''_{11}: y = 4x$ .

2.  $l_3$  и  $l_{11}$ .

б)  $l_4: y = 2x + 4$  и  $l_1: y = 2x - 1$ .

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_9$ ;  $l_{12}$ ;  $l_{13}$ ;  $l_{16}$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

## Вариант IV

1. Постройте график функций вида  $y = kx + b$ , заданных таблицей:

$k \setminus b$	-1	2	-3	4
2	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$
-3	$l_5$	$l_6$	$l_7$	$l_8$
4	$l_9$	$l_{10}$	$l_{11}$	$l_{12}$
-1	$l_{13}$	$l_{14}$	$l_{15}$	$l_{16}$

$$l_3: y = 2x - 3; \quad l_{12}: y = 4x + 4;$$
$$l_{13}: y = -x - 1; \quad l_6: y = -3x + 2.$$

2. Сравните графики функций и укажите их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек:

а) 1.  $l_8: y = -3x + 4$  и  $l'_8: y = -3x$ ;

$l_{16}: y = -x + 4$  и  $l'_{16}: y = -x$ .

2.  $l_8$  и  $l_{16}$ .

б)  $l_{15}: y = -x - 3$  и  $l_{14}: y = -x + 2$ .

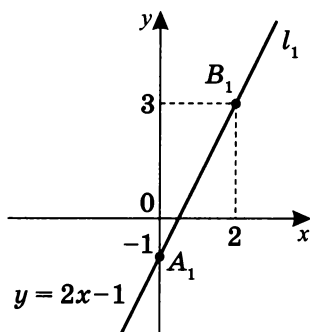
3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_{10}$ ;  $l_{14}$ ;  $l_{11}$ ;  $l_{15}$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного данными прямыми.

## Решение упражнений

## Вариант I

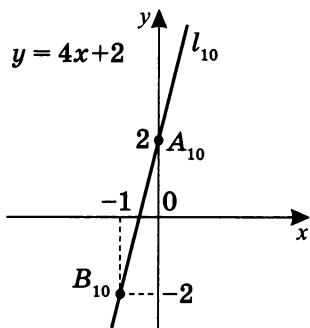
1.  $l_1 : y = 2x - 1$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-1	$A_1 (0; -1)$
2	3	$B_1 (2; 3)$



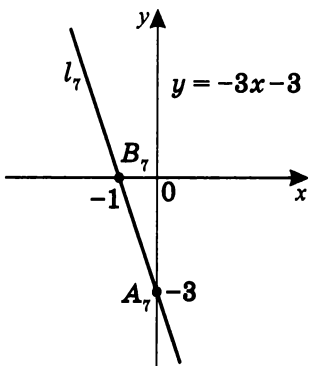
$l_{10} : y = 4x + 2$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	2	$A_{10} (0; 2)$
-1	-2	$B_{10} (-1; -2)$



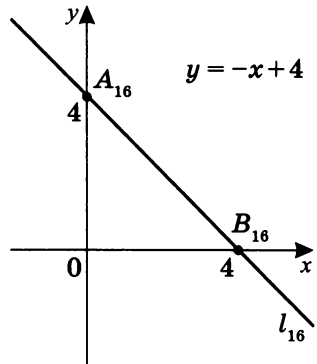
$l_7 : y = -3x - 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A_7 (0; -3)$
-1	0	$B_7 (-1; 0)$



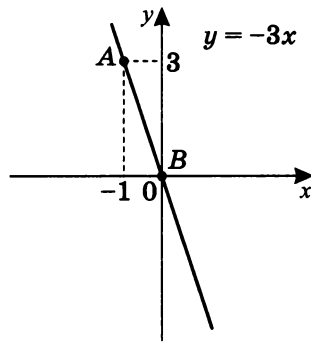
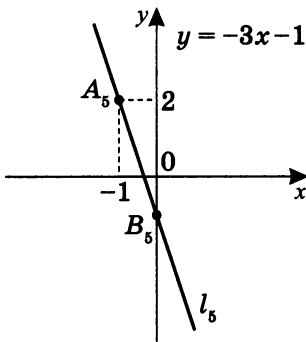
$$l_{16}: y = -x + 4.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	4	$A_{16} (0; 4)$
4	0	$B_{16} (4; 0)$

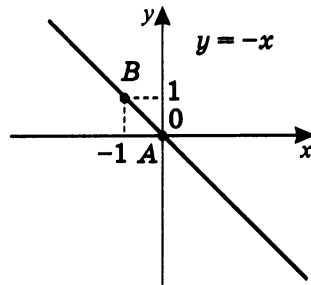
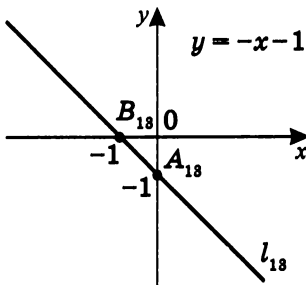


2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с учетом их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

а)  $l_5: y = -3x - 1$ ;  $l'_5: y = -3x$ .



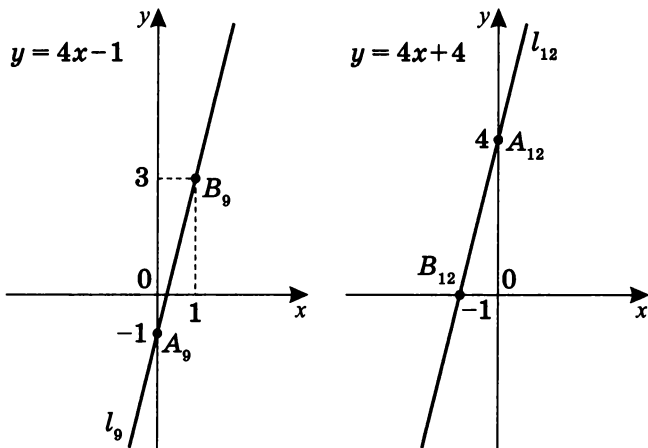
$l_{13}: y = -x - 1$ ;  $l'_{13}: y = -x$ .



*Первое:* график  $y = -3x - 1$  получен параллельным переносом графика  $y = -3x$  вниз на единицу, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = -3$ , а  $b$  отличается на единицу. Аналогично график  $y = -x - 1$  — получен параллельным переносом графика  $y = -x$  вниз на единицу.

*Второе:* очевидно, что оба графика прямых  $l_5$  и  $l_{13}$  проходят через точку с координатами  $(0; -1)$ .

б)  $l_9: y = 4x - 1$ ;  $l_{12}: y = 4x + 4$ .



*Первое:* очевидно, что оба графика параллельны ( $k = 4$ ).

*Второе:* относительно друг друга они сдвинуты параллельным переносом на 5 единиц (вверх или вниз в зависимости от прямой отсчета).

### Примечания

1. Графики прямых  $l_5$ ,  $l_{13}$ ,  $l_9$  и  $l_{12}$  построены (см., соответственно, варианты II, IV, III и IV) на страницах 23, 33, 28, 33.
2.  $y = -3x - 1$  — убывающая функция;  
 $y = -x - 1$  — убывающая функция;  
 $y = 4x + 4$  — возрастающая функция;  
 $y = 4x - 1$  — возрастающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_2$ ,  $l_6$ ,  $l_3$  и  $l_7$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$$l_2 : y = 2x + 2,$$

$$l_6 : y = -3x + 2,$$

$$l_3 : y = 2x - 3,$$

$$l_7 : y = -3x - 3.$$

$$l_2 \cap l_6 : \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -3x + 2 \end{cases}; \quad 2x + 2 = -3x + 2,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = 2,$$

т. е.  $B(0; 2)$  — общая точка прямых  $l_2$  и  $l_6$ .

$$l_6 \cap l_3 : \begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}; \quad -3x + 2 = 2x - 3,$$

$$\text{тогда } x = 1, \quad y = -1,$$

т. е.  $C(1; -1)$  — общая точка  $l_6$  и  $l_3$ .

$$l_3 \cap l_7 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x - 3 \end{cases}; \quad 2x - 3 = -3x - 3,$$

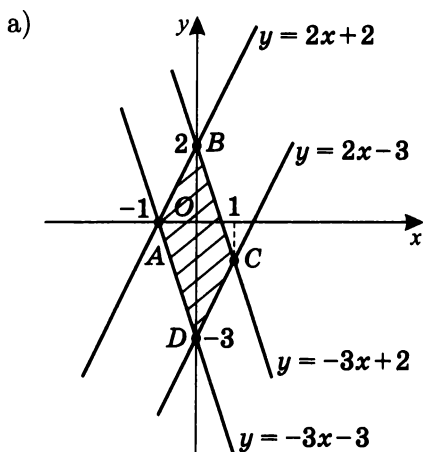
$$\text{тогда } x = 0, \quad y = -3,$$

т. е.  $D(0; -3)$  — общая точка  $l_3$  и  $l_7$ .

$$l_2 \cap l_7 : \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -3x - 3 \end{cases}; \quad 2x + 2 = -3x - 3,$$

$$\text{тогда } x = -1, \quad y = 0,$$

т. е.  $A(-1; 0)$  — общая точка  $l_2$  и  $l_7$ .



б) Очевидно, что  $BD = 5$  — наибольшая диагональ.

в)  $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = 2S_{\triangle ABD}$ ;

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AO; \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кв. ед.}$$

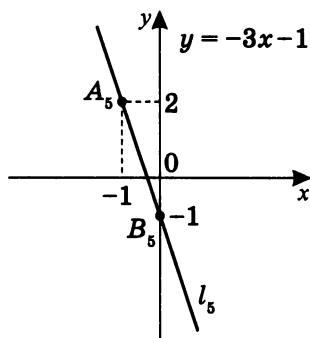
Тогда  $\boxed{S_{ABCD} = 5}$ .

**Примечание.** Очевидно, что модуль абсцисс точек  $A$  и  $C$  равен высоте  $\triangle ABD$  и  $\triangle CDB$ .

## Вариант II

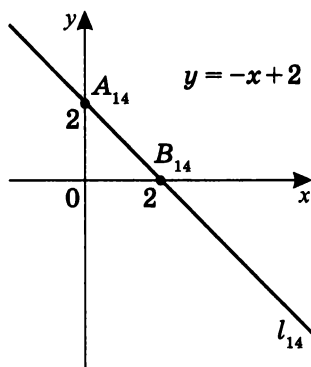
1.  $l_5 : y = -3x - 1$ .

$x$	$y$	Координаты точек
-1	2	$A_5 (-1; 2)$
0	-1	$B_5 (0; -1)$



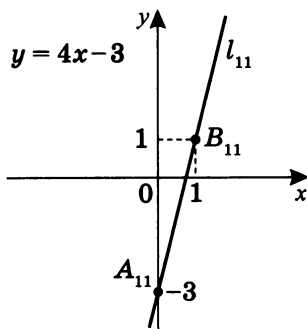
$l_{14} : y = -x + 2$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	2	$A_{14} (0; 2)$
2	0	$B_{14} (2; 0)$



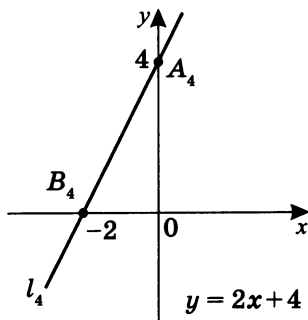
$l_{11} : y = 4x - 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A_{11} (0; -3)$
1	1	$B_{11} (1; 1)$



$l_4 : y = 2x + 4$ .

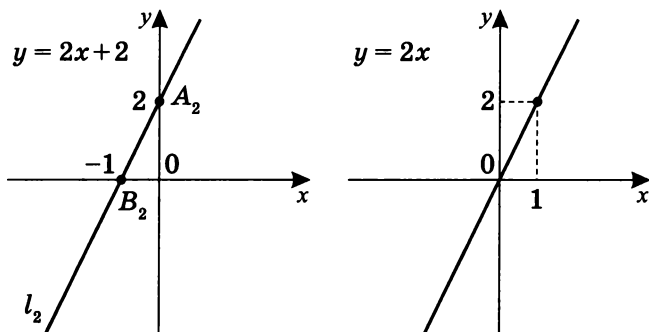
$x$	$y$	Координаты точек
0	4	$A_4 (0; 4)$
-2	0	$B_4 (-2; 0)$



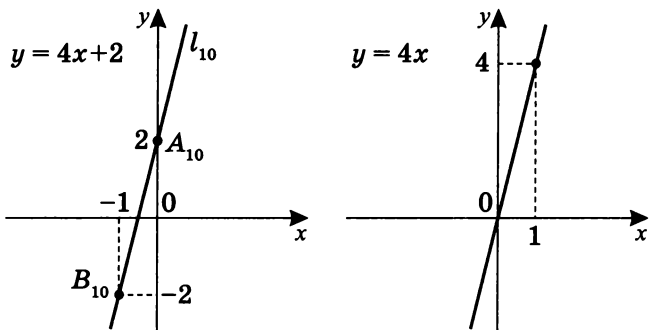


2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с точки зрения их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

а)  $l_2: y = 2x + 2$  и  $l'_2: y = 2x$ .



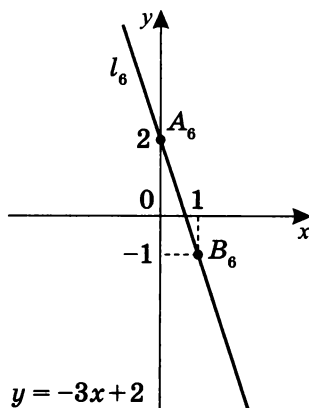
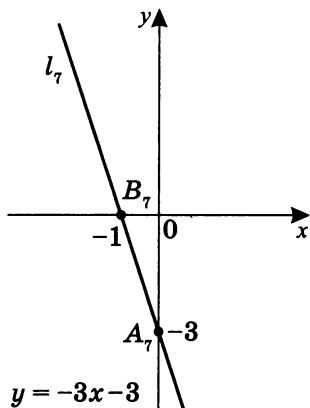
$l_{10}: y = 4x + 2$  и  $l'_{10}: y = 4x$ .



*Первое:* график  $y = 2x + 2$  получен параллельным переносом графика  $y = 2x$  вверх на две единицы, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = 2$ , а  $b$  отличается на 2. Аналогично график  $y = 4x + 2$  получен параллельным переносом графика  $y = 4x$  на две единицы вверх ( $k = 4$ ).

*Второе:* очевидно, что оба графика —  $y = 2x + 2$  и  $y = 4x + 2$  — проходят через точку с координатами  $(0; 2)$ .

б)  $l_7: y = -3x - 3$ ;  $l_6: y = -3x + 2$ .



*Первое:* очевидно, что оба графика параллельны, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = -3$ .

*Второе:* относительно друг друга они сдвинуты параллельным переносом на 5 единиц (вверх или вниз, зависит от прямой отсчета).

### Примечания

1. Графики прямых  $l_2$ ,  $l_{10}$ ,  $l_7$  и  $l_6$  построены (см., соответственно, варианты III, I, I и IV) на страницах 28, 18, 18, 34.
2.  $y = 2x + 2$  — возрастающая функция;  
 $y = 4x + 2$  — возрастающая функция;  
 $y = -3x - 3$  — убывающая функция;  
 $y = -3x + 2$  — убывающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_1$ ,  $l_4$ ,  $l_{15}$  и  $l_8$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$$l_1: y = 2x - 1,$$

$$l_4: y = 2x + 4,$$

$$l_5: y = -3x - 1,$$

$$l_8: y = -3x + 4.$$

$$l_1 \cap l_5: \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x - 1 \end{cases}; \quad 2x - 1 = -3x - 1,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = -1,$$

т. е.  $B(0; -1)$  — общая точка прямых  $l_1$  и  $l_5$ .

$$l_4 \cap l_5: \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -3x - 1 \end{cases}; \quad 2x + 4 = -3x - 1,$$

$$\text{тогда } x = -1, \quad y = 2,$$

т. е.  $C(-1; 2)$  — общая точка прямых  $l_4$  и  $l_5$ .

$$l_1 \cap l_8: \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x + 4 \end{cases}; \quad 2x - 1 = -3x + 4,$$

$$\text{тогда } x = 1, \quad y = 1,$$

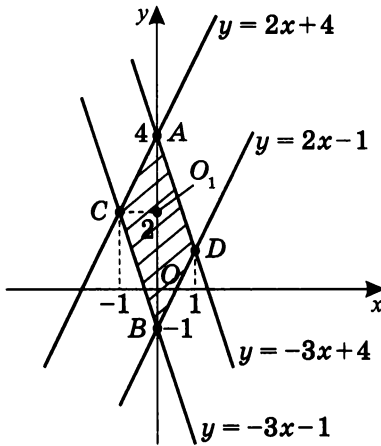
т. е.  $D(1; 1)$  — общая точка прямых  $l_1$  и  $l_8$ .

$$l_4 \cap l_8: \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -3x + 4 \end{cases}; \quad 2x + 4 = -3x + 4,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = 4,$$

т. е.  $A(0; 4)$  — общая точка прямых  $l_4$  и  $l_8$ .

а)



б) Очевидно, что  $AB = 5$  — наибольшая диагональ.

в)  $S_{ACBD} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle BDA} = 2S_{\triangle ACB}$ ;

$$S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot CO_1; \quad S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кв. ед.}$$

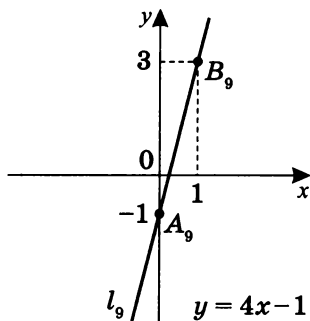
Тогда  $\boxed{S_{ACBD} = 5}$ .

**Примечание.** Очевидно, что модуль абсцисс точек  $C$  и  $D$  равен высоте  $\triangle ACB$  и  $\triangle BDA$ .

## Вариант III

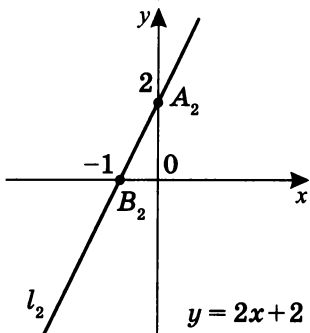
1.  $l_9 : y = 4x - 1$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-1	$A_9(0; -1)$
1	3	$B_9(1; 3)$



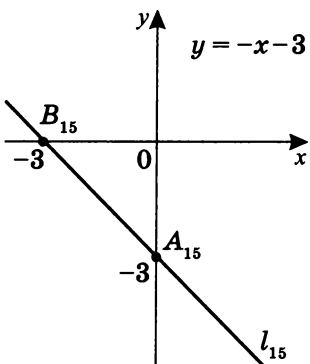
$l_2 : y = 2x + 2$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	2	$A_2(0; 2)$
-1	0	$B_2(-1; 0)$



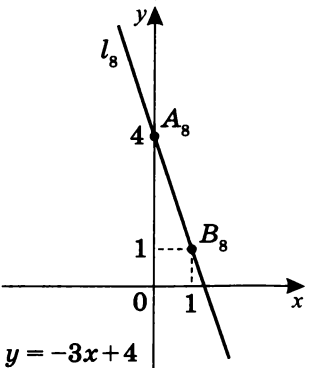
$l_{15} : y = -x - 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A_{15}(0; -3)$
-3	0	$B_{15}(-3; 0)$



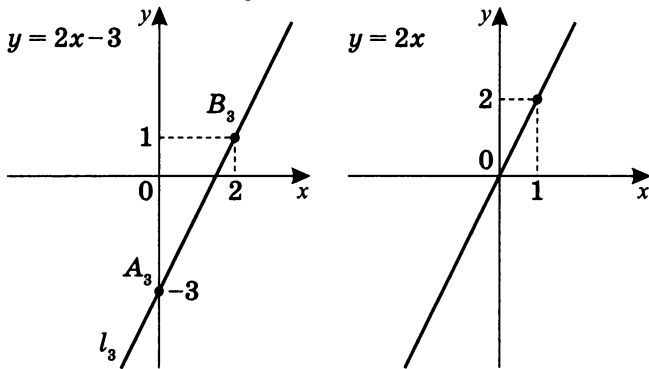
$l_8 : y = -3x + 4$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	4	$A_8(0; 4)$
1	1	$B_8(1; 1)$

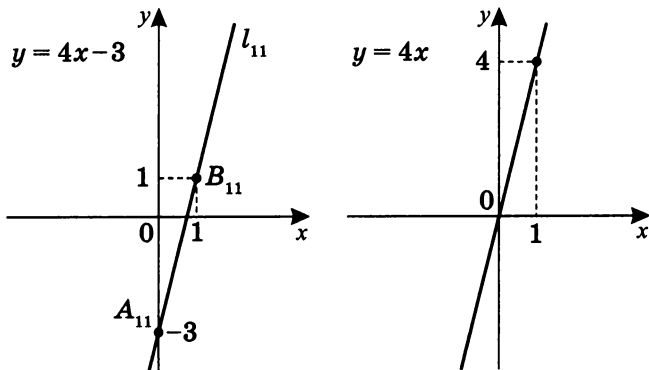


2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с точки зрения их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

а)  $l_3: y = 2x - 3$  и  $l'_3: y = 2x$ .



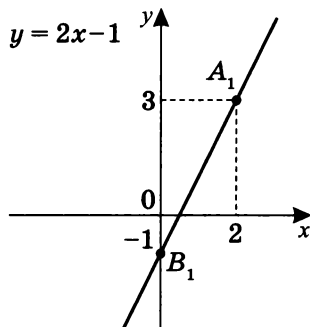
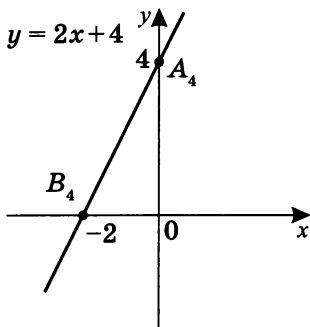
$l_{11}: y = 4x - 3$  и  $l'_{11}: y = 4x$ .



*Первое:* график  $y = 2x - 3$  получен параллельным переносом графика  $y = 2x$  вниз на три единицы, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = 2$ , а  $b$  отличается на 3. Аналогично график  $y = 4x - 3$  получен параллельным переносом графика  $y = 4x$ , тоже вниз на три единицы.

*Второе:* очевидно, что оба графика —  $y = 2x - 3$  и  $y = 4x - 3$  — проходят через точку с координатами  $(0; -3)$ .

б)  $l_4: y = 2x + 4$ ;  $l_1: y = 2x - 1$ .



*Первое:* очевидно, что оба графика параллельны, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = 2$ .

*Второе:* относительно друг друга они сдвинуты параллельным переносом на 5 единиц (вверх или вниз, зависит от прямой отсчета).

### Примечания

1. Графики прямых  $l_3$ ,  $l_{11}$ ,  $l_4$  и  $l_1$  построены (см., соответственно, варианты IV, II, II и I) на страницах 33, 23, 23, 18.
2.  $y = 2x - 3$  — возрастающая функция;  
 $y = 4x - 3$  — возрастающая функция;  
 $y = 2x + 4$  — возрастающая функция;  
 $y = 2x - 1$  — возрастающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_9$ ,  $l_{12}$ ,  $l_{13}$  и  $l_{16}$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$$l_9 : y = 4x - 1,$$

$$l_{12} : y = 4x + 4,$$

$$l_{13} : y = -x - 1,$$

$$l_{16} : y = -x + 4.$$

$$l_9 \cap l_{13} : \begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x - 1 \end{cases}; \quad 4x - 1 = -x - 1,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = -1,$$

т. е.  $A(0; -1)$  — общая точка прямых  $l_9$  и  $l_{13}$ .

$$l_9 \cap l_{16} : \begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}; \quad 4x - 1 = -x + 4,$$

$$\text{тогда } x = 1, \quad y = 3,$$

т. е.  $B(1; 3)$  — общая точка прямых  $l_9$  и  $l_{16}$ .

$$l_{12} \cap l_{13} : \begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}; \quad 4x + 4 = -x - 1,$$

$$\text{тогда } x = -1, \quad y = 0,$$

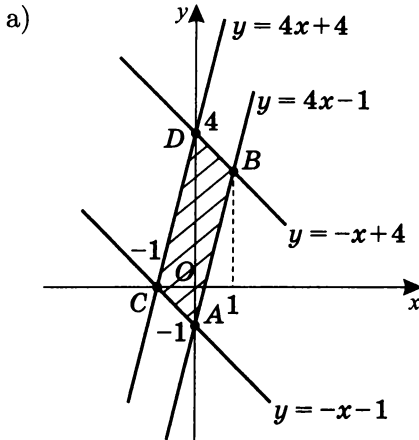
т. е.  $C(-1; 0)$  — общая точка прямых  $l_{12}$  и  $l_{13}$ .

$$l_{12} \cap l_{16} : \begin{cases} y = 4x + 4 \\ y = -x + 4 \end{cases}; \quad 4x + 4 = -x + 4,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = 4,$$

т. е.  $D(0; 4)$  — общая точка прямых  $l_{12}$  и  $l_{16}$ .





б) Очевидно, что  $AD = 5$  — наибольшая диагональ.

в)  $S_{ACDB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ACD}$ ;

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot OC; \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кв. ед.}$$

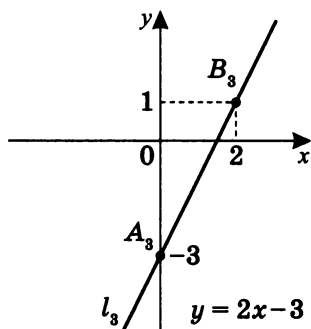
Тогда  $\boxed{S_{ACDB} = 5}$ .

**Примечание.** Очевидно, что модуль абсцисс точек  $C$  и  $B$  равен высоте  $\triangle ACD$  и  $\triangle DBA$ .

## Вариант IV

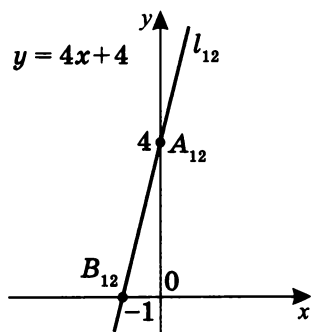
1.  $l_3 : y = 2x - 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A_3(0; -3)$
2	1	$B_3(2; 1)$



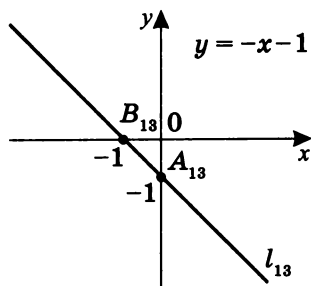
$l_{12} : y = 4x + 4$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	4	$A_{12}(0; 4)$
-1	0	$B_{12}(-1; 0)$



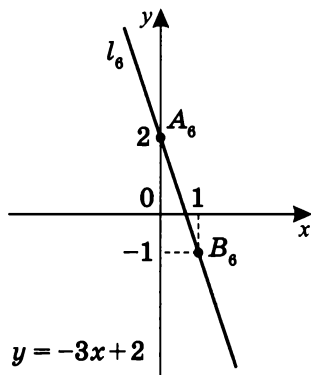
$l_{13} : y = -x - 1$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-1	$A_{13}(0; -1)$
-1	0	$B_{13}(-1; 0)$



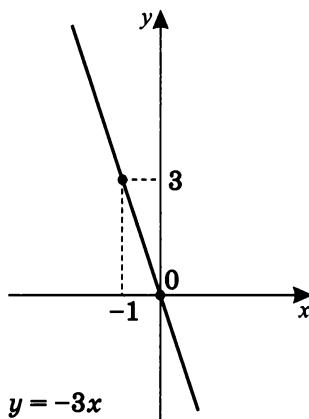
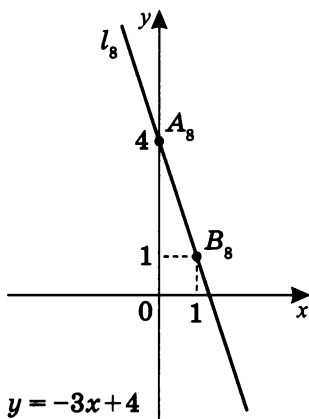
$$l_6: y = -3x + 2.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	2	$A_6(0; 2)$
1	-1	$B_6(1; -1)$

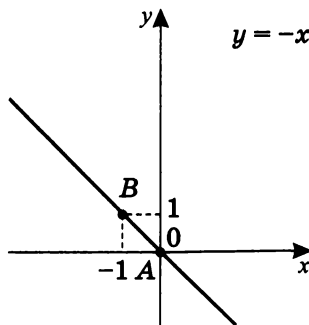
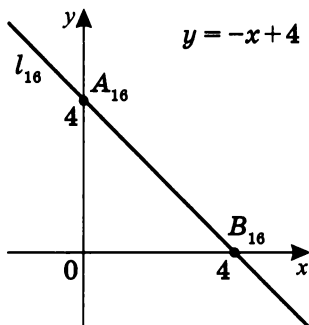


2. Сравним графики функций и укажем их взаимное расположение с точки зрения их угловых коэффициентов, преобразования графиков и наличия общих точек.

а)  $l_8: y = -3x + 4$  и  $l'_8: y = -3x$ .



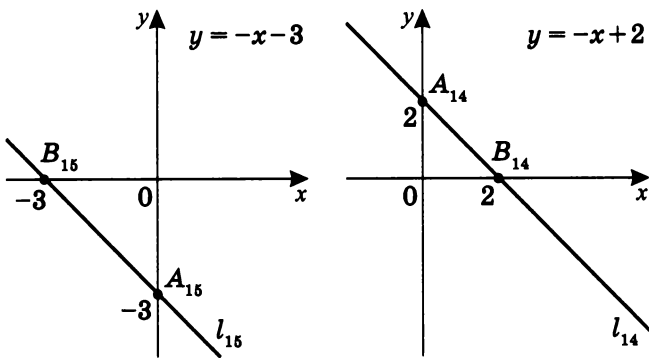
$l_{16}: y = -x + 4$  и  $l'_{16}: y = -x$ .



*Первое:* график  $y = -3x + 4$  получен параллельным переносом графика  $y = -3x$  вверх на четыре единицы, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = -3$ , а  $b$  отличается на 4. Аналогично график  $y = -x + 4$  получен параллельным переносом графика  $y = -x$ , также вверх на четыре единицы.

*Второе:* очевидно, что оба графика —  $y = -3x + 4$  и  $y = -x + 4$  — проходят через точку с координатами  $(0; 4)$ .

б)  $l_{15} : y = -x - 3$ ;  $l_{14} : y = -x + 2$ .



*Первое:* очевидно, что оба графика параллельны, так как у них один и тот же угловой коэффициент  $k = -1$ .

*Второе:* относительно друг друга их графики сдвинуты параллельным переносом на пять единиц (вверх или вниз, зависит от прямой отсчета).

### Примечания

1. Графики прямых  $l_8$ ,  $l_{16}$ ,  $l_{15}$  и  $l_{14}$  построены (см., соответственно, варианты III, I, III и II) на страницах 28, 19, 28, 23.
2.  $y = -3x + 4$  — убывающая функция;  
 $y = -x + 4$  — убывающая функция;  
 $y = -x - 3$  — убывающая функция;  
 $y = -x + 2$  — убывающая функция.

3. а) Заштрихуйте четырехугольник, ограниченный прямыми  $l_{10}$ ,  $l_{14}$ ,  $l_{11}$  и  $l_{15}$ .
- б) Вычислите длину его наибольшей диагонали.
- в) Вычислите площадь такого четырехугольника.

Для построения четырехугольника найдем точки пересечения данных прямых:

$$l_{10} : y = 4x + 2,$$

$$l_{14} : y = -x + 2,$$

$$l_{11} : y = 4x - 3,$$

$$l_{15} : y = -x - 3.$$

$$l_{10} \cap l_{14} : \begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}; \quad 4x + 2 = -x + 2,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = 2,$$

т. е.  $A(0; 2)$  — общая точка прямых  $l_{10}$  и  $l_{14}$ .

$$l_{10} \cap l_{15} : \begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -x - 3 \end{cases}; \quad 4x + 2 = -x - 3,$$

$$\text{тогда } x = -1, \quad y = -2,$$

т. е.  $B(-1; -2)$  — общая точка прямых  $l_{10}$  и  $l_{15}$ .

$$l_{11} \cap l_{14} : \begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -x + 2 \end{cases}; \quad 4x - 3 = -x + 2,$$

$$\text{тогда } x = 1, \quad y = 1,$$

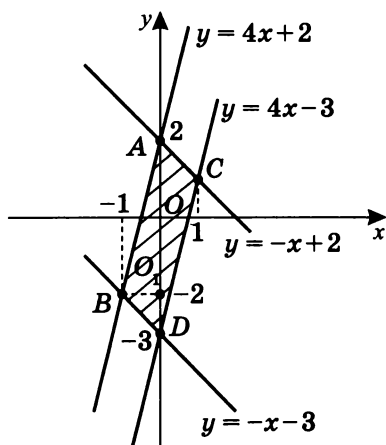
т. е.  $C(1; 1)$  — общая точка прямых  $l_{11}$  и  $l_{14}$ .

$$l_{11} \cap l_{15} : \begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases}; \quad 4x - 3 = -x - 3,$$

$$\text{тогда } x = 0, \quad y = -3,$$

т. е.  $D(0; -3)$  — общая точка прямых  $l_{11}$  и  $l_{15}$ .

а)



б) Очевидно, что  $AD = 5$  — наибольшая диагональ.

в)  $S_{ABDC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle DAC} = 2S_{\triangle ABD}$ ;

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot O_1B; \quad S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 2,5 \text{ кв. ед.}$$

Тогда  $\boxed{S_{ABDC} = 5}$ .

**Примечание.** Очевидно, что модуль абсцисс точек  $B$  и  $C$  равен высоте  $\triangle ADB$  и  $\triangle DAC$ .

**Самостоятельная работа 2**  
**(Построение графиков по уравнению)**

**Вариант I**

Постройте графики уравнений:

1.  $2x + y + 3 = 0$ ;
2.  $3y + 2 = 0$ ;
3.  $3x + y - 2 = 0$ ;
4.  $-x - 2y + 1 = 0$ ;
5.  $-3x + 2y - 1 = 0$ ;
6.  $-2x - 4 = 0$ ;
7.  $3x + 2y = 0$ ;
8.  $-3y = 0$ .

**Вариант II**

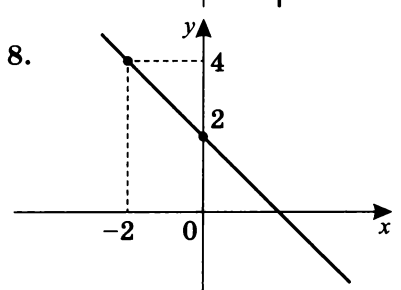
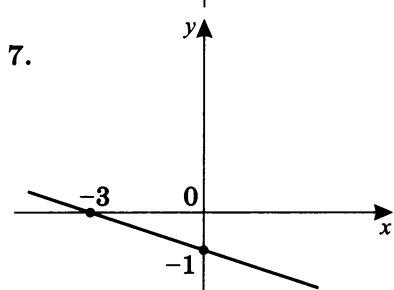
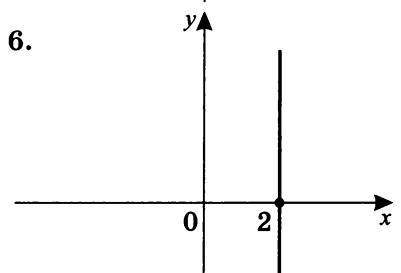
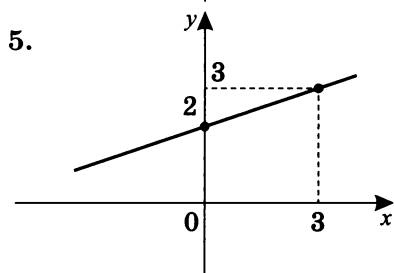
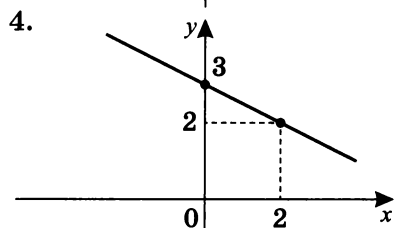
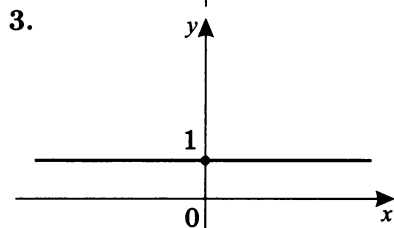
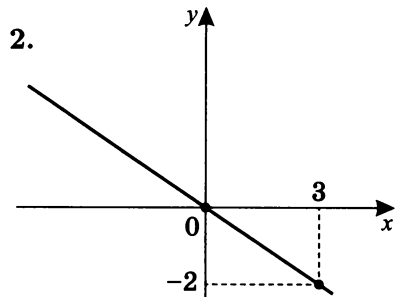
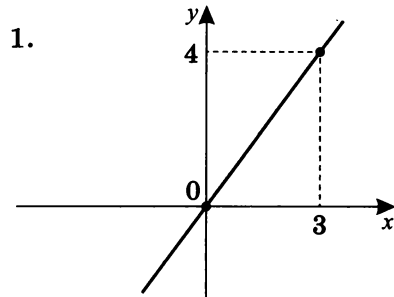
Постройте графики уравнений:

1.  $-3x + 2y + 1 = 0$ ;
2.  $3x - 6 = 0$ ;
3.  $-0,5x - y + 1 = 0$ ;
4.  $-x + 3y - 3 = 0$ ;
5.  $x - y - 2 = 0$ ;
6.  $-2y - 5 = 0$ ;
7.  $-0,5x + 2y = 0$ ;
8.  $2x = 0$ .

**Самостоятельная работа 3**  
*(Нахождение уравнения прямой по заданному графику)*

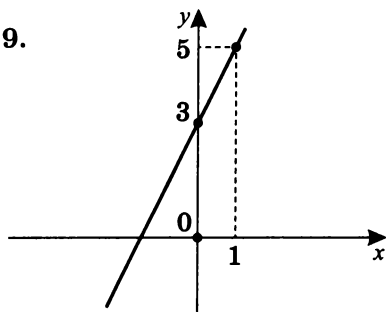
**Вариант I**

Напишите уравнение прямой по заданному графику.

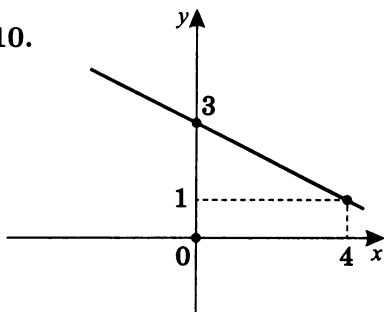




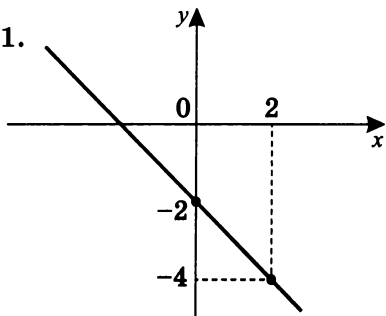
9.



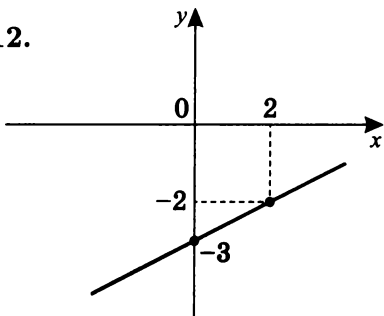
10.



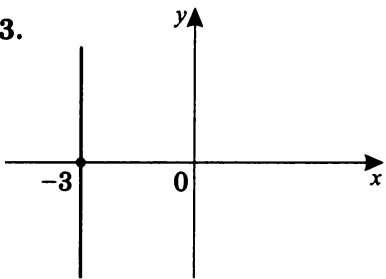
11.



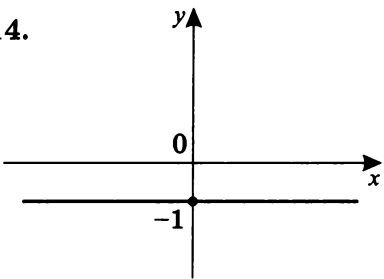
12.



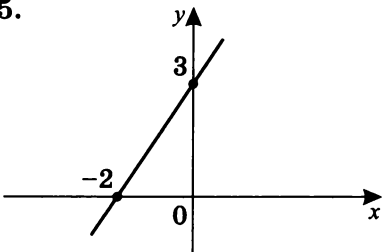
13.



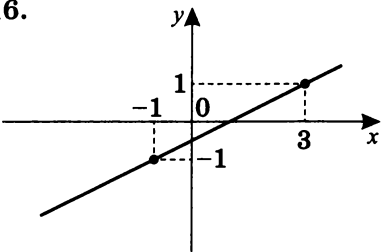
14.



15.

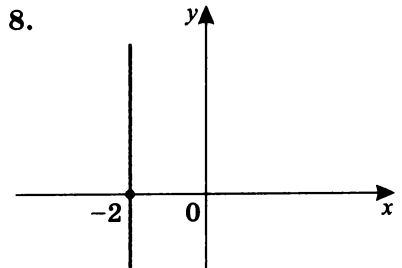
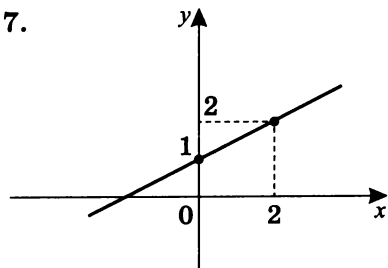
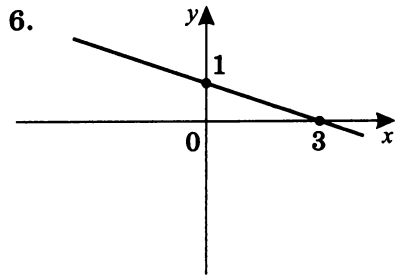
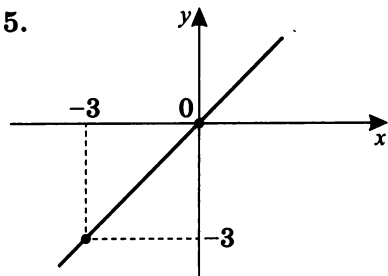
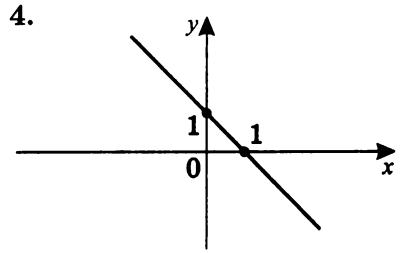
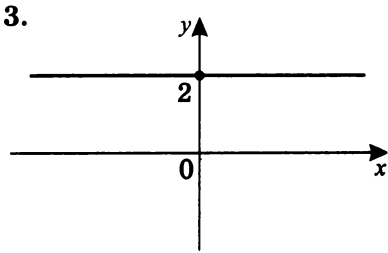
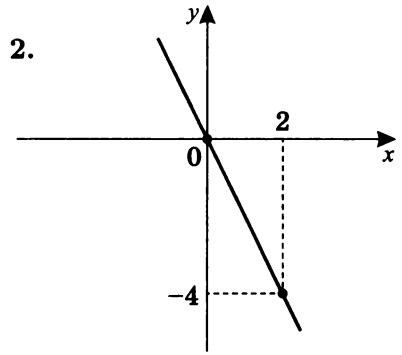
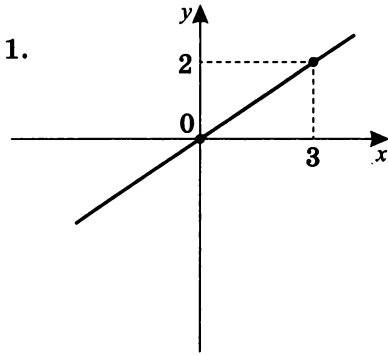


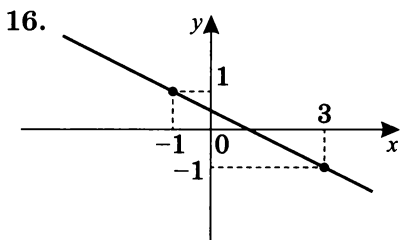
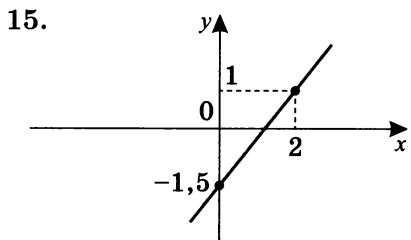
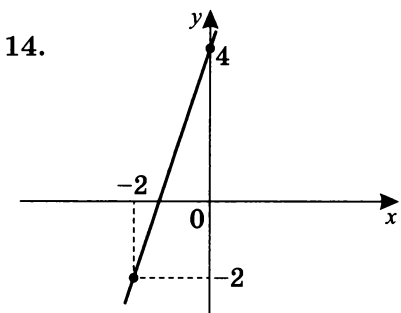
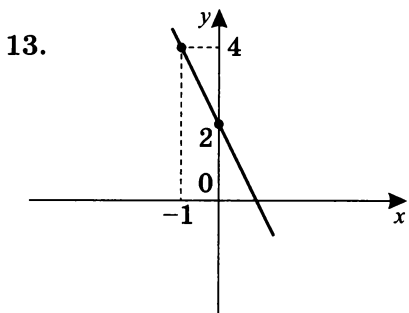
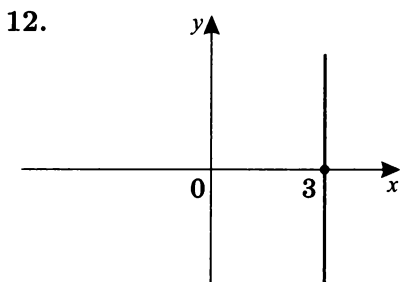
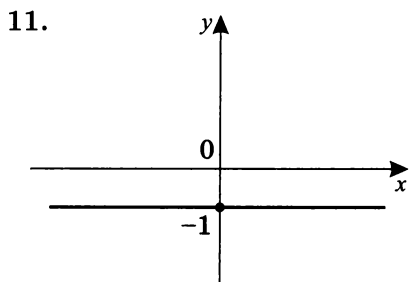
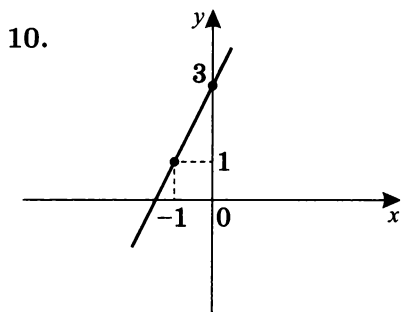
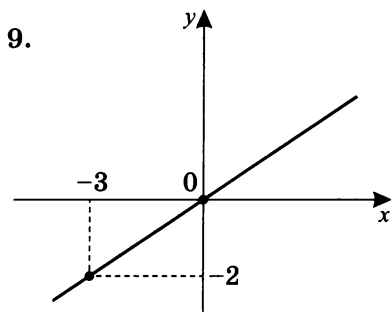
16.



**Вариант II**

Напишите уравнение прямой по заданному графику.





# Уравнения прямых, площади ограниченных ими фигур. Виды симметрии и их влияние на вид уравнений прямых

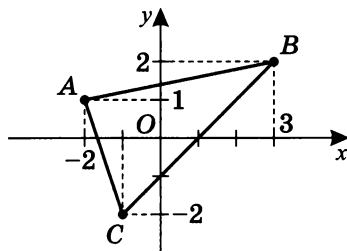
## Практикум 1

1. Треугольник определен точками  $A(-2; 1)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(-1; -2)$ . Найдите:

- уравнения прямых, содержащих стороны треугольника;
- площадь треугольника, заданного точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ;
- координаты точки  $D$  — четвертой вершины параллелограмма<sup>3</sup> с вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ;
- координаты точки пересечения диагоналей этого параллелограмма.

Дано:

$$\left. \begin{array}{l} A(-2; 1) \\ B(3; 2) \\ C(-1; -2) \end{array} \right\}$$



- найдите уравнения прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ;
- найдите  $S_{\triangle ABC}$ ;
- полагая, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — вершины параллелограмма, найдите координаты точки  $D$  — четвертой вершины этого параллелограмма;
- найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Прямая  $AB$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ B \in \Gamma(y = kx + b) \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = k \cdot (-2) + b \\ 2 = k \cdot 3 + b \end{array} \right\}; \quad (\text{II} - \text{I})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = -2k + b \\ 5k = 1 \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 1\frac{2}{5} \\ k = \frac{1}{5} \end{array} \right\}, \text{ т. е. } \boxed{AB: y = \frac{1}{5}x + 1\frac{2}{5}}.$$

<sup>3</sup> Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Прямая  $BC$ :

$$\begin{cases} B \in \Gamma(y = kx + b); \\ C \in \Gamma(y = kx + b); \end{cases} \begin{cases} 2 = k \cdot 3 + b \\ -2 = k \cdot (-1) + b; \end{cases} \quad (\text{I} - \text{II})$$

$$\begin{cases} 4 = 4k \\ -2 = -k + b; \end{cases} \begin{cases} k = 1 \\ b = -1; \end{cases} \quad \text{т. е. } \boxed{BC: y = x - 1}.$$

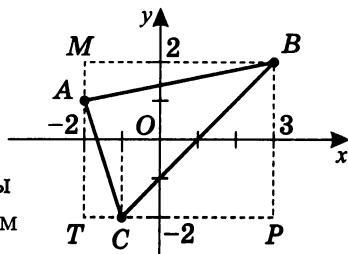
Прямая  $AC$ :

$$\begin{cases} A \in \Gamma(y = kx + b); \\ C \in \Gamma(y = kx + b); \end{cases} \begin{cases} 1 = k \cdot (-2) + b \\ -2 = k \cdot (-1) + b; \end{cases} \quad (\text{I} - \text{II})$$

$$\begin{cases} k = -3 \\ -2 = -k + b; \end{cases} \begin{cases} k = -3 \\ b = -5; \end{cases} \quad \text{т. е. } \boxed{AC: y = -3x - 5}.$$

б) Найдем  $S_{\triangle ABC}$ .

Опишем около  $\triangle ABC$  прямоугольник, сторонам которого принадлежат точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , стороны которого параллельны осям ординат и абсцисс.



Тогда  $M(-2; 2)$ ,  $P(3; -2)$ ,  $T(-2; -2)$  — вершины прямоугольника  $MBPT$ .

Очевидно, что

$$S_{MBPT} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CBP} + S_{\triangle CTA} + S_{\triangle ABC}.$$

- $S_{MBPT} = TM \cdot MB$ , где  $TM = 4$ ,  $MB = 5$ ,  
т. е.  $S_{MBPT} = 4 \cdot 5 = 20$ .
- $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot MB$ , где  $AM = 1$ ,  $MB = 5$ ,  
т. е.  $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$ .
- $S_{\triangle CBP} = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot BP$ , где  $CP = 4$ ,  $BP = 4$ ,  
т. е.  $S_{\triangle CBP} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ .
- $S_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot TC$ , где  $AT = 3$ ,  $TC = 1$ ,  
т. е.  $S_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$ .
- $S_{\triangle ABC} = 20 - 2,5 - 8 - 1,5 = 8$ .

в) Найдем координаты точки  $D$ , полагая, что  $ABDC$  — параллелограмм.

1. Так как  $AB \parallel CD$

$$(CD: y = k_1x + b_1)$$

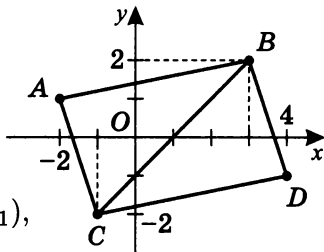
$$\text{и } AB: y = \frac{1}{5}x + 1\frac{2}{5},$$

тогда  $C \in \Gamma(y = k_1x + b_1)$ ,

$$\text{а } k_1 = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Тогда } -2 = k_1 \cdot (-1) + b_1; \quad -2 = -\frac{1}{5} + b_1; \quad b_1 = -1\frac{4}{5}.$$

$$\text{Следовательно, } CD: y = \frac{1}{5}x - 1\frac{4}{5}.$$



2. Аналогично  $AC \parallel BD$

$$(BD: y = k_2x + b_2)$$

$$\text{и } AC: y = -3x - 5.$$

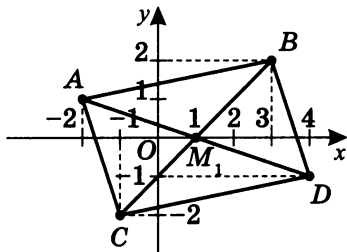
Значит,

$$B \in \Gamma(y = k_2x + b_2),$$

$$\text{и } k_2 = -3.$$

$$\text{Тогда } 2 = k_2 \cdot 3 + b_2; \quad 2 = (-3) \cdot 3 + b_2; \quad b_2 = 11.$$

$$\text{Следовательно, } BD: y = -3x + 11.$$



3. Решая систему уравнений для прямых  $CD$  и  $BD$ , найдем координаты точки  $D$ :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}x - 1\frac{4}{5}; & \frac{1}{5}x - 1\frac{4}{5} = -3x + 11; \\ y = -3x + 11 \end{cases}$$

$$x - 9 = -15x + 55; \quad 16x = 64; \quad x = 4; \quad y = -1.$$

Итак,  $D(4; -1)$ .

- г) Найдем координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма  $ABDC$ .

Известно уравнение прямой  $BC: y = x - 1$ .

Найдем уравнение прямой  $AD: y = k_3x + b_3$ .

$$\begin{cases} A \in \Gamma(k_3x + b_3); \\ D \in \Gamma(k_3x + b_3); \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = k_3 \cdot (-2) + b_3; \\ -1 = k_3 \cdot 4 + b_3; \end{cases} \quad \text{I} - \text{II}$$

$$2 = -6k_3; \quad \begin{cases} k_3 = -\frac{1}{3} \\ b_3 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Следовательно,  $AD: y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ .

Решим систему уравнений и найдем точку пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \\ y = x - 1 \end{cases}; \quad -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = x - 1;$$

$$-x + 1 = 3x - 3; \quad x = 1; \quad y = 0.$$

Следовательно,  $AD \cap BC = M_1(1; 0)$ .

Любопытно отметить, что существуют два других параллелограмма с вершинами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ :  $ABCD$  и  $ACBD$ . Найдите координаты четвертой вершины и координаты точки пересечения диагоналей  $M$  этих параллелограммов.

Проведите решение самостоятельно и проверьте, что:

для  $ABCD$ :  $D(-6; -3)$ ;  $M_2\left(-1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ;

для  $ACBD$ :  $D(2; 5)$ ;  $M_3\left(\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$ .

**Примечание.** Можно посчитать проще, если знать:

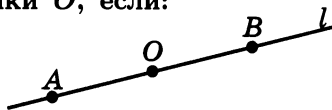
- диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
- формулу координат середины отрезка через координаты его концов:

пусть  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_0; y_0)$  — середина отрезка  $AB$ , тогда  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;  $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

2. Для прямой  $l$ , заданной уравнением  $3x - 2y = 6$ , напишите уравнение прямой, симметричной ей относительно:
- оси  $Oy$ ;
  - оси  $Ox$ ;
  - прямой  $y = x$ ;
  - прямой  $y = -x$ ;
  - начала координат.

**Определение 1.** Точка  $A$  называется центрально-симметричной точке  $B$  относительно точки  $O$ , если:

- точки  $A, B, O$  одновременно принадлежат прямой  $l$ ;
- расстояние  $AO = OB$ , где точка  $O$  принадлежит отрезку  $AB$ .

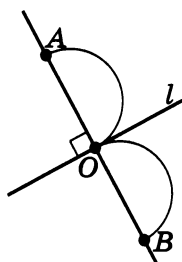


Обозначается  $Z_O(A) = B$  или  $Z_O(B) = A$ .

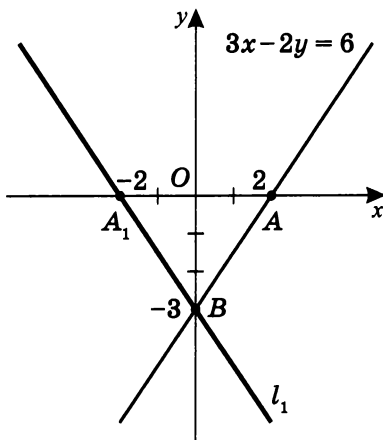
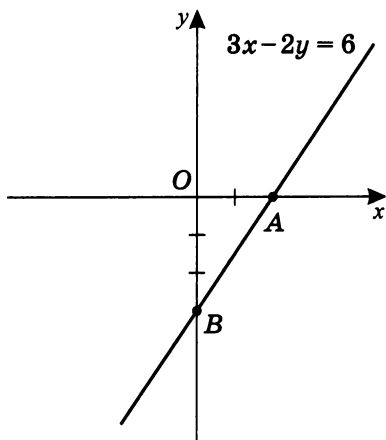
**Определение 2.** Точка  $A$  называется симметричной точке  $B$  относительно оси  $l$ , если:

- прямая  $(AB) \perp l$ ;
- $AB \cap l = O$  и  $AO = OB$ .

Обозначается  $S_l(A) = B$  или  $S_l(B) = A$ .



- а) Зададимся вопросом, при каких условиях прямая  $l_1: y = k_1x + b_1$  симметрична прямой  $l: 3x - 2y = 6$  относительно оси  $Oy$ .





1. Очевидно, что точка пересечения прямых  $l$  и  $l_1$  с осью  $Oy$  — одна и та же,  $B(0; -3)$ .

Значит,  $b_1 = b = -3$ , т. е.  $l_1: y = k_1x - 3$ .

2. Точки пересечения прямых  $l$  и  $l_1$  с осью абсцисс также должны быть симметричными относительно оси  $Oy$ :

$$l: 3x - 2y = 6; \quad y = 0, \quad x = 2;$$

$A(2; 0) \in Ox$ , значит  $A_1(-2; 0) \in Ox$ .

Тогда прямая  $A_1B$  ( $l_1$ ) симметрична прямой  $AB$  ( $l$ ) относительно оси  $Oy$ .

$$l_1 = A_1B: \begin{cases} B \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \\ A_1 \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -3 = k_1 \cdot 0 + b_1 \\ 0 = k_1 \cdot (-2) + b_1 \end{cases}; \quad \begin{cases} b_1 = -3 \\ k_1 = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

т. е.  $l_1: y = -\frac{3}{2}x - 3$ , или  $\boxed{-3x - 2y = 6}$ .

Обратите внимание, что по сравнению с данной прямой  $3x - 2y = 6$  у прямой, симметричной ей относительно оси  $Oy$ , меняется знак коэффициента при  $x$ , причем меняется также и вид монотонности, т. е. возрастающая на убывающую и наоборот.

- б) Попытаемся так же выяснить условия того, что прямая  $l_2: y = k_2x + b_2$  симметрична прямой  $l: 3x - 2y = 6$  относительно оси  $Ox$ .

1. Очевидно, что точка пересечения прямых  $l$  и  $l_2$  с осью абсцисс должна быть одной и той же.

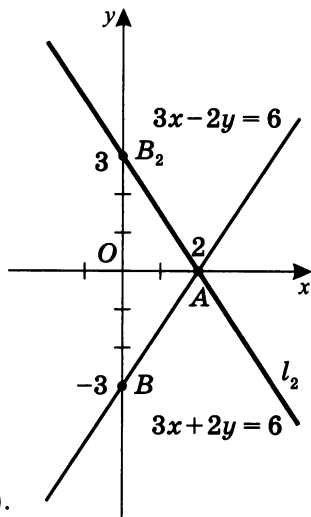
Для  $l: 3x - 2y = 6$  при  $y = 0$   $x = 2$ . Значит  $A(2; 0)$  — точка пересечения прямых  $l$  и  $l_2$  с осью абсцисс.

$$A \in \Gamma(y = k_2x + b_2); \quad 0 = k_2 \cdot 2 + b_2; \quad b_2 = -2k_2.$$

2. Точки пересечения прямых с осью ординат должны быть симметричны относительно оси абсцисс.

Для  $l: 3x - 2y = 6$  при  $x = 0$   $y = -3$ , т.е.  $B(0; -3)$  симметрична относительно оси абсцисс точке  $B_2$ .

Следовательно, координаты точки  $B_2$  —  $(0; 3)$ .



Теперь напишем уравнение прямой  $AB_2$ :

$$\begin{cases} A \in \Gamma(y = k_2x + b_2) \\ B_2 \in \Gamma(y = k_2x + b_2) \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = k_2 \cdot 2 + b_2 \\ 3 = k_2 \cdot 0 + b_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} k_2 = -\frac{3}{2} \\ b_2 = 3 \end{cases}, \text{ т.е. } AB_2 = l_2: y = -\frac{3}{2}x + 3, \quad 3x + 2y = 6.$$

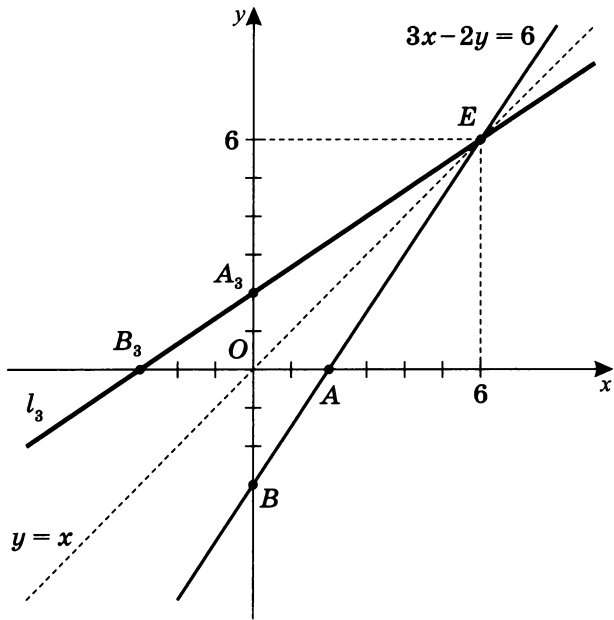
Обратите внимание, что в уравнении прямой, симметричной данной относительно оси абсцисс, меняется только знак при  $y$ :  $3x - 2y = 6$  и  $3x + 2y = 6$ .

Отметим также, что при этом меняется вид монотонности.

- в) Один из вариантов поиска решений — найти возможную точку пересечения прямых  $l: 3x - 2y = 6$  и  $l_3: y = x$ . Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ y = x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}; \quad E(6; 6).$$

Легко видеть, что точка  $A_3(0; 2)$  симметрична точке  $A(2; 0)$  относительно прямой  $y = x$ .



Теперь остается написать уравнение прямой  $A_3E$  ( $l_3$ ):

$$\begin{cases} E \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \\ A_3 \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \end{cases}; \quad \begin{cases} 6 = k_3 \cdot 6 + b_3 \\ 2 = k_3 \cdot 0 + b_3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} k_3 = \frac{2}{3} \\ b_3 = 2 \end{cases}, \text{ т. е. } A_3E: y = \frac{2}{3}x + 2 \text{ или } 3y - 2x = 6.$$

Если присмотреться, можно заметить, что уравнение этой прямой ( $3y - 2x = 6$ ) получается из исходного ( $3x - 2y = 6$ ) заменой  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ , при этом вид монотонности не меняется.

**Примечание.** Так как данное уравнение прямой  $3x - 2y = 6$  есть монотонная на всей числовой оси функция, то функция  $3y - 2x = 6$  является по отношению к ней взаимнообратной. (Чтобы найти функцию, обратную данной монотонной  $y = f(x)$ , нужно поменять местами буквы  $x$  и  $y$  —  $x = f(y)$  — и найти из полученного равенства  $y$  как из уравнения. Тем самым получим обратную к  $y = f(x)$  функ-

цию  $y = g(x)$ .) Это известно благодаря следующей теореме.

**Теорема. Графики любых взаимнообратных функций симметричны относительно прямой  $y = x$ .**

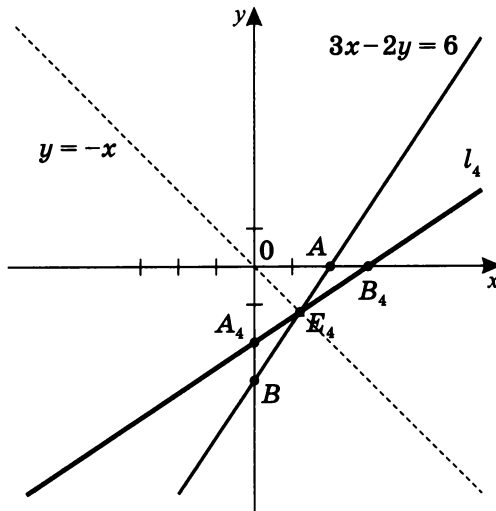
Отметим, что важнейшим условием существования функции, обратной данной, является *монотонность* исходной (первичной) функции, что обеспечивает то, что каждое свое значение функция принимает только один раз.

- г) Рассуждая по аналогии с пунктом в), найдем точку пересечения прямых  $3x - 2y = 6$  и  $y = -x$ :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ y = -x \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 1,2 \\ y = -1,2 \end{cases}.$$

Очевидно, что точка  $E_4$  должна принадлежать прямой  $l_4$ , симметричной прямой  $l: 3x - 2y = 6$  относительно оси  $y = -x$ .

Найдем точку  $B_4$ , симметричную точке  $B$  относительно прямой  $y = -x$ . Очевидно, что  $B_4$  имеет координаты  $(3; 0)$ .



Остается найти уравнение прямой  $B_4E_4$  ( $l_4$ ):

$$\begin{cases} B_4 \in \Gamma(y = k_4x + b_4); \\ E_4 \in \Gamma(y = k_4x + b_4); \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = k_4 \cdot 3 + b_4 \\ -1,2 = k_4 \cdot 1,2 + b_4; \end{cases}$$

$$1,2 = 1,8k_4; \quad \begin{cases} k_4 = \frac{2}{3} \\ b_4 = -2 \end{cases},$$

т. е.  $y = \frac{2}{3}x - 2$  или  $-3y + 2x = 6$ .

Сравнивая данное уравнение с исходным, заметим, что мы просто меняем местами коэффициенты при  $x$  и  $y$  (или меняем местами  $x$  на  $-y$  и  $y$  на  $-x$ ).

- д) Прежде всего вспомним, каковы условия симметричности точки  $A(x_0; y_0)$  относительно начала координат.

Пусть точка  $A_1(x_1; y_1)$

симметрична данной.

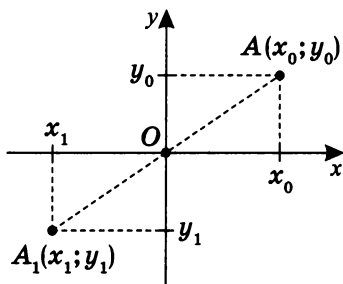
Так как  $OA = OA_1$

и  $O \in AA_1$ ,

то  $x_1 = -x_0$ ;

$y_1 = -y_0$ , значит

$$Z_O(A(x_0; y_0)) = A_1(-x_0; -y_0).$$



Необходимо найти  $l_5$ ,

где  $Z_O(l) = l_5$ .

Рассмотрим график

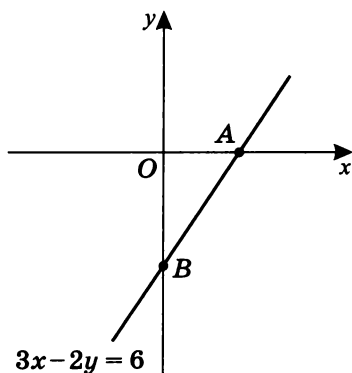
$$3x - 2y = 6.$$

Так как  $Z_O(A) = A_5$ ,

то  $A(2; 0) \rightarrow A_5(-2; 0)$ .

Так как  $Z_O(B) = B_5$ ,

то  $B(0; -3) \rightarrow B_5(0; 3)$ .



Уравнение прямой  $l_5$ , симметричной относительно начала координат прямой  $3x - 2y = 6$ , таково, что точки  $A_5$  и  $B_5$ , принадлежащие ей, удовлетворяют уравнению  $l_5: y = k_5x + b_5$ :

$$\begin{cases} A_5(-2; 0) \in \Gamma(y = k_5x + b_5); \\ B_5(0; 3) \in \Gamma(y = k_5x + b_5); \end{cases}$$

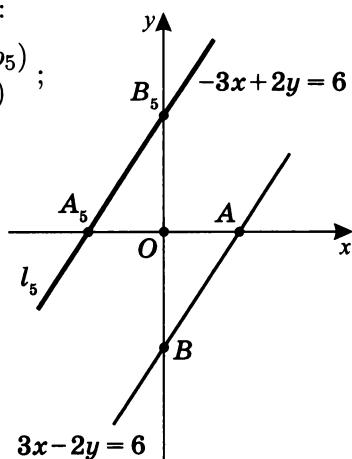
$$\begin{cases} 0 = k_5 \cdot (-2) + b_5; \\ 3 = k_5 \cdot 0 + b_5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2k_5 = b_5; \\ b_5 = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} k_5 = 1,5 \\ b_5 = 3 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$y = 1,5x + 3,$$

$$\text{или } 2y - 3x = 6.$$



**Примечание.** В общем случае график уравнения прямой  $\boxed{nx + my = c}$  симметричен относительно:

1. оси  $Oy$  — графику прямой  $\boxed{-nx + my = c}$

$$(x \rightarrow -x, y \rightarrow y);$$

2. оси  $Ox$  — графику прямой  $\boxed{nx - my = c}$

$$(x \rightarrow x, y \rightarrow -y);$$

3. оси  $y = x$  — графику прямой  $\boxed{mx + ny = c}$

$$(x \rightarrow y, y \rightarrow x);$$

4. оси  $y = -x$  — графику прямой  $\boxed{mx - ny = c}$

$$(x \rightarrow -y, y \rightarrow -x);$$

5. начала координат — графику прямой  $\boxed{-nx - my = c}$

$$(x \rightarrow -x, y \rightarrow -y).$$

## Практикум 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:  $2x + 5y = -3$ ;  $-x + y = 5$ ;  $-8x + y = -9$ . Построим графики данных функций и найдем графически возможные точки их пересечения.

$$-x + y = 5$$

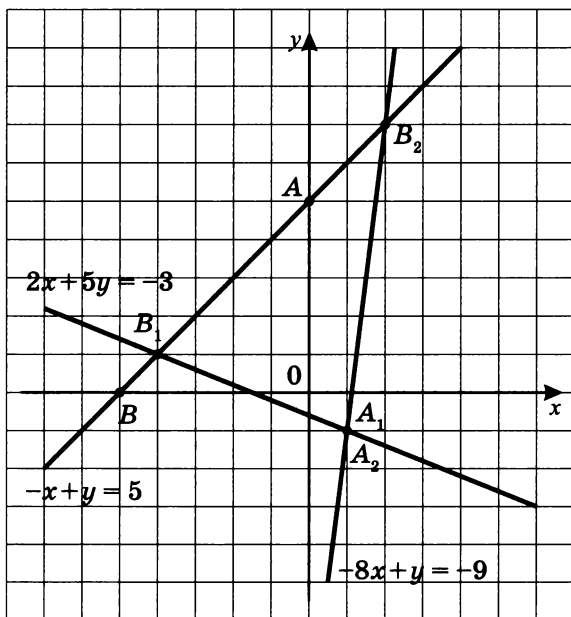
$x$	$y$	Координаты точек
0	5	$A(0; 5)$
-5	0	$B(-5; 0)$

$$2x + 5y = -3$$

$x$	$y$	Координаты точек
1	-1	$A_1(1; -1)$
-4	1	$B_1(-4; 1)$

$$-8x + y = -9$$

$x$	$y$	Координаты точек
1	-1	$A_2(1; -1)$
2	7	$B_2(2; 7)$



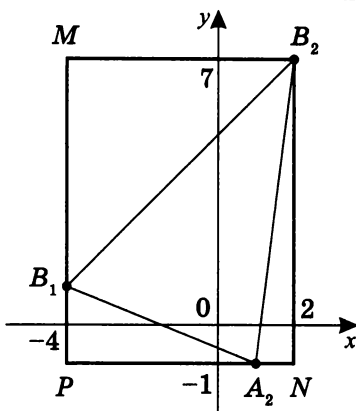
Аналитически проверим принадлежность точки  $B_1(-4; 1)$  прямой  $-x + y = 5$ .

Аналогично убедимся, что  $B_2(2; 7)$  принадлежит прямой  $-x + y = 5$ .

Итак, треугольник  $B_1B_2A_2$  — искомая фигура, площадь которой нужно найти.

Рассмотрим прямоугольник, стороны которого содержат вершины  $\triangle B_1B_2A_2$  и параллельны осям координат.

Это прямоугольник  $MB_2NP$ .



Очевидно, что

$$S_{MB_2NP} = S_{\triangle B_1MB_2} + S_{\triangle A_2B_2N} + S_{\triangle PB_1A_2} + S_{\triangle B_1B_2A_2}.$$

$$S_{\triangle B_1MB_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1M \cdot MB_2; \quad S_{\triangle B_1MB_2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18.$$

$$S_{\triangle A_2B_2N} = \frac{1}{2} \cdot A_2N \cdot NB_2; \quad S_{\triangle A_2B_2N} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4.$$

$$S_{\triangle PB_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1P \cdot PA_2; \quad S_{\triangle PB_1A_2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5.$$

$$S_{MB_2NP} = PM \cdot MB_2; \quad S_{MB_2NP} = 8 \cdot 6 = 48.$$

Итак,  $S_{\triangle B_1B_2A_2} = 48 - 18 - 4 - 5 = \boxed{21}$ .

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:  $-x + 2y = 7$ ;  $4x + y = 8$ ;  $x + y = -1$ .

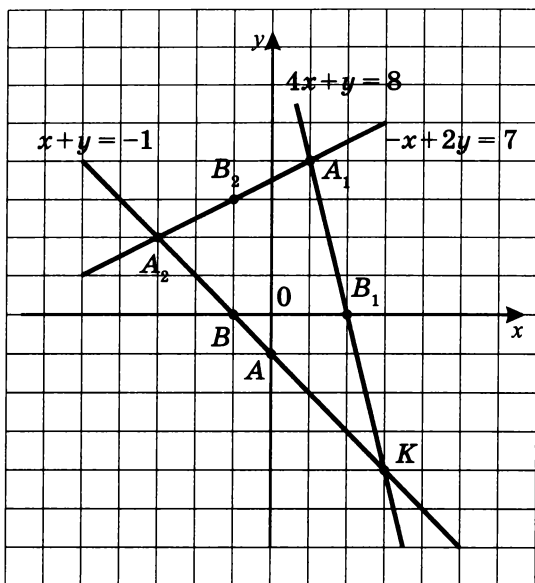
Построим графики данных функций и найдем графически возможные точки их пересечения.

$x$	$y$	Координаты точек
0	-1	$A(0; -1)$
-1	0	$B(-1; 0)$

$x$	$y$	Координаты точек
1	4	$A_1(1; 4)$
2	0	$B_1(2; 0)$

$x$	$y$	Координаты точек
-3	2	$A_2(-3; 2)$
-1	3	$B_2(-1; 3)$





Проверкой убедимся в том, что точка  $A_1(1; 4)$  принадлежит прямой  $-x + 2y = 7$ . Аналогично проверим принадлежность точки  $A_2(-3; 2)$  прямой  $x + y = -1$ . Важно также выяснить, что точка  $K$  принадлежит прямым  $4x + y = 8$  и  $x + y = -1$ .

Итак, треугольник  $A_2A_1K$  — искомая фигура, площадь которой необходимо найти. Рассмотрим прямоугольник, стороны которого содержат вершины  $\triangle A_2A_1K$  и параллельны осям координат.

Это прямоугольник  $MNKP$ .

Очевидно, что

$$S_{MNKP} = S_{\triangle A_2MA_1} + S_{\triangle A_1NK} + S_{\triangle PA_2K} + S_{\triangle A_2A_1K}.$$

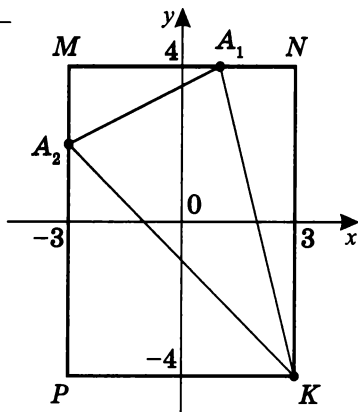
$$S_{\triangle A_2MA_1} = \frac{1}{2} \cdot A_2M \cdot MA_1; \quad S_{\triangle A_2MA_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$$

$$S_{\triangle A_1NK} = \frac{1}{2} \cdot A_1N \cdot KN; \quad S_{\triangle A_1NK} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8.$$

$$S_{\triangle PA_2K} = \frac{1}{2} \cdot PA_2 \cdot PK; \quad S_{\triangle PA_2K} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18.$$

$$S_{MNKP} = PM \cdot MN; \quad S_{MNKP} = 8 \cdot 6 = 48.$$

$$S_{\triangle A_2A_1K} = 48 - 4 - 8 - 18 = \boxed{18}.$$

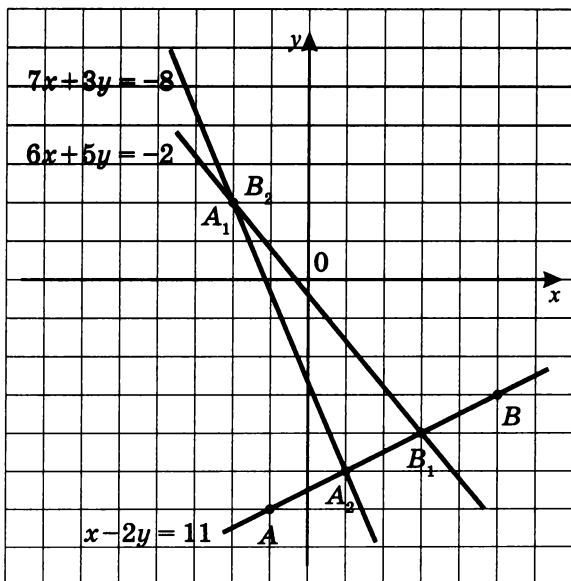


3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:  $x - 2y = 11$ ;  $6x + 5y = -2$ ;  $7x + 3y = -8$ . Построим графики данных функций и найдем графически возможные точки их пересечения.

$x - 2y = 11$	$x$	$y$	Координаты точек
	-1	-6	$A(-1; -6)$
	5	-3	$B(5; -3)$

$6x + 5y = -2$	$x$	$y$	Координаты точек
	-2	2	$A_1(-2; 2)$
	3	-4	$B_1(3; -4)$

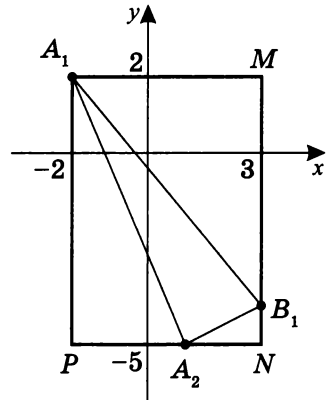
$7x + 3y = -8$	$x$	$y$	Координаты точек
	1	-5	$A_2(1; -5)$
	-2	2	$B_2(-2; 2)$



Проверим принадлежность точек  $A_2(1; -5)$  и  $B_1(3; -4)$  прямой  $x - 2y = 11$ .

Итак, треугольник  $A_1B_1A_2$  — искомая фигура, площадь которой необходимо найти.

Рассмотрим прямоугольник, стороны которого содержат вершины  $\triangle A_1 B_1 A_2$  и параллельны осям координат. Это прямоугольник  $A_1 M N P$ .



Очевидно, что

$$S_{A_1 M N P} = S_{\triangle A_1 M B_1} + S_{\triangle A_2 B_1 N} + S_{\triangle A_1 A_2 P} + S_{\triangle A_1 B_1 A_2}.$$

$$S_{\triangle A_1 M B_1} = 15; \quad S_{\triangle A_2 B_1 N} = 1; \quad S_{\triangle A_1 A_2 P} = 10,5;$$

$$S_{A_1 M N P} = 35, \text{ тогда } S_{\triangle A_1 B_1 A_2} = \boxed{8,5}.$$

4. Дан треугольник  $\triangle A_1 B_1 A_2$ , найденный в задаче 3. Постройте треугольники, симметричные ему относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.

Симметрия треугольника  $ABC$  относительно оси  $Ox$  записывается  $S_{Ox}(\triangle ABC)$ .

Симметрия треугольника  $ABC$  относительно начала координат записывается  $Z_O(\triangle ABC)$ .

Найдем симметричные точки.

- а) Для треугольника, симметричного относительно оси абсцисс:

$$A_1(-2; 2) \rightarrow A'_1(-2; -2);$$

$$S_{Ox}(A_1) = A'_1;$$

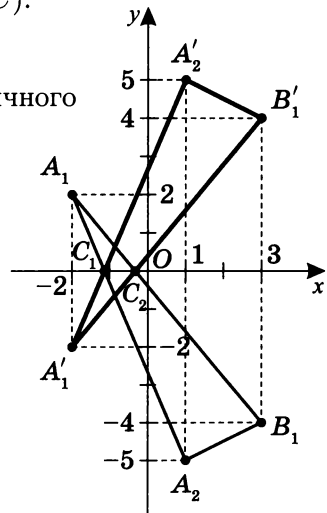
$$B_1(3; -4) \rightarrow B'_1(3; 4);$$

$$S_{Ox}(B_1) = B'_1;$$

$$A_2(1; -5) \rightarrow A'_2(1; 5);$$

$$S_{Ox}(A_2) = A'_2.$$

$$S_{Ox}(\triangle A_1 B_1 A_2) = \triangle A'_1 B'_1 A'_2.$$



б) Для треугольника, симметричного относительно оси ординат:

$$A_1(-2; 2) \rightarrow A_1''(2; 2);$$

$$S_{Oy}(A_1) = A_1'';$$

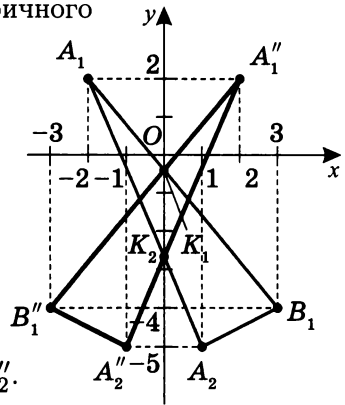
$$B_1(3; -4) \rightarrow B_1''(-3; -4);$$

$$S_{Oy}(B_1) = B_1'';$$

$$A_2(1; -5) \rightarrow A_2''(-1; -5);$$

$$S_{Oy}(A_2) = A_2''.$$

$$S_{Oy}(\triangle A_1 B_1 A_2) = \triangle A_1'' B_1'' A_2''.$$



**Примечания**

1.  $C_1 = A_1 A_2 \cap A_1'' A_2''$ ;  $C_2 = A_1 B_1 \cap A_1'' B_1''$ ;  
 $C_1, C_2 \in Ox$ .

2.  $K_1 = A_1 B_1 \cap A_1'' B_1''$ ;  $K_2 = A_1 A_2 \cap A_1'' A_2''$ ;  
 $K_1, K_2 \in Oy$ .

3. Для «головастиков». Найдите площадь фигуры:

а)  $\triangle A_1 B_1 A_2 \cap \triangle A_1'' B_1'' A_2''$ 

578
1113

;

б)  $\triangle A_1 B_1 A_2 \cap \triangle A_1'' B_1'' A_2''$ 

361
1795

.

в) Для треугольника, симметричного относительно начала координат:

$$A_1(-2; 2) \rightarrow A_1^0(2; -2);$$

$$Z_O(A_1) = A_1^0;$$

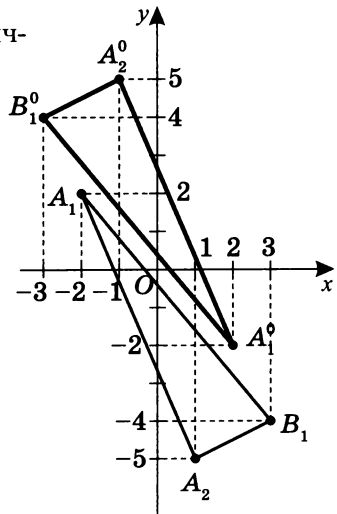
$$B_1(3; -4) \rightarrow B_1^0(-3; 4);$$

$$Z_O(B_1) = B_1^0;$$

$$A_2(1; -5) \rightarrow A_2^0(-1; 5);$$

$$Z_O(A_2) = A_2^0.$$

$$Z_O(\triangle A_1 B_1 A_2) = \triangle A_1^0 B_1^0 A_2^0.$$



**Тренировочная работа 1**

1. Прямая  $l_1$  проходит через точку  $M(-2; 10)$  и параллельна прямой  $y = -9x + 5$ . Напишите уравнение прямой  $l_1$  и координаты точки ее пересечения с осью абсцисс.
2. Принадлежат ли точки  $A(1; 2)$ ,  $B(-2; -1)$  и  $C(5; 6)$  одной прямой?
3. Прямая  $l_1$  проходит через точку  $A(3; 4)$ . Угловым коэффициентом данной прямой равен  $0,75$ . Найдите уравнение прямой  $l_1$  и координаты точки ее пересечения с осью ординат.
4. Прямая  $l_1$  пересекает ось абсцисс в точке  $A(2; 0)$  и проходит через точку  $B(-1; 3)$ . Принадлежит ли точка  $C(6; 15)$  данной прямой?
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1; -2)$  и  $B(3; 1)$ . Найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.
6. Дана прямая  $l_1: 3x - 4y = 12$ . Напишите уравнение прямой, симметричной  $l_1$  относительно оси абсцисс.
7. Прямая  $5x + 4y = 20$  симметрична прямой  $l_1$  относительно оси ординат. Напишите уравнение прямой  $l_1$ .
8. Даны три точки:  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; 2)$  и  $C(-3; -2)$ . Точка  $D$  такова, что  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите координаты точки  $D$  и координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.
9. Треугольник  $ABC$  задан вершинами  $A(-3; 1)$ ,  $B(1; -2)$  и  $C(4; 2)$ . Постройте:
  - а)  $\triangle A_1B_1C_1$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно оси абсцисс;
  - б)  $\triangle A_2B_2C_2$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно оси ординат;

- в)  $\triangle A_3B_3C_3$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно прямой  $y = x$ ;
- г)  $\triangle A_4B_4C_4$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно прямой  $y = -x$ ;
- д)  $\triangle A_5B_5C_5$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно начала координат.
- \*е) Для трудолюбивых и настойчивых «головастиков». Для пунктов а)–д) самостоятельно найдите площади фигур, являющихся общими частями соответствующих треугольников.
10. Постройте  $\triangle A_6B_6C_6$ , симметричный  $\triangle ABC$  —  $A(-3; 1)$ ,  $B(1; -2)$ ,  $C(4; 2)$  — относительно точки  $O_1(2; 3)$ , и укажите координаты его вершин.

## Решение тренировочной работы 1

1. Прямая  $l_1$  проходит через точку  $M(-2; 10)$  и параллельна прямой  $y = -9x + 5$ . Напишите уравнение прямой  $l_1$  и координаты точки ее пересечения с осью абсцисс.

Так как  $l_1: kx + b$  параллельна прямой  $l_2: y = -9x + 5$ , то  $k = -9$ , и  $l_1: y = -9x + b$ .

Но  $M(-2; 10) \in l_1$ , значит  $10 = -9 \cdot (-2) + b$ , следовательно  $b = -8$  и  $\boxed{l_1: y = -9x - 8}$ .

При  $y = 0$   $x = -\frac{8}{9}$ , т. е. точка  $(-\frac{8}{9}; 0)$  — точка пересечения прямой  $y = -9x - 8$  с осью абсцисс.

2. Принадлежат ли точки  $A(1; 2)$ ,  $B(-2; -1)$  и  $C(5; 6)$  одной прямой?

Допустим, существует прямая  $y = kx + b$ , графику которой принадлежат все три данные точки. Тогда

$$\begin{cases} A(1; 2) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(-2; -1) \in \Gamma(y = kx + b); \\ C(5; 6) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = k \cdot 1 + b \\ -1 = k \cdot (-2) + b; \\ 6 = k \cdot 5 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} k + b = 2 \\ -2k + b = -1 \quad (\text{I} - \text{II}) \\ 5k + b = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3k = 3 \quad (k = 1) \\ -2 \cdot 1 + b = -1 \quad (b = 1); \\ 5 \cdot 1 + 1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \\ 6 = 6 - \text{истина} \end{cases} .$$

Значит,  $\boxed{y = x + 1}$  — прямая, которой принадлежат все три точки.

3. Прямая  $l_1$  проходит через точку  $A(3; 4)$ . Угловый коэффициент данной прямой равен  $0,75$ . Найдите уравнение прямой  $l_1$  и координаты точки ее пересечения с осью ординат.

$$A(3; 4) \in \Gamma(y = kx + b), \text{ т. е. } 4 = k \cdot 3 + b.$$

Так как по условию  $k = 0,75$ , то  $4 = 0,75 \cdot 3 + b$ ;  $b = 1,75$ .

$$\boxed{l_1: y = 0,75x + 1,75}.$$

Так как при  $x = 0$   $y = 1,75$ , то точка пересечения прямой  $y = 0,75x + 1,75$  с осью ординат имеет координаты  $B(0; 1,75)$ .

4. Прямая  $l_1$  пересекает ось абсцисс в точке  $A(2; 0)$  и проходит через точку  $B(-1; 3)$ . Принадлежит ли точка  $C(6; 15)$  данной прямой?

$$\begin{cases} A(2; 0) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(-1; 3) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 2 + b \\ 3 = k \cdot (-1) + b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = -2k \\ b = 3 + k \end{cases}.$$

Тогда  $3 + k = -2k$ ;  $k = -1$  и  $b = 2$ , т. е.  $\boxed{l_1: y = -x + 2}$ .

$C \in \Gamma(y = -x + 2)$ , т. е.  $15 = -6 + 2$ ;  $15 = -4$  — ложь.

Значит  $C \notin l_1: y = -x + 2$ .

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки  $A(-1; 2)$  и  $B(3; 1)$ . Найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.

$$\begin{cases} A(-1; 2) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(3; 1) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 = k \cdot (-1) + b \\ 1 = k \cdot 3 + b \end{cases};$$

$$\begin{cases} b = 2 + k \\ b = 1 - 3k \end{cases}; \quad 2 + k = 1 - 3k; \quad 4k = -1;$$

$$k = -\frac{1}{4}; \quad b = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}, \text{ т. е. } \boxed{l_1: y = -\frac{1}{4}x + 1\frac{3}{4}}.$$

При  $y = 0$   $x = 7$ ;  $A(7; 0)$  — точка пересечения  $l_1$  с осью абсцисс.

При  $x = 0$   $y = 1\frac{3}{4}$ ;  $B(0; 1\frac{3}{4})$  — точка пересечения  $l_1$  с осью ординат.

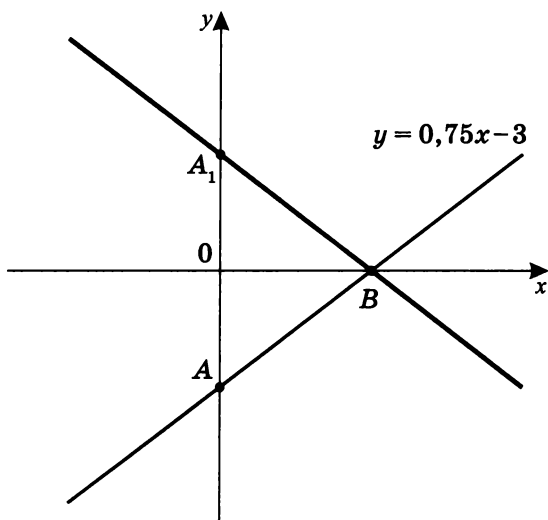


6. Дана прямая  $l_1: 3x - 4y = 12$ . Напишите уравнение прямой, симметричной  $l_1$  относительно оси абсцисс.

Так как  $3x - 4y = 12$ , то  $y = -3 + 0,75x$ .

Построим график  $y = 0,75x - 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A(0; -3)$
4	0	$B(4; 0)$



Так как точка  $A_1(0; 3)$  симметрична точке  $A(0; -3)$  относительно оси абсцисс, то прямая  $A_1B$  также симметрична на прямой  $AB$  относительно оси абсцисс.

Так как  $A_1 \in A_1B$  и  $B \in A_1B$ , то

$$\begin{cases} 3 = k \cdot 0 + b \\ 0 = k \cdot 4 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 3 \\ k = -0,75 \end{cases}$$

Тогда  $A_1B: y = -0,75x + 3$  или  $A_1B: 3x + 4y = 12$ .

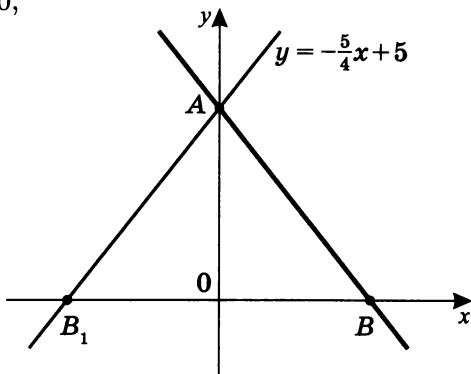
7. Прямая  $5x + 4y = 20$  симметрична прямой  $l_1$  относительно оси ординат. Напишите уравнение прямой  $l_1$ .

Так как  $5x + 4y = 20$ ,

$$\text{то } y = -\frac{5}{4}x + 5.$$

Построим график.

$x$	$y$	Координаты точек
0	5	$A(0; 5)$
4	0	$B(4; 0)$



Очевидно, что точка  $B_1(-4; 0)$  симметрична точке  $B(4; 0)$  относительно оси ординат, а значит, и соответствующие прямые симметричны относительно оси ординат.

$$\text{Тогда } \begin{cases} B_1(-4; 0) \in \Gamma(y = kx + b) \\ A(0; 5) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = k \cdot (-4) + b \\ 5 = k \cdot 0 + b \end{cases};$$

$$\begin{cases} k = \frac{5}{4} \\ b = 5 \end{cases}, \text{ т. е. } \boxed{y = \frac{5}{4}x + 5} \text{ или } 5x - 4y = -20.$$

8. Даны три точки:  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; 2)$  и  $C(-3; -2)$ . Точка  $D$  такова, что  $ABCD$  — параллелограмм. Найдите координаты точки  $D$  и координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Напишем уравнение прямой  $AB$ .

$$\begin{cases} A(2; 1) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(-1; 2) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = k \cdot 2 + b \\ 2 = k \cdot (-1) + b \end{cases};$$

$$-1 = 3k; \quad k = -\frac{1}{3}, \text{ тогда } 1 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b; \quad b = 1\frac{2}{3}.$$

$$\text{Значит, } \boxed{AB: y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}}.$$

Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $CD \parallel AB$ ,  
т. е.  $y = -\frac{1}{3}x + b$ , и  $C(-3; -2) \in CD$ ,

значит  $-2 = -\frac{1}{3} \cdot (-3) + b$ ;  $b = -3$ .

Следовательно,  $CD: y = -\frac{1}{3}x - 3$ .

С другой стороны,  $AD \parallel BC$ . Исходя из этого, найдем уравнение прямой  $BC$ .

$$\begin{cases} B(-1; 2) \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \\ C(-3; -2) \in \Gamma(y = k_1x + b_1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 = k_1 \cdot (-1) + b_1 \\ -2 = k_1 \cdot (-3) + b_1 \end{cases}; \quad 4 = 2k_1; \quad k_1 = 2,$$

тогда  $2 = 2 \cdot (-1) + b_1$ ;  $b_1 = 4$ .

Значит,  $BC: y = 2x + 4$ .

$AD \parallel BC$ , значит  $AD: y = 2x + b_2$ .

Но  $A(2; 1) \in \Gamma(y = 2x + b_2)$ ,

т. е.  $1 = 2 \cdot 2 + b_2$ ;  $b_2 = -3$ .

Таким образом,  $AD: y = 2x - 3$ .

б) Найдем точку пересечения прямых  $CD$  и  $AD$ .

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = 2x - 3 \end{cases}; \quad -\frac{1}{3}x - 3 = 2x - 3,$$

т. е.  $x = 0$ ,  $y = -3$ , значит,  $D(0; -3)$ .

в) Найдем уравнения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

Прямая  $AC$ :

$$\begin{cases} A \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \\ C \in \Gamma(y = k_3x + b_3) \end{cases}; \quad \begin{cases} 1 = k_3 \cdot 2 + b_3 \\ -2 = k_3 \cdot (-3) + b_3 \end{cases};$$

$3 = 5k_3$ ;  $k_3 = \frac{3}{5}$ , тогда  $1 = 2 \cdot \frac{3}{5} + b_3$ ;  $b_3 = -\frac{1}{5}$ .

Значит,  $AC: y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$ .

Прямая  $BD$ :

$$\begin{cases} D \in \Gamma(y = k_4x + b_4); \\ B \in \Gamma(y = k_4x + b_4); \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = k_4 \cdot 0 + b_4 \\ 2 = k_4 \cdot (-1) + b_4 \end{cases};$$

$b_4 = -3$ ,  $k_4 = -5$ . Значит  $\boxed{BD: y = -5x - 3}$ .

Для нахождения точки пересечения диагоналей решим систему уравнений:

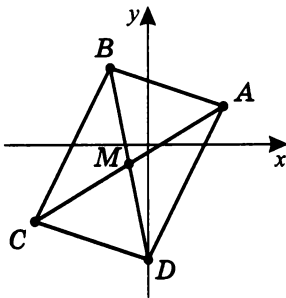
$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}; \\ y = -5x - 3; \end{cases} \quad -5x - 3 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}; \quad x = -\frac{1}{2},$$

тогда  $y = -5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3$ ;  $y = -\frac{1}{2}$ .

Следовательно, точка пересечения диагоналей —

$$M = AC \cap BD; \quad \boxed{M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)}.$$

Графическая иллюстрация решения задачи:



**Примечание.** Если бы задача была сформулирована несколько более широко, потребовалось бы рассмотреть еще два случая. Например, возможна следующая формулировка: «Три вершины параллелограмма имеют координаты  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; 2)$  и  $C(-3; -2)$ . Найдите координаты точки  $D$  — четвертой вершины параллелограмма». В этом случае возможны были бы и случаи параллелограммов  $ACBD$  и  $ACDB$ .

9. Треугольник  $ABC$  задан вершинами  $A(-3; 1)$ ,  $B(1; -2)$  и  $C(4; 2)$ .

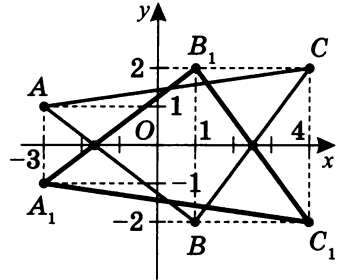
- а) Построим  $\triangle A_1B_1C_1$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно оси абсцисс.

$$A(-3; 1) \rightarrow A_1(-3; -1)$$

$$B(1; -2) \rightarrow B_1(1; 2)$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_1(4; -2)$$

$$S_{Ox}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1.$$



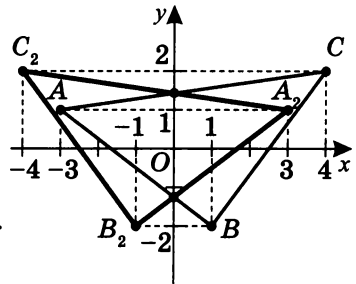
- б) Построим  $\triangle A_2B_2C_2$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно оси ординат.

$$A(-3; 1) \rightarrow A_2(3; 1)$$

$$B(1; -2) \rightarrow B_2(-1; -2)$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_2(-4; 2)$$

$$S_{Oy}(\triangle ABC) = \triangle A_2B_2C_2.$$



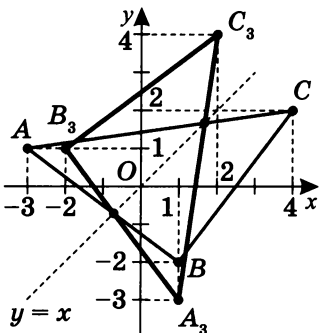
- в) Построим  $\triangle A_3B_3C_3$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно прямой  $y = x$ .

$$A(-3; 1) \rightarrow A_3(1; -3)$$

$$B(1; -2) \rightarrow B_3(-2; 1)$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_3(2; 4)$$

$$S_{y=x}(\triangle ABC) = \triangle A_3B_3C_3.$$



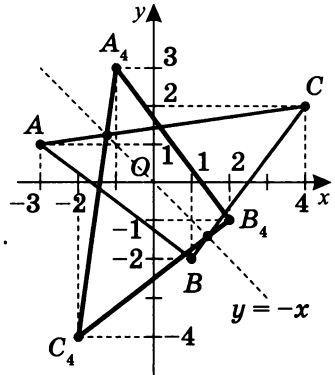
- г) Построим  $\triangle A_4B_4C_4$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно прямой  $y = -x$ .

$$A(-3; 1) \rightarrow A_4(-1; 3)$$

$$B(1; -2) \rightarrow B_4(2; -1)$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_4(-2; -4)$$

$$S_{y=-x}(\triangle ABC) = \triangle A_4B_4C_4.$$



- д) Построим  $\triangle A_5B_5C_5$ , симметричный  $\triangle ABC$  относительно начала координат.

$$A(-3; 1) \rightarrow A_5(3; -1)$$

$$B(1; -2) \rightarrow B_5(-1; 2)$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_5(-4; -2)$$

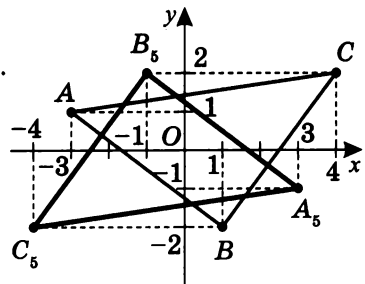
$$Z_O(\triangle ABC) = \triangle A_5B_5C_5.$$

Очевидно, что

$$AC \parallel A_5C_5;$$

$$AB \parallel A_5B_5;$$

$$BC \parallel B_5C_5.$$



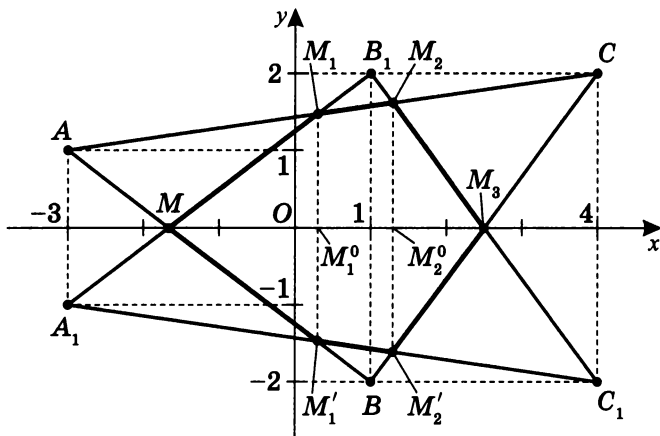
- \*e) 1.  $\frac{4 \cdot 5^5}{3 \cdot 17 \cdot 31}$ . 2.  $\frac{225}{28}$ . 3.  $\frac{115453}{12138}$ . 4.  $\frac{5^4 \cdot 71761}{27 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31^2}$ . 5. 7.

Решение см. на с. 70.

## Решение задачи 9 е).

$$1. S_{Ox}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1.$$

Построим на одном чертеже  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$ .



$$\triangle ABC \cap \triangle A_1B_1C_1 = MM_1M_2M_3M_2'M_1'.$$

Найдем  $S_{MM_1M_2M_3M_2'M_1'}$ .

1) Напишем уравнения прямых:

$$AB: \begin{cases} 1 = -3k + b \\ -2 = k + b \end{cases}; \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}; \boxed{y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}};$$

$$BC: \begin{cases} -2 = k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases}; \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{10}{4} \end{cases}; \boxed{y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{4}};$$

$$AC: \begin{cases} 1 = -3k + b \\ 2 = 4k + b \end{cases}; \begin{cases} k = \frac{1}{7} \\ b = \frac{10}{7} \end{cases}; \boxed{y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}}.$$

Учитывая симметрию  $S_{Ox}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$  ( $y \rightarrow -y$ ,  $x \rightarrow x$ ) (см. с. 53):

$$A_1B_1: y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4};$$

$$B_1C_1: y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3};$$

$$A_1C_1: y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}.$$

- 2) Найдем координаты точек пересечения соответствующих сторон треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

$$AB \cap A_1B_1 = M; \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}; \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases}; \quad M\left(-\frac{5}{3}; 0\right).$$

$$AC \cap A_1B_1 = M_1; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}; \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases};$$

$$M_1\left(\frac{5}{17}; \frac{25}{17}\right), \text{ тогда } M'_1\left(\frac{5}{17}; -\frac{25}{17}\right).$$

$$AC \cap B_1C_1 = M_2; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}; \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases};$$

$$M_2\left(\frac{40}{31}; \frac{50}{31}\right), \text{ тогда } M'_2\left(\frac{40}{31}; -\frac{50}{31}\right).$$

$$BC \cap B_1C_1 = M_3; \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}; \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}; \quad M_3\left(\frac{5}{2}; 0\right).$$

- 3)  $S_{MM_1M_2M_3M'_2M'_1} = S_{\Delta MM_1M'_1} + S_{M_1M_2M'_2M'_1} + S_{\Delta M_2M_3M'_2}$ .

$S_{\Delta MM_1M'_1} = \frac{1}{2}M'_1M_1 \cdot H_{M'_1M_1}$ , где  $M'_1M_1$  — разность ординат точек  $M'_1$  и  $M_1$ , а  $H_{M'_1M_1} = MM_1^0$  — разность абсцисс точек  $M$  и  $M_1$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{\Delta MM_1M'_1} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{17} - \left(-\frac{25}{17}\right)\right) \cdot \left(\frac{5}{17} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right) = \\ &= \frac{25}{17} \cdot \frac{100}{17 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5^4}{3 \cdot 17^2}. \end{aligned}$$

Найдем  $S_{M_1M_2M'_2M'_1}$ .

Так как  $M_1M_2M'_2M'_1$  — трапеция, то

$$S_{M_1M_2M'_2M'_1} = \frac{M_1M'_1 + M_2M'_2}{2} \cdot M_2^0M_1^0;$$

$$S_{M_1M_2M'_2M'_1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{25}{17} + \frac{50}{31}\right)}{2} \cdot \left(\frac{40}{31} - \frac{5}{17}\right) = \frac{5^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}{17^2 \cdot 31^2}.$$



$$\begin{aligned}
 S_{\Delta M_2 M_3 M'_2} &= \frac{1}{2} \cdot M_2 M'_2 \cdot M_3 M_2^0; \\
 S_{\Delta M_2 M_3 M'_2} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{50}{31} - \left( -\frac{50}{31} \right) \right) \cdot \left( 2 - \frac{40}{31} \right) = \\
 &= \frac{50}{31} \cdot \frac{5 \cdot 15}{2 \cdot 31} = \frac{5^4 \cdot 3}{31^2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 S_{MM_1 M_2 M_3 M'_2 M'_1} &= \frac{5^4 \cdot 4}{3 \cdot 17^2} + \frac{5^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13}{17^2 \cdot 31^2} + \frac{5^4 \cdot 3}{31^2} = \\
 &= \frac{5^4}{3 \cdot 17^2 \cdot 31^2} \cdot (4 \cdot 31^2 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 + 9 \cdot 17^2) = \\
 &= \frac{5^4}{3 \cdot 17^2 \cdot 31^2} \cdot (3844 + 4095 + 2601) = \\
 &= \frac{5^4 \cdot 10540}{3 \cdot 17^2 \cdot 31^2} = \boxed{\frac{4 \cdot 5^5}{3 \cdot 17 \cdot 31}} \quad (10540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31).
 \end{aligned}$$

4) Возможен более простой способ.

$AB = 5$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 5\sqrt{2}$ , тогда  $\angle ABC = 90^\circ$ .

Можно это заметить и иначе:

$$AB: y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}, \quad BC: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}, \quad -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1.$$

Известно, что при  $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$  прямые  $y = k_1 x + b_1$  и  $y = k_2 x + b_2$  взаимно перпендикулярны.

Значит  $\Delta M_1 B_1 M_2$  — прямоугольный,

$$\text{и } S_{MM_1 M_2 M_3 M'_2 M'_1} = S_{MB_1 M_3 B} - 2S_{\Delta M_1 B_1 M_2}.$$

$$S_{MB_1 M_3 B} = \frac{1}{2} \cdot M_3 M \cdot BB_1,$$

$$\text{где } M_3 M = \frac{5}{2} - \left( -\frac{5}{3} \right) = \frac{25}{6}; \quad BB_1 = 4.$$

$$\text{Тогда } S_{MB_1 M_3 B} = \frac{25}{3}.$$

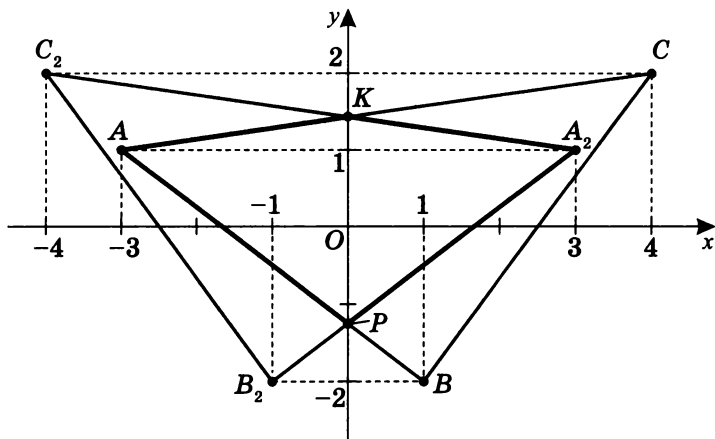
$$S_{\Delta M_1 B_1 M_2} = \frac{1}{2} \cdot B_1 M_1 \cdot B_1 M_2, \text{ где}$$

$$B_1 M_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{17}\right)^2 + \left(2 - \frac{25}{17}\right)^2} = \frac{15}{17};$$

$$B_1 M_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{40}{31}\right)^2 + \left(2 - \frac{50}{31}\right)^2} = \frac{15}{31}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{MM_1 M_2 M_3 M'_2 M'_1} = \frac{4 \cdot 5^5}{3 \cdot 17 \cdot 31}.$$

$$2. S_{Oy}(\triangle ABC) = \triangle A_2B_2C_2.$$



$$\triangle ABC \cap \triangle A_2B_2C_2 = KA_2P.$$

Так как

$$AC: y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$BC: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3},$$

$$AC: y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$$

то

$$A_2C_2: y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$B_2C_2: y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \quad (\text{см. с. 53}).$$

$$A_2C_2: y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$$

Тогда

$$AC \cap A_2C_2 = K, \text{ т. е. } K\left(0; \frac{10}{7}\right);$$

$$AB \cap A_2B_2 = P, \text{ т. е. } P\left(0; -\frac{5}{4}\right).$$

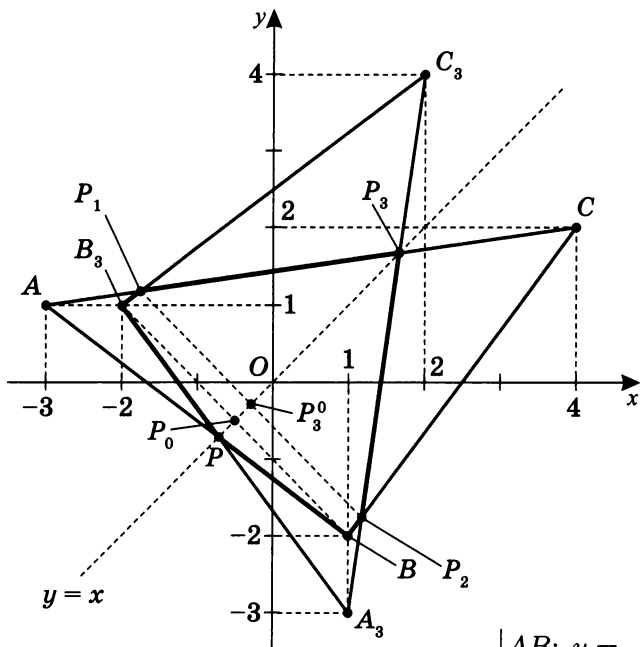
Так как  $AA_2 \perp PK$ , то  $KA_2P$  — дельтоид, поэтому

$$S_{KA_2P} = \frac{1}{2}AA_2 \cdot PK.$$

$$AA_2 = 3 + 3 = 6; \quad PK = \frac{10}{7} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{75}{28},$$

$$\text{значит, } S_{KA_2P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{75}{28} \cdot 6 = \boxed{\frac{225}{28}}.$$

3.  $S_{y=x}(\triangle ABC) = \triangle A_3B_3C_3$ .



1) Аналогично (см. с. 53), так как

$$\begin{cases} AB: y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ BC: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \\ AC: y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \end{cases},$$

$$A_3B_3: x = -\frac{3}{4}y - \frac{5}{4} \quad A_3B_3: y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

то  $B_3C_3: x = \frac{4}{3}y - \frac{10}{3}$ , т. е.  $B_3C_3: y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ ,

$$A_3C_3: x = \frac{1}{7}y + \frac{10}{7} \quad A_3C_3: y = 7x - 10$$

2) Найдем координаты точек пересечения соответствующих сторон  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_3B_3C_3$ .

Ось симметрии — прямая  $l: y = x$ .

$$AB \cap l = P; \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = x \end{cases}; \quad P\left(-\frac{5}{7}; -\frac{5}{7}\right).$$

$$AC \cap l = P_3; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = x \end{cases}; \quad P_3\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

$$AC \cap B_3C_3 = P_1; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \end{cases}; \quad P_1 \left( -\frac{30}{17}; \frac{20}{17} \right).$$

$$S_{y=x}(P_1) = P_2, \text{ значит, } P_2 \left( \frac{20}{17}; -\frac{30}{17} \right).$$

$P_1P_2 \perp l$  и  $BB_3 \perp l$ , значит,  $B_3BP_2P_1$  — трапеция.

Найдем уравнение  $P_1P_2$ .

$$P_1 \in \Gamma(y = -x + b); \quad \frac{20}{17} = -\frac{30}{17} \cdot (-1) + b; \quad b = -\frac{10}{17};$$

$$P_1P_2: y = -x - \frac{10}{17}.$$

Аналогично найдем уравнение  $BB_3$ .

$$B \in \Gamma(y = -x + b); \quad 1 = -2 \cdot (-1) + b; \quad b = -1;$$

$$BB_3: y = -x - 1.$$

Тогда точки пересечения с осью симметрии  $P_3^0$  и  $P_0$  будут таковы:

$$P_1P_2 \cap l = P_3^0; \quad \begin{cases} y = -x - \frac{10}{17} \\ y = x \end{cases}; \quad P_3^0 \left( -\frac{5}{17}; -\frac{5}{17} \right);$$

$$BB_3 \cap l = P_0; \quad \begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x \end{cases}; \quad P_0 \left( -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right).$$

3) Найдем  $S_{BPB_3P_1P_3P_2} = S_{\Delta PB_3B} + S_{BB_3P_1P_2} + S_{\Delta P_1P_3P_2}$ .

Вычислим необходимые длины сторон:

$$BB_3 = \sqrt{(-2-1)^2 + (1+2)^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$PP_0 = \sqrt{\left(-\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{7} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{14}\sqrt{2}.$$

$$P_1P_2 = \sqrt{\left(-\frac{30}{17} - \frac{20}{17}\right)^2 + \left(\frac{20}{17} + \frac{30}{17}\right)^2} = \frac{50}{17}\sqrt{2}.$$

$$P_3^0P_0 = \sqrt{\left(-\frac{5}{17} + \frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{17} - \frac{5}{7}\right)^2} = \frac{50}{7 \cdot 17}\sqrt{2}.$$

$$P_3P_3^0 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{13}{6}\sqrt{2}.$$

Теперь определим площади соответствующих фигур:

$$S_{\triangle PB_3B} = \frac{1}{2} \cdot BB_3 \cdot PP_0;$$

$$S_{\triangle PB_3B} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{14}\sqrt{2} = \frac{9}{14}.$$

$$S_{BB_3P_1P_2} = \frac{BB_3 + P_1P_2}{2} \cdot P_3P_0;$$

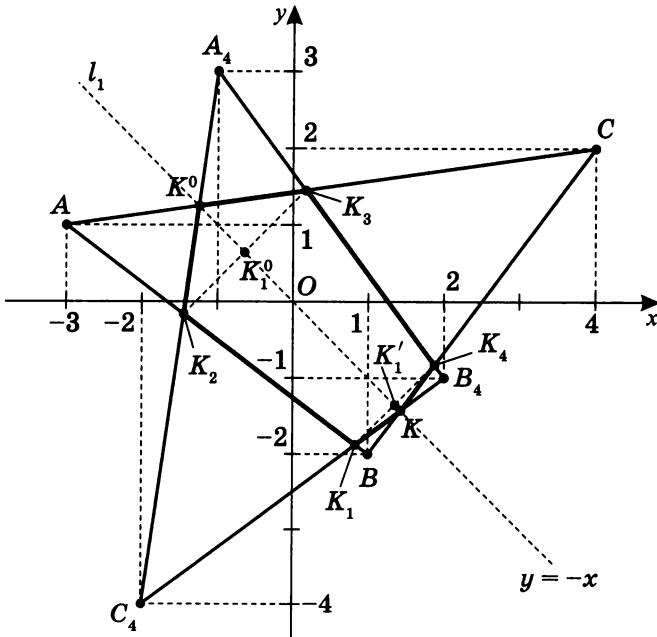
$$S_{BB_3P_1P_2} = \frac{3\sqrt{2} + \frac{50}{17}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{50}{7 \cdot 17}\sqrt{2} = \frac{101 \cdot 2 \cdot 5^2}{7 \cdot 17^2}.$$

$$S_{\triangle P_1P_3P_2} = \frac{1}{2} \cdot P_1P_2 \cdot P_3P_0;$$

$$S_{\triangle P_1P_3P_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{17}\sqrt{2} \cdot \frac{13}{6}\sqrt{2} = \frac{5^2 \cdot 13}{3 \cdot 17}.$$

$$\begin{aligned} S_{BPB_3P_1P_3P_2} &= \frac{3^2}{2 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5^2 \cdot 101}{7 \cdot 17^2} + \frac{5^2 \cdot 13}{3 \cdot 17} = \\ &= \frac{3^3 \cdot 17^2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 101 + 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17^2} = \\ &= \frac{7803 + 30300 + 77350}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17^2} = \boxed{\frac{115453}{12138}}. \end{aligned}$$

4.  $S_{y=-x}(\triangle ABC) = A_4B_4C_4.$



- 1) Учитывая симметрию относительно оси  $l_1: y = -x$  (см. с. 53), заменим  $x$  на  $-y$  и  $y$  на  $-x$ .

$$AB: y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \quad -x = \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}$$

Так как  $BC: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ , то  $-x = -\frac{4}{3}y - \frac{10}{3}$ ,

$$AC: y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \quad -x = -\frac{1}{7}y + \frac{10}{7}$$

$$A_4B_4: y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

т. е.  $B_4C_4: y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{7}$ .

$$A_4C_4: y = 7x + 10$$

- 2) Найдем точки пересечения  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_4B_4C_4$  с осью симметрии  $l_1$ .

$$BC \cap l_1 = K; \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \\ y = -x \end{cases}; \quad K\left(\frac{10}{7}; -\frac{10}{7}\right).$$

$$AC \cap l_1 = K^0; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -x \end{cases}; \quad K^0\left(-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

Далее найдем

$$AC \cap A_4B_4 = K_3; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases}; \quad K_3\left(\frac{5}{31}; \frac{45}{31}\right).$$

Так как  $S_{y=-x}(K_3) = K_2$ ,

$$\text{то } A_4C_4 \cap AB = K_2\left(-\frac{45}{31}; -\frac{5}{31}\right).$$

Так как  $K_2K_3 \perp l_1$ , то  $K_2K_3$  имеет вид  $y = x + b$ , но  $K_3 \in \Gamma(y = x + b)$ , тогда

$$\frac{45}{31} = \frac{5}{31} + b, \text{ т. е. } b = \frac{40}{31}, \text{ значит, } K_2K_3: y = x + \frac{40}{31}.$$

$$l_1 \cap K_2K_3 = K_1^0; \quad \begin{cases} y = x + \frac{40}{31} \\ y = -x \end{cases}; \quad K_1^0\left(-\frac{20}{31}; \frac{20}{31}\right).$$

$$3) BC \cap A_4B_4 = K_4; \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}; \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases}; \quad K_4 \left( \frac{15}{8}; -\frac{5}{6} \right).$$

Так как  $S_{y=-x}(K_4) = K_1$ , то  $K_1 \left( \frac{5}{6}; -\frac{15}{8} \right)$ .

По аналогии с предыдущим найдем уравнение прямой  $K_1K_4$  и координаты точки пересечения с осью  $l_1$ .

$$K_1K_4: y = x - \frac{65}{24};$$

$$l_1 \cap K_1K_4 = K'_1, \text{ где } K'_1 \left( \frac{65}{48}; -\frac{65}{48} \right).$$

- 4) Выполним вычисления, необходимые для нахождения площадей фигур, составляющих фигуру  $KK_1K_2K^0K_3K_4$ :

$$K_2K_3 = \sqrt{\left(\frac{5}{31} + \frac{45}{31}\right)^2 + \left(-\frac{5}{31} - \frac{45}{31}\right)^2} = \frac{2 \cdot 5^2}{31} \sqrt{2}.$$

$$K_1^0K^0 = \sqrt{\left(-\frac{5}{4} + \frac{20}{31}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - \frac{20}{31}\right)^2} = \frac{5^2}{2^2 \cdot 31} \sqrt{2}.$$

$$K'_1K_1^0 = \sqrt{\left(\frac{65}{48} + \frac{20}{31}\right)^2} \cdot 2 = \frac{5^2 \cdot 119}{2^4 \cdot 3 \cdot 31} \sqrt{2}.$$

$$K_1K_4 = \sqrt{\left(\frac{5}{6} - \frac{15}{8}\right)^2} \cdot 2 = \frac{5^2}{2^3 \cdot 3} \sqrt{2}.$$

$$KK'_1 = \sqrt{\left(\frac{10}{7} - \frac{65}{48}\right)^2} \cdot 2 = \frac{5^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 7} \sqrt{2}.$$

$$5) S_{KK_1K_2K^0K_3K_4} = S_{\Delta K_2K^0K_3} + S_{K_1K_2K_3K_4} + S_{\Delta KK_1K_4}.$$

$$S_{\Delta K_2K^0K_3} = \frac{1}{2} K_2K_3 \cdot K_1^0K^0;$$

$$S_{\Delta K_2K^0K_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 5^2 \sqrt{2}}{31} \cdot \frac{5^2 \sqrt{2}}{2^2 \cdot 31} = \frac{5^4}{2 \cdot 31^2}.$$

$$S_{K_1K_2K_3K_4} = \frac{K_2K_3 + K_1K_4}{2} \cdot K_1K_1^0.$$

Очевидно, что  $K_1K_2K_3K_4$  — трапеция ( $K_1K_4 \parallel K_2K_3$ ).

$$S_{K_1K_2K_3K_4} = \frac{\frac{2 \cdot 5^2}{31} \sqrt{2} + \frac{5^2}{2^3 \cdot 3} \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5^2 \cdot 119 \cdot \sqrt{2}}{2^4 \cdot 3 \cdot 31} = \frac{5^4 \cdot 79 \cdot 119}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 31^2}.$$

$$S_{\Delta KK_1K_4} = \frac{1}{2} \cdot K_1K_4 \cdot KK_1';$$

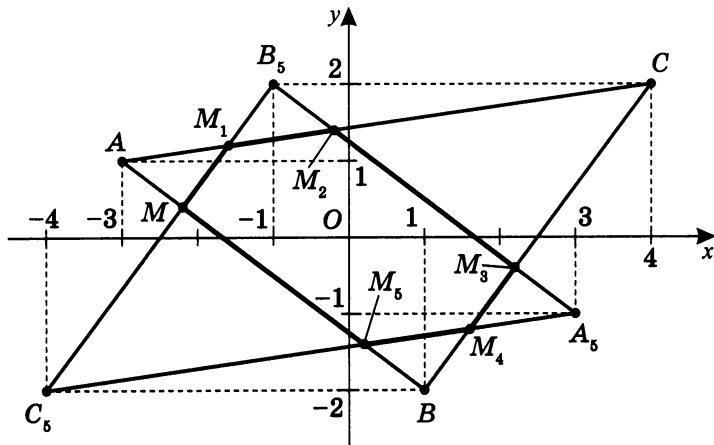
$$S_{\Delta KK_1K_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2 \sqrt{2}}{2^3 \cdot 3} \cdot \frac{5^2 \sqrt{2}}{2^4 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{5^4}{2^6 \cdot 2^2 \cdot 7}.$$

$$S_{KK_1K_2K^0K_3K_4} = \frac{5^4}{2 \cdot 31^2} + \frac{5^4 \cdot 79 \cdot 119}{2^7 \cdot 2^2 \cdot 31^2} + \frac{5^4}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7} =$$

$$= \frac{5^4}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31^2} \cdot (2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 + 7 \cdot 79 \cdot 119 + 2 \cdot 31^2) =$$

$$= \frac{5^4}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31^2} \cdot (4032 + 65\,807 + 1922) = \boxed{\frac{5^4 \cdot 71\,761}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31^2}}.$$

5.  $Z_0(\Delta ABC) = A_5B_5C_5$ .



1) Учтем, что при центральной симметрии  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$  (см. с. 53).

$$AB: y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4},$$

$$\text{тогда } A_5B_5: -y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}; \text{ т. е. } A_5B_5: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$



$$BC: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3},$$

тогда  $B_5C_5$ :  $-y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ , т. е.  $B_5C_5$ :  $y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$ .

$$AC: y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7},$$

тогда  $A_5C_5$ :  $-y = -\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}$ , т. е.  $A_5C_5$ :  $y = \frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$ .

- 2) Найдем координаты точек пересечения соответствующих сторон  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_5B_5C_5$ .

$$AC \cap B_5C_5 = M_1; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}; \quad M_1 \left( -\frac{8}{5}; \frac{6}{5} \right),$$

значит так как  $Z_0(M_1) = M_4$ , то  $M_4 \left( \frac{8}{5}; -\frac{6}{5} \right)$ .

$$AC \cap A_5B_5 = M_2; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{7}x + \frac{10}{7} \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases}; \quad M_2 \left( -\frac{1}{5}; \frac{7}{5} \right),$$

значит так как  $Z_0(M_2) = M_5$ , то  $M_5 \left( \frac{1}{5}; -\frac{7}{5} \right)$ .

$$AC \cap B_5C_5 = M; \quad \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}; \quad M \left( -\frac{11}{5}; \frac{2}{5} \right),$$

значит так как  $Z_0(M) = M_3$ , то  $M_3 \left( \frac{11}{5}; -\frac{2}{5} \right)$ .

- 3)  $S_{MM_1M_2M_3M_4M_5} = S_{MB_5M_3B} - 2S_{\triangle M_1B_5M_2}$ .

Отметим, что  $A_5B_5 \perp BC$ . Покажем это.

$$A_5B_5: y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, \quad BC: y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}.$$

Так как  $k_1 = -\frac{3}{4}$ , и  $k_2 = \frac{4}{3}$ ,

то  $-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1$ , и  $k_1 \cdot k_2 = -1$ ,

что и требовалось доказать.

Тогда  $MB_5M_3B$  — прямоугольник, а  $M_1B_5M_2$  — прямоугольный треугольник.

4) Вычислим необходимые длины отрезков:

$$MB_5 = \sqrt{\left(-\frac{11}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)^2} = 2;$$

$$MB = \sqrt{\left(-\frac{11}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + 2\right)^2} = 4;$$

$$M_1B_5 = \sqrt{\left(-\frac{8}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 2\right)^2} = 1;$$

$$M_2B_5 = \sqrt{\left(-\frac{1}{5} + 1\right)^2 + \left(\frac{7}{5} - 2\right)^2} = 1.$$

Тогда:

$$S_{MB_5M_3B} = MB_5 \cdot MB; \quad S_{MB_5M_3B} = 2 \cdot 4 = 8.$$

$$S_{\Delta M_1B_5M_2} = \frac{1}{2} \cdot M_1B_5 \cdot M_2B_5; \quad S_{\Delta M_1B_5M_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$5) S_{MM_1M_2M_3M_4M_5} = 8 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{7}.$$

(Конечно, здесь учтены результаты пунктов 3) и 4).)

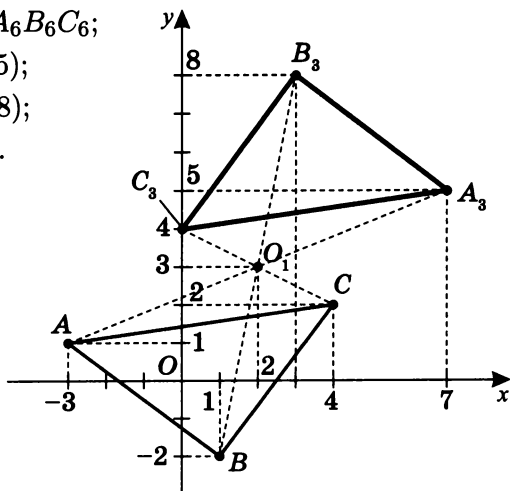
10. Постройте  $\Delta A_6B_6C_6$ , симметричный  $\Delta ABC$  —  $A(-3; 1)$ ,  $B(1; -2)$ ,  $C(4; 2)$  — относительно точки  $O_1(2; 3)$ , и укажите координаты его вершин.

$$Z_{O_1}(\Delta ABC) = \Delta A_6B_6C_6;$$

$$A(-3; 1) \rightarrow A_6(7; 5);$$

$$B(1; -2) \rightarrow B_6(3; 8);$$

$$C(4; 2) \rightarrow C_6(0; 4).$$



## Самостоятельная работа 4

## I вариант

$$l_1: 2x + y = 3$$

$$l_2: 3x - 2y = 1$$

$$l_3: x + 4y = -9$$

## II вариант

$$l_1: 3x + 2y = 7$$

$$l_2: x - y = -1$$

$$l_3: x - 6y = 9$$

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ .
2. Найдите координаты вершины  $D$  параллелограмма  $ABCD$ , где  $A = l_1 \cap l_2$ ;  $B = l_1 \cap l_3$ ;  $C = l_2 \cap l_3$ .
3. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ .
4. Укажите координаты вершин параллелограмма  $A_1B_1C_1D_1$ , симметричного  $ABCD$  относительно оси абсцисс.
5. Укажите координаты вершин параллелограмма  $A_2B_2C_2D_2$ , симметричного  $ABCD$  относительно оси ординат.
6. Укажите координаты вершин параллелограмма  $A_3B_3C_3D_3$ , симметричного  $ABCD$  относительно прямой  $y = x$ .
7. Укажите координаты вершин параллелограмма  $A_4B_4C_4D_4$ , симметричного  $ABCD$  относительно прямой  $y = -x$ .
8. Укажите координаты вершин параллелограмма  $A_5B_5C_5D_5$ , симметричного  $ABCD$  относительно начала координат.
- \*9. Найдите площади фигур, являющихся общими частями фигур пунктов 4–8.
10. Укажите координаты вершин параллелограмма  $A_6B_6C_6D_6$ , симметричного  $ABCD$  относительно точки  $O_1(2; 3)$ .

## Кусочно-линейные функции

### Примеры кусочно-линейных функций

**Пример 1.** Постройте график функции:

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x < -1 \\ 2x - 1, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3 - x, & x \geq 2 \end{cases}.$$

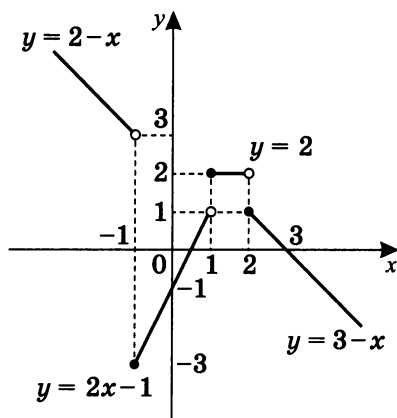
(Фигурная скобка обозначает в данном случае не систему, а знак составной функции.)

Для этого построим на каждом из промежутков графики функции, а затем «соберем» их на одном чертеже, т. е. в одной системе координат.

$$y = 2 - x; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline -1 & 3 \\ \hline -2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

$$y = 2x - 1; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

$$y = 3 - x; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \end{array}.$$



**Определение 1.** Модулем числа  $a$  называется само число  $a$ , если оно не отрицательно, и число  $-a$ , если  $a$  отрицательно.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

**Пример 2.** Постройте график функции  $y = 2|x - 1| + x$ .

Так как  $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$ , то:

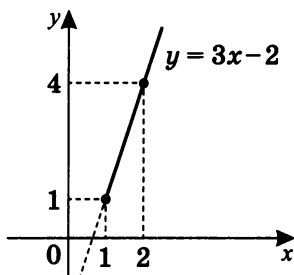
$$\text{а) } \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 2|x - 1| + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 2x - 2 + x \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

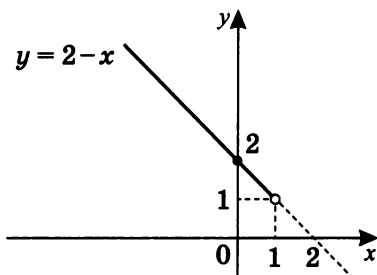
$$\text{б) } \begin{cases} x < 1 \\ y = 2(1 - x) + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 1 \\ y = 2 - 2x + x \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ y = 2 - x \end{cases}; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

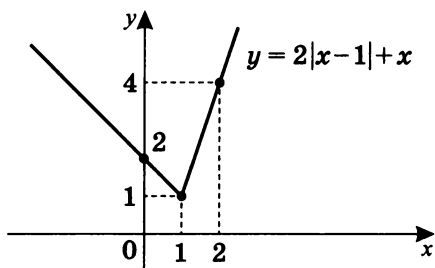
а)



б)



Значит, график функции  $y = 2|x - 1| + x$  есть объединение двух лучей, полученных в пунктах а) и б).



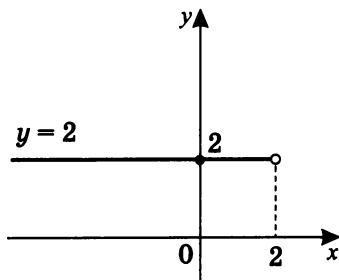
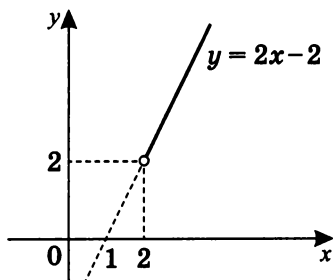
**Пример 3.** Постройте график функции  $y = \frac{x^2-2x}{|x-2|} - \frac{2|x-2|}{x-2} + x$ .

$D(y) : x \neq 2$ .

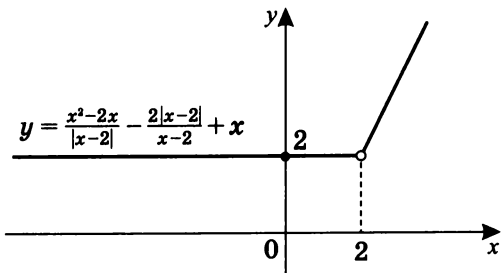
Так как  $x \neq 2$ , то дробь можно сократить на  $(x-2)$ :

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}.$$

$$\text{а) } \begin{cases} x > 2 \\ y = \frac{x(x-2)}{x-2} - \frac{2(x-2)}{x-2} + x; \\ x > 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x < 2 \\ y = \frac{x(x-2)}{2-x} - \frac{2(2-x)}{x-2} + x; \\ x < 2 \\ y = 2 \end{cases};$$



Значит, график функции  $y = \frac{x^2-2x}{|x-2|} - \frac{2|x-2|}{x-2} + x$  после «сборки» выглядит так:

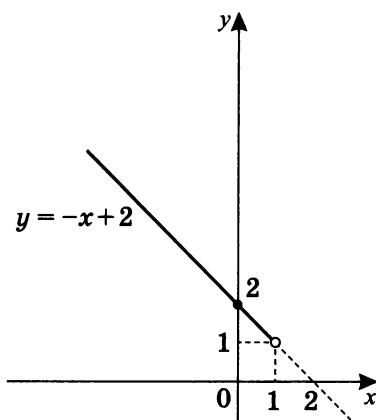
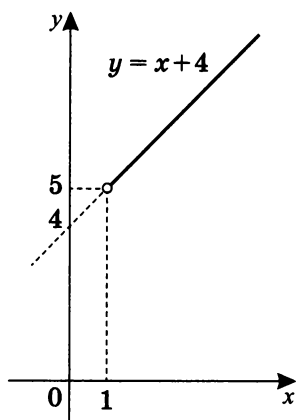


**Пример 4.** Постройте график функции  $y = \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3$ .

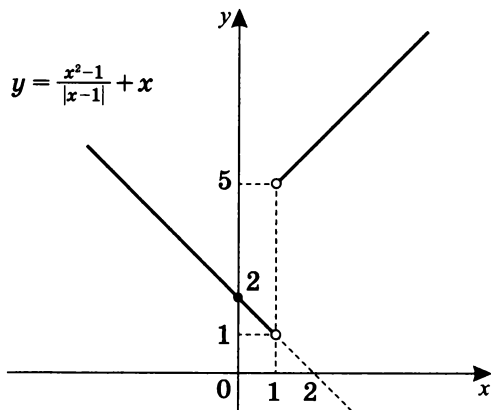
$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}. \quad D(y): x \neq 1.$$

$$\text{а) } \begin{cases} x > 1 \\ y = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + 3 \\ x > 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x < 1 \\ y = \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} + 3 \\ x < 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

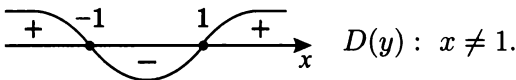


Значит, график функции  $y = \frac{x^2-1}{|x-1|} + 3$  после «сборки» будет таким:



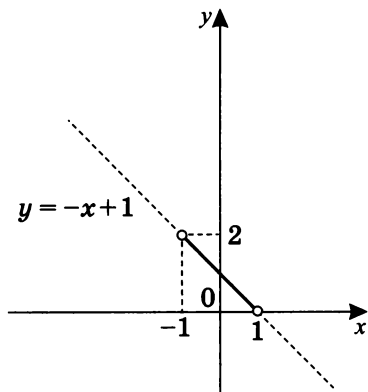
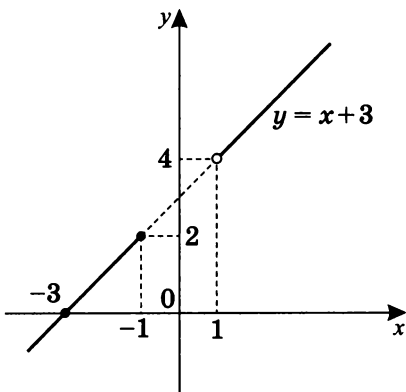
**Пример 5.** Постройте график функции  $y = \frac{|x^2-1|}{x-1} + 2$ .

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x^2 - 1 \geq 0 \quad (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2, & x^2 - 1 < 0 \quad (-1 < x < 1) \end{cases}.$$

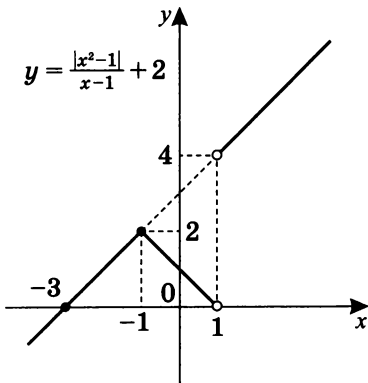


а)  $\begin{cases} x > 1 \\ x \leq -1 \\ y = x + 3 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$



Значит, график функции  $y = \frac{|x^2-1|}{x-1} + 2$  после «сборки» будет таким:

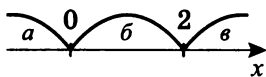




**Пример 6.** Постройте график функции  $y = 2|x - 2| - |x|$ .

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}; \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

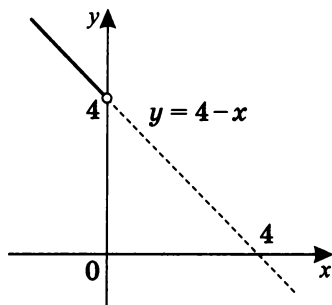
Разобьем числовую ось на промежутки корнями подмодульных выражений:



Получили три промежутка. Отдельно на каждом из них рассмотрим график данной функции, а затем склеим все три графика.

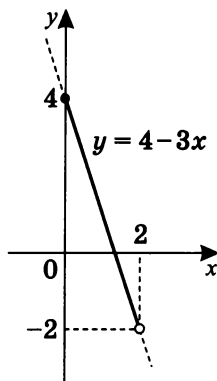
а)  $\begin{cases} x < 0 \\ y = 2(2 - x) + x \end{cases};$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y = 4 - x \end{cases}$$



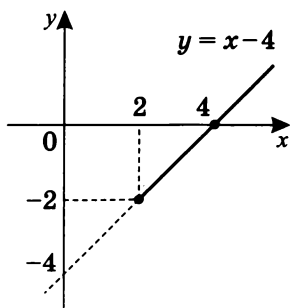
б)  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \\ y = 2(2 - x) - x \end{cases};$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \\ y = 4 - 3x \end{cases}$$

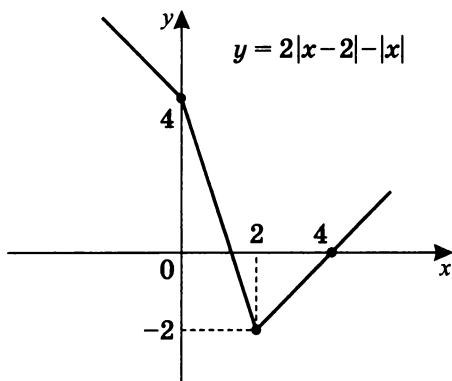


в)  $\begin{cases} x \geq 2 \\ y = 2(x - 2) - x \end{cases};$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y = x - 4 \end{cases}$$



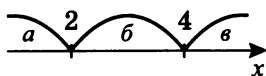
Значит, график функции  $y = 2|x - 2| - |x|$  будет выглядеть так:



**Пример 7.** Постройте график функции  $y = |x - 2| - |x - 4|$ .

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2; \\ 2 - x, & x < 2; \end{cases}$$

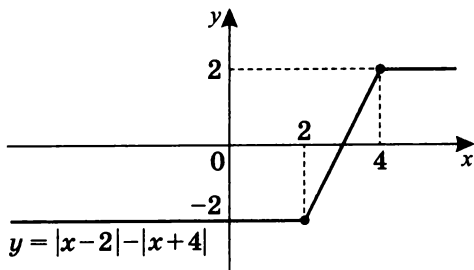
$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4; \\ 4 - x, & x < 4. \end{cases}$$



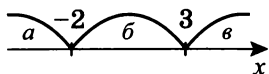
а) При  $x < 2$ :  $y = 2 - x + x - 4 = -2$ .

б) При  $2 \leq x < 4$ :  $y = x - 2 + x - 4 = 2x - 6$ .

в) При  $x \geq 4$ :  $y = x - 2 + 4 - x = 2$ .



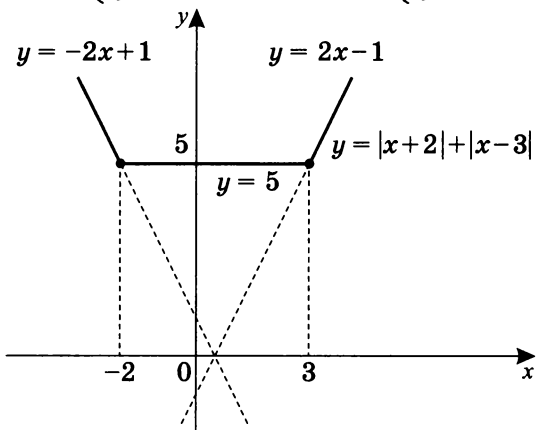
**Пример 8.** Постройте график функции  $y = |x + 2| + |x - 3|$ .



$$\text{а) } \begin{cases} x < -2 \\ y = -x - 2 - x + 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -2 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ y = x + 2 - x + 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2 \leq x < 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 3 \\ y = x + 2 + x - 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

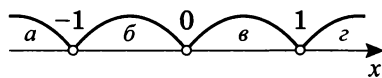
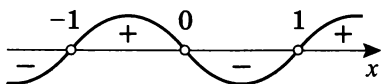


**Пример 9.** Постройте график функции  $y = \frac{|x^3 - x|}{x^2 - 1} + \frac{2(x^2 - x)}{|x|}$ .

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x - x^3, & x < -1 \\ x^3 - x, & -1 < x < 0 \\ x - x^3, & 0 < x < 1 \\ x^3 - x, & x > 1 \end{cases}; \quad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Пусть  $t(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$ .

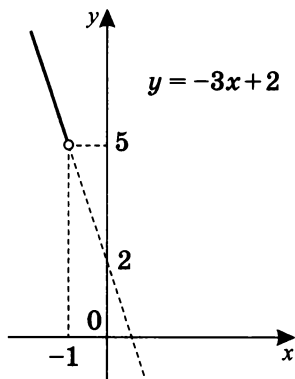
$$D(y): \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq 0 \end{cases};$$



(Здесь использован метод интервалов для решения неравенств.)

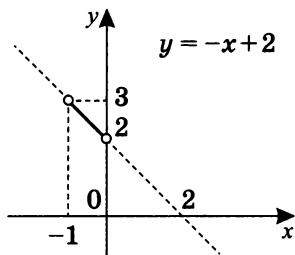
$$\text{а) } \begin{cases} x < -1 \\ y = -x - 2(x - 1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ y = -3x + 2 \end{cases}.$$



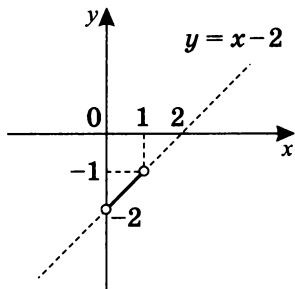
$$\text{б) } \begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = x - 2(x - 1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ y = -x + 2 \end{cases}.$$



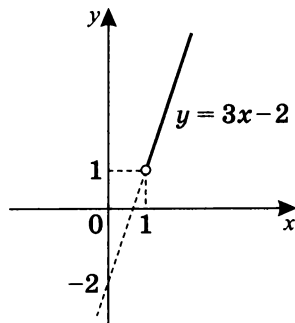
$$\text{в) } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ y = -x + 2(x - 1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y = x - 2 \end{cases}.$$

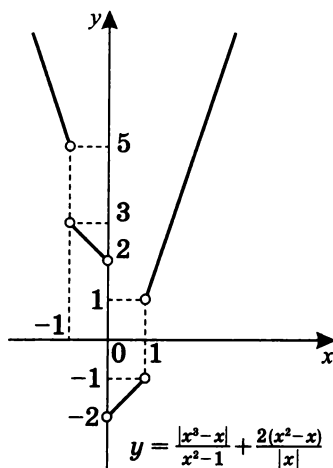


$$\text{г) } \begin{cases} x > 1 \\ y = x + 2(x - 1) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}.$$



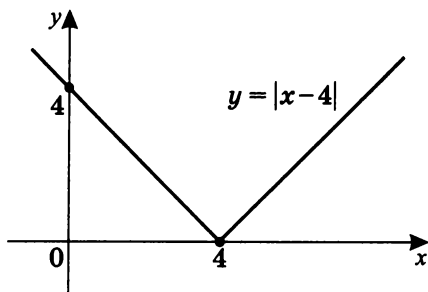
Значит, итоговый график будет выглядеть так.



**Пример 10.** Постройте график функции  $y = ||x - 4| - 2|$ .

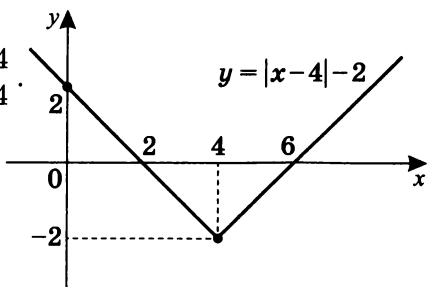
а)  $y = |x - 4|$ .

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4 \\ 4 - x, & x < 4 \end{cases}$$



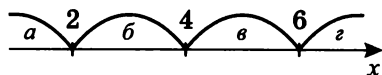
б)  $y = |x - 4| - 2$ .

$$|x - 4| - 2 = \begin{cases} x - 6, & x \geq 4 \\ 2 - x, & x < 4 \end{cases}$$

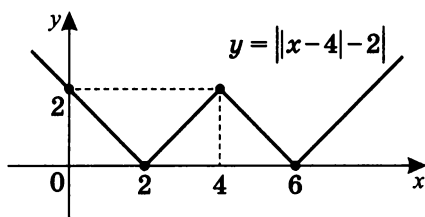


$$в) y = \left| |x - 4| - 2 \right|.$$

$$|x-4| = 2 \text{ при } \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}.$$



$$|x - 4| = \begin{cases} x - 6, & x \geq 6 \\ 6 - x, & 4 \leq x < 6 \\ x - 2, & 2 \leq x < 4 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}.$$



Далее подобные примеры будут более подробно разбираться в главе, посвященной построению графиков методом преобразований. См. А. Х. Шахмейстер «Построение, преобразования и исследование графиков. Параметры», часть II.

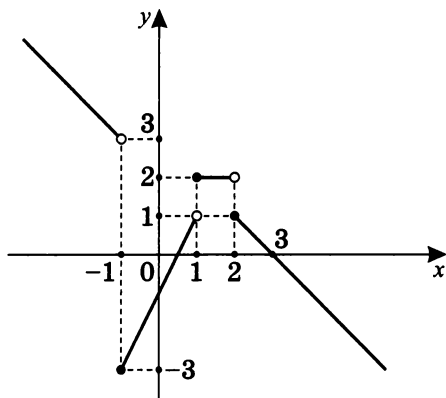
## Анализ и чтение графиков

### Примеры анализа и чтения графиков

В этом параграфе на примере ранее построенных в параграфе «Кусочно-линейные функции» графиков поучимся анализировать ряд интересных свойств и характеристик самой функции. Для этого используем наглядные графические образы.

**Пример 1.** Рассмотрим график функции

$$y = \begin{cases} 2 - x, & x < -1 \\ 2x - 1, & -1 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3 - x, & x \geq 2 \end{cases}$$



**Определение.** Если график функции можно начертить, не отрывая руки от чертежа, то такая функция называется непрерывной.

В данном случае мы имеем дело с разрывом графика функции в точках с абсциссами, равными  $-1$ ,  $1$  и  $2$ .

**Напомним наглядное правило:** если «идти» по графику функции слева направо (по стрелке направления оси  $Ox$ ), то если при этом мы поднимаемся вверх, то функция возрастающая, а если опускаемся вниз — убывающая (см. с. 9).

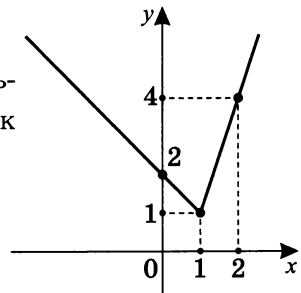
Внимательно читая чертеж слева направо по оси абсцисс, отметим, что:

- на  $(-\infty; -1)$  функция убывает;
- на  $[-1; 1)$  функция возрастает;
- на  $[1; 2)$  функция постоянна;
- на  $[2; +\infty)$  функция убывает.

При этом отметим, что:

- а) промежутки мы берем, исходя из условия задания функции;
- б) возрастающая или убывающая функция называется *монотонной* функцией;
- в) слова *возрастает* и *убывает* означают, что данное свойство выполняется только на конкретном промежутке или промежутках, но не характерно для данной функции на всей области определения (обратите внимание на окончания этих слов).

**Пример 2.**  $y = 2|x - 1| + x$ .

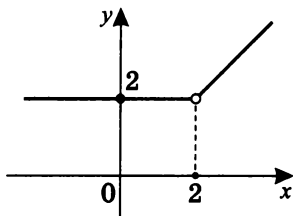


- а) Функция непрерывная — зрительно, графически видно, что график ее можно начертить, не отрывая руки от чертежа.
- б) На  $(-\infty; 1]$  функция убывает.  
На  $[1; +\infty)$  функция возрастает.
- в) Отметим, что зрительно вид графика напоминает ущелье, впадину, яму. В этом случае говорят о минимальном значении или о *минимуме* в точке с координатами  $(1; 1)$ . Обозначают это так:  $y_{\min} = 1$  или  $y(1) = y_{\min} = 1$ . При этом  $x = 1$  — абсцисса минимума,  $y = 1$  — минимум (или его значение).  
В школьной практике говорят, что  $x = 1$  — точка минимума, а  $y = 1$  — минимум функции.



**Пример 3.**  $y = \frac{x^2 - 2x}{|x - 2|} - \frac{2|x - 2|}{x - 2} + x.$

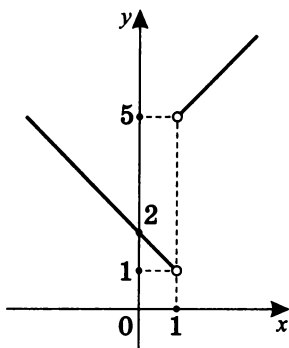
- а) В точке с координатами  $(2; 2)$  график функции прерывается, или, как иначе говорят, график функции терпит разрыв в точке с абсциссой  $x = 2$ .



- б) На  $(-\infty; 2)$  функция постоянна, на  $(2; +\infty)$  функция возрастает.
- в) Отметим, что зрительно по графику видно, что  $y = 2$  — *наименьшее* значение функции, то есть на графике функции нет точек, ординаты которых были бы меньше двух. Или: ординаты любых точек графика больше или равны двум, то есть  $y \geq 2$ .  
Пишут  $y_{\text{наим}} = 2$ .

**Пример 4.**  $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} + 3.$

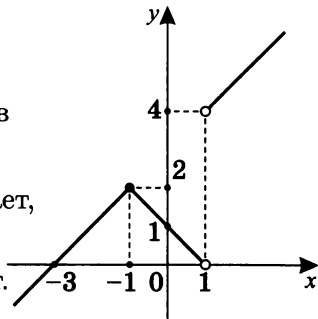
- а) График функции прерывается в точке с абсциссой  $x = 1$ .
- б) На  $(-\infty; 1)$  функция убывает, на  $(1; +\infty)$  функция возрастает.
- в) Отметим, что зрительно, графически видно, что функция не имеет наименьшего значения, то есть  $y > 1$ .



Или: ординаты любых точек графика функции строго больше единицы.

**Пример 5.**  $y = \frac{|x^2-1|}{x-1} + 2$ .

- а) График функции терпит разрыв в точке с абсциссой  $x = 1$ .
- б) На  $(-\infty; -1]$  функция возрастает, на  $[-1; 1)$  функция убывает, на  $(1; +\infty)$  функция возрастает.

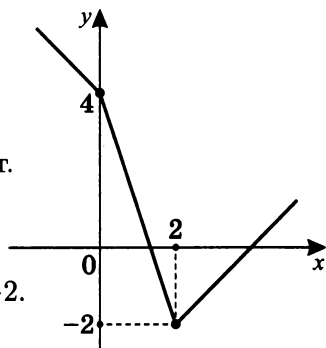


- в) Отметим, что зрительно, графически в точке с координатами  $(-1; 2)$  имеется *максимум* (похоже на вершину), причем  $x = -1$  — абсцисса максимума, а  $y = 2$  — значение в точке максимума, или просто максимум функции. Иногда говорят, что  $x = -1$  — точка максимума, а  $y = 2$  — максимум функции.

Записывают так:  $y_{\max} = 2$ , или  $y(-1) = y_{\max} = 2$ .

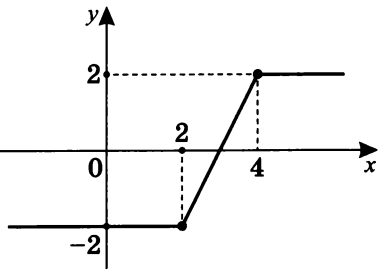
**Пример 6.**  $y = 2|x - 2| - |x|$ .

- а) Функция непрерывная.
- б) На  $(-\infty; 2]$  функция убывает, на  $[2; +\infty)$  функция возрастает.
- в) В точке с абсциссой  $x = 2$  существует минимум  $y_{\min} = -2$ , или  $y(2) = y_{\min} = -2$ .
- г)  $y = -2$  является в данном случае и наименьшим значением функции:  $y_{\text{наим}} = -2$ .



**Пример 7.**  $y = |x - 2| - |x - 4|$ .

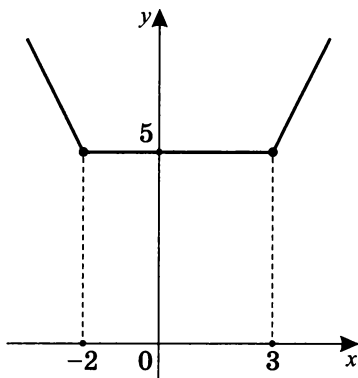
- а) Функция непрерывная.
- б) На  $(-\infty; 2]$  — постоянна, на  $[2; 4]$  — возрастает, на  $[4; +\infty)$  — постоянна.



- в)  $y = -2$  — наименьшее значение:  $y_{\text{наим}} = -2$ ;  
 $y = 2$  — наибольшее значение:  $y_{\text{наиб}} = 2$ .

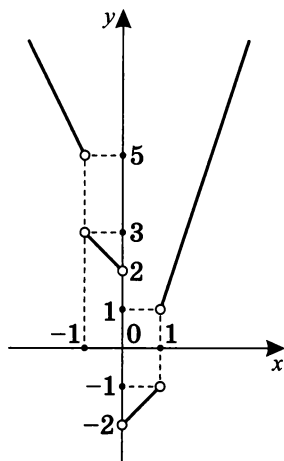
**Пример 8.**  $y = |x + 2| + |x - 3|$ .

- а) Функция непрерывная.  
 б) На  $(-\infty; -2]$  — убывает,  
 на  $[-2; 3]$  — постоянна,  
 на  $[3; +\infty)$  — возрастает.  
 в)  $y = 5$  — наименьшее значение функции:  $y_{\text{наим}} = 5$ .



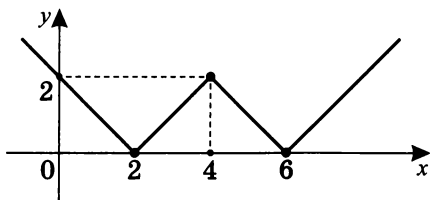
**Пример 9.**  $y = \frac{|x^3 - x|}{x^2 - 1} + \frac{2(x^2 - x)}{|x|}$ .

- а) График функции терпит разрыв в точках с абсциссами  $-1$ ,  $0$  и  $1$ .  
 б) На  $(-\infty; -1)$  — убывает,  
 на  $(-1; 0)$  — убывает,  
 на  $(0; 1)$  — возрастает,  
 на  $(1; +\infty)$  — возрастает.  
 в) Минимальных или максимальных значений нет.  
 г) Наибольшего или наименьшего значения нет.



**Пример 10.**  $y = \left| |x - 4| - 2 \right|$ .

- а) Функция непрерывная.  
 б) На  $(-\infty; 2]$  — убывает,  
 на  $[2; 4]$  — возрастает,  
 на  $[4; 6]$  — убывает,  
 на  $[6; +\infty)$  — возрастает.



в)  $x = 2$  — точка минимума  $y_{\min} = 0$ ,

т. е.  $y(2) = y_{\min} = 0$ ;

$x = 4$  — точка максимума  $y_{\max} = 2$ ,

т. е.  $y(4) = y_{\max} = 2$ ;

$x = 6$  — точка минимума  $y_{\min} = 0$ ,

т. е.  $y(6) = y_{\min} = 0$ .

Зрительно на графике две «ямы» и одна «вершина».

г)  $y = 0$  — наименьшее значение функции, т. е.  $y_{\text{наим}} = 0$ .

Наибольшего значения функции нет.

**Примечание.** Желаящим более углубленно и подробно разобраться с идеями, отраженными в данном практикуме, рекомендуем: А. Х. Шахмейстер. Введение в математический анализ. СПб., М., 2010. С. 22–25, 65, 238, 243.

## Тренировочная работа 2

Постройте графики функций и исследуйте на:

1. промежутки монотонности;
2. максимальные и минимальные значения;
3. наличие наибольшего и наименьшего значений;
4. промежутки знакопостоянства;
5. области определения и значений.

1.  $y = x - 2|x + 1|$ ;

2.  $y = \frac{x^2 - x - 2}{|x + 1|} + \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ ;

3.  $y = 2|x + 2| + |x - 1| + x$ ;

4.  $y = |2 - |x - 1|| + x - 2$ .

5. Постройте график уравнения  $|6x + 5y + 7| + |2x + 3y + 1| = 4$  и найдите площадь ограниченной им фигуры.

**Примечание.** Напомним, что:

- а) область определения функции есть множество всех значений  $x$ , для которых определено функциональное соответствие (обозначается  $D(f)$ );
- б) областью изменения или областью значения функции называется множество всех значений  $y$ , которые функция может принимать (обозначается  $E(f)$ ).

Более подробно см. А. Х. Шахмейстер. Множества. Функции. Последовательности. СПб., М., 2008, 2014. С. 85–92.

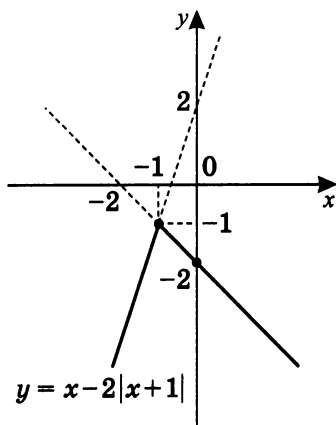
*Решение тренировочной работы 2*

1. Построим график функции  $y = x - 2|x + 1|$  и исследуем ее.

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & x \geq -1 \\ -x - 1, & x < -1 \end{cases}.$$

$$\text{а) } \begin{cases} x \geq -1 \\ y = x - 2x - 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ y = -x - 2 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x < -1 \\ y = x + 2x + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}.$$



1. На  $(-\infty; -1]$  функция возрастает;  
на  $[-1; +\infty)$  функция убывает.
2.  $y_{\max} = -1$  (при  $x = -1$ ).  
Минимального значения нет.
3. Наибольшее значение  $y_{\text{наиб}} = -1$ .  
Наименьшего значения нет.
4. Для всех  $x$   $y < 0$ .
5.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ;  $E(f) = (-\infty; -1]$ .

2. Построим график функции  $y = \frac{x^2-x-2}{|x+1|} + \frac{|x^2-1|}{x-1}$  и исследуем ее.

$$D(y): \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$t(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

Промежутки знакопостоянства функции  $t(x)$ :



$$\text{а) } \begin{cases} x < -1 \\ y = \frac{(x-2)(x+1)}{-(x+1)} + \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases};$$

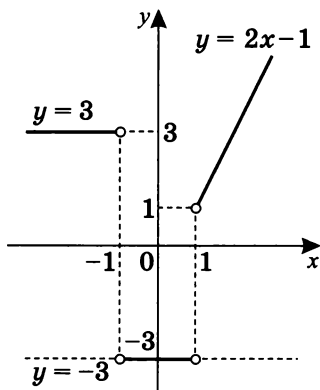
$$\begin{cases} x < -1 \\ y = -x + 2 - x + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} - \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = x - 2 - x - 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} x > 1 \\ y = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} + \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ y = x - 2 + x + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}.$$

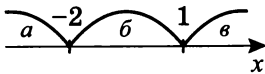


1. На  $(1; +\infty)$  функция возрастает.  
 На  $(-1; 1)$   $y = \text{const}$  (постоянная).  
 На  $(-\infty; -1)$   $y = \text{const}$  (постоянная).
2. Максимальных и минимальных значений нет.
3. Наименьшее значение  $y_{\min} = -3$ ;  
 наибольших значений нет.
4.  $y > 0$  на  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ;  
 $y < 0$  на  $(-1; 1)$ .
5.  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ ;  
 $E(f) = (1; +\infty) \cup \{-3\}$ .

3. Построим график функции  $y = 2|x + 2| + |x - 1| + x$  и исследуем ее.

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -x - 2, & x < -2 \end{cases};$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

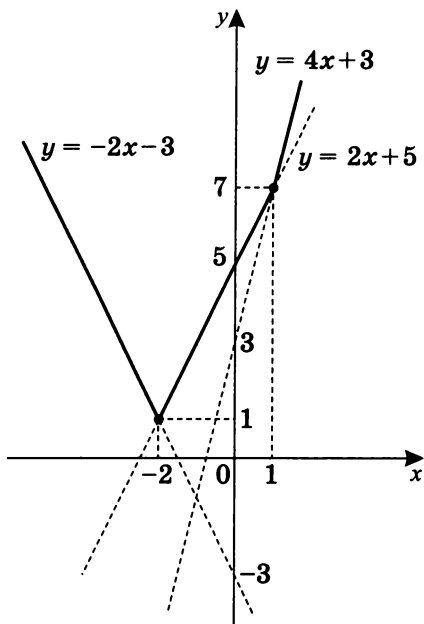


$$\text{а) } \begin{cases} x < -2 \\ y = 2(-x - 2) + 1 - x + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -2 \\ y = -2x - 3 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ y = 2x + 4 + 1 - x + x \end{cases}; \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 2x + 4 + x - 1 + x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 4x + 3 \end{cases}.$$





1. На  $(-\infty; -2]$  функция убывает;  
на  $[-2; +\infty)$  функция возрастает.
2.  $y_{\min} = 1$  (при  $x = -2$ ).  
Максимального значения нет.
3.  $y_{\max} = 7$ . Наибольшего значения нет.
4. При любых  $x$   $y > 0$ .
5.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ;  $E(f) = [1; +\infty)$ .

4. Построим график функции  $y = |2 - |x - 1|| + x - 2$  и исследуем ее.

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases},$$

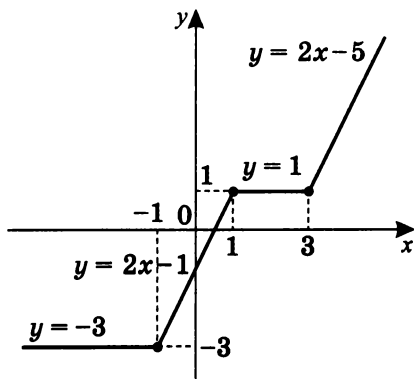
$$\text{тогда } y = \begin{cases} |3 - x| + x - 2, & x \geq 1 \\ |1 + x| + x - 2, & x < 1 \end{cases}.$$

$$y = |3 - x| + x - 2;$$

$$y = \begin{cases} x - 3 + x - 2, & x \geq 3 \\ 3 - x + x - 2, & 1 \leq x < 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 5, & x \geq 3 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \end{cases}.$$

$$y = |1 + x| + x - 2;$$

$$y = \begin{cases} x + 1 + x - 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x - 1 + x - 2, & x < -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ -3, & x < -1 \end{cases}.$$



1. На  $(-\infty; -1]$   $y = \text{const}$  — постоянна;  
на  $[-1; 1]$  функция возрастает;  
на  $[1; 3]$   $y = \text{const}$  — постоянна;  
на  $[3; +\infty)$  функция возрастает.
2. Минимальных и максимальных значений нет.
3.  $y_{\text{наим}} = -3$ . Наибольшего значения нет.
4.  $y \geq 0$  на  $[0,5; +\infty)$ ;  $y < 0$  на  $(-\infty; 0,5)$ .
5.  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ;  $E(f) = [-3; +\infty)$ .

5. Построим график уравнения  $|6x + 5y + 7| + |2x + 3y + 1| = 4$  и найдем площадь ограниченной им фигуры.

Конечно, можно раскрыть условия разветвления суммы модулей на четыре случая, или четыре уравнения:

$$|6x + 5y + 7| = \begin{cases} 6x + 5y + 7, & 6x + 5y + 7 \geq 0 \\ -(6x + 5y + 7), & 6x + 5y + 7 < 0 \end{cases};$$

$$|2x + 3y + 1| = \begin{cases} 2x + 3y + 1, & 2x + 3y + 1 \geq 0 \\ -(2x + 3y + 1), & 2x + 3y + 1 < 0 \end{cases}.$$

В данном случае мы просто выпишем четыре уравнения без исследования условий их существования:

а)  $6x + 5y + 7 + 2x + 3y + 1 = 4;$

$$8x + 8y + 8 = 4; \quad \boxed{y = -x - \frac{1}{2}}.$$

б)  $6x + 5y + 7 - 2x - 3y - 1 = 4;$

$$4x + 2y + 6 = 4; \quad \boxed{y = -2x - 1}.$$

в)  $-6x - 5y - 7 + 2x + 3y + 1 = 4;$

$$-4x - 2y - 6 = 4; \quad \boxed{y = -2x - 5}.$$

г)  $-6x - 5y - 7 - 2x - 3y - 1 = 4;$

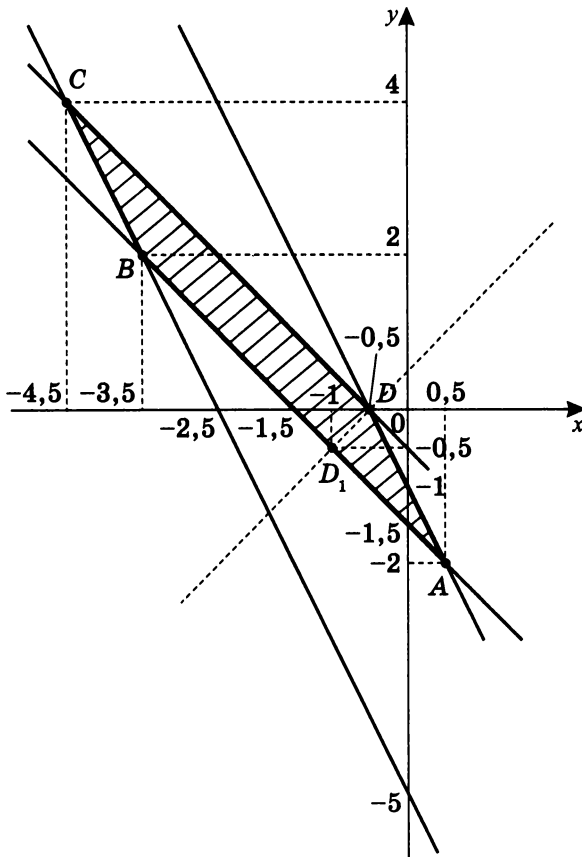
$$-8x - 8y - 8 = 4; \quad \boxed{y = -x - 1\frac{1}{2}}.$$

Построим на одном чертеже графики этих прямых и найдем их точки пересечения.

$$\begin{cases} y = -x - 0,5 \\ y = -2x - 1 \end{cases}; D(-0,5; 0). \quad \begin{cases} y = -x - 0,5 \\ y = -2x - 5 \end{cases}; C(-4,5; 4).$$

$$\begin{cases} y = -x - 1,5 \\ y = -2x - 1 \end{cases}; A(0,5; -2). \quad \begin{cases} y = -x - 1,5 \\ y = -2x - 5 \end{cases}; B(-3,5; 2).$$

Очевидно, что  $ABCD$  — параллелограмм (проверьте этот геометрический факт).



Найдем  $S_{ABCD}$ .

Так как для прямых  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  условием перпендикулярности является равенство  $k_1 \cdot k_2 = -1$ , то для  $y = -x - 0,5$  перпендикулярная прямая, проходящая через точку  $D$ , —  $y = x + 0,5$ .

Точка пересечения прямых  $y = x + 0,5$  и  $y = -x - 1,5$  — точка  $D_1$ :  $\begin{cases} y = x + 0,5 \\ y = -x - 1,5 \end{cases}$ ;  $D_1(-1; -0,5)$ .

$$DD_1 \perp AB; \quad DD_1 = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} = 0,5\sqrt{2}.$$

$$DC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

$$S_{ABCD} = DD_1 \cdot DC; \quad S_{ABCD} = 0,5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = \boxed{4}.$$

**Примечание.** Рассмотрим более подробно пункт а).

Решая систему неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} 6x + 5y + 7 \geq 0 \\ 2x + 3y + 1 \geq 0 \end{cases}, \text{ можно убедиться, что отрезок } CD \text{ при-}$$

надлежит области решения системы неравенств, причем точка  $C$  — пересечение графиков  $6x + 5y + 7 = 0$  и  $y = -x - 0,5$ , а точка  $D$  — пересечение графиков  $2x + 3y + 1 = 0$  и  $y = -x - 0,5$ .

Действительно, при  $\begin{cases} 6x + 5y + 7 \geq 0 \\ 2x + 3y + 1 \geq 0 \end{cases}$

уравнение  $|6x + 5x + 7| + |2x + 3y + 1| = 4$  после раскрытия модулей преобразуется в уравнение  $y = -x - 0,5$ .

Решая систему уравнений  $\begin{cases} 6x + 5y + 7 = 0 \\ y = -x - 0,5 \end{cases}$ , получим

$$\begin{cases} x = -4,5 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ т. е. координаты } C(-4,5; 4).$$

Аналогично, решая систему  $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ y = -x - 0,5 \end{cases}$ , получим

$$\begin{cases} x = -0,5 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ т. е. координаты } D(-0,5; 0).$$

Значит, отрезок  $DC$  принадлежит области (части плоскости),

заданной системой неравенств  $\begin{cases} 6x + 5y + 7 \geq 0 \\ 2x + 3y + 1 \geq 0 \end{cases}$ .

Аналогично раскрываются модули уравнения при соответствующих условиях в других пунктах: отрезок  $AD$  в пункте б), отрезок  $BC$  в пункте в) и отрезок  $AB$  в пункте г) принадлежат соответствующим условиям раскрытия модулей (а значит, соответствующим областям плоскости).

**Тренировочная работа 3****Вариант I**

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами:
  - а)  $A(-2; -1)$ ,  $B(2; 1)$ ;
  - б)  $A(-3; 4)$ ,  $B(3; -5)$ ;
  - в)  $A(0; 2)$ ,  $B(4; 2)$ ;
  - г)  $A(-1; 2)$ ,  $B(-1; 3)$ .
2. Постройте прямую по заданному уравнению:
  - а)  $y = 3x - 2$ ;
  - б)  $3y + 5x = 3$ ;
  - в)  $l: y = -2x + b$ , если  $A(1; 3) \in l$ ;
  - г)  $l: y = kx + 3$ , если  $l \parallel l_1$ , где  $l_1: y = 2x - 1$ ;
  - д)  $l: y = kx + b$ , если  $A(-1; 1) \in l$  и  $l \parallel l_1$ , где  $l_1: y = 2x - 5$ .
3. Постройте прямые:
  - а)  $\left. \begin{array}{l} l_1: y = -x + b \\ l_2: y = kx - 2 \end{array} \right\}$ , если  $l_1 \cap l_2 = A(2; -1)$ ;
  - б)  $x^2 - 9 = 0$ ;
  - в)  $y^2 - 1 = 0$ ;
  - г)  $(x - 1)(y + 2) = 0$ .
4. Постройте график уравнения:
  - а)  $\frac{x-2}{y+1} = 0$ ;
  - б)  $\frac{y^2-4}{x-1} = 0$ ;
  - в)  $\frac{y-2x-1}{x^2-2x} = 0$ ;
  - г)  $\frac{y^2+y}{y+x-2} = 0$ ;
  - д)  $\frac{3x+2y+1}{y-x+4} = 0$ .
5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами:
  - а)  $A(1982; 3211)$ ;  $B(2112; 3146)$ ;  $C(2238; 3083)$ ;
  - б)  $A(9; 24)$ ;  $B(17; 40)$ ;  $C(23; 62)$ ?
6. При каких значениях параметра  $a$  данное уравнение  $(a^2 - 1)y + (a^2 + 6a + 5)x + 2(a^2 + 3a + 2) = 0$ :
  - а) определяет биссектрису I и III координатных углов;
  - б) описывает прямую, параллельную оси ординат;
  - в) задает прямую, параллельную оси абсцисс;
  - г) не является уравнением прямой?

## Вариант II

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами:

а)  $A(-1; -2)$ ,  $B(1; 2)$ ;      б)  $A(-4; 3)$ ,  $B(4; -5)$ ;

в)  $A(0; -2)$ ,  $B(-4; -2)$ ;      г)  $A(2; -1)$ ,  $B(2; -3)$ .

2. Постройте прямую по заданному уравнению:

а)  $y = 2x + 3$ ;      б)  $2y + 5x + 2 = 0$ ;

в)  $l: y = kx - 1$ , если  $l \parallel l_1$ , где  $l_1: y = -3x + 5$ ;

г)  $l: y = -3x + b$ , если  $A(0; -3) \in l$ ;

д)  $l: y = kx + b$ , если  $A(1; -1) \in l$  и  $l \parallel l_1$ ,  
где  $l_1: y = -3x + 1$ .

3. Постройте прямые:

а)  $\left. \begin{array}{l} l_1: y = 2x + b \\ l_2: y = kx + 3 \end{array} \right\}$ , если  $l_1 \cap l_2 = A(-1; 2)$ ;

б)  $y^2 - 9 = 0$ ;      в)  $x^2 - 4 = 0$ ;      г)  $(x + 1)(y - 2) = 0$ .

4. Постройте график уравнения:

а)  $\frac{y-1}{x+2} = 0$ ;      б)  $\frac{x^2-1}{y-2} = 0$ ;      в)  $\frac{y+x+3}{y^2+2y} = 0$ ;

г)  $\frac{x^2+x}{y-x+2} = 0$ ;      д)  $\frac{y+x+4}{3x-2y+2} = 0$ .

5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами:

а)  $A(289; 112)$ ;  $B(211; 641)$ ;  $C(432; 380)$ ;

б)  $A(19; 34)$ ;  $B(27; 50)$ ;  $C(43; 82)$ ?

6. При каких значениях параметра  $a$  данное уравнение  $(a^2 - 4)x + (a^2 - 2a - 8)y + 3(a^2 - a - 6) = 0$ :

а) определяет биссектрису I и III координатных углов;

б) описывает прямую, параллельную оси ординат;

в) задает прямую, параллельную оси абсцисс;

г) не является уравнением прямой?

**Решение тренировочной работы 3****Вариант I**

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами.

а)  $A(-2; -1), B(2; 1)$ .

Так как точки  $A$  и  $B$  имеют различные абсциссы, то прямая  $AB \nparallel Oy$ .

Значит работает формула  $y = kx + b$ , описывающая такое уравнение. Тогда:

$$\left. \begin{array}{l} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ B \in \Gamma(y = kx + b) \end{array} \right\}; \quad \begin{cases} -1 = -2k + b & \text{II} - \text{I} \\ 1 = 2k + b & \text{II} + \text{I} \end{cases};$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}, \text{ т. е. } \boxed{y = \frac{1}{2}x}.$$

б)  $A(-3; 4), B(3; -5)$ .

$$\left. \begin{array}{l} A \in \Gamma(y = kx + b) \\ B \in \Gamma(y = kx + b) \end{array} \right\}; \quad \begin{cases} 4 = -3k + b & \text{I} + \text{II} \\ -5 = 3k + b & \text{II} - \text{I} \end{cases};$$

$$\begin{cases} b = -0,5 \\ k = -1,5 \end{cases}, \text{ т. е. } \boxed{y = -1,5x - 0,5}.$$

в)  $A(0; 2), B(4; 2)$ .

Так как ординаты двух точек равны, то прямая параллельна оси абсцисс. Значит  $\boxed{y = 2}$  — уравнение прямой, которой принадлежат эти точки  $A$  и  $B$ .

г)  $A(-1; 2), B(-1; 3)$ .

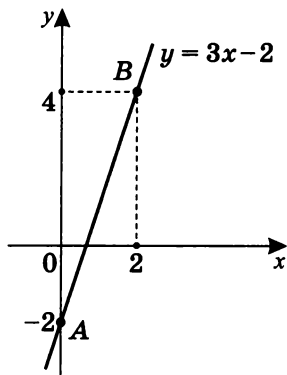
Так как абсциссы точек  $A$  и  $B$  равны, то прямая, которой принадлежат точки  $A$  и  $B$ , параллельна оси  $Oy$ , т. е.  $\boxed{x = -1}$  — искомое уравнение прямой.



2. Постройте прямую по заданному уравнению:

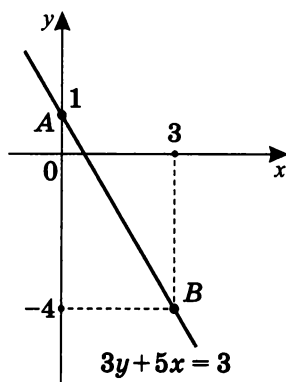
а)  $y = 3x - 2$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-2	$A(0; -2)$
2	4	$B(2; 4)$



б)  $3y + 5x = 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	1	$A(0; 1)$
3	-4	$B(3; -4)$



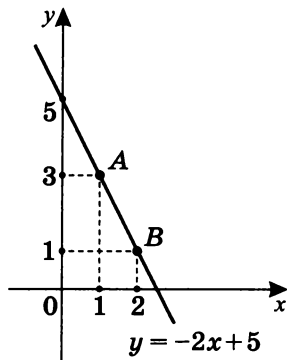
в)  $l: y = -2x + b$ , если  $A(1; 3) \in l$ .

$A \in \Gamma(y = -2x + b)$ , т. е.  $3 = -2 + b$ ;  $b = 5$ .

Тогда  $y = -2x + 5$  —  
уравнение искомой прямой.

Построим ее:

$x$	$y$	Координаты точек
1	3	$A(1; 3)$
2	1	$B(2; 1)$



г)  $y = kx + 3$ , если  $l \parallel l_1$ , где  $l_1: y = 2x - 1$ .

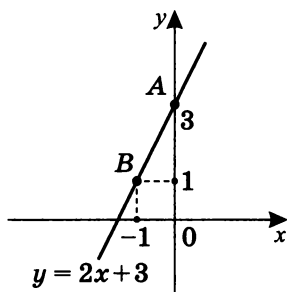
Так как  $l_1 \parallel l$ , то  $k = 2$ .

Значит  $l: y = 2x + 3$  —

уравнение искомой прямой.

Построим ее:

$x$	$y$	Координаты точек
0	3	$A(0; 3)$
-1	1	$B(-1; 1)$



д)  $l: y = kx + b$ , если  $A(-1; 1) \in l$  и  $l \parallel l_1$ ,

где  $l_1: y = 2x - 5$ .

Так как  $A(-1; 1) \in \Gamma(y = kx + b)$ ,

то  $1 = -k + b$ ;  $k = b - 1$ .

Значит  $l: y = (b - 1)x + b$ .

Учитывая, что  $l \parallel l_1$ , где  $l_1: y = 2x - 5$ ,

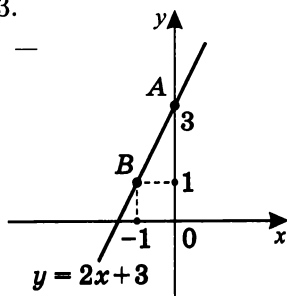
получим, что  $b - 1 = 2$ ;  $b = 3$ .

Таким образом,  $l: y = 2x + 3$  —

уравнение искомой прямой.

Построим ее:

$x$	$y$	Координаты точек
0	3	$A(0; 3)$
-1	1	$B(-1; 1)$



### 3. Постройте прямые:

а)  $\left. \begin{array}{l} l_1: y = -x + b \\ l_2: y = kx - 2 \end{array} \right\}$ , если  $l_1 \cap l_2 = A(2; -1)$ .

$A \in \Gamma(y = -x + b)$ ;  $-1 = -2 + b$ ;  $b = 1$ ,

т. е.  $l_1: y = -x + 1$ .

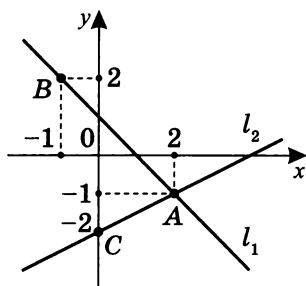
$A \in \Gamma(y = kx - 2)$ ;  $-1 = 2k - 2$ ;  $k = \frac{1}{2}$ ,

т. е.  $l_2: y = \frac{1}{2}x - 2$ .

Тогда

$x$	$y$	Координаты точек
2	-1	$A(2; -1)$
-1	2	$B(-1; 2)$

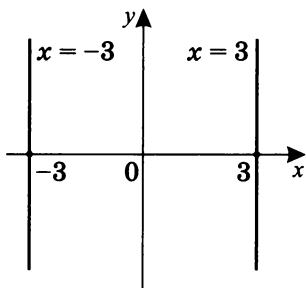
$x$	$y$	Координаты точек
2	-1	$A(2; -1)$
0	-2	$C(0; -2)$



б)  $x^2 - 9 = 0$ .

$(x - 3)(x + 3) = 0;$

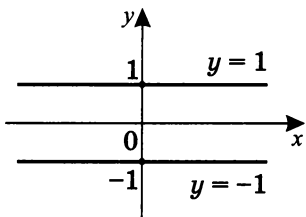
$\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$  — это уравнения  
прямых, параллельных оси  
ординат.



в)  $y^2 - 1 = 0$ .

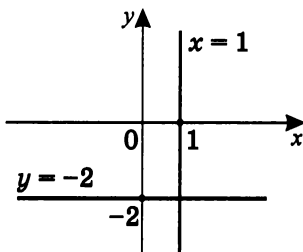
$(y - 1)(y + 1) = 0;$

$\begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$  — это уравнения  
прямых, параллельных оси  
абсцисс.



г)  $(x - 1)(y + 2) = 0$ .

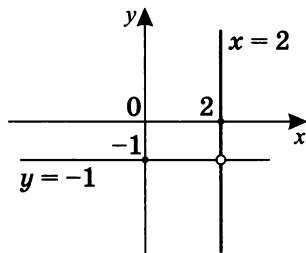
$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 1 & \text{— прямая, параллельная } Oy \\ y = -2 & \text{— прямая, параллельная } Ox \end{cases}$



## 4. Постройте график уравнения:

а)  $\frac{x-2}{y+1} = 0$ .

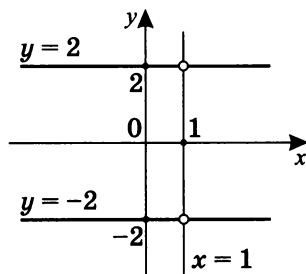
$$\begin{cases} x = 2 \\ y \neq -1 \end{cases}$$



б)  $\frac{y^2-4}{x-1} = 0$ .

$$\begin{cases} y^2 - 4 = 0; \\ x - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} [ y = 2 \\ y = -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



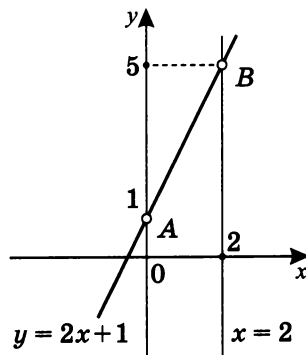
в)  $\frac{y-2x-1}{x^2-2x} = 0$ .

$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0; \\ x^2 - 2x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x(x - 2) \neq 0; \end{cases}$$

$$y = 2x + 1.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	1	$A(0; 1)$
2	5	$B(2; 5)$



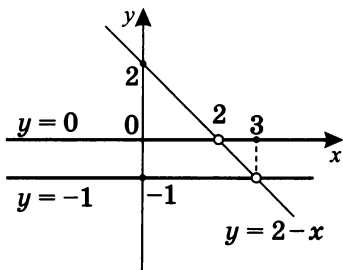
г)  $\frac{y^2+y}{y+x-2} = 0$ .

$$\begin{cases} y^2 + y = 0 \\ y + x - 2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y(y + 1) = 0; \\ y \neq 2 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} [ y = 0 \\ y = -1 \\ y \neq 2 - x \end{cases}$$

$$y = 2 - x.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	2	$A(0; 2)$
2	0	$B(2; 0)$



д)  $\frac{3x+2y+1}{y-x+4} = 0.$

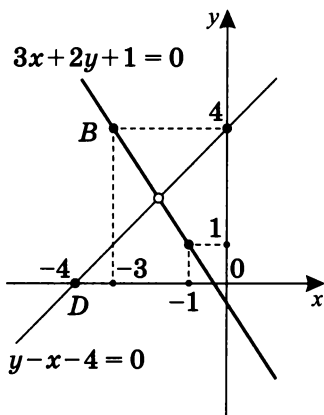
$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0; \\ y - x - 4 \neq 0 \end{cases};$$

$$3x + 2y + 1 = 0;$$

$x$	$y$	Координаты точек
-1	1	$A(-1; 1)$
-3	4	$B(-3; 4)$

$$y - x - 4 = 0;$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	4	$C(0; 4)$
-4	0	$D(-4; 0)$

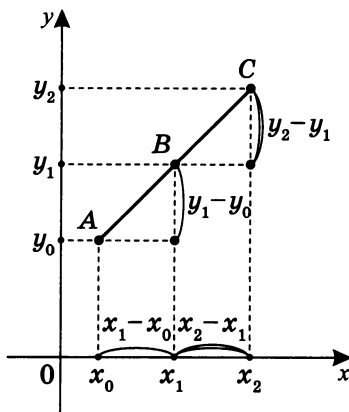


5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами?

Так как в обоих случаях координаты точек выходят за рамки обозримого поля, рассмотрим решение, не связанное с прямым вычислением параметров  $k$  и  $b$  в уравнении  $y = kx + b$ .

Так как для прямой  $AB$   $k_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ , а для прямой  $BC$   $k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , то если  $k_{AB} = k_{BC}$ , то прямые  $AB$  и  $BC$  совпадают. Тогда существует прямая, которой принадлежат точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Если же  $k_{AB} \neq k_{BC}$ , то такой прямой нет.



а) Даны точки:

$A(1982; 3211)$ ;  $B(2112; 3146)$ ;  $C(2238; 3083)$ .

$$k_{AB} = \frac{3146 - 3211}{2112 - 1982} = \frac{-65}{130} = -\frac{1}{2};$$

$$k_{BC} = \frac{3083 - 3146}{2238 - 2112} = \frac{-63}{126} = -\frac{1}{2}.$$

Значит  $k_{AB} = k_{BC}$ , т. е. все три точки принадлежат одной прямой.

б) Даны точки:

$A(9; 24)$ ;  $B(17; 40)$ ;  $C(23; 62)$ .

$$k_{AB} = \frac{40 - 24}{17 - 9} = \frac{16}{8} = 2;$$

$$k_{AC} = \frac{62 - 24}{23 - 9} = \frac{38}{14} = \frac{19}{7} \approx 2.71.$$

Значит  $k_{AB} \neq k_{AC}$ , т. е. не существует прямой, которой одновременно принадлежат все три точки.

6. а) Для того, чтобы уравнение

$$(a^2 - 1)y + (a^2 + 6a + 5)x + 2(a^2 + 3a + 2) = 0$$

являлось уравнением биссектрисы I и III координатных углов, необходимо, чтобы свободный член уравнения был равен нулю.

$$2(a^2 + 3a + 2) = 0; \quad (a + 1)(a + 2) = 0; \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

1. Пусть  $a = -1$ , тогда:

коэффициент при  $y$  равен

$$(a^2 - 1) = (a - 1)(a + 1) = 0;$$

коэффициент при  $x$  равен

$$a^2 + 6a + 5 = (a + 1)(a + 5) = 0.$$

Следовательно, при  $a = -1$  исходное уравнение принимает вид  $0 \cdot y + 0 \cdot x + 2 \cdot 0 = 0$ , т. е.  $0 = 0$ .

Очевидно, что это тождество для любых значений  $x$  и  $y$ .

Значит, оно описывает множество всех точек плоскости, а не прямую.

2. Пусть  $a = -2$ , тогда  $a \neq -1$ , и исходное уравнение можно сократить на  $a + 1$ , получим:

$$(a - 1)y + (a + 5)x + 2(a + 2) = 0.$$

При  $a = -2$ :  $(-2 - 1)y + (-2 + 5)x + 2 \cdot 0 = 0$ ;

$y = x$  — биссектриса I и III координатных углов.

б) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси ординат, необходимо, чтобы коэффициент при  $y$  после упрощения уравнения был равен нулю.

$$(a - 1)y + (a + 5)x + 2(a + 2) = 0 - (a - 1) = 0; \quad a = 1.$$

Тогда при подстановке в уравнение получим

$0 \cdot y + 6 \cdot x + 6 = 0$ , т. е.  $x = -1$  — уравнение прямой, параллельной оси ординат.

в) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси абсцисс, необходимо, чтобы коэффициент при  $x$  после упрощения уравнения был равен нулю.

$$(a - 1)y + (a + 5)x + 2(a + 2) = 0; \quad a + 5 = 0; \quad a = -5.$$

Тогда при подстановке в уравнение получим

$$(-5 - 1)y + (-5 + 5)x + 2(-5 + 2) = 0;$$

$-6y + 0 \cdot x - 6 = 0$ ;  $y = -6$  — уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

г) Уравнение  $my + nx + p = 0$  описывает любую прямую при условии, что  $m^2 + n^2 \neq 0$ .

В исходном уравнении при  $a = -1$

$$m = a^2 - 1 = 0 \text{ и } n = a^2 + 6a + 5 = 0,$$

т. е. условие того что  $m^2 + n^2 \neq 0$  не выполняется.

Значит исходное уравнение при  $a = -1$  не является уравнением, описывающим какую-либо прямую.



## Вариант II

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами:

а)  $A(-1; -2)$ ,  $B(1; 2)$ .

$$\begin{cases} A(-1; -2) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(1; 2) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2 = -k + b & \text{I} + \text{II} \\ 2 = k + b & \text{I} - \text{II} \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 0 \\ k = 2 \end{cases}; \quad \boxed{y = 2x}.$$

б)  $A(-4; 3)$ ,  $B(4; -5)$ .

$$\begin{cases} A(-4; 3) \in \Gamma(y = kx + b) \\ B(4; -5) \in \Gamma(y = kx + b) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3 = -4k + b & \text{I} + \text{II} \\ -5 = 4k + b & \text{I} - \text{II} \end{cases}; \quad \begin{cases} b = -1 \\ k = -1 \end{cases}; \quad \boxed{y = -x - 1}.$$

в)  $A(0; -2)$ ,  $B(-4; -2)$ .

Так как ординаты точек равны, а абсциссы нет, то исконая прямая  $AB \parallel Ox$ . Значит  $\boxed{y = -2}$  — уравнение прямой  $AB$ .

г)  $A(2; -1)$ ,  $B(2; -3)$ .

Так как абсциссы точек равны, а ординаты нет, то прямая  $AB \parallel Oy$ . Значит  $\boxed{x = 2}$  — уравнение прямой  $AB$ .

**Примечание.** Для таких прямых уравнение, которое их задает, имеет вид  $mx + ny + p = 0$ . В случае г):

$$\begin{cases} A(2; -1) \in \Gamma(mx + ny + p = 0) \\ B(2; -3) \in \Gamma(mx + ny + p = 0) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2m - y + p = 0 & \text{I} - \text{II} \\ 2m - 3y + p = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2y = 0 \\ 2m = -p \end{cases}.$$

Тогда уравнение  $mx + ny + p = 0$  примет вид  $mx + n \cdot 0 - 2m = 0$ ;  $mx - 2m = 0$ .

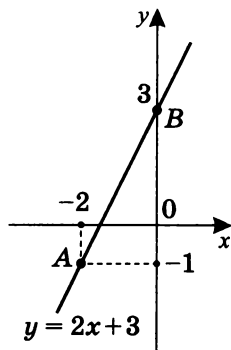
Так как  $m \neq 0$ , то можно сократить на  $m$ :  $\boxed{x = 2}$ .

Итак, вопрос можно решать аналитически без геометрических образов прямых, хотя образное представление интуитивно понятнее.

## 2. Постройте прямую по заданному уравнению:

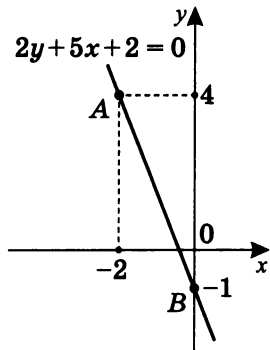
а)  $y = 2x + 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	3	$A(0; 3)$
-2	-1	$B(-2; -1)$



б)  $2y + 5x + 2 = 0$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-1	$A(0; -1)$
-2	4	$B(-2; 4)$

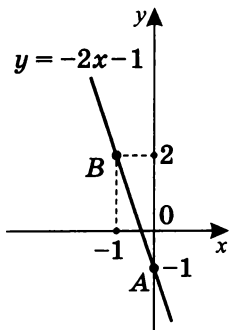


в)  $l: y = kx - 1$ , если  $l \parallel l_1$ , где  $l_1: y = -3x + 5$ .

Так как  $l \parallel l_1$ , то  $k = -3$ ,

тогда  $l: y = -3x - 1$ .

$x$	$y$	Координаты точек
0	-1	$A(0; -1)$
-1	2	$B(-1; 2)$

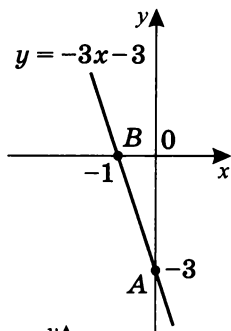


г)  $l: y = -3x + b$ , если  $A(0; -3) \in l$ .

$$-3 = -3 \cdot 0 + b; \quad b = -3,$$

значит  $l: y = -3x - 3$ ;

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A(0; -3)$
-1	0	$B(-1; 0)$



д)  $l: y = kx + b$ , если

$A(1; -1) \in l$  и  $l \parallel l_1$ ,

где  $l_1: y = -3x + 1$ .

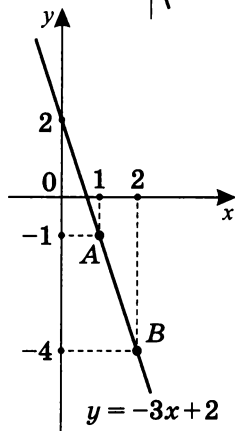
Так как  $l \parallel l_1$ , то  $k = -3$ ,

т.е.  $y = -3x + b$ .

Так как  $A \in l$ , то  $-1 = -3 + b$ ,

т.е.  $b = 2$ .

Значит  $l: y = -3x + 2$ .



### 3. Постройте прямые:

а)  $\left. \begin{array}{l} l_1: y = 2x + b \\ l_2: y = kx + 3 \end{array} \right\}$ , если  $l_1 \cap l_2 = A(-1; 2)$ .

Так как  $A(-1; 2) \in l_1$  и  $A(-1; 2) \in l_2$ , то

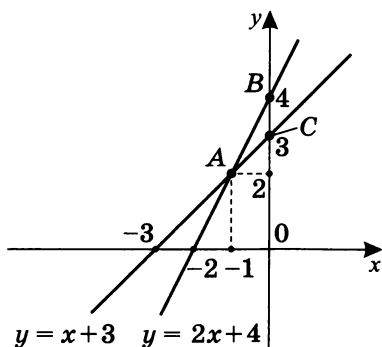
$$\begin{cases} 2 = -2 + b \\ 2 = -k + 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} b = 4 \\ k = 1 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} l_1: y = 2x + 4 \\ l_2: y = x + 3 \end{cases}.$$

$l_1: y = 2x + 4$ .

$x$	$y$	Координаты точек
-1	2	$A(-1; 2)$
0	4	$B(0; 4)$

$l_2: y = x + 3$ .

$x$	$y$	Координаты точек
-1	2	$A(-1; 2)$
0	3	$C(0; 3)$

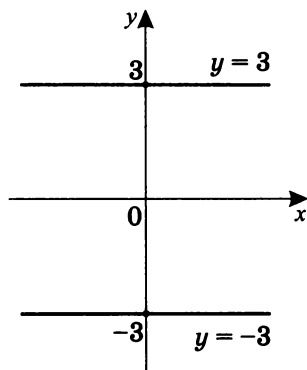


б)  $y^2 - 9 = 0.$

$$(y - 3)(y + 3) = 0;$$

$$\begin{cases} y - 3 = 0; \\ y + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}.$$

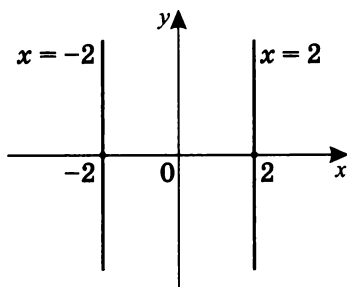


в)  $x^2 - 4 = 0.$

$$(x - 2)(x + 2) = 0;$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0; \\ x + 2 = 0; \end{cases}$$

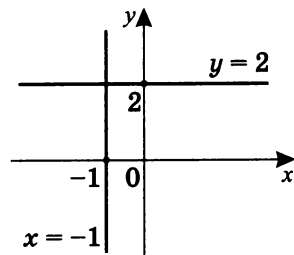
$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$



г)  $(x + 1)(y - 2) = 0.$

$$\begin{cases} x + 1 = 0; \\ y - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

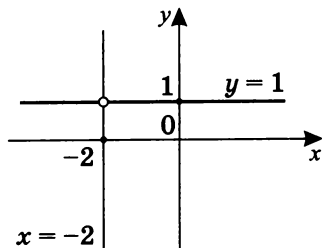


4. Постройте график уравнения:

а)  $\frac{y-1}{x+2} = 0.$

$$\begin{cases} y - 1 = 0; \\ x + 2 \neq 0; \end{cases}$$

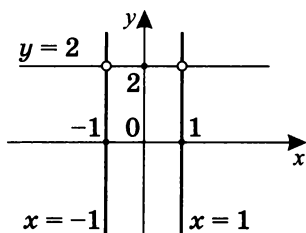
$$\begin{cases} y = 1 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$



$$б) \frac{x^2-1}{y-2} = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0; \\ y - 2 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

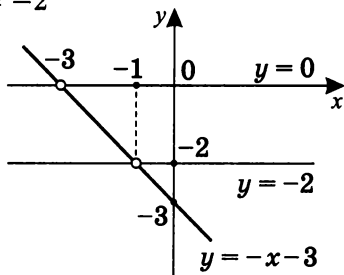


$$в) \frac{y+x+3}{y^2+2y} = 0.$$

$$\begin{cases} y + x + 3 = 0; \\ y^2 + 2y \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x - 3 \\ y \neq 0 \\ y \neq -2 \end{cases}$$

$$y = -x - 3.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	-3	$A(0; -3)$
-3	0	$B(-3; 0)$



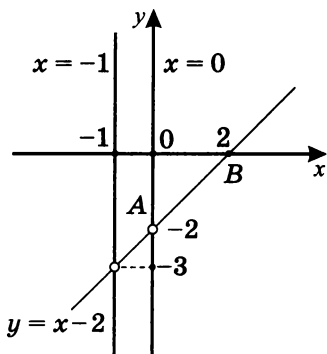
$$г) \frac{x^2+x}{y-x+2} = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ y - x + 2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ y \neq x - 2 \end{cases}$$

$$y = x - 2.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	-2	$A(0; -2)$
2	0	$B(2; 0)$

Исключим все точки  
прямой  $y = x - 2$ .



$$д) \frac{y+x+4}{3x-2y+2} = 0.$$

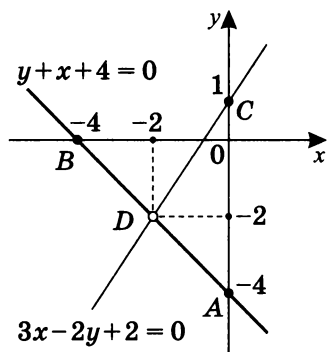
$$\begin{cases} y+x+4=0 \\ 3x-2y+2 \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-x-4 \\ 3x-2y+2 \neq 0 \end{cases};$$

$$y+x+4=0.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	-4	$A(0; -4)$
-4	0	$B(-4; 0)$

$$3x-2y+2=0.$$

$x$	$y$	Координаты точек
0	1	$C(0; 1)$
-2	-2	$D(-2; -2)$



5. Существует ли прямая, которой одновременно принадлежат три точки с данными координатами?

а) Даны точки:

$$A(289; 112); \quad B(211; 641); \quad C(432; 380).$$

$$k_{AB} = \frac{641-112}{211-289} = \frac{529}{-78};$$

$$k_{BC} = \frac{380-641}{432-211} = \frac{-261}{221}.$$

Значит  $k_{AB} \neq k_{BC}$ , и не существует такой прямой.

б) Даны точки:

$$A(19; 34); \quad B(27; 50); \quad C(43; 82).$$

$$k_{AB} = \frac{50-34}{27-19} = \frac{16}{8} = 2;$$

$$k_{BC} = \frac{82-50}{43-27} = \frac{32}{16} = 2.$$

Значит  $k_{AB} = k_{BC}$ , и такая прямая существует.

6. а) Для того, чтобы уравнение

$$(a^2 - 4)x + (a^2 - 2a - 8)y + 3(a^2 - a - 6) = 0$$

определяло биссектрису I и III координатных углов, необходимо, чтобы свободный член уравнения был

равен нулю, т. е.  $3(a^2 - a - 6) = 0$ ;  $\begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$ .

1. Пусть  $a = -2$ , тогда:

коэффициент при  $x$  равен

$$a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2) = 0;$$

коэффициент при  $y$  равен

$$a^2 - 2x - 8 = (a - 4)(a + 2) = 0,$$

и исходное уравнение

$$(a - 2)(a + 2)x + (a - 4)(a + 2)y + 3(a - 3)(a + 2) = 0$$

при  $a = -2$  принимает вид

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 3 \cdot 0 = 0; \quad 0 = 0.$$

Очевидно, что это тождество для любых значений  $x$  и  $y$ .

Значит оно описывает множество всех точек плоскости, а не прямую.

2. Пусть  $a = 3$ . Тогда  $a \neq -2$ , и исходное уравнение можно сократить на  $(a + 2)$ .

Получим уравнение

$$(a - 2)x + (a - 4)y + 3(a - 3) = 0.$$

При  $a = 3$  уравнение выглядит так:

$$(3 - 2)x + (3 - 4)y + 3 \cdot 0 = 0; \quad y = x - \text{биссектриса}$$

I и III координатных углов.

б) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси ординат, необходимо, чтобы коэффициент при  $y$  после упрощения уравнения был равен нулю.

Уравнение таково:  $(a - 2)x + (a - 4)y + 3(a - 3) = 0$ ,

значит нужно, чтобы  $a - 4 = 0$ ;  $\boxed{a = 4}$ .

При подстановке в уравнение получим:

$(4 - 2)x + 0 \cdot y + 3(4 - 3) = 0$ ;  $x = 1,5$  — уравнение прямой, параллельной оси ординат.

- в) Для того чтобы уравнение описывало прямую, параллельную оси абсцисс, необходимо, чтобы коэффициент при  $x$  после упрощения уравнения был равен нулю.

$$(a - 2)x + (a - 4)y + 3(a - 3) = 0; \quad a - 2 = 0; \quad \boxed{a = 2}.$$

При подстановке в уравнение получим:

$$(2 - 2)x + (2 - 4)y + 3(2 - 3) = 0;$$

$0 \cdot x - 2y - 3 = 0$ ;  $y = 1,5$  — уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

- г) Уравнение  $my + nx + p = 0$  описывает любую прямую при  $m^2 + n^2 \neq 0$ .

Исследуя данное уравнение при  $a = -2$ , получаем

$$(0 \cdot (-4))^2 + ((-2 - 4) \cdot 0)^2 = 0.$$

Значит условие не выполняется, т. е. исходное уравнение не является уравнением прямой.



# 2

## Графики и параметры

### Практикум 3 (Графики и параметры)

1. Сколько корней имеет уравнение  $ax + 1 = |x - 2|$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?
2. Сколько корней имеет уравнение  $x + 2 = k|x - 1|$  в зависимости от значения параметра  $k$ ?
3. Сколько корней имеет уравнение  $|x - 3| + |x + 1| = ax + 3$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?
4. Сколько корней имеет уравнение  $2|x + 1| + |x - 3| = a|x| + 3$  в зависимости от положительного значения параметра  $a$ ?
5. Сколько решений имеет система уравнений 
$$\begin{cases} 2y = (1 - x) \cdot |y| \\ y = |x| + a \end{cases}$$
 в зависимости от значения параметра  $a$ ?
6. Сколько решений имеет система 
$$\begin{cases} |x - 2| - |y + 1| = 2 \\ 2|x - a| = 3 + y \end{cases}$$
 в зависимости от значения параметра  $a$ ?
7. Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором функция  $f(x) = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$  является неубывающей на всей числовой прямой.

## Решение практикума 3

1. Сколько корней имеет уравнение  $ax + 1 = |x - 2|$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?

а) Рассмотрим аналитический метод решения.

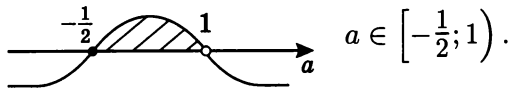
$$1. \begin{cases} x \geq 2 & |x - 2| = x - 2; \\ ax + 1 = x - 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x(a - 1) = -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ a \neq 1 \\ x = -\frac{3}{a-1} \end{cases}.$$

Так как  $x \geq 2$ , то

$$-\frac{3}{a-1} \geq 2; \quad \frac{-3-2a+2}{a-1} \geq 0; \quad \frac{-1-2a}{a-1} \geq 0.$$



При  $a = 1$   $x \cdot 0 = -3$  — решения нет.

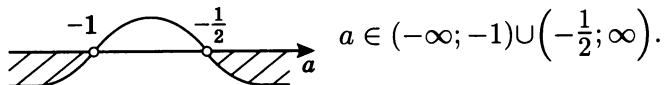
$$2. \begin{cases} x < 2 & |x - 2| = -x + 2; \\ ax + 1 = 2 - x \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x(a + 1) = 1; \end{cases}$$

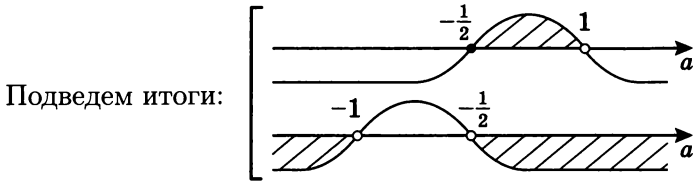
$$\begin{cases} x < 2 \\ a \neq -1 \\ x = \frac{1}{a+1} \end{cases}.$$

Так как  $x < 2$ , то

$$\frac{1}{a+1} < 2; \quad \frac{1-2a-2}{a+1} < 0; \quad \frac{-1-2a}{a+1} < 0.$$



При  $a = -1$   $x \cdot 0 = 1$  — решения нет.



Анализируя результаты исследования решения в двух случаях, получим:

1. при  $a < -1$  существует один корень  $x = \frac{1}{a+1}$ ;
  2. при  $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$  корней нет;
  3. при  $a = -\frac{1}{2}$  существует один корень  $x = 2$ ;
  4. при  $-\frac{1}{2} < a < 1$  существуют два корня:  $x = \frac{3}{1-a}$   
и  $x = \frac{1}{a+1}$ ;
  5. при  $a \geq 1$  существует один корень  $x = \frac{1}{a+1}$ .
- б) Теперь рассмотрим графический метод решения.

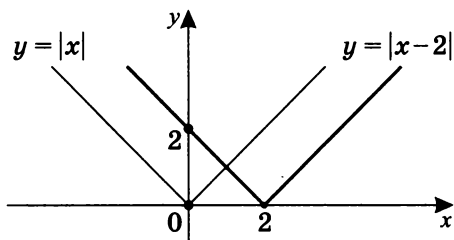
Положим  $f(x) = ax + 1$ ;  $g(x) = |x - 2|$ .

Построим графики функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  на одном чертеже или в одной системе координат и найдем возможное количество точек пересечения графиков данных функций.

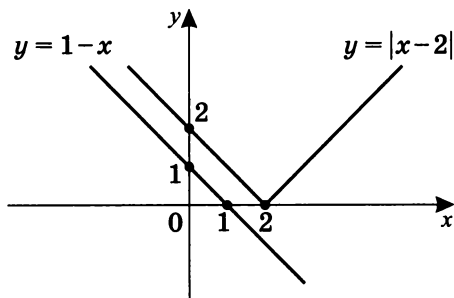
Очевидно, что если функция  $g(x) = |x - 2|$  имеет фиксированный график, то график  $f(x) = ax + 1$ , в зависимости от параметра  $a$  может быть различным по отношению к  $g(x) = |x - 2|$ , но все прямые вида  $y = ax + 1$  проходят через точку  $(0; 1)$ .

Рассмотрим более подробно эти возможные взаимоположения.

График функции  $g(x)$  получен из графика  $y = |x|$ , сдвинутого вправо на 2:

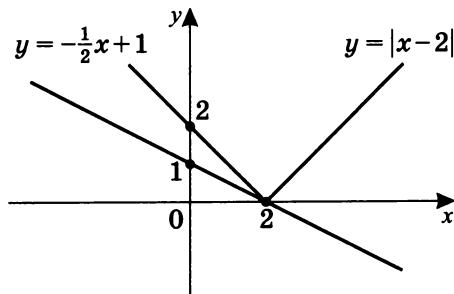


1. При  $a = -1$  прямая параллельна одной из ветвей графика  $y = |x - 2|$ .



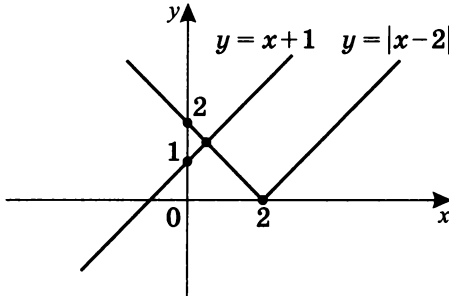
Система  $\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = 1 - x \end{cases}$  не имеет решений, так как общих точек у графиков функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  нет.

2. При  $a = -\frac{1}{2}$  прямая проходит через точку излома графика  $y = |x - 2|$ .



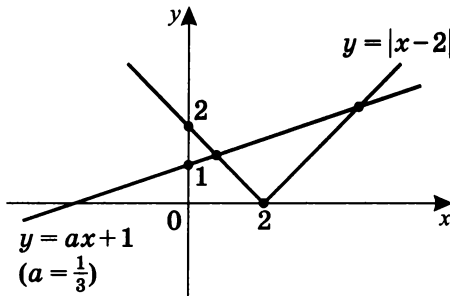
Система  $\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$  имеет единственное решение, так как существует единственная общая точка.

3. При  $a = 1$  прямая параллельна другой ветви графика  $y = |x - 2|$ .



Система  $\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = x + 1 \end{cases}$  имеет единственное решение, так как существует единственная общая точка.

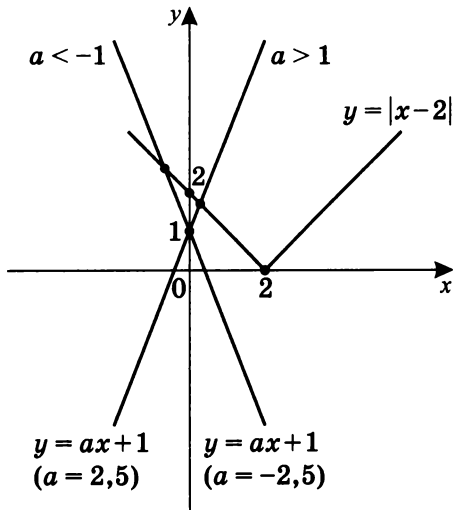
4. При  $-\frac{1}{2} < a < 1$ :



Например, при  $a = \frac{1}{3}$   $y = \frac{1}{3}x + 1$ .

Система  $\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = ax + 1 \end{cases}$  имеет два решения, так как существуют две общие точки.

5. При  $a < -1$  или  $a > 1$ :



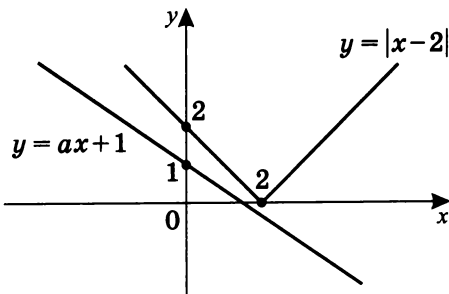
Например,

при  $a = 2,5$   $y = 2,5x + 1$ ,

при  $a = -2,5$   $y = -2,5x + 1$ .

Система  $\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = ax + 1 \end{cases}$  имеет одно решение, так как существует только одна общая точка.

6. При  $-1 < a < -\frac{1}{2}$ :

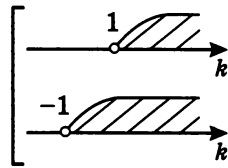


Система  $\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = ax + 1 \end{cases}$  не имеет решений, так как общих точек нет.



Анализируя итоги, получим:

1. при  $k \leq -1$  корней нет;
2. при  $-1 < k \leq 1$  существует единственный корень  $x = \frac{k-2}{k+1}$ ;
3. при  $k > 1$  существуют два корня:  $x = \frac{k+2}{k-1}$  и  $x = \frac{k-2}{k+1}$ .

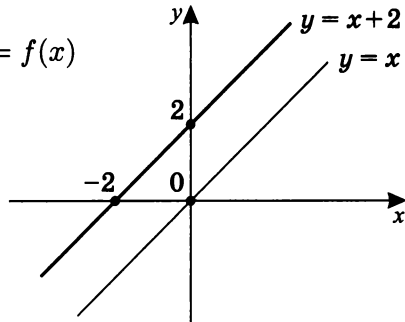


б) Графический способ решения.

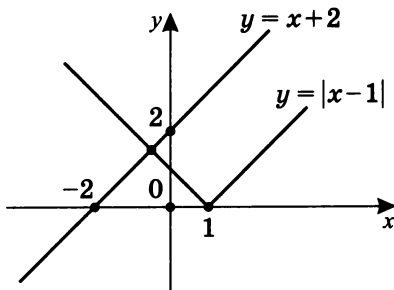
Положим  $f(x) = x + 2$ ;  $g(x) = k|x - 1|$  и решим систему уравнений  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$  графически.

График функции  $y = f(x)$

получается из  
графика  $y = x$ ,  
сдвигом вверх на 2:



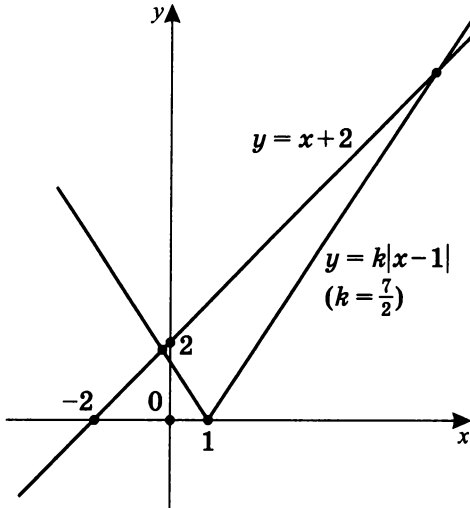
1. При  $k = 1$  прямая вида  $y = x + 2$  параллельна одной из ветвей графика  $y = |x - 1|$ .



Система  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = |x - 1| \end{cases}$  имеет единственное решение, так как имеет единственную общую точку.

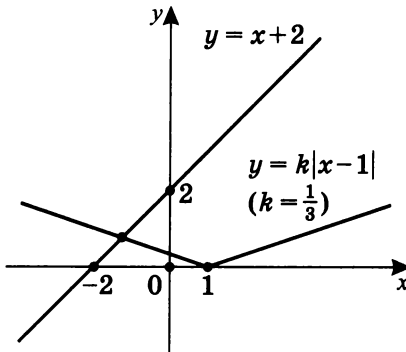


2. При  $k > 1$ :



Система  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$  имеет два решения, так как существуют две общие точки.

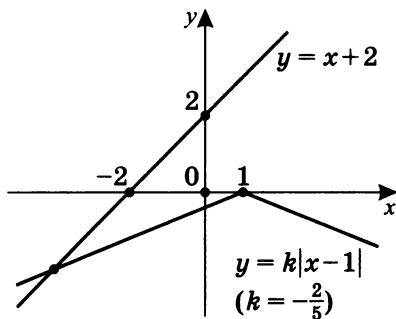
3. При  $0 \leq k < 1$ :



Например,  $y = \frac{1}{3}|x - 1|$ .

Система  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$  имеет одно решение, так как существует единственная общая точка.

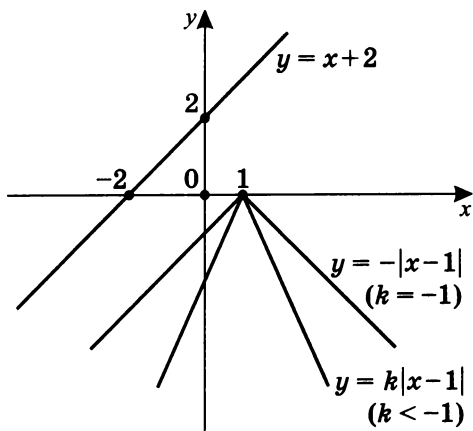
4. При  $-1 < k < 0$ :



Например,  $y = -\frac{2}{5}|x - 1|$ .

Система  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = |x - 1| \end{cases}$  имеет одно решение, так как имеет единственную общую точку.

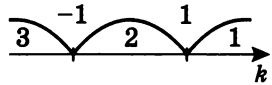
5. При  $k \leq 1$ :



Отметим, что из-за оптической иллюзии кажется, что левая ветвь графика  $y = -|x - 1|$  (прямая  $y = x - 1$ ) не параллельна прямой  $y = x + 2$ .

Система  $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = k|x - 1| \end{cases}$  не имеет решений, так как общих точек нет.

Иллюстрируем возможные случаи на рисунке:



Ответ: в уравнении  $x + 2 = k|x - 1|$  в зависимости от значения параметра  $k$ :

1. при  $k > 1$  существуют два корня;
2. при  $-1 < k \leq 1$  существует единственный корень;
3. при  $k \leq -1$  корней нет.

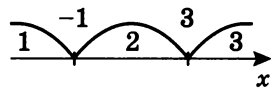
3. Сколько корней имеет уравнение  $|x - 3| + |x + 1| = ax + 3$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?

а) Обозначим  $f(x) = |x - 3| + |x + 1|$ ,  $g(x) = ax + 3$ .

Построим график  $y = f(x)$ .

$x = 3$   
 $x = -1$  — корни (нули) модульных выражений  $|x - 3|$  и  $|x + 1|$ .

Отметим на рисунке возможные случаи:

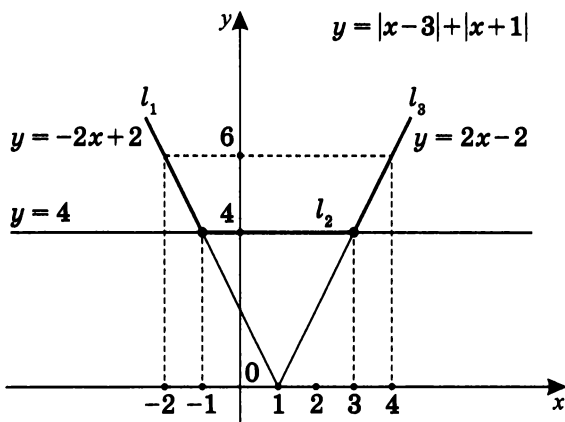


$$1. \begin{cases} x < -1 & \left( \begin{array}{l} |x + 1| = -1 - x \\ |x - 3| = -x + 3 \end{array} \right); \\ y = 3 - x - 1 - x \\ \begin{cases} x < -3 \\ y = 2 - 2x: l_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -1 \leq x < 3 & \left( \begin{array}{l} |x + 1| = x + 1 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{array} \right); \\ y = 3 - x + x + 1 \\ \begin{cases} -1 \leq x < 3 \\ y = 4: l_2 \end{cases} \end{cases}$$

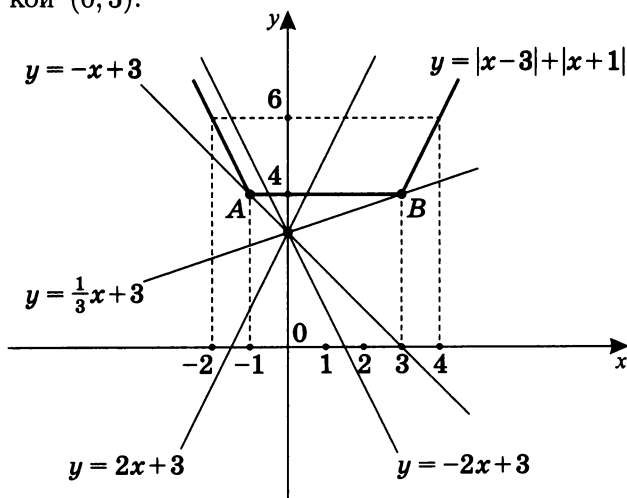
$$3. \begin{cases} x \geq 3 & \left( \begin{array}{l} |x + 1| = x + 1 \\ |x - 3| = x - 3 \end{array} \right); \\ y = x - 3 + x + 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 2x - 2: l_3 \end{cases}$$

После «сборки» получим график  $y = f(x)$ .



б) Построим график  $l_4: y = g(x)$ , т. е.  $y = ax + 3$ .

Очевидно, что это график пучка прямых с общей точкой  $(0; 3)$ .



1. Если  $A(-1; 4) \in \Gamma(y = ax + 3)$ , то  $4 = -a + 3$ ;  $a = -1$ . Тогда из графиков  $f(x) = |x-3| + |x+1|$  и  $g(x) = -x + 3$  следует, что  $A(-1; 4)$  — их единственная общая точка.

2. При  $l_4 \parallel l_1$  ( $l_1: y = 2 - 2x$ )  $a = -2$ ,  
т.е.  $l'_4: y = -2x + 3$  также имеет с графиком  
 $f(x) = |x-3| + |x+1|$  единственную общую точку.
3. Очевидно, что при  $a \in (-2; -1)$  существует две  
общие точки  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .
4. При  $a \in (-\infty; -2]$  есть только одна общая точка  
для графиков  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .
5. Если  $B(3; 4) \in \Gamma(y = ax + 1)$ , то  $4 = a \cdot 3 + 3$ ;  
 $a = \frac{1}{3}$ , т.е.  $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$ , и  $B(3; 4)$  — единствен-  
ная общая точка графиков  $y = |x - 3| + |x + 1|$   
и  $y = \frac{1}{3}x + 3$ .
6. При  $l_4 \parallel l_3$   $a = 2$ , т.е.  $l''_4: y = 2x + 3$   
имеет единственную общую точку с графиком  
 $y = |x - 3| + |x + 1|$ .
7. Естественно, при  $a \in [2; \infty)$  существует толь-  
ко одна общая точка для графиков  $y = f(x)$   
и  $y = g(x)$ .
8. При  $a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$  у графиков  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$   
существуют две общие точки.
9. При  $a \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$  общих точек у графиков  
 $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  нет.

Ответ: уравнение  $|x - 3| + |x + 1| = ax + 3$  в зависимости  
от значения параметра  $a$  имеет:

1. при  $a \in (-\infty; -2]$  — один корень;
2. при  $a \in (-2; -1)$  — два корня;
3. при  $a = -1$  — один корень;
4. при  $a \in \left(-1\frac{1}{3}\right)$  — корней нет;
5. при  $a = \frac{1}{3}$  — один корень;
6. при  $a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$  — два корня;
7. при  $a \in [2; +\infty)$  — один корень.

4. Сколько корней имеет уравнение  $2|x+1|+|x-3| = a|x|+3$  в зависимости от положительного значения параметра  $a$ ?

Обозначим  $f(x) = 2|x+1| + |x-3|$ ,  $g(x) = a|x| + 3$ .

а) Построим график  $y = f(x)$ , т.е.  $y = 2|x+1| + |x-3|$ .

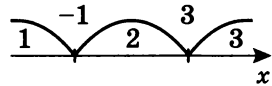
Раскрывая в известном порядке и последовательности модули выражений  $|x+1|$  и  $|x-3|$ , получим:

$$1. \begin{cases} x < -1 \\ y = -2x - 2 + 3 - x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 1 \\ y = -3x + 1 - l_1 \end{cases}$$

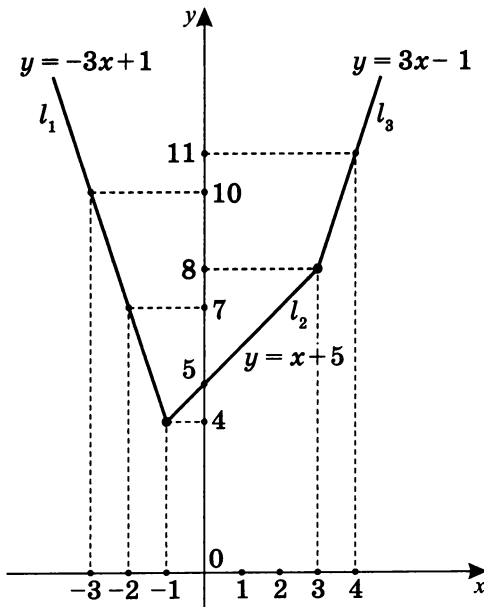
$$2. \begin{cases} -1 \leq x < 3 \\ y = 2x + 2 + 3 - x \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leq x < 3 \\ y = x + 5 - l_2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 2x + 2 + x - 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 3x - 1 - l_3 \end{cases}$$

Рисунок, иллюстрирующий возможные случаи:



После сборки график  $y = f(x)$  выглядит так:



- б) Так как график  $y = |x|$  симметричен относительно оси ординат, то и график  $y = g(x)$  ( $y = a|x| + 3$ ) также симметричен относительно оси ординат.

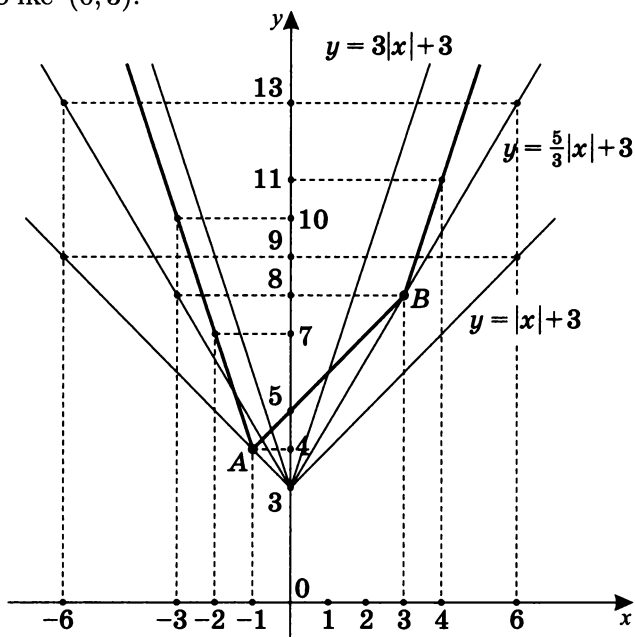
Геометрически график  $y = |x|$  есть угол с вершиной в точке  $(0; 0)$ , образованный биссектрисами I и II координатных углов (в верхней полуплоскости). Очевидно, он равен  $90^\circ$ .

График  $y = a|x| + 3$ :

при  $a > 1$  также есть угол, но меньший  $90^\circ$ , с вершиной в точке  $(0; 3)$ ;

при  $0 < a < 1$  — угол, больший  $90^\circ$ , с вершиной в точке  $(0; 3)$ .

1.



Если  $A(-1; 4) \in \Gamma(y = g(x))$ , то  
 $4 = a \cdot 1 + 3$ ;  $a = 1$ . Значит  $y = |x| + 3$ .

Если  $B(3; 8) \in \Gamma(y = g(x))$ , то  
 $8 = a \cdot 3 + 3$ ;  $a = \frac{5}{3}$ . Значит  $y = \frac{5}{3}|x| + 3$ .

Очевидно, что  $B(3; 8) \notin \Gamma(y = |x| + 3)$ .

Вывод: из графиков  $y = g(x)$  и  $y = f(x)$  следует, что:

при  $a = 1$  есть только одна точка  $A(-1; 4)$  — общая для  $y = |x| + 3$  и  $y = 2|x + 1| + |x - 3|$ ;

при  $a = \frac{5}{3}$  у графиков  $y = 2|x + 1| + |x - 3|$  и  $y = \frac{5}{3}|x| + 3$  есть три точки;

при  $a \in \left(1; \frac{5}{3}\right)$  есть две общие точки;

при  $a \in (0; 1)$  общих точек у графиков  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  нет.

2. Если  $a = 3$ , то  $y = 3|x| + 3$ , и в силу симметрии относительно оси ординат правая ветвь графика параллельна  $l_3$ , и левая ветвь графика параллельна  $l_1$ .

Тогда графики  $y = 3|x| + 3$  и  $y = 2|x + 1| + |x - 3|$  имеют две общие точки.

При  $a \in \left(\frac{5}{3}; 3\right)$  графики  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют четыре общие точки;

при  $a \in [3; \infty)$  существует две общие точки.

Ответ: уравнение  $2|x + 1| + |x - 3| = a|x| + 3$  в зависимости от положительного значения параметра  $a$ :

1. при  $a \in (0; 1)$  — корней нет;
2. при  $a = 1$  — один корень;
3. при  $a \in \left(1; \frac{5}{3}\right)$  — два корня;
4. при  $a = \frac{5}{3}$  — три корня;
5. при  $a \in \left(\frac{5}{3}; 3\right)$  — четыре корня;
6. при  $a \in [3; +\infty)$  — два корня.



5. Сколько решений имеет система уравнений

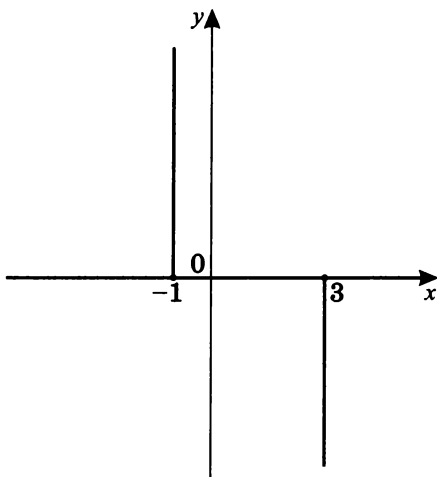
$$\begin{cases} 2y = (1 - x) \cdot |y| \\ y = |x| + a \end{cases} \quad \text{в зависимости от значения}$$

параметра  $a$ ?

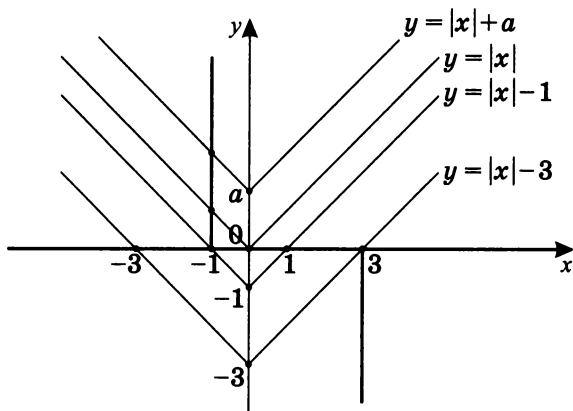
а) Построим график уравнения  $2y = (x - 1)|y|$ .

1. Если  $y = 0$ , то  $2 \cdot 0 = (x - 1) \cdot 0$  — верное равенство при любых  $x$ , т. е. ось абсцисс есть график уравнения  $y = 0$ .
2. Если  $y > 0$ , то  $|y| = y$ , тогда  $y(2 + x - 1) = 0$ ;  $x = -1$  — уравнение луча, параллельного оси ординат в верхней полуплоскости.
3. Если  $y < 0$ , то  $|y| = -y$ , тогда  $y(2 - x + 1) = 0$ ;  $x = 3$  — уравнение луча, параллельного оси ординат в нижней полуплоскости.

После «сборки» график уравнения  $2y = (1 - x)|y|$  выглядит так:



- б) График  $y = |x| + a$  симметричен относительно оси ординат и скользит вдоль оси ординат. Построим оба графика в одной системе координат на одном чертеже:



- в) 1. При  $a > 0$  существует единственная общая точка.  
 2. При  $a = 0$  существуют две общие точки.  
 3. При  $a = -1$  существуют две общие точки.  
 4. При  $a = -3$  существуют две общие точки.
- г) Исходя из графических представлений для графиков системы:
- при  $a \in (0; +\infty)$  существует одна общая точка;
  - при  $a \in (-1; 0)$  существуют три общие точки;
  - при  $a \in [-3; -1]$  существуют две общие точки;
  - при  $a \in (-\infty; -3)$  существуют три общие точки.

Ответ: система уравнений  $\begin{cases} 2y = (1-x) \cdot |y| \\ y = |x| + a \end{cases}$  в зависимости от значения параметра  $a$  имеет:

- при  $a \in (-\infty; -3)$  — три решения;
- при  $a \in [-3; -1]$  — два решения;
- при  $a \in (-1; 0)$  — три решения;
- при  $a = 0$  — два решения;
- при  $a \in (0; +\infty)$  — одно решение.

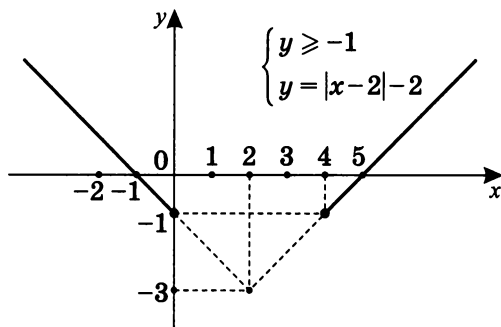
6. Сколько решений имеет система  $\begin{cases} |x - 2| - |y + 1| = 2 \\ 2|x - a| = 3 + y \end{cases}$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?

а) Построим график уравнения  $|x - 2| - |y + 1| = 2$ , т. е.  $|y + 1| = |x - 2| - 2$ .

Так как  $|y + 1| = \begin{cases} y + 1, & y \geq -1 \\ -y - 1, & y < -1 \end{cases}$ , то:

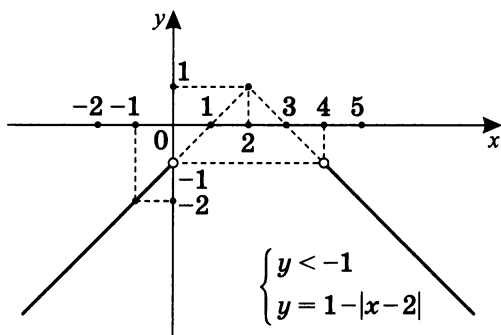
$$1. \begin{cases} y \geq -1 & (|y + 1| = y + 1); \\ y + 1 = |x - 2| - 2 \end{cases}; \begin{cases} y \geq -1 \\ y = |x - 2| - 3 \end{cases}.$$

График такого уравнения

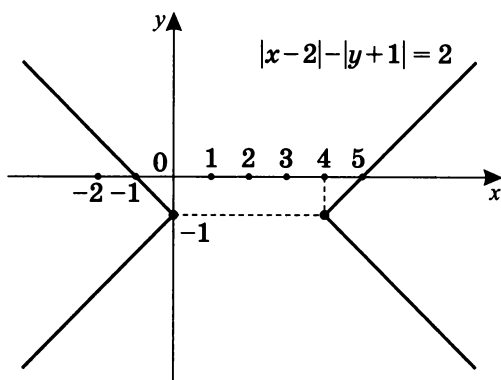


$$2. \begin{cases} y < -1 & (|y + 1| = -y - 1); \\ -y - 1 = |x - 2| - 2 \end{cases}; \begin{cases} y < -1 \\ y = 1 - |x - 2| \end{cases}.$$

График такого уравнения



После сборки график  $|x-2|-|y+1|=2$  будет таким:

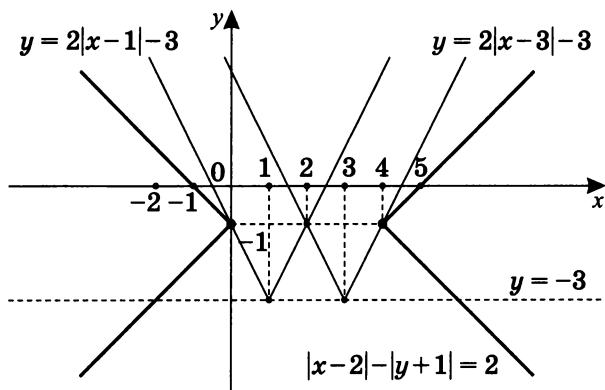


б) Проанализируем и построим график уравнения

$$2|x-a|=y+3; \quad y=2|x-a|-3.$$

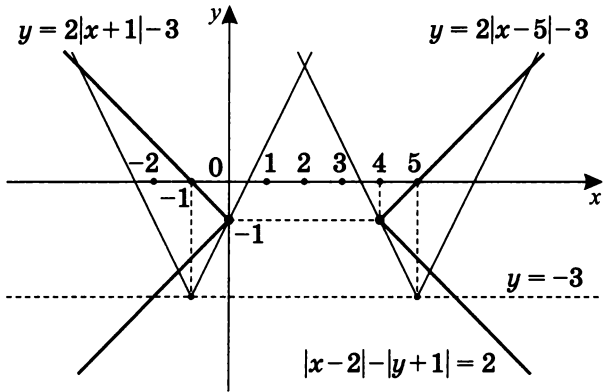
По сути график его есть график угла  $y=2|x|$ , опущенный на 3 вниз и скользящий вдоль прямой  $y=-3$  вправо, если  $a > 0$ , и влево, если  $a < 0$ .

1. При  $a=1$   $y=2|x-1|-3$ ;  
при  $a=3$   $y=2|x-3|-3$ .



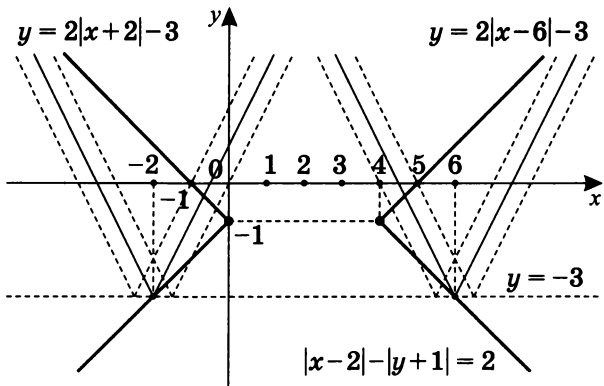
Графически видно, что при данных значениях параметра  $a$  у графиков первого и второго уравнения системы есть только одна общая точка.

2. При  $a = -1$   $y = 2|x + 1| - 3$ ;  
при  $a = 5$   $y = 2|x - 5| - 3$ .



Графически видно, что при данных значениях параметра  $a$  у графиков первого и второго уравнения системы есть три общие точки.

3. Очевидно, что при  $a \in (-1; 1)$  и  $a \in (3; 5)$  существуют две общие точки у графиков первого и второго уравнений системы.
4. При  $a = -2$  и  $a = 6$  существуют три общие точки у графиков уравнений системы.



5. При  $a \in (-2; -1)$  и  $a \in (5; 6)$  существуют четыре общие точки у графиков уравнений системы.

6. При  $a \in (-\infty; -2)$  и  $a \in (6; +\infty)$  существуют две общие точки у уравнений системы.

Ответ: система уравнений  $\begin{cases} |x - 2| - |y + 1| = 2 \\ 2|x - a| = 3 + y \end{cases}$  в зависимости от значения параметра  $a$  имеет:

1. при  $a \in (-\infty; -2)$  — два решения;

2. при  $a = -2$  — три решения;

3. при  $a \in (-2; -1)$  — четыре решения;

4. при  $a = -1$  — три решения;

5. при  $a \in (-1; 1)$  — два решения;

6. при  $a = 1$  — одно решение;

7. при  $a \in (1; 3)$  — решений нет;

8. при  $a = 3$  — одно решение;

9. при  $a \in (3; 5)$  — два решения;

10. при  $a = 5$  — три решения;

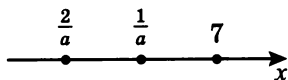
11. при  $a \in (5; 6)$  — четыре решения;

12. при  $a = 6$  — три решения;

13. при  $a \in (6; +\infty)$  — одно решение.

7. Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором функция  $f(x) = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$  является неубывающей на всей числовой прямой.

Положим  $a < 0$ . Тогда корни модулей в порядке возрастания таковы:



а) Пусть  $x < \frac{2}{a}$ . В этом случае

$$ax - 2 \geq 0; \quad ax \geq 2 \quad \text{при} \quad \begin{cases} a < 0 \\ x \leq \frac{2}{a} \end{cases}, \quad \text{тогда}$$

$$|ax - 2| = ax - 2; \quad |ax - 1| = ax - 1; \quad |x - 7| = 7 - x.$$

$$\text{Значит, } f(x) = -7 + 3x - 3ax + 3 + ax - 2 + 7 - x;$$

$$f(x) = (2 - 2a)x + 1.$$

б) Пусть  $\frac{2}{a} \leq x < \frac{1}{a}$ . В этом случае

$$|ax - 2| = 2 - ax; \quad |ax - 1| = ax - 1; \quad |x - 7| = 7 - x.$$

Значит,  $f(x) = -7 + 3x - 3ax + 3 + 2 - ax + 7 - x;$   
 $f(x) = (-4a + 2)x + 5.$

в) Пусть  $\frac{1}{a} \leq x < 7$ . В этом случае

$$|ax - 2| = 2 - ax; \quad |ax - 1| = 1 - ax; \quad |x - 7| = 7 - x.$$

Значит,  $f(x) = -7 + 3x + 3ax - 3 + 2 - ax + 7 - x;$   
 $f(x) = (2a + 2)x - 1.$

г) Пусть  $x \geq 7$ . В этом случае

$$|ax - 2| = 2 - ax; \quad |ax - 1| = 1 - ax; \quad |x - 7| = x - 7.$$

Значит,  $f(x) = -7 + 3x + 3ax - 3 + 2 - ax + x - 7;$   
 $f(x) = (2a + 4)x - 17.$

Для того чтобы исходная функция являлась неубывающей на всей числовой прямой, необходимо и достаточно, чтобы на каждом промежутке все возможные угловые коэффициенты были неотрицательны, и функция была непрерывной. Значит

$$\begin{cases} 2 - 2x \geq 0 \\ -4a + 2 \geq 0 \\ 2a + 2 \geq 0 \\ 2a + 4 \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} ; \quad -1 \leq a < 0.$$

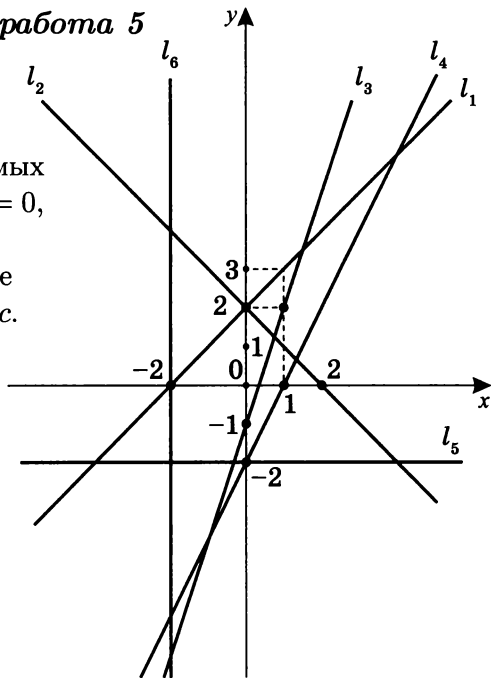
Так как необходимо найти наименьшее значение  $a$ , то случай  $a \geq 0$  рассматривать нет смысла.

Ответ:  $f(x) = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$  является неубывающей функцией на всей числовой прямой при  $a = -1$ , причем значение  $a = -1$  является наименьшим, при котором это возможно.

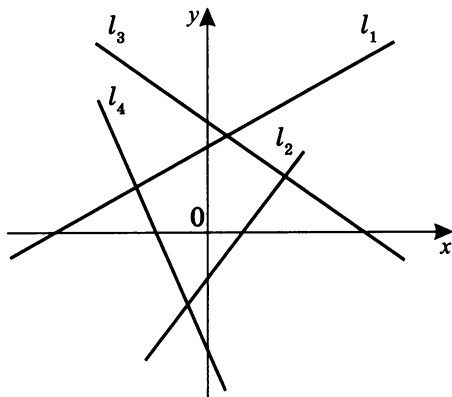
## Самостоятельная работа 5

## Вариант I

1. Напишите уравнения графиков прямых вида  $ny + mx + c = 0$ , обозначенных на чертеже, и укажите значения  $n$ ,  $m$  и  $c$ .



2. Укажите знаки параметров  $k$  и  $b$  для прямых вида  $y = kx + b$ , обозначенных на чертеже.

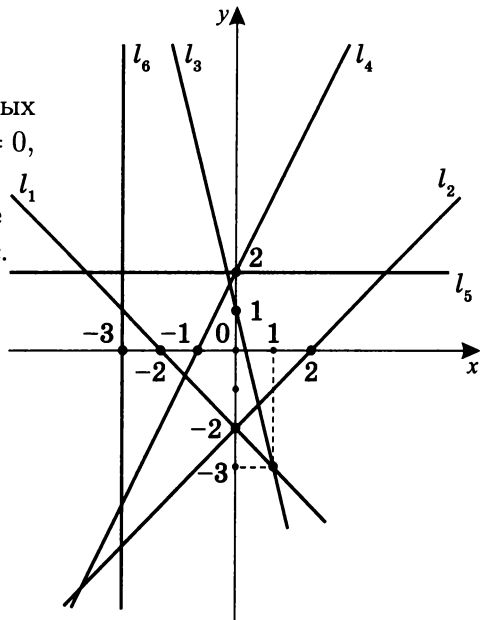


3. При каких значениях параметра  $a$  графики функций:
- пересекаются; б) параллельны; в) совпадают?
- $y = 2ax + 3$  и  $y = 5x - 2$ ;
  - $y = (2a + 1)x$  и  $y = (4a - 3)x + 2a$ ;
  - $y = (3a + 1)x + 4a$  и  $y = (2 - a)x + 1$ ;
  - $y = (2a - 3)x$  и  $y = (5 - a^2)x + a - 2$ .

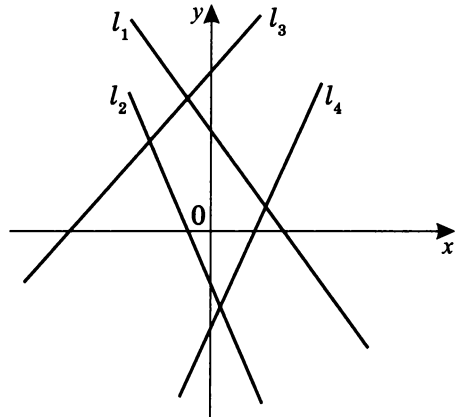


## Вариант II

1. Напишите уравнения графиков прямых вида  $ny + mx + c = 0$ , обозначенных на чертеже, и укажите значения  $n$ ,  $m$  и  $c$ .



2. Укажите знаки параметров  $k$  и  $b$  для прямых вида  $y = kx + b$ , обозначенных на чертеже.



3. При каких значениях параметра  $a$  графики функций:
- пересекаются; б) параллельны; в) совпадают?
- $y = 4ax - 1$  и  $y = -3x + 2$ ;
  - $y = (3a + 2)x$  и  $y = (a - 3)x - a$ ;
  - $y = (a - 2)x + 1$  и  $y = (2 - 3a)x + a$ ;
  - $y = (2a^2 - 1)x + 2a$  и  $y = (3a + 4)x + 5$ .

**Самостоятельная работа 6****Вариант I**

1. Определите графически, сколько корней имеет уравнение  $a = \frac{x^4 - 8x^2 - 9}{(x^2 + 1)|x + 3|} - \frac{|x - 1|}{x - 1}$  в зависимости от значения параметра  $a$ .
2. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра  $a$ :
  - а)  $|x + 1| - |x - 4| = a + 2$ ;
  - б)  $|x + 1| - |x - 4| = ax - 3$ ;
  - в)  $|x + 1| - |x - 4| = |x + 2| + a$ ?
- \*3. Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором функция  $f(x) = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$  является неубывающей на всей числовой прямой.

**Вариант II**

1. Определите графически, сколько корней имеет уравнение  $a = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{|x - 2|(x^2 + 1)} - \frac{|x + 1|}{x + 1}$  в зависимости от значения параметра  $a$ .
2. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра  $a$ :
  - а)  $|x - 1| - |x + 4| = -x + a$ ;
  - б)  $|x - 1| - |x + 4| = ax - 3$ ;
  - в)  $|x - 1| - |x + 4| = |x - 2| - a$ ?
- \*3. Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором функция  $f(x) = 3 + 3x - 3|ax + a - 2| + |4x + a - 6| + |x + 4|$  является неубывающей на всей числовой прямой.

### *Самостоятельная работа 7*

Постройте графики уравнений на координатной плоскости, т. е. изобразите множество всех точек  $(x; y)$ , для которых выполняется равенство:

1.  $y = x|y|$ ;
2.  $|y - 1| = x$ ;
3.  $|x + y - 2| = 1$ ;
4.  $(1 + x)|y| = x^2 - 1$ ;
5.  $|x + 2y| = |4x - y|$ ;
6.  $|x - 1| + |y - 2| = 4$ ;
7.  $|x + 1| + |x - 3| = 5$ ;
8.  $|y - 1| + |y + 2| = 4$ ;
9.  $|x + 2| - |y - 3| = 1$ ;
10.  $(2|x| - y \cdot x)(y + 3 + x|y + 3|) = 0$ .

**Самостоятельная работа 8****Вариант I**

1. Сколько корней имеет уравнение  $ax = |x - 2| + 1$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?
2. При каких значениях параметра  $a$  график функции  $y = (a - 2)(a + 3)x - a - 3$ :
  - а) параллелен оси абсцисс;
  - б) совпадает с осью абсцисс;
  - в) параллелен прямой  $y = -4x + 1$ ;
  - г) параллелен прямой  $y = 6x - 2$ ;
  - д) перпендикулярен прямой  $y = \frac{1}{6}x + 3$ ?
3. При каких целых значениях параметра  $a$  график уравнения  $y + ax = 7 + 3x$ :
  - а) параллелен оси абсцисс;
  - б) пересекает координатные оси в точках с целочисленными координатами?

**Дополнительное задание:**

- в) Какими свойствами обладают найденные в пункте б) прямые?
- г) Чем по сути является исходное уравнение?

**Вариант II**

1. Сколько корней имеет уравнение  $ax = |x + 2| + a + 1$  в зависимости от значения параметра  $a$ ?
2. При каких значениях параметра  $a$  график функции  $y = (a + 2)(a - 3)x + a + 2$ :
  - а) параллелен оси абсцисс;
  - б) совпадает с осью абсцисс;
  - в) параллелен прямой  $y = 6x + 3$ ;
  - г) параллелен прямой  $y = -4x - 2$ ;
  - д) перпендикулярен прямой  $y = \frac{1}{6}x - 3$ ?
3. При каких целых значениях параметра  $a$  график уравнения  $y + ax = 2x - 5$ :
  - а) параллелен оси абсцисс;
  - б) пересекает координатные оси в точках с целочисленными координатами?

**Дополнительное задание:**

- в) Какими свойствами обладают найденные в пункте б) прямые?
- г) Чем по сути является исходное уравнение?

# 3

## ОТВЕТЫ

### Ответы на самостоятельную работу 1

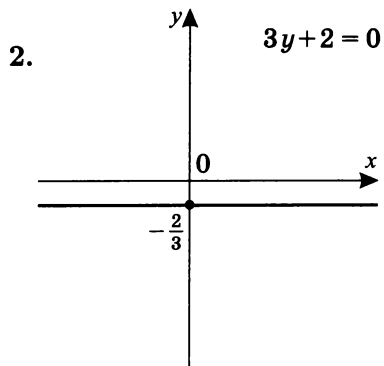
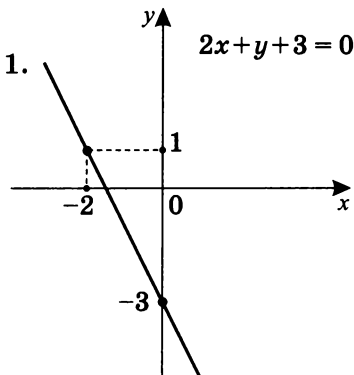
1. Так как все прямые проходят через начало координат, то для всех прямых  $b = 0$ .

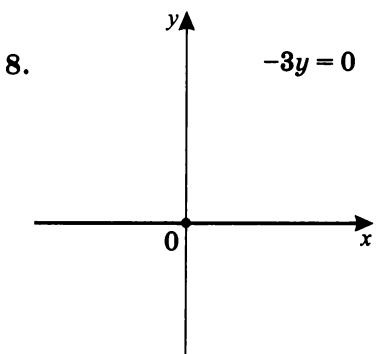
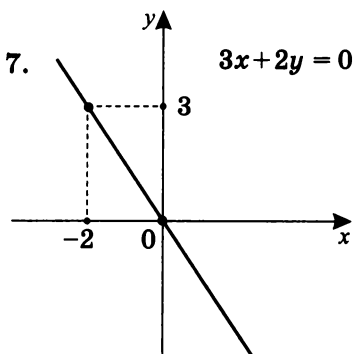
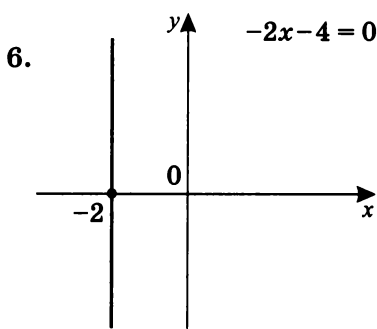
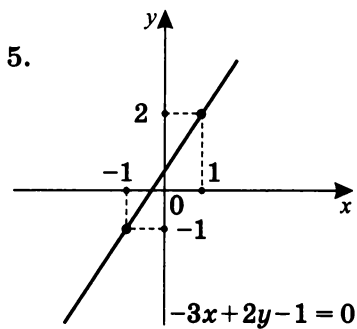
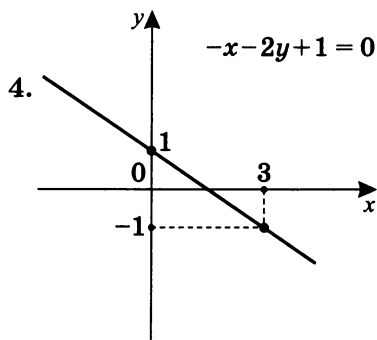
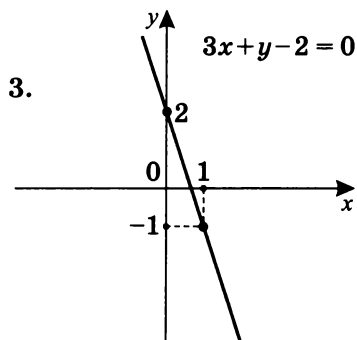
$$l_1: y = 4x; \quad l_2: y = 1,5x; \quad l_3: y = -1,5x; \quad l_4: y = -3x.$$

$$2. \quad l_1: y = 2x; \quad l_2: y = \frac{1}{3}x; \quad l_3: y = -\frac{1}{3}x; \quad l_4: y = -\frac{2}{3}x.$$

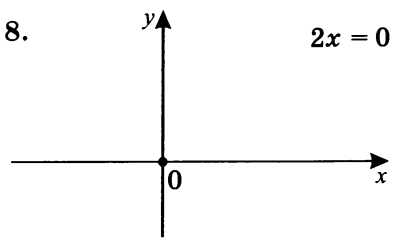
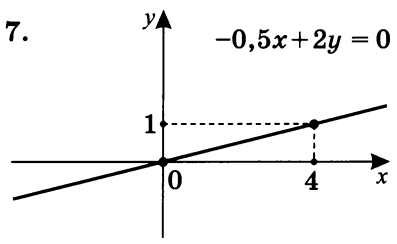
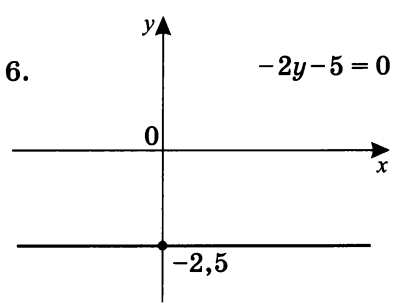
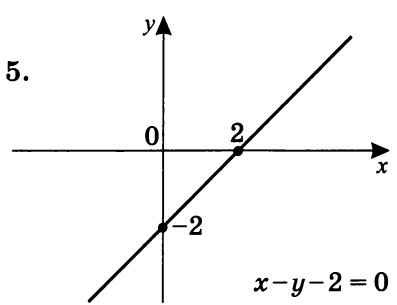
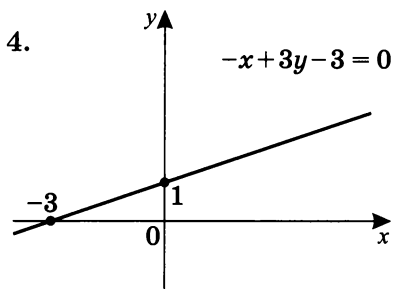
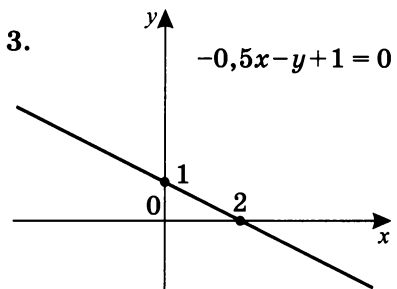
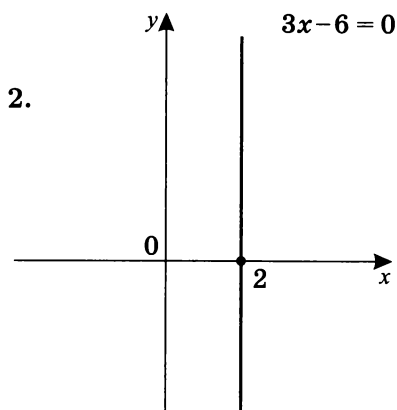
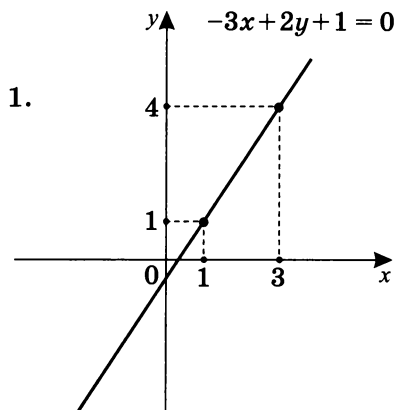
### Ответы на самостоятельную работу 2

#### Вариант I





Вариант II





**Ответы на самостоятельную работу 3****Вариант I**

1.  $y = \frac{4}{3}x$ . 2.  $y = -\frac{2}{3}x$ . 3.  $y = 1$ . 4.  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . 5.  $y = \frac{1}{3}x + 2$ .  
 6.  $x = 2$ . 7.  $y = -\frac{1}{3}x - 1$ . 8.  $y = -x + 2$ . 9.  $y = 2x + 3$ .  
 10.  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ . 11.  $y = -x - 2$ . 12.  $y = \frac{1}{2}x - 3$ . 13.  $x = -3$ .  
 14.  $y = -1$ . 15.  $y = 1,5x + 3$ . 16.  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ .

**Вариант II**

1.  $y = \frac{2}{3}x$ . 2.  $y = -2x$ . 3.  $y = 2$ . 4.  $y = -x + 1$ . 5.  $y = x$ .  
 6.  $y = -\frac{1}{3}x + 1$ . 7.  $y = \frac{1}{2}x + 1$ . 8.  $x = -2$ . 9.  $y = \frac{2}{3}x$ .  
 10.  $y = 2x + 3$ . 11.  $y = -1$ . 12.  $x = 3$ . 13.  $y = -2x + 2$ .  
 14.  $y = 3x + 4$ . 15.  $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$ . 16.  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

**Ответы на самостоятельную работу 4****I вариант**

1.  $S_{\Phi} = 7$ . 2.  $D(-3; 2)$ . 3.  $M(0; -0,5)$ .  
 4.  $A_1(1; -1)$ ,  $B_1(3; 3)$ ,  $C_1(-1; 2)$ ,  $D_1(-3; -2)$ .  
 5.  $A_2(-1; 1)$ ,  $B_2(-3; -3)$ ,  $C_2(1; -2)$ ,  $D_2(-3; 2)$ .  
 6.  $A_3(1; 1)$ ,  $B_3(-3; 3)$ ,  $C_3(-2; -1)$ ,  $D_3(2; -3)$ .  
 7.  $A_4(-1; -1)$ ,  $B_4(3; -3)$ ,  $C_4(2; 1)$ ,  $D_4(-2; 3)$ .  
 8.  $A_5(-1; -1)$ ,  $B_5(-3; 3)$ ,  $C_5(1; 2)$ ,  $D_5(3; -2)$ .  
 9.  $S_4 = 7\frac{7}{18}$ ;  $S_5 = 8\frac{3}{4}$ ;  $S_6 = 11\frac{13}{30}$ ;  $S_7 = 9\frac{1}{3}$ ;  $S_8 = 8\frac{4}{7}$ .  
 10.  $A_6(5; 7)$ ;  $B_6(7; 3)$ ;  $C_6(3; 4)$ ;  $D_6(1; 8)$ .

**II вариант**

1.  $S_{\Phi} = 10$ . 2.  $D(-5; 1)$ . 3.  $M(-1; -0)$ .  
 4.  $A_1(1; -2)$ ,  $B_1(3; 1)$ ,  $C_1(-3; 2)$ ,  $D_1(-5; -1)$ .  
 5.  $A_2(-1; 2)$ ,  $B_2(-3; -1)$ ,  $C_2(3; -2)$ ,  $D_2(5; 1)$ .  
 6.  $A_3(2; 1)$ ,  $B_3(-1; 3)$ ,  $C_3(-2; -3)$ ,  $D_3(1; -2)$ .  
 7.  $A_4(-2; -1)$ ,  $B_4(1; -3)$ ,  $C_4(2; 3)$ ,  $D_4(-1; 5)$ .  
 8.  $A_5(-1; -2)$ ,  $B_5(-3; 1)$ ,  $C_5(3; 2)$ ,  $D_5(5; -1)$ .  
 9.  $S_4 = 16\frac{2}{3}$ ;  $S_5 = 12\frac{11}{12}$ ;  $S_6 = 12\frac{4}{15}$ ;  $S_7 = 10\frac{10}{21}$ ;  $S_8 = 13\frac{19}{20}$ .  
 10.  $A_6(5; 8)$ ;  $B_6(7; 5)$ ;  $C_6(1; 4)$ ;  $D_6(-1; 7)$ .

## Ответы на самостоятельную работу 5

### Вариант I

- $l_1: y - x - 2 = 0; \quad n = 1, m = -1, c = -2.$   
 $l_2: y + x - 2 = 0; \quad n = 1, m = 1, c = -2.$   
 $l_3: y - 3x + 1 = 0; \quad n = 1, m = -3, c = 1.$   
 $l_4: y - 2x + 2 = 0; \quad n = 1, m = -2, c = 2.$   
 $l_5: y + 2 = 0; \quad n = 1, m = 0, c = 2.$   
 $l_6: x + 2 = 0; \quad n = 0, m = 1, c = 2.$
- $l_1: k > 0, b > 0. \quad l_2: k > 0, b < 0.$   
 $l_3: k < 0, b > 0. \quad l_4: k < 0, b < 0.$
- $a \neq 2,5; \text{ б) } a = 2,5; \text{ в) таких } a \text{ нет.}$
  - $a \neq 2; \text{ б) } a = 2; \text{ в) таких } a \text{ нет.}$
  - $a \neq \frac{1}{4}; \text{ б) } a = \frac{1}{4}; \text{ в) } a = \frac{1}{4}.$
  - $a \neq -4, a \neq 2; \text{ б) } a = -4, a = 2; \text{ в) } a = 2.$

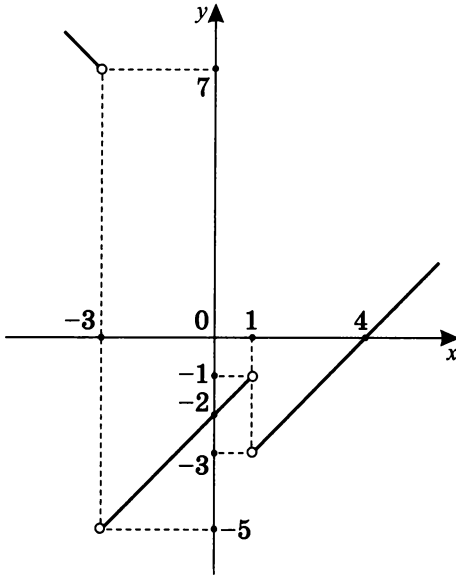
### Вариант II

- $l_1: y + x + 2 = 0; \quad n = 1, m = 1, c = 2.$   
 $l_2: y - x + 2 = 0; \quad n = 1, m = -1, c = 2.$   
 $l_3: y + 4x - 1 = 0; \quad n = 1, m = 4, c = -1.$   
 $l_4: y - 2x - 2 = 0; \quad n = 1, m = -2, c = -2.$   
 $l_5: y - 2 = 0; \quad n = 1, m = 0, c = -2.$   
 $l_6: x + 3 = 0; \quad n = 0, m = 1, c = 3.$
- $l_1: k < 0, b > 0. \quad l_2: k < 0, b < 0.$   
 $l_3: k > 0, b > 0. \quad l_4: k > 0, b < 0.$
- $a \neq -0,75; \text{ б) } a = -0,75; \text{ в) таких } a \text{ нет.}$
  - $a \neq -2,5; \text{ б) } a = -2,5; \text{ в) таких } a \text{ нет.}$
  - $a \neq 1; \text{ б) } a = 1; \text{ в) } a = 1.$
  - $a \neq -1, a \neq 2,5; \text{ б) } a = -1, a = 2,5; \text{ в) } a = 2,5.$

## Ответы на самостоятельную работу 6

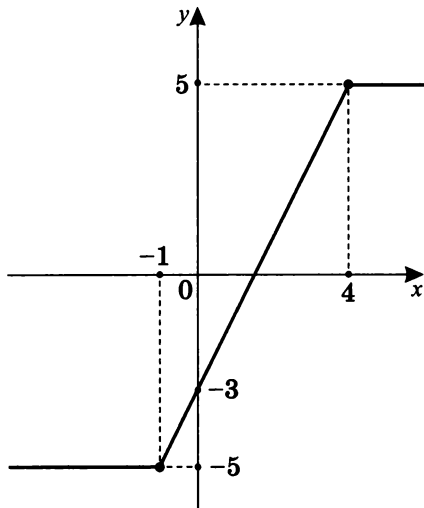
### Вариант I

1. График функции  $y = \frac{x^4 - 8x^2 - 9}{(x^2 + 1)|x + 3|} - \frac{|x - 1|}{x - 1}$



1. При  $a \in (-\infty; -5]$  — корней нет;
2. при  $a \in (-5; -3]$  — один корень;
3. при  $a \in (-3; -1)$  — два корня;
4. при  $a \in [-1; 7)$  — один корень;
5. при  $a \in (7; +\infty)$  — два корня.

2. График  $y = |x + 1| - |x - 4|$



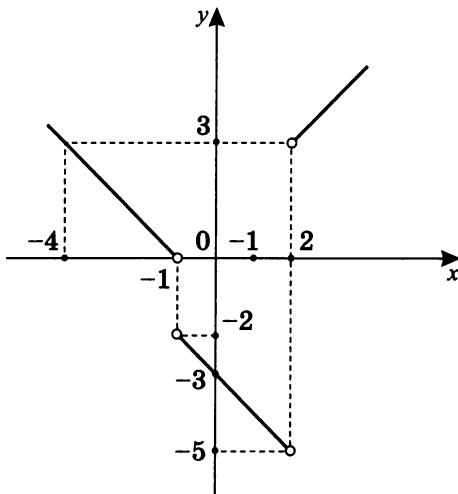
- а) 1. При  $a \in (1; +\infty)$  — один корень;  
 2. при  $a = 1$  — два корня;  
 3. при  $a \in (-4; 1)$  — три корня;  
 4. при  $a = -4$  — два корня;  
 5. при  $a \in (-\infty; -4)$  — один корень.
- б) 1. При  $a > 2$  — один корень;  
 2. при  $a = 2$  — бесконечное число корней на  $[-1; 4]$ ;  
 3. при  $a \in (0; 2)$  — три корня;  
 4. при  $a \in (-\infty; 0)$  — один корень.
- в) 1. При  $a > -1$  — корней нет;  
 2. при  $a = -1$  — один корень;  
 3. при  $a \in (-5; -1)$  — два корня;  
 4. при  $a = -5$  — три корня;  
 5. при  $a \in (-6; -5)$  — четыре корня;  
 6. при  $a = -6$  — три корня;  
 7. при  $a \in (-\infty; -6)$  — два корня.

3.  $a = -2$ .

## Вариант II

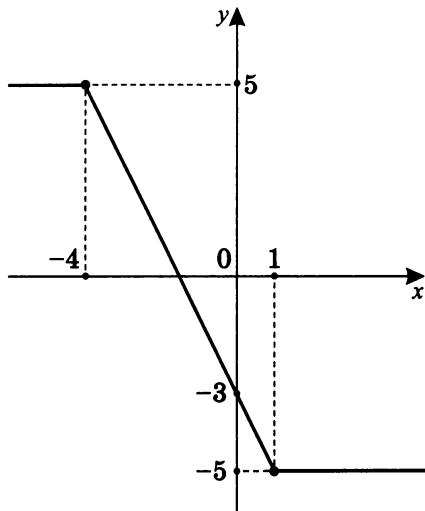
1. График  $y = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{|x-2|(x^2+1)} - \frac{|x+1|}{x+1}$ ,

т. е.  $y = \frac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} - \frac{|x+1|}{x+1}$



1. При  $a \in (-\infty; -5]$  — корней нет;
2. при  $a \in (-5; -2)$  — один корень;
3. при  $a \in [-2; 0]$  — корней нет;
4. при  $a \in [0; 3]$  — один корень;
5. при  $a \in [3; +\infty)$  — два корня.

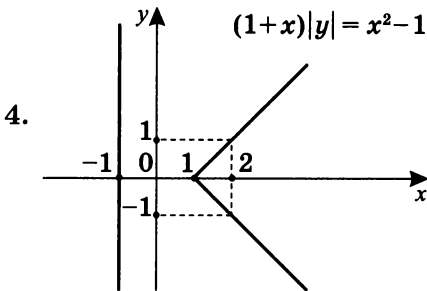
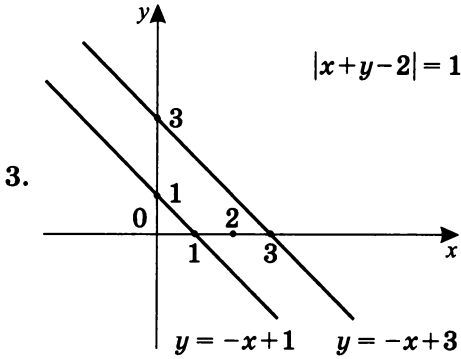
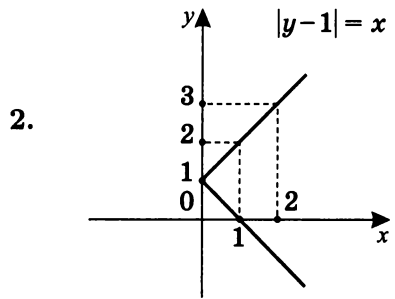
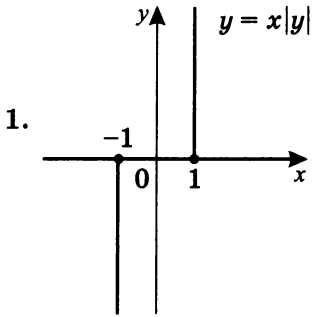
2. Уравнение  $y = |x - 1| - |x + 4|$

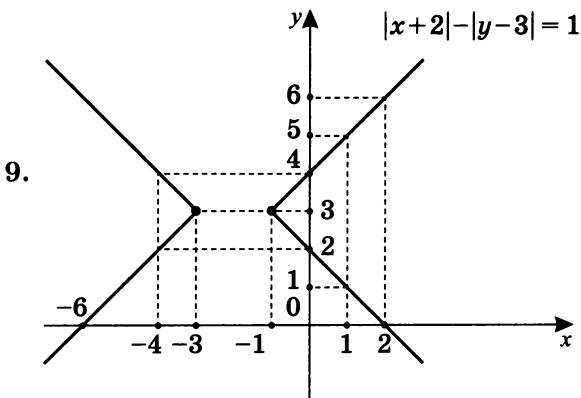
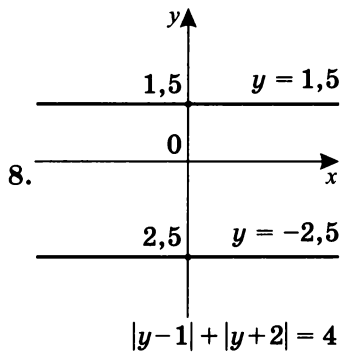
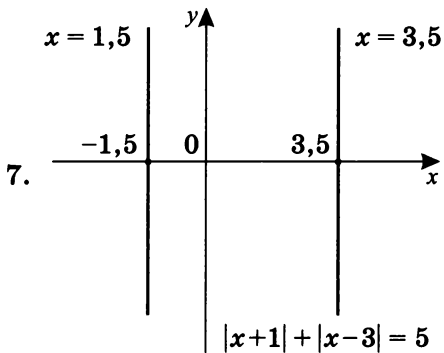
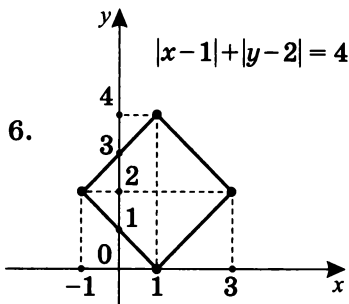
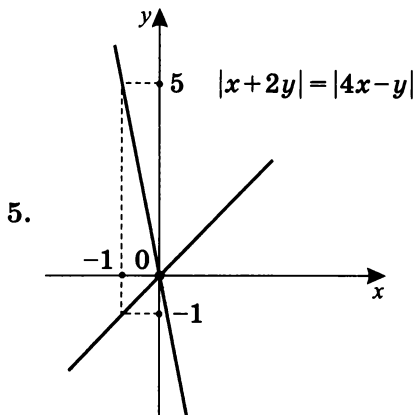


- а) 1. При  $a \in (-\infty; -4)$  — один корень;  
 2. при  $a = -4$  — два корня;  
 3. при  $a \in (-4; 1)$  — три корня;  
 4. при  $a = 1$  — два корня;  
 5. при  $a \in (1; +\infty)$  — один корень.
- б) 1. При  $a \in (-\infty; -2)$  — один корень;  
 2. при  $a = -2$  — бесконечное число корней на  $[-4; 1]$ ;  
 3. при  $a \in (-2; 0)$  — три корня;  
 4. при  $a \in [0; +\infty)$  — один корень.
- в) 1. При  $a \in (-1; +\infty)$  — корней нет;  
 2. при  $a = -1$  — один корень;  
 3. при  $a \in (-5; -1)$  — два корня;  
 4. при  $a = -5$  — три корня;  
 5. при  $a \in (-6; -5)$  — четыре корня;  
 6. при  $a = -6$  — три корня;  
 7. при  $a \in (-\infty; -6)$  — два корня.

3.  $a = 1$ .

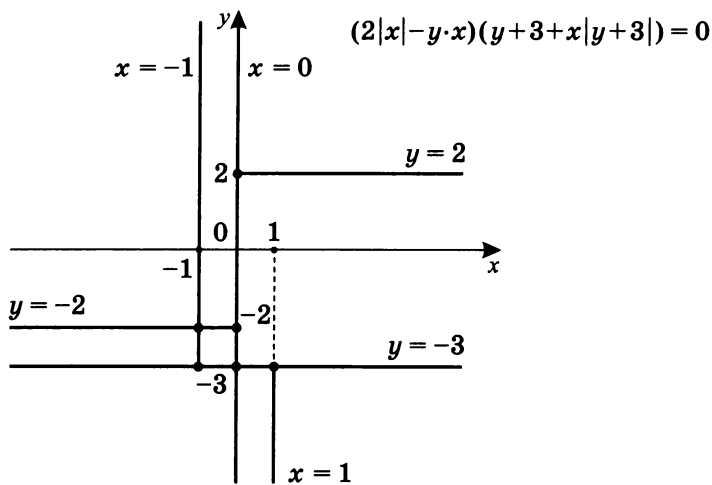
### Ответы на самостоятельную работу 7







10.



## Ответы на самостоятельную работу 8

### Вариант I

1. Уравнение  $ax = |x - 2| + 1$  в зависимости от значения параметра  $a$  имеет:
  - а) при  $a \in (-\infty; -1)$  — один корень;
  - б) при  $a \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$  — корней нет;
  - в) при  $a = \frac{1}{2}$  — один корень;
  - г) при  $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$  — два корня;
  - д) при  $a \in [1; +\infty)$  — один корень.
  
2. График функции  $y = (a - 2)(a + 3)x - a - 3$  в зависимости от значения параметра  $a$ :
  - а) при  $\begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$  параллелен оси абсцисс;
  - б) при  $a = -3$  совпадает с осью абсцисс;
  - в) при  $\begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$  параллелен прямой  $y = -4x + 1$ ;
  - г) при  $\begin{cases} a = -4 \\ a = 3 \end{cases}$  параллелен прямой  $y = 6x - 2$ ;
  - д) при  $\begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$  перпендикулярен прямой  $y = \frac{1}{6}x + 3$ .
  
3. График уравнения  $y + ax = 7 + 3x$  в зависимости от целых значений параметра  $a$ :
  - а) при  $a = 3$  имеет вид  $y = 7$  — параллелен оси абсцисс;
  - б) точки пересечения с координатными осями имеют целочисленные координаты в следующих случаях:  
 при  $a = 2$  график имеет вид  $y = x + 7$ :  
 $A(0; 7)$ ,  $B_1(-7; 0)$ ;  
 при  $a = 4$  график имеет вид  $y = -x + 7$ :  
 $A(0; 7)$ ,  $B_2(7; 0)$ ;

при  $a = 10$  график имеет вид  $y = -7x - 7$ :

$A(0; 7)$ ,  $B_3(1; 0)$ ;

при  $a = -4$  график имеет вид  $y = 7x + 7$ :

$A(0; 7)$ ,  $B_4(-1; 0)$ ;

в) прямые  $y = x + 7$  и  $y = -x + 7$  соответственно  
 $y = -7x + 7$  и  $y = 7x + 7$  симметричны относительно оси ординат;

г) исходное уравнение  $y + ax = 7 + 3x$  по сути описывает пучок прямых с общей точкой  $A(0; 7)$ .

**Комментарий.** При  $y = 0$  исходное уравнение имеет вид  $(a - 3)x = 7$ . Так как  $7$  — простое число, то его делители:  $\pm 1$ ;  $\pm 7$ , значит  $x \in \{-7; -1; 1; 7\}$ . Аналогично параметрическое выражение  $a - 3$  может принимать только значения, равные  $\pm 1$ ;  $\pm 7$ .

## Вариант II

1. Уравнение  $ax = |x + 2| + a + 1$  в зависимости от значения параметра  $a$  имеет:

а) при  $a \in (-\infty; 0]$  — один корень;

б) при  $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$  — два корня;

в) при  $a = \frac{1}{2}$  — один корень;

г) при  $a \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$  — корней нет;

д) при  $a \in (2; +\infty)$  — один корень.

2. График функции  $y = (a + 2)(a - 3)x + a + 2$  в зависимости от параметра  $a$ :

а) при  $\begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$  параллелен оси абсцисс;

б) при  $a = -2$  совпадает с осью абсцисс;

в) при  $\begin{cases} a = 4 \\ a = -3 \end{cases}$  параллелен прямой  $y = 6x + 3$ ;

- г) при  $\begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$  параллелен прямой  $y = -4x - 2$ ;
- д) при  $\begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$  перпендикулярен прямой  $y = \frac{1}{6}x - 3$ .

**3.** График уравнения  $y+ax = 2x-5$  в зависимости от целых значений параметра  $a$ :

- а) при  $a = 2$  график имеет вид  $y = -5$  — параллелен оси абсцисс;
- б) точки пересечения с координатными осями имеют целочисленные координаты в следующих случаях:  
 при  $a = 7$  график имеет вид  $y = -5x - 5$ :  
 $A(0; -5)$ ,  $B_1(-1; 0)$ ;  
 при  $a = 3$  график имеет вид  $y = -x - 5$ :  
 $A(0; -5)$ ,  $B_2(-5; 0)$ ;  
 при  $a = -3$  график имеет вид  $y = 5x - 5$ :  
 $A(0; -5)$ ,  $B_3(1; 0)$ ;  
 при  $a = 1$  график имеет вид  $y = x - 5$ :  
 $A(0; -5)$ ,  $B_4(5; 0)$ .
- в) прямые  $y = -5x - 5$  и  $y = 5x - 7$  соответственно  
 $y = -x - 5$  и  $y = x - 5$  соответственно  
 симметричны относительно оси ординат;
- г) исходное уравнение  $y+ax = 2x-5$  по сути описывает пучок прямых с общей точкой  $A(0; -5)$ .

# Содержание

Программа элективного курса .....	4
<b>1. Линейная функция .....</b>	<b>5</b>
График линейной функции .....	5
Уравнение $y = kx$ .....	10
Уравнение $kx = a$ .....	11
Самостоятельная работа 1 .....	13
Упражнения .....	14
Решение упражнений .....	18
Вариант I .....	18
Вариант II .....	23
Вариант III .....	28
Вариант IV .....	33
Самостоятельная работа 2 (Построение графиков по уравнению) .....	38
Самостоятельная работа 3 (Нахождение уравнения прямой по заданному графику) .....	39
<b>Уравнения прямых, площади ограниченных ими фигур.</b>	
<b>Виды симметрий и их влияние на вид уравнений прямых . . . .</b>	<b>43</b>
Практикум 1 .....	43
Практикум 2 .....	54
Тренировочная работа 1 .....	60
Решение тренировочной работы 1 .....	62
Самостоятельная работа 4 .....	82
<b>Кусочно-линейные функции .....</b>	<b>83</b>
Примеры кусочно-линейных функций .....	83
<b>Анализ и чтение графиков .....</b>	<b>94</b>
Примеры анализа и чтения графиков .....	94
Тренировочная работа 2 .....	100
Решение тренировочной работы 2 .....	101
Тренировочная работа 3 .....	109
Решение тренировочной работы 3 .....	111
Вариант I .....	111
Вариант II .....	120
<b>2. Графики и параметры .....</b>	<b>128</b>
Практикум 3 .....	128
Решение практикума 3 .....	129
Самостоятельная работа 5 .....	151

Самостоятельная работа 6 .....	153
Самостоятельная работа 7 .....	154
Самостоятельная работа 8 .....	155
<b>3. Ответы. ....</b>	<b>157</b>
Ответы на самостоятельную работу 1 .....	157
Ответы на самостоятельную работу 2 .....	157
Ответы на самостоятельную работу 3 .....	160
Ответы на самостоятельную работу 4 .....	160
Ответы на самостоятельную работу 5 .....	161
Ответы на самостоятельную работу 6 .....	162
Ответы на самостоятельную работу 7 .....	166
Ответы на самостоятельную работу 8 .....	169

*Учебное издание*

**Шахмейстер Александр Хаймович**

**ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ**

**ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ**

Научный редактор серии *А.В. Семенов*

Компьютерная верстка *С.С. Афонин*

Художник *Е.В. Дольник*

Корректор *Е.Г. Никитина*

**По вопросам приобретения просьба обращаться:**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»**

Тел.: (812) 943-8076; E-mail: [spb@petroglyph.ru](mailto:spb@petroglyph.ru)

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»**

В Санкт-Петербурге: (812) 292-3660, 292-3661

В Москве (филиал): (499) 488-3005

E-mail: [victory@mailbox.alkor.ru](mailto:victory@mailbox.alkor.ru); [www.victory.sp.ru](http://www.victory.sp.ru)

**ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО**

119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.

E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru); [www.mccme.ru](http://www.mccme.ru).

Подписано к печати 11.10.2013 г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Объем 11 п.л. Тираж 2000 экз. Заказ №2605

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано с оригинал-макета в ОАО «Щербинская типография».

117623, г. Москва, ЮЗАО, Типографская ул., д. 10.

Тел. (495) 726-75-98, 659-23-27, 659-25-63. E-mail: [info@tipografskaya10.ru](mailto:info@tipografskaya10.ru)

**П**еред вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

**Б. Г. Зив.**

---

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

---

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. (в 3-х книгах)
12. Уравнения и неравенства с параметрами.
13. Задачи с параметрами на экзаменах.
14. Введение в математический анализ.
15. Комплексные числа.
16. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-4439-0105-3



9 785443 901053