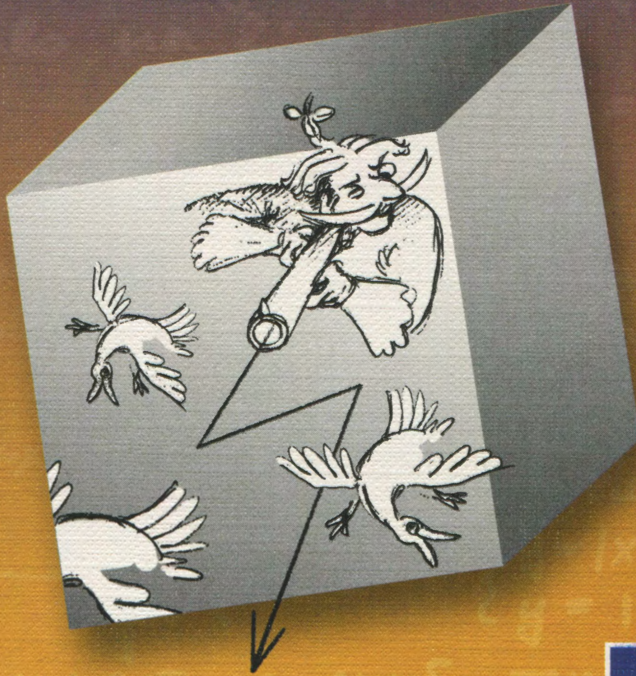
МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ

А. Х. Шахмейстер

ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ

ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ



Для тех, кто хочет учиться

А. Х. Шахмейстер

Построение и преобразования графиков. Параметры

Часть 2. Нелинейные функции и уравнения
Часть 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И УЧИТЕЛЕЙ

С.-Петербург
Москва
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6
Ш 32

Редактор:
Кандидат пед. наук, доцент кафедры
математики МИОО А. В. Семенов.

Рекомендовано
Московским институтом открытого образования (МИОО)
и Московским центром непрерывного математического
образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников,
абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.
Ш32 Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром / А. Х. Шахмейстер — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2016.—392 с.: илл.— ISBN 978-5-98712-265-5, ISBN 978-5-91673-158-3, ISBN 978-5-4439-0348-4.

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

ISBN 978-5-98712-265-5 («Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-158-3 («Виктория плюс»)
ISBN 978-5-4439-0348-4 (МЦНМО)

Посвящается памяти Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Предисловие редактора

Перед вами уникальная книга «Построение и преобразования графиков. Параметры (Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое решение уравнений и систем уравнений с параметром)» серии «Математика. Элективные курсы» по школьному курсу для тех, кто хочет учится и научится. В действительности это удивительная энциклопедия различных методов решения задач, кладовая педагогического и методического опыта преподавания сложных тем школьного курса математики. Это настоящий самоучитель, в котором с «разных позиций» рассматриваются основные идеи, связанные с исследованием графических способов решения уравнений и систем уравнений с параметром. Большое количество разнообразных примеров, уравнений, графиков позволит учащемуся «прочувствовать», графически образно представить и «увидеть» их естественное применение.

Книга адресована широкому кругу читателей:
- интересующемуся ученику обычного класса;
- ученику профильного или специализированного класса;
- студенту, изучающему высшую математику;
- учителю, преподающему школьный курс математики.

Ценность книги заключается в том, что с рассмотренными заданиями приходит понимание трудных для восприятия математических понятий, изучаемых в школе. Многие факты и идеи, заложенные в систему примеров, тренировочных и самостоятельных заданий, безусловно, могут быть использованы для подготовки к экзаменам, творческим работам и олимпиадам.

Желательно, чтобы подготовительная работа к изучению этой книги начиналась с изучения книги «Построение и преобразование графиков. Параметры» Часть I. Линейные функции и уравнения, и знакомством с книгами «Уравнения и неравенства с параметрами»; «Задачи с параметрами на экзаменах» этой серии уже в 8, 9 классе.

Планомерная работа с материалами книг этой серии вместе с материалами учебных методических комплектов дает наибольший эффект понимания и усвоения содержания школьного курса математики.

А. В. Семенов

Программа элективного курса для учащихся 8-9 классов (26–38 уроков)

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–4 (+3)	**Квадратичная функция** (стр. 7 – 30) Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ методом сечения Упражнения 1 Упражнения 2
5–7 (+2)	Практикум 1 (стр. 31 – 72) Тренировочная работа 1
8–13 (+2)	**Метод преобразований** (стр. 73 – 119) Построение графика функции $y = f(x + b)$ Графики основных элементарных функций Практикум 2 (частично) Построение графика функции $y = f(x) + C$ Практикум 3 (частично) Преобразование графиков с использованием различных видов симметрии Практикум 4 (частично)
14–21 (+3)	Построение графика функции $y = Af(x)$ $(A>0)$ (стр. 120 – 184) Практикум 5 Построение графика функции $y = f(kx)$ $(k>0)$ Практикум 6 Преобразование графиков вида $y = f(\|x + b\|)$, $y = f(\|x\| + b)$ Практикум 7 Самостоятельные работы 1–5 (частично) Тренировочная работа 2 (частично) Домашняя тренировочная работа (вариант II)
22–26 (+2)	**Графическое решение уравнений и систем с параметром** (стр. 185 – 219) Практикум 9 (2, 4, 5, 8) Тренировочная работа 3 (2, 4, 7, 8, 9) Самостоятельная работа 7 (варианты: I, II, V, VI)

Программа элективного курса для учащихся 10-11 классов (31 урок)

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1–6	**Квадратичная функция** (стр. 7 – 50) Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ методом сечения Упражнения 1–2 (частично) Практикум 1 (3, 8, 9, 10) Тренировочная работа 1 (варианты: 1, 3, 4)
7–12	**Метод преобразований** (стр. 73 – 119) Графики основных элементарных функций Практикум 2 (3, 6, 7) Построение графика функции $y = f(x) + C$ Практикум 3 (3, 4, 6, 8) Преобразование графиков с использованием различных видов симметрии Практикум 4 (1, 2, 3)
13–15	Построение графика функции $y = Af(x)\ (A>0)$ (стр. 120 – 184) Практикум 5 (частично) Построение графика функции $y = f(kx)\ (k>0)$ Практикум 6 (1, 3, 4)
16–20	Преобразование графиков (стр. 120 – 184) вида $y = f(\lvert x + b\rvert)$, $y = f(\lvert x\rvert + b)$ Практикум 7 (4, 5) Самостоятельные работы 1–5 (частично) Тренировочная работа 2 (в. 1 (1, 3, 5), в. 2 (2, 3, 4) Домашняя тренировочная работа (вариант I)
21–25	**Графическое решение уравнений и систем с параметром** (стр. 185 – 219) Практикум 9 (2, 4, 5,) Тренировочная работа 3 (2, 4, 7, 8, 12) Самостоятельная работа 7 (варианты: I, II, V, VI)
26–31	**Графическое решение уравнений и систем с параметром** (стр. 220 – 308) Практикум 10 (1, 4, 5) Тренировочная работа 4 (вариант 1) Самостоятельная работа 8 (частично) Практикум 11 Практикум 12 (2, 4, 5) Домашняя творческая работа-исследование Итоговая самостоятельная работа

1

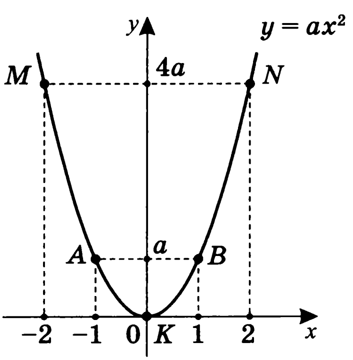
Квадратичная функция

Построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *методом сечения*

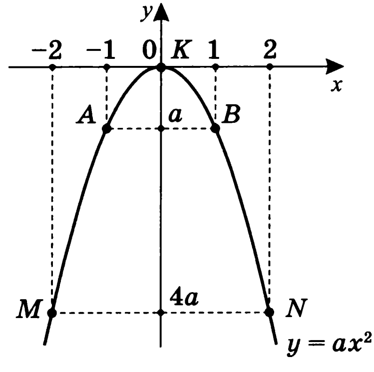
<u>Определение.</u> Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x_0; y_0)$, для которых справедливо равенство $f(x_0) = y_0$,
т. е. $\Gamma\big(y = f(x)\big) = \{(x_0; y_0)\,|y_0 = f(x_0)\}$,
где $\Gamma\big(y = f(x)\big)$ — обозначение графика функции $y = f(x)$.

Предполагается, что читатель уже знает, как строить график $y = ax^2$ по точкам. График выглядит так:

$\boxed{a > 0}$



$\boxed{a < 0}$



x	y	Координаты точек
0	0	$K\,(0;0)$
1	a	$B\,(1;a)$
-1	a	$A\,(-1;a)$
2	$4a$	$N\,(2;4a)$
-2	$4a$	$M\,(-2;4a)$

Примечание. Предполагается, что по прочтении каждого параграфа читатель будет *самостоятельно на клетчатой бумаге* строить графики, повторяя рассуждения. Поэтому на координатной плоскости мы не будем показывать клетку, чтобы не загромождать графики.

Отметим, что график функции $y = ax^2$ симметричен относительно оси Oy, т. е. если перегнуть эскиз графика по оси Oy, то точки M и N, A и B совпадут. При этом точка K, принадлежащая оси симметрии, останется неподвижной.

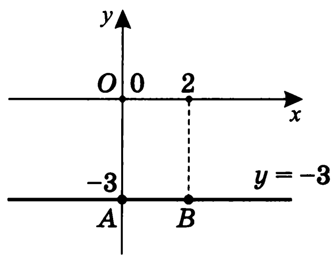
Рассмотрим функцию $y = 2x^2 - 4x - 3$.

Построим график этой функции методом **сечения**, т. е. используем пересечение графика данной функции с прямой, параллельной оси Ox. В данном случае — это прямая $y = -3$, где -3 — значение свободного (от неизвестного x) члена квадратичной функции. Здесь $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} y = -3 \\ y = 2x^2 - 4x - 3 \end{cases}$, получим $2x^2 - 4x = 0$.

Решим это уравнение: $2x(x-2) = 0$, тогда $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

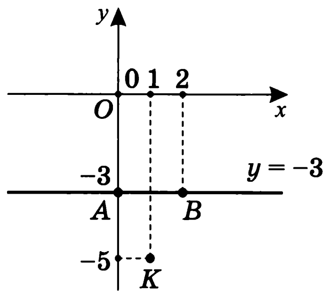
С графических позиций это значит, что при пересечении графика функции $y = 2x^2 - 4x - 3$ прямой $y = -3$ получили две точки пересечения: $A\,(0;-3)$ и $B\,(2;-3)$.



Так как интуитивно понятно, что график квадратичной функции в общем виде симметричен относительно прямой, параллельной оси ординат Oy (позже это будет доказано), то абсцисса точки, относительно которой точка A симметрична точке B, есть среднее арифметическое абсцисс этих точек, т. е. $x_0 = \frac{0+2}{2} = 1$.

Значит $x = x_0$ (точнее, $x = 1$) есть уравнение прямой, являющейся осью симметрии графика данной функции.

Найдем значение
$y_0 = 2 \cdot x_0^2 - 4x_0 - 3.$
Так как $x_0 = 1$, то
$y_0 = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = -5$, и точка $K\,(1; -5)$ называется вершиной графика данной квадратичной функции.



В принципе трех точек на графике функции достаточно, чтобы однозначно «закрепить», определить график квадратичной функции. Проверим, так ли это. Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, зная принадлежность к ее графику точек $A\,(0; -3)$, $B\,(2; -3)$ и $K\,(1; -5)$, найдем значение коэффициентов a, b и c. Если они совпадут с исходными $a = 2$, $b = -4$ и $c = -3$, то данное утверждение верно.

При желании это утверждение можно доказать в общем виде, полагая, что $A\,(x_1; y_1)$, $B\,(x_2; y_2)$ и $C\,(x_3; y_3)$ принадлежат $\Gamma\left(y = ax^2 + bx + x\right)$.

$A\,(0; -3) \in \Gamma(y = f(x));\quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3;$
$B\,(2; -3) \in \Gamma(y = f(x));\quad a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -3;$
$K\,(1; -5) \in \Gamma(y = f(x));\quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -5.$

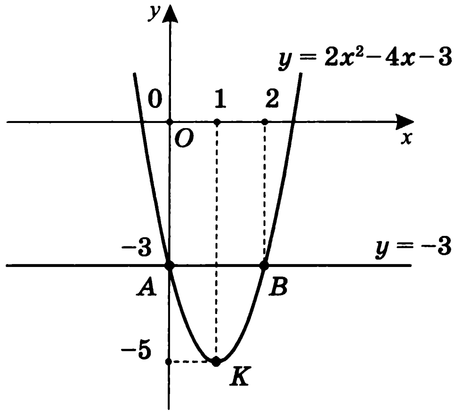
Получили систему линейных уравнений. Решим эту систему.

$$\begin{cases} c = -3 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ a + b + c = -5 \end{cases};\quad \begin{cases} c = -3 \\ 4a + 2b = 0 \\ a + b = -2 \end{cases};\quad \begin{cases} c = -3 \\ 2a = -b \\ a + (-2a) = -2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c = -3 \\ b = -2a \\ a = 2 \end{cases};\quad \begin{cases} c = -3 \\ b = -4 \\ a = 2 \end{cases},$$

т. е. $y = 2x^2 - 4x - 3$, что и требовалось доказать.

Плавно соединим точки A, B и K. Продолжим кривую за пересечение с осью абсцисс. Получим график $y = 2x^2 - 4x - 3$.

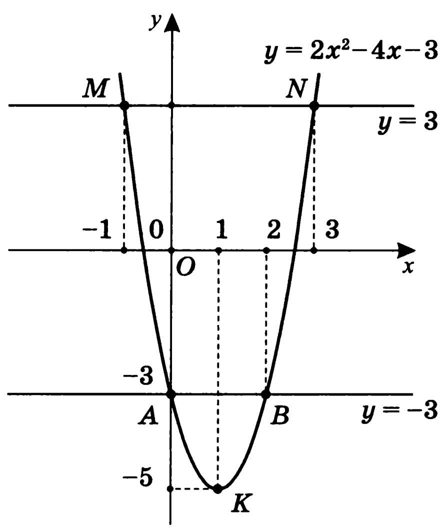


Дополнение (при первом знакомстве можно пропустить). Если необходимо более точное построение, можно провести сечение, например, прямыми $x = 3$ и $x = -1$. Главное, чтобы они были симметричны прямой $x = x_0 = 1$, т. е. оси симметрии графика квадратичной функции $y = 2x^2 - 4x - 3$. Тогда ординаты их должны быть равными.

Действительно, $f(3) = 2 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 - 3 = 3$;

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 3 = 3;$$

$N\,(3;3)$ и $M\,(-1;3)$, т. е. можно было сразу пересечь прямой $y = 3$. Получили бы те же 2 точки $M\,(-1;3)$ и $N\,(3;3)$. Значит, можно было бы сразу для уточнения графика пересечь график еще одной прямой, параллельной оси абсцисс, но нет гарантии в общем случае, что полученные при этом координаты точек пересечения будут целочисленными.



Примечания. 1. Рассмотрение секущих прямых, параллельных оси симметрии, с целочисленными абсциссами связано с желанием получить уравнение прямой сечения, параллельной оси Ox с целочисленными ординатами, т. е. $y = 3$. Тогда точки пересечения будут с целыми координатами, в противном случае, возможно, что и нет.

2. **Определение. График функции $y = f(x)$ называется симметричным относительно прямой $x = x_0$, если для любого $x \in D(f)$ существует x_0, такое что выполняется равенство $\boxed{f(x_0 + x) = f(x_0 - x)}$.**

Докажем, что график $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ симметричен относительно прямой $x = x_0$, и найдем значение x_0.

$$f(x_0 + x) = a(x_0 + x)^2 + b(x_0 + x) + c =$$
$$= \underline{ax_0^2} + 2ax_0x + \underline{\underline{ax^2}} + \underline{\underline{\underline{bx_0}}} + \underline{\underline{\underline{bx}}} + c;$$

$$f(x_0 - x) = a(x_0 - x)^2 + b(x_0 - x) + c =$$
$$= \underline{ax_0^2} - 2ax_0x + \underline{\underline{ax^2}} + \underline{\underline{\underline{bx_0}}} - \underline{\underline{\underline{bx}}} + c.$$

При $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ подобные члены этого уравнения взаимно уничтожаются, в результате получим уравнение $4ax_0x + 2bx = 0$; $\quad 2x(2ax_0 + b) = 0$.

Тогда либо $2x = 0$, либо $2ax_0 + b = 0$.

а) Пусть $2x = 0$. Так как по определению симметричности равенство должно выполняться для любых x, то вариант, при котором $x = 0$, не подходит.

б) Пусть $2ax_0 + b = 0$.

Тогда при любых значениях x $\quad x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Итак, доказано существование оси симметрии $x = x_0$, где для графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Если $x_0 = 0$, то $b = 0$, и функция будет иметь вид $y = ax^2 + c$ — ее график симметричен оси ординат.

Отметим, что при $x_0 = 0$ равенство $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ обращается в $f(-x) = f(x)$, а это по сути есть определение четности функции, график которой всегда симметричен относительно оси Oy[1].

Покажем на примерах, как можно строить графики квадратичных функций методом сечения.

1. Построим график функции $y = 4x - x^2$.

   Так как $c = 0$, то прямая сечения $y = 0$. Значит, ось абсцисс и есть прямая сечения, т. е.

   $4x - x^2 = 0; \quad x(4 - x) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;0) \\ x = 4 & B\,(4;0) \end{array}\right.$.

   $x_0 = \frac{0+4}{2} = 2; \quad y_0 = 4x_0 - x_0^2;$ т. е. $y_0 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$.

   Значит, точка $K\,(2;4)$ — вершина параболы.

   По трем точкам A, B и K построим параболу.

   Для уточнения можно вычислить:

   $y(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$,

   т. е. $M\,(1;3) \in \Gamma\left(y = 4x - x^2\right)$;

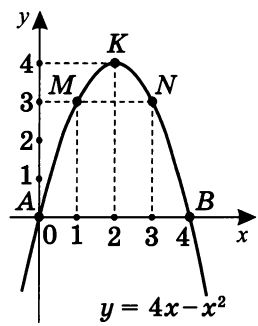
   $y(3) = 4 \cdot 3 - 3^2 = 3$,

   т. е. $N\,(3;3) \in \Gamma\left(y = 4x - x^2\right)$.

   Отметим, что $S_{x=2}(M) = N$,

   т. е. точки M и N симметричны относительно прямой $x = 2$:

   $f(2 + 1) = f(2 - 1)$.



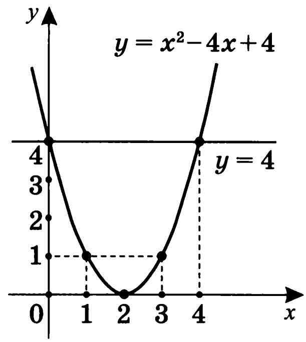
2. Построим график функции $y = x^2 - 4x + 4$.

   Так как $c = 4$, то прямая сечения $y = 4$, т. е.

   $x^2 - 4x + 4 = 4; \quad x^2 - 4x = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;4) \\ x = 4 & B\,(4;4) \end{array}\right.$.

   $x_0 = \frac{0+4}{2} = 2$, $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$, значит $K\,(2;0)$ — вершина параболы.

[1] Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Введение в математический анализ. СПб.; М.: Петроглиф, 2011, 2015. С. 330–336.



По трем точкам A, B и K построим параболу.

График $y = x^2 - 4x + 4$ должен быть симметричен относительно прямой $x = 2$.

Проверим, так ли это.

$f(2-1) = f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1;$

$f(2+1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1.$

Значит $f(2-1) = f(2+1)$ — удовлетворяет определению симметричности графика $y = x^2 - 4x + 4$ относительно прямой $x = 2$. В общем виде это было доказано относительно $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (см. с. 11). Здесь $x_0 = -\frac{-4}{2\cdot1} = 2$, значит $f(2-x) = f(2+x)$ для любого x.

3. Построим график функции $y = x^2 - 3x + 5$.

Так как $c = 5$, то прямая сечения $y = 5$.

$x^2 - 3x + 5 = 5;$

$x^2 - 3x = 0;$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; 5) \\ x = 3 & B\,(3; 5) \end{array}\right..$$

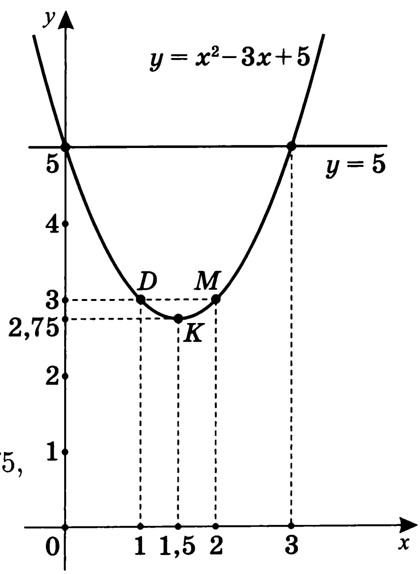
$x_0 = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$, значит

$y_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 5 =$

$= \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5 =$

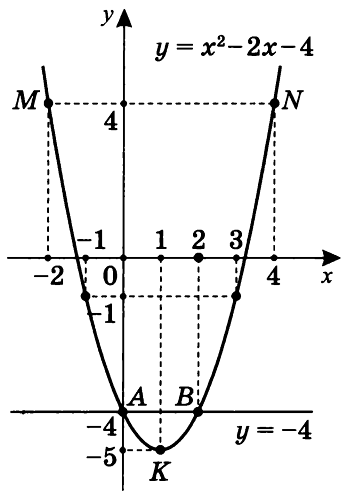
$= -2{,}25 + 5 = 2{,}75.$

Таким образом, $y_0 = 2{,}75$, и вершина параболы — точка $K\,(1{,}5; 2{,}75)$.



Для уточнения графика можно вычислить:
$y(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 3$, т. е. $D\,(1;3) \in \Gamma\left(y = x^2 - 3x + 5\right)$;
$y(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$, т. е. $M\,(2;3) \in \Gamma\left(y = x^2 - 3x + 5\right)$.
Кроме того, точки D и M симметричны относительно прямой $x = 1{,}5$: $S_{x=1,5}(D) = M$.
Итак, $f(1{,}5 + 0{,}5) = f(1{,}5 - 0{,}5)$,
и в общем случае $f(1{,}5 + x) = f(1{,}5 - x)$ для любого x.

4. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 4$.
Так как $c = -4$, то прямая сечения $y = -4$, т. е.
$-4 = x^2 - 2x - 4; \quad x^2 - 2x = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;-4) \\ x = 2 & B\,(2;-4) \end{array}\right.$.
$x_0 = \frac{0+2}{2} = 1; \quad y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 4 = -5$,
т. е. $K\,(1;-5)$ — вершина параболы.



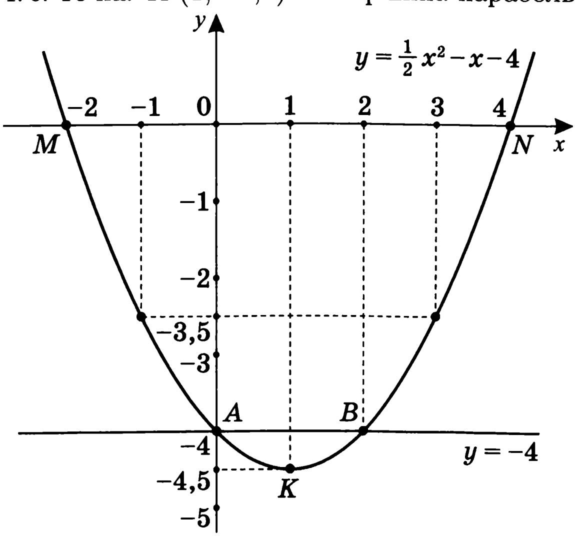
Построим график по точкам A, B и K.
Для уточнения графика вычислим:
$f(1+3) = f(4) =$
$= 4^2 - 2 \cdot 4 - 4 = 4$,
т. е. точка $N\,(4;4)$ принадлежит $\Gamma\left(y = x^2 - 2x - 4\right)$;
$f(1-3) = f(-2) =$
$= (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 4 = 4$,
т. е. точка $M\,(-2;4)$ принадлежит $\Gamma\left(y = x^2 - 2x - 4\right)$.
Итак, $f(1+3) = f(1-3)$.

Отметим, что в данном случае получаются целочисленные координаты точек параболы. Если бы мы выбрали $y = 0$, то получили бы корни уравнения $x^2 - 2x - 4 = 0$ — иррациональные числа, что неудобно для построения.

Примечание. Выяснять симметрию точек параболы весьма полезно не только с точки зрения нахождения уточняющих точек, но и с точки зрения проверки правильности вычисления оси симметрии. Действительно, пусть в примере, рассмотренном выше, $x = 2$ есть ось симметрии, тогда должно выполняться равенство $f(2+3) = f(2-3)$:
$f(2+3) = f(5) = 25 - 10 - 4 = 11;$
$f(2-3) = f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 4 = -1.$
Увы, равенство не выполняется, $f(2+3) \neq f(2-3)$, значит $x = 2$ осью симметрии не является.

5. Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

$c = -4$; $y = -4$, тогда $\frac{1}{2}x^2 - x = 0$; $x^2 - 2x = 0$;
$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; -4) \\ x = 2 & B\,(2; -4) \end{array}\right.$. $x_0 = \frac{0+2}{2} = 1$; $y_0 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 - 4 = -4{,}5$,
т. е. точка $K\,(1; -4{,}5)$ — вершина параболы.



Для уточнения можно найти точки пересечения графика $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ с осью абсцисс, т. е. $y = 0$.

$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$; $x^2 - 2x - 8 = 0$; $\left[\begin{array}{ll} x = 4 & N\,(4; 0) \\ x = -2 & M\,(-2; 0) \end{array}\right.$.

Примечание. График параболы AKB в окрестности точки K *всегда* должен быть мягко скругленным, т. е. в нем не должно быть «острия». Представьте себе игрушку «ванька-встанька», нижняя часть которой имеет форму параболоида (поверхности, полученной вращением параболы вокруг оси симметрии) с прикрепленным внутри в точке K тяжелым грузом. Если бы там было «острие», то игрушка бы заваливалась, тогда как если есть «скругление», и груз точно отцентрован, то игрушка стоит вертикально, не заваливаясь.

Теперь рассмотрим построение графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ методом сечения в <u>общем</u> виде.

1. Пусть $y = c$, тогда $ax^2 + bx + c = c$, $ax^2 + bx = 0$,

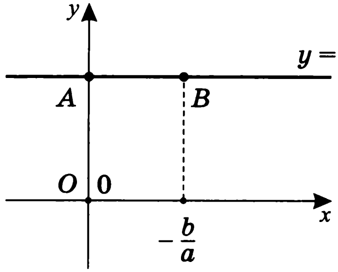
т. е. $x(ax + b) = 0$, значит $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{array}\right.$.

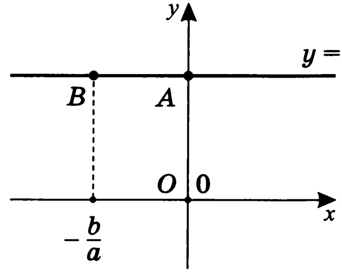
Графически это означает пересечение графика параболы прямой $y = c$, при этом получили точки пересечения

$$\begin{cases} A\,(0; c) \in \Gamma(y = f(x)) \\ B\,\left(-\frac{b}{a}; c\right) \in \Gamma(y = f(x)) \end{cases}.$$

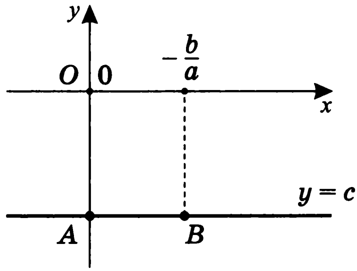
Рассмотрим в общем виде положение точек пересечения графика $y = ax^2 + bx + c$ прямой $y = c$, в зависимости от знаков коэффициентов a, b и c.

Если $\begin{cases} c > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$ Если $\begin{cases} c > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$

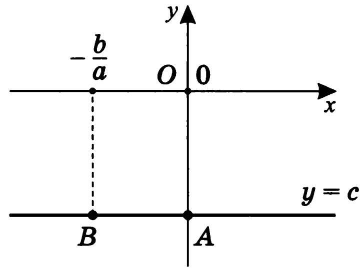




Если $\begin{cases} c < 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$



Если $\begin{cases} c < 0 \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$



2. Так как график параболы симметричен относительно прямой $x = x_0$ (эта прямая параллельна оси ординат), то

   а) $x_0 = \dfrac{0+\left(-\frac{b}{a}\right)}{2} = -\dfrac{b}{2a}$, где $x = 0$ и $x = -\dfrac{b}{a}$ — корни уравнения $ax^2 + bx = 0$.

   б) $y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$,

   или $y_0 = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$,

   где $b^2 - 4ac = D$ (дискриминант — с латинского различитель), т. е. $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$.

   Таким образом, получили еще одну точку, принадлежащую графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Это точка $K\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$, или $K\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{D}{4a}\right)$.

   Ее еще называют вершиной параболы. В принципе, трех точек вполне достаточно, чтобы однозначно построить график параболы (это было показано ранее).

3. В случае $D > 0$ ($D = b^2 - 4ac$) можно получить еще пару точек для более точного построения графика.

   Пусть $y = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, где x_1, x_2 — корни, тогда точки $M(x_1; 0)$ и $N(x_2; 0)$ также принадлежат графику параболы.

Рассмотрим вид графика параболы в зависимости от значения дискриминанта D (в случаях $D<0$, $D=0$ и $D>0$) *и различных знаков коэффициентов* a, b *и* c.

Пусть $D < 0$.

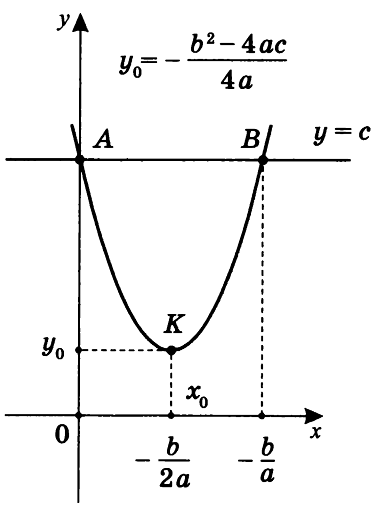
Так как $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$ ордината вершины параболы, то:

а) если $a>0$, то $y_0>0$ (парабола не пересекает ось абсцисс и находится в верхней полуплоскости),
тогда $y \geqslant y_0 > 0$ при любых x (пункты 1, 2);

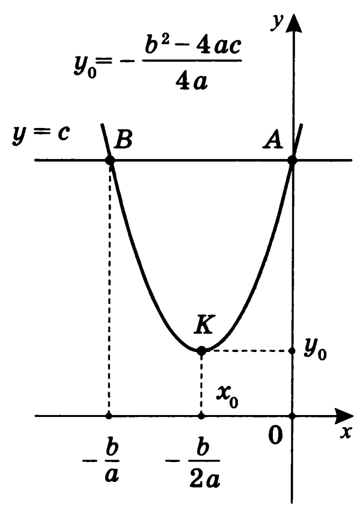
б) если $a<0$, то $y_0<0$ (парабола не пересекает ось абсцисс и находится в нижней полуплоскости),
тогда $y \leqslant y_0 < 0$ при любых x (пункты 3, 4).

Значит при $D<0$ возможный вид графиков будет:

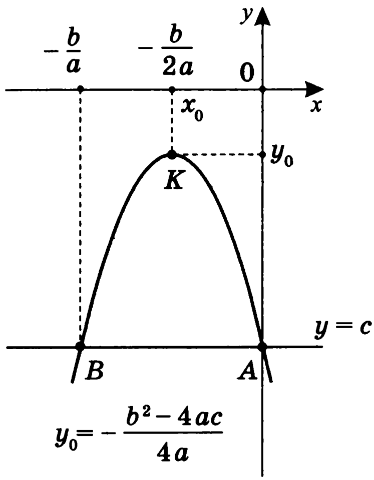
1. Если $\begin{cases} a>0 \\ c>0 \\ b<0 \end{cases}$



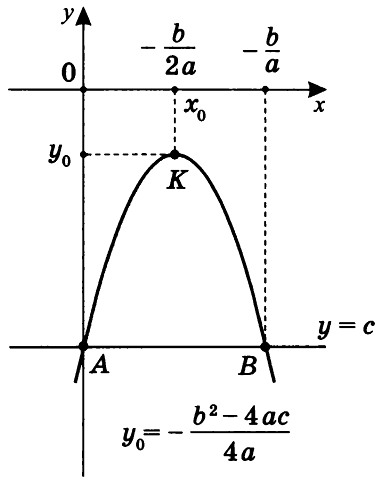
2. Если $\begin{cases} a>0 \\ c>0 \\ b>0 \end{cases}$



3. Если $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



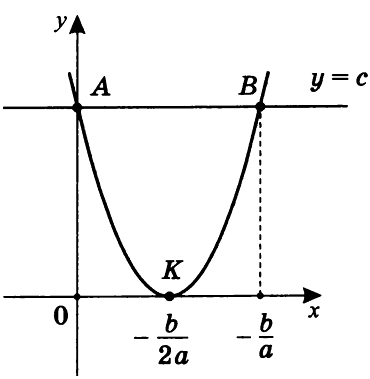
4. Если $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



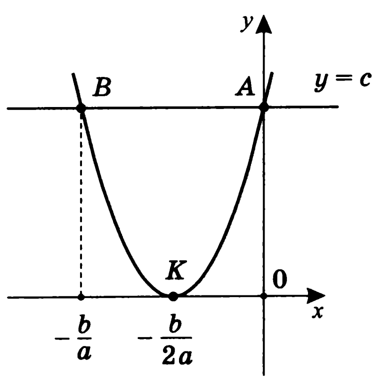
Пусть $D = 0$.

Так как $y_0 = -\frac{0}{4a} = 0$, то возможный вид графиков в этом случае:

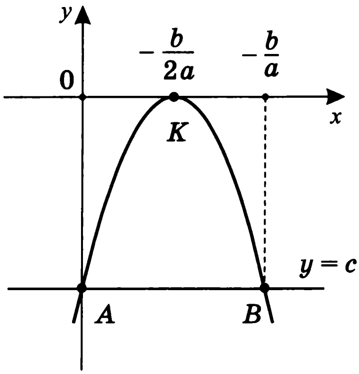
5. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



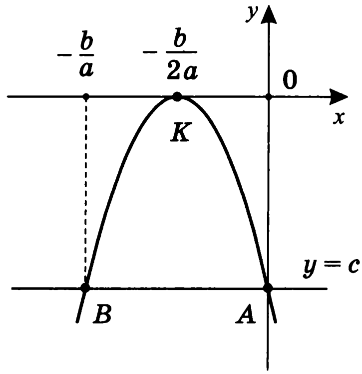
6. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



7. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



8. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



Отметим, что в пунктах 5, 6, 7 и 8 ось абсцисс есть касательная к параболе и существует единственная их общая точка — $K\left(-\frac{b}{2a};0\right)$.

Если $\boldsymbol{D > 0}$, то возможный вид графиков представлен в пунктах 9–16.

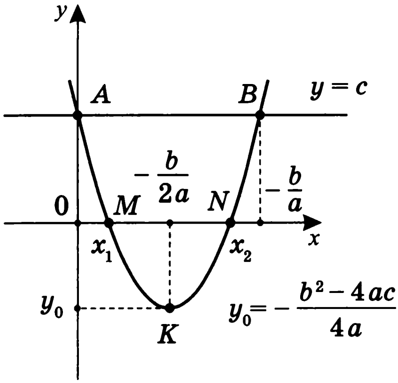
Так как $y_0 = -\frac{D}{4a}$, то при $D > 0$ следует, что $a \cdot y_0 < 0$.

Значит:

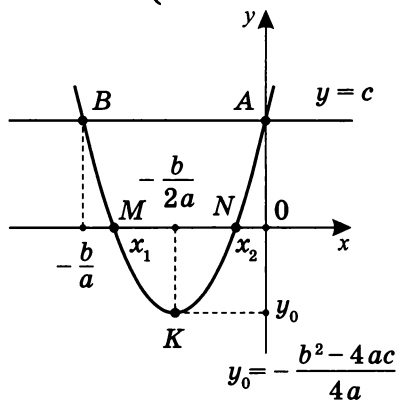
а) если $a > 0$, то $y_0 < 0$, ветви параболы направлены вверх, а вершина параболы находится в нижней полуплоскости;

б) если $a < 0$, то $y_0 > 0$, то ветви параболы направлены вниз, а вершина параболы находится в верхней полуплоскости. Значит, есть различные корни функции $y = ax^2+bx+c$, и можно найти еще две точки — $M(x_1;0)$ и $N(x_2;0)$, уточняющие график квадратичной функции.

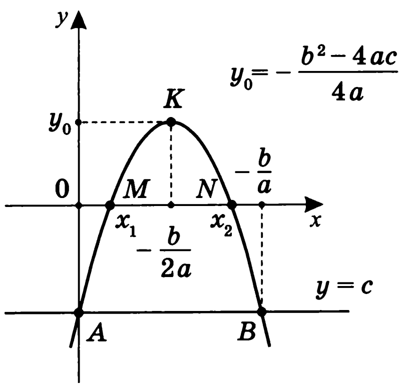
9. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



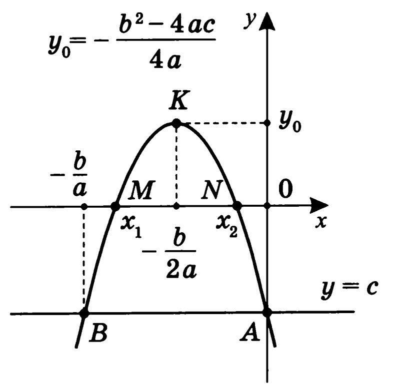
10. При $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



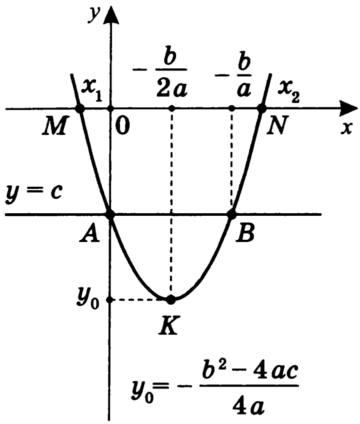
11. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



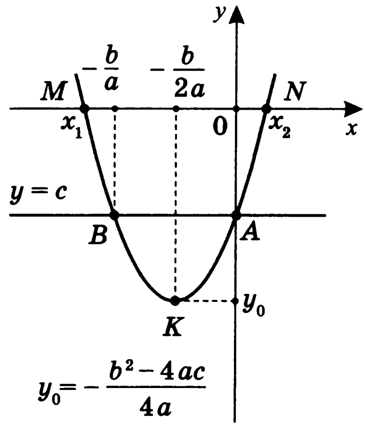
12. При $\begin{cases} a < 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



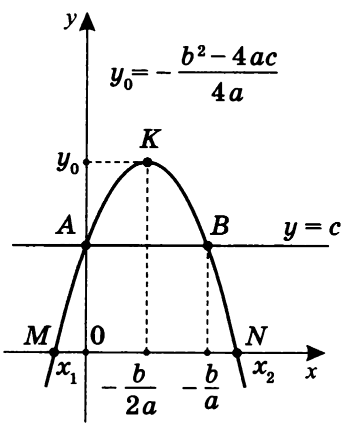
13. При $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \\ b < 0 \end{cases}$



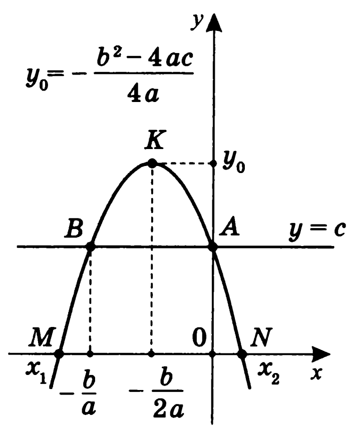
14. При $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \\ b > 0 \end{cases}$



15. При $\begin{cases} a < 0 \\ c > 0 \\ b > 0 \end{cases}$



16. При $\begin{cases} a < 0 \\ c > 0 \\ b < 0 \end{cases}$



Выводы

1. Знак коэффициента a очень важен:
при $a > 0$ ветви параболы направлены **вверх**;
при $a < 0$ ветви параболы направлены **вниз**.

2. Знак коэффициента b также очень существенен, так как:
если $-\frac{b}{a} > 0$, то вершина параболы находится в **правой** полуплоскости относительно оси ординат (это пункты 1, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15);
если $-\frac{b}{a} < 0$, то вершина параболы находится в **левой** полуплоскости относительно оси ординат (это пункты 2, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

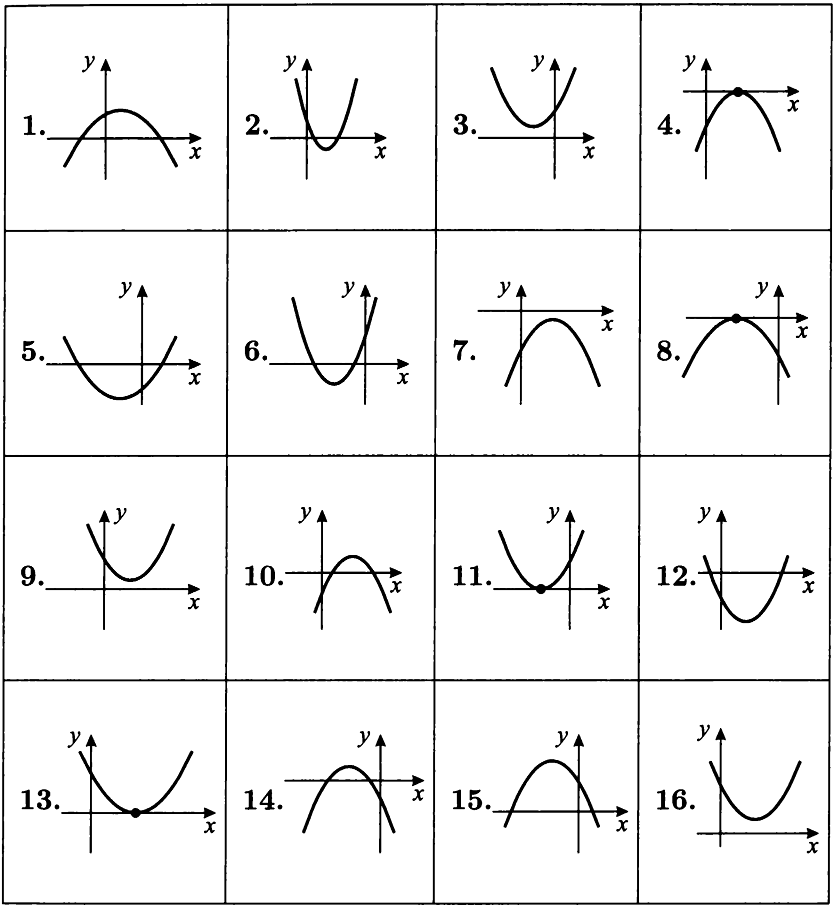
3. Знак коэффициента c означает следующее:
если $c > 0$, то точка пересечения параболы с осью ординат находится в **верхней** полуплоскости относительно оси абсцисс (пункты 1, 2, 5, 6, 9, 10, 15, 16);
если $c < 0$, то точка пересечения параболы с осью ординат находится в **нижней** полуплоскости относительно оси абсцисс (пункты 3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 14).

4. Построение графиков $y = ax^2 + bx + c$ методом сечения позволяет сделать вывод: график $y = ax^2 + bx + c$ можно получить сдвигом графика $y = ax^2$:
по горизонтали: на $\left|-\frac{b}{2a}\right|$ **влево** при $-\frac{b}{2a} < 0$, **вправо** при $-\frac{b}{2a} > 0$;
по вертикали: **вверх** на $|y_0|$ при $y_0 > 0$, **вниз** при $y_0 < 0$, где $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$.

5. Для построения графиков квадратичной функции методом сечения достаточно трех точек — A, B и K. Знание же общих формул решения квадратного уравнения не обязательно, т. е. графики можно строить до изучения формулы решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в общем виде.

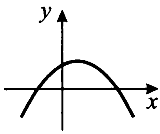
Упражнения 1

По эскизам графиков парабол ($y = ax^2 + bx + c$) определите знаки коэффициентов a, b, c и значение дискриминанта: положительное, отрицательное или нулевое.

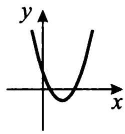


Ответы на упражнения 1

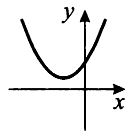
1. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$



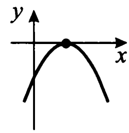
2. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$



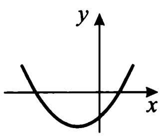
3. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D < 0 \end{cases}$



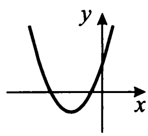
4. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D = 0 \end{cases}$



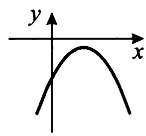
5. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$



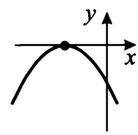
6. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$



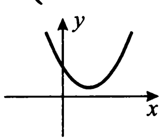
7. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D < 0 \end{cases}$



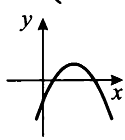
8. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ D = 0 \end{cases}$



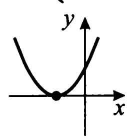
9. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D < 0 \end{cases}$



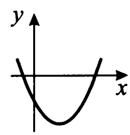
10. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$



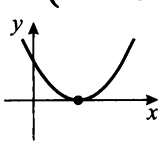
11. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \\ D = 0 \end{cases}$



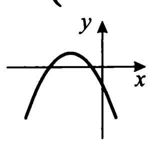
12. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$



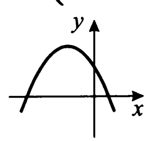
13. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D = 0 \end{cases}$



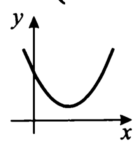
14. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c < 0 \\ D > 0 \end{cases}$



15. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D > 0 \end{cases}$

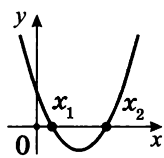
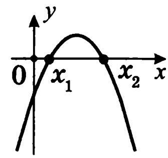
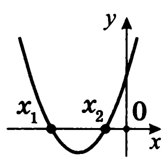
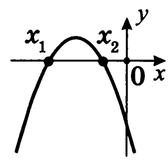
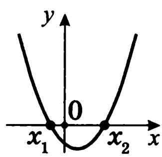
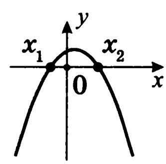
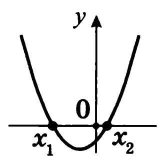
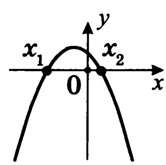


16. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \\ D < 0 \end{cases}$



Соотношение знаков корней функции $y = ax^2 + bx + c$ и знаков ее коэффициентов

Для уравнения $y = ax^2 + bx + c$, где x_1, x_2 — корни, по теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

	$a > 0$	$a < 0$
1. $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Оба корня положительные		
2. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Оба корня отрицательные		
3. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \\ \lvert x_2 \rvert > \lvert x_1 \rvert \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Корни разных знаков, но по абсолютной величине больше положительный корень		
4. $\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \\ \lvert x_2 \rvert < \lvert x_1 \rvert \end{cases}$; $\begin{cases} -\dfrac{b}{a} < 0 \\ \dfrac{c}{a} < 0 \\ D > 0 \end{cases}$ Корни разных знаков, но по абсолютной величине больше отрицательный корень		

Упражнения 2

Используя таблицу ответов к упражнениям 1 (с. 25) и таблицу, характеризующую по теореме Виета зависимость между корнями функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее коэффициентами (с. 26), постройте эскизы графиков, вычисляя только знак дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Укажите вид сдвигов базовой параболы $y = ax^2$: вверх, вниз, влево, вправо; укажите также направленность ветвей параболы: вверх, вниз.

1. $y = 2x^2 + 5x + 5;$

2. $y = -x^2 - 3x - 1;$

3. $y = 3x^2 + 5x + 1;$

4. $y = -3x^2 + 2x + 3;$

5. $y = 4x^2 - 6x - 3;$

6. $y = -2x^2 - 5x - 4;$

7. $y = 2x^2 - 3x + 5;$

8. $y = -2x^2 + 6x - 1;$

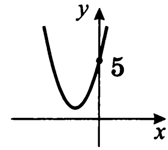
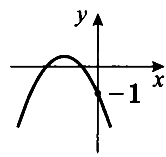
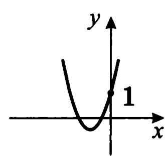
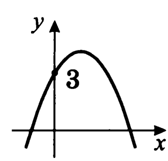
9. $y = 4x^2 + 3x - 2;$

10. $y = -3x^2 + 2x - 2;$

11. $y = 4x^2 - 6x + 2;$

12. $y = -4x^2 - 5x + 1.$

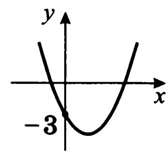
Ответы на упражнения 2

1. $y = 2x^2 + 5x + 5$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 5 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} < 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{5}{2} > 0 \\ D = -15 < 0 \end{cases}$ Ветви вверх, сдвиг влево и вверх, корней нет.	
2. $y = -x^2 - 3x - 1$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -3 < 0 \\ \frac{c}{a} = 1 > 0 \\ D = 5 > 0 \end{cases}$ Ветви вниз, сдвиг влево и вверх, оба корня отрицательны.	
3. $y = 3x^2 + 5x + 1$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases}; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3} < 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{3} > 0 \\ D = 13 > 0 \end{cases}$ Ветви вверх, сдвиг влево и вниз, оба корня отрицательны.	
4. $y = -3x^2 + 2x + 3$ $\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{2}{-3} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{3}{-3} = -1 < 0 \\ D = 40 > 0 \end{cases}$ Ветви вниз, сдвиг вправо и вверх, корни разных знаков, причем положительный корень больше по абсолютной величине.	

5. $y = 4x^2 - 6x - 3$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = -3 \end{cases} ; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{c}{a} = -\frac{3}{4} < 0 \\ D = 84 > 0 \end{cases}$$

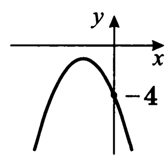
Ветви вверх, сдвиг вправо и вниз, корни разных знаков, причем положительный корень больше по абсолютной величине.



6. $y = -2x^2 - 5x - 4$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = -4 \end{cases} ; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} < 0 \\ \frac{c}{a} = 2 > 0 \\ D = -7 < 0 \end{cases}$$

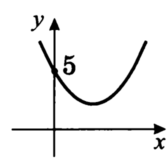
Ветви вниз, сдвиг влево и вниз, корней нет.



7. $y = 2x^2 - 3x + 5$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases} ; \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{5}{2} > 0 \\ D = -31 < 0 \end{cases}$$

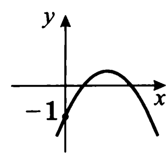
Ветви вверх, сдвиг вправо и вверх, корней нет.



8. $y = -2x^2 + 6x - 1$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases} ; \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = 3 > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \\ D = 28 > 0 \end{cases}$$

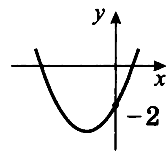
Ветви вниз, сдвиг вправо и вверх, корни одного знака — положительные.



9. $y = 4x^2 + 3x - 2$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4} < 0 \\ \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} < 0 \\ D = 41 > 0 \end{cases}$$

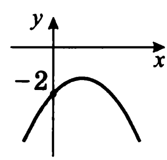
Ветви вверх, сдвиг влево и вниз, корни разных знаков, причем отрицательный корень больше по абсолютной величине.



10. $y = -3x^2 + 2x - 2$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{2}{3} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{2}{3} > 0 \\ D = -20 < 0 \end{cases}$$

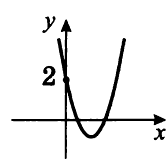
Ветви вниз, сдвиг вправо и вниз, корней нет.



11. $y = 4x^2 - 6x + 2$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -6 \\ c = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} > 0 \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \\ D = 4 > 0 \end{cases}$$

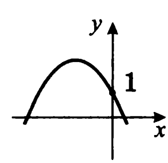
Ветви вверх, сдвиг вправо и вниз, корни одного знака — положительные.



12. $y = -4x^2 - 5x + 1$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{a} = -\frac{5}{4} < 0 \\ \frac{c}{a} = -\frac{1}{4} < 0 \\ D = 41 > 0 \end{cases}$$

Ветви вниз, сдвиг влево и вверх, корни разных знаков, причем отрицательный корень больше по абсолютной величине.



Практикум 1

Постройте графики методом сечения и исследуйте функцию по следующим параметрам:

а) промежутки монотонности;

б) промежутки знакопостоянства (т. е. промежутки, на которых функция имеет значения, постоянные по знаку);

в) наибольшее или наименьшее значение функции;

г) множество всех значений функции на промежутке $[p; k]$.

1. $y = x^2 - 4x; \quad ([-1; 5])$.

2. $y = x^2 + 6x; \quad ([-5; 1])$.

3. $y = x^2 - 6x + 9; \quad ([2; 5])$.

4. $y = x^2 + 4x + 4; \quad ([-3; 1])$.

5. $y = x^2 - 3x + 4; \quad ([2; 4])$.

6. $y = x^2 + 3x + 6; \quad ([-2{,}5; -2])$.

7. $y = x^2 - 4x - 5; \quad ([1; 3])$.

8. $y = x^2 + 2x - 3; \quad ([0; 2])$.

9. $y = 12 + 4x - x^2; \quad ([-1; 3])$.

10. $y = 8 - 2x - x^2; \quad ([1; 3])$.

Дополнительное задание. Найдя координаты точки K (вершины параболы) и используя выводы на с. 23 (4), укажите, какие сдвиги базового графика $y = x^2$ вдоль осей координат и на сколько необходимо сделать, чтобы построить данный график. Естественно, проверьте, совпадает ли уже построенный другим способом график с вашими результатами.

Решение практикума 1

1. $y = x^2 - 4x; \quad ([-1;5])$.

Построим график. Так как $c = 0$, то при $y = 0$

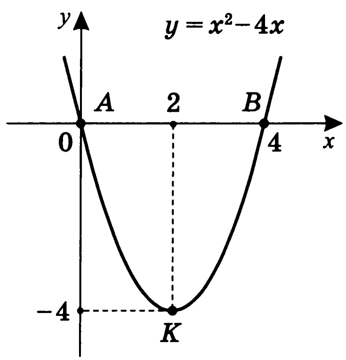
$x^2 - 4x = 0; \quad x(x-4) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;0) \\ x = 4 & B\,(4;0) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2; \quad y_0 = x_0^2 - 4x_0$, т. е. $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$,

значит $K\,(2;-4)$ — вершина параболы

(отметим, что $D = -4a \cdot y_0$ — см. с. 23).

По трем точкам A, B и K построим параболу.



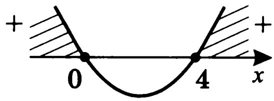
Теперь исследуем по графику поведение функции.

а) Найдем промежутки монотонности.

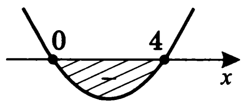
> **Определение**
>
> **а) Функция на промежутке $[p;k]$ возрастает, если для любых x_1 и x_2, где $x_1, x_2 \in [p;k]$ из $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.**
>
> **б) Функция на промежутке $[p;k]$ убывает, если для любых x_1 и x_2, где $x_1, x_2 \in [p;k]$ из $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.**
>
> **в) Если функция возрастает или убывает, то она называется монотонной.**

На $[2;\infty)$ $y = x^2 - 4x$ $\uparrow$ (монотонно возрастает);
на $(-\infty; 2]$ $y = x^2 - 4x$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Исследуем по графику промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$;



$y < 0$ при $x \in (0; 4)$.

в) Найдем по графику наибольшее или наименьшее значение функции.

> **<u>Определение</u>. а) Если для любого значения x из области определения функции $f(x_0) \geqslant f(x)$, то значение $f(x_0) = f_{\text{наиб}}$ называется наибольшим значением функции.**
> **б) Если для любого значения x из области определения функции $f(x_0) \leqslant f(x)$, то значение $f(x_0) = f_{\text{наим}}$ называется наименьшим значением функции.**

Из графика $y = x^2 - 4x$ следует, что $y_{\text{наим}} = -4$, причем $-4 = y(2)$.

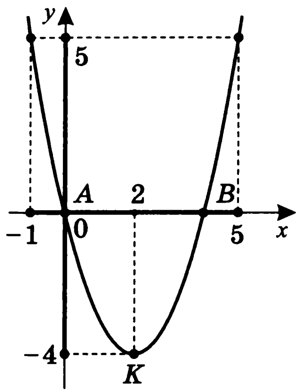
г) По графику функции $y = x^2 - 4x$ найдите множество всех значений функции, которые она может принимать на $[-1; 5]$.

Найдем сначала из графика

$f(-1) = 5$, $f(5) = 5$.

Естественно, потом для контроля вычислим значения $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) = 5$, $f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5$.

Значит, на промежутке $[-1; 5]$ множество всех значений функции, которые она может принять, $[-4; 5]$, т. е. на $[-1; 5]$ $f(x) \in [-4; 5]$ — область изменения.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 2 единицы и вниз на 4 единицы, чтобы построить график $y = x^2 - 4x$, так как $\boxed{y = (x-2)^2 - 4}$ (попробуйте доказать это сами).

2. $y = x^2 + 6x; \quad ([-5; 1])$.

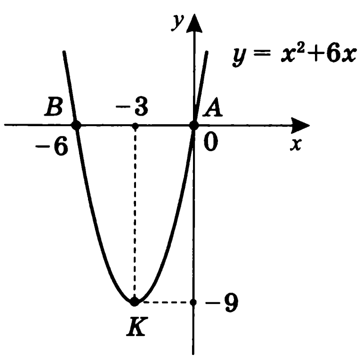
Построим график.

$c = 0; \quad x^2 + 6x = 0; \quad x(x+6) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;0) \\ x = -6 & B\,(-6;0) \end{array}\right.$.

$x_0 = \dfrac{0+(-6)}{2} = -3;$

$y_0 = (-3)^2 + 6(-3) = 9 - 18 = -9$, тогда $K\,(-3;-9)$.

По трем точкам A, B и K построим параболу.



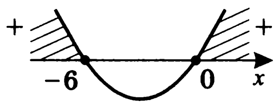
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

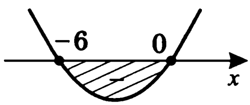
На $[-3;\infty)$ $y = x^2 + 6x$ $\uparrow$ (монотонно возрастает),

на $(-\infty; -3]$ $y = x^2 + 6x$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (0; \infty)$;



$y < 0$ при $x \in (-6; 0)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

$y_{\text{наим}} = -9$, причем $f(-3) = -9$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Рассмотрим график функции $y = x^2 + 6x$ на $[-5; 1]$.

Найдем $f(1) = 7$; $f(-5) = -5$.

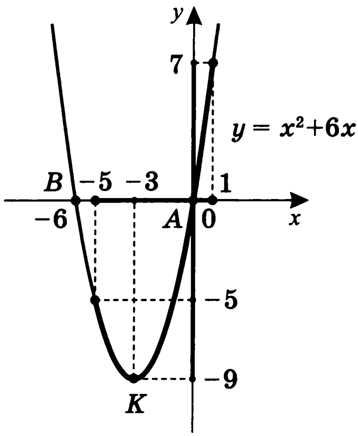
Затем для контроля вычислим значения

$f(1) = (+1)^2 + 6(+1) = 7$;

$f(-5) = (-5)^2 + 6(-5) = -5$.

Учтем, что -9 есть наименьшее значение функции. Причем $f(-3) = -9$ и $-3 \in [-5; 1]$.

Это соображение необходимо всегда иметь в виду. Значит на промежутке $[-5; 1]$ функция $y = x^2 + 6x$ принимает все значения $[-9; 7]$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на 3 единицы и вниз на 9 единиц, чтобы построить график $y = x^2 + 6x$, так как $\boxed{y = (x+3)^2 - 9}$ (докажите).

3. $y = x^2 - 6x + 9$; $([2;5])$.

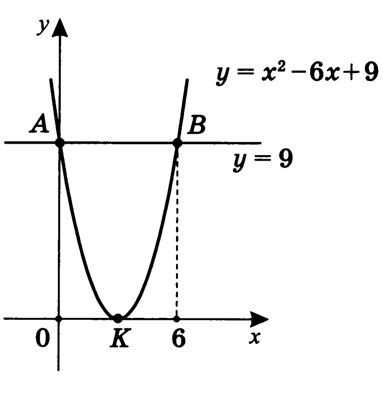
Построим график.

$c = 9$; $x^2 - 6x = 0$; $x(x-6) = 0$; $\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;9) \\ x = 6 & B\,(6;9) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+6}{2} = 3$; $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$,

тогда $K\,(3;0)$.

По трем точкам A, B и K построим параболу.



Отметим, что $y = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, причем $y_0 = -\frac{D}{4a}$, т. е. $D = 0$.

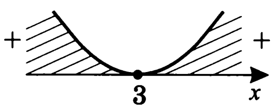
Значит, график можно было построить сдвигом графика $y = x^2$ вправо на три единицы вдоль оси абсцисс. См. с. 23 (4).

Исследование по графику.

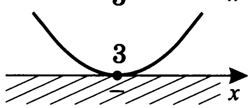
а) Промежутки монотонности.

На $[3; \infty)$ $y = x^2 - 6x + 9$ $\uparrow$ (монотонно возрастает);
на $(-\infty; 3]$ $y = x^2 - 6x + 9$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$;



$y < 0$ $\emptyset$ (нет решения).

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

$y_{\text{наим}} = 0$, причем $0 = f(3)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика функции $y = x^2 - 6x + 9$ на $[2; 5]$ найдем, что $f(2) = 1$, $f(5) = 4$.

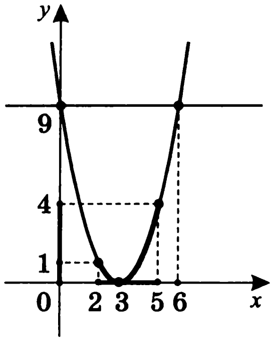
Для контроля вычислим значения:

$f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 1$; $f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 9 = 4$.

Учтем также, что $f(3) = 0$ — наименьшее значение функции, и $3 \in [2; 5]$.

Значит на $[2; 5]$ функция $y = x^2 - 6x + 9$ принимает все значения $[0; 4]$.

Иногда записывается так: $E_{[2;5]}(f) = [0; 4]$, где $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Такую запись, по усмотрению преподавателя, возможно использовать в школе, колледже, лицее.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 3 единицы, чтобы построить график $y = x^2 - 6x + 9$, так как $\boxed{y = (x-3)^2}$.

4. $y = x^2 + 4x + 4$; $([-3; 1])$.

Построим график.

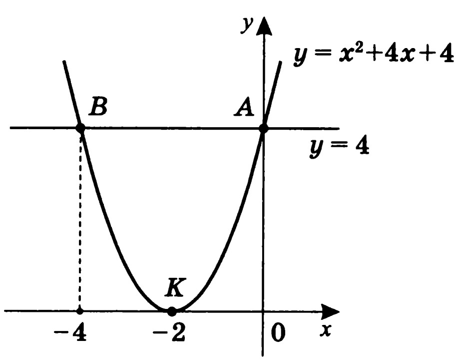
$c = 4$; $x^2 + 4x = 0$; $\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A(0;4) \\ x = -4 & B(-4;4) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+(-4)}{2} = -2$;

$y_0 = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$, тогда $K(-2;0)$.

(Можно иначе: $y_0 = -\frac{b^2-4ac}{4a}$; $D = -\frac{4^2-4\cdot 4}{4\cdot 1} = 0$, тогда $y_0 = 0$.)

По трем точкам A, B и K построим параболу.

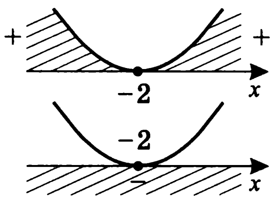


Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[-2;\infty)$ $y=f(x)$ $\uparrow$ (монотонно возрастает);
на $(-\infty;-2]$ $y=f(x)$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y>0$
при $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;\infty)$;

$y<0$ $\varnothing$ (нет решения).

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика $y=x^2+4x+4$ $y_{\text{наим}}=0$,
причем $0=y(-2)$.

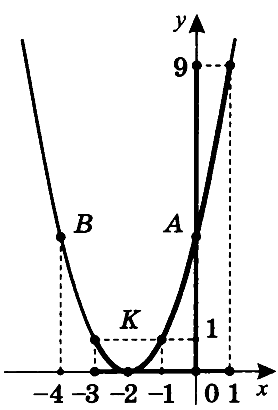
г) Множество всех значений функции на промежутке.

По графику $y=x^2+4x+4$ найдем на $[-3;1]$
$f(-3)=1$, $f(1)=9$.

Для контроля вычислим

$f(-3)=(-3+2)^2=1$, $f(1)=(1+2)^2=9$.

Значит на $[-3;1]$ функция $y=x^2+4x+4$ принимает все значения $[0;9]$ или $E_{[-3;1]}(f)=[0;9]$ $(-2\in[-3;1])$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на 2 единицы, чтобы построить график $y = x^2 + 4x + 4$, так как $\boxed{y = (x+2)^2}$.

5. $y = x^2 - 3x + 4$; $\quad([2;4])$.

Построим график:

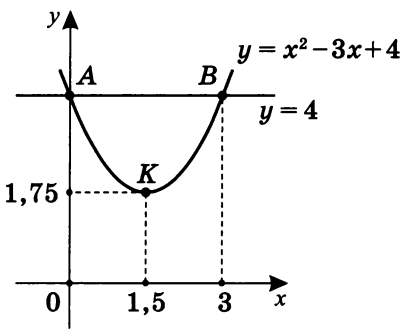
$c = 4; \quad x^2 - 3x = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A(0;4) \\ x = 3 & B(3;4) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+3}{2} = 1{,}5;$

$y_0 = (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 4 = 2{,}25 - 4{,}5 + 4 = 1{,}75 = 1\frac{3}{4}$,

тогда $K(1{,}5; 1{,}75)$.

По трем точкам A, B и K построим параболу.



Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[1{,}5; \infty)$ $\quad y = f(x) \quad \uparrow$ (монотонно возрастает);

на $(-\infty; 1{,}5]$ $\quad y = f(x) \quad \downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства функции.

$y > 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

Обратите внимание: $D = 3^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$.

$y < 0 \quad \emptyset$ (нет решения).

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика $y = x^2 - 3x + 4 \quad y_{\text{наим}} = 1{,}75$, причем $1{,}75 = y(1{,}5)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = x^2 - 3x + 4$ найдем на $[2; 4]$

$f(2) = 2, \quad f(4) = 8.$

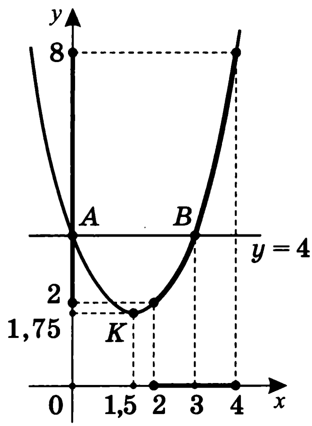
Для контроля проверим:

$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2; \quad f(4) = 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 8.$

Значит на промежутке $[2; 4]$ функция $y = x^2 - 3x + 4$ принимает все свои значения $[2; 8]$, или

$E_{[2;4]}(f) = [2; 8].$

Отметим, что $f(1{,}5) \notin [2; 8]$, так как $1{,}5 \notin [2; 4]$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 1,5 единицы и вверх на 1,75 единицы, чтобы построить график $y = x^2 - 3x + 4$, так как $\boxed{y = (x - 1{,}5)^2 + 1{,}75}$ (докажите).

6. $y = x^2 + 3x + 6; \quad ([-2{,}5; -2])$.

Построим график:

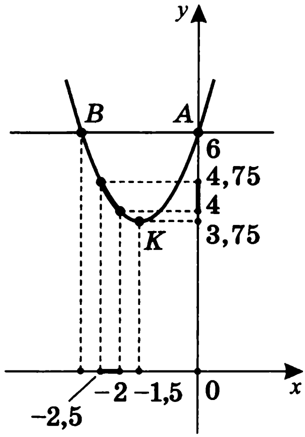
$c = 6; \quad x^2 + 3x = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; 6) \\ x = -3 & B\,(-3; 6) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+(-3)}{2} = -1{,}5;$

$y_0 = (-1{,}5)^2 + 3(-1{,}5) + 6 = 2{,}25 - 4{,}5 + 6 = 3{,}75,$

тогда $K\,(-1{,}5; 3{,}75)$.

По трем точкам A, B и K построим параболу.



Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

На $[-1{,}5; \infty)$ $y = f(x)$ $\uparrow$ (монотонно возрастает); на $(-\infty; -1{,}5]$ $y = f(x)$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства функции.

$y > 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$;

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 6 = -15 < 0$;

$y < 0$ $\emptyset$ (нет решения).

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика следует, что $y_{\text{наим}} = 3{,}75$,

причем $3{,}75 = f(-1{,}5)$.

г) Из графика $y = x^2 + 3x + 6$ найдем на $[-2{,}5; -2]$ множество значений функции: $f(-2) = 4$; $f(-2{,}5)$ по графику определить сложно.

Здесь, конечно, разумнее сразу вычислить

$f(-2{,}5) = (-2{,}5)^2 + 3(-2{,}5) + 6 = 6{,}25 - 7{,}5 + 6 = 4{,}75$,

$f(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 6 = 4 - 6 + 6 = 4$.

Значит на $[-2{,}5; -2]$ множество всех значений функции $[4; 4{,}75]$, или

$E_{[-2{,}5;-2]}\left(y = x^2 + 3x + 6\right) = [4; 4{,}75]$

$(-1{,}5 \notin [-2{,}5; -2])$.

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на 1,5 единицы и вверх на 3,75 единицы, чтобы построить график $y = x^2 + 3x + 6$, так как $\boxed{y = (x + 1{,}5)^2 + 3{,}75}$ (докажите).

7. $y = x^2 - 4x - 5; \quad ([1; 3])$.

Построим график:

$c = -5; \quad x^2 - 4x = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A(0; -5) \\ x = 4 & B(4; -5) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2;$

$y_0 = 2^2 - 2 \cdot 4 - 5 = -9,$

тогда $K(2; -9)$.

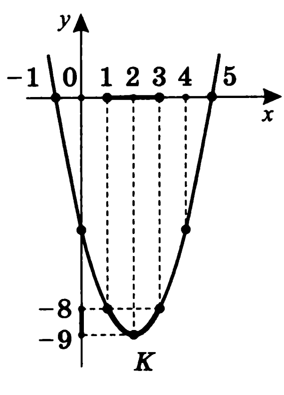
$y = 0; \quad x^2 - 4x - 5 = 0; \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3;$

$x_1 = -1; \quad x_2 = 5$

(формула для приведенного квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0; \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$), но можно решать сразу по теореме Виета: $M(-1; 0)$, $N(5; 0)$.

Построили график по пяти точкам A, B, K, M и N.



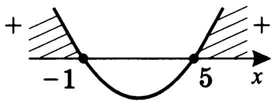
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

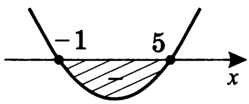
На $[2;\infty)$ $y = f(x)$ $\uparrow$ (монотонно возрастает);

на $(-\infty;2]$ $y = f(x)$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (5;\infty)$;



$y < 0$ при $x \in (-1;5)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Из графика $y = x^2 - 4x - 5$ следует, что $y_{\text{наим}} = -9$, причем $-9 = f(2)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = x^2 - 4x - 5$ найдем на $[1;3]$ значения функции $f(1) = -8$; $f(3) = 8$.

Вычисления подтверждают, что

$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 = -8$; $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 - 5 = -8$,

значит на промежутке $[1;3]$ множество всех значений $[-9;-8]$, т. е. $E_{[1;3]}(f) = [-9;-8]$ $(2 \in [1;3])$.

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 2 единицы и вниз на 9 единиц, чтобы построить график $y = x^2 - 4x - 5$, так как $\boxed{y = (x-2)^2 - 9}$ (докажите).

8. $y = x^2 + 2x - 3$; $([0;2])$.

Построим график:

$c = -3$; $x^2 + 2x = 0$; $\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A(0;-3) \\ x = -2 & B(-2;-3) \end{array}\right.$.

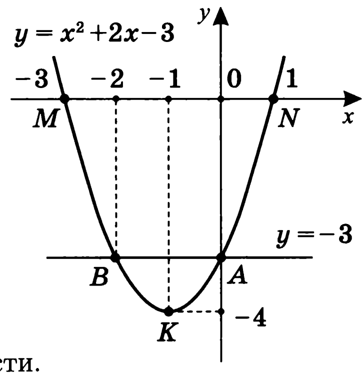
$x_0 = \dfrac{0+(-2)}{2} = -1$;

$y_0 = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$, тогда $K(-1;-4)$.

$y = 0; \quad x^2 + 2x - 3 = 0;$

по теореме Виета $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$,

т. е. $M(-3; 0)$, $N(1; 0)$.



Построили график по пяти точкам A, B, K, M и N.

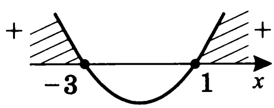
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

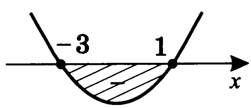
На $[-1; \infty)$ $y = f(x)$ $\uparrow$ (монотонно возрастает);

на $(-\infty; -1]$ $y = f(x)$ $\downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$;



$y < 0$ при $x \in (-3; 1)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

$y_{\text{наим}} = -4$, причем $-4 = f(-1)$.

г) Множество всех значений на промежутке.

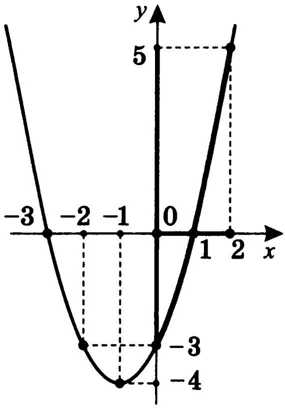
Из графика $y = x^2 + 2x - 3$ найдем на $[0; 2]$

$f(0) = -3, \quad f(2) = 5.$

Непосредственное вычисление значений функции

$f(0) = -3; \quad f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$

подтверждают, что множество всех значений на $[0; 2]$ есть $[-3; 5]$, т. е. $E_{[0;2]}(f) = [-3; 5]$ $\quad (-1 \notin [0; 2])$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сдвинуть влево на единицу и вниз на 4 единицы, чтобы построить график $y = x^2 + 2x - 3$, так как $\boxed{y = (x+1)^2 - 4}$ (докажите).

9. $y = 12 + 4x - x^2; \quad ([-1; 3])$.

Построим график.

$c = 12; \quad 4x - x^2 = 0; \quad x(4-x) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; 12) \\ x = 4 & B\,(4; 12) \end{array}\right.$.

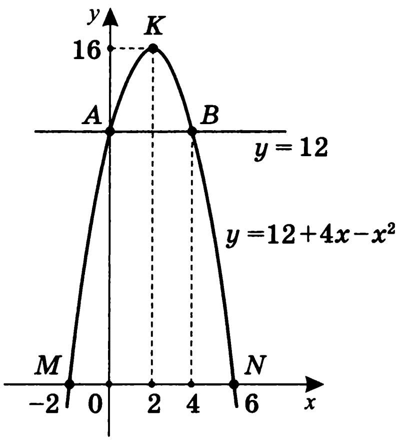
$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2;$

$y_0 = 12 + 4 \cdot 2 - 2^2 = 16$, тогда $K\,(2; 16)$.

$y = 0; \quad -x^2 + 4x + 12 = 0$, т. е. $x^2 - 4x - 12 = 0$.

По теореме Виета $\left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -2 \end{array}\right.$, т. е. $\begin{array}{l} N\,(6; 0) \\ M\,(-2; 0) \end{array}$.

Построили график по пяти точкам A, B, K, M и N.



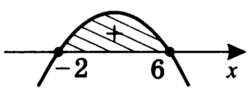
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.

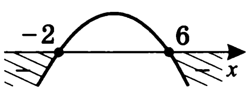
На $(-\infty; 2]$ $\quad y = f(x) \quad \uparrow$ (монотонно возрастает);

на $[2; \infty)$ $\quad y = f(x) \quad \downarrow$ (монотонно убывает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-2; 6)$;



$y < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (6; \infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.

Из графика следует, что $y_{\text{наиб}} = 16$,

причем $16 = f(2)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.

Из графика $y = 12 + 4x - x^2$ найдем на $[-1; 3]$ $f(-1) = 7$; $\quad f(3) = 15$.

Для контроля вычислим значения функции:

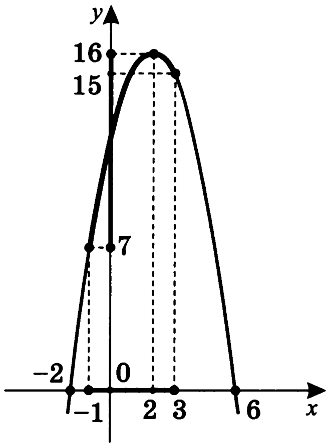
$f(-1) = 12 + 4(-1) - (-1)^2 = 7$;

$f(3) = 12 + 4 \cdot 3 - 3^3 = 15$.

Учтем, что $16 = y_{\text{наиб}}$, где $f(2) = 16$, и $2 \in [-1; 3]$.

Значит множество всех значений на $[-1;3]$ есть промежуток $[7;16]$,

или $E_{[-1;3]}(y = 12 + x - x^2) = [7;16]$ — область изменения функции $(2 \in [-1;3])$.



д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сначала симметрично отразить относительно оси абсцисс, затем получившийся график $y = -x^2$ необходимо сдвинуть вправо на 2 единицы и вверх на 16 единиц, чтобы построить график $y = -x^2 + 4x + 12$, так как $\boxed{y = -(x-2)^2 + 16}$ (докажите).

10. $y = 8 - 2x - x^2$; $([1;3])$.

Построим график.

$c = 8$; $-2x - x^2 = 0$; $-x(2 + x) = 0$;

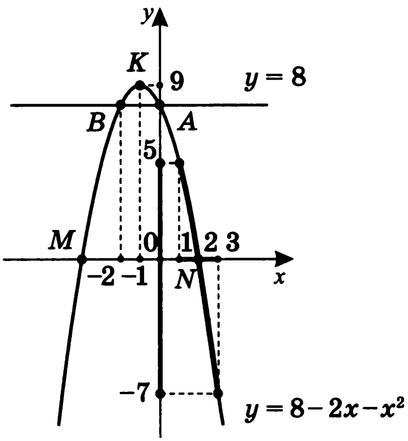
$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;8) \\ x = -2 & B\,(-2;8) \end{array}\right.$$.

$x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1$;

$y = 0; \quad 8 - 2x - x^2 = 0,$ т. е. $x^2 + 2x - 8 = 0.$

По теореме Виета $\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$, т. е. $\begin{array}{l} M(-4;0) \\ N(2;0) \end{array}$.

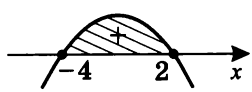
Построили график по пяти точкам A, B, K, M и N.



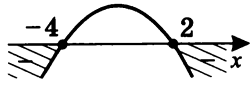
Исследование по графику.

а) Промежутки монотонности.
На $[-1;\infty)$ $\quad y = f(x) \quad \downarrow$ (монотонно убывает);
на $(-\infty;-1]$ $\quad y = f(x) \quad \uparrow$ (монотонно возрастает).

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-4;2)$;



$y < 0$ при $x \in (-\infty;-4) \cup (2;\infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение функции.
$y_{наиб} = 9$, причем $9 = f(-1)$.

г) Множество всех значений функции на промежутке.
Из графика $y = 8 - 2x - x^2$ на промежутке $[1;3]$
$f(1) = 5; \quad f(3) = -7.$

Вычислим значение функции:
$f(1) = 8 - 2 \cdot 1 - 1^2 = 5;$
$f(3) = 8 - 2 \cdot 3 - 3^2 = -7.$

Убедимся, что множество всех значений функции на $[1;3]$ есть промежуток $[-7;5]$,
или $E_{[1;3]}(y = 8 - 2x - x^2) = [-7;5]$ $(-1 \notin [1;3])$.

д) (Дополнительное задание)

Базовый график $y = x^2$ необходимо сначала симметрично отразить относительно оси абсцисс, затем получившийся график $y = -x^2$ необходимо сдвинуть влево на единицу и вверх на 9 единиц, чтобы построить график $y = -8 - 2x - x^2$, так как $\boxed{y = -(x+1)^2 + 9}$ (докажите).

Тренировочная работа 1

Постройте эскиз графика функций и по графику исследуйте функцию по следующим характеристикам:

а) промежутки монотонности;

б) промежутки знакопостоянства;

в) наибольшее или наименьшее значение;

г) область изменения на промежутке $[p; k]$.

д) При каких значениях x $L \leqslant y < T$, т. е. $y \in [L; T)$?

Вариант 1

1. $y = 3x - x^2$.

г) $D(f) = [-1; 2]$; $E(f) = ?$ $(p = -1;\ k = 2)$

д) $-4 \leqslant y < 2$: для каких x это верно?
$(L = -4;\ T = 2)$

2. $y = 2x^2 - 3x - 9$.

г) $D(f) = [1; -2]$; $E(f) = ?$ $(p = 1;\ k = -2)$

д) $-7 \leqslant y < -4$: для каких x это верно?
$(L = -7;\ T = -4)$

Вариант 2

1. $y = x^2 - 4x + 6$.

г) $D(f) = [3; 5]$; $E(f) = ?$ $(p = 3;\ k = 5)$

д) $6 \leqslant y < 11$: для каких x это верно?
$(L = 6;\ T = 11)$

2. $y = -x^2 - 6x - 8$.

г) $D(f) = [-5; -1{,}5]$; $E(f) = ?$ $(p = -5;\ k = -1{,}5)$

д) $-8 \leqslant y < -3$: для каких x это верно?
$(L = -8;\ T = -3)$

Вариант 3

1. $y = -x^2 - 2x - 6.$

г) $D(f) = [-0{,}5; 1]$; $E(f) = ?$ $(p = -0{,}5;\ k = 1)$

д) $-9 \leqslant y < -6$: для каких x это верно?
$(L = -9;\ T = -6)$

2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5.$

г) $D(f) = [2; 7]$; $E(f) = ?$ $(p = 2;\ k = 7)$

д) $-1{,}5 \leqslant y < 6$: для каких x это верно?
$(L = -1{,}5;\ T = 6)$

Вариант 4

1. $y = x^2 - 10x + 9.$

г) $D(f) = [3; 6]$; $E(f) = ?$ $(p = 3;\ k = 6)$

д) $E(f) = [-12; -7)$; $D(f) = ?$ $(L = -12;\ T = -7)$

2. $y = -2x^2 - 5x - 3.$

г) $D(f) = [-2; -0{,}25]$; $E(f) = ?$ $(p = -2;\ k = -0{,}25)$

д) $E(f) = [-1{,}875; -1)$; $D(f) = ?$
$(L = -1{,}875;\ T = -1)$

Решение тренировочной работы 1

Вариант 1

1. $y = 3x - x^2$.

Построим график.

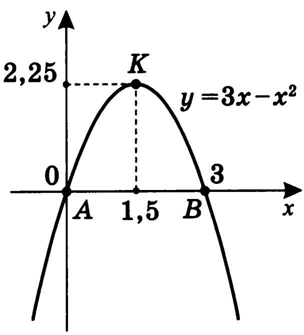
$c = 0$, тогда

$3x - x^2 = 0$; $\quad x(3 - x) = 0$; $\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; 0) \\ x = 3 & B\,(3; 0) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+3}{2} = 1{,}5$; $\quad y_0 = 3 \cdot 1{,}5 - 1{,}5^2 = 4{,}5 - 2{,}25 = 2{,}25$;

$K\,(1{,}5; 2{,}25)$.

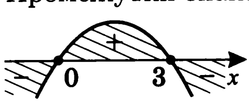
По точкам A, B и K построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.
На $(-\infty; 1{,}5]$ $\quad y = f(x) \uparrow$;
на $[1{,}5; \infty)$ $\quad y = f(x) \downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (0; 3)$;
$y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

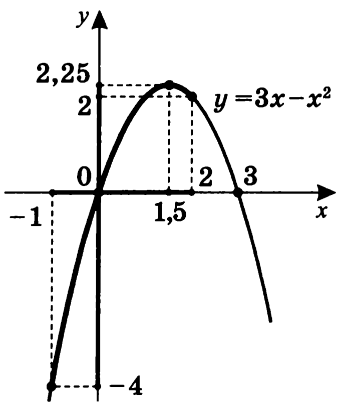
$y(1{,}5) = 2{,}25 = y_{\text{наиб}}$.

г) $D(f) = [-1; 2] \quad E(f) = ?$

$f(-1) = 3(-1) - (-1)^2 = -4; \quad f(2) = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2.$

$E(f) = [-4; 2{,}25]$

$\left(E_{[-1;2]} = [-4; 2{,}25],\ 1{,}5 \in [-1; 2]\right)$.



д) $-4 \leqslant y < 2$: для каких x это верно?

(См. чертеж на с. 55.)

Для этого пересечем график $y = 3x - x^2$ прямыми $y = 2$ и $y = -4$.

Из графика следует, что если $y = 2$, то $x = 1$ или $x = 2$, если $y = -4$, то $x = -1$ или $x = 4$.

Но это можно выяснить и аналитически:

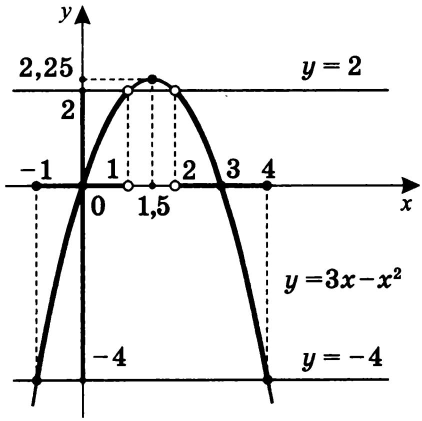
$y = 2$, т.е. $2 = 3x - x^2$;

$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.;$

$y = -4$, т.е. $-4 = 3x - x^2$;

$x^2 - 3x - 4 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -1 \end{array}\right..$

Значит для функции $y = 3x - x^2$, если $E(f) = [-4; 2)$, то это верно только для $x \in [-1; 1) \cup (2; 4]$, что и требовалось найти.



2. $y = 2x^2 - 3x - 9$.

Построим график.

$c = -9$, тогда

$$2x^2 - 3x = 0; \quad x(2x - 3) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; -9) \\ x = 1{,}5 & B\,(1{,}5; -9) \end{array}\right. .$$

$$x_0 = \frac{0+1{,}5}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

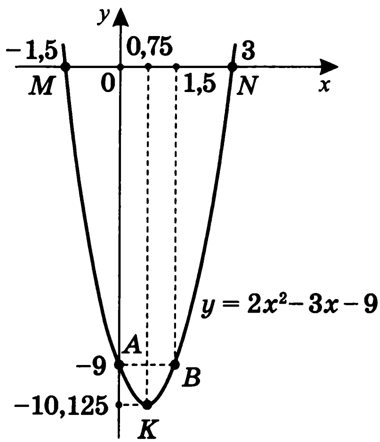
$$y_0 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} - 9 = \frac{2 \cdot 9}{16} - \frac{9}{4} - 9 = -\frac{9}{8} - 9 =$$

$$= -10\frac{1}{8} = -10{,}125.$$

$$y = 0; \quad 2x^2 - 3x - 9 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 3 & N\,(3; 0) \\ x = -1{,}5 & M\,(-1{,}5; 0) \end{array}\right. .$$

По точкам A, B, K, M и N построим график.



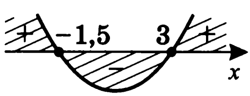
По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 0{,}75]$ $\quad y = f(x) \downarrow$;

на $[0{,}75; \infty)$ $\quad y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (3; \infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-1{,}5; 3)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только

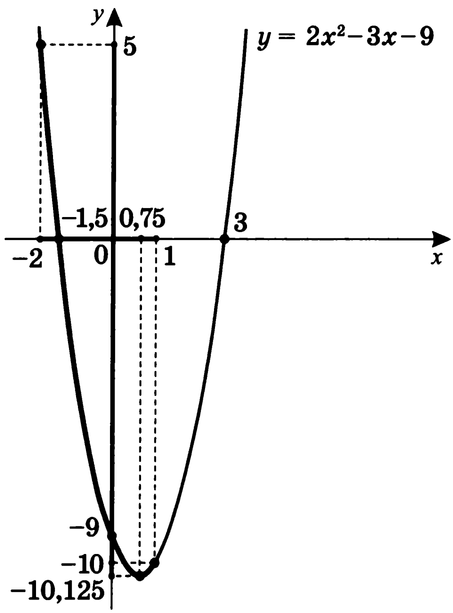
$y(0{,}75) = -10{,}125 = y_{\text{наим}}$.

г) $D(f) = [-2; 1]$; $\quad E(f) = ?$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) - 9 = 5;$

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 9 = -10.$

Значит $E(f) = [-10{,}125; 5] \quad (0{,}75 \in [-2; 1])$.



д) $-7 \leqslant y < -4$: для каких x это верно?

(См. чертеж на с. 58.)

Пересечем график $y = 2x^2 - 3x - 9$ прямой $y = -7$, тогда $x = 2$ и $x = -\frac{1}{2}$.

При $y = -4 \quad x = \frac{5}{2}$ и $x = -1$.

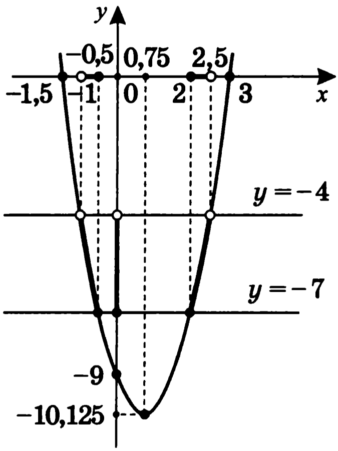
Очевидно, что лучше найти их точно аналитически, а не графически приближенно. Тогда если $y = -7$, то $2x^2 - 3x - 9 = -7$; $\quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}; \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

При $y=-4$ $2x^2-3x-9=-4$; $2x^2-3x-5=0$;

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{3\pm 7}{4};\quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{2} \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Значит для функции $y=2x^2-3x-9$, если $E(f)=[-7;-4)$, то это верно только для всех $x\in(-1;-0{,}5]\cup[2;2{,}5)$.



Примечание. Отметим, что проверка возможна и более простым способом, т. е. непосредственным вычислением при подстановке.

$f(2)=2\cdot 2^2-3\cdot 2-9=-7$;

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-9=-7$;

$f(-1)=2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-9=-4$;

$f\left(\frac{5}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)-9=-4$.

Вариант 2

1. $y = x^2 - 4x + 6$.

Построим график.

$c = 6$, тогда

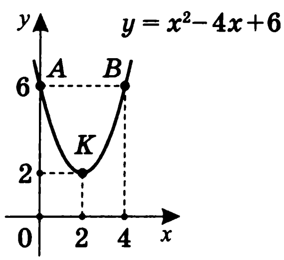
$x^2 - 4x = 0$; $\quad x(x-4) = 0$; $\quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A(0;6) \\ x = 4 & B(4;6) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+4}{2} = 2$;

$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$, т. е. $K(2;2)$.

$D = 2^2 - 6 = -2 < 0$, корней нет, т. е. пересечения параболы $y = x^2 - 4x + 6 = 0$ с осью абсцисс нет.

По точкам A, B и K построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 2]$ $\quad y = f(x) \downarrow$;

на $[2; \infty)$ $\quad y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.

$y > 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$, так как график параболы целиком находится в верхней полуплоскости.

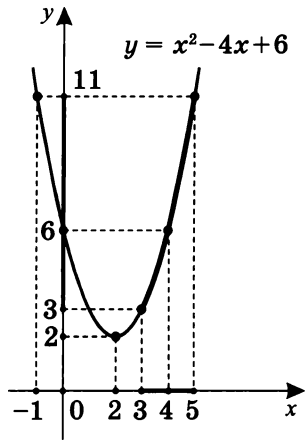
в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наим}} = y(2) = 2$.

г) $D(f) = [3; 5]$; $\quad E(f) = ?$

$y(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 3$; $\quad y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 6 = 11$.

Значит $E(f) = [3; 11]$
$(2 \notin [3; 5])$,
или $E_{[3;5]}(f) = [3; 11]$.



д) $6 \leqslant y < 11$: для каких x это верно?

Из графика параболы следует, что если $y = 6$, то $x = 0$ и $x = 4$, а если $y = 11$, то $x = -1$ и $x = 5$.

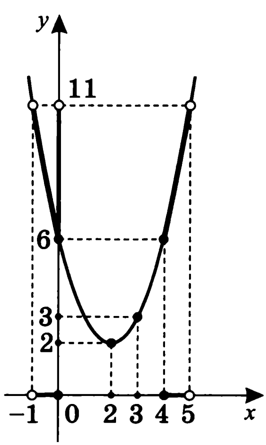
Но это можно выяснить и аналитически:

$y = 6$, т.е. $x^2 - 4x + 6 = 6$; $\quad x^2 - 4x = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$;

$y = 11$, т.е. $x^2 - 4x + 6 = 11$;

$x^2 - 4x - 5 = 0$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Следовательно, для функции $y = x^2 - 4x + 6$, если $E(f) = [6; 11)$, $\quad x \in (-1; 0] \cup [4; 5)$.



2. $y = -x^2 - 6x - 8.$

Построим график.

$c = -8$, тогда

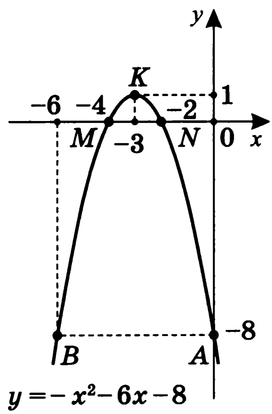
$-x^2 - 6x = 0; \quad x^2 + 6x = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A(0;-8) \\ x = -6 & B(-6;-8) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+(-6)}{2} = -3;$

$y_0 = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 8 = 1; \quad K(-3;1).$

$y = 0; \quad -x^2 - 6x - 8 = 0; \quad x^2 + 6x + 8 = 0;$

$\left[\begin{array}{ll} x = -2 & N(-2;0) \\ x = -4 & M(-4;0) \end{array}\right.$.

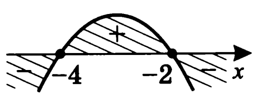


По точкам A, B, K, M и N построим график параболы.

По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.
На $(-\infty; -3]$ $\quad y = f(x) \uparrow$;
на $[-3; \infty)$ $\quad y = f(x) \downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-4; -2)$;
$y < 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; \infty)$.

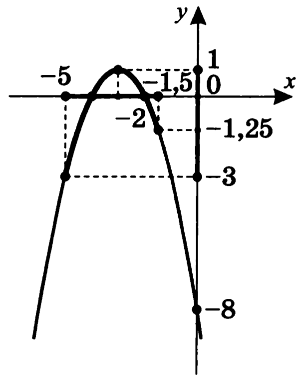
в) Наибольшее или наименьшее значение.
Очевидно, что здесь есть только $y(-3) = 1 = y_{\text{наиб}}$.

г) $D(f) = [-5; -1{,}5]; \quad E(f) = ?$
$f(-5) = -(-5)^2 - 6(-5) - 8 = -3;$
$f(-1{,}5) = -(-1{,}5)^2 - 6(-1{,}5) - 8 = -1{,}25.$

Значит $E(f) = [-3; 1]$,

или $E_{[-5;-1,5]} = [-3; 1]$

$(-2 \in [-5; -1{,}5])$.



д) $-8 \leqslant y < -3$: для каких x это верно?

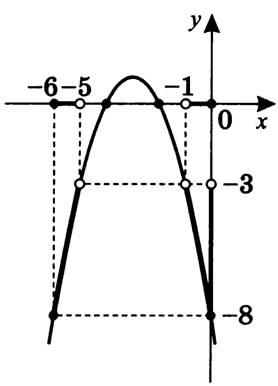
Пересечем график $y = -x^2 - 6x - 8$ прямыми:

$y = -3$, тогда $x = -5$ и $x = -1$, или решим уравнение: $-x^2 - 6x - 8 = -3$; $\quad x^2 + 6x + 5 = 0$;

$x = -5$ и $x = -1$.

$y = -8$, тогда $x = -6$ и $x = 0$ (но эти точки нам уже известны), значит для функции $y = -x^2 - 6x - 8$, если $y \in [-8; -3)$, то это верно только для

$x \in [-6; -5) \cup (-1; 0]$.



Вариант 3

1. $y = -x^2 - 2x - 6.$

Построим график.

$c = -6$, тогда

$-x^2 - 2x = 0; \quad x(x+2) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;-6) \\ x = -2 & B\,(-2;-6) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1;$

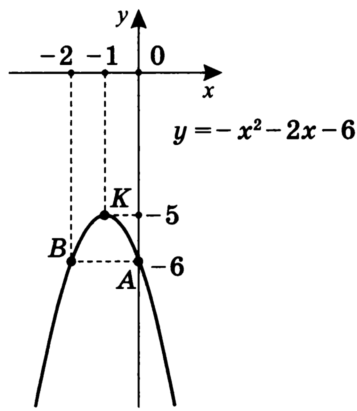
$y_0 = -(-1)^2 - 2(-1) - 6 = -5$, значит $K\,(-1;-5)$.

$y = 0, \ x^2 + 2x + 6 = 0,$

$D = 1^2 - 5 = -5 < 0,$

корней нет.

По точкам A, B и K построим график.



По графику функции определим следующие ее характеристики.

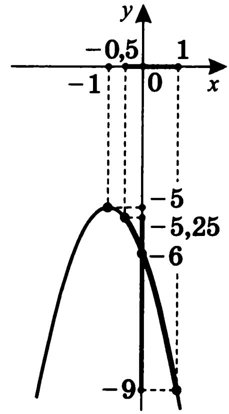
а) Промежутки монотонности.
На $(-\infty;-1]$ $\quad y = f(x)\uparrow$;
на $[-1;\infty)$ $\quad y = f(x)\downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.
$y > 0$ при $x \in \emptyset$;
$y < 0$ при $x \in (-\infty;\infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.
Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наиб}} = y(-1) = -5$.

г) $D(f) = [-0{,}5;1] \qquad E(f) = ?$
$f(-0{,}5) = -(-0{,}5)^2 - 2(-0{,}5) - 6 = -5\frac{1}{4} = -5{,}25.$
$f(1) = -1^2 - 2\cdot 1 - 6 = -9.$

Значит $E(f) = [-9; -5{,}25]$,
$E_{[-0{,}5;1]} = [-9; -5{,}25]$
$(-1 \notin [-0{,}5; 1])$.



д) $-9 \leqslant y < -6$: для каких x это верно?

Пересечем график $y = -x^2 - 2x - 6$ прямыми:

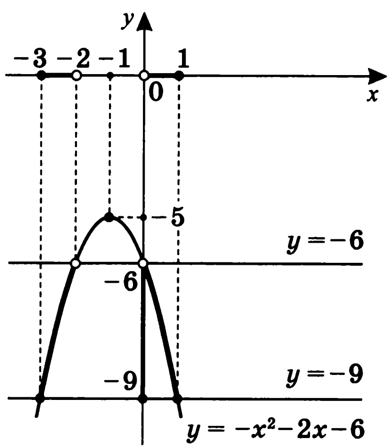
$y = -9$, тогда $x = 1$ и $x = -3$, или решим уравнение

$-x^2 - 2x - 6 = -9$, т. е. $x^2 + 2x - 3 = 0$, где $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$,

и прямой $y = -6$, тогда $x = 0$ и $x = -2$.

Значит для функции $y = -x^2 - 2x - 6$, если $y \in [-9; -6)$, то это верно только

для $x \in [-3; -2) \cup (0; 1]$.



2. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5.$

Построим график.

$c = 2{,}5$, тогда

$\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$; $\frac{1}{2}x(x-6) = 0$; $\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0; 2{,}5) \\ x = 6 & B\,(6; 2{,}5) \end{array}\right.$.

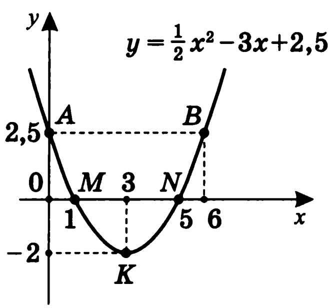
$x_0 = \frac{0+6}{2} = 3;$

$y_0 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 2{,}5 = -2$, т. е. $K\,(3; -2)$.

$y = 0$; $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5 = 0$; $x^2 - 6x + 5 = 0$;

$\left[\begin{array}{ll} x = 5 & N\,(5; 0) \\ x = 1 & M\,(1; 0) \end{array}\right.$.

По точкам A, B, K, M и N построим график.



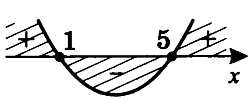
По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; 3]$ $y = f(x) \downarrow$;

на $[3; \infty)$ $y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty)$;

$y < 0$ при $x \in (1; 5)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наим}} = y(3) = -2$.

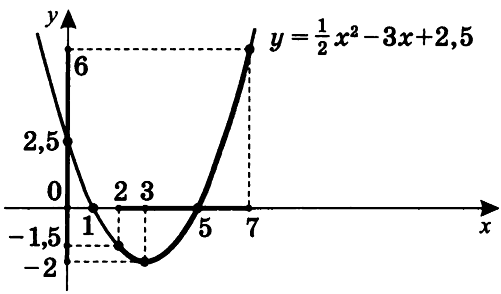
г) $D(f) = [2; 7]$; $E(f) = ?$

$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2{,}5 = -1{,}5$;

$f(7) = \frac{1}{2} \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 + 2{,}5 = 6$.

Значит $E(f) = [-2; 6]$,

или $E_{[2;7]} = [-2; 6]$ $(3 \in [2; 7])$.



д) $-1{,}5 \leqslant y < 6$: для каких x это верно?

$E(f) = [-1{,}5; 6)$, необходимо определить $D(f)$.

Пересечем график $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$ прямыми:

$y = -1{,}5$, тогда $x = 2$ и $x = 4$, или решим уравнение

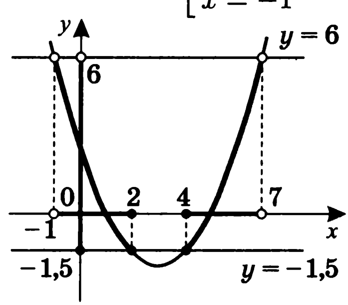
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5 = -1{,}5$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$;

$y = 6$, тогда $x = 7$ и $x = -1$, или решим уравнение

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5 = 6$; $x^2 - 6x - 7 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Значит

$D(f) = (-1; 2] \cup [4; 7)$.



Вариант 4

1. $y = x^2 - 10x + 9$.

Построим график.

$c = 9$, тогда

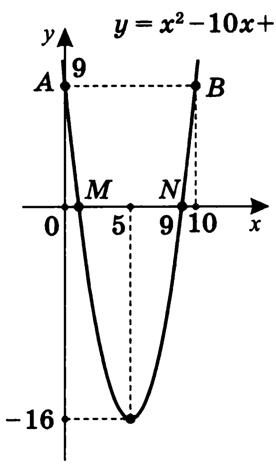
$x^2 - 10x = 0; \quad x(x-10) = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;9) \\ x = 10 & B\,(10;9) \end{array}\right.$.

$x_0 = \frac{0+10}{2} = 5;$

$y_0 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 9 = -16$, т. е. $K\,(5;-16)$.

$y = 0; \quad x^2 - 10x + 9 = 0; \quad \left[\begin{array}{ll} x = 1 & M\,(1;0) \\ x = 9 & N\,(9;0) \end{array}\right.$.

По точкам A, B, K, M и N построим график.



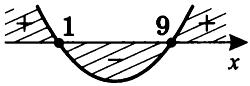
По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty;5]$ $\quad y = f(x) \downarrow$;

на $[5;\infty)$ $\quad y = f(x) \uparrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (9; \infty)$;

$y < 0$ при $x \in (1; 9)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

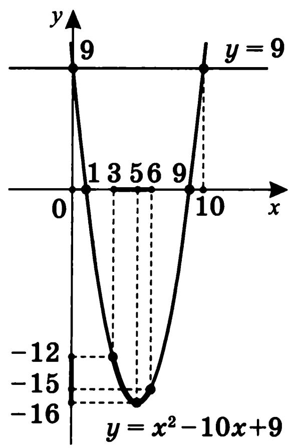
Очевидно, что здесь есть только $y_{\text{наим}} = y(5) = -16$.

г) $D(f) = [3; 6]$; $E(f) = ?$

$f(3) = 3^2 - 10 \cdot 3 + 9 = -12$;

$f(6) = 6^2 - 10 \cdot 6 + 9 = -24 + 9 = -15$.

Из графика следует, что $E(f) = [-16; -12]$, или $E_{[3;6]} = [-16; -12]$ $(5 \in [3; 6])$.



д) $E(f) = [-12; -7)$; $D(f) = ?$

Пересечем график $y = x^2 - 10x + 9$ прямыми:

$y = -12$, получим $x = 7$ и $x = 3$,

или решим уравнение

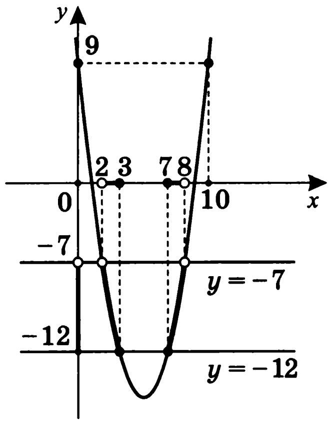
$x^2 - 10x + 9 = -12$; $x^2 - 10x + 21 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 7 \end{array}\right.$;

$y = -7$, получим $x = 2$ и $x = 8$,

или решим уравнение

$x^2 - 10x + 9 = -7$; $x^2 - 10x + 16 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Следовательно, $D(f) = (2;3] \cup [7;8)$.



2. $y = -2x^2 - 5x - 3$.

Построим график.

$c = -3$, тогда

$-2x^2 - 5x = 0; \quad -x(2x+5) = 0;$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 0 & A\,(0;-3) \\ x = -2{,}5 & B\,(-2{,}5;-3) \end{array}\right..$$

$x_0 = \frac{0+(-2{,}5)}{2} = -1{,}25 = -1\frac{1}{4};$

$y_0 = -2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 5\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) - 3 = -\frac{2\cdot 25}{16} + \frac{25}{4} - 3 =$

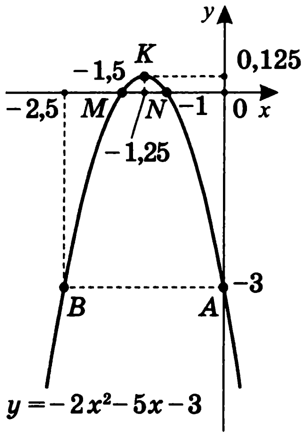
$= \frac{25}{8} - 3 = \frac{1}{8} = 0{,}125;$

$K\,(-1{,}25; 0{,}125)$.

$y = 0; \quad -2x^2 - 5x - 3 = 0; \quad 2x^2 + 5x + 3 = 0;$

$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5\pm 1}{4}; \quad \left[\begin{array}{ll} x = -1 & N\,(-1;0) \\ x = -1{,}5 & M\,(-1{,}5;0) \end{array}\right..$

По точкам A, B, K, M и N построим график.



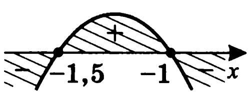
По графику функции определим следующие ее характеристики.

а) Промежутки монотонности.

На $(-\infty; -1{,}25]$ $\quad y = f(x)\uparrow$;

на $[-1{,}25; \infty)$ $\quad y = f(x)\downarrow$.

б) Промежутки знакопостоянства.



$y > 0$ при $x \in (-1{,}5; -1)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1; \infty)$.

в) Наибольшее или наименьшее значение.

Очевидно, что здесь есть только

$y_{\text{наиб}} = y(-1{,}25) = 0{,}125$.

г) $D(f) = [-2; -0{,}25]$; $\quad E(f) = ?$

$f(-2) = -2(-2)^2 - 5(-2) - 3 = -1;$

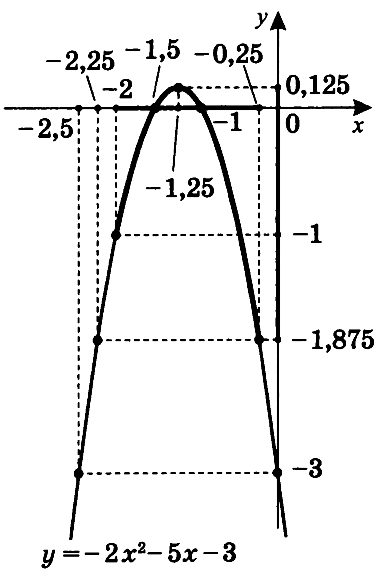
$f(-0{,}25) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 3 =$

$= -\frac{1}{8} + \frac{5}{4} - 3 = -1\frac{7}{8} = -1{,}875.$

Значит, $E(f) = [-1{,}875; 0{,}125]$,

или $E_{[-2;-0,25]} = [-1{,}875; 0{,}125]$

$(-1{,}25 \in [-2; -0{,}25])$.



д) $E(f) = [-1{,}875; -1)$ $\quad D(f) = ?$

Графически точно решить этот вопрос очень трудно. Рассмотрим этот вопрос аналитически, для этого решим уравнение $y = -1{,}875$ и $y = -1$.

$$-2x^2-5x-3=-1{,}875; \quad -2x^2-5x-3=-\frac{15}{8};$$

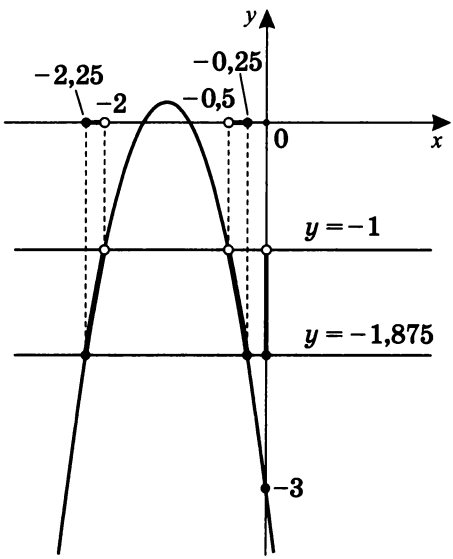
$$-16x^2-40x-9=0, \text{ т. е. } 16x^2+40x+9=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-20\pm\sqrt{400-144}}{16}=\frac{-20\pm16}{16}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{4} \\ x=-\frac{9}{4} \end{array}\right..$$

$$-2x^2-5x-3=-1; \quad 2x^2+5x+2=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm3}{4}; \quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Следовательно, $D(f)=[-2{,}25;-2)\cup(-0{,}5;-0{,}25]$.



2

Метод преобразований

Первоначальные соображения, связанные с опытом построения графиков квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ методом сечения, привели к возможности построения таких графиков сдвигом вдоль осей координат.

Рассмотрим такой способ более подробно и для более широкого класса элементарных функций.

Вопрос в общем виде звучит так: как построить график функции $y = Af(kx + b) + C$, если известен график функции $y = f(x)$?

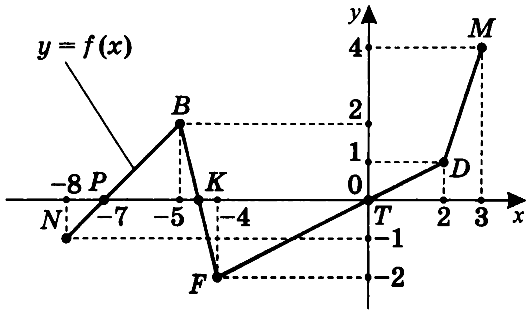
Построение графика функции $y = f(x + b)$

Для графика функции, заданной в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$, рассмотрим случай $A = 1$, $k = 1$, $C = 0$.

Ясно, что в этом случае необходимо построить график функции $y = f(x + b)$, зная график функции $y = f(x)$.

Рассмотрим базовый график кусочно-линейной функции, заданной точками N, B, F, D и M.

Отметим точки P, K и T на оси абсцисс (T — и на оси ординат).



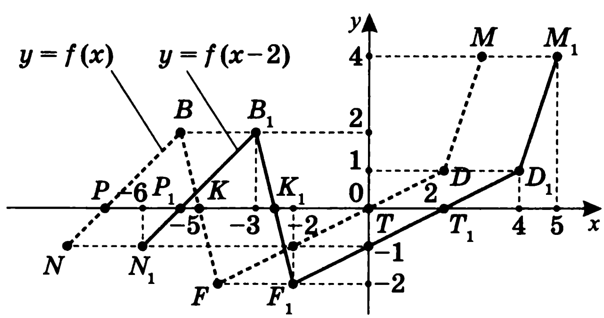
Пусть $b = -2$.

Тогда для $y = f(x-2)$ точки N, B, F, D и M перейдут в точки N_1, B_1, F_1, D_1 и M_1.

На примере точки N получаем:

$x - 2 = -8$, т. е. $x = -6$; $y = -1$ (так как $f(-8) = -1$).

$N(-8;-1) \to N_1(-6;-1)$, т. е. $x - 2 = -8$, $x = -6$ и $y = -1$;
$B(-5;2) \to B_1(-3;2)$, т. е. $x - 2 = -5$, $x = -3$ и $y = 2$;
$F(-4;-2) \to F_1(-2;-2)$ (далее аналогично);
$D(2;1) \to D_1(4;1)$;
$M(3;4) \to M_1(5;4)$;
$P(-7;0) \to P_1(-5;0)$;
$K(-4{,}5;0) \to K_1(-2{,}5;0)$;
$T(0;0) \to T_1(2;0)$.

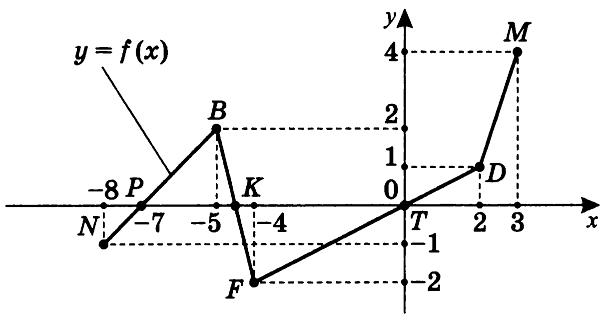


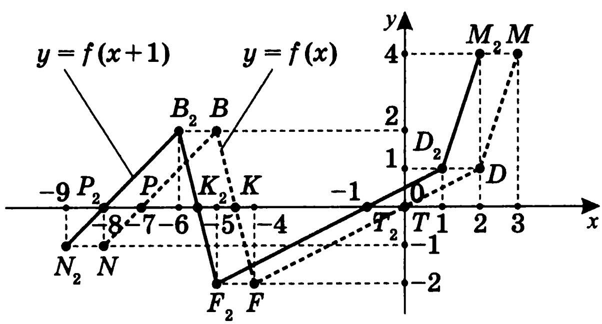
Пусть $b = 1$.

Тогда для $y = f(x+1)$:

$N(-8;-1) \to N_2(-9;-1)$, т. е. $x+1=-8$, $x=-9$ и $y=-1$;
$B(-5;2) \to B_2(-6;2)$, т. е. $x+1=-5$, $x=-6$ и $y=-1$;
$F(-4;-2) \to F_2(-5;-2)$ (далее аналогично);
$D(2;1) \to D_2(1;1)$.

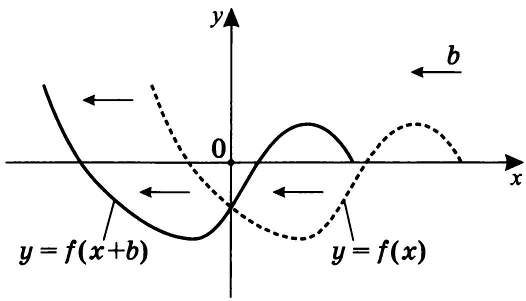
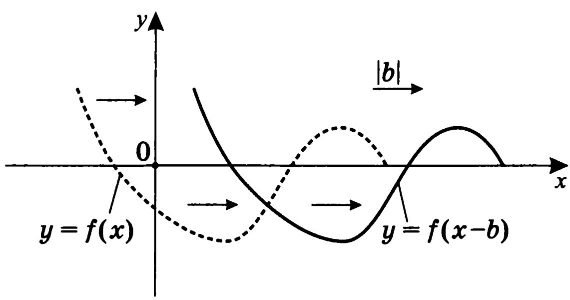
Аналогично для точек P, K, T и M.





Так как $N(x_0;y_0) \in \Gamma(y = f(x))$, то если $x_1 = x_0 + b$, то $N_1(x_0+b;y_0) \in \Gamma(y = f(x+b))$.

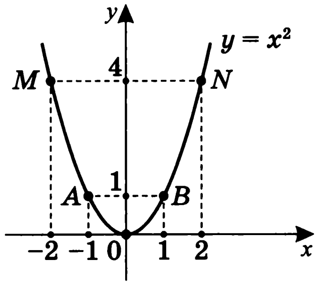
Значит, точка $N_1(x_1;y_0)$ получена сдвигом точки $N(x_0;y_0)$ вдоль оси абсцисс на величину $|b|$: *вправо*, если $b < 0$, и *влево*, если $b > 0$.

<table>
<tr><td colspan="2">Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x+b)$ графика функции $y = f(x)$ область изменения остается прежней, а конечная область определения сдвигается на $|b|$ вправо при $b < 0$ и влево при $b > 0$. Если область определения — $(-\infty; \infty)$, то изменений нет.</td></tr>
<tr><td>1. $y = f(x+b)$
$(b > 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц влево.

</td></tr>
<tr><td>2. $y = f(x+b)$
$(b < 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц вправо.

</td></tr>
</table>

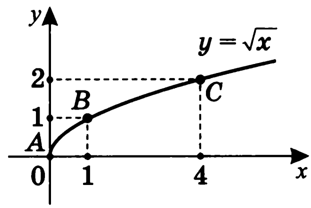
Графики основных элементарных функций

Напомним графики основных элементарных функций, чтобы в дальнейшем использовать их для иллюстрации методов преобразований.

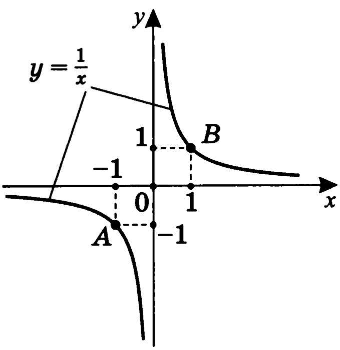
1.



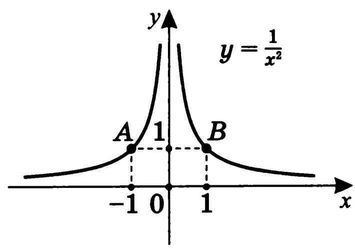
2.



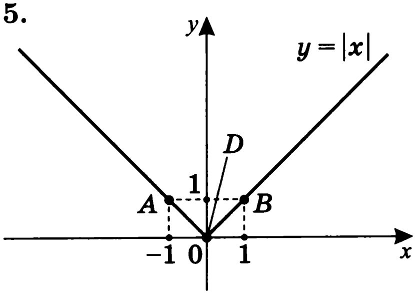
3.



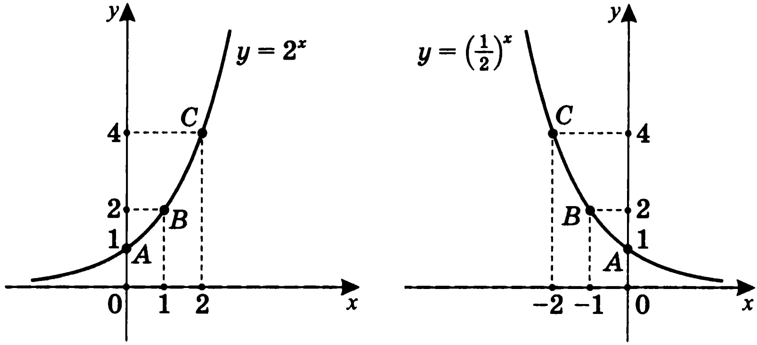
4.



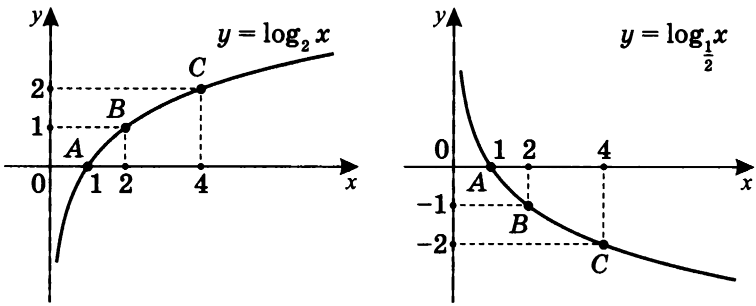
5.



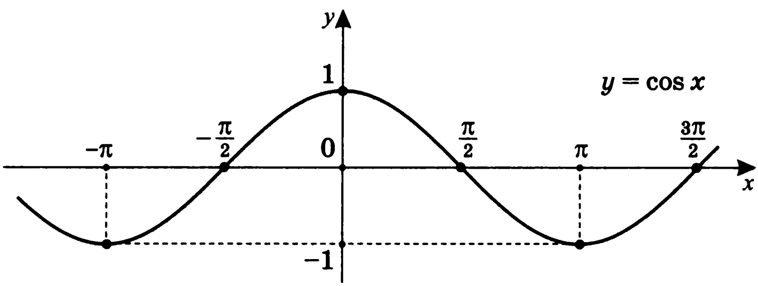
6.


$y = 2^x$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
A
B
C
0
1
2
4
−2
−1
x
y

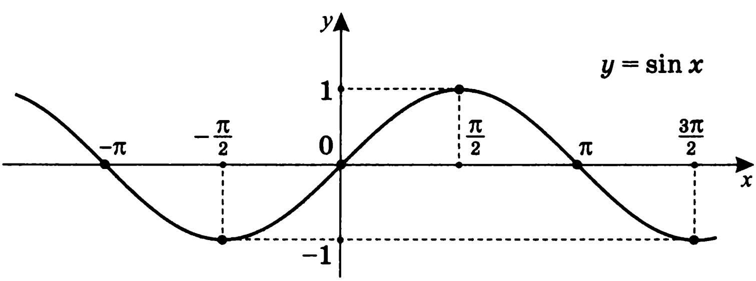
7.


$y = \log_2 x$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
A
B
C
0
1
2
4
−1
−2
x
y

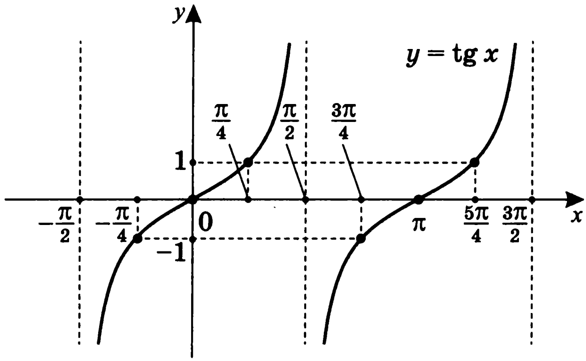
8.


$y = \cos x$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
1
−1
x
y

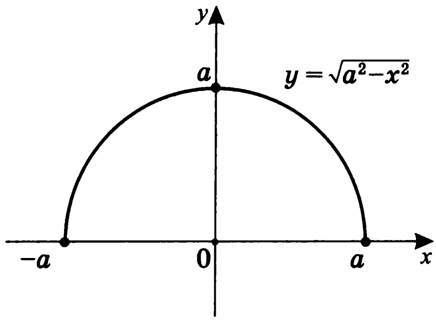
9.


$y = \sin x$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
1
−1
x
y

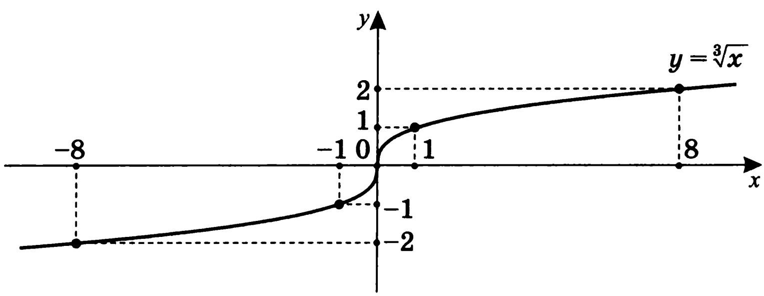
10.


y
y = tg x
π/4
π/2
3π/4
1
−π/2
−π/4
0
−1
π
5π/4
3π/2
x

11.


y
a
y = √(a²−x²)
−a
0
a
x

12.


y
y = ∛x
2
1
−8
−1 0
1
8
x
−1
−2

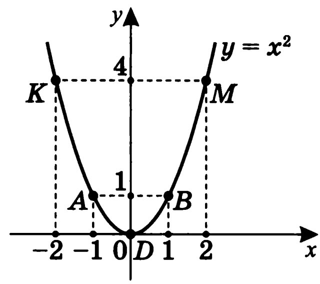
Практикум 2

Постройте графики функций, используя преобразования вида $\boldsymbol{y = f(x+b)}$.

1. $y = f(x) = x^2$,
   где а) $b = -2$; б) $b = 1$.
2. $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$,
   где а) $b = 1$; б) $b = -2$.
3. $y = f(x) = \sqrt{x}$,
   где а) $b = -3$; б) $b = 2$.
4. $y = f(x) = |x|$,
   где а) $b = 3$; б) $b = -2$.
5. $y = f(x) = 2^x$,
   где а) $b = -2$; б) $b = 1$.
6. $y = f(x) = \log_2 x$,
   где а) $b = 2$; б) $b = -1$.
7. а) $y = f(x) = \sin x$ при $b = -\frac{\pi}{2}$;
   б) $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ при $b = \frac{\pi}{4}$.
8. $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,
   где а) $b = -1$; б) $b = 2$.

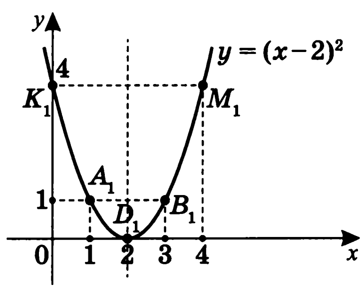
Решение практикума 2

1. Пусть $f(x) = x^2$. Рассмотрим график $y = x^2$. Очевидно, что ось ординат есть ось симметрии графика функции $y = x^2$.



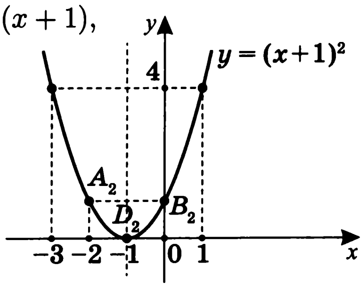
а) Пусть $b = -2$, т. е. $f(x-2) = (x-2)^2$.
Тогда имеем сдвиг графика функции $y = f(x)$ *вправо* на 2 относительно оси симметрии параболы $y = x^2$.
Построим график функции $y = f(x-2)$, т. е. $y = (x-2)^2$:

$K\,(-2;4) \to K_1\,(0;4)$;
$A\,(-1;1) \to A_1\,(1;1)$;
$D\,(0;0) \to D_1\,(2;0)$;
$B\,(1;1) \to B_1\,(3;1)$;
$M\,(2;4) \to M_1\,(4;4)$.



б) Пусть $b = 1$, т. е. $f(x+1) = (x+1)^2$.
Тогда имеем сдвиг графика функции $y = f(x)$ *влево* на 1 относительно оси симметрии параболы $y = x^2$.
Построим график $y = f(x+1)$, т. е. $y = (x+1)^2$:

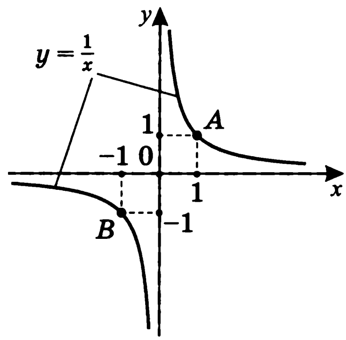
$A\,(-1;1) \to A_2\,(-2;1)$;
$D\,(0;0) \to D_2\,(-1;0)$;
$B\,(1;1) \to B_2\,(0;1)$.



Так как парабола определяется тремя точками, то рассматривать изменение координат точек K и M не обязательно.

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Рассмотрим график $y = \frac{1}{x}$.

Для этого графика ось абсцисс $y = 0$ — горизонтальная асимптота, а ось ординат $x = 0$ — вертикальная асимптота.



а) Пусть $b = 1$, т. е. $f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

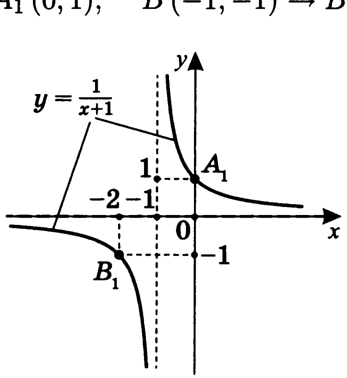
Построим график функции $y = f(x+1)$,

т. е. $y = \frac{1}{x+1}$.

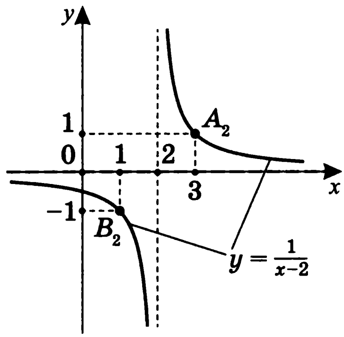
Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x}$ *влево* на 1.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется, вертикальная асимптота $x = 0$ переходит к $x = -1$.

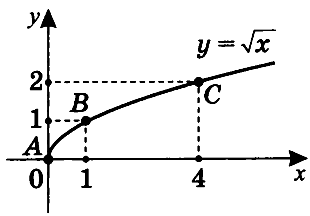
$A\,(1;1) \to A_1\,(0;1)$; $\quad B\,(-1;-1) \to B_1\,(-2;-1)$.



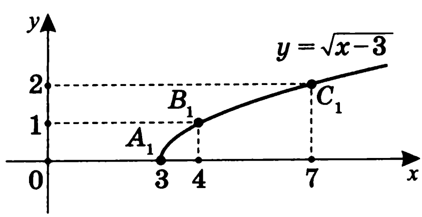
б) Пусть $b = -2$, т. е. $f(x-2) = \frac{1}{x-2}$.
Построим график функции $y = f(x-2)$,
т. е. $y = \frac{1}{x-2}$.
Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x}$ *вправо* на 2.
Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется, вертикальная асимптота $x = 0$ переходит к $x = 2$.
$A(1;1) \to A_2(3;1)$; $B(-1;-1) \to B_2(1;-1)$.



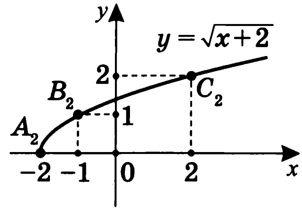
3. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Рассмотрим график $y = \sqrt{x}$.



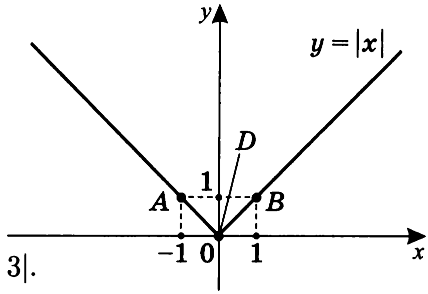
а) Пусть $b = -3$, т. е. $f(x-3) = \sqrt{x-3}$.
Построим график функции $y = f(x-3)$,
т. е. $y = \sqrt{x-3}$.
Имеем сдвиг графика функции $y = \sqrt{x}$ *вправо* на 3.
$A(0;0) \to A_1(3;0)$;
$B(1;1) \to B_1(4;1)$;
$C(4;2) \to C_1(7;2)$.



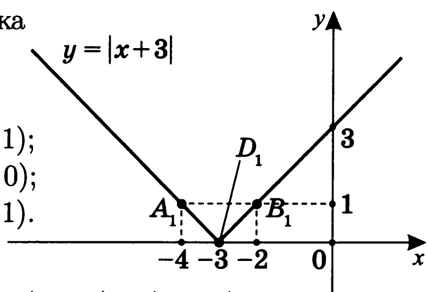
б) Пусть $b = 2$, т. е. $f(x+2) = \sqrt{x+2}$.
Построим график функции $y = f(x+2)$,
т. е. $y = \sqrt{x+2}$:
Имеем сдвиг графика функции $y = \sqrt{x}$ *влево* на 2.
$A\,(0;0) \to A_2\,(-2;0)$;
$B\,(1;1) \to B_2\,(-1;1)$;
$C\,(4;2) \to C_2\,(2;2)$.



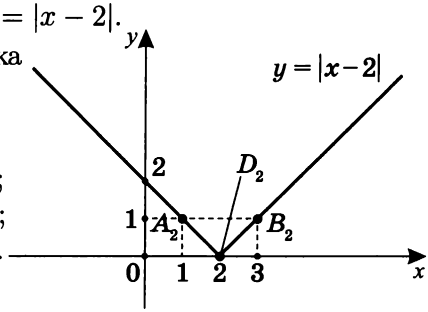
4. Пусть $f(x) = |x|$.
Рассмотрим график $y = |x|$.



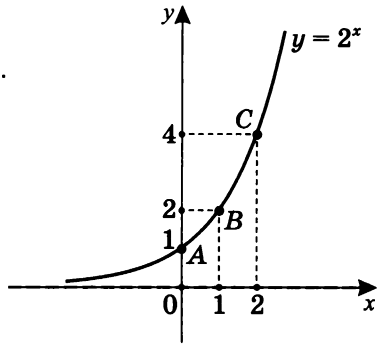
а) Пусть $b = 3$,
т. е. $f(x+3) = |x+3|$.
Построим график функции $y = f(x+3)$, т. е. $y = |x+3|$.
Имеет сдвиг графика функции $y = |x|$ *влево* на 3.
$A\,(-1;1) \to A_1\,(-4;1)$;
$D\,(0;0) \quad \to D_1\,(-3;0)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_1\,(-2;1)$.



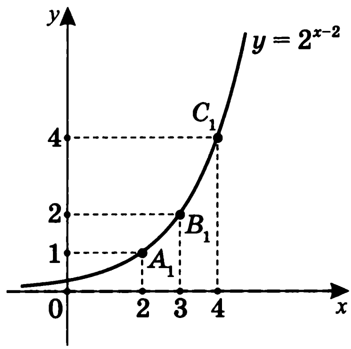
б) Пусть $b = -2$, т. е. $f(x-2) = |x-2|$.
Построим график функции $y = f(x-2)$, т. е. $y = |x-2|$.
Имеем сдвиг графика функции $y = |x|$ *вправо* на 2.
$A\,(-1;1) \to A_2\,(1;1)$;
$D\,(0;0) \quad \to D_2\,(2;0)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_2\,(3;1)$.



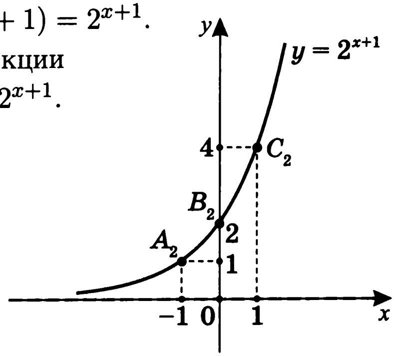
5. Пусть $f(x) = 2^x$.
Рассмотрим график $y = 2^x$.



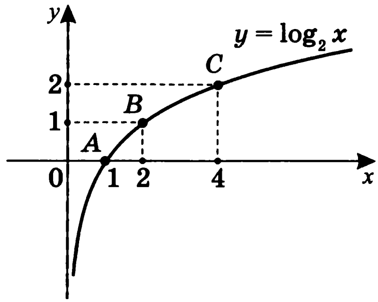
а) Пусть $b = -2$, т. е. $f(x-2) = 2^{x-2}$.
Построим график функции $y = f(x-2)$, т. е. $y = 2^{x-2}$.
Имеем сдвиг графика функции $y = 2^x$ *вправо* на 2.
$A\,(0;1) \to A_1\,(2;1)$;
$B\,(1;2) \to B_1\,(3;2)$;
$C\,(2;4) \to C_1\,(4;4)$.
Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.



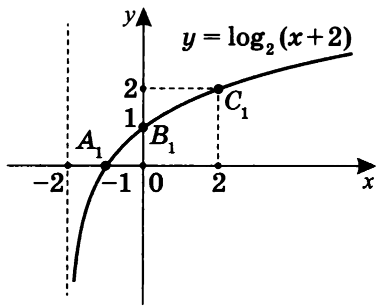
б) Пусть $b = 1$, т. е. $f(x+1) = 2^{x+1}$.
Построим график функции $y = f(x+1)$, т. е. $y = 2^{x+1}$.
Имеем сдвиг графика функции $y = 2^x$ *влево* на 1.
$A\,(0;1) \to A_2\,(-1;1)$;
$B\,(1;2) \to B_2\,(0;2)$;
$C\,(2;4) \to C_2\,(1;4)$.
Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.



6. Пусть $f(x) = \log_2 x$.
Рассмотрим график
$y = \log_2 x$.

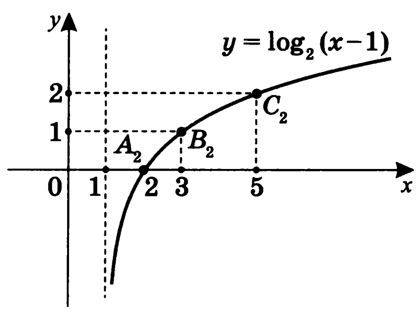


а) Пусть $b = 2$, т. е. $f(x+2) = \log_2(x+2)$.
Построим график функции $y = f(x+2)$,
т. е. $y = \log_2(x+2)$.
Имеем сдвиг графика функции $y = \log_2 x$ *влево* на 2.
$A\,(1;0) \to A_1\,(-1;0)$;
$B\,(2;1) \to B_1\,(0;1)$;
$C\,(4;2) \to C_1\,(2;2)$.



Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = -2$.

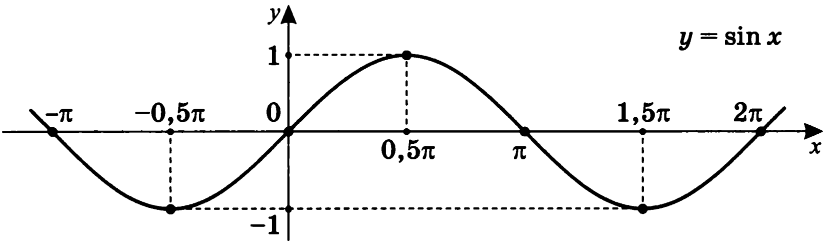
б) Пусть $b = -1$, т. е. $f(x-1) = \log_2(x-1)$.
Построим график функции $y = f(x-1)$,
т. е. $y = \log_2(x-1)$.
Имеем сдвиг графика функции $y = \log_2 x$ *вправо* на 1.
$A\,(1;0) \to A_2\,(2;0)$;
$B\,(2;1) \to B_2\,(3;1)$;
$C\,(4;2) \to C_2\,(5;2)$.



Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = 1$.

7. а) Пусть $f(x) = \sin x$.

Рассмотрим график $y = \sin x$.

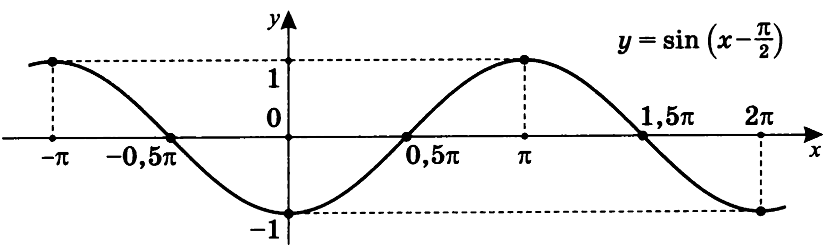


Пусть $b = -\frac{\pi}{2}$, т. е. $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Построим график функции $y = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$,

т. е. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Имеем сдвиг графика функции $y = \sin x$ *вправо* на $\frac{\pi}{2}$.

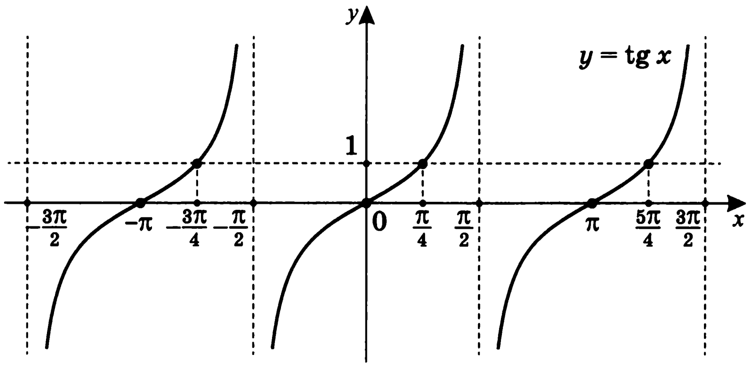


Для целых k:

$A\,(2\pi k; 0) \to A_1\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0)$;
$B\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 1) \to B_1\,(\pi + 2\pi k; 1)$;
$C\,(\pi + 2\pi k; 0) \to C_1\,(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 0)$;
$D\,(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; -1) \to D_1\,(2\pi + 2\pi k; -1)$.

б) Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$.

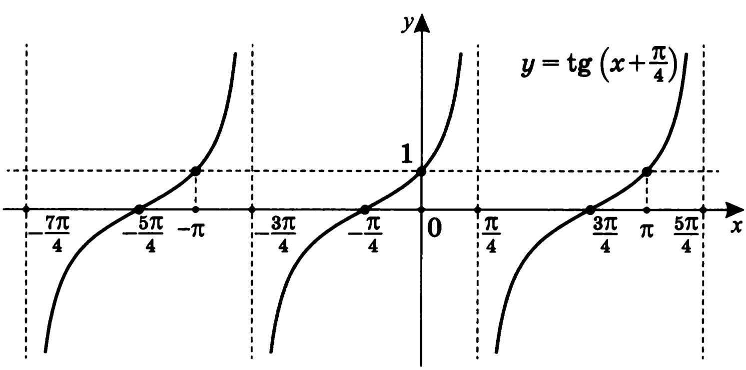
Рассмотрим график $y = \operatorname{tg} x$.



Пусть $b = \frac{\pi}{4}$, т. е. $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Построим график функции $y = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

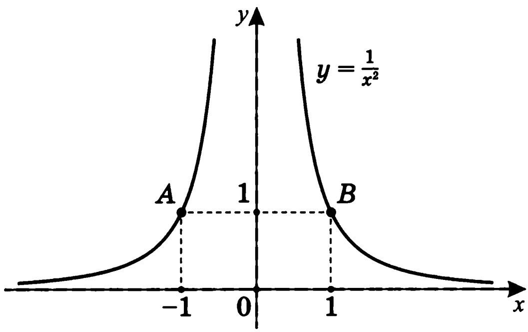
т. е. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.



Для целых k вертикальная асимптота $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ переходит в $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, а вертикальная асимптота $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$ переходит в $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$.

8. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим график $y = \frac{1}{x^2}$.



а) Пусть $b = -1$, т. е. $f(x-1) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Построим график функции $y = f(x-1)$,

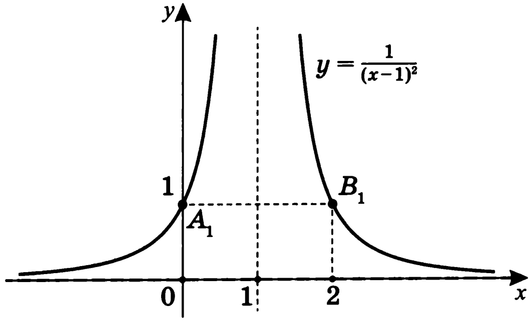
т. е. $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x^2}$ *вправо* на 1.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.

Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = 1$.

$A\,(-1;1) \to A_1\,(0;1)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_1\,(2;1)$.



б) Пусть $b = 2$, т. е. $f(x+2) = \frac{1}{(x+2)^2}$.

Построим график функции $y = f(x+2)$,

т. е. $y = \frac{1}{(x+2)^2}$.

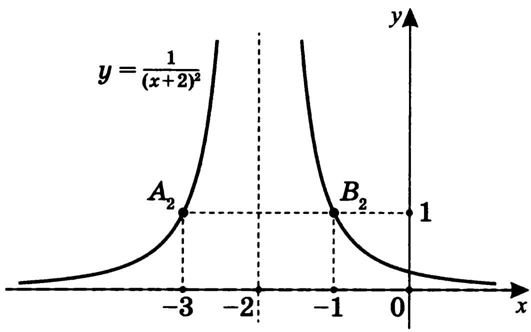
Имеем сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x^2}$ *влево* на 2.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ сохраняется.

Вертикальная асимптота $x = 0$ переходит в $x = -2$.

$A(-1; 1) \to A_2(-3; 1)$;

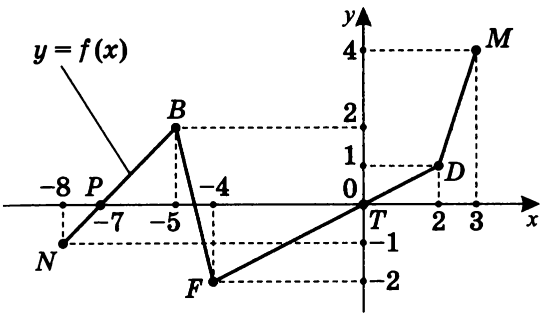
$B(1; 1) \to B_2(-1; 1)$.



Построение графика функции $y = f(x) + C$

Для графика функции, заданной в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$, рассмотрим случай $A = 1$, $k = 1$, $b = 0$: в этом случае необходимо построить график функции $y = f(x) + C$, зная график функции $y = f(x)$.

Рассмотрим график кусочно-линейной функции $y = f(x)$.



Очевидно, что для $y_0 = f(x_0)$ $y_1 = y_0 + C$.

Пусть $C = 1$.

Тогда для $y = f(x) + 1$ $y_1 = y_0 + 1$, и для данных точек:

$N(-8; -1) \to N_1(-8; 0)$, т. е. $y = -1 + 1$, $y = 0$ и $x = -8$;

$B(-5; 2) \to B_1(-5; 3)$, т. е. $y = 2 + 1$, $y = 3$ и $x = -5$;

$D(2; 1) \to D_1(2; 2)$ (далее аналогично);

$M(3; 4) \to M_1(3; 5)$.

Пусть $C = -2$.

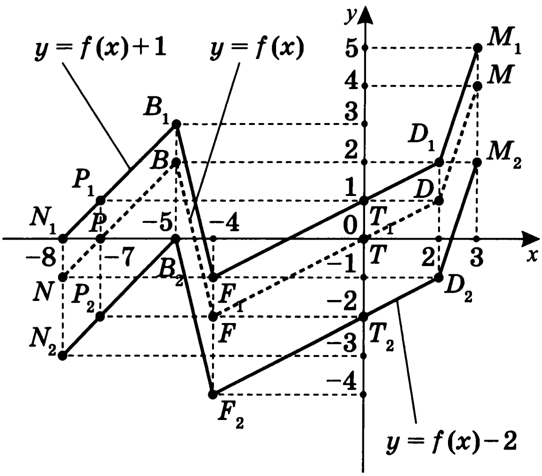
Тогда для $y = f(x) - 2$:

$N(-8; -1) \to N_2(-8; -3)$, т. е. $y = -1 - 2$, $y = -3$ и $x = -8$;

$B(-5; 2) \to B_2(-5; 0)$, т. е. $y = 2 - 2$, $y = 0$ и $x = -5$;

$D(2; 1) \to D_2(2; -1)$ (далее аналогично);

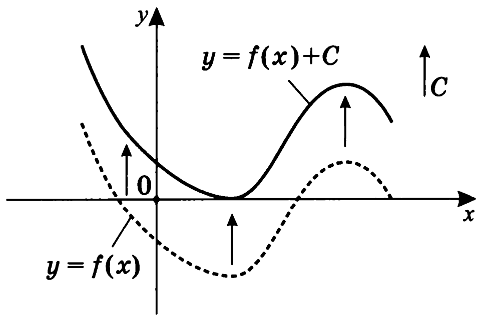
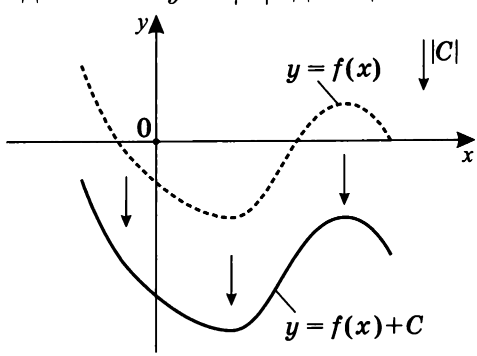
$M(3; 4) \to M_2(3; 2)$.



Так как $N\,(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$, то если $y_1 = y_0 + C$, то $N_1\,(x_0; y_0 + C) \in \Gamma(y = f(x) + C)$.

Значит, точка $N_1\,(x_0; y_1)$ получена сдвигом точки $N\,(x_0; y_0)$ вдоль оси ординат на величину $|C|$: *вверх*, если $C > 0$, и *вниз*, если $C < 0$ (N_2).

Из данных примеров следует, что при преобразовании вида $y = f(x) + C$ область определения преобразованной функции не изменяется по сравнению с функцией $y = f(x)$. Разумеется, это можно доказать в общем виде.

<table>
<tr><td colspan="2">Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x) + C$ графика функции $y = f(x)$ область определения остается прежней, а конечная область изменений сдвигается по сравнению с $y = f(x)$ на $|C|$, согласно знаку. Если область изменений — $(-\infty; \infty)$, то она сохраняется.</td></tr>
<tr><td>3. $y = f(x) + C$
$(C > 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вверх.

</td></tr>
<tr><td>4. $y = f(x) + C$
$(C < 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вниз.

</td></tr>
</table>

Практикум 3

Постройте графики функций, используя преобразования вида $y = f(x) + C$.

1. $y = f(x) = x^2$, где а) $C = 2$; б) $C = -1$.

2. $y = f(x) = \frac{1}{x}$, где а) $C = -2$; б) $C = 1$.

3. $y = f(x) = \sqrt{x}$, где а) $C = 3$; б) $C = -2$.

4. $y = f(x) = |x|$, где а) $C = 1$; б) $C = -2$.

5. $y = f(x) = 2^x$, где а) $C = 1$; б) $C = -2$.

6. $y = f(x) = \log_2 x$, где а) $C = 1$; б) $C = -1$.

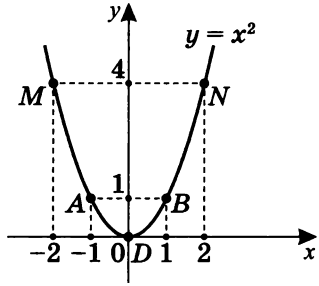
7. $y = f(x) = \cos x$, где $C = 0{,}5$.

8. $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$, где а) $C = 2$; б) $C = -1$.

Решение практикума 3

1. Пусть $f(x) = x^2$.

Рассмотрим график $y = x^2$.

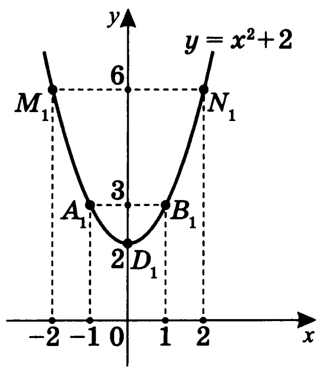


а) Пусть $C = 2$.

Требуется построить график функции $y = f(x) + 2$, т. е. $y = x^2 + 2$.

Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вверх* на 2.

$D\,(0;0) \to D_1\,(0;2)$;
$A\,(-1;1) \to A_1\,(-1;3)$;
$B\,(1;1) \to B_1\,(1;3)$;
$M\,(-2;4) \to M_1\,(-2;6)$;
$N\,(2;4) \to N_1\,(2;6)$.

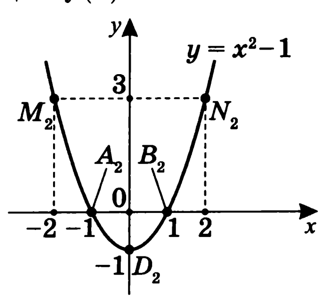


б) Пусть $C = -1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) - 1$, т. е. $y = x^2 - 1$.

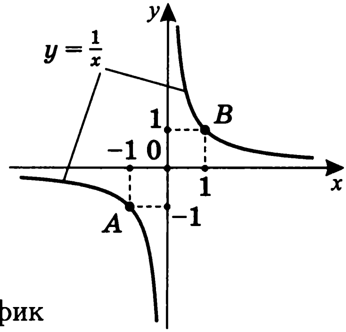
Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вниз* на 1.

$D\,(0;0) \to D_2\,(0;-1)$;
$A\,(-1;1) \to A_2\,(-1;0)$;
$B\,(1;1) \to B_2\,(1;0)$;
$M\,(-2;4) \to M_2\,(-2;3)$;
$N\,(2;4) \to N_2\,(2;3)$.



2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$.

Рассмотрим график $y = \frac{1}{x}$.



а) Пусть $C = -2$.

Требуется построить график

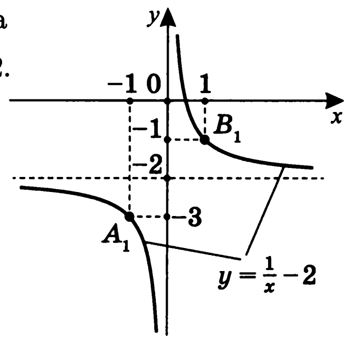
функции $y = f(x) - 2$, т. е. $y = \frac{1}{x} - 2$.

Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вниз* на 2.

Горизонтальная асимптота

$y = 0$ переходит в $y = -2$.

$A(-1;-1) \to A_1(-1;-3)$;
$B(1;1) \quad\quad \to B_1(1;-1)$.



б) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график

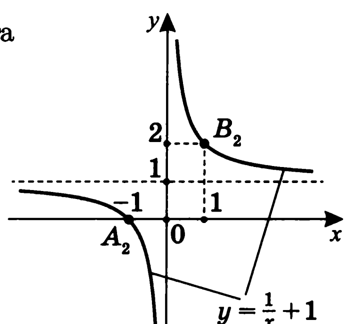
функции $y = f(x) + 1$, т. е. $y = \frac{1}{x} + 1$.

Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вверх* на 1.

Горизонтальная асимптота

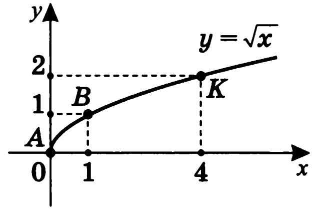
$y = 0$ переходит в $y = 1$.

$A(-1;-1) \to A_2(-1;0)$;
$B(1;1) \quad\quad \to B_2(1;2)$.



3. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.

Рассмотрим график $y = \sqrt{x}$.



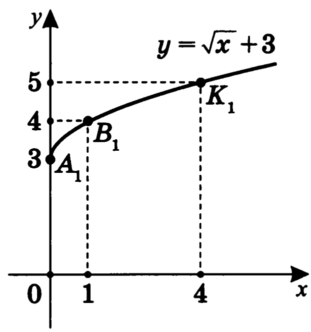
а) Пусть $C = 3$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) + 3$, т. е. $y = \sqrt{x} + 3$.

Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вверх* на 3.

$A\,(0;0) \to A_1\,(0;3)$;
$B\,(1;1) \to B_1\,(1;4)$;
$K\,(4;2) \to K_1\,(4;5)$.



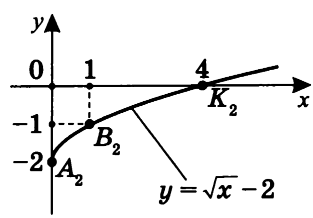
б) Пусть $C = -2$.

Требуется построить график

функции $y = f(x) - 2$, т. е. $y = \sqrt{x} - 2$.

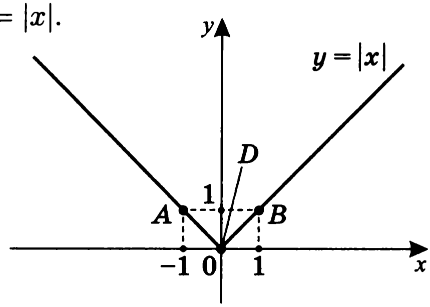
Имеем сдвиг графика функции $f(x)$ *вниз* на 2.

$A\,(0;0) \to A_2\,(0;-2)$;
$B\,(1;1) \to B_2\,(1;-1)$;
$K\,(4;2) \to K_2\,(4;0)$.



4. Пусть $f(x) = |x|$.

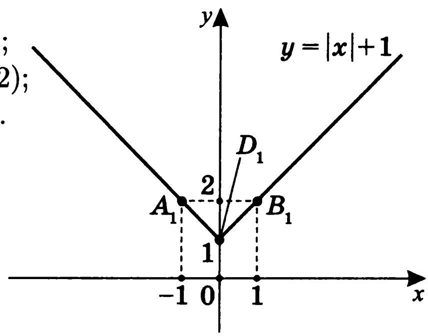
Рассмотрим график $y = |x|$.



а) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) + 1$, т. е. $y = |x| + 1$.

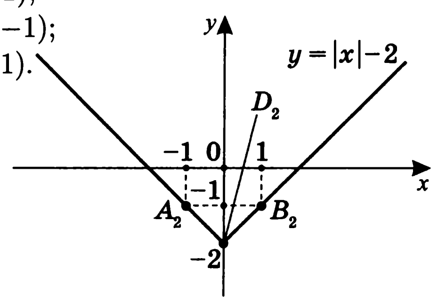
$D\,(0;0) \quad \to D_1\,(0;1)$;
$A\,(-1;1) \to A_1\,(-1;2)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_1\,(1;2)$.



б) Пусть $C = -2$.

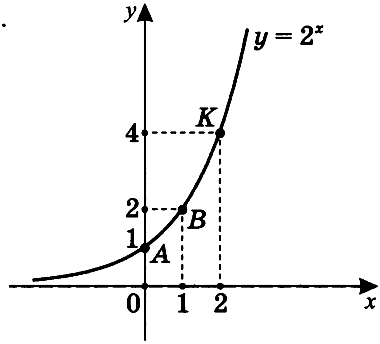
Требуется построить график функции $y = f(x) - 2$, т. е. $y = |x| - 2$.

$D\,(0;0) \quad \to D_2\,(0;-2)$;
$A\,(-1;1) \to A_2\,(-1;-1)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_2\,(1;-1)$.



5. Пусть $f(x) = 2^x$.

Рассмотрим график $y = 2^x$.



а) Пусть $C = 1$.

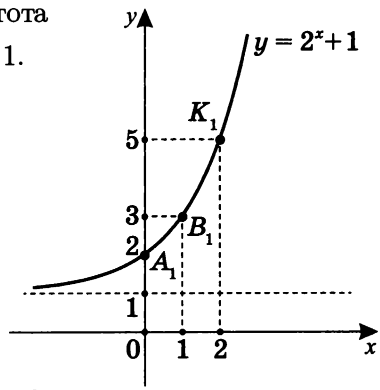
Требуется построить график функции $y = f(x) + 1$, т. е. $y = 2^x + 1$.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ переходит в $y = 1$.

$A\,(0;1) \to A_1\,(0;2)$;

$B\,(1;2) \to B_1\,(1;3)$;

$K\,(2;4) \to K_1\,(2;5)$.



б) Пусть $C = -2$.

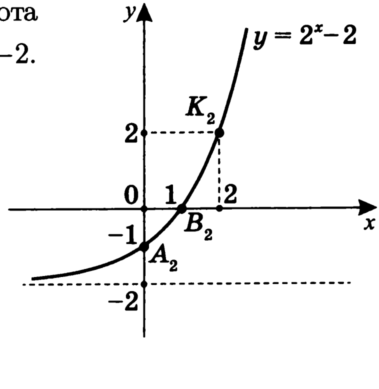
Требуется построить график функции $y = f(x) - 2$, т. е. $y = 2^x - 2$.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ переходит в $y = -2$.

$A\,(0;1) \to A_2\,(0;-1)$;

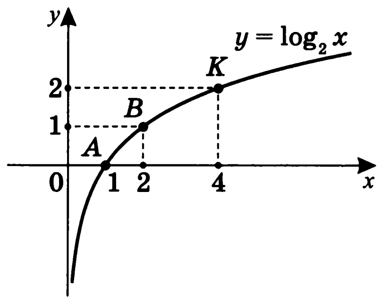
$B\,(1;2) \to B_2\,(1;0)$;

$K\,(2;4) \to K_2\,(2;2)$.



6. Пусть $f(x) = \log_2 x$.

Рассмотрим график $y = \log_2 x$.

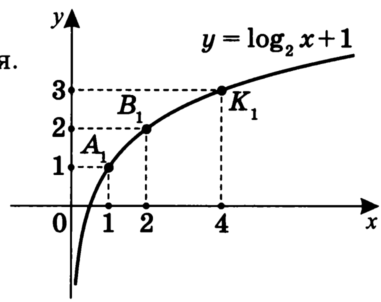


а) Пусть $C = 1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) + 1$, т. е. $y = \log_2 x + 1$.

Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A\,(1;0) \to A_1\,(1;1)$;
$B\,(2;1) \to B_1\,(2;2)$;
$K\,(4;2) \to K_1\,(4;3)$.

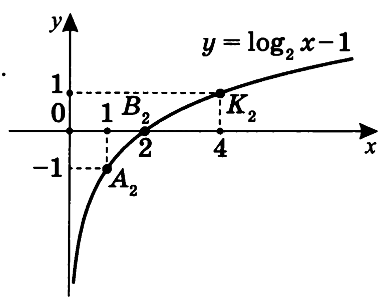


б) Пусть $C = -1$.

Требуется построить график функции $y = f(x) - 1$, т. е. $y = \log_2 x - 1$.

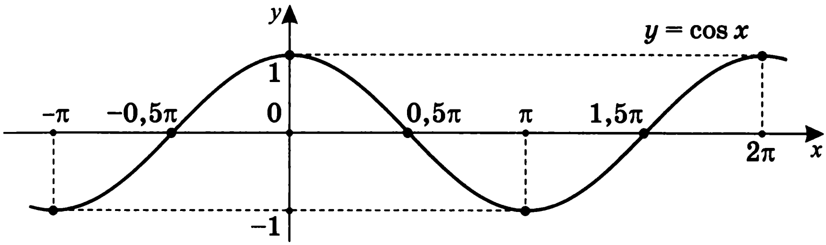
Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A\,(1;0) \to A_2\,(1;-1)$;
$B\,(2;1) \to B_2\,(2;0)$;
$K\,(4;2) \to K_2\,(4;1)$.



7. Пусть $f(x) = \cos x$.

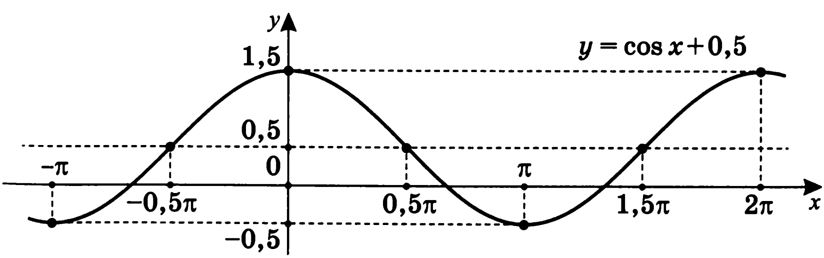
Рассмотрим график $y = \cos x$.



Пусть $C = 0{,}5$.

Построим график функции $y = f(x) + 0{,}5$,

т. е. $y = \cos x + 0{,}5$.



Для целых k:

$A\,(2\pi k; 1) \quad \to A_1\,(2\pi k; 1{,}5)$;

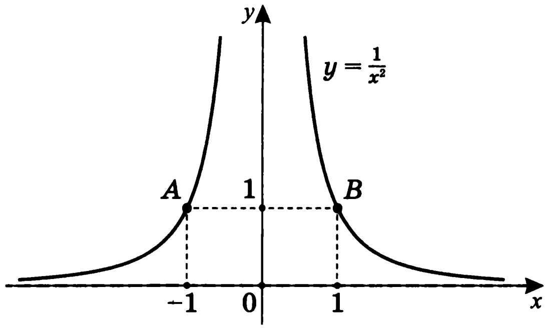
$B\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0) \quad \to B_1\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0{,}5)$;

$K\,(\pi + 2\pi k; -1) \to K_1\,(\pi + 2\pi k; -0{,}5)$;

$D\,(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 0) \to D_1\,(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 0{,}5)$.

8. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим график $y = \frac{1}{x^2}$.



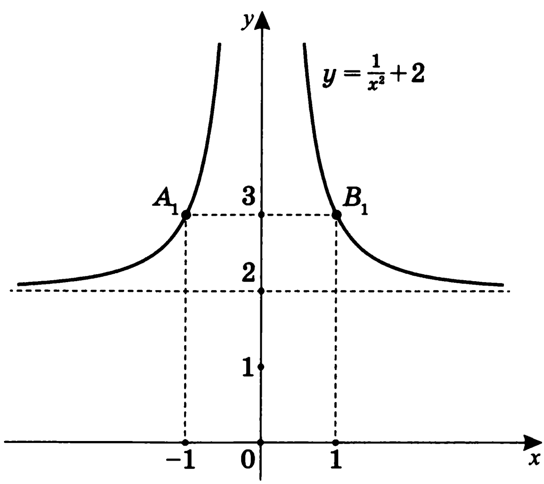
а) Пусть $C = 2$.

Построим график функции $y = f(x) + 2$,

т. е. $y = \frac{1}{x^2} + 2$.

Горизонтальная асимптота $y = 0$ переходит в $y = 2$. Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A\,(-1;1) \to A_1\,(-1;3)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_1\,(1;3)$.



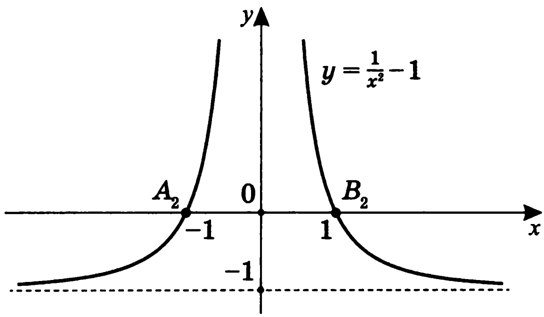
б) Пусть $C = -1$.

Построим график функции $y = f(x) - 1$,

т. е. $y = \dfrac{1}{x^2} - 1$.

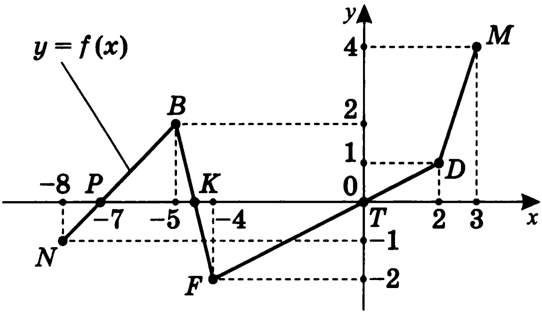
Горизонтальная асимптота $y = 0$ переходит в $y = -1$. Вертикальная асимптота $x = 0$ сохраняется.

$A\,(-1;1) \to A_2\,(-1;0)$;
$B\,(1;1) \quad \to B_2\,(1;0)$.



Преобразования графиков с использованием различных видов симметрии

Вновь рассмотрим график кусочно-линейной функции $f(x)$.



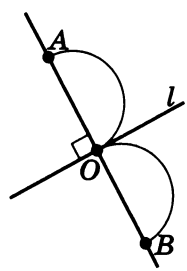
Напомним определение симметрии относительно прямой.

<u>Определение</u>. Точка A называется симметричной точке B относительно оси l, если:

а) прямая $(AB) \perp l$;

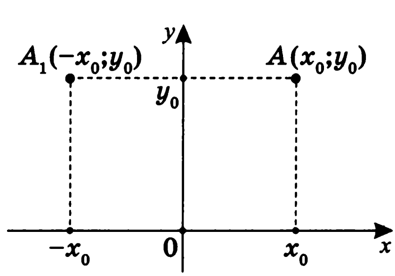
б) $AB \cap l = O$ и $AO = OB$.

Обозначается $S_l(A) = B$ или $S_l(B) = A$.



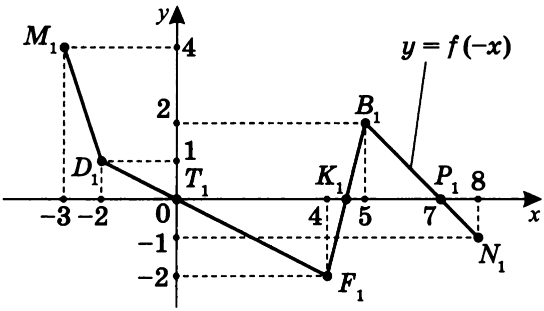
а) Построим график функции $y = f(-x)$.

$N(-8; -1) \to N_1(8; -1)$;
$B(-5; 2) \to B_1(5; 2)$;
$F(-4; -2) \to F_1(4; -2)$;
$D(2; 1) \to D_1(-2; 1)$;
$M(3; 4) \to M_1(-3; 4)$.



Таким образом,
$A(x; y) \to A_1(-x; y)$.

Очевидно, что точки графика $y = f(-x)$ симметричны точкам графика $y = f(x)$ относительно оси ординат.



Примечание. Напомним, что:

$D(f(x))$ — область определения функции $f(x)$;

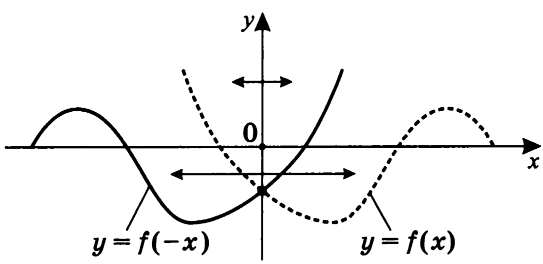
$E(f(x))$ — область изменения функции $f(x)$.

В данном случае:

$D(f(x)) = [-8; 3]$; $D(f(-x)) = [-3; 8]$;

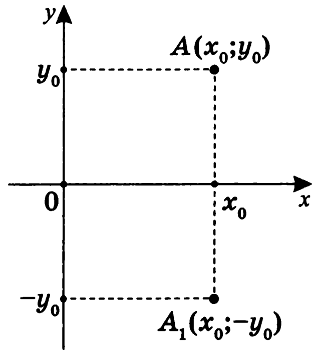
$E(f(x)) = [-2; 4]$; $E(f(-x)) = [-2; 4]$.

График $y = f(-x)$ симметричен относительно оси Oy графику $y = f(x)$.

5. $y = f(-x)$	График получается симметричным отражением относительно оси Oy.  Точка пересечения графика $y = f(x)$ с осью Oy остается неизменной.

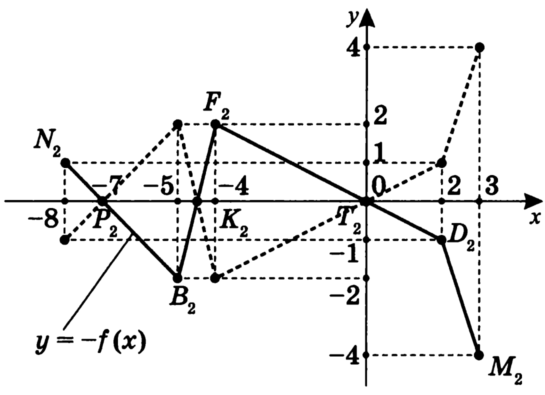
б) Построим график функции $y = -f(x)$.

$N(-8;-1) \to N_2(-8;1)$;
$B(-5;2) \to B_2(-5;-2)$;
$F(-4;-2) \to F_2(-4;2)$;
$D(2;1) \to D_2(2;-1)$;
$M(3;4) \to M_2(3;-4)$.



Таким образом, $A(x;y) \to A_1(x;-y)$.

Очевидно, что точки графика $y = -f(x)$ симметричны точкам графика $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.

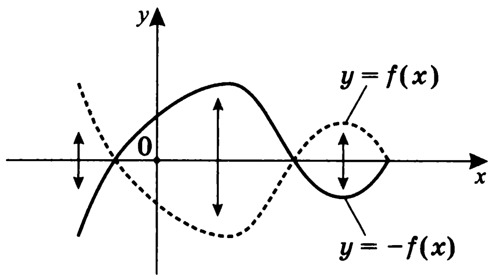


Примечание. В данном случае:

$D(f(x)) = [-8;3]$; $\quad D(-f(x)) = [-8;3]$;

$E(f(x)) = [-2;4]$; $\quad E(-f(x)) = [-4;2]$.

График $y = -f(x)$ симметричен относительно оси Ox графику $y = f(x)$.

<table>
<tr><td>6. $y = -f(x)$</td><td>График получается симметричным отражением относительно оси Ox.


Точки пересечения графика $f(x)$ с осью Ox остаются неизменными.</td></tr>
</table>

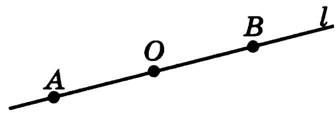
в) Построим график функции $y = -f(-x)$.

Напомним определение симметрии относительно точки.

<u>Определение</u>. Точка A называется центрально-симметричной точке B относительно точки O, если:

а) точки A, B, O одновременно принадлежат прямой l;

б) расстояние $AO = OB$.

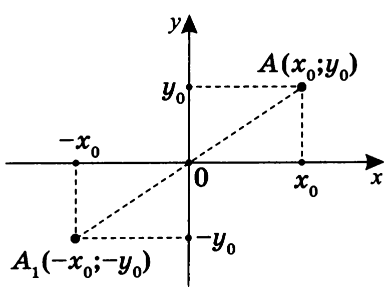


Обозначается $Z_0(A) = B$ или $Z_0(B) = A$.

Таким образом,

$A(x; y) \to A_1(-x; -y)$.

Очевидно, что точки графика $y = -f(-x)$ центрально-симметричны точкам графика $y = f(x)$ относительно начала координат $O(0; 0)$, т. е. $Z_0(A) = A_1$.

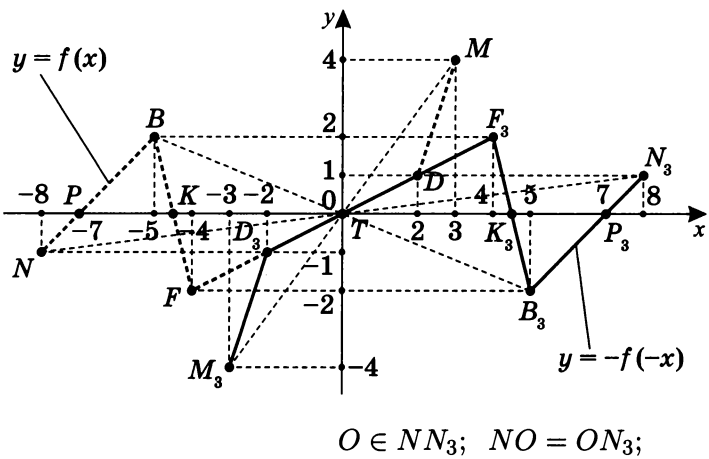


$N(-8;-1) \to N_3(8;1)$;
$B(-5;2) \to B_3(5;-2)$;
$F(-4;-2) \to F_3(4;2)$;
$D(2;1) \to D_3(-2;-1)$;
$M(3;4) \to M_3(-3;-4)$;
$T(0;0)$ — неподвижная точка;
$K(-4{,}5;0) \to K_3(4{,}5;0)$;
$P(-7;0) \to P_3(7;0)$.

Ясно также, что $D(-f(-x))$ симметрична $D(f(x))$, а $E(-f(-x))$ симметрична $E(f(x))$ относительно начала координат:

$D(f(x)) = [-8;3]$; $D(f(-x)) = [-3;8]$;

$E(f(x)) = [-2;4]$; $E(f(-x)) = [-4;2]$.



Отметим, что при этом:
$$\begin{aligned} &O \in NN_3; \quad NO = ON_3;\\ &O \in BB_3; \quad BO = OB_3;\\ &O \in FF_3; \quad FO = OF_3;\\ &O \in DD_3; \quad DO = OD_3;\\ &O \in MM_3; \quad MO = OM_3. \end{aligned}$$

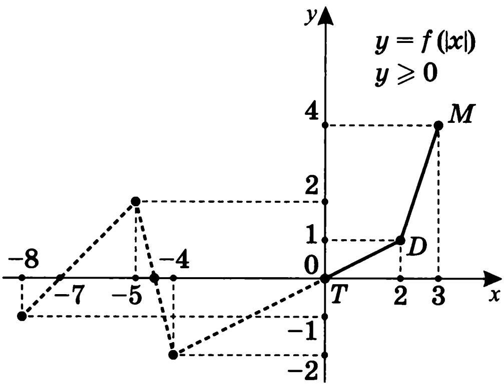
Значит, $\begin{array}{l} Z_0(N) = N_3 \\ Z_0(B) = B_3 \\ Z_0(F) = F_3 \\ Z_0(D) = D_3 \\ Z_0(M) = M_3 \end{array}$, и $Z_0(NBFDM) = N_3B_3F_3D_3M_3$.

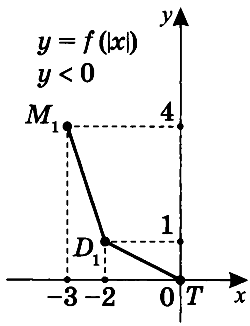
г) Построим график функции $y = f(|x|)$.

Учтем, что по определению модуля числа

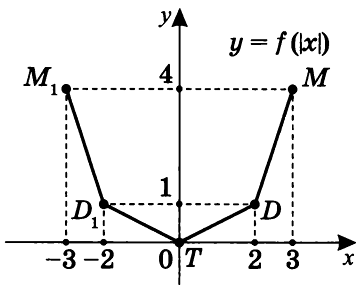
$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \geqslant 0 \\ f(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим и построим только ту часть графика $y = f(x)$, которая находится в правой полуплоскости, а затем — часть графика $y = f(-x)$, находящуюся только в левой полуплоскости:





Затем склеим эти части графика:

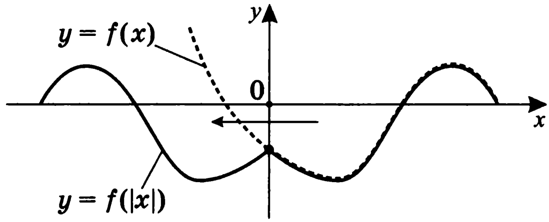


Для того чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, зная график функции $y = f(x)$, необходимо:

1. Всю часть графика функции, находящуюся в правой полуплоскости, сохранить.

2. Всю часть графика функции в левой полуплоскости убрать и на его место разместить график, полученный отражением графика $y = f(x)$ из правой полуплоскости в левую полуплоскость симметрично относительно оси Oy.

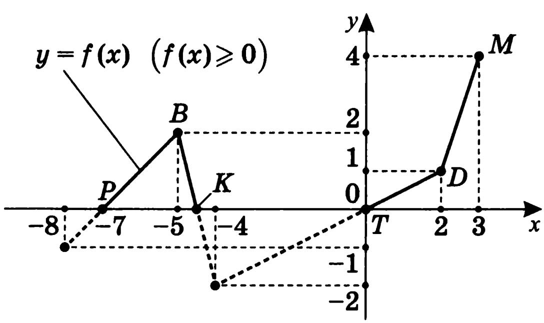
3. Точка, принадлежащая графику $y = f(x)$, находящаяся на оси ординат, сохраняется.

7. $y = f(\|x\|)$	Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси Oy, удаляется, а вся часть, лежащая правее оси Oy и на ней, остается без изменений, а кроме того, симметрично отражается относительно оси Oy в левую полуплоскость. 

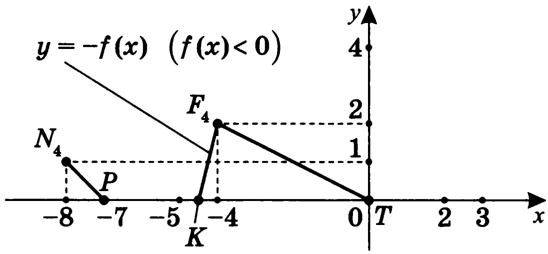
д) Построим график функции $|f(x)|$.

Учтем, что $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$.

Рассмотрим и построим график $y = f(x)$, находящийся только в верхней полуплоскости:

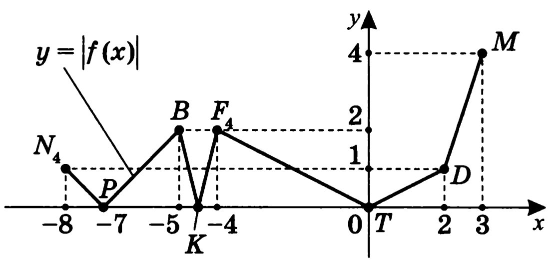


Затем график $y = f(x)$, находящийся только в нижней полуплоскости, отражается симметрично относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость.

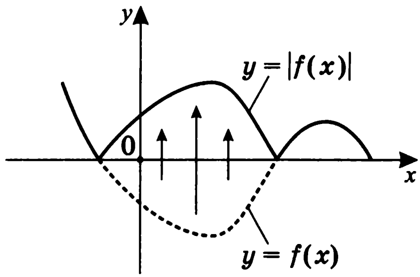


Далее склеим получившиеся графики в одной системе координат.

$N(-8;-1) \rightarrow N_4(-8;1);$
$P(-7;0) \rightarrow P(-7;0);$
$B(-5;2) \rightarrow B(-5;2);$
$K(-4{,}5;0) \rightarrow K(-4{,}5;0);$
$F(-4;-2) \rightarrow F_4(-4;2);$
$T(0;0) \rightarrow T(0;0).$



Для того чтобы построить график $y = |f(x)|$, необходимо:
1. Всю часть графика функции, находящуюся в верхней полуплоскости, сохранить.
2. Всю часть графика функции, находящуюся в нижней полуплоскости, отразить симметрично относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость.
3. Все точки графика $y = f(x)$, принадлежащие оси абсцисс, сохраняются.

8. $y = \|f(x)\|$	Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox и на оси, остается без изменения, а лежащая ниже оси Ox — симметрично отражается относительно этой оси вверх.  Итоговый график располагается в верхней полуплоскости.

Практикум 4

Постройте графики функций, используя известные преобразования графика функции $y = f(x)$.

1. $y = f(x) = \sqrt{x}$:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = -f(-x)$;

г) $y = f(|x|)$.

2. $y = f(x) = 2^x$:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = -f(-x)$;

г) $y = f(|x|)$;

д) $y = f(-|x|)$.

3. $y = f(x) = \log_3 x$:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = f(|x|)$;

г) $y = |f(|x|)|$.

Решение практикума 4

1. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.

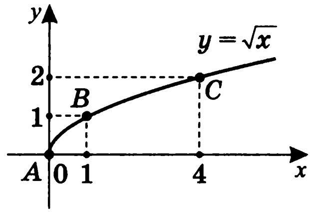
Построим графики:

а) $y = f(-x)$;

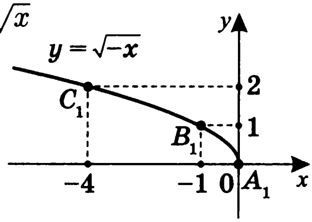
б) $y = -f(x)$;

в) $y = -f(-x)$;

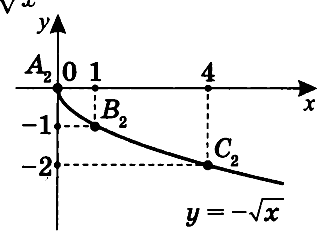
г) $y = f(|x|)$.



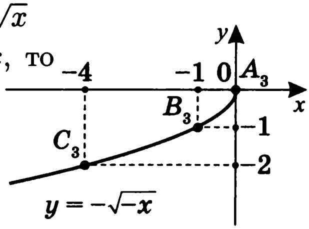
а) Построим график $y = \sqrt{-x}$.
Так как график $y = \sqrt{-x}$ симметричен графику $y = \sqrt{x}$ относительно оси Oy, то
$A(0;0) \to A_1(0;0)$ (неподвижная точка);
$B(1;1) \to B_1(-1;1)$;
$C(4;2) \to C_1(-4;2)$.



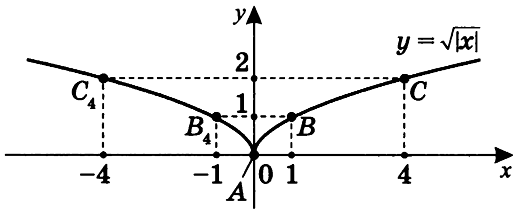
б) Построим график $y = -\sqrt{x}$.
Так как график $y = -\sqrt{x}$ симметричен графику $y = \sqrt{x}$ относительно оси Ox, то
$A(0;0) \to A_2(0;0)$ (неподвижная точка);
$B(1;1) \to B_2(1;-1)$;
$C(4;2) \to C_2(4;-2)$.



в) Построим график $y = -\sqrt{-x}$.
Так как график $y = -\sqrt{-x}$ симметричен графику $y = \sqrt{x}$ относительно осей Oy и Ox, то
$A(0;0) \to A_3(0;0)$ (неподвижная точка);
$B(1;1) \to B_3(-1;-1)$;
$C(4;2) \to C_3(-4;-2)$.



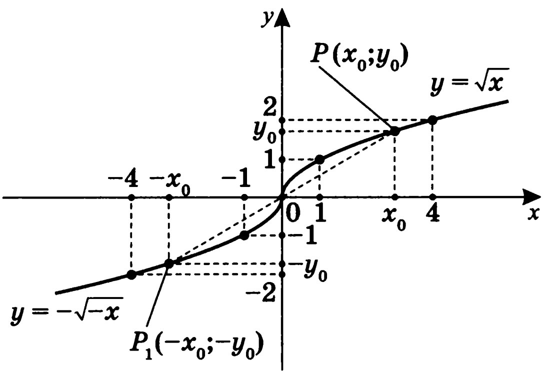
г) Аналогично по правилу построения графика функции от модуля аргумента, строится график функции $y = \sqrt{|x|}$.



Примечание. Графики $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{-x}$ симметричны относительно начала координат,

то есть $P(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$ переходит

в $P_1(-x_0; -y_0) \in \Gamma(y = -f(-x))$ и наоборот.



2. Пусть $f(x) = 2^x$.

Построим графики:

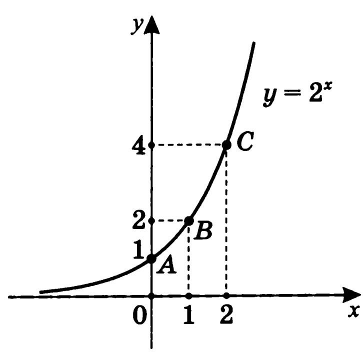
а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = -f(-x)$;

г) $y = f(|x|)$;

д) $y = f(-|x|)$.



а) $y = f(-x)$.

Построим график $y = 2^{-x}$.

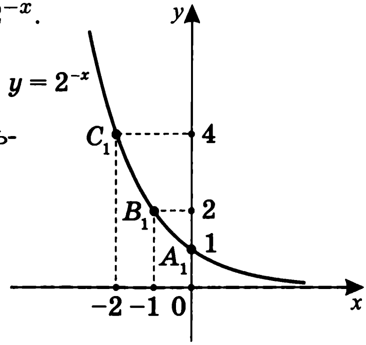
Так как график 2^{-x} симметричен графику $y = 2^x$ относительно оси ординат, то

$A(0;1) \to A_1(0;1)$

(неподвижная точка);

$B(1;2) \to B_1(-1;2)$;

$C(2;4) \to C_1(-2;4)$.



Отметим, что $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

б) $y = -f(x)$.

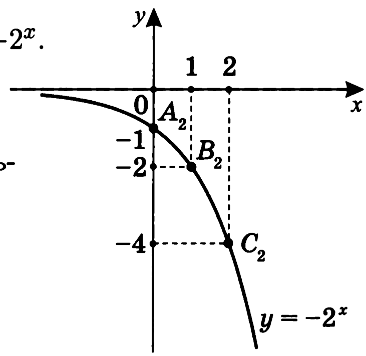
Построим график $y = -2^x$.

Так как график -2^x симметричен графику $y = 2^x$ относительно оси абсцисс, то

$A(0;1) \to A_2(0;-1)$;

$B(1;2) \to B_2(1;-2)$;

$C(2;4) \to C_2(2;-4)$.



в) $y = -f(-x)$.

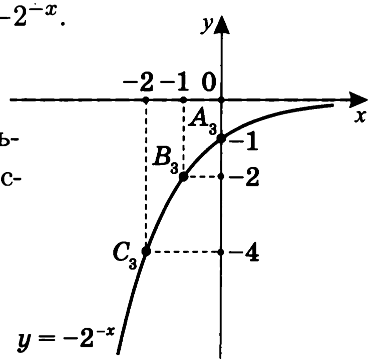
Построим график $y = -2^{-x}$.

Так как график -2^{-x} симметричен графику $y = 2^x$ относительно оси ординат и оси абсцисс, то

$A(0;1) \to A_3(0;-1)$;

$B(1;2) \to B_3(-1;-2)$;

$C(2;4) \to C_3(-2;-4)$.

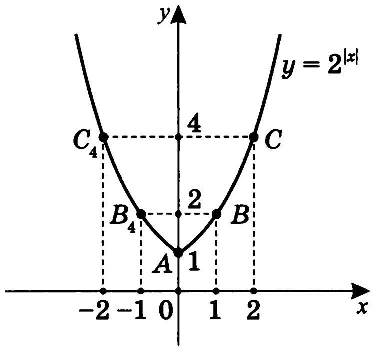


(График $y = -2^{-x}$ центрально-симметричен графику $y = 2^x$ относительно начала координат.)

г) $y = f(|x|)$.

Построим график функции $y = 2^{|x|}$.

Точки графика $y = 2^x$ из правой полуплоскости сохраняем и отражаем в левую полуплоскость относительно оси Oy:

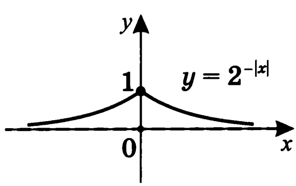


д) $y = f(-|x|)$.

Построим график функции $y = 2^{-|x|}$.

Так как $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, то и $y = 2^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

Точки графика $y = 2^{-x}$ из правой полуплоскости сохраняем и отражаем в левую полуплоскость относительно оси Oy:



Можно строить график и другим способом.

Так как $y = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$,

то достаточно взять правую часть графика $y = 2^{-x}$ и левую часть графика $y = 2^x$.

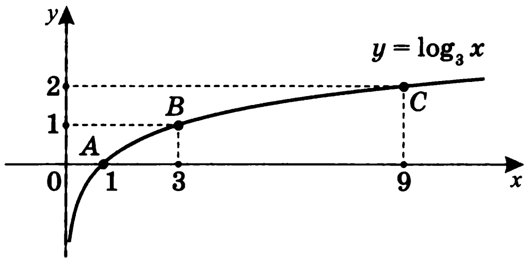
3. Пусть $f(x) = \log_3 x$. Построим графики:

а) $y = f(-x)$;

б) $y = -f(x)$;

в) $y = f(|x|)$;

г) $y = |f(|x|)|$.



а) $y = f(-x)$.

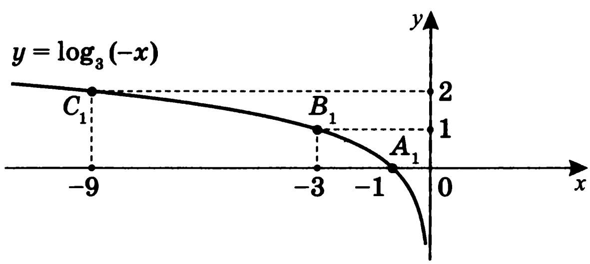
Построим график $y = \log_3(-x)$.

Так как график $y = \log_3(-x)$ симметричен графику $y = \log_3 x$ относительно оси ординат, то

$A(1; 0) \to A_1(-1; 0)$;

$B(3; 1) \to B_1(-3; 1)$;

$C(9; 2) \to C_1(-9; 2)$.



б) $y = -f(x)$.

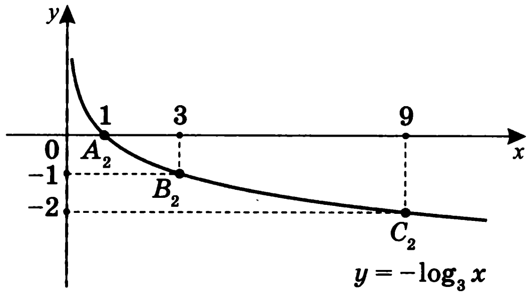
Построим график $y = -\log_3 x$.

Так как график $y = -\log_3 x$ симметричен графику $y = \log_3 x$ относительно оси абсцисс, то

$A(1; 0) \to A_2(1; 0)$ (неподвижная точка);

$B(3; 1) \to B_2(3; -1)$;

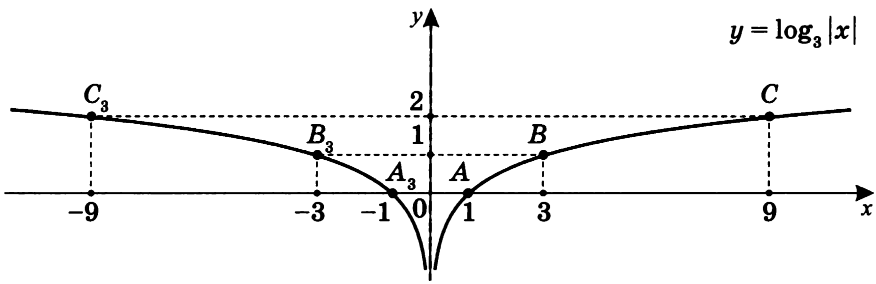
$C(9; 2) \to C_2(9; -2)$.



в) $y = f(|x|)$.

Построим график $y = \log_3 |x|$.

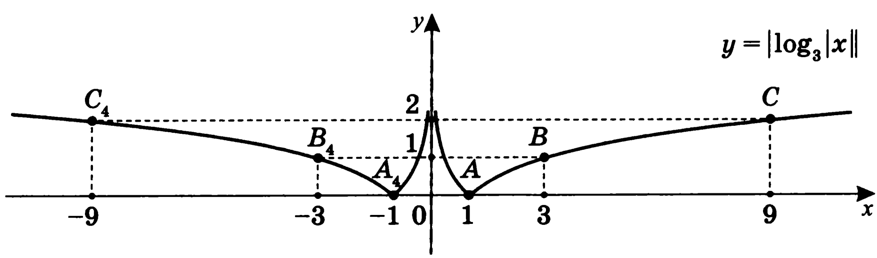
График $y = \log_3 x$ в правой полуплоскости сохраняется и отражается симметрично оси Oy в левую полуплоскость:



г) $y = |f(|x|)|$.

Построим график $y = |\log_3 |x||$.

График $y = \log_3 |x|$ в верхней полуплоскости сохраняется, а график, находящийся в нижней полуплоскости, отражается симметрично относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость:



Построение графика функции $y = Af(x)$ $(A > 0)$

Для графика функции, заданного в общем виде уравнением $y = Af(kx+b)+C$, рассмотрим случай $k = 1$, $b = 0$, $C = 0$, т. е. необходимо построить график функции $y = Af(x)$, зная график функции $y = f(x)$.

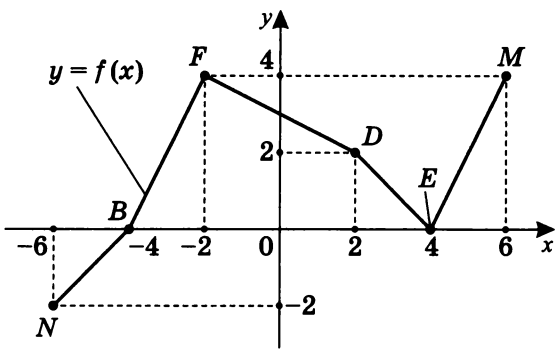
Так как $N(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$, где N — произвольная точка, то $N_1(x_0; Ay_0) \in \Gamma(y = Af(x))$.

При $A > 1$ график $y = Af(x)$ получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз.

При $0 < A < 1$ график $y = Af(x)$ получается сжатием графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{A}$ раз.

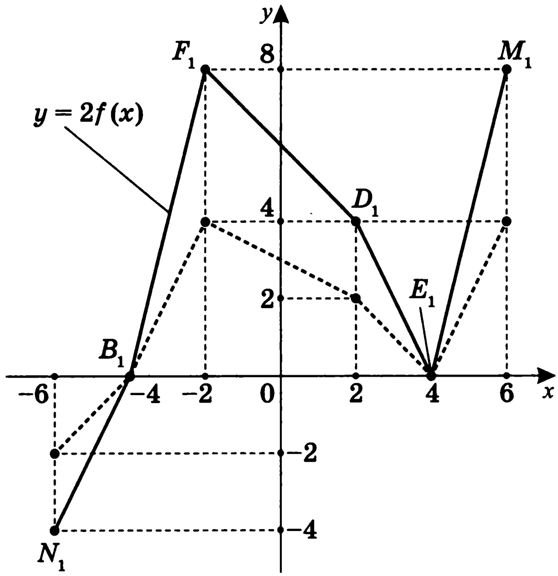
Очевидно, что точки пересечения графика функции с осью абсцисс — неподвижные.

Рассмотрим график кусочно-линейной функции.



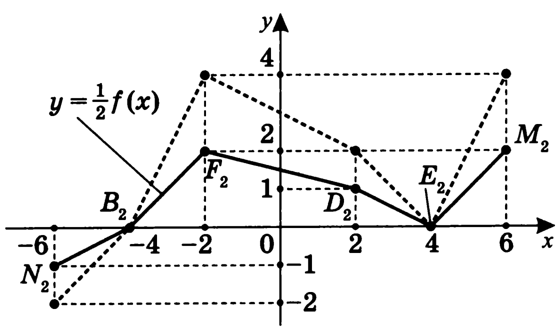
а) Построим график $y = 2f(x)$.

$N(-6; -2) \to N_1(-6; -4);$
$B(-4; 0) \to B_1(-4; 0);$
$F(-2; 4) \to F_1(-2; 8);$
$D(2; 2) \to D_1(2; 4);$
$E(4; 0) \to E_1(4; 0);$
$M(6; 4) \to M_1(6; 8).$



б) Построим график $y = \frac{1}{2}f(x)$.

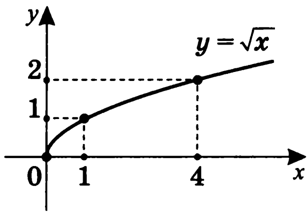
$N(-6; -2) \to N_2(-6; -1);$
$B(-4; 0) \to B_2(-4; 0);$
$F(-2; 4) \to F_2(-2; 2);$
$D(2; 2) \to D_2(2; 1);$
$E(4; 0) \to E_2(4; 0);$
$M(6; 4) \to M_2(6; 2).$

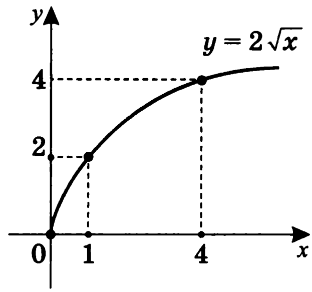


Практикум 5 (Примеры преобразований графиков вида $y = Af(x)$)

1. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.

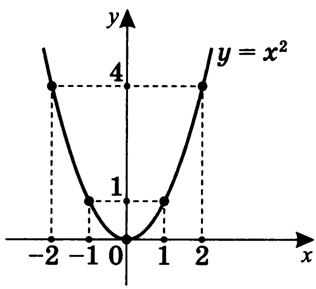
Построим график функции $y = 2f(x)$: $y = 2\sqrt{x}$.

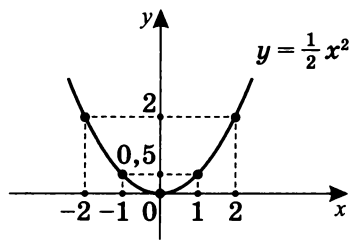




2. Пусть $f(x) = x^2$.

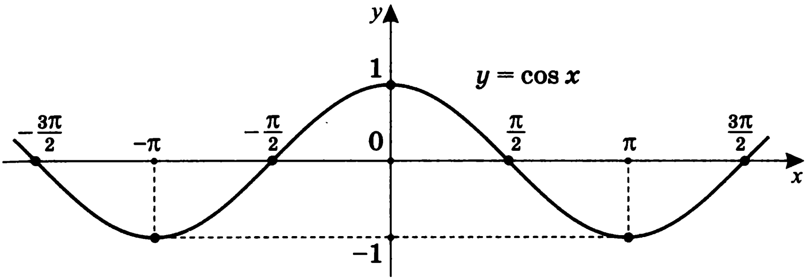
Построим график функции $y = \frac{1}{2}f(x)$: $y = \frac{1}{2}x^2$.

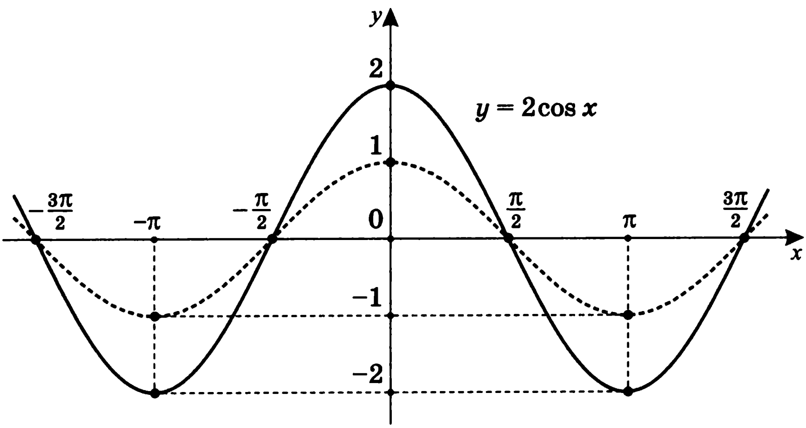




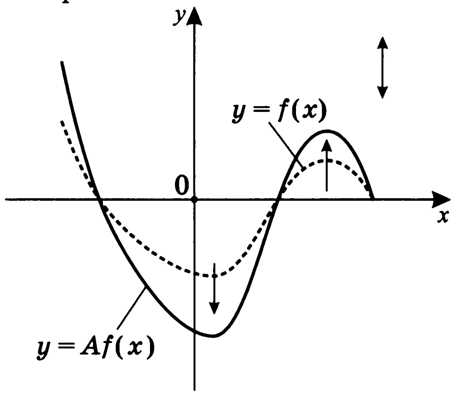
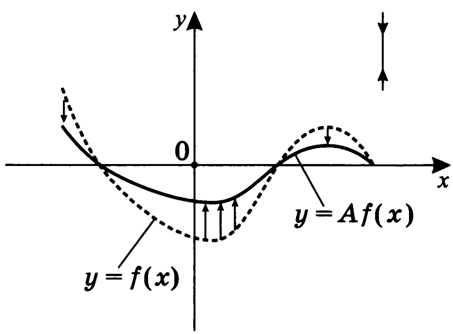
3. Пусть $f(x) = \cos x$.

Построим график функции $y = 2f(x)$: $y = 2\cos x$.





Отметим, что точки исходного графика, находящиеся на оси абсцисс, при этом преобразовании остаются неизменными.

9. $y = Af(x)$ $(A > 1)$	График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз.  $D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.
10. $y = Af(x)$ $(0 < A < 1)$	График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{A}$ раз.  $D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.

Построение графика функции $y = f(kx)$ $(k > 0)$

Для графика функции, заданной в общем виде уравнением $y = Af(kx + b) + C$ рассмотрим случай $A = 1$, $b = 0$, $C = 0$, т. е. необходимо построить график функции $y = f(kx)$, зная график функции $y = f(x)$.

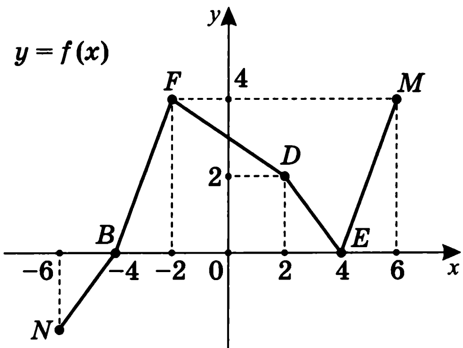
Так как $N(x_0; y_0) \in \Gamma(y = f(x))$,

то $N(kx_0; y_0) \in \Gamma(y = f(kx))$.

При $k > 1$ график $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием вдоль оси абсцисс в k раз.

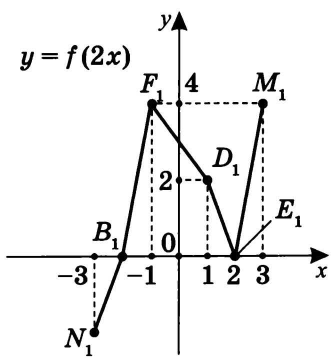
При $0 < k < 1$ график $y = f(kx)$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз.

Рассмотрим график кусочно-линейной функции.



а) Построим график $y = f(2x)$.

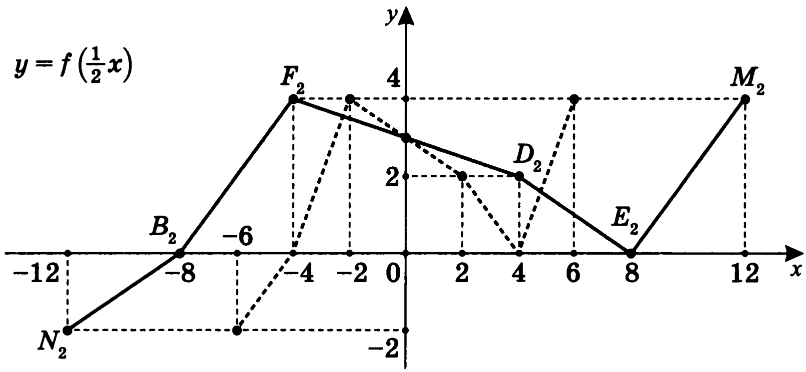
$N(-6; -2) \to N_1(-3; -2)$;
$B(-4; 0) \to B_1(-2; 0)$;
$F(-2; 4) \to F_1(-1; 4)$;
$D(2; 2) \to D_1(1; 2)$;
$E(4; 0) \to E_1(2; 0)$;
$M(6; 4) \to M_1(3; 4)$.



Значит, для того чтобы построить график функции $y = f(2x)$, зная график функции $y = f(x)$, необходимо сжать его в два раза вдоль оси абсцисс.

б) Построим график $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

$N(-6; -2) \to N_2(-12; -2)$;
$B(-4; 0) \to B_2(-8; 0)$;
$F(-2; 4) \to F_2(-4; 4)$;
$D(2; 2) \to D_2(4; 2)$;
$E(4; 0) \to E_2(8; 0)$;
$M(6; 4) \to M_2(12; 4)$.



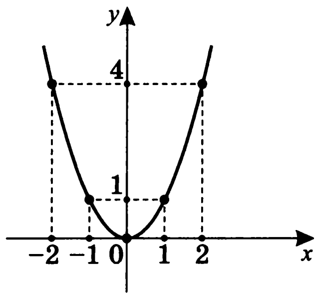
Значит, для того чтобы построить график функции $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, зная график функции $y = f(x)$, необходимо растянуть его в два раза вдоль оси абсцисс.

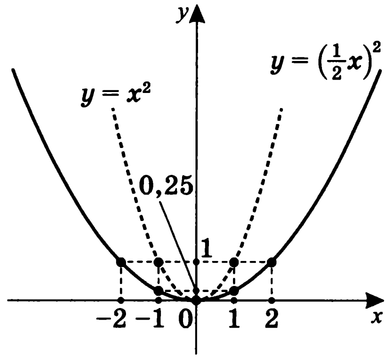
Отметим, что точка на оси ординат всегда неподвижна, т. е. остается на том же месте.

Практикум 6 (Примеры преобразований графиков вида $y = f(kx)$)

1. Пусть $f(x) = x^2$.

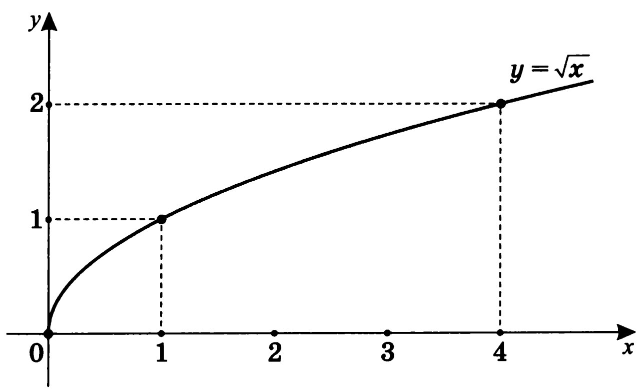
Построим график функции $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.



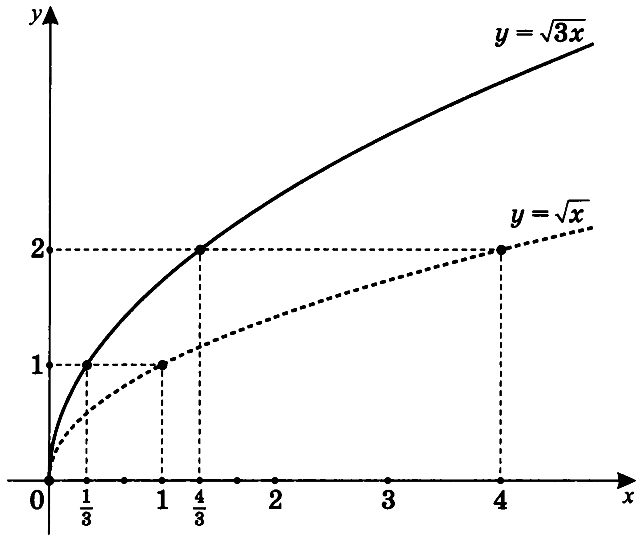


Для того чтобы построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$, необходимо растянуть график функции $y = x^2$ в два раза вдоль оси абсцисс.

2. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$.
Построим график функции $y = \sqrt{3x}$.

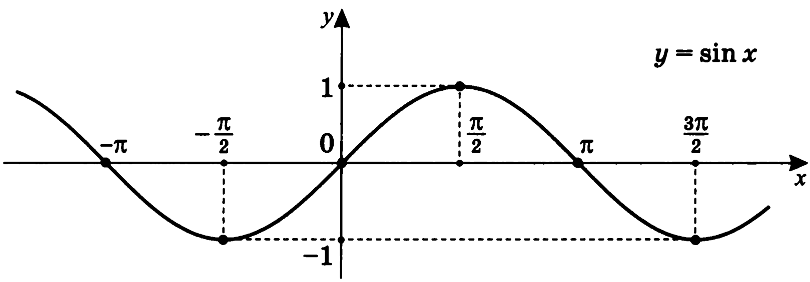


Для того чтобы построить график функции $y = \sqrt{3x}$, необходимо сжать график функции $y = \sqrt{x}$ в три раза вдоль оси абсцисс.

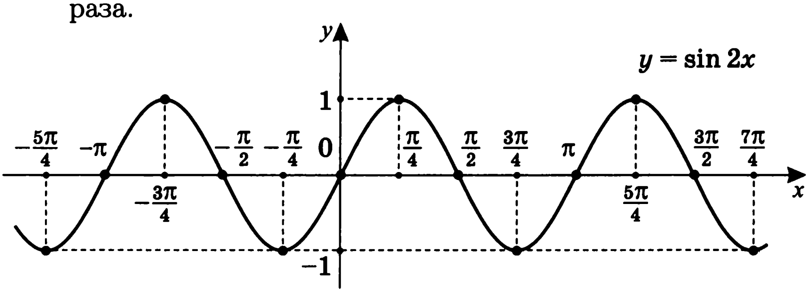


3. Пусть $f(x) = \sin x$.

Построим график функции $y = \sin 2x$.

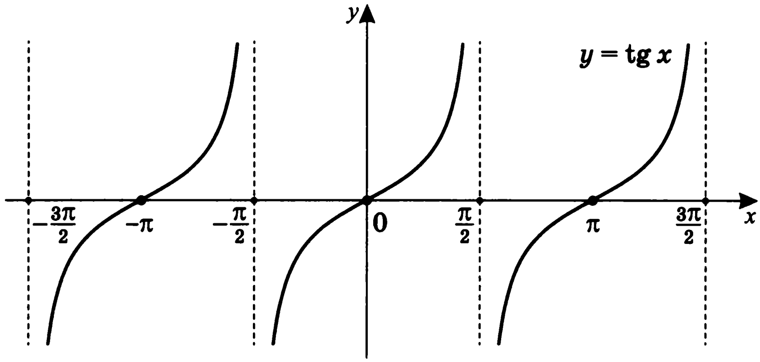


Для построения графика функции $y = \sin 2x$ необходимо график функции $y = \sin x$ сжать вдоль оси абсцисс в два раза.

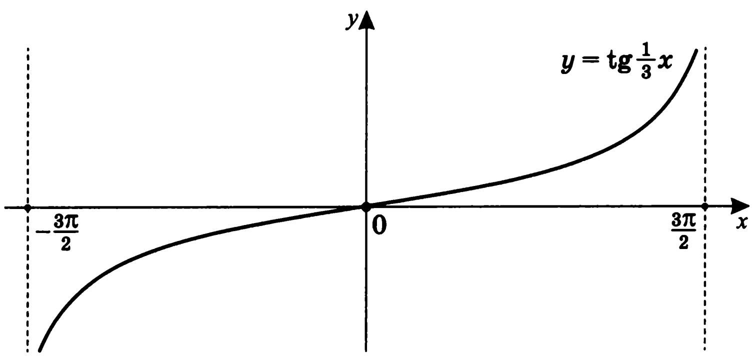


4. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Построим график функции $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

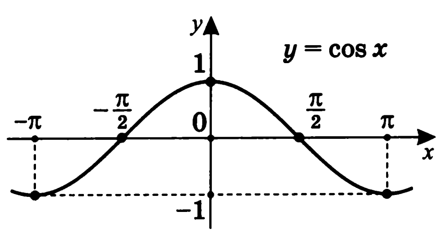


Для того чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x\right)$, необходимо график функции $y = \operatorname{tg} x$ растянуть вдоль оси абсцисс в три раза.

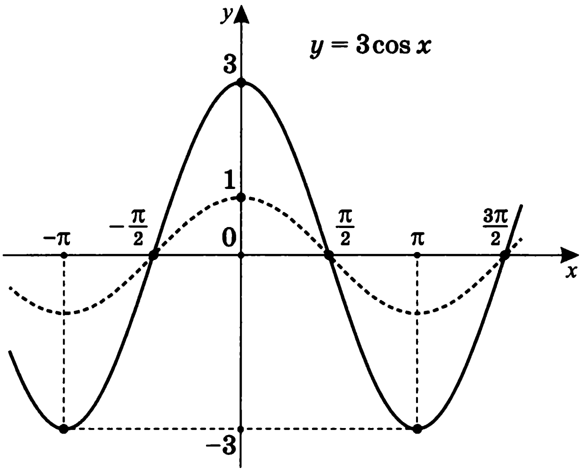


5. Пусть $f(x) = \cos x$.

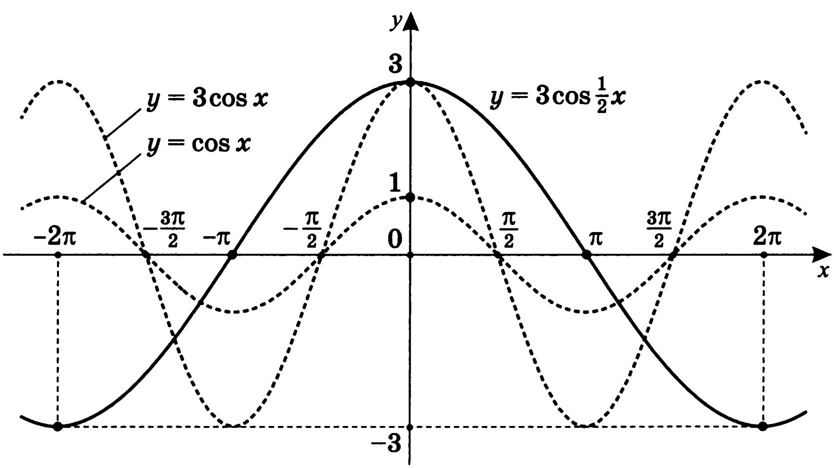
Построим график функции $y = 3\cos\frac{1}{2}x$ методом комбинации преобразований.



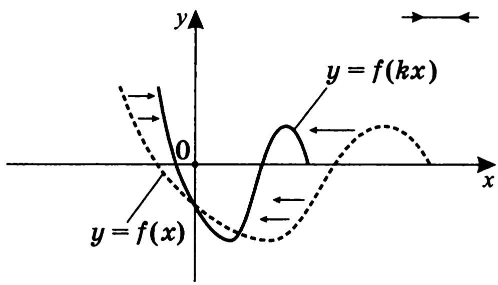
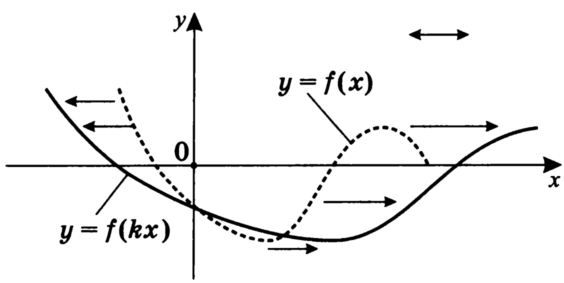
Вначале построим график функции $y = 3\cos x$. Для этого надо растянуть график функции $y = \cos x$ в три раза вдоль оси *ординат*.



Затем построим график функции $y = 3\cos\frac{1}{2}x$. Для этого график $y = 3\cos x$ необходимо растянуть вдоль оси *абсцисс* в два раза.



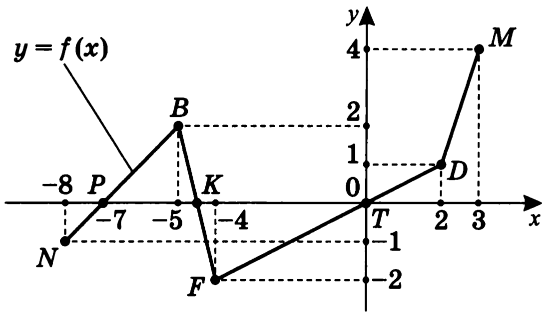
Примечание. Для построения графиков вида $y = Af(kx)$, естественно, возможны различные последовательности преобразований исходного графика функции $y = f(x)$. В предыдущем примере вначале был построен график $y = 3\cos x$, а затем — график $y = 3\cos\frac{x}{2}$. Но возможно было действовать в другом порядке, вначале растянув график функции $y = \cos x$ в два раза вдоль оси абсцисс и построив график функции $y = \cos\frac{x}{2}$, после чего растянуть полученный график в три раза вдоль оси ординат.

11. $y = f(kx)$ $(k > 1)$	График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в k раз.  $E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.
12. $y = f(kx)$ $(0 < k < 1)$	График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.  $E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.

Преобразование графиков вида $y = f(|x + b|)$, $y = f(|x| + b)$

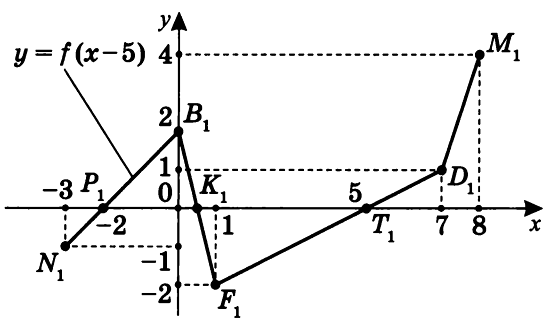
Эти преобразования несколько сложны, поэтому при первом прочтении данный параграф можно опустить.

1. Пусть $f(x)$ — кусочно-линейная функция, заданная графиком.



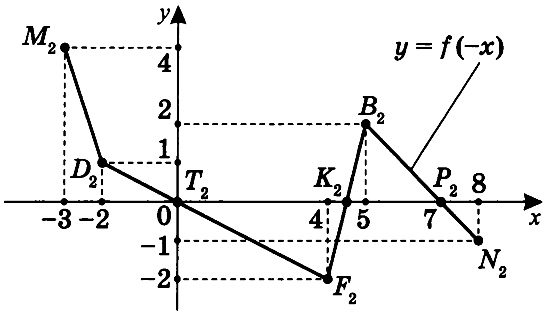
Построим график функции $y = f(|x - 5|)$.

а) Вначале построим график функции $y = f(x - 5)$, получаемый сдвигом исходного графика на 5 вправо:



$N(-8; -1) \to N_1(-3; -1)$;
$B(-5; 2) \to B_1(0; 2)$;
$F(-4; -2) \to F_1(1; -2)$;
$D(2; 1) \to D_1(7; 1)$;
$M(3; 4) \to M_1(8; 4)$;
$P(-7; 0) \to P_1(-2; 0)$;
$K(-4{,}5; 0) \to K_1(0{,}5; 0)$;
$T(0; 0) \to T_1(5; 0)$.

б) Так как $y = f(|x-5|) = \begin{cases} f(x-5), & x \geqslant 5 \\ f(5-x), & x < 5 \end{cases}$, то вначале построим $f(-x)$:



$N(-8;-1) \to N_2(8;-1)$;

$B(-5;2) \to B_2(5;2)$;

$F(-4;-2) \to F_2(4;-2)$;

$D(2;1) \to D_2(-2;1)$;

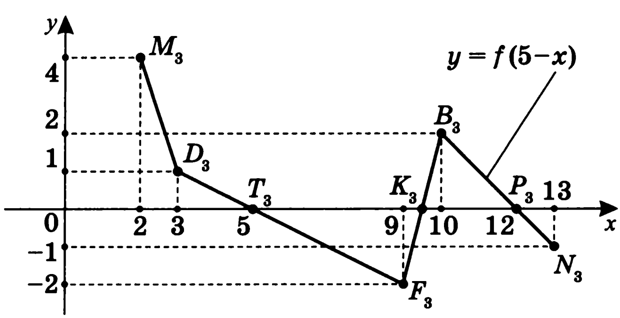
$M(3;4) \to M_2(-3;4)$;

$P(-7;0) \to P_2(7;0)$;

$K(-4{,}5;0) \to K_2(0{,}5;0)$;

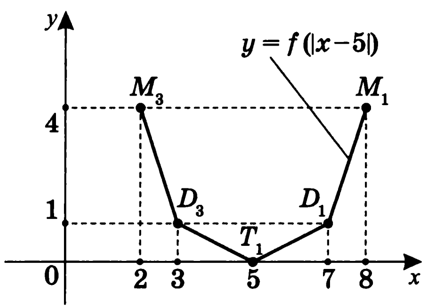
$T(0;0)$ — неподвижная точка, $T \equiv T_2$.

в) Затем сдвигом графика $y = f(-x)$ на 5 вправо построим график функции $y = f(5-x) = f(-(x-5))$:

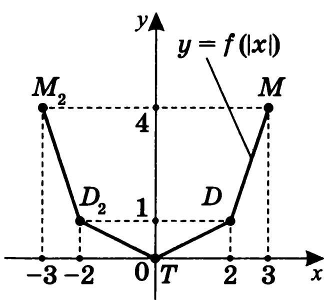


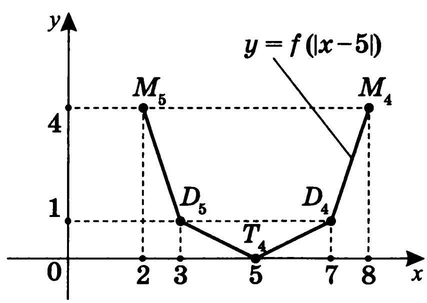
$$\begin{aligned}
&N_2(-8;1) \to N_3(13;-1);\\
&B_2(5;2) \to B_3(10;2);\\
&F_2(4;-2) \to F_3(9;-2);\\
&D_2(-2;1) \to D_3(3;1);\\
&M_2(-3;4) \to M_3(2;4);\\
&P_2(7;0) \to P_3(12;0);\\
&K_2(4{,}5;0) \to K_3(9{,}5;0);\\
&T_2(0;0) \to T_3(5;0).
\end{aligned}$$

г) Потом склеим график функции $y = f(x-5)$ при $x \geqslant 5$ и график функции $y = f(5-x)$ при $x < 5$:



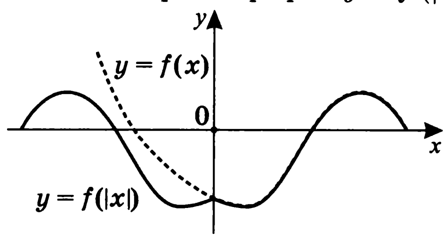
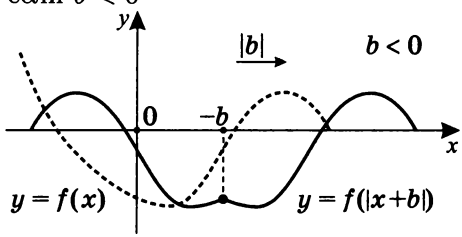
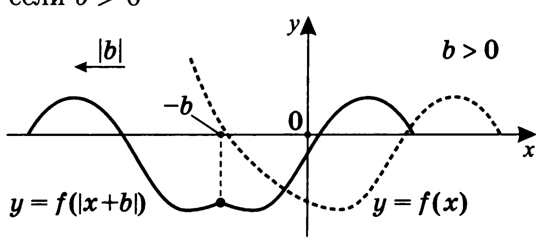
Примечание. Можно выстроить и другую последовательность: сначала построить график функции $y = f(|x|)$, а затем сдвинуть его на 5 вправо, получим $y = f(|x-5|)$.



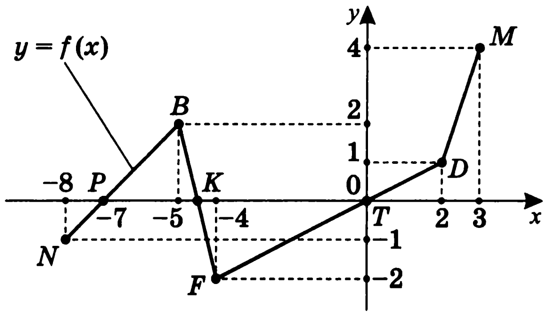


$$
\begin{array}{ll}
M(3;4) & \to M_4(8;4);\\
D(2;1) & \to D_4(7;1);\\
T(0;0) & \to T_4(5;0);\\
D_2(-2;1) & \to D_5(3;1);\\
M_2(-3;4) & \to M_5(2;4).
\end{array}
$$

Результаты построения данного графика можно обобщить.

$y = f\left(\lvert x+b\rvert\right)$	Для построения данного графика сначала построим график $y = f\left(\lvert x\rvert\right)$: 
13. $y=f(\lvert x+b\rvert)$ $(b<0)$	График $y = f(\lvert x\rvert)$ сдвинем вправо на $\lvert b\rvert$, если $b<0$ 
14. $y = f(\lvert x+b\rvert)$ $(b>0)$	График $y = f(\lvert x\rvert)$ сдвинем влево на $\lvert b\rvert$, если $b>0$ 

2. Построим график функции $y = f(|x| + b)$.

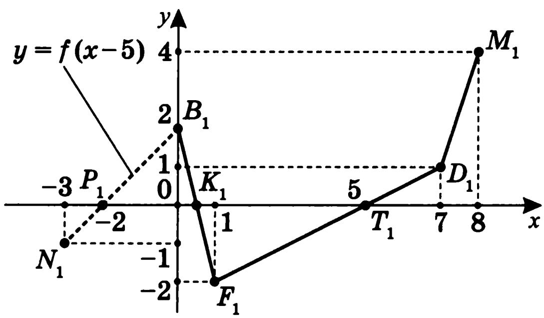


Пусть для примера $b = -5$.

Так как $f(|x| + b) = \begin{cases} f(x+b), & x \geqslant 0 \\ f(-x+b), & x < 0 \end{cases}$,

то рассмотрим следующие промежутки.

а) Пусть $x \geqslant 0$.

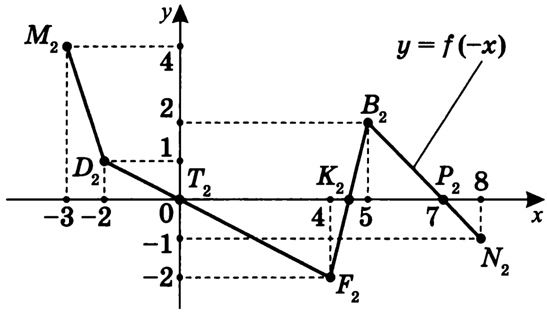


Имеет место сдвиг вправо на 5.

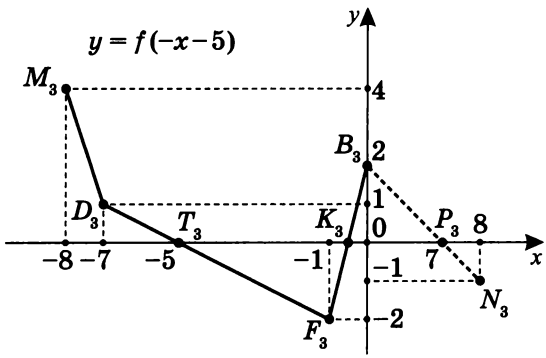
(Рассматривается график только в правой полуплоскости.)

б) Пусть $x < 0$.

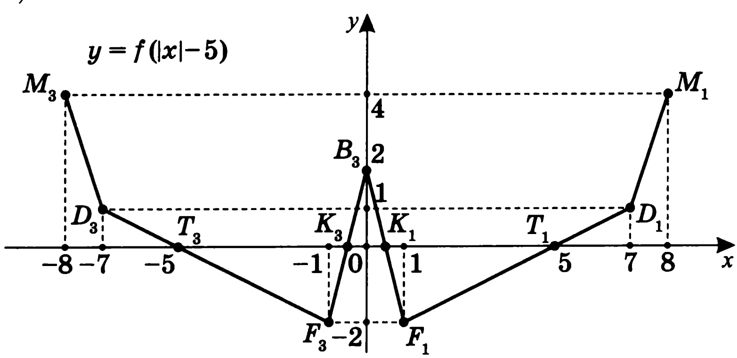
Сначала построим график функции $y = f(-x)$.



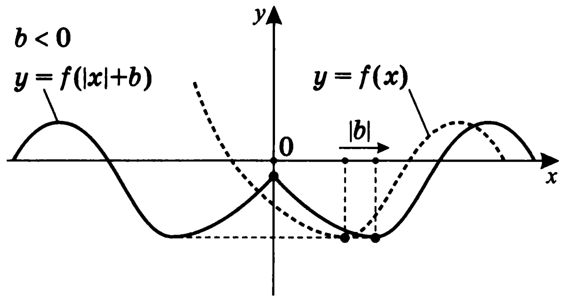
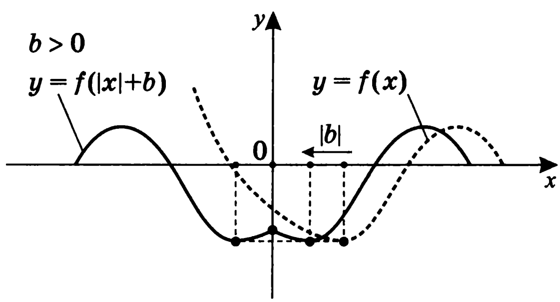
Теперь сдвинем его влево на 5 ($y = f(-(x+5))$). (Рассматривается график только в левой полуплоскости.)



в) Склеим обе части.



Результаты построения данного графика можно обобщить.

15. $y=f(\|x\|+b)$ $(b<0)$	Сдвиг графика $y=f(x)$ вправо на $\|b\|$ и отражение полученного графика, находящегося в правой полуплоскости $(x \geqslant 0)$, в левую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика. 
16. $y=f(\|x\|+b)$ $(b>0)$	Сдвиг графика $y=f(x)$ влево на $\|b\|$ и отражение полученного графика, находящегося в левой полуплоскости $(x<0)$, в правую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика. 

Примечание. Заметим, что график функции $y=f\left(|x|+b\right)$ построить проще, если воспользоваться тем, что эта функция четная, а значит, ее график симметричен относительно оси ординат. Таким образом, достаточно построить график $y=f(x+b)$ в правой полуплоскости и симметрично относительно оси ординат отразить его в левую полуплоскость.

Практикум 7 (Использование комбинированных преобразований при построении графиков функций)

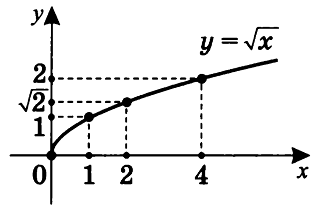
Постройте графики функций:

1. $y = \sqrt{2x+6}$;
2. $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$;
3. $y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x}$;
4. $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}|x|}$;
5. $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$.

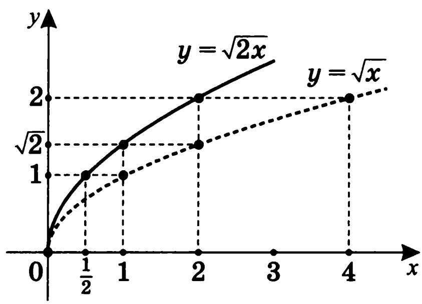
Решение практикума 7

1. $y = \sqrt{2x+6}$.

Для построения графика $y = \sqrt{2x+6}$ используем последовательность преобразований.

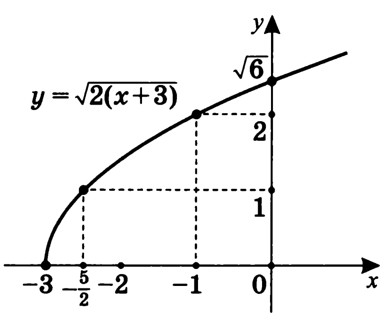


а) Построим график $y = \sqrt{2x}$, сжав исходный график вдоль оси абсцисс в 2 раза.

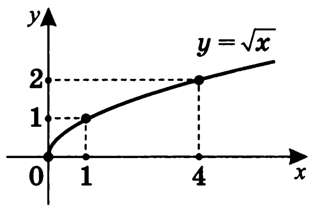


Примечание. Можно построить этот график и иначе. Так как $y = \sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$, то, растянув исходный график $y = \sqrt{x}$ вдоль оси ординат в $\sqrt{2}$ раз, получим тот же график $y = \sqrt{2x}$.

б) Затем построим график $y = \sqrt{2(x+3)}$ сдвигом графика $y = \sqrt{2x}$ влево на 3.

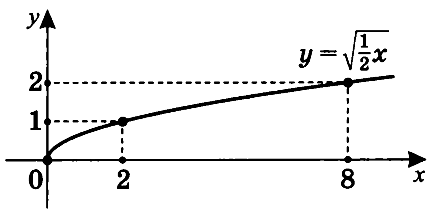


2. $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$.

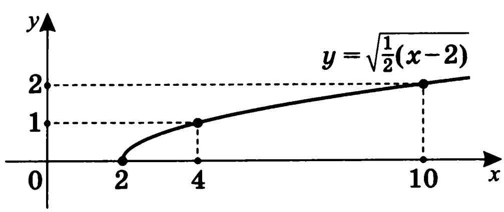


Для построения графика функции $y = \sqrt{\frac{1}{2}x - 1}$:

а) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, растянув исходный график в два раза вдоль оси абсцисс.



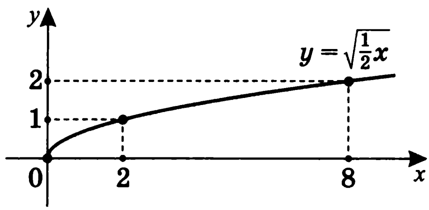
б) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}(x - 2)}$ сдвигом графика $y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$ вправо на 2.



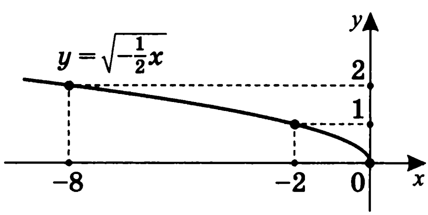
3. $y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x}$:

а) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, растянув график функции $y = \sqrt{x}$ в два раза относительно оси абсцисс.



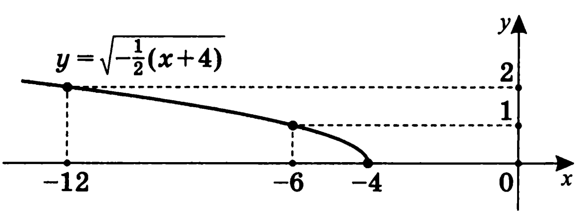
б) Построим график функции $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$ симметрией относительно оси ординат.



в) Построим график функции

$y = \sqrt{-2 - \frac{1}{2}x} = \sqrt{-\frac{1}{2}(x+4)}$

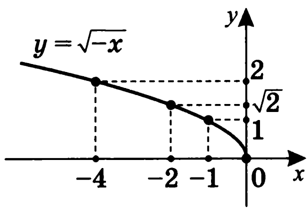
сдвигом графика $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x}$ влево на 4.



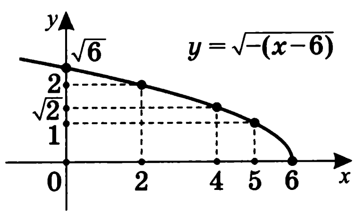
4. $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}|x|}$.

Для построения графика функции $y = \sqrt{3 - \frac{1}{2}|x|}$:

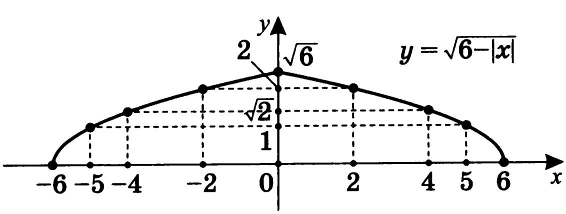
а) Построим график функции $y = \sqrt{-x}$, симметрично отразив базовый график $y = \sqrt{x}$ относительно оси ординат.



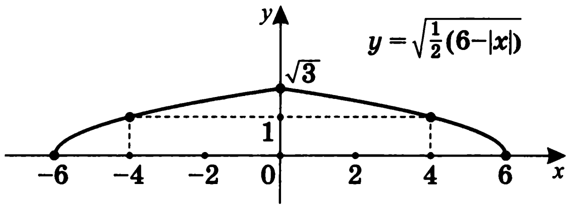
б) Построим график функции $y = \sqrt{6 - x} = \sqrt{-(x - 6)}$ сдвигом графика $y = \sqrt{-x}$ вправо на 6.



в) Построим график функции $y = \sqrt{6 - |x|}$, используя правило построения графика $y = f(|x|)$, т. е. симметрию относительно оси ординат.



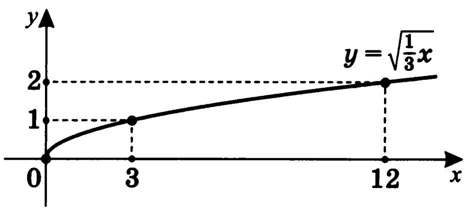
г) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{2}(6 - |x|)}$ сжатием в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси ординат графика $y = \sqrt{6 - |x|}$, так как $\sqrt{\frac{1}{2}(6 - |x|)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6 - |x|}$.



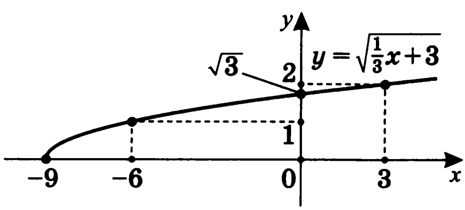
5. $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$.

Для построения графика функции $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$ используем последовательность преобразований.

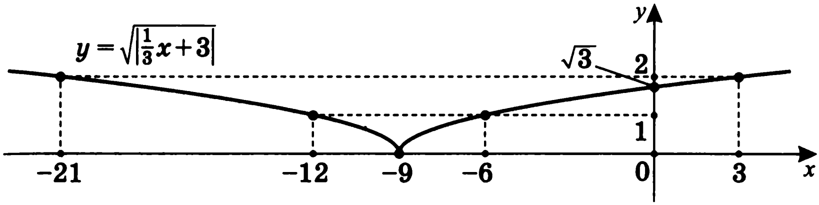
а) Построим график $y = \sqrt{\frac{1}{3}x}$ растяжением графика $y = \sqrt{x}$ в три раза вдоль оси абсцисс.



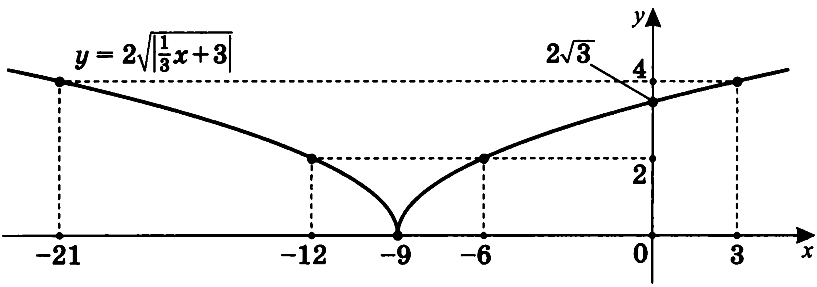
б) Построим $y = \sqrt{\frac{1}{3}x + 3} = \sqrt{\frac{1}{3}(x + 9)}$ сдвигом графика $y = \frac{1}{3}x$ влево на 9.



в) Построим $y = \sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$, используя для этого преобразование вида $y = f(|x + b|)$ (см. с. 135).



г) Построим график $y = 2\sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$ растяжением графика $y = \sqrt{\left|\frac{1}{3}x + 3\right|}$ в два раза вдоль оси ординат.



Примечание. Обратите внимание на то, что для построения итоговых графиков могут быть использованы *различные* последовательности элементарных преобразований исходных графиков. Важно, чтобы при этом они были возможны и корректны, т. е. чтобы мы точно представляли, благодаря какому известному нам преобразованию можно перейти от графика одного вида к графику другого вида. Не помешает и вычислительно проверить по точкам итоговый график.

Самостоятельная работа 1

Зная график $y = f(x) = \frac{1}{x}$, постройте графики:

1. $y = \frac{1}{x-1}$;
2. $y = \frac{1}{-x}$;
3. $y = 1 - \frac{1}{x}$;
4. $y = \frac{1}{x+2} - 1$;
5. $y = \left|\frac{1}{x} - 2\right|$;
6. $y = \frac{1}{|x+3|}$;
7. $y = \frac{1}{|x|-2}$;
8. $y = \left|\frac{1}{1-x} - 3\right|$;
9. $y = \left|\frac{1}{|x-1|} - 3\right|$;
10. $y = \left|\frac{1}{|x|-3} - 1\right|$.

Самостоятельная работа 2

Зная график $y = f(x)$, постройте графики:

1. $y = f(x-3)$;

2. $y = f(|x-3|)$;

3. $y = 1 - f(|x-3|)$,

где

а) $y = f(x) = \frac{1}{x}$;

б) $y = f(x) = \sqrt{x}$;

в) $y = f(x) = x^3$.

Самостоятельная работа 3

Постройте графики:

1. $y = \frac{1}{(3-|x|)^2}$;

2. $y = (2-x)^3$;

3. $y = \left|\frac{1}{(4-|x|)^2} - 1\right|$;

4. $y = \left||(2-x)^3| - 1\right|$;

5. $y = (|x|-2)^2$;

6. $y = \left|1 - (|x|-2)^2\right|$.

Самостоятельная работа 4

Постройте графики функций:

1. $y = \sqrt{x-1}$;

2. $y = \sqrt{x} + 3$;

3. $y = \sqrt{x+2} - 1$;

4. $y = \sqrt{-x}$;

5. $y = 1 - \sqrt{x-1}$;

6. $y = |\sqrt{x} - 2|$;

7. $y = \left|\sqrt{1-x} - 3\right|$;

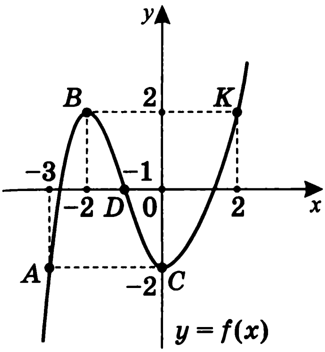
8. $y = \sqrt{|x| - 2}$;

9. $y = \sqrt{|x+3|}$;

10. $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 2\right|$.

Самостоятельная работа 5

Дан график функции $f(x)$:



Постройте на одном чертеже (или в одной системе координат) графики функций:

Вариант I

1. $y = f(x)$ и $y = f(x) + 1$;
2. $y = f(x)$ и $y = f(x-1)$;
3. $y = f(x)$ и $y = 2f(x)$;
4. $y = f(x)$ и $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;
5. $y = f(x)$ и $y = f(|x|)$.

Вариант II

1. $y = f(x)$ и $y = f(x+1)$;
2. $y = f(x)$ и $y = f(x) - 1$;
3. $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$;
4. $y = f(x)$ и $y = f(2x)$;
5. $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$.

Практикум 8

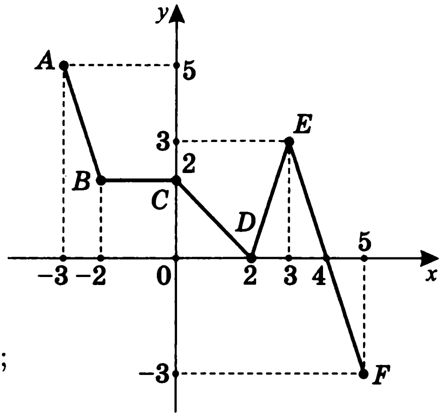
1. По данному графику функции исследуйте ее и опишите ее свойства:

а) $D(f)$;

б) $E(f)$;

в) корни (нули) функции;

г) промежутки знакопостоянства;



д) вид функции в смысле четности;

е) периодичность;

ж) промежутки монотонности;

з) $y_{\max}$, $y_{\min}$;

и) $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$.

2. Постройте графики.

а) $y = f(x-3)$;

б) $y = f(x)+2$;

в) $y = f(x+2)$;

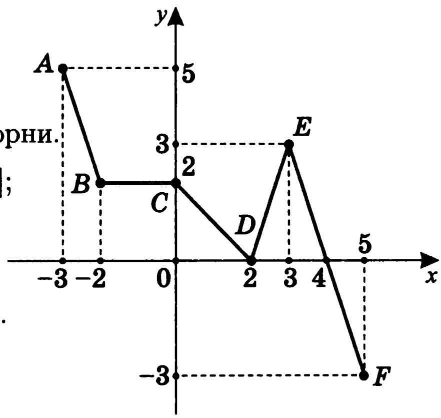
г) $y = f(x)-3$.

Исследуйте и опишите свойства графика после преобразования.

д) $y = f(x-1)-4$.

Решение практикума 8

1. По данному графику функции исследуем ее и опишем ее свойства:



а) $D(f) = [-3; 5]$.

б) $E(f) = [-3; 5]$.

в) $x = 2$, $x = 4$ — корни.

г) $f(x) \geqslant 0$ на $[-3; 4]$;
$f(x) < 0$ на $(4; 5)$.

д) Общего вида в смысле четности.

е) Непериодическая.

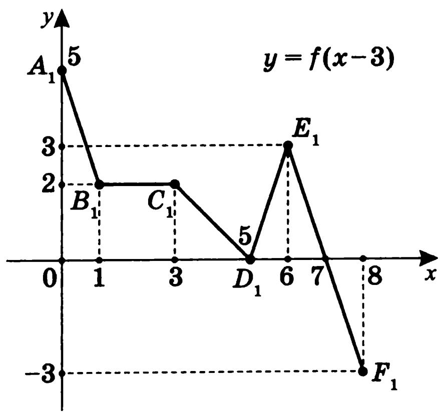
ж) $y(x) \uparrow$ на $[2; 3]$;
$y(x) \downarrow$ на $[-3; -2] \cup [0; 2] \cup [3; 5]$;
$y(x) = \text{const}$ на $[-2; 0]$.

з) $y_{\max} = y(3) = 3$; $y_{\min} = y(2) = 0$.

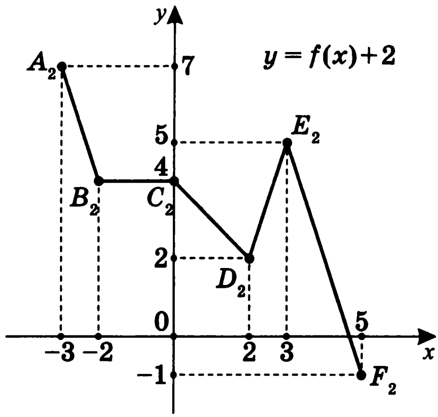
и) $y_{\text{наиб}} = y(-3) = 5$; $y_{\text{наим}} = y(5) = -3$.

2. Построим графики.

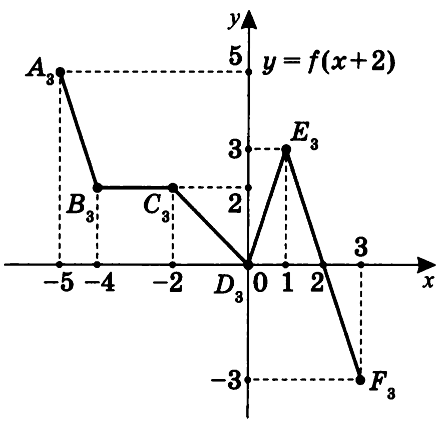
а) $y = f(x - 3)$.



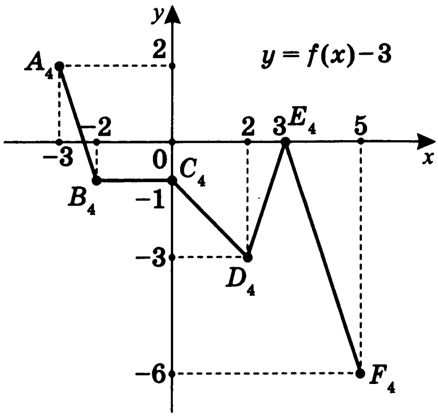
б) $y = f(x) + 2$.


y
x
y = f(x)+2
A2
B2
C2
D2
E2
F2
7
5
4
2
0
−1
−3 −2
2 3
5

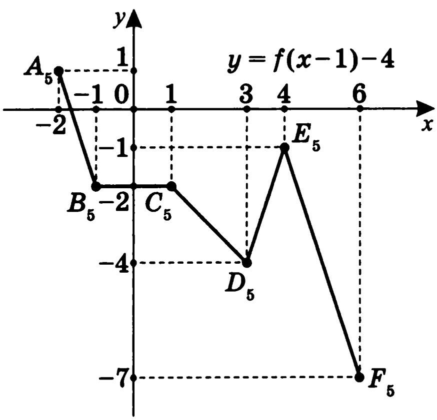
в) $y = f(x + 2)$.


y
x
y = f(x+2)
A3
B3
C3
D3
E3
F3
5
3
2
3
−3
−5 −4
−2
0 1 2

г) $y = f(x) - 3$.



д) $y = f(x-1) - 4$.

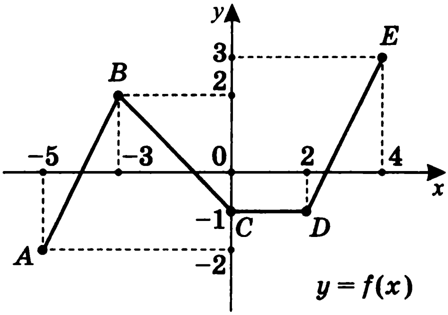


1. $D(f) = [-2; 6]$.
2. $E(f) = [-7; 1]$.
3. $x = -1\frac{2}{3}$.
4. $f(x) \geqslant 0$ на $\left[-2; -1\frac{2}{3}\right]$; $f(x) \leqslant 0$ на $\left[-1\frac{2}{3}; 6\right]$.
5. Общего вида в смысле четности.
6. Непериодическая.
7. $y = f(x) \uparrow$ на $[3; 4]$;
   $y = f(x) \downarrow$ на $[-2; -1] \cup [1; 3] \cup [4; 6]$.
8. $y_{\max} = y(4) = -1$; $y_{\min} = y(3) = -4$.
9. $y_{\text{наиб}} = y(-2) = 1$; $y_{\text{наим}} = y(6) = -7$.

Самостоятельная работа 6

Вариант I

Дан график функции $y = f(x)$:



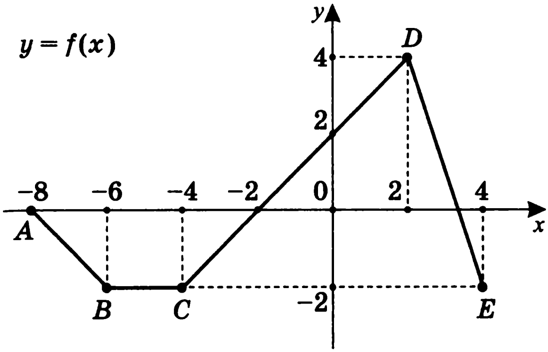
Постройте графики:

1. $y = f(x-2)+3;$
2. $y = f(x+1)-2;$
3. $y = -f(x);$
4. $y = f(-x);$
5. $y = f\left(|x|\right);$
6. $y = |f(x)|;$
7. $y = |f(x+2)-1|;$

8*. $y = \left|f\left(|x|-2\right)-2\right|.$

Вариант II

Дан график функции $y = f(x)$:



Постройте графики:

1. $y = f(-x)$;
2. $y = |f(x)|$;
3. $y = f(|x|)$;
4. $y = 2f(x)$;
5. $y = \frac{1}{2}f(x)$;
6. $y = f(2x)$;
7. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;
8. $y = |f(|x|)|$.

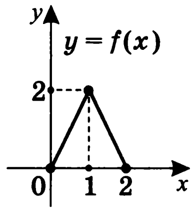
Домашняя тренировочная работа

Вариант I

1. Постройте график функции $y = \left|\sqrt{x+3} - 2\right|$.

2. Постройте график функции $y = \frac{2}{|x|} + 1$.

3. Дана функция



а) Постройте график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

б) Постройте график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$ и исследуйте после преобразований получившийся график.

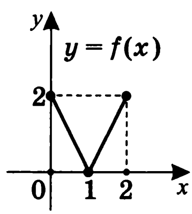
в) Постройте график $y = |2f(|x - 1|) - 1|$ и выясните, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x - 1|) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a.

Вариант II

1. Постройте график функции $y = \left|\frac{1}{x-3} + 2\right|$.

2. Постройте график функции $y = 2\sqrt{|x|} - 1$.

3. Дана функция



а) Постройте график $y = f(2x - 2)$.

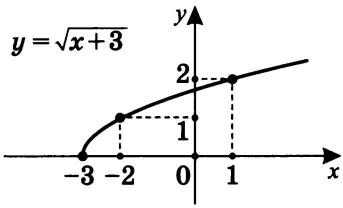
б) Постройте график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$ и выясните, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x| - 1) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a.

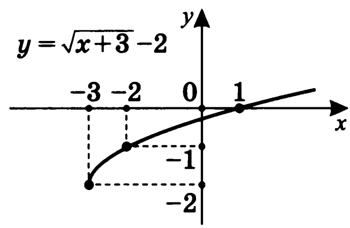
в) Постройте график $y = |2f(|x - 1|) - 1|$ и исследуйте получившийся после преобразований график.

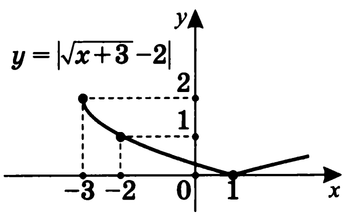
Решение домашней тренировочной работы

Вариант I

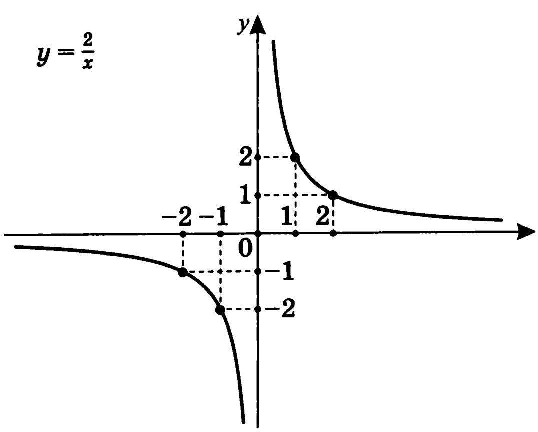
1. Построим график функции $y = \left|\sqrt{x+3} - 2\right|$.

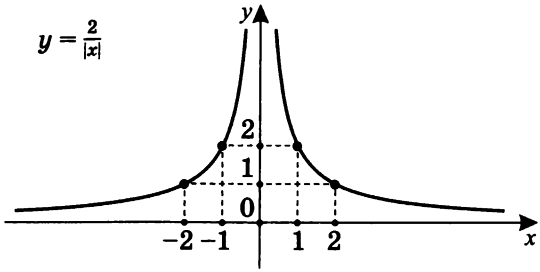


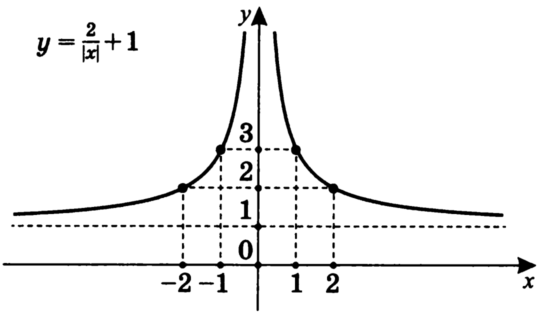




2. Построим график функции $y = \frac{2}{|x|} + 1$.

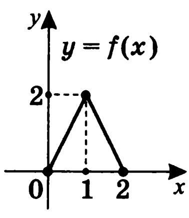


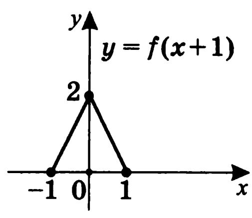




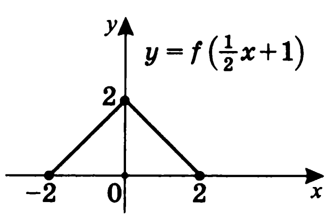
3. а) Построим график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Вначале построим график $y = f(x + 1)$ сдвигом исходного графика влево на 1:



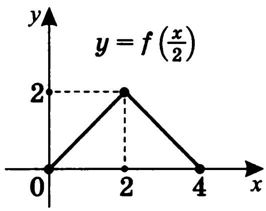


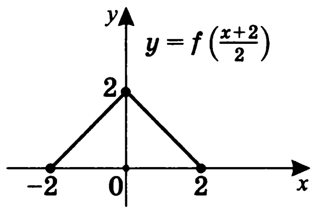
Затем построим график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, растянув график $y = f(x + 1)$ в два раза вдоль оси абсцисс.



Можно использовать другую последовательность построения графика $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Если сразу построить график $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$, растянув в два раза исходный график $y = f(x)$, то можно воспользоваться преобразованием сдвига влево на 2, чтобы получить из графика $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ график $y = f\left(\frac{x+2}{2}\right)$, а это и есть график $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

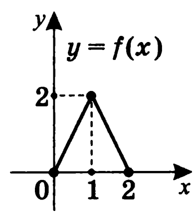




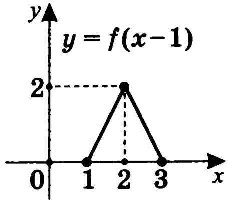
б) Построим график $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.

Составим последовательный план преобразований:

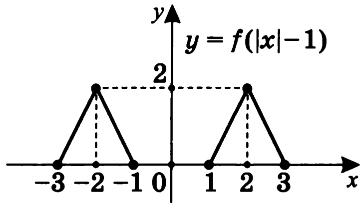
1. $y = f(x - 1)$;
2. $y = f(|x| - 1)$;
3. $y = 2f(|x| - 1)$;
4. $y = 2f(|x| - 1) - 1$;
5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



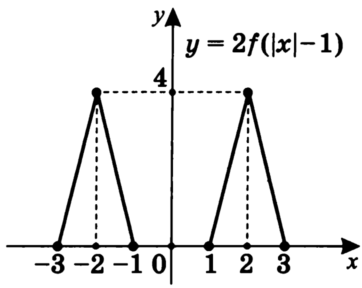
1. $y = f(x - 1)$.



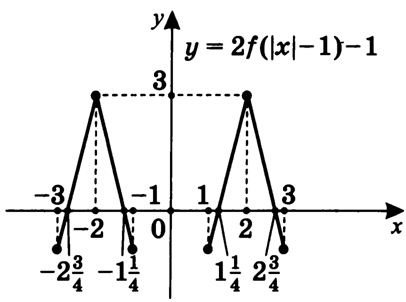
2. $y = f\left(|x| - 1\right)$.



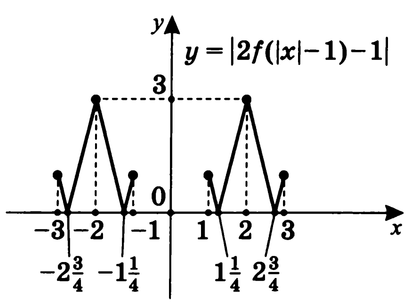
3. $y = 2f\left(|x| - 1\right)$.



4. $y = 2f\left(|x| - 1\right) - 1$.



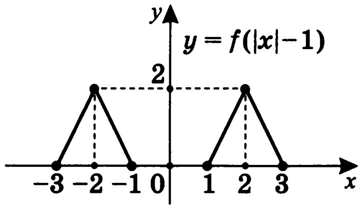
5. $y = \left|2f\left(|x| - 1\right) - 1\right|$.



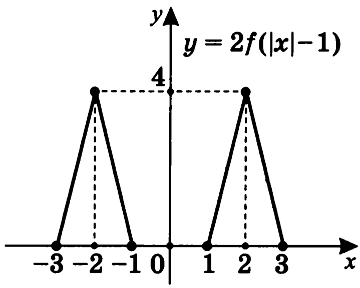
Теперь исследуем получившуюся функцию по графику.

1. $D(f) = [-3; -1] \cup [1; 3]$.
2. $E(f) = [0; 3]$.
3. Промежутки монотонности:
   на $\left[-3; -2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[-2\frac{3}{4}; -2\right]$ — возрастает;
   на $\left[-2; -1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[-1\frac{1}{4}; -1\right]$ — возрастает;
   на $\left[1; 1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[1\frac{1}{4}; 2\right]$ — возрастает;
   на $\left[2; 2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[2\frac{3}{4}; 3\right]$ — возрастает.
4. $y_{\min} = y\left(-2\frac{3}{4}\right) = 0;$
   $y_{\min} = y\left(-1\frac{1}{4}\right) = 0;$
   $y_{\min} = y\left(1\frac{1}{4}\right) = 0;$
   $y_{\min} = y\left(2\frac{3}{4}\right) = 0;$
   $y_{\max} = y(-2) = 3;$
   $y_{\max} = y(2) = 3.$
5. $y_{\text{наиб}} = 3; \quad y_{\text{наим}} = 0.$
6. Четная.
7. Непериодическая.

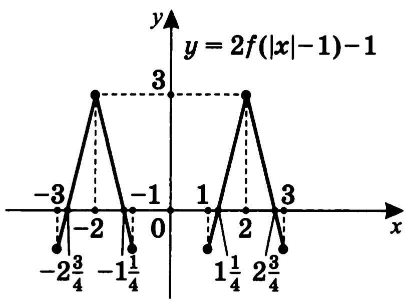
2. $y = f(|x| - 1)$.



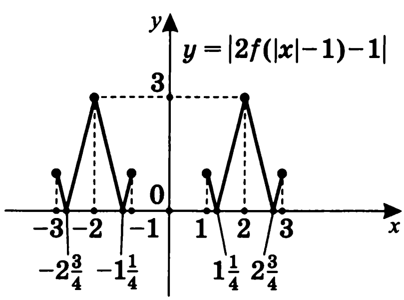
3. $y = 2f(|x| - 1)$.



4. $y = 2f(|x| - 1) - 1$.



5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



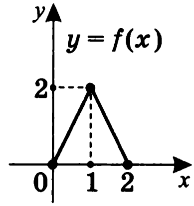
Теперь исследуем получившуюся функцию по графику.

1. $D(f) = [-3; -1] \cup [1; 3]$.
2. $E(f) = [0; 3]$.
3. Промежутки монотонности:
   на $\left[-3; -2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[-2\frac{3}{4}; -2\right]$ — возрастает;
   на $\left[-2; -1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[-1\frac{1}{4}; -1\right]$ — возрастает;
   на $\left[1; 1\frac{1}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[1\frac{1}{4}; 2\right]$ — возрастает;
   на $\left[2; 2\frac{3}{4}\right]$ — убывает;
   на $\left[2\frac{3}{4}; 3\right]$ — возрастает.
4. $y_{\min} = y\left(-2\frac{3}{4}\right) = 0;$
   $y_{\min} = y\left(-1\frac{1}{4}\right) = 0;$
   $y_{\min} = y\left(1\frac{1}{4}\right) = 0;$
   $y_{\min} = y\left(2\frac{3}{4}\right) = 0;$
   $y_{\max} = y\,(-2) = 3;$
   $y_{\max} = y\,(2) = 3.$
5. $y_{\text{наиб}} = 3; \qquad y_{\text{наим}} = 0.$
6. Четная.
7. Непериодическая.

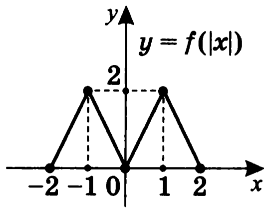
в) Построим график $y = |2f(|x-1|) - 1|$.

Составим последовательный план преобразований:

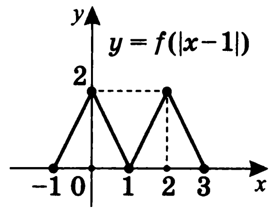
1. $y = f(|x|)$;
2. $y = f(|x-1|)$;
3. $y = 2f(|x-1|)$;
4. $y = 2f(|x-1|) - 1$;
5. $y = |2f(|x-1|) - 1|$.



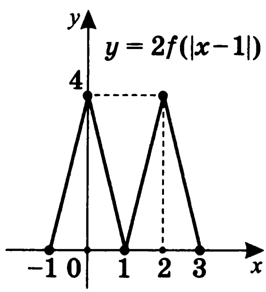
1. $y = f(|x|)$.



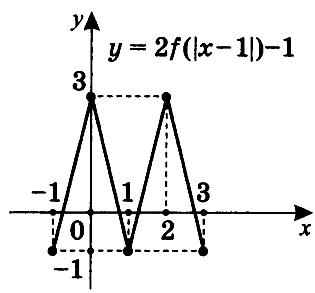
2. $y = f(|x-1|)$.



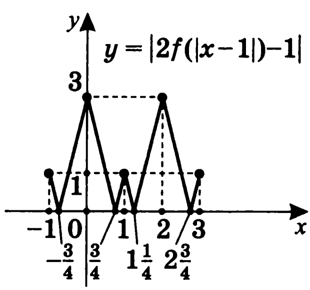
3. $y = 2f(|x-1|)$.



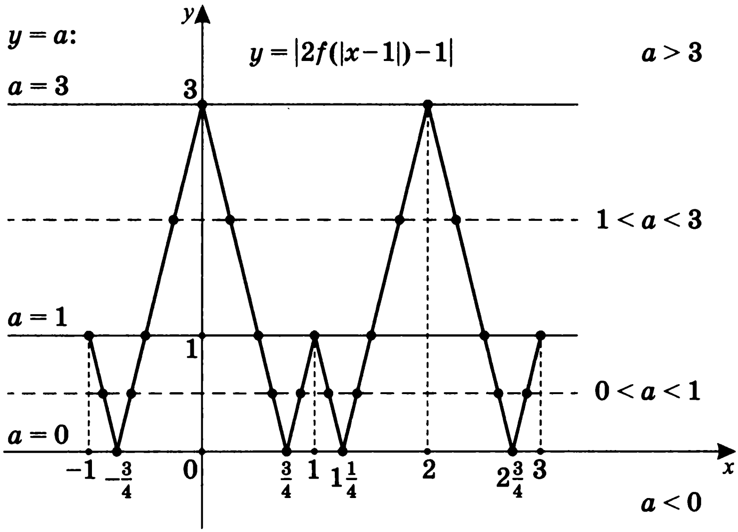
4. $y = 2f(|x-1|) - 1$.



5. $y = |2f(|x-1|) - 1|$.



6. Теперь выясним по графику, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x-1|)-1| = a$ в зависимости от значения параметра a:



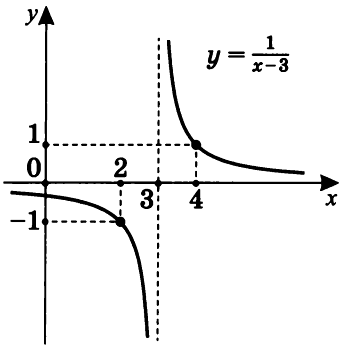
При $a < 0$ — корней нет.
При $a = 0$ — четыре корня.
При $0 < a < 1$ — восемь корней.
При $a = 1$ — семь корней.
При $1 < a < 3$ — четыре корня.
При $a = 3$ — два корня.
При $a > 3$ — корней нет.

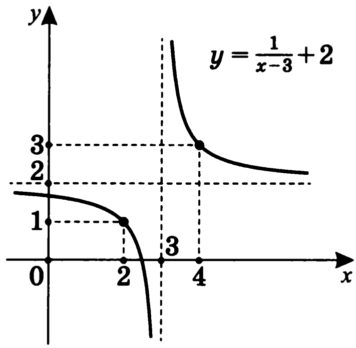
Примечания. 1. В данной домашней тренировочной работе речь идет о том, сколько точек пересечения будет иметь прямая, параллельная оси абсцисс (вида $y = a$) с графиком кусочно-монотонной функции в зависимости от значения параметра a.

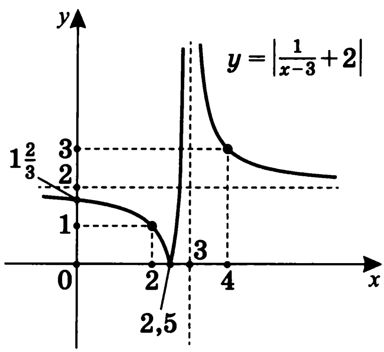
2. Более подробно вопрос о количестве корней в уравнении с параметром в зависимости от значения этого параметра см.: Шахмейстер А. Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 1. СПб.; М., 2014. С. 128–171.

Вариант II

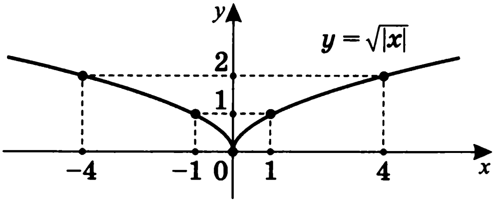
1. Построим график функции $y = \left|\frac{1}{x-3} + 2\right|$.

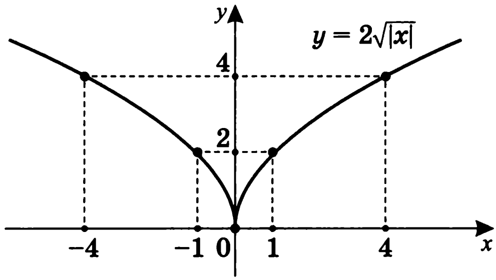


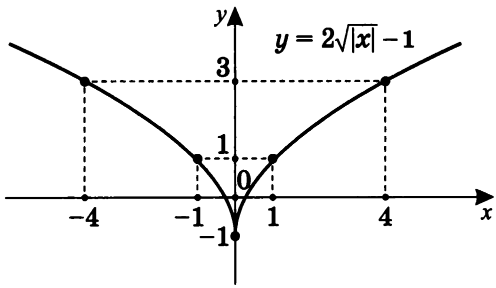




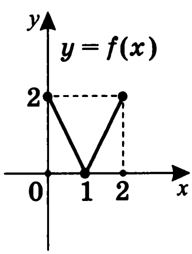
2. Построим график функции $y = 2\sqrt{|x|} - 1$.

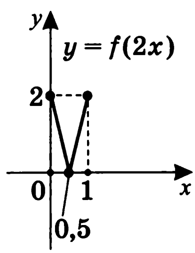


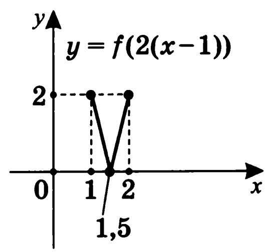




3. а) Построим график $y = f(2x - 2)$.

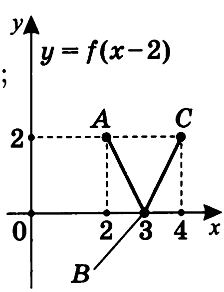


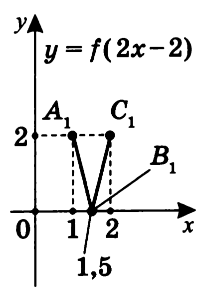




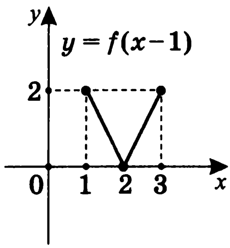
Примечание. Если сначала построить график функции $y = f(x - 2)$, то чтобы из него получить график $y = f(2x-2)$, необходимо уменьшить абсциссы точек в два раза (т. е. сжать в два раза к оси Oy).

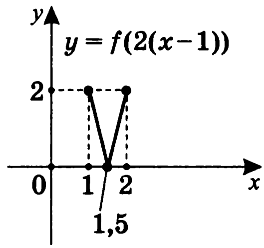
$A\,(2;2) \to A_1\,(1;2)$;
$B\,(3;0) \to B_1\,(1{,}5;0)$;
$C\,(4;2) \to C_1\,(2;2)$.





Но можно предложить и иную последовательность преобразований: например, построить $y = f(x-1)$, а затем $y = f\,(2(x-1))$:





При переходе от графика $y = f(x-1)$ к графику $y = f\,(2(x-1))$ происходит сжатие к оси $x = 1$ в два раза.

Точка $(2;0)$ переходит в точку $(1{,}5;0)$, т. е. расстояние между точками $(1;0)$ и $(2;0)$ изначально равно 1 и сокращается в два раза.

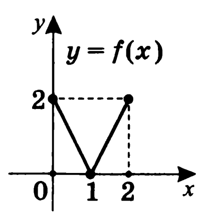
Аналогично точка $(3;2)$ переходит в точку $(2;2)$, т. е. расстояние между точками $(3;2)$ и $(1;2)$ изначально равно 2 и также сокращается в два раза.

В данном случае оказалось возможным построить график необходимой функции тремя способами. В других случаях это может быть невозможно.

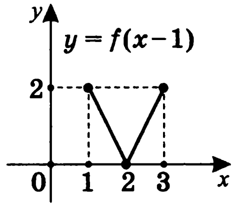
б) Построим график $y = |2f\,(|x|-1)-1|$.

Составим последовательный план преобразований:

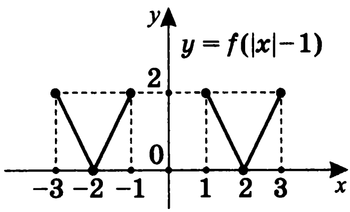
1. $y = f(x-1)$;
2. $y = f\,(|x|-1)$;
3. $y = 2f\,(|x|-1)$;
4. $y = 2f\,(|x|-1)-1$;
5. $y = |2f\,(|x|-1)-1|$.



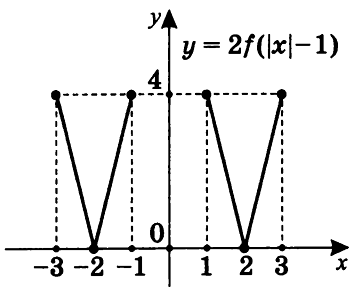
1. $y = f(x-1)$.



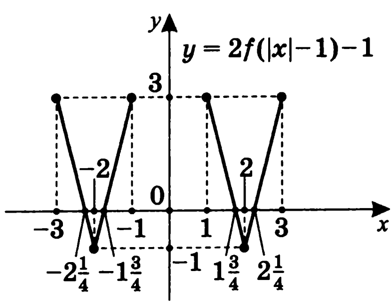
2. $y = f\left(|x|-1\right)$.



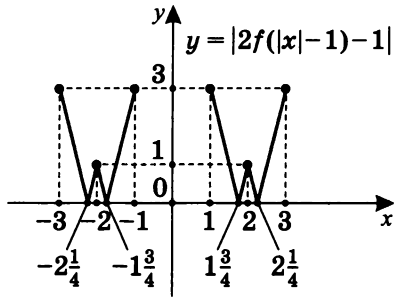
3. $y = 2f\left(|x|-1\right)$.



4. $y = 2f\left(|x|-1\right)-1$.



5. $y = |2f(|x| - 1) - 1|$.



6. Теперь выясним по графику, сколько корней имеет уравнение $|2f(|x| - 1) - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a.

При $a < 0$ — корней нет.

При $a = 0$ — четыре корня.

При $0 < a < 1$ — восемь корней.

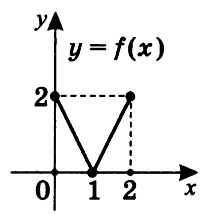
При $a = 1$ — шесть корней.

При $1 < a \leqslant 3$ — четыре корня.

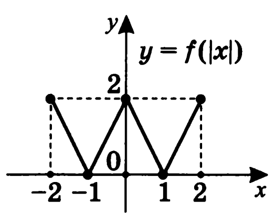
При $a > 3$ — корней нет.

в) Построим график

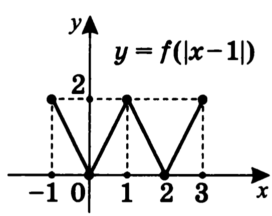
$y = |2f(|x - 1|) - 1|$.



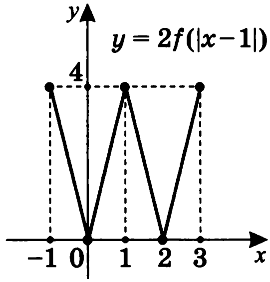
1. $y = f(|x|)$.



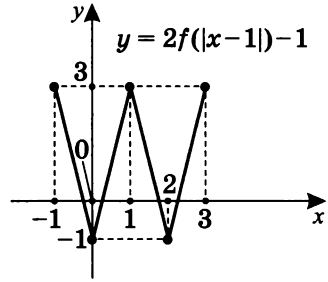
2. $y = f(|x - 1|)$.



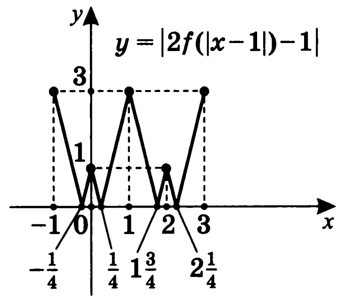
3. $y = 2f(|x-1|)$.



4. $y = 2f(|x-1|) - 1$.



5. $y = |2f(|x-1|) - 1|$.



Исследуем по графику.

1. $D(f) = [-1; 3]$.
2. $E(f) = [0; 3]$.
3. Промежутки монотонности:

   на $\left[-1; -\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

   на $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ — возрастает;

   на $\left[0; \frac{1}{4}\right]$ — убывает;

   на $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ — возрастает;

   на $\left[1; 1\frac{3}{4}\right]$ — убывает;

   на $\left[1\frac{3}{4}; 2\right]$ — возрастает;

   на $\left[2; 2\frac{1}{4}\right]$ — убывает;

   на $\left[2\frac{1}{4}; 3\right]$ — возрастает.

4. $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$;

   $y_{\min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = 0$;

   $y_{\min} = y\left(1\frac{3}{4}\right) = 0$;

$$y_{\min} = y\left(2\frac{1}{4}\right) = 0;$$
$$y_{\max} = y(0) = 1;$$
$$y_{\max} = y(1) = 3;$$
$$y_{\max} = y(2) = 1.$$

5. $y_{\text{наиб}} = 3; \quad y_{\text{наим}} = 0.$

6. Общего вида в смысле четности.

7. Непериодическая.

Тренировочная работа 2

Постройте графики функций и выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

Вариант I

1. $y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|)$;
2. $y = \left|3^{|x-2|} - 3\right|$;
3. $y = \left|\frac{1}{|x|+2} - 1\right|$;
4. $y = ||x - 4| - 2|$;
5. $y = \left|x^2 - 2|x| - 8\right|$.

Вариант II

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2-|x|}$;
2. $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}|x + 2| - 3\right|$;
3. $y = \left|\frac{1}{|x|-1} + 1\right|$;
4. $y = ||x + 4| - 1|$;
5. $y = \left|x^2 - 3|x| - 4\right|$.

Примечание. Ответ на вопрос о количестве корней попробуйте получить самостоятельно, сверившись затем с ответами на странице 182 (вариант I) и 184 (вариант II).

Решение тренировочной работы 2. Графики

Вариант I

1. Построим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|)$.

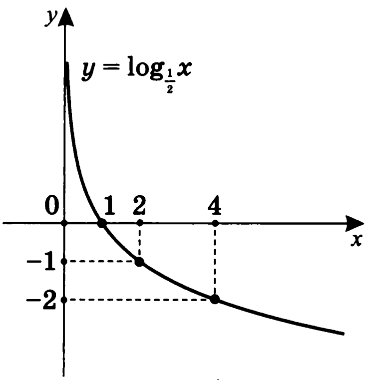
Составим последовательность преобразований исходного базового графика $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:

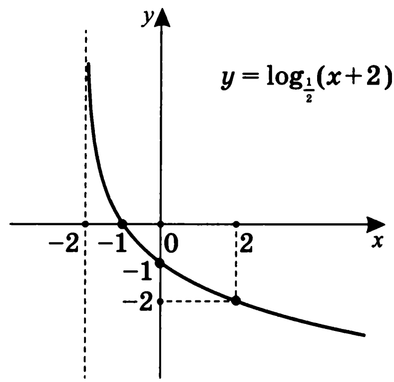
$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$; $\quad y = \log_{\frac{1}{2}}(-x+2)$; $\quad y = \log_{\frac{1}{2}}(2-|x|)$

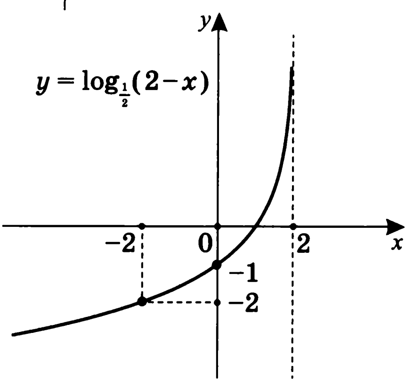
или

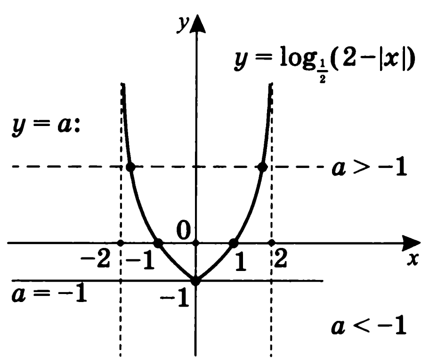
$y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ $\quad y = \log_{\frac{1}{2}}(-(x-2))$ $\left(y = \log_{\frac{1}{2}}(-x+2)\right)$;

$y = \log_{\frac{1}{2}}(2-|x|)$.



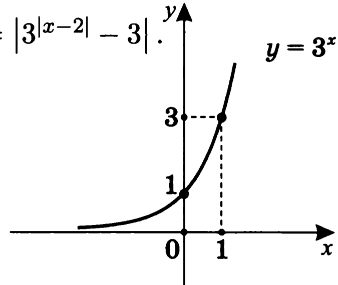






Самостоятельно используйте для построения вторую последовательность преобразований исходного графика.

2. Построим график функции $y = \left|3^{|x-2|} - 3\right|$.

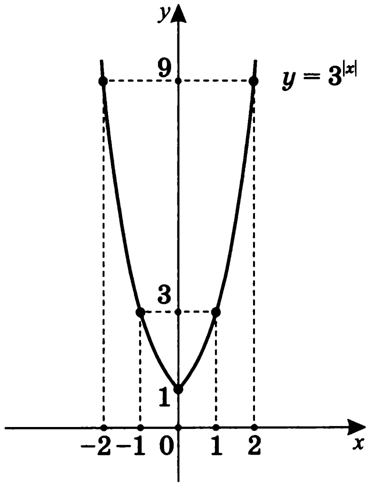


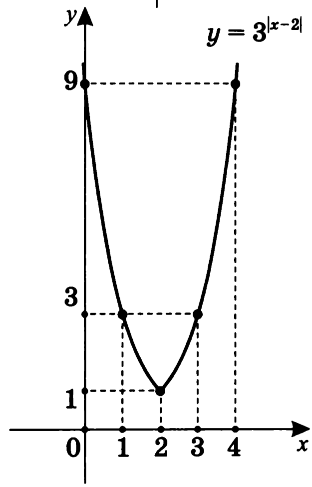
Составим последовательность преобразований исходного графика $y = 3^x$:

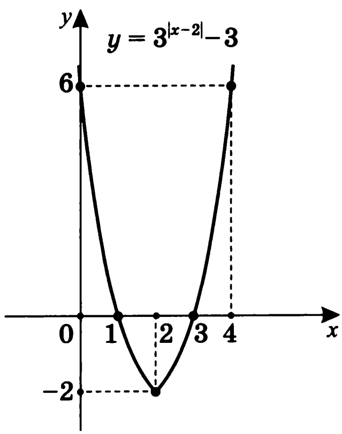
$y = 3^{|x|}$; $y = 3^{|x-2|}$;

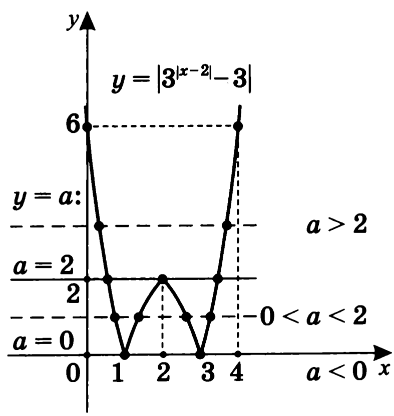
$y = 3^{|x-2|} - 3$;

$y = \left|3^{|x-2|} - 3\right|$.





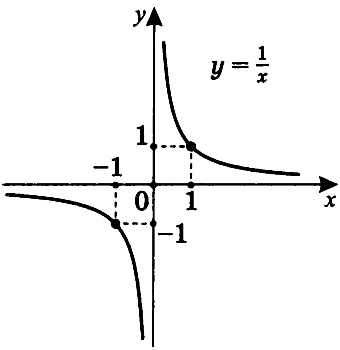


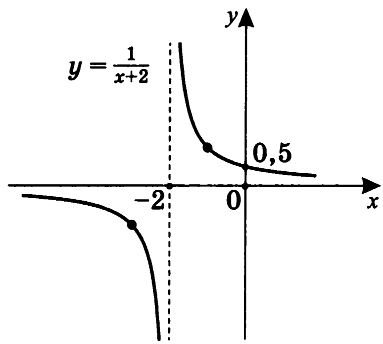


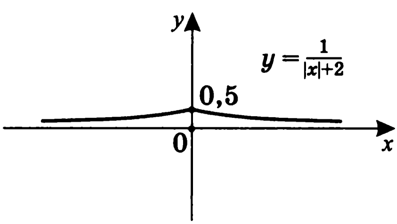
Примечание. Для построения графика $y = 3^{|x-2|}$ можно воспользоваться преобразованием вида $y = f(|x-2|)$ (см. с. 135).

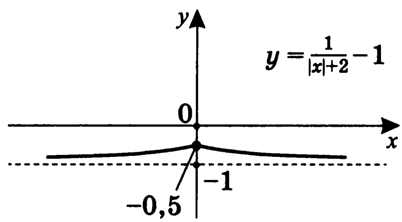
3. Построим график функции $y = \left|\dfrac{1}{|x|+2} - 1\right|$.

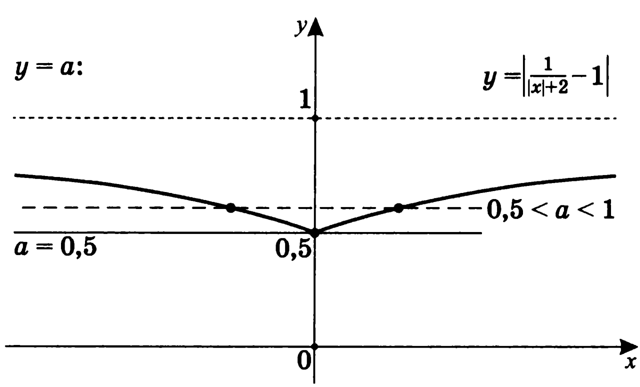
Составим последовательность преобразований исходного графика $y = \dfrac{1}{x}$:





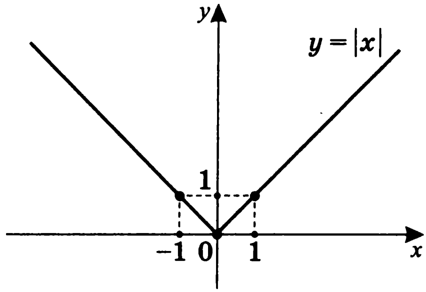


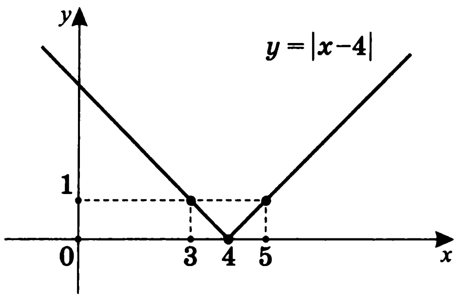


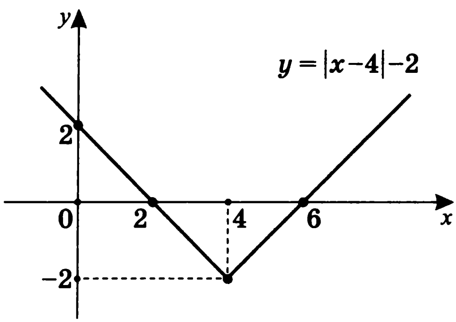


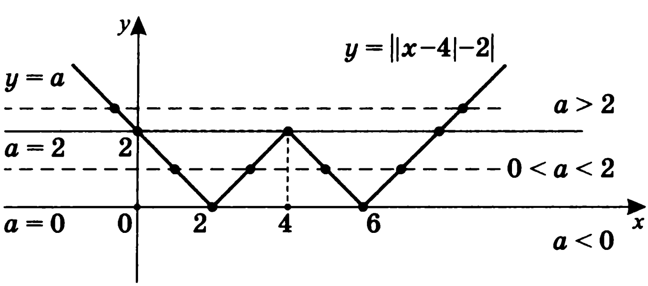
4. Построим график функции $y = ||x - 4| - 2|$.

Исходный график $y = |x|$.



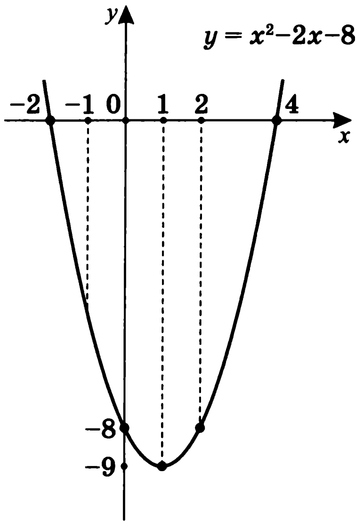


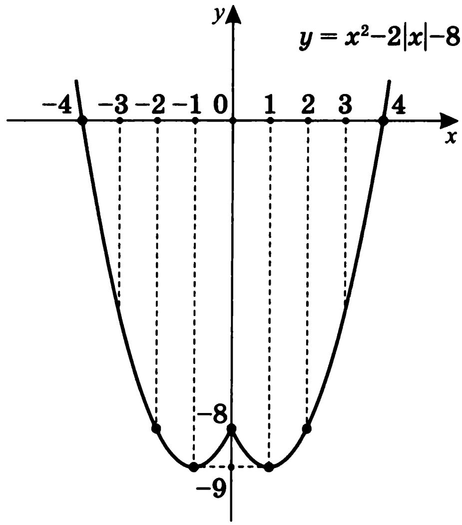


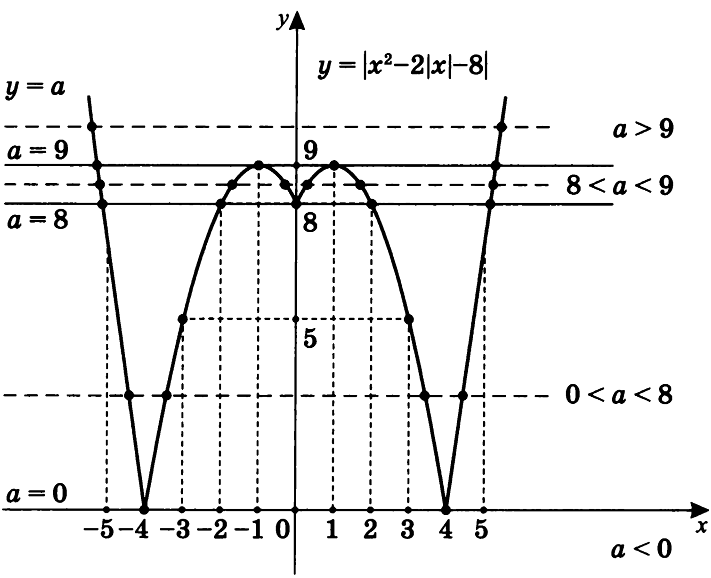


5. Построим график функции $y = \left|x^2 - 2|x| - 8\right|$.

Базовый график $y = x^2 - 2x - 8 = (x-1)^2 - 9$.







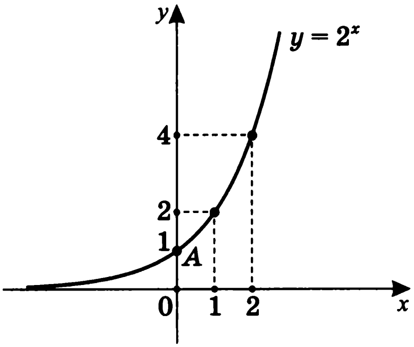
Примечание. Заметим, что так как $x^2 = |x|^2$, то $f(x) = x^2 - 2|x| - 8 = f(|x|)$.

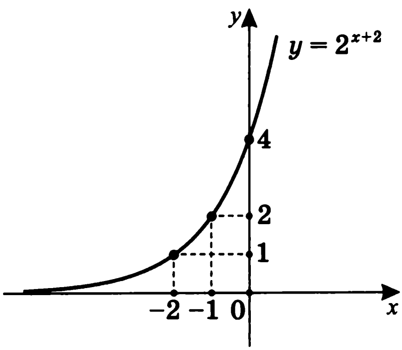
Вариант II

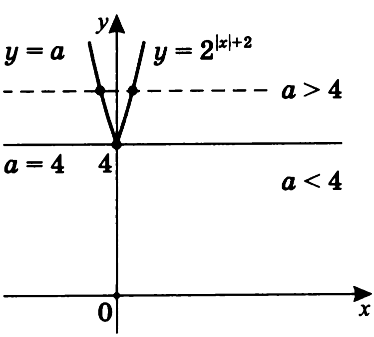
1. Построим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2-|x|}$.

Функцию можно представить в виде $y = 2^{|x|+2}$.

Базовый график — $y = 2^x$.

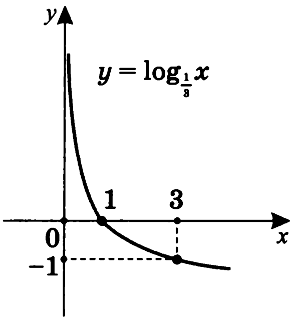


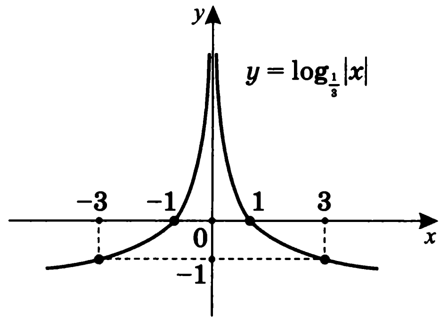


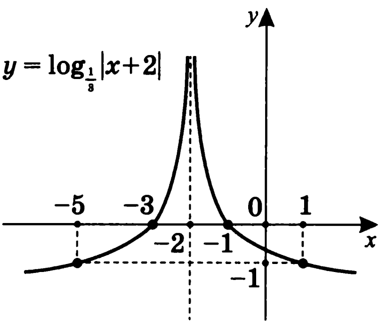


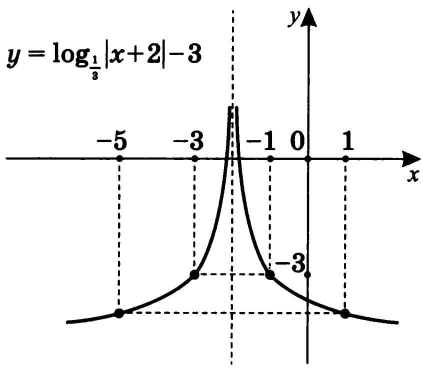
2. Построим график функции $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}|x+2| - 3\right|$.

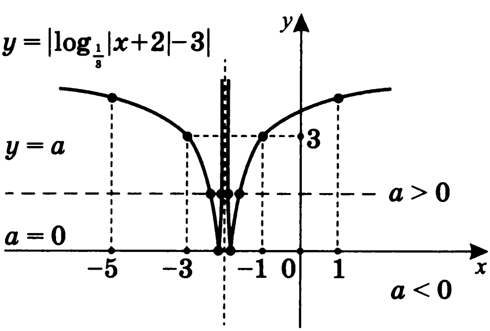
Базовый график — $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.





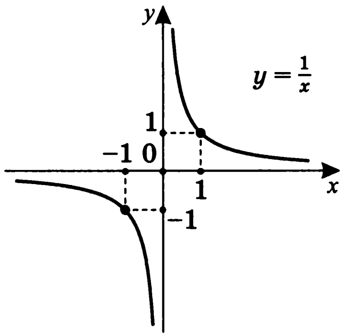


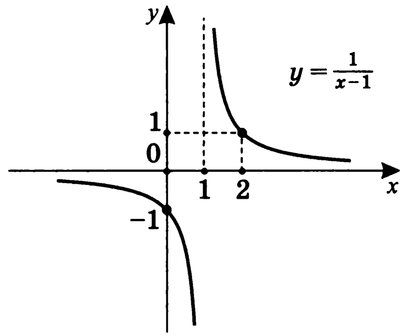


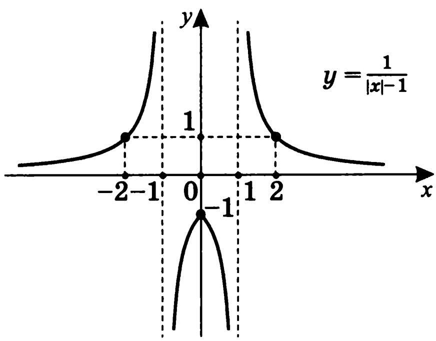


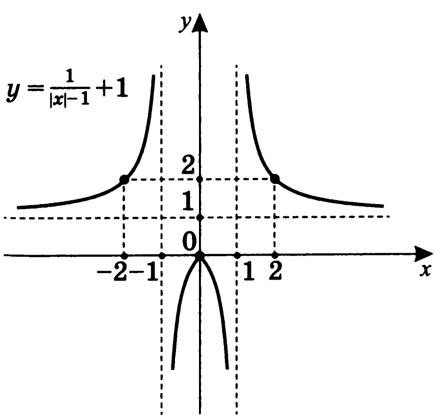
3. Построим график функции $y = \left| \frac{1}{|x|-1} + 1 \right|$.

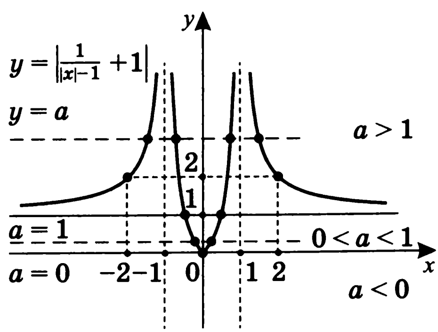
Базовый график — $y = \frac{1}{x}$.











Ответы на тренировочную работу 2. Параметры

Вариант I

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a?

1. У уравнения $\log_{\frac{1}{2}}(2 - |x|) = a$ (см. график на с. 172):
   при $a \in (-\infty; -1)$ — корней нет;
   при $a = -1$ — один корень;
   при $a \in (-1; \infty)$ — два корня.

2. У уравнения $\left|3^{|x-2|} - 3\right| = a$ (см. график на с. 173):
   при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
   при $a = 0$ — два корня;
   при $a \in (0; 2)$ — четыре корня;
   при $a = 2$ — три корня;
   при $a \in (2; \infty)$ — два корня.

3. У уравнения $\left|\frac{1}{|x|+2} - 1\right| = a$ (см. график на с. 174):
   при $a \in (-\infty; 0{,}5)$ — корней нет;
   при $a = 0{,}5$ — один корень;
   при $a \in (0{,}5; 1)$ — два корня;
   при $a \in [1; \infty)$ — корней нет.

4. У уравнения $||x - 4| - 2| = a$ (см. график на с. 175):
   при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
   при $a = 0$ — два корня;
   при $a \in (0; 2)$ — четыре корня;
   при $a = 2$ — три корня;
   при $a \in (2; \infty)$ — два корня.

5. У уравнения $\left|x^2 - 2|x| - 8\right| = a$ (см. график на с. 176):
при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
при $a = 0$ — два корня;
при $a \in (0; 8)$ — четыре корня;
при $a = 8$ — пять корней;
при $a \in (8; 9)$ — шесть корней;
при $a = 9$ — четыре корня;
при $a \in (9; \infty)$ — два корня.

Вариант II

Сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a?

1. У уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2-|x|} = a$ (см. график на с. 177):
   при $a \in (-\infty; 4)$ — корней нет;
   при $a = 4$ — один корень;
   при $a \in (4; \infty)$ — два корня.
2. У уравнения $\left|\log_{\frac{1}{3}} |x+2| - 3\right| = a$ (см. график на с. 178):
   при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
   при $a = 0$ — два корня;
   при $a \in (0; \infty)$ — четыре корня.
3. У уравнения $\left|\frac{1}{|x|-1} + 1\right| = a$ (см. график на с. 179):
   при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
   при $a = 0$ — один корень;
   при $a \in (0; 1]$ — два корня;
   при $a \in (1; \infty)$ — четыре корня.
4. У уравнения $||x+4| - 1| = a$ (см. график на с. 180):
   при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
   при $a = 0$ — два корня;
   при $a \in (0; 1)$ — четыре корня;
   при $a = 1$ — три корня;
   при $a \in (1; \infty)$ — два корня.
5. У уравнения $\left|x^2 - 3|x| - 4\right| = a$ (см. график на с. 181):
   при $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет;
   при $a = 0$ — два корня;
   при $a \in (0; 4)$ — четыре корня;
   при $a = 4$ — пять корней;
   при $a \in (4; 6{,}25)$ — шесть корней;
   при $a = 6{,}25$ — четыре корня;
   при $a \in (6{,}25; \infty)$ — два корня.

3

Графическое решение уравнений и систем

Практикум 9

Решите графически систему уравнений.

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} |x + y| = 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y|x| = 2 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} |x + y - 1| = 2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ |xy| = 3 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} y = \dfrac{3(x-1)^2}{2|x-1|} - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ y = x^2 - \dfrac{|x|}{x} - 2 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} y = 1 - |x| \\ (|x|-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x^2 + (|y| - 1)^2 = 1 \\ |y| = 2 - x^2 \end{cases}$;

Определите графически количество корней уравнения:

9. $2^x = x^2$.

Решение практикума 9[2]

Решим графически систему уравнений.

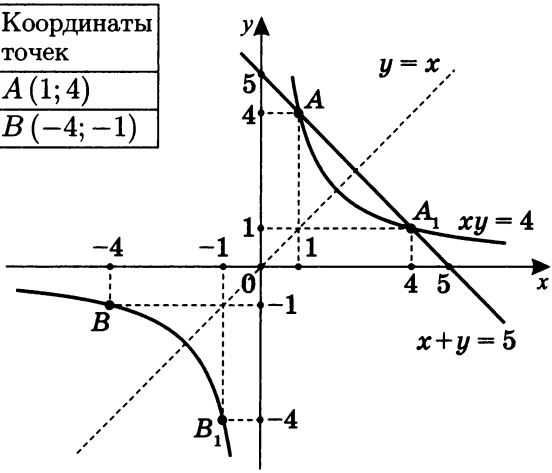
1. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}.$

Прежде всего, обратим внимание на то, что данная система — система симметричных уравнений, т. е. уравнений, для которых замена x на y (и y на x) не меняет их вида[3].

Как известно, графики таких уравнений симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов, т. е. графика $y = x$. Соответственно, и решения такой системы также симметричны, т. е. если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то и $(y_0; x_0)$ — решение.

$xy = 4$. График этого уравнения — гипербола $y = \frac{4}{x}$.

x	y	Координаты точек
1	4	$A\,(1;4)$
-4	-1	$B\,(-4;-1)$



[2] Здесь мы не будем обсуждать построение и преобразования графиков функции и уравнений, которые мы изучали ранее — в предыдущей главе.

[3] Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Решение систем уравнений. СПб.; М., 2014. С. 65–67 и Шахмейстер А. Х. Построение и преобразование графиков. Параметры. Часть I. СПб.; М., 2014. С. 47–53.

Очевидно, что координаты точек A_1 и B_1, симметричных относительно прямой $y = x$ данным точкам A и B, — $A_1(4;1)$ и $B_1(-1;-4)$.

Отметим, что это точки, координаты которых обращают уравнение $xy = 4$ в верное числовое равенство.

Кроме того, для данного уравнения $xy = 4$, если $(x_0;y_0) \in \Gamma(xy = 4)$, то и $(-x_0;-y_0) \in \Gamma(xy = 4)$.

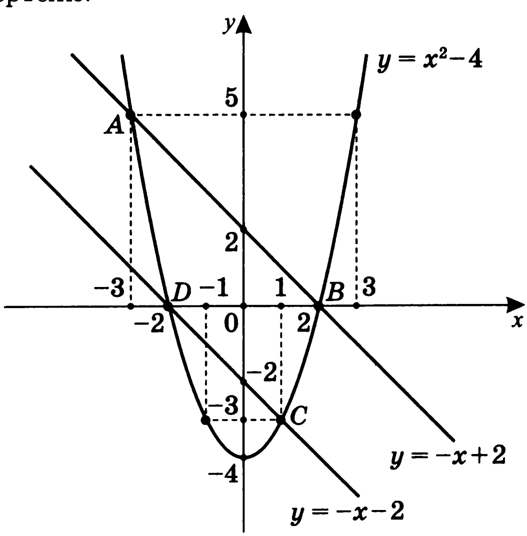
Из графиков уравнений наглядно следует, что только $(1;4)$ и $(4;1)$ принадлежат обоим графикам. Проверка подтверждает это, что важно, так как графическое решение систем уравнений может быть и приближенным.

Ответ: $\{(1;4);(4;1)\}$.

2. $\begin{cases} |x+y| = 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$.

Так как $|x+y| = 2$ означает, что $\left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-2 \end{array}\right.$, т. е. $\left[\begin{array}{l} y=-x+2 \\ y=-x-2 \end{array}\right.$, то график этого уравнения есть пара параллельных прямых.

Построим графики уравнений $|x+y| = 2$ и $y = x^2 - 4$ на одном чертеже:



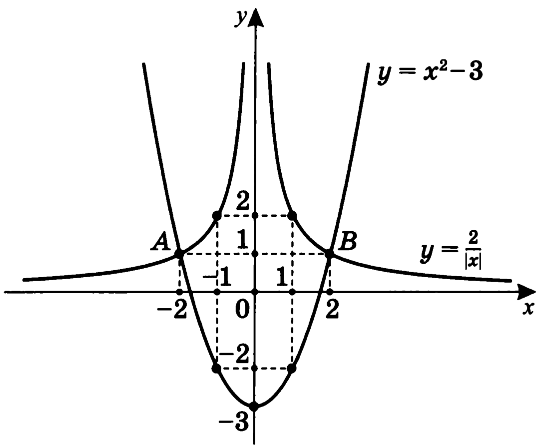
Из графических соображений похоже, что только точки A, B, C и D являются общими для графиков данных уравнений. Для проверки подставим координаты этих точек в систему уравнений и убедимся в том, что они обращают систему уравнений в систему верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-3;5);(2;0);(1;-3);(-2;0)\}$.

3. $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y|x| = 2 \end{cases}.$

Из уравнения $y|x| = 2$ следует, что $x \neq 0$, тогда исходное уравнение можно привести к виду $y = \dfrac{2}{|x|}$ — уравнение, график которого симметричен относительно оси ординат.

Построим графики уравнений $y = x^2 - 3$ и $y|x| = 2$ на одном чертеже:



Из чертежа очевидно, что только точки A и B — общие точки графиков уравнений. При проверке убеждаемся, что координаты точек $A(-2;1)$ и $B(2;1)$ обращают систему уравнений в систему верных числовых равенств.

Ответ: $\{(;2-1);(2;1)\}$.

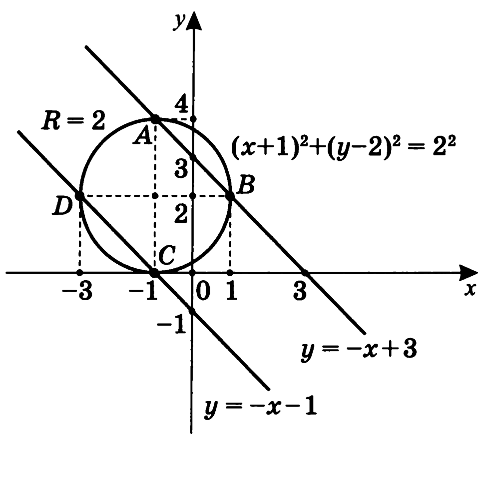
4. $\begin{cases} |x+y-1| = 2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \end{cases}.$

Так как уравнение $|x+y-1| = 2$ распадается на два уравнения —

$$\left[\begin{array}{l} x+y-1=2 \\ x+y-1=-2 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} y=-x+3 \\ y=-x-1 \end{array}\right., \text{ —}$$

то здесь мы имеем дело с парой уравнений параллельных прямых.

$(x+1)^2+(y-2)^2 = 2^2$ — уравнение окружности с центром в точке $(-1;2)$ и радиусом $R=2$.

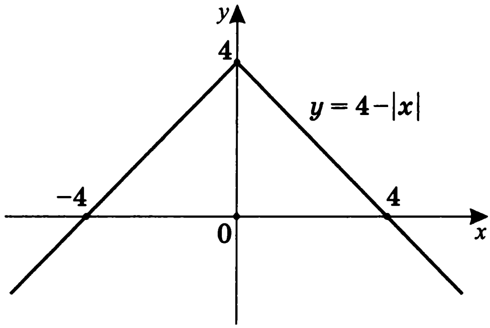


Графически только точки A, B, C и D — общие для графиков двух уравнений. Проверка подстановкой подтверждает, что координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений.

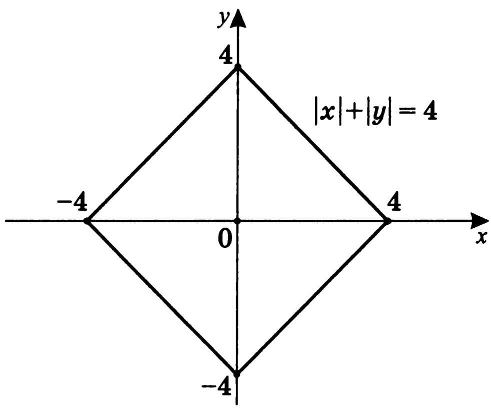
Ответ: $\{(-1;4);(1;2);(-1;0);(-3;2)\}$.

5. $\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ |xy| = 3 \end{cases}.$

а) Из первого уравнения следует, что $|y| = 4 - |x|$. Известно, что график $y = 4 - |x|$ есть график $y = |x|$, отраженный симметрично относительно оси абсцисс и поднятый на 4 единицы вверх.



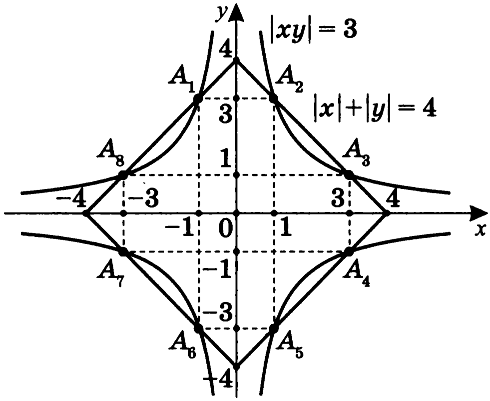
б) Так как $|y| = \begin{cases} y, & y \geqslant 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$, то $|y| = \begin{cases} 4 - |x|, & y \geqslant 0 \\ |x| - 4, & y < 0 \end{cases}.$



в) Очевидно, что график уравнения $|xy| = 3$ симметричен относительно оси абсцисс и оси ординат.

Так как график уравнения $xy = 3$ это гипербола, то общий график уравнения $|xy| = 3$ состоит из четырех ветвей гиперболы.

г) Построим графики уравнений на одном чертеже.



Только точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 — общие точки графиков уравнений системы.

Проверка подтверждает, что координаты этих точек есть решения системы.

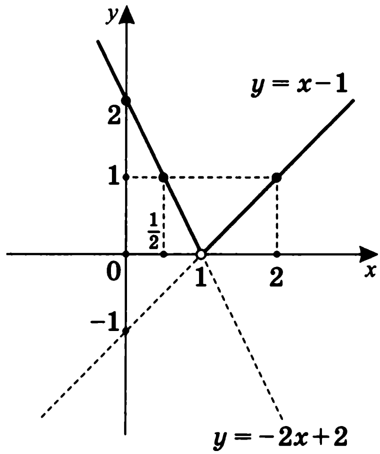
Ответ: $\{(-1;3);(1;3);(3;1);(3;-1);(1;-3);(-1;-3);$ $(-3;-1);(-3;1)\}$.

6. $\begin{cases} y = \frac{3(x-1)^2}{2|x-1|} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = x^2 - \frac{|x|}{x} - 2 \end{cases}.$

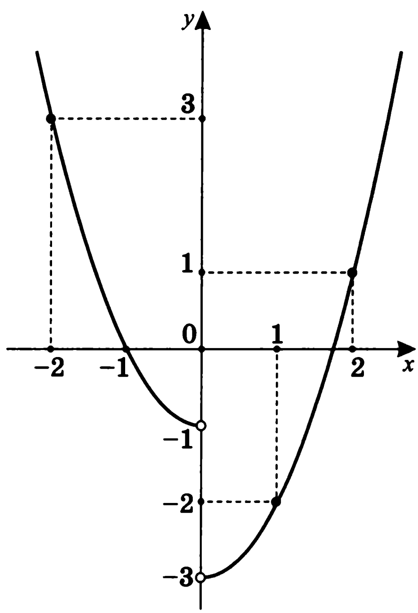
а) $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-1)^2}{|x-1|} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} =$

$= \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \ x > 1 \\ -\frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \ x < 1 \end{cases},$

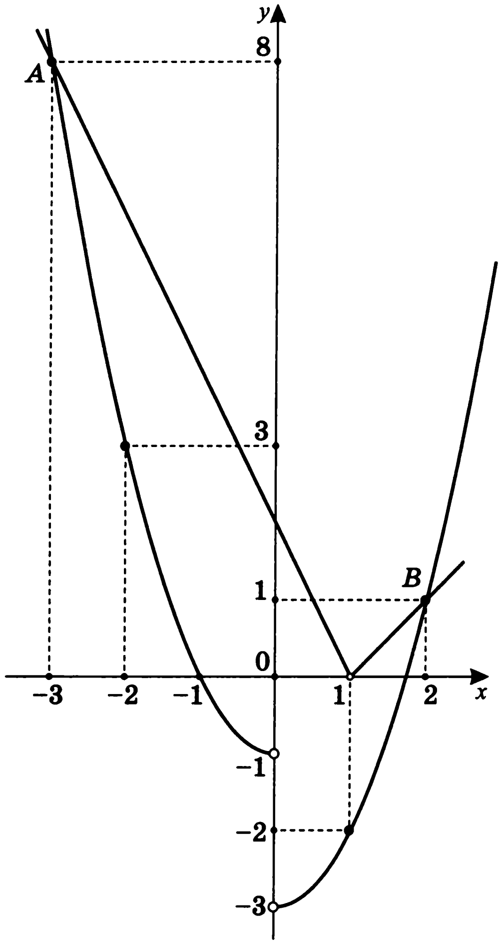
т. е. $\begin{cases} x-1, \ x > 1 \\ -2x+2, \ x < 1 \end{cases}.$



б) $y = x^2 - \frac{|x|}{x} - 2 = \begin{cases} x^2 - 3, \ x > 0 \\ x^2 - 1, \ x < 0 \end{cases}.$



в) Построим на одном чертеже графики обоих уравнений:



Общие точки графиков уравнений системы — только A и B.

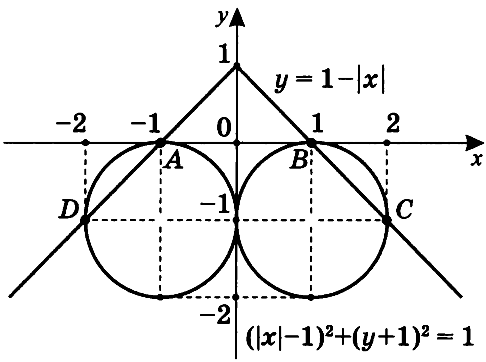
При проверке убеждаемся в том, что координаты этих точек и есть решение системы уравнений.

Ответ: $\{(-3; 8); (2; 1)\}$.

7. $\begin{cases} y = 1 - |x| \\ (|x| - 1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}.$

а) Второе уравнение похоже на уравнение окружности. Разница в том, что наличие модуля x отразит окружность симметрично относительно оси ординат, и получится две окружности — с центрами в точках $(1; -1)$ и $(-1; -1)$ и радиусом $R = 1$.

б) Построим графики уравнений на одном чертеже:



в) Только точки A, B, C и D — общие для графиков двух уравнений.

г) Координаты этих точек обращают данную систему уравнений в систему верных числовых равенств.

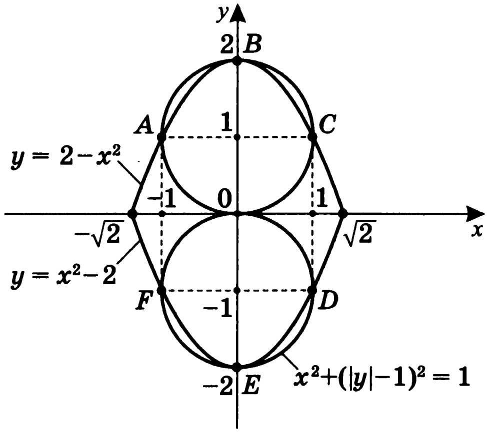
Ответ: $\{(-1; 0); (1; 0); (2; -1); (-2; -1)\}$.

8. $\begin{cases} x^2 + (|y| - 1)^2 = 1 \\ |y| = 2 - x^2 \end{cases}.$

а) Первое уравнение есть уравнение двух окружностей, симметричных относительно оси абсцисс с центрами в точках $(0; 1)$ и $(0; -1)$ и радиусом $R = 1$.

б) $|y| = \begin{cases} 2 - x^2, & y \geqslant 0 \\ x^2 - 2, & y < 0 \end{cases}.$

в) Построим оба графика на одном чертеже:



г) Только точки A, B, C, D, E и F — общие точки графиков уравнений системы.

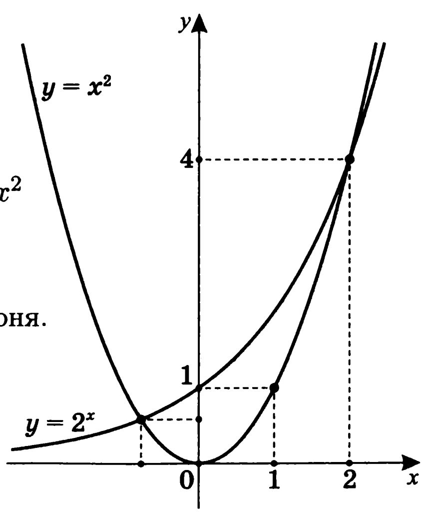
При проверке убеждаемся в том, что только координаты этих точек есть решения данной системы уравнений.

Ответ: $\{(-1;1);(0;2);(1;1);(1;-1);(0;-2);(-1;-1)\}$.

9. Оценим графически количество корней уравнения $2^x = x^2$.

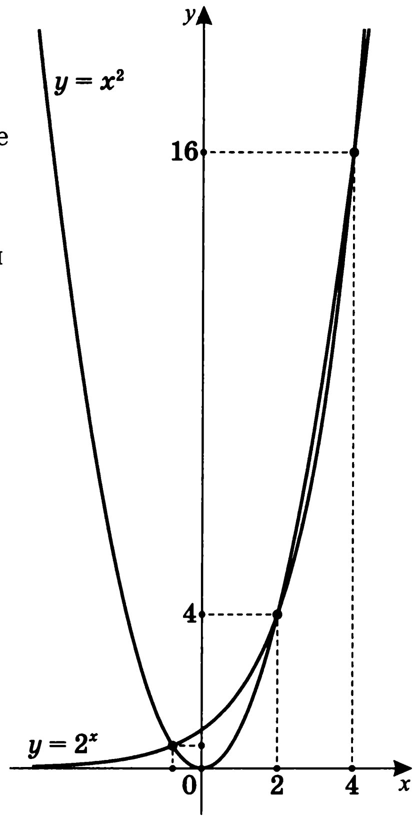
Построим графики функций $y = 2^x$ и $y = x^2$ на одном чертеже.

На первый взгляд, уравнение имеет два корня.



Однако более тщательный анализ скорости возрастания функций $y = x^2$ и $y = 2^x$ на $(2; \infty)$ указывает на то, что на этом промежутке функция $y = 2^x$ растет быстрее, чем функция $y = x^2$, а значит, существует еще один корень.

Действительно, $2^4 = 4^2$:
для $y = 2^x$ $\quad 2^4 = 16$;
для $y = x^2$ $\quad 4^2 = 16$,
а значит, $x = 4$ — также решение уравнения.
Следовательно, уравнение $2^x = x^2$ имеет три корня.



Примечание 1. Обратите внимание: в данном примере мы свели решение уравнения $f(x) = g(x)$ к решению системы уравнений $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

Примечание 2. При графическом решении уравнений и систем наиболее сложен вопрос о полноте решения: все ли корни уравнения или системы найдены?

В дальнейшем при графическом решении уравнений и систем уравнений эти соображения необходимо иметь в виду.

Естественно, применение методов математического анализа делает процесс решения более точным и надежным. Но это не означает, что предложенные в данных тренировочных и самостоятельных работах решения содержат ошибки.

Чаще всего корни уравнений или систем очевидны, если *на конкретном промежутке* графики данных уравнений имеют разные виды монотонности, т. е. график одного уравнения возрастает, а график другого — убывает. Упрощают нахождение корней сравнение видов выпуклости, сравнение наибольших и наименьших значений функций, находящихся в обеих частях уравнения и т. д.

Тренировочная работа 3

Решите графически уравнения и системы уравнений.

1. $(x-1)^2 = -|x-1|$;

2. $\sqrt{x} = |x-2|$;

3. $3 - x^2 = \frac{6}{2-x}$;

4. $\sqrt{9-x^2} = x^2 + 3$;

5*. $\frac{1}{x^2+1} = |x| + 1$;

6*. $\sqrt{x^2+3x+6} + \sqrt{x+1} = 2$;

7. $3x^3 + 2x = 4 + (2-x)^2$;

8. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3|x| - 2 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ |x| \cdot y = -2 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x \cdot |y| = 4 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} |y| = -x^2 + 2x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 + 2x \end{cases}$;

12. $\begin{cases} y \cdot |x| = 4 \\ |y| = 5 - |x| \end{cases}$.

Решение тренировочной работы 3

Решите графически уравнения и системы уравнений.

1. $(x-1)^2 = -|x-1|$.

Положим $f(x) = (x-1)^2$; $g(x) = -|x-1|$.

График функции $y = f(x)$ — парабола, полученная сдвигом $y = x^2$ вправо на 1.

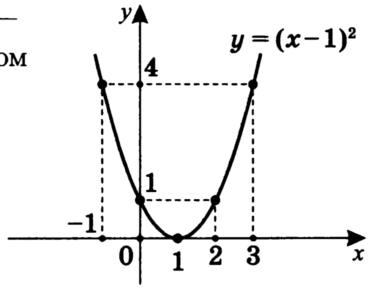
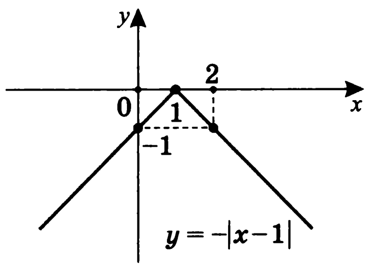
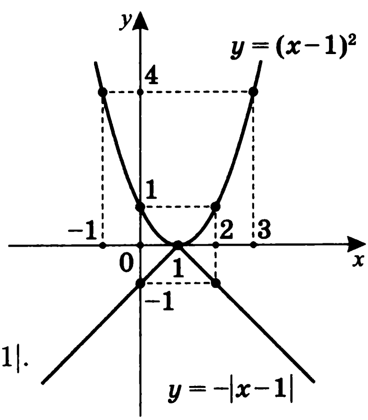


График функции $y = g(x)$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом вправо на 1 и отражением симметрично относительно оси Ox.



Построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже. Подстановка $x = 1$ в исходное уравнение обращает его в верное числовое равенство: $(1-1)^2 = -|1-1|$; $0 = 0$. Значит $x = 1$ — корень уравнения $(x-1)^2 = -|x-1|$. Ответ: $x = 1$.

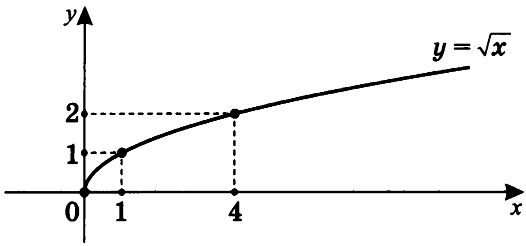


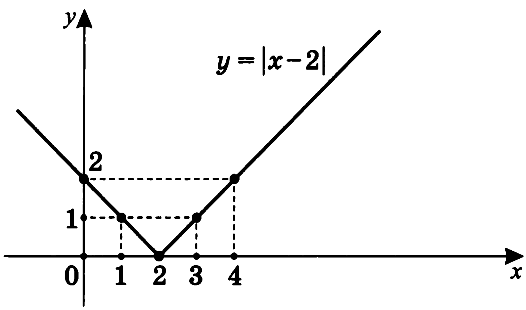
Примечание. Обратите внимание, что в примерах 1–7 решение уравнений вида $f(x) = g(x)$ сводится к решению систем уравнений $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$.

2. $\sqrt{x} = |x - 2|$.

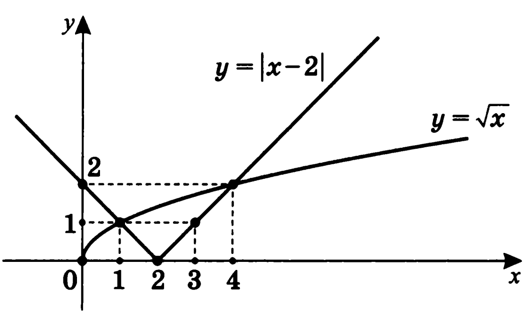
Положим $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = |x - 2|$.

Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.





Теперь построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Графики имеют только две общие точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 4$, что подтверждается проверкой.

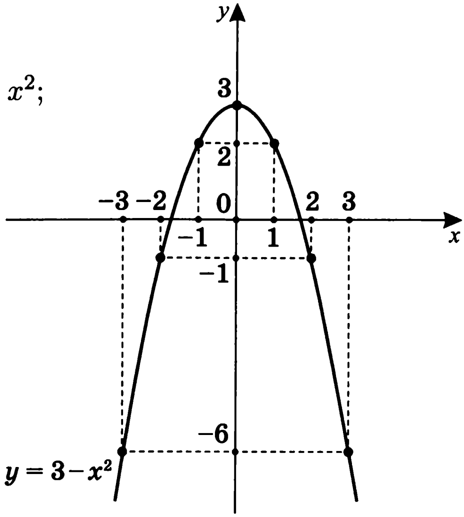
Значит $x = 1$ и $x = 4$ — корни уравнения $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Ответ: $x = 1$, $x = 4$.

3. $3 - x^2 = \frac{6}{2-x}$.

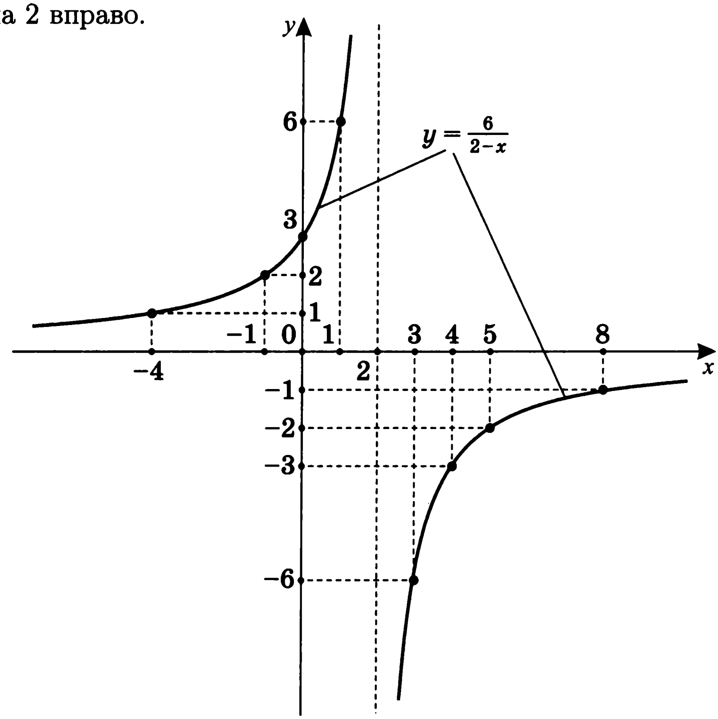
Положим $f(x) = 3 - x^2$;
$g(x) = \frac{6}{2-x}$.

Построим график функции $f(x)$.

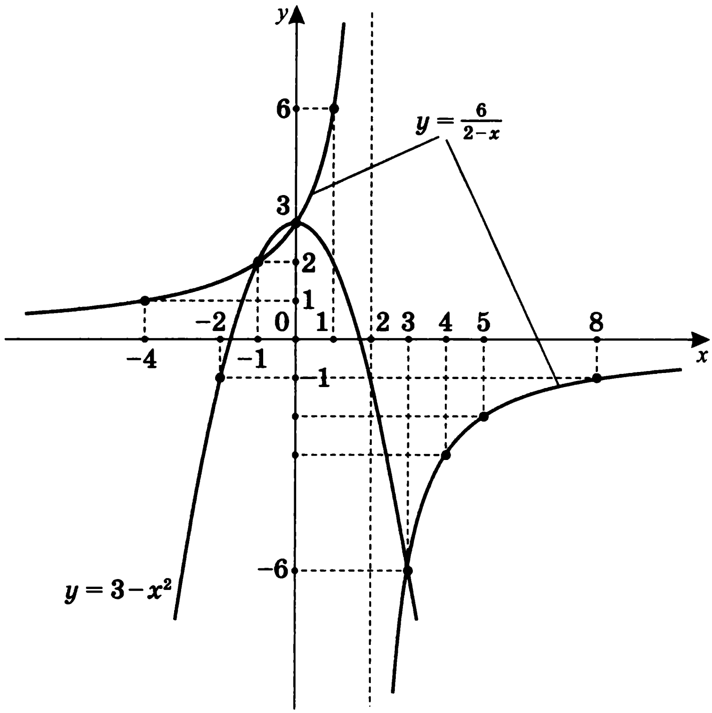


Построим график функции $g(x)$.

Это гипербола, полученная сдвигом гиперболы $y = -\frac{6}{x}$ на 2 вправо.



Теперь построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Графики имеют только три общие точки с абсциссами $x = -1$, $x = 0$ и $x = 3$. Найденные значения x при подстановке в исходное уравнение обращают его в верное равенство. Таким образом, $x = -1$, $x = 0$ и $x = 3$ — корни уравнения $3 - x^2 = \frac{6}{2-x}$.

Ответ: $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$.

4. $\sqrt{9 - x^2} = x^2 + 3$.

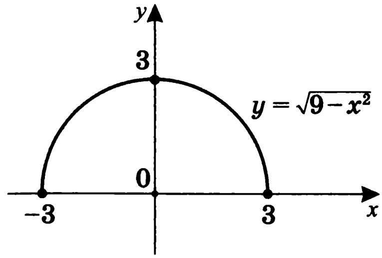
Положим $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $g(x) = x^2 + 3$.

Очевидно, что из $y = \sqrt{9 - x^2}$ следует, что при $y \geqslant 0$

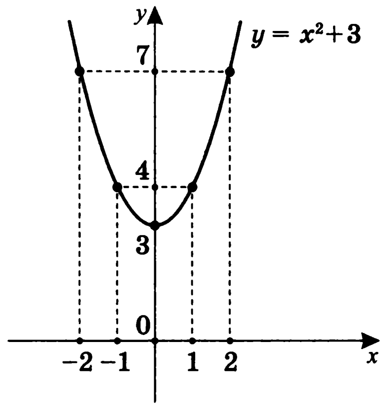
$9 - x^2 = y^2$, т. е. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$.

При $y < 0$ решений нет (см. выше).

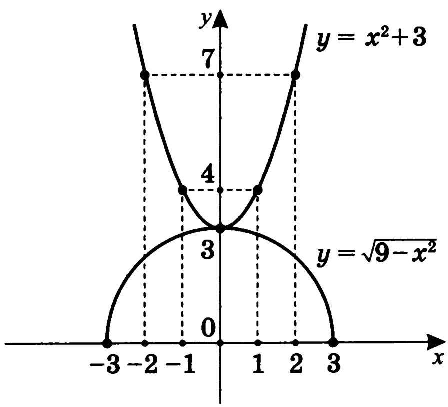
Следовательно, график функции $f(x)$ — это полуокружность радиуса 3 с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.



Теперь построим график функции $y = g(x)$.



Наконец, построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Очевидно, что общая точка двух графиков имеет абсциссу $x = 0$, следовательно, $x = 0$ — корень уравнения $\sqrt{9 - x^2} = x^2 + 3$. Проверка это подтверждает.

Ответ: $x = 0$.

5*. $\frac{1}{x^2+1} = |x| + 1.$

Положим $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $g(x) = |x| + 1.$

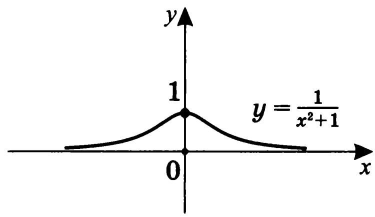
Построим график функции $y = f(x)$.

Для корректного построения графика $y = \frac{1}{x^2+1}$ требуется исследование функции $y = f(x)$ с помощью производной или инверсии. Но мы используем для построения асимптоты:

$(x \to \infty) \Rightarrow (y \to 0);$

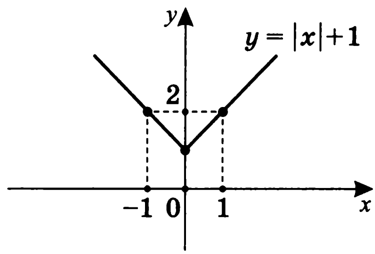
$(x \to -\infty) \Rightarrow (y \to 0);$

$x = 0 \Rightarrow y = 1.$

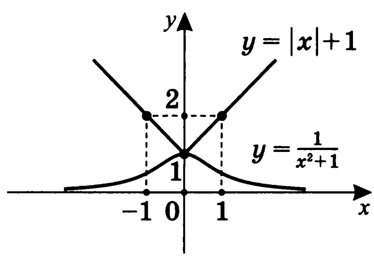


Подробнее см.: Шахмейстер А. Х. Построение графиков функции элементарными методами. СПб.; М., 2011.

Построим график функции $y = g(x)$.



Построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



Графики имеют только одну общую точку. Ее абсцисса $x = 0$. Найденное значение подставим для проверки в исходное уравнение, получим верное числовое равенство.

Таким образом, $x = 0$ является корнем уравнения $\frac{1}{x^2+1} = |x| + 1.$

Ответ: $x = 0$.

6*. $\sqrt{x^2+3x+6}+\sqrt{x+1}=2.$

Положим $f(x)=\sqrt{x^2+3x+6}$; $g(x)=2-\sqrt{x+1}$.

Построим график функции $y=f(x)$.

Очевидно, что для такого построения *можно* использовать производную, но мы используем иные соображения. Так как $\sqrt{x^2+3x+6}=\sqrt{(x+1{,}5)^2+3{,}75}$,

то $x=-1{,}5$ — ось симметрии графика $y=f(x)$.

Здесь для построения графика $y=f(x)$ используется тот факт, что $t(x)=x^2+3x+6$ — квадратичная функция, а извлечение квадратного корня $\left(f(x)=\sqrt{t(x)}\right)$ не изменяет характер монотонности графика, лишь сжимая его, т. е. $(-1{,}5; 3{,}75)\to(-1{,}5;\sqrt{3{,}75})$ и т. п.

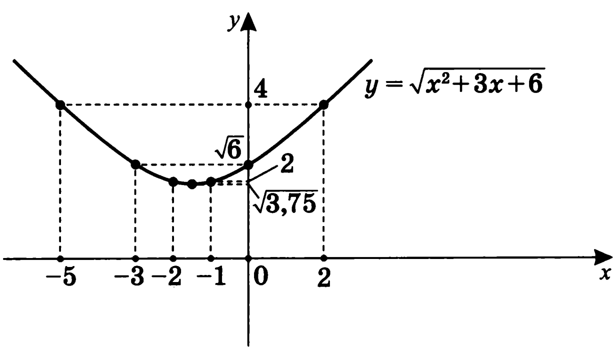
При $x=-3$ $\quad y=\sqrt{6}$;

$x=-2$ $\quad y=2$;

$x=-1{,}5$ $\quad y=\sqrt{3{,}75}=0{,}5\sqrt{15}$;

$x=-1$ $\quad y=2$;

$x=0$ $\quad y=\sqrt{6}$.



Теперь построим график функции $y=g(x)$.

Очевидно, что для этого необходимо выполнить ряд графических преобразований:

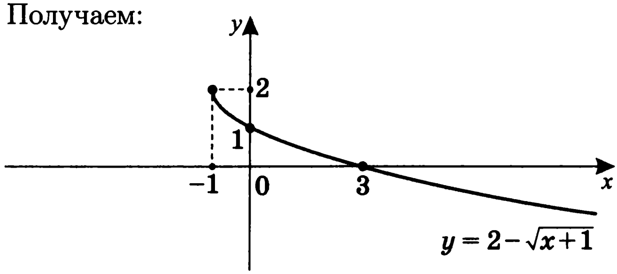
$g_1(x)=\sqrt{x}$ — базовый график;

$g_2(x)=-\sqrt{x}$ — получен из графика $y=g_1(x)$ симметрией относительно оси Ox;

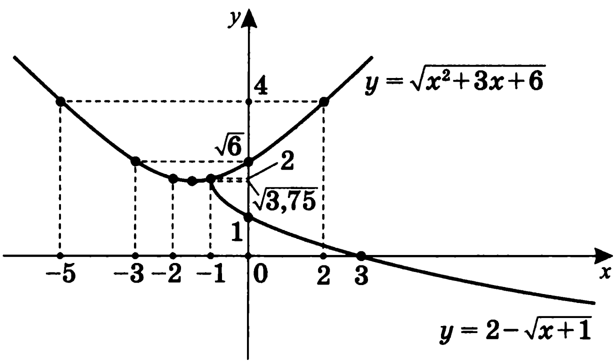
$g_3(x) = -\sqrt{x+1}$ — получен из графика $y = g_2(x)$ сдвигом на единицу влево;

$g(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ — получен из графика $y = g_3(x)$ сдвигом вверх на 2 относительно оси Ox.

Получаем:



Построим оба графика на одном чертеже, т. е. в одной системе координат.



Графики имеют только одну общую точку, ее абсцисса $x = -1$. Подставим найденное значение $x = -1$ в исходное уравнение, получим верное числовое равенство. Значит, $x = -1$ — корень уравнения

$\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x+1} = 2.$

Ответ: $x = -1$.

Напоминание. При решении уравнений графическим способом всегда необходимо проверять их корни непосредственной подстановкой в уравнение.

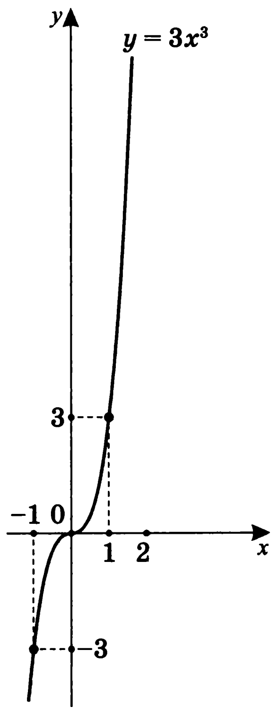
7. $3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^2$.

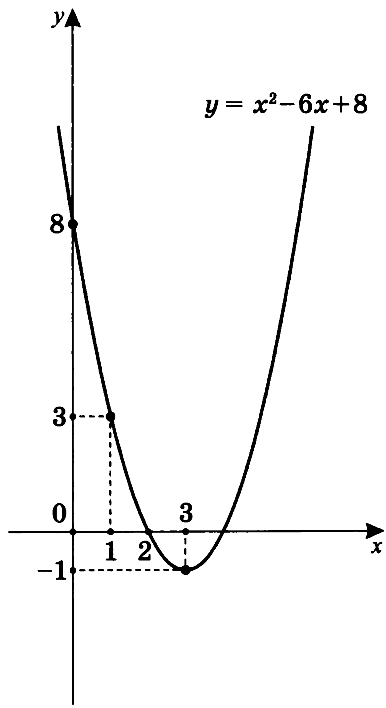
Положим $f(x) = 3x^3$;

$g(x) = 4 + (2 - x)^2 - 2x$.

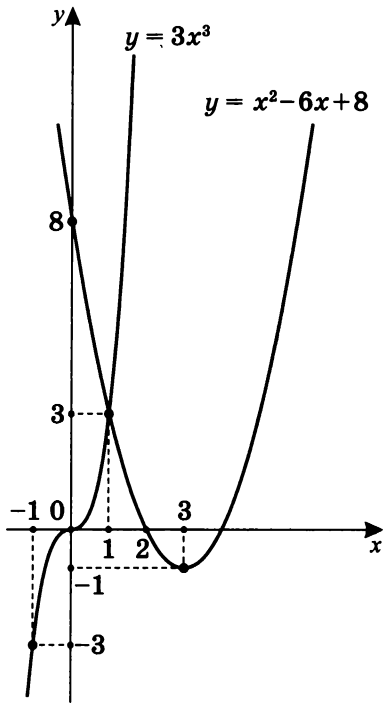
После преобразований получим: $g(x) = x^2 - 6x + 8$.

Построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.





Построим оба графика в одной системе координат, т. е. на одном чертеже.



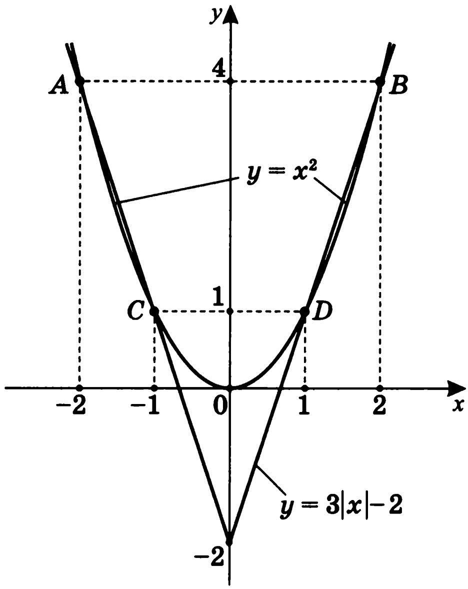
Графики имеют только одну общую точку, ее абсцисса $x = 1$. Подставим найденное значение $x = 1$ в исходное уравнение, получим верное числовое равенство.

Значит, $x = 1$ — корень уравнения $3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^2$.

Ответ: $x = 1$.

Примечание. Так как при $x > 1$ $f(x) = 3x^3$ растет быстрее, чем $g(x) = x^2 - 6x + 8$, то новых точек пересечения графиков данных функций не будет.

8. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3|x| - 2 \end{cases}.$



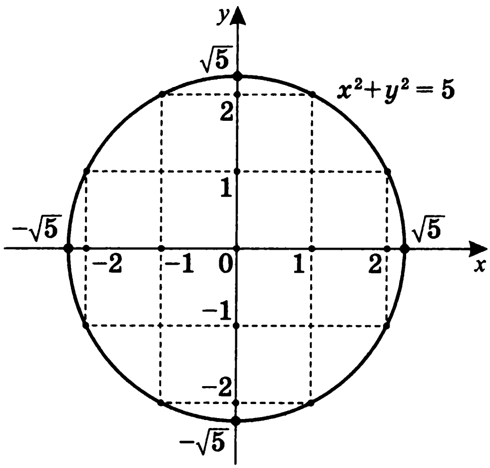
Построив графики уравнений $y = x^2$ и $y = 3|x| - 2$, графически найдем координаты всех общих точек:
$A(-2; 4)$; $B(2; 4)$; $C(-1; 1)$; $D(1; 1)$.

При подстановке координат всех найденных точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 3|x| - 2$ получаем системы верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-2; 4); (-1; 1); (1; 1); (2; 4)\}$.

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ |x| \cdot y = -2 \end{cases}.$

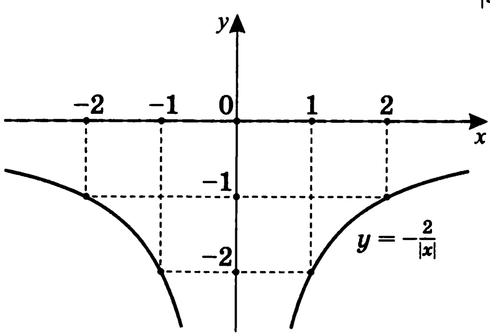
а) Очевидно, что $x^2 + y^2 = 5$ — уравнение окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $R = \sqrt{5}$. Построим график этого уравнения:



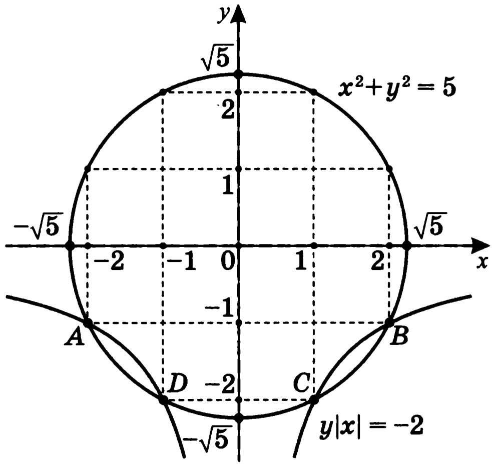
б) Так как при $x = 0$ $\quad 0 \cdot y = -2$ — ложное равенство, то уравнение $|x| \cdot y = -2$ можно привести к виду $y = -\frac{2}{|x|}$.

$$-\frac{2}{|x|} = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x > 0 \\ \frac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Построим график уравнения $y = -\frac{2}{|x|}$:



в) Построим графики уравнений системы в одной системе координат, т. е. на одном чертеже. Найдем графически координаты всех общих точек.



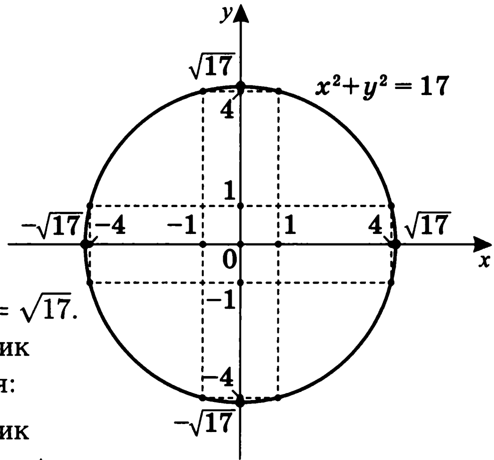
Получили графически все общие точки двух уравнений, координаты которых

$A\,(-2;-1)$; $B\,(2;-1)$; $C\,(1;-2)$; $D\,(-1;-2)$.

При подстановке координат всех общих точек в систему уравнений получим систему верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-2;-1);(2;-1);(1;-2);(-1;-2)\}$.

10. $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x\cdot|y|=4 \end{cases}.$



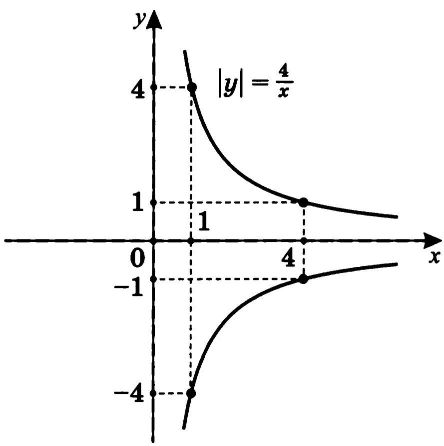
а) Очевидно, что $x^2+y^2=17$ — уравнение окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $R=\sqrt{17}$. Построим график этого уравнения:

б) Построим график уравнения $x|y|=4$.

Очевидно, что $x\neq 0$ и $|y|=\frac{4}{x}$ (см. с. 188).

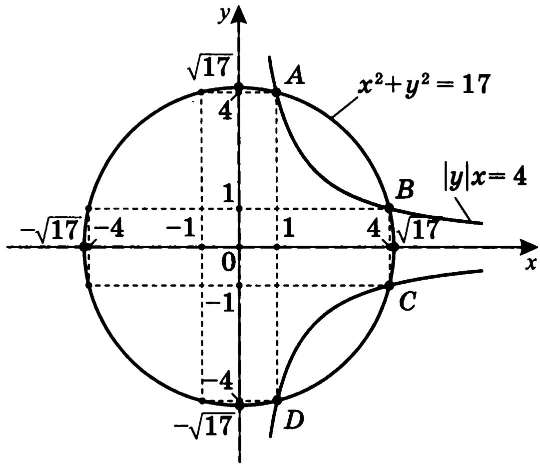
Так как $|y|=\begin{cases} y,\ y\geqslant 0 \\ -y,\ y<0 \end{cases}$, то $x>0$. Значит, это график правой ветви гиперболы $y=\frac{4}{x}$ $(x>0)$.

Но $|y|=\frac{4}{x}$ — график, симметричный относительно оси абсцисс (правая полуплоскость), он имеет две ветви и *функциональным*, конечно, не является[4].



[4] Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб.; М., 2014. С. 55–88.

в) Построим графики уравнений $x^2+y^2=17$ и $x|y|=4$ на одном чертеже, т. е. в одной системе координат. Найдем графически общие точки графиков данных уравнений.



Получили графически все общие точки графиков данных уравнений, координаты которых

$A\,(1;4)$; $B\,(4;1)$; $C\,(4;-1)$; $D\,(1;-4)$.

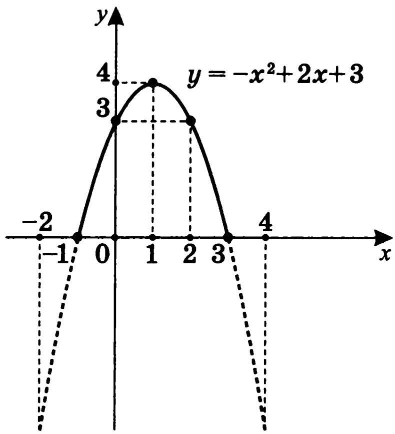
При проверке убедимся в том, что координаты этих точек при подстановке в систему данных уравнений обращают их в системы верных числовых равенств.

Ответ: $\{(1;4);(4;1);(4;-1);(1;-4)\}$.

11. $\begin{cases} |y| = -x^2 + 2x + 3 \\ x^2 + y^2 = 9 + 2x \end{cases}.$

а) Построим график уравнения $|y| = -x^2 + 2x + 3$.

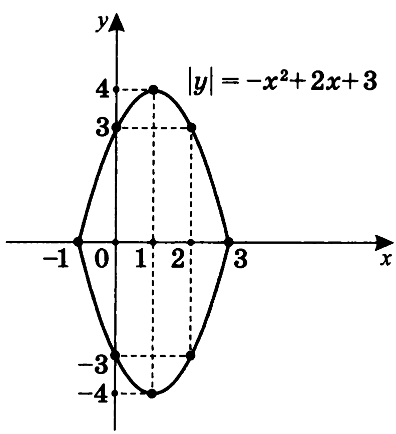
$|y| \geqslant 0$, значит, $-x^2 + 2x + 3 \geqslant 0$ ($y = -(x-1)^2 + 4$).



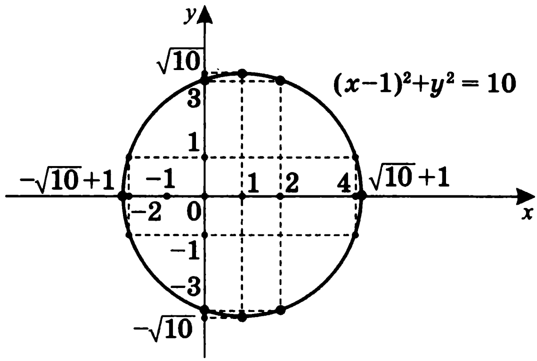
б) $|y| = -x^2 + 2x + 3$ ($-1 \leqslant x \leqslant 3$).

Так как $|y| = \begin{cases} y, & y \geqslant 0 \\ -y, & y < 0 \end{cases}$,

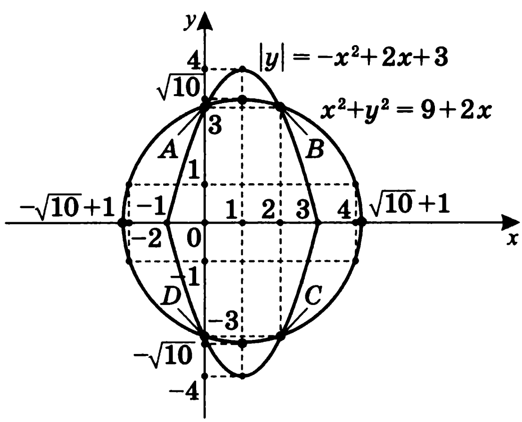
то $|y| = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & y \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 3, & y < 0 \end{cases}$.



в) $x^2 + y^2 = 9 + 2x$ можно представить в виде $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9 + 1$, т.е. $(x-1)^2 + y^2 = 10$ — это уравнение окружности с центром в точке $(1; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{10}$.



г) Построим графики уравнений $|y| = -x^2 + 2x + 3$ и $(x-1)^2 + y^2 = 10$ на одном чертеже, т.е. в одной системе координат, и графически найдем все общие точки.



$A(0; 3)$; $B(2; 3)$; $C(2; -3)$; $D(0; -3)$.

При подстановке координат всех общих точек в систему уравнений получаем системы верных числовых равенств.

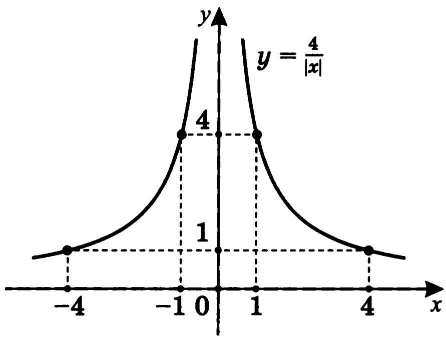
Ответ: $\{(0; 3); (2; 3); (2; -3); (0; -3)\}$.

12. $\begin{cases} y \cdot |x| = 4 \\ |y| = 5 - |x| \end{cases}.$

а) Построим график $y \cdot |x| = 4$.

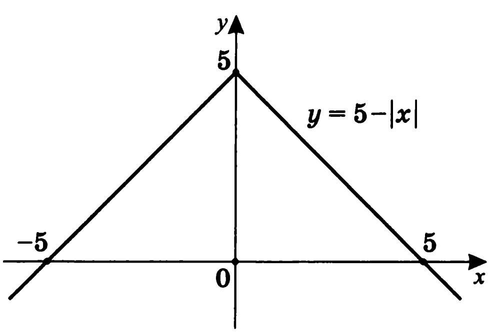
Так как при $x = 0$ $y \cdot 0 = 4$ — ложное равенство, то уравнение $y \cdot |x| = 4$ можно привести к виду $y = \dfrac{4}{|x|}$.

В силу симметричности относительно оси ординат получим:



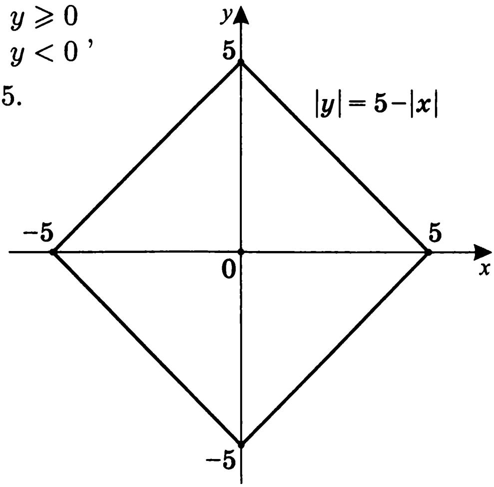
б) $|y| = \begin{cases} y, \ y \geqslant 0 \\ -y, \ y < 0 \end{cases}.$

Построим график функции $y = 5 - |x|$. (Отметим, что здесь также имеет место симметрия относительно оси ординат.)

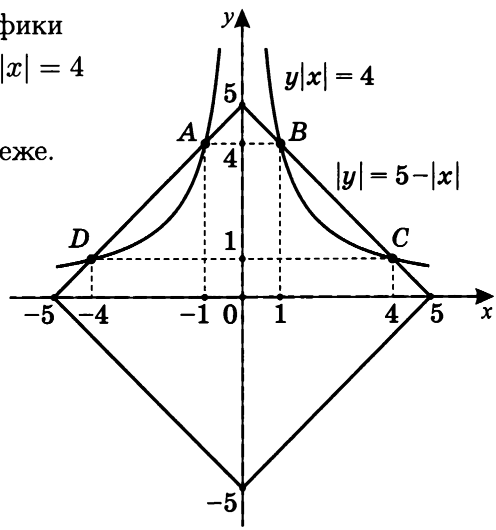


в) $|y| = \begin{cases} 5 - |x|, & y \geqslant 0 \\ |x| - 5, & y < 0 \end{cases}$,

т. е. $-5 \leqslant x \leqslant 5$.



г) Построим графики уравнений $y \cdot |x| = 4$ и $|y| = 5 - |x|$ на одном чертеже.



Получим графически все общие точки графиков двух уравнений: $A(-1;4)$; $B(1;4)$; $C(4;1)$; $D(-4;1)$. При подстановке координат всех общих точек в систему уравнений получаем системы верных числовых равенств.

Ответ: $\{(-1;4);(1;4);(4;1);(-4;1)\}$.

Самостоятельная работа 7

Решите графически систему уравнений.

Вариант I

1. $\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases};$

2. $\begin{cases} xy = -12 \\ x - y = 8 \end{cases};$

3. $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x^2 + y = 14 \end{cases}.$

Вариант II

1. $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ x^2 y = 36 \end{cases};$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases};$

3. $\begin{cases} (x+1)y + 8 = 0 \\ 1 + x + y^2 = 0 \end{cases}.$

Вариант III

1. $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ y^2 - x = 6 \end{cases};$

2. $\begin{cases} xy = 2 \\ 2x^2 + 7x - 2y = 5 \end{cases};$

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (y - x^2)(|x| \cdot y + 1) = 0 \end{cases}.$

Вариант IV

1. $\begin{cases} y = 7 - x^2 \\ |xy| = 6 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} y = ||x| - 2| \\ (|x| - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} (|y| + x - 2)(|y| + x) = 0 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}$.

Вариант V

1. $\begin{cases} |xy| = 3 \\ 3y^2 - 10|xy| + 3x^2 = 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} (|x| - 3)^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 4 - |x| \end{cases}$;

3. $\begin{cases} |y| = |x + 2| + 2 \\ |y| = |x^2 + 4x| \end{cases}$.

Вариант VI

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} (y + |x| - 2) \cdot (y + |x|) = 0 \\ y + x^2 = 2 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} |xy| = 2 \\ (1 - |x|)^2 + (|y| - 1)^2 = 1 \end{cases}$.

4

Графическое решение уравнений и систем с параметром

В этой главе мы рассмотрим решение более сложных уравнений и систем с параметрами. Для этого будем использовать весь набор методов построения и преобразования графиков, изученных ранее[5].

Практикум 10

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a?

1. $\frac{|x+3|}{x^2+3x} = a$;

2. $\frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|} = a$;

3. $\frac{x}{1-|x|} = a$;

4. $x^2 + a = \frac{|x^2-3x|}{x-3}$;

5. $2\left|2|x| - a^2\right| = x - a$.

---

[5] Задания, связанные с графиками линейных функций и их комбинациями, см.: Шахмейстер А. Х. Построение и преобразование графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения. СПб.; М., 2014. Там же рассмотрены методы, связанные с различными видами симметрии.

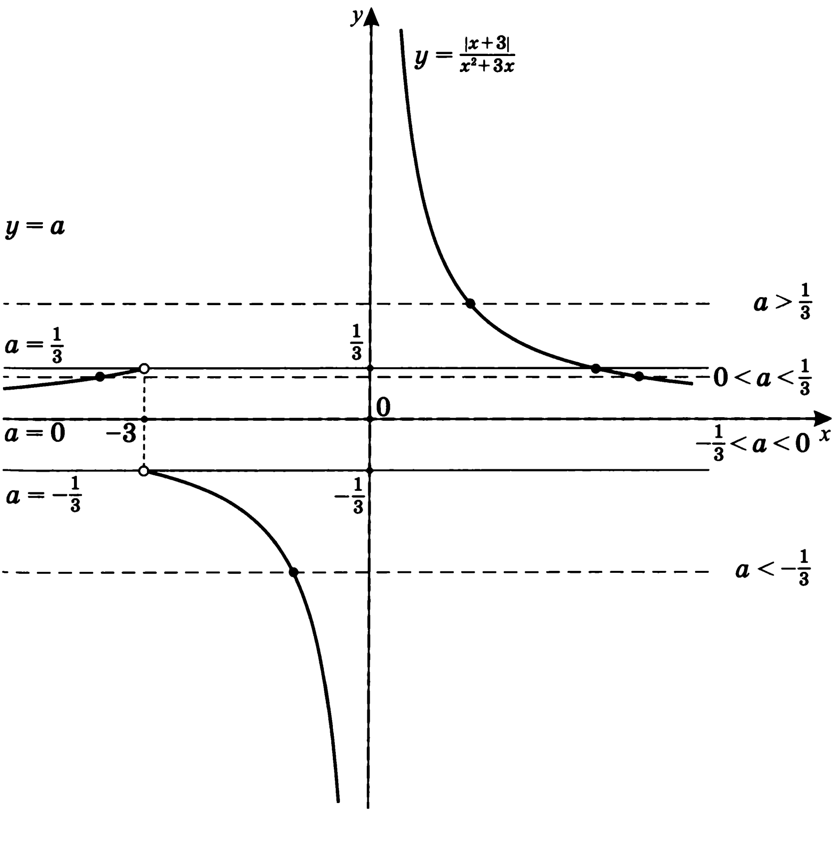
Решение практикума 10

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a?

1. $\frac{|x+3|}{x^2+3x} = a$. Пусть $y = \frac{|x+3|}{x^2+3x}$. $D(y) = \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

$|x+3| = \begin{cases} x+3, \ x+3 \geqslant 0 \\ -(x+3), \ x+3 < 0 \end{cases}$. Тогда $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, \ x > -3 \\ -\frac{1}{x}, \ x < -3 \end{cases}$.

Решение данного уравнения равносильно решению системы уравнений $\begin{cases} y = \frac{|x+3|}{x^2+3x} \\ y = a \end{cases}$.



Ответ: уравнение $\frac{|x+3|}{x^2+3x} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ — один корень.
2. При $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$ — корней нет.
3. При $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ — два корня.
4. При $a \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$ — один корень.

2. $\frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|} = a.$

Пусть $y = \frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|}$.

$D(y)$: $x^2 + x - 2 \neq 0$; $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$

$$|x^2 + x - 2| = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x^2 + x - 2 \geqslant 0 \\ -(x^2 + x - 2), & x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}.$$

$t(x) = (x + 2)(x - 1)$

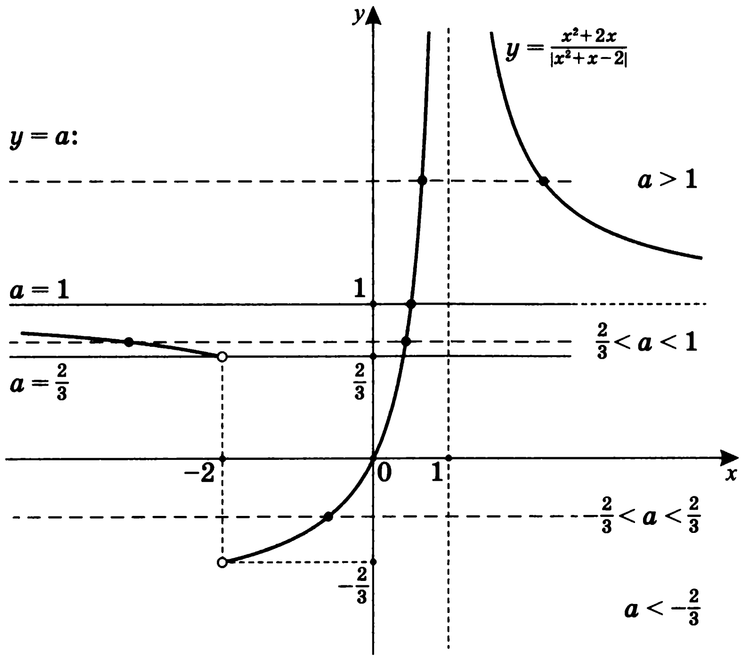
$$y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < -2,\ x > 1 \\ -\frac{x}{x-1}, & -2 < x < 1 \end{cases}, \text{ где } y = \frac{x(x+2)}{|(x+2)(x-1)|}.$$

После преобразования получим:

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

и $y = \frac{-x}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}$.

Построим графики $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ и $y = -1 - \frac{1}{x-1}$ на своих промежутках.



Ответ: уравнение $\frac{x^2+2x}{|x^2+x-2|} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$ — корней нет.

2. При $a \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right]$ — один корень.

3. При $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$ — два корня.

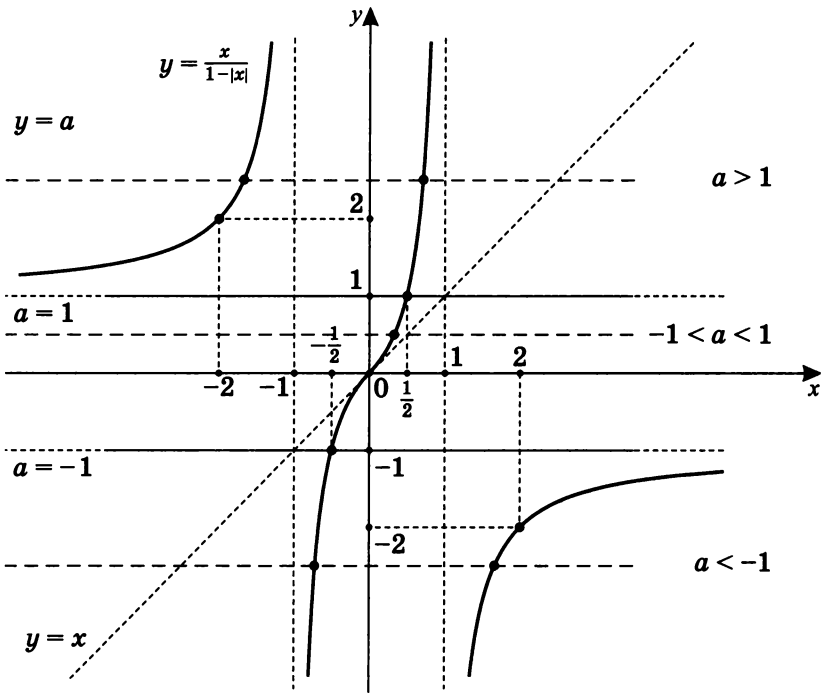
4. При $a = 1$ — один корень.

5. При $a \in (1; \infty)$ — два корня.

3. $\frac{x}{1-|x|} = a$. Пусть $y = \frac{x}{1-|x|}$. $D(y)$: $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \geqslant 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x < 0 \end{cases}; \quad y = \begin{cases} -1 - \frac{1}{x-1}, & x \geqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{x+1}, & x < 0 \end{cases}.$$

Построим график, состоящий из двух частей, на одном чертеже.



Ответ: уравнение $\frac{x}{1-|x|} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -1)$ — два корня.
2. При $a \in [-1; 1]$ — один корень.
3. При $a \in (1; \infty)$ — два корня.

Примечание. Можно доказать, что $y = \frac{x}{1-|x|}$ — нечетная функция, а значит, ее график центрально-симметричен относительно начала координат, и это можно использовать, построив график только при $x \geqslant 0$, а затем отразить его относительно точки $O\,(0;0)$ в левую полуплоскость.

4. $x^2 + a = \frac{|x^2-3x|}{x-3}$.

Пусть $y = \frac{|x^2-3x|}{x-3}$. $D(y)$: $x \neq 3$.

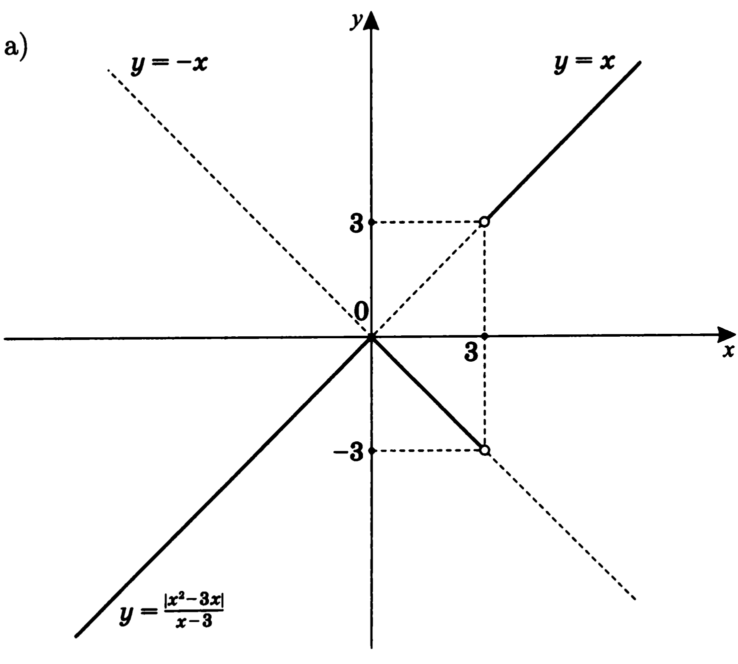
Решение исходного уравнения равносильно решению системы уравнений $\begin{cases} y = \frac{|x^2-3x|}{x-3} \\ y = x^2 + a \end{cases}$.

Обозначим $t(x) = x^2 - 3x$.

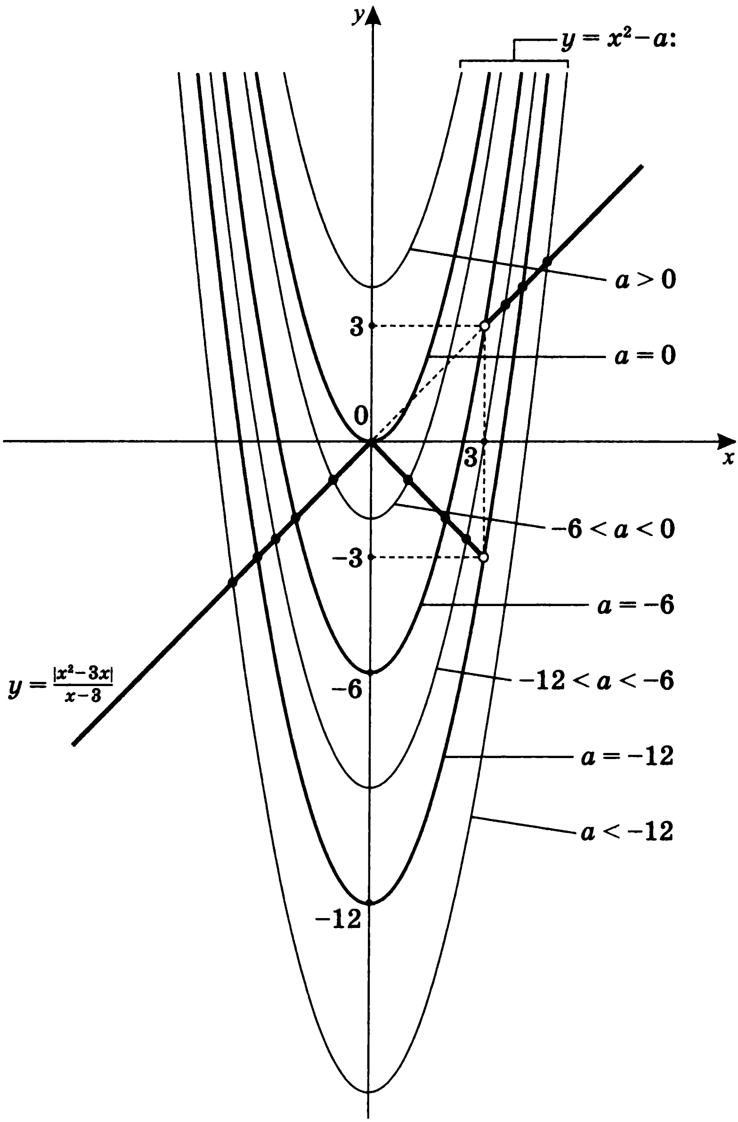
Тогда $\frac{|x^2-3x|}{x-3} = \begin{cases} x, \; x > 3, \; x \leqslant 0 \\ -x, \; 0 < x < 3 \end{cases}$.

На одном чертеже построим график, состоящий из нескольких частей, на своих промежутках.

а)



б) Положим $g(x) = x^2 + a$. Построим графики $y = g(x)$ и $y = \frac{|x^2-3x|}{x-3}$ на одном чертеже, т. е. в одной системе координат.



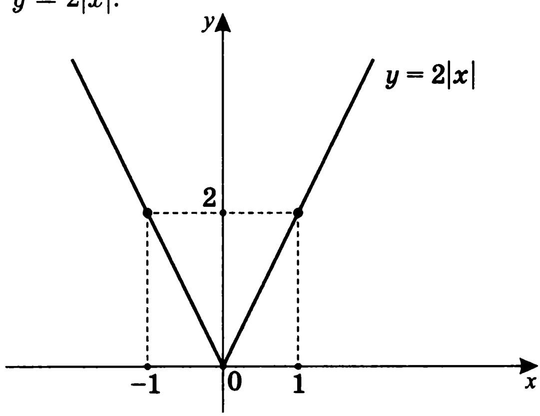
Ответ: уравнение $x^2 + a = \frac{|x^2-3x|}{x-3}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -12]$ — два корня.
2. При $a \in (-12; -6)$ — три корня.
3. При $a \in [-6; 0)$ — два корня.
4. При $a = 0$ — один корень.
5. При $a \in (0; \infty)$ — корней нет.

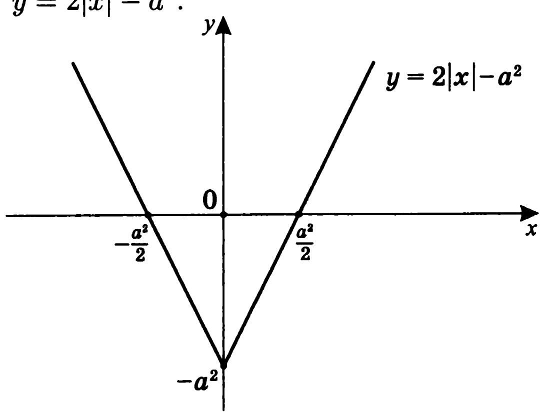
5. $2\left|2|x| - a^2\right| = x - a$.

Построим график $y = 2\left|2|x| - a^2\right|$.

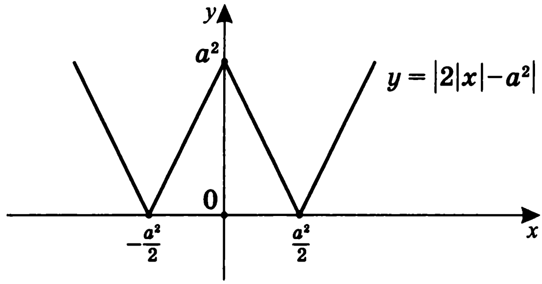
а) $y = 2|x|$.



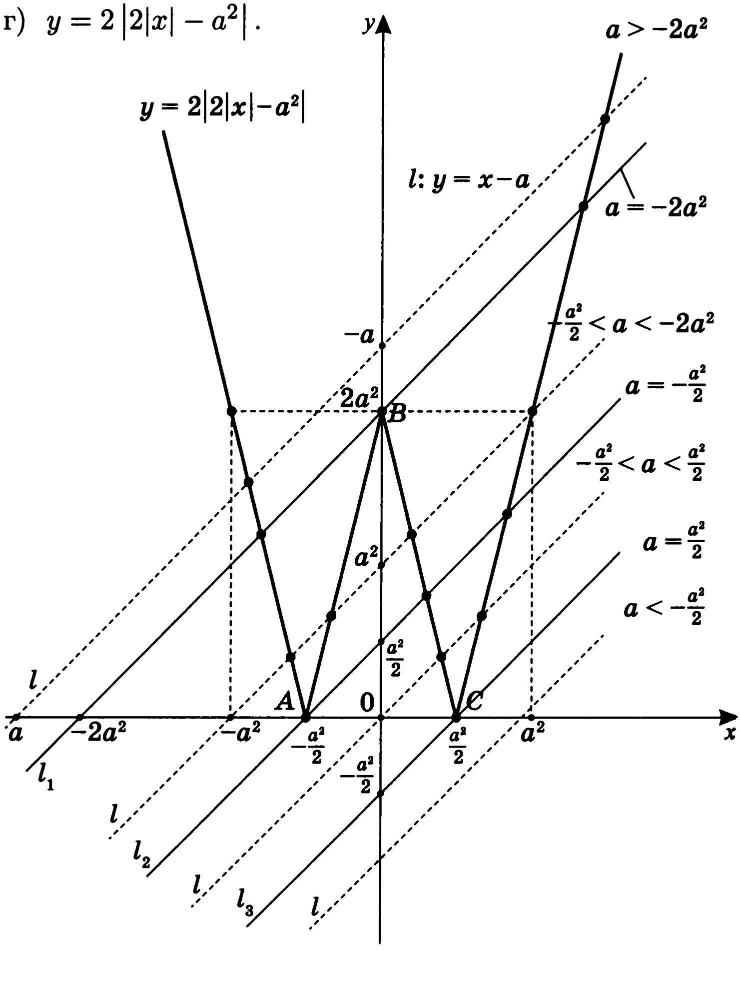
б) $y = 2|x| - a^2$.



в) $y = \left|2|x| - a^2\right|$.



г) $y = 2\left|2|x| - a^2\right|$.



Отметим, что прямая l: $y = x - a$ пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; -a)$, а ось абсцисс в точке с координатами $(a; 0)$.

Исследование по графику.

1. Если $a = 0$, то исходное уравнение принимает вид $4|x| = x$, и $x = 0$ — единственный корень.

2. Если $-a < -\frac{a^2}{2}$, то $2a - a^2 > 0$, и это случай, при котором прямая l: $y = x - a$ ниже прямой l_3,

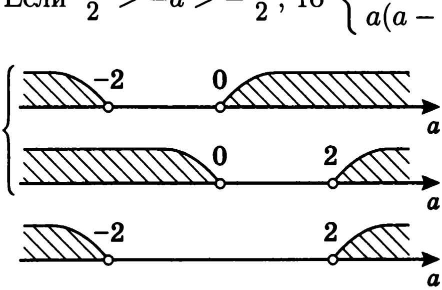
   т. е. $a(2 - a) > 0$

   Значит, при $a \in (0; 2)$ корней нет.

3. Если $-a = -\frac{a^2}{2}$, то $2a - a^2 = 0$.

   Случай, когда прямая $l \equiv l_2$ (прямые совпадают) $a = 0$, мы уже исследовали, значит, при $a = 2$ есть только один корень.

4. Если $\frac{a^2}{2} > -a > -\frac{a^2}{2}$, то $\begin{cases} a(a+2) > 0 \\ a(a-2) > 0 \end{cases}$.



   Это случай, при котором прямая $y = x - a$ находится между прямыми l_2 и l_3.

   Значит, при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ есть два корня.

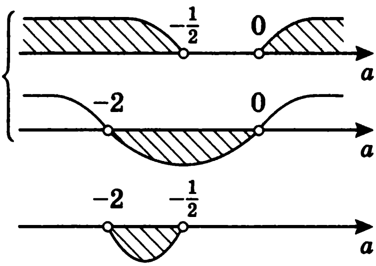
5. Если $-a = \frac{a^2}{2}$,

это случай, при котором прямые $l_2 \equiv l$, т. е. совпадают.

Тогда $a(a+2) = 0$; $\left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ — не подходит} \\ a = -2 \end{array}\right.$,

т. е. при $a = -2$ есть три корня.

6. Если $2a^2 > -a > \frac{a^2}{2}$, то $\begin{cases} a(2a+1) > 0 \\ a(a+2) < 0 \end{cases}$.



Это случай, при котором прямая l: $y = x - a$ находится между прямыми l_1 и l_2.

Значит, при $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ есть четыре корня.

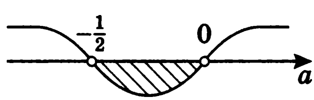
7. Если $-a = 2a^2$, то $a(2a+1) = 0$.

Это случай, при котором прямые $l \equiv l_1$ (совпадают).

Значит, при $a = -\frac{1}{2}$ есть три корня.

8. Если $-a > 2a^2$,

то $a(2a+1) < 0$.



Это случай, при котором прямая l: $y = x - a$ находится выше прямой l_3.

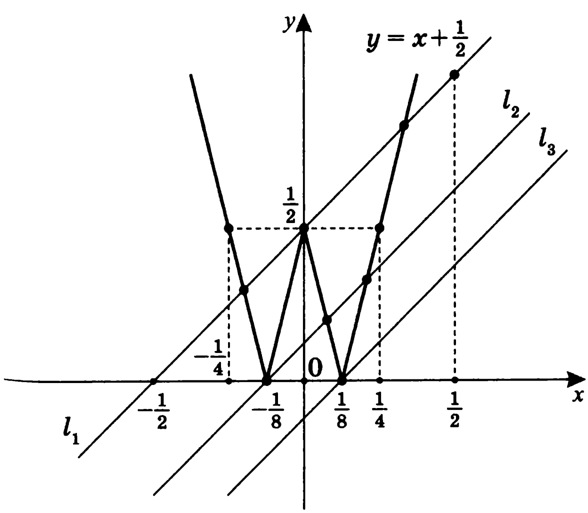
Значит, при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ есть два корня.

Ответ: уравнение $2\left|2|x|-a^2\right| = x-a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty;-2)$ — два корня.
2. При $a=-2$ — три корня.
3. При $a \in \left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ — четыре корня.
4. При $a=-\frac{1}{2}$ — три корня.
5. При $a \in \left(-\frac{1}{2};0\right)$ — два корня.
6. При $a=0$ — один корень.
7. При $a \in (0;2)$ — корней нет.
8. При $a=2$ — один корень.
9. При $a \in (2;\infty)$ — два корня.

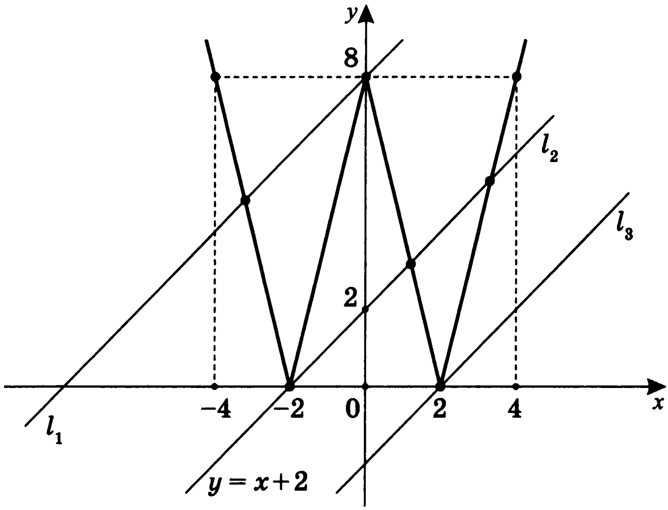
Примечание. 1. При $a=-\frac{1}{2}$ l_1: $y=x+\frac{1}{2}$.

График $y=2\left|2|x|-\frac{1}{4}\right|$ будет выглядеть так:



2. При $a = -2$ $\quad l_2$: $y = x + 2$.

График $y = 2\,|2|x| - 4|$ будет выглядеть так:

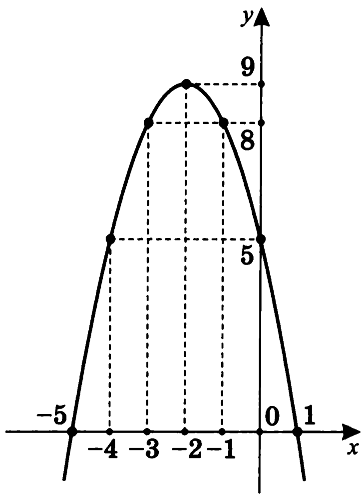


Очевидно, что при различных значениях a график по форме не изменяется, так как $\triangle ABC$ (с. 228) равнобедренный с основанием $AC = a^2$ и высотой $OB = 2a^2$. Поэтому прямая l_1 всегда выше прямой l_2, которая выше прямой l_3. Но при *разных значениях* a возможно l_1: $y = x + \frac{1}{2}$ ниже l_2: $y = x + 2$.

Тренировочная работа 4

Вариант I

1. Дан график функции



С помощью графика определите:

а) значения y, при которых $x = 0$;

б) значения x, при которых $y = 5$;

в) значения x, при которых $y \leqslant 0$;

г) значения x, при которых $5 < y \leqslant 8$;

д) аналитическую формулу и найдите значения a, b и c.

2. а) Постройте график уравнения $y + 3x = 2$.

б) Постройте график уравнения $y = -x^2 + 2x + 8$.

в) Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y + 3x = 2 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases}.$$

3. Дана функция $f(x) = -x^2 + 6x + 7$.

а) Постройте ее график.

б) Исследуйте график.

1. $y = f(x) \uparrow$.
2. $y = f(x) \downarrow$.
3. $y_{\max} =?$ при $x =?$
4. $y > 0$.
5. $y \leqslant 0$.
6. $y = 12$.
7. $7 < y \leqslant 12$.
8. Найдите абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = 2x - 5$.

в) Вычислите $\dfrac{1}{f\left(2+\sqrt{5}\right)} + \dfrac{1}{f\left(2-\sqrt{5}\right)}$.

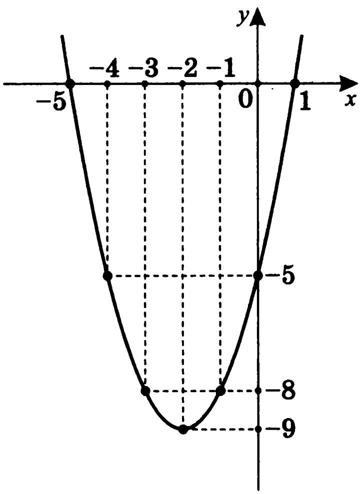
г) Сколько решений имеет уравнение $a = -x^2 + 6|x| + 7$ в зависимости от значения параметра a?

4. Определите, при каких значениях k уравнение $kx^2 - 6x + k^2 = 0$ имеет два решения.

Примечание. Примеры исследования графика функции см.: Шахмейстер А. Х. Построение и преобразование графиков. Параметры. Часть 1. Линейные функции и уравнения. СПб.; М., 2014. С. 94–99, а также практикум 1 данной книги (с. 31–50).

Вариант II

1. Дан график функции.



С помощью графика определите:

а) значения y, при которых $x = 0$;

б) значения x, при которых $y = -5$;

в) значения x, при которых $y > 0$;

г) значения x, при которых $-8 < y \leqslant -5$;

д) аналитическую формулу и найдите значения a, b и c.

2. а) Постройте график уравнения $y - 3x = 2$.

б) Постройте график уравнения $y = -x^2 - 2x + 8$.

в) Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x^2 - 2x + 8 \end{cases}.$$

3. Дана функция $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

а) Постройте ее график.

б) Исследуйте график.

1. $y = f(x) \uparrow$.
2. $y = f(x) \downarrow$.
3. $y_{\max} = ?$ при $x = ?$
4. $y > 0$.
5. $y \leqslant 0$.
6. $y = -3$.
7. $-3 > y \geqslant -8$.
8. Найдите абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = -x - 2$.

в) Вычислите $\dfrac{1}{f\left(4-\sqrt{3}\right)} + \dfrac{1}{f\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

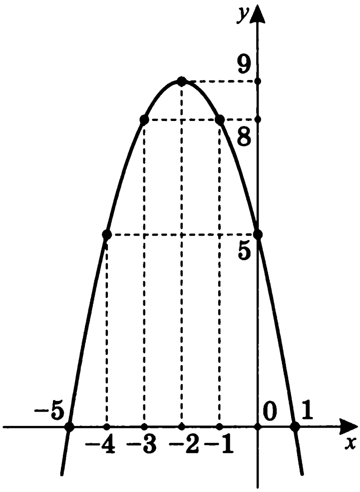
г) Сколько решений имеет уравнение $a = -x^2 + 6|x| - 8$ в зависимости от значения параметра a?

4. Определите, при каких значениях k уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет два решения.

Решение тренировочной работы 4

Вариант I

1. Дан график функции:



С помощью графика определим:

а) Если $x = 0$, то $y = 5$.

б) Если $y = 5$, то $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

в) Если $y \leqslant 0$, то $x \in (-\infty; -5] \cup [1; \infty)$.

г) Если $5 < y \leqslant 8$, то $x \in (-4; -3] \cup [-1; 0)$.

д) Так как $y = ax^2 + bx + c$, найдем a, b и c.

$f(0) = 5$; $f(-4) = 5$; $f(1) = 0$. Значит

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \\ a \cdot 16 - 4 \cdot b + c = 5 \\ a + b + c = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = 5 \\ 16a - 4b = 0 \\ a + b = -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ 4a = b \\ a + b = -5 \end{cases} \quad \text{II} + \text{III} \quad \begin{cases} c = 5 \\ a = -1 \\ b = 4 \cdot (-1) \end{cases}; \quad \begin{cases} c = 5 \\ a = -1 \\ b = -4 \end{cases},$$

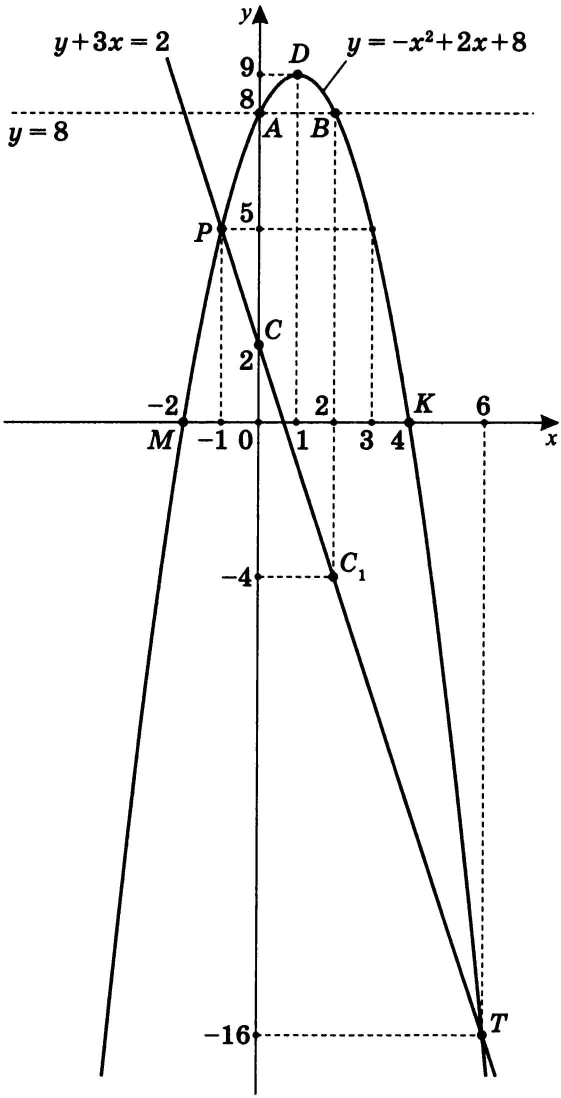
т. е. $y = -x^2 - 4x + 5$.

Разумеется, возможны и другие способы.

2. а) Постройте график уравнения $y + 3x = 2$.

x	y	Координаты точек
0	2	$C\,(0; 2)$
2	-4	$C_1\,(2; -4)$

б) Постройте график уравнения $y = -x^2 + 2x + 8$.



1. $y = 8;\quad -x^2 + 2x = 0;\quad -x(x-2) = 0;$
   $x_1 = 0,\ x_2 = 2;\quad A\,(0;8);\quad B\,(2;8).$
2. $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2};\quad x_0 = \frac{0+2}{2} = 1;$
   $y_0 = f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 + 8 = 9;\quad D\,(1;9).$
3. $y = 0;\quad -x^2 + 2x + 8 = 0;$
   $x^2 - 2x - 8 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.;$
   $K\,(4;0);\quad M\,(-2;0).$

в) Решим графически систему уравнений:
$$\begin{cases} y + 3x = 2 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases}.$$

Из графиков следует, что абсциссы точек пересечения графиков находятся или на промежутке $(-2;0)$ или на промежутке $(4;\infty)$. Можно расширить координатное поле, а можно перебирать значения двух данных функций до их совпадения.

Контрольные точки для $y = -x^2 + 2x + 8$:

x	4	5	**6**	-2	**-1**
y	0	-7	**-16**	0	**5**

$f(4) = -4^2 + 2\cdot 4 + 8 = 0;$
$f(5) = -5^2 + 2\cdot 5 + 8 = -7;$
$f(6) = -6^2 + 2\cdot 6 + 8 = -16;$
$f(-1) = -1^2 - 2\cdot 1 + 8 = 5.$

Контрольные точки для $y = 2 - 3x$:

x	4	5	**6**	**-1**
y	-10	-13	**-16**	**5**

Из сравнения табличных значений следует, что есть общие точки, т. е. точки пересечения двух графиков функций.

$\Gamma\left(y = -x^2 + 2x + 8\right) \cap \Gamma\,(y = 2 - 3x) = \{P;T\},$

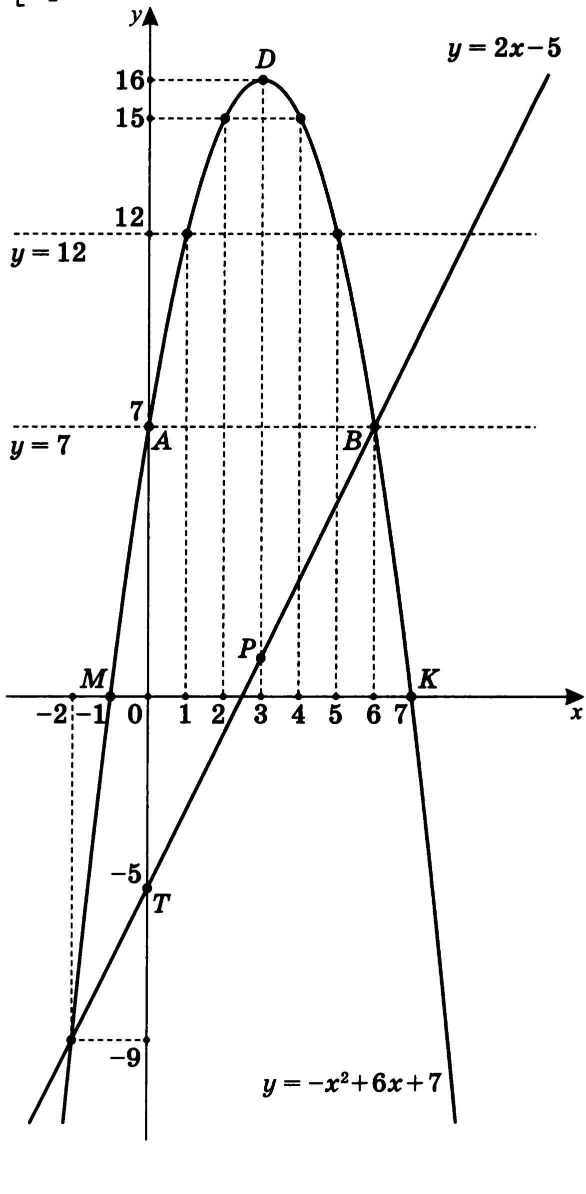
Тогда $T\,(6;-16);\quad P\,(-1;5).$

Ответ: $\{(6;-16),(-1;5)\}$ или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = -16 \end{cases} \end{array}\right..$

3. Дана функция $y = -x^2 + 6x + 7$.

а) Построим ее график.

1. Пусть $y = 7$, тогда $-x^2+6x = 0$; $-x(x-6) = 0$;
$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array}\right.$; $A\,(0; 7)$, $B\,(6; 7)$.



2. $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+6}{2} = 3;$
   $y_0 = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 7 = 16,$ т. е. $D\,(3;16)$.
3. Пусть $y = 0$, тогда
   $-x^2 + 6x + 7 = 0; \quad x^2 - 6x - 7 = 0;$
   $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4;$
   $\left[\begin{array}{ll} x_3 = 7, & K\,(7;0) \\ x_4 = -1, & M\,(-1;0) \end{array}\right.$.

б) Исследуем график.

1. $y = f(x) \uparrow$ на $(-\infty;3]$.
2. $y = f(x) \downarrow$ на $[3;\infty)$.
3. $y_{\max} = 16$ при $x = 3$.
4. $y > 0$ на $(-1;7)$.
5. $y \leqslant 0$ на $(-\infty;-1] \cup [7;\infty)$.
6. $y = 12$ при $x = 1$ и $x = 5$.
7. $7 < y \leqslant 12$ на $(0;1] \cup [5;6)$.
8. Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = 2x - 5$.
   Вначале построим график $y = 2x - 5$.

x	y	Координаты точек
0	-5	$T\,(0;-5)$
3	1	$P\,(3;1)$

Из графиков следует, что абсциссы точек пересечения — $x = -2$ и $x = 6$. Проверка убеждает в этом. Следовательно, $x = -2$ или $x = 6$.

в) Вычислим $\frac{1}{f\left(2+\sqrt{5}\right)} + \frac{1}{f\left(2-\sqrt{5}\right)}$.

$$f\,(2+\sqrt{5}) = -\left(2+\sqrt{5}\right)^2 + 6\left(2+\sqrt{5}\right) + 7 =$$
$$= -4 - 4\sqrt{5} - 5 + 12 + 6\sqrt{5} + 7 = 2\sqrt{5} + 10;$$

$$f\,(2-\sqrt{5}) = -\left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 6\left(2-\sqrt{5}\right) + 7 =$$
$$= -4 + 4\sqrt{5} - 5 + 12 - 6\sqrt{5} + 7 = -2\sqrt{5} + 10.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{f\left(2+\sqrt{5}\right)}+\dfrac{1}{f\left(2-\sqrt{5}\right)}=$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{5}+10}+\dfrac{1}{-2\sqrt{5}+10}=\dfrac{-2\sqrt{5}+10+2\sqrt{5}+10}{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)}=$

$=\dfrac{20}{100-20}=\dfrac{20}{80}=\dfrac{1}{4}.$

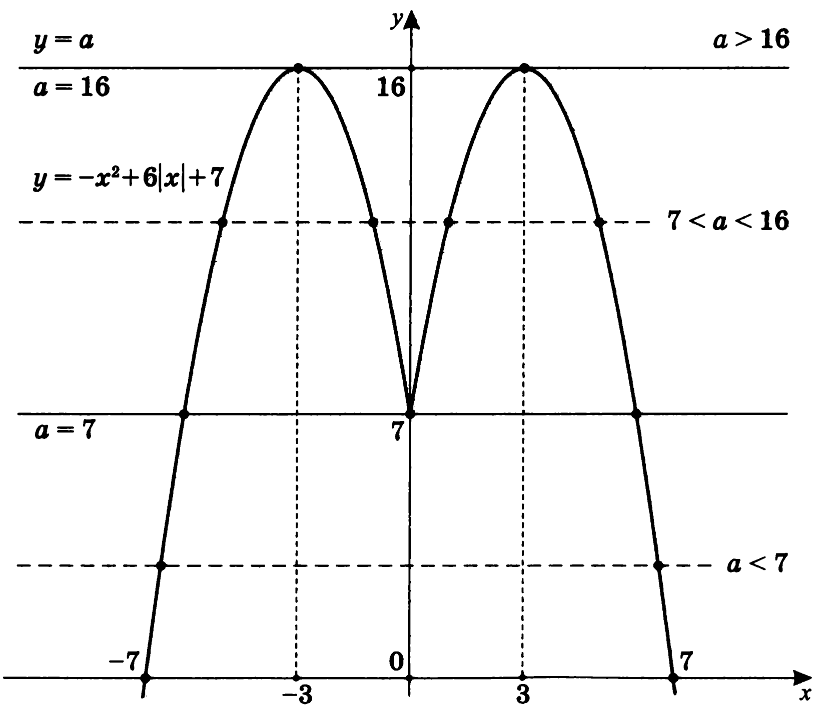
г) Определим, сколько решений имеет уравнение $a=-x^2+6|x|+7$ в зависимости от значения параметра a, т.е. необходимо решить систему $\begin{cases} y=-x^2+6|x|+7 \\ y=a \end{cases}.$

Пусть $\varphi(x)=-x^2+6|x|+7,\quad f(x)=a.$

$D(\varphi)=(-\infty;\infty);$

$\varphi(-x)=-(-x)^2+6|-x|+7=-x^2+6|x|+7=\varphi(x),$

значит $\varphi(x)$ — четная, и ее график симметричен относительно оси Oy.



В данном случае наиболее удобным является графическое решение.

Очевидно, что количество точек пересечения графика уравнения $y = \varphi(x)$ и прямой $y = a$ и есть ответ на вопрос: сколько решений имеет уравнение $-x^2 + 6|x| + 7 = a$ в зависимости от значения параметра a.

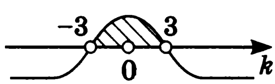
Ответ: уравнение $-x^2+6|x|+7 = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (16; \infty)$ — корней нет.
2. При $a = 16$ — два корня.
3. При $a \in (7; 16)$ — четыре корня.
4. При $a = 7$ — три корня.
5. При $a \in (-\infty; 7)$ — два корня.

4. Определите, при каких значениях k уравнение $kx^2 - 6x + k^2 = 0$ имеет два решения.

Чтобы данное уравнение было квадратным, необходимо условие $k \neq 0$, а чтобы было два корня, необходимо $D > 0$.

Значит $\begin{cases} k \neq 0 \\ 3^2 - k^2 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} k \neq 0 \\ (3-k)(3+k) > 0 \end{cases}$.

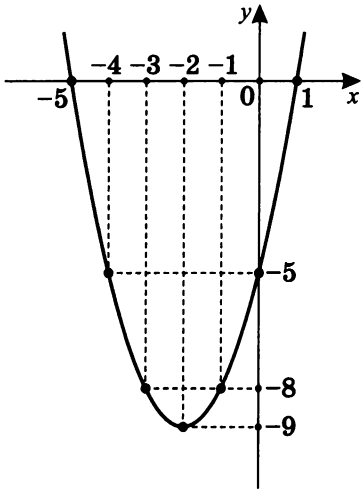


Ответ: уравнение $kx^2 - 6x + k = 0$ имеет два корня при $k \in (-3; 0) \cup (0; 3)$.

Примечание. В данном случае исследовать и определить, при каких значениях k уравнение имеет два корня, проще было *аналитически*.

Вариант II

1. Дан график функции.



С помощью графика определим:

а) если $x = 0$, то $y = -5$;

б) если $y = -5$, то $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$;

в) если $y > 0$, то $x \in (-\infty; -5) \cup (1; \infty)$;

г) если $-8 < y \leqslant -5$, то $x \in [-4; -3) \cup (-1; 0]$;

д) так как $y = ax^2 + bx + c$, найдем a, b и c.

$f(0) = -5$; $f(-4) = -5$; $f(1) = 0$, значит

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -5 \\ a \cdot 16 + b \cdot (-4) + c = -5 \\ a + b + c = 0 \end{cases};$$

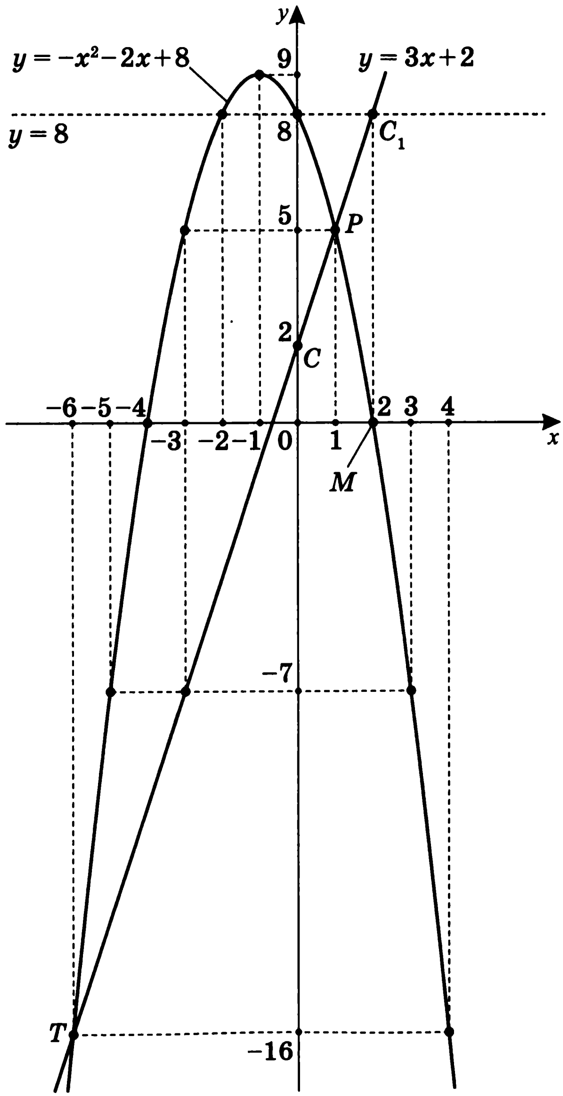
$$\begin{cases} c = -5 \\ 16a - 4b = 0 \\ a + b = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = -5 \\ 4a = b \\ a + b = 5 \end{cases} \quad \text{II} + \text{III}$$

$$\begin{cases} c = -5 \\ a = 1 \\ b = 4 \cdot 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} c = -5 \\ a = 1 \\ b = 4 \end{cases}; \quad y = x^2 + 4x - 5.$$

2. а) Построим график уравнения $y - 3x = 2$.

x	y	Координаты точек
0	2	$C\,(0;2)$
2	8	$C_1\,(2;8)$

б) Построим график уравнения $y = -x^2 - 2x + 8$.



1. Пусть $y = 8$, тогда $-x^2 - 2x = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

   Получаем точки $A\,(0;8)$ и $B\,(-2;8)$.

2. $x_0 = \frac{0+(-2)}{2} = -1$;

   $y_0 = f(-1) = -(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 8 = 9$,

   получаем точку $D\,(-1;9)$.

3. Пусть $y = 0$, тогда $-x^2-2x+8 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

   Получаем точки $K\,(-4;0)$ и $M\,(2;0)$.

в) Решим графически систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -x^2 - 2x + 8 \end{cases}.$$

Контрольные точки для $y = -x^2 - 2x + 8$:

x	**−6**	−3	0	**1**	2
y	**−16**	5	8	**5**	0

Контрольные точки для $y = 3x + 2$:

x	**1**	−3	−5	**−6**
y	**5**	−7	−13	**−16**

Абсциссы контрольных точек выбираем так, чтобы, по возможности, значения двух данных функций совпадали. Естественно, при этом ориентируемся на графики этих функций.

Значит $\Gamma\left(y = -x^2 - 2x + 8\right) \cap \Gamma\,(y = 3x + 2) = \{P;T\}$,

где $P\,(1;5)$, $T\,(-6;-16)$.

Ответ: $\{(1;5),(-6;-16)\}$ или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -6 \\ y = -16 \end{cases} \end{array}\right.$.

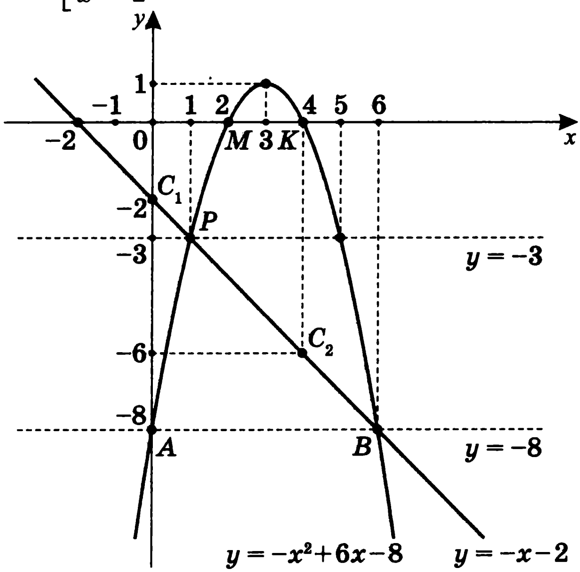
3. Дана функция $y = -x^2 + 6x - 8$.

а) Построим ее график.

1. Пусть $y = -8$, тогда $-x^2 + 6x = 0$;
$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$; $\quad A(0; -8)$ и $B(6; -8)$.

2. $x_0 = \frac{0+6}{2} = 3$;
$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1$,
т. е. получили точку $D(3; 1)$.

3. Пусть $y = 0$, тогда $-x^2 + 6x - 8 = 0$;
$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right.$; $\quad K(4; 0)$ и $M(2; 0)$.



б) Исследуем график:

1. $y = f(x) \uparrow$ на $(-\infty; 3]$.
2. $y = f(x) \downarrow$ на $[3; \infty)$.
3. $y_{\max} = 1$ при $x = 3$.
4. $y > 0$ на $(2; 4)$.
5. $y \leqslant 0$ на $(-\infty; 2) \cup (4; \infty)$.
6. $y = -3$ при $x = 1$ и $x = 5$.

7. $-3 > y \geqslant -8$ на $[0;1) \cup (5;6]$.
8. Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы с прямой $y = -x - 2$.

   Вначале построим график $y = -x - 2$.

x	y	Координаты точек
0	-2	$C_1\,(0;-2)$
4	-6	$C_2\,(4;-6)$

   Очевидно, что точки $P\,(1;-3)$ и $B\,(6;-8)$ — точки пересечения прямой и параболы. Проверка это подтверждает.

   Значит, искомые абсциссы — $x = 1$ и $x = 6$.

в) Вычислим $\frac{1}{f\left(4-\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{f\left(4+\sqrt{3}\right)}$,

где $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$f\left(4-\sqrt{3}\right) = -\left(4-\sqrt{3}\right)^2 + 6\left(4-\sqrt{3}\right) - 8 =$$
$$= -16 + 8\sqrt{3} - 3 + 24 - 6\sqrt{3} - 8 = 2\sqrt{3} - 3.$$
$$f\left(4+\sqrt{3}\right) = -\left(4+\sqrt{3}\right)^2 + 6\left(4+\sqrt{3}\right) - 8 =$$
$$= -16 - 8\sqrt{3} - 3 + 24 + 6\sqrt{3} - 8 = -2\sqrt{3} - 3.$$

Тогда $\frac{1}{f\left(4-\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{f\left(4+\sqrt{3}\right)} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}-3} + \frac{1}{-2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}+3-\left(2\sqrt{3}-3\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)} =$$
$$= \frac{6}{4\cdot 3-9} = \frac{6}{3} = 2.$$

Итак, $\frac{1}{f\left(4-\sqrt{3}\right)} + \frac{1}{f\left(4+\sqrt{3}\right)} = 2$.

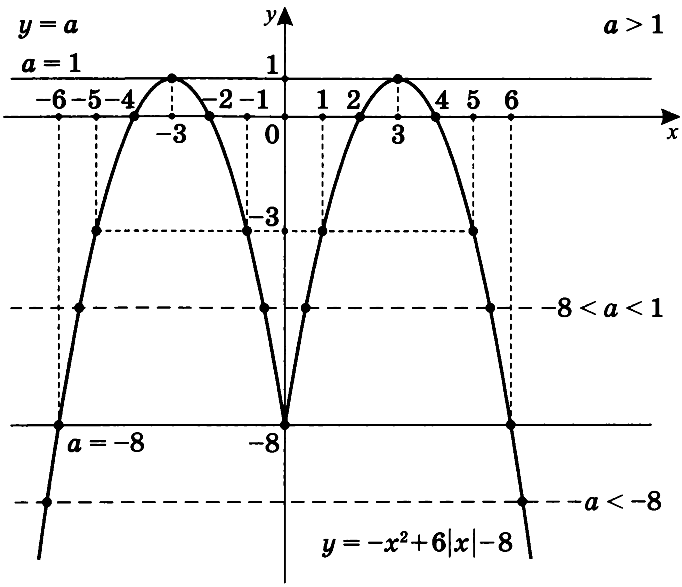
г) Сколько решений имеет уравнение $a = -x^2 + 6|x| - 8$ в зависимости от значения параметра a?

Пусть $\varphi(x) = -x^2 + 6|x| - 8$.

Так как

$\varphi(-x) = -(-x)^2 + 6|-x| - 8 = -x^2 + 6|x| - 8 = \varphi(x)$,

то $\varphi(x)$ — четная функция, график которой симметричен относительно оси Oy.



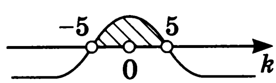
Ответ: уравнение $a = -x^2 + 6|x| - 8$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -8)$ — два корня.
2. При $a = -8$ — три корня.
3. При $a \in (-8; 1)$ — четыре корня.
4. При $a = 1$ — два корня.
5. При $a \in (1; \infty)$ — корней нет.

4. Определите, при каких значениях k уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет два решения.

1. При $k \neq 0$ уравнение является квадратным.
2. При $D > 0$ существуют два корня,

т. е. $\begin{cases} k \neq 0 \\ D = 5^2 - k^2 > 0 \end{cases}$



Ответ: при $k \in (-5; 0) \cup (0; 5)$ уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет два корня.

Самостоятельная работа 8

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a?

1. $\frac{|x-2|}{x^2-2x} = a$;
2. $\frac{1}{|x|-1} = a$;
3. $\left|\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}\right| = a$;
4. $\frac{x^2+2|x|}{4-x^2} = a$;
5. $a - x^2 = \frac{|x^2-2x|}{x-2}$;
6. $\frac{|x|}{x} + a = \frac{x+2}{|x^2+2x|}$;
7. $a - \frac{1}{x-2} = \frac{|x-2|\cdot|x|}{x^2-2x}$;
8. $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$.

Практикум 11

1. Сколько корней имеет уравнение $|x^3 - 1| + |2 - x^3| = a$ в зависимости от значения параметра a?

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$ имеет более двух корней.

3. Напишите уравнение графика, которого касаются любые окружности вида $(x-a)^2+(y-2a)^2 = 2^2$, где a — любое.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x}+|x+a| \leqslant 3$ является отрезок.

5. Сколько корней имеет уравнение
$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ в зависимости от значения параметра a?

6. Сколько корней имеет уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ в зависимости от значения параметра a?

7. Выясните, сколько корней имеет уравнение
$|x^2 + x + a| + |x| = 10$ в зависимости от параметра a.

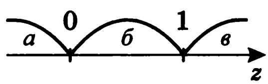
Решение практикума 11

1. Сколько корней имеет уравнение $|x^3-1|+|2-x^3|=a$ в зависимости от значения параметра a?

$|x^3-1|+|2-x^3|=a$ равносильно $|x^3-1|+|x^3-2|=a$.

Положим $z=x^3-1$, тогда уравнение принимает вид $|z|+|z-1|=a$.

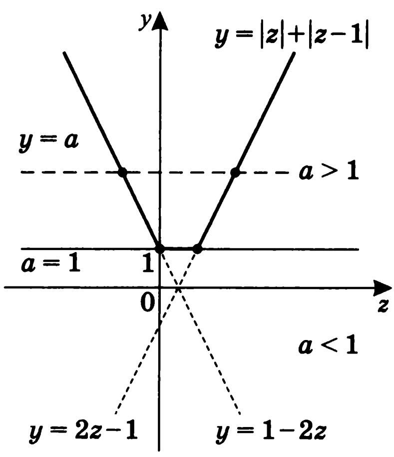
Построим график $y=|z|+|z-1|$.



а) $z<0$, тогда $y=-z+1-z=1-2z$; $y=1-2z$;

б) $0\leqslant z<1$, тогда $y=z+1-z=1$; $y=1$;

в) $z\geqslant 1$, тогда $y=z+z-1=2z-1$; $y=2z-1$.



Графически решая систему уравнений $\begin{cases} y=|z|+|z+1| \\ y=a \end{cases}$, получим все виды возможных решений.

1. При $a = 1 \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$;

   так как $z = x^3 - 1$, то

   $0 \leqslant x^3 - 1 \leqslant 1$ или $1 \leqslant x^3 \leqslant 2$.

   Значит при $a = 1 \quad x \in \left[1; \sqrt[3]{2}\right]$ — бесконечное множество решений.

2. При $a > 1$ существует два корня:

   $2z - 1 = a;\ 2(x^3 - 1) - 1 = a;\ x^3 = \frac{3+a}{2};\ x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{2}}$.

   $1 - 2z = a;\ 1 - 2(x^3 - 1) = a;\ x^3 = \frac{3-a}{2};\ x = \sqrt[3]{\frac{3-a}{2}}$.

   Значит, при $a > 1$ действительно существуют два корня: $x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{2}}$ и $x = \sqrt[3]{\frac{3-a}{2}}$.

3. При $a < 1$ решения нет.

Ответ:

1. При $a = 1$ существует бесконечное множество корней: $x \in \left[1; \sqrt[3]{2}\right]$.

2. При $a > 1$ существуют два корня $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{\frac{3+a}{2}} \\ x = \sqrt[3]{\frac{3-a}{2}} \end{array}\right.$.

3. При $a < 1$ корней нет.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$ имеет более двух корней.

Введем вспомогательную функцию

$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$.

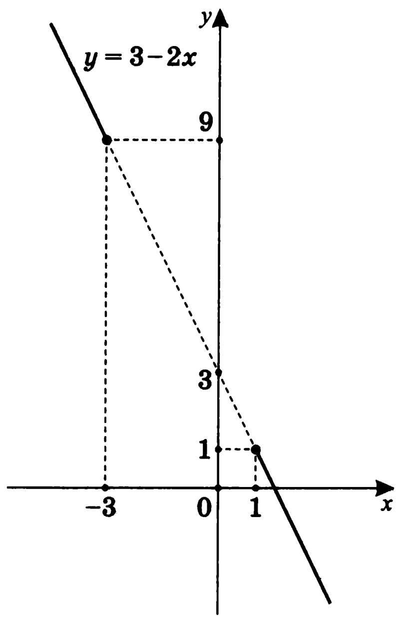
Построим ее график.

а) Пусть $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$.

Тогда при $x \in (-\infty; -3] \cup [1; \infty)$

$g(x) = x^2 - x^2 - 2x + 3 = 3 - 2x;$

$g(1) = 1; \quad g(-3) = 9.$



б) Пусть $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Тогда при $x \in (-3; 1)$

$g(x) = x^2 + x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + 2x - 3.$

При $g(x) = -3 \quad x^2 + 2x = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$x_в = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$ ($x_в$ — абсцисса вершины);

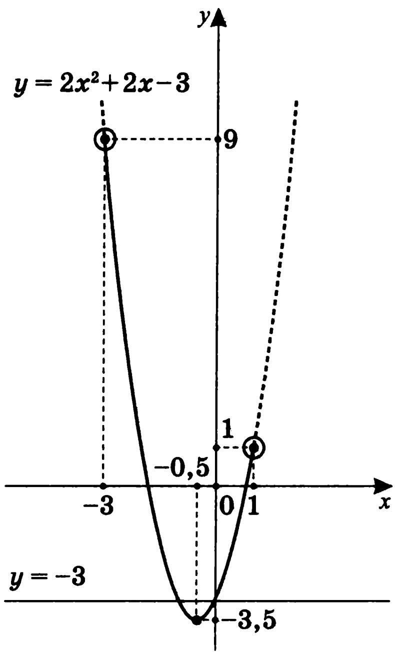
$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -3{,}5,$

т. е. $y_в = -3{,}5$ ($y_в$ — ордината вершины).

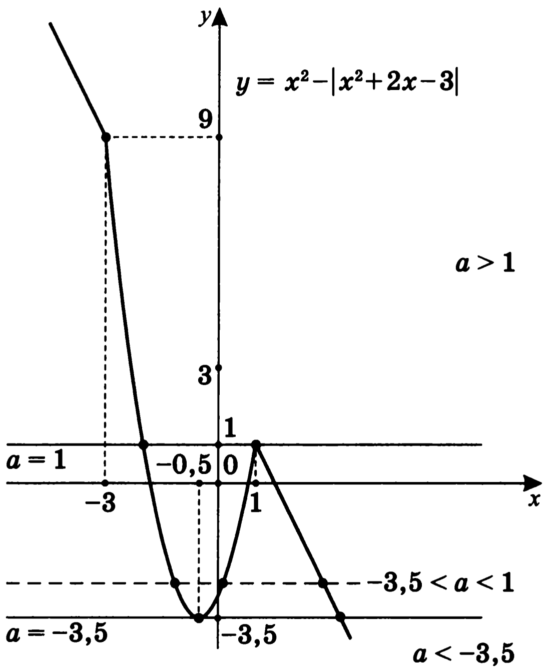
Значит, $(-0{,}5; -3{,}5)$ — координаты вершины параболы $y = 2x^2 + 2x - 3$.

$g(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 9;$

$g(1) = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 1.$



Очевидно, что исходное уравнение можно преобразовать к виду $x^2 - |x^2 + 2x - 3| = a$, т. е. условие можно переформулировать так: при каких значениях a график функции $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$ пересекается прямой $y = a$ более чем в двух точках?



Из графика $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$ следует, что это возможно при $-3{,}5 < a < 1$.

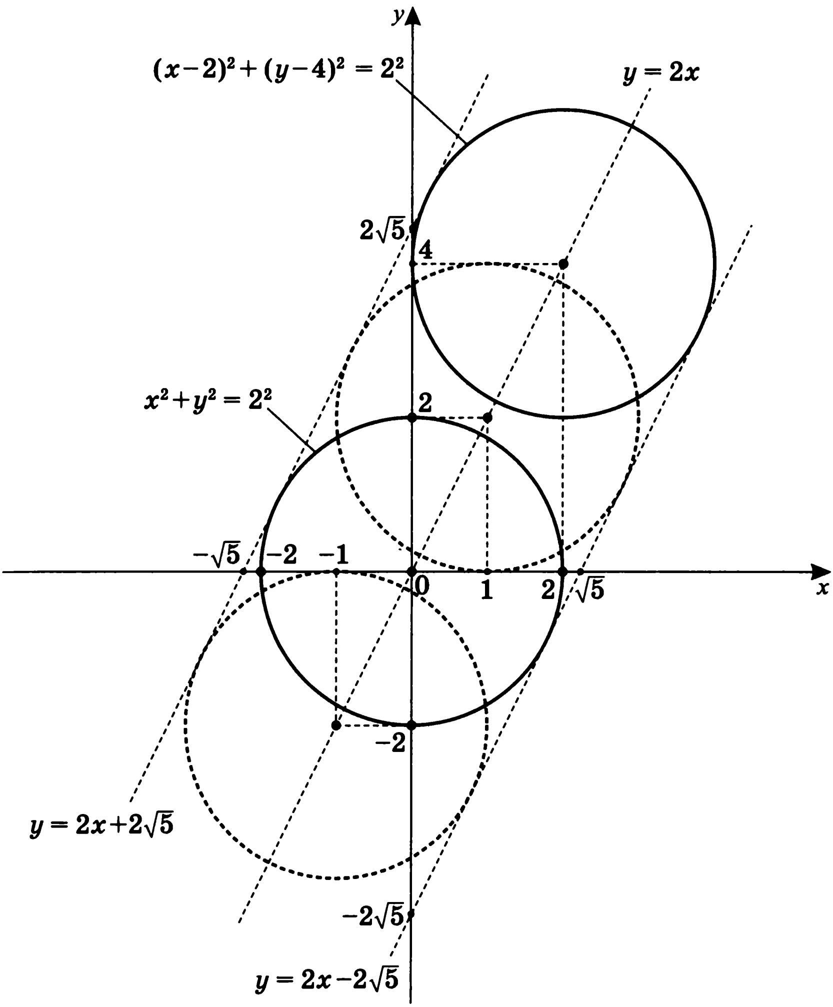
Ответ: при $a \in (-3{,}5; 1)$ уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$ имеет более двух корней.

3. Напишите уравнение графика, которого касаются любые окружности вида $(x-a)^2+(y-2a)^2 = 2^2$, где a — любое.

а) Вначале построим график $x^2 + y^2 = 2^2$ $(a = 0)$.

б) Затем построим график
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 2^2$ $(a = 2)$.

в) Так как $O(a; 2a)$ — центр окружностей — перемещается по прямой $y = 2x$, то график уравнения, которого касаются любые окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$, есть график прямой, параллельной $y = 2x$, а значит, имеющей уравнение вида $y = 2x + b$.



г) Следовательно, окружность $x^2+y^2=2^2$ касается прямой $y=2x+b$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2^2 \\ y=2x+b \end{cases}; \quad x^2+(2x+b)^2=4.$$

Найдем, при каких b $D=0$ (корень единственный).

$x^2+4x^2+4bx+b^2-4=0;$

$5x^2+4bx+b^2-4=0;$

$$D = 4b^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} b = 2\sqrt{5} \\ b = -2\sqrt{5} \end{array}\right.,$$

т. е. l_1: $y = 2x + 2\sqrt{5}$ и l_2: $y = 2x - 2\sqrt{5}$.

Ответ: окружности вида $(x-a)^2+(y-2a)^2 = 2^2$ касаются прямых $y = 2x+2\sqrt{5}$ и $y = 2x-2\sqrt{5}$, т. е. все окружности вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$ находятся внутри полосы, заданной прямыми $2x - 2\sqrt{5} \leqslant y \leqslant 2x + 2\sqrt{5}$.

Примечание. Вопрос может быть задан по-другому: укажите все прямые, которые не имеют с окружностями вида $(x-a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$ ни одной общей точки.

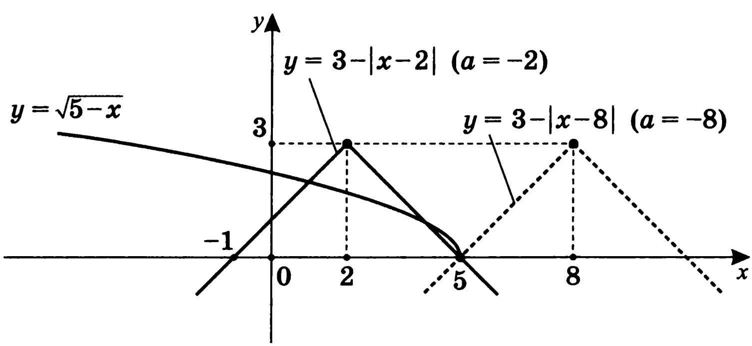
4. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leqslant 3$ является отрезок.

Преобразуем исходное неравенство в равносильное:

$\sqrt{5-x} \leqslant 3 - |x+a|$.

Так как $D\left(y = \sqrt{5-x}\right) = (-\infty; 5]$, то рассмотрим график правой части ($y = 3-|x+a|$), учитывая что при возрастании значения a данный график «скользит» вдоль оси абсцисс влево.

При $x = 5$ $a = -8$ или $a = -2$ ($|5+a| = 3$). Сравним с графиком $y = \sqrt{5-x}$.



Отметим, что график $y = 3 - |x + a|$ это график $y = |x|$, отраженный симметрично относительно оси Ox в нижнюю полуплоскость и поднятый на 3 единицы вверх. Он «скользит» вдоль оси абсцисс *противоположно направлению изменения* a: вправо при уменьшении значения a и влево при его возрастании.

При $a = -2$ решением является отрезок и точка $(5; 0)$, при $a = -8$ решением неравенства является только одна точка $(5; 0)$ (а точка не есть отрезок). Следовательно, значения $a = -2$ и $a = -8$ в ответ не включаются.

Найдем такие a, при которых $y = 3 - |x + a|$ касается $y = \sqrt{5 - x}$.

Пусть $y = -x + b$ — уравнение касательной к $y = \sqrt{5 - x}$. В этом случае уравнение $-x + b = \sqrt{5 - x}$ имеет единственное решение.

$(b - x)^2 = 5 - x \ (x \leqslant b)$; $\quad x^2 - 2bx + b^2 - 5 + x = 0$;

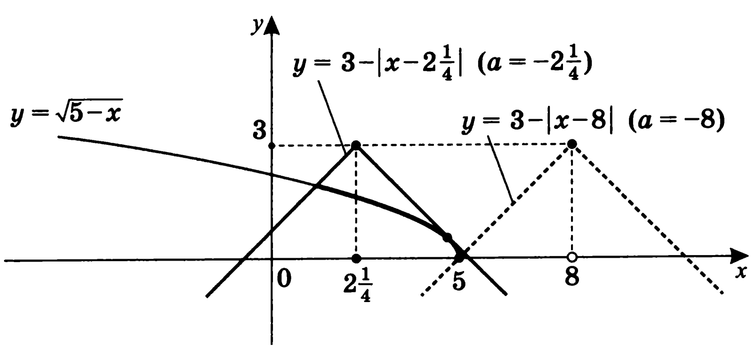
$x^2 - (2b - 1)x + b^2 - 5 = 0$.

Это уравнение при $D = 0$ имеет единственное решение.

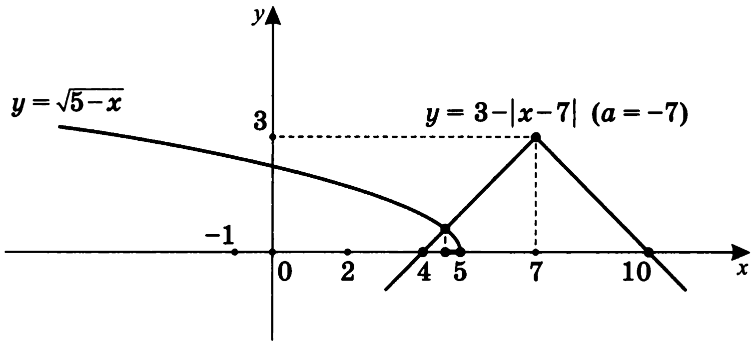
$D = (2b - 1)^2 - 4b^2 + 20 = 0$; $\quad b = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

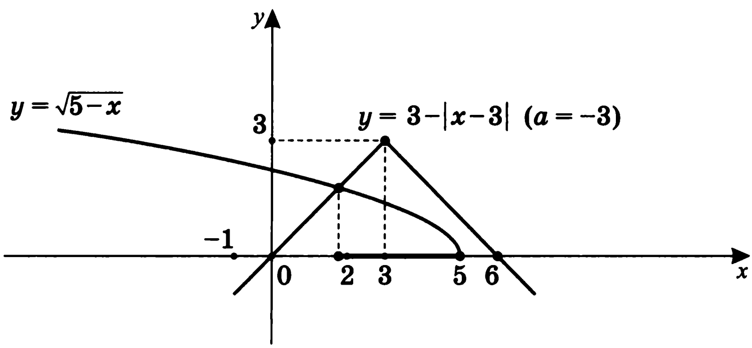
Значит, $5\frac{1}{4} - x = 3 - |x + a|$; $\quad |x + a| = x - 2\frac{1}{4}$,

следовательно, $a = -2\frac{1}{4}$.



Чтобы окончательно разобраться с решением, построим графики $y = 3 - |x + a|$ при $a = -7$ и $a = -3$, принадлежащих промежутку $\left(-8; -2\frac{1}{4}\right]$.





Вывод: при $-8 < a \leqslant -2\frac{1}{4}$ решением неравенства $\sqrt{5 - x} \leqslant 3 - |x + a|$ является отрезок.

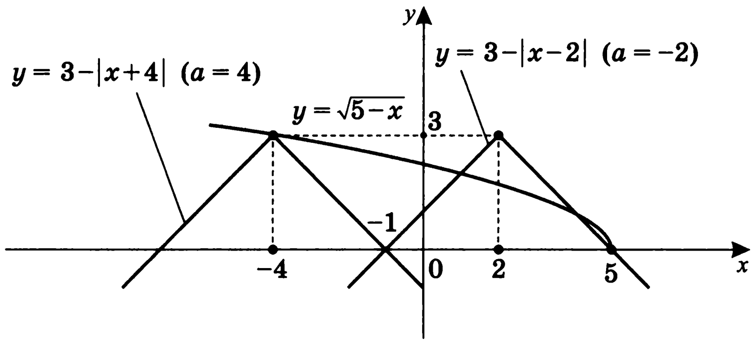
Чертежи лишь иллюстрируют верность вывода.

Теперь рассмотрим случаи, при которых графики

$y = 3 - |x + a|$ располагаются левее точки $(5; 0)$.

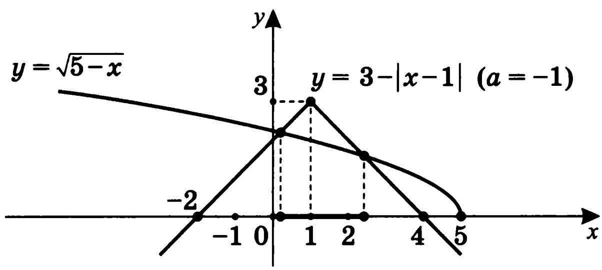
Вершина пика $y = 3 - |x + a|$ — это точка с координатами вида $(x; 3)$. Это возможно, только если $3 = 3 - |x + a|$, т. е. при $x = a$.

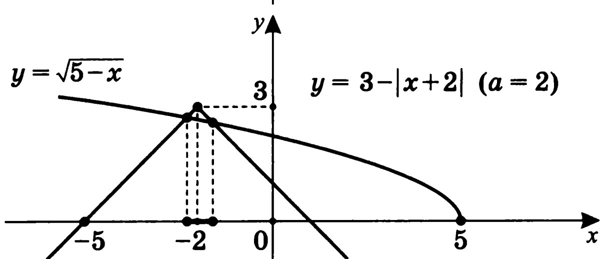
Если при этом график $y = \sqrt{5 - x}$ проходит через вершину пика, то $3 = \sqrt{5 - x}$, т. е. $x = -4$, тогда $-4 = -a$, $\boxed{a = 4}$.



Отметим, что при $a = 4$ решением является точка $(-4; 3)$, что не подходит по условию, так же, как $(5; 0)$ при $a = -2$.

Рассмотрим чертежи при $a = -1$ и $a = 2$, чтобы лучше иллюстрировать решение.





Вывод: неравенство $\sqrt{5-x} \leqslant 3 - |x + a|$ при $-2 < a < 4$ имеет решение в виде отрезка.

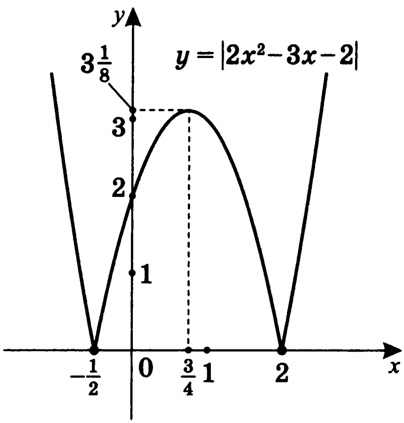
Ответ: при $a \in \left(-8; -2\frac{1}{4}\right] \cup (-2; 4)$ решением неравенства $\sqrt{5-x} \leqslant 3 - |x + a|$ является отрезок.

Примечание. При $-2\frac{1}{4} < a \leqslant -2$ решение состоит из объединения отрезков или объединения отрезка с точкой.

5. Сколько корней имеет уравнение
$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ в зависимости от значения параметра a?

Положим $f(x) = |2x^2 - 3x - 2|$; $\varphi(x) = -2x^2 - 8x + a$.
Построим график $y = f(x)$.

$f(x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.



Отметим, что $x = \frac{3}{4}$ — ось симметрии для графика $y = |2x^2 - 3x - 2|$, а $x = -2$ — ось симметрии графика $y = a - 2x^2 - 8x$.

$$(a - 2x^2 - 8x = -2\left(x^2 + 4x + 4\right) + 8 + a =$$
$$= -2(x+2)^2 + 8 + a.)$$

Найдем точку касания
$y = -2x^2 - 8x + a$ и $y = 2x^2 - 3x - 2$,
т. е. условие единственного решения.

$2x^2 - 3x - 2 = -2x^2 - 8x + a$; $4x^2 + 5x - 2 - a = 0$;

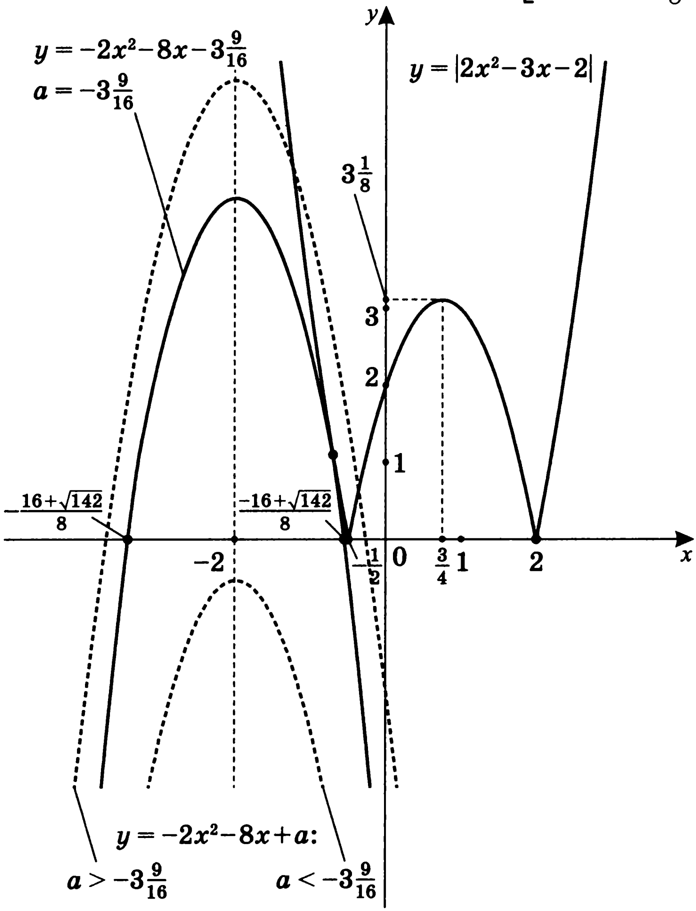
$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{57 + 16a}}{8}$.

$D = 25 + 32 + 16a = 0$; $a = -\frac{57}{16} = -3\frac{9}{16}$,

значит, решение единственное при $a = -3\frac{9}{16}$.

Следовательно, $y = -2x^2 - 8x - 3\frac{9}{16}$.

Найдем корни $-2x^2 - 8x - 3\frac{9}{16} = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-16+\sqrt{142}}{8} \\ x = -\frac{16+\sqrt{142}}{8} \end{array}\right.$.

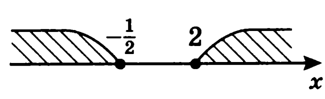


Возможно и другое, более простое решение.

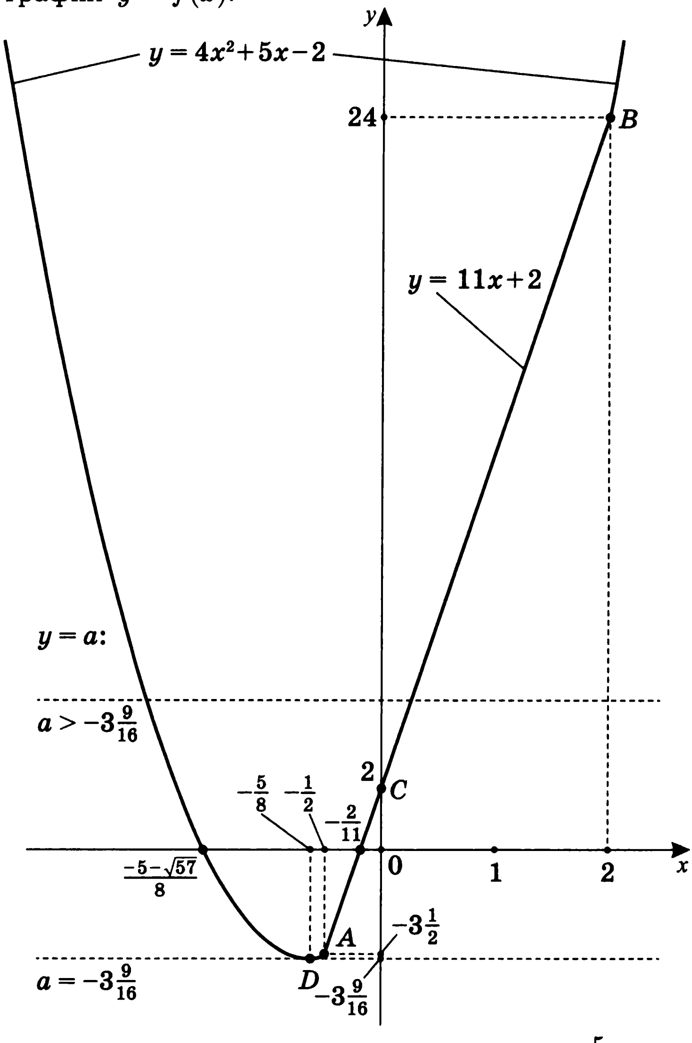
Пусть $f(x) = \left|2x^2 - 3x - 2\right| + 2x^2 + 8x$.

Тогда $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 5x - 2, & 2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0 \\ 11x + 2, & 2x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$.

$2x^2 - 3x - 2 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.



а) $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$. $f(x) = 4x^2 + 5x - 2$. Построим график $y = f(x)$.



$y = -2$; $4x^2+5x = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{5}{4} \end{array}\right.$; $x_0 = \dfrac{0-\frac{5}{4}}{2} = -\frac{5}{8}$;

$y_0 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) - 2 = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 2 = -3\frac{9}{16}$.

Получили точку $D\left(-\frac{5}{8}; -3\frac{9}{16}\right)$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = 1 - 2{,}5 - 2 = -3{,}5.$

$f(2) = 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2 - 2 = 24;$

Получили точки $A\left(-\frac{1}{2}; -3{,}5\right)$ и $B(2; 24)$.

б) $2x^2 - 3x - 2 < 0; \quad f(x) = 11x + 2.$

При $x = 0$ получим точку $C(0; 2)$;

при $x = 2$ получим точку $B(2; 24)$.

Тогда очевидно, что из графических соображений следует ответ.

Ответ: уравнение $|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a = -3\frac{9}{16}$ — один корень.
2. При $a > -3\frac{9}{16}$ — два корня.
3. При $a < -3\frac{9}{16}$ — корней нет.

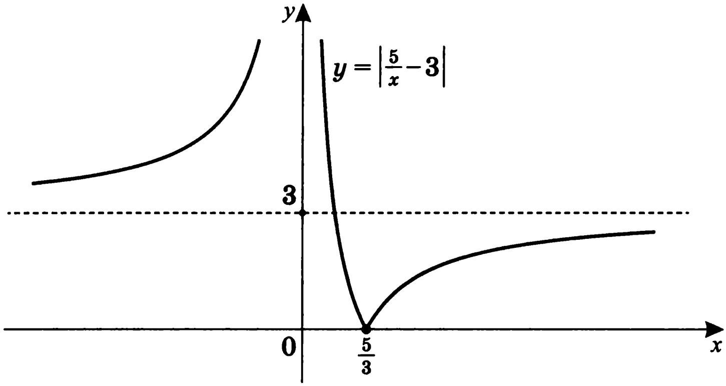
6. Сколько корней имеет уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ в зависимости от значения параметра a?

Положим $f(x) = \left|\frac{5}{x} - 3\right|; \quad \varphi(x) = ax - 2$. Тогда данное уравнение равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

а) Сначала построим график $y = f(x) = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$.

Для этого последовательно построим графики $y = \frac{5}{x}$, $y = \frac{5}{x} - 3$, $y = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$, где $y = 3$ — горизонтальная асимптота.

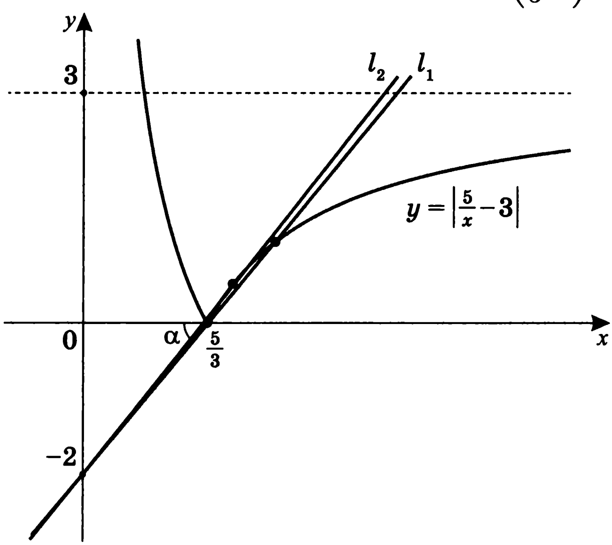
В результате получится такой график:



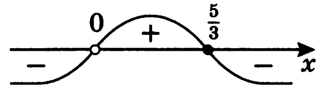
Учтем, что уравнение $y = ax - 2$ при каждом значении параметра a есть уравнение прямой.

Отметим, что все эти прямые образуют пучок прямых, проходящих через точку $(0; -2)$.

б) Теперь построим в одной системе координат график $y = f(x)$ и графики $y = \varphi(x)$ в случае касания и в случае прохождения через точку $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.



Пусть $t(x) = \frac{5}{x} - 3$,



т. е. на $\left[\frac{5}{3}; \infty\right)$ $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = 3 - \frac{5}{x}$.

1. Случай прохождения через точку $\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

   l_1: $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-2}{\frac{5}{3}}\right| = \frac{6}{5}$, т. е. l_1: $y = \frac{6}{5}x - 2$.

2. Случай касания $y = ax - 2$ и кривой $y = 3 - \frac{5}{x}$.

   $ax - 2 = 3 - \frac{5}{x}$; $\quad ax^2 - 5x + 5 = 0$;

   $D = 25 - 20a = 0$; $\quad a = \frac{5}{4}$.

   Значит, l_2: $y = \frac{5}{4}x - 2$.

Теперь очевидно, что из графических соображений следует ответ.

Ответ: уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a > \frac{5}{4}$ или $0 < a < \frac{6}{5}$ — один корень;
2. При $a = \frac{5}{4}$ или $a = \frac{6}{5}$ — два корня;
3. При $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ — три корня;
4. При $a < 0$ — корней нет.

7. Выясните, сколько корней имеет уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ в зависимости от параметра a.

Положим $f(x) = |x^2+x+a|$ и $\varphi(x) = 10-|x|$ и попробуем графически решить уравнение $f(x) = \varphi(x)$.

$y = x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$,

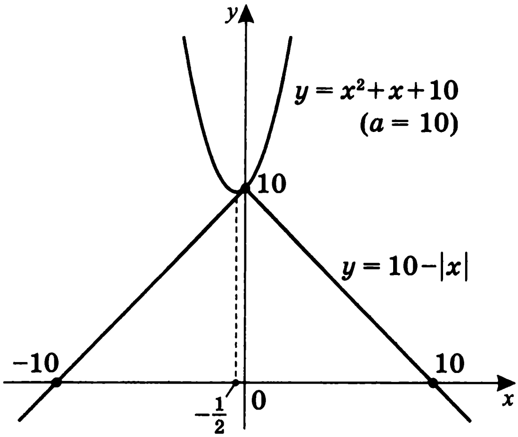
значит, $x = -\frac{1}{2}$ — ось симметрии графиков $y = x^2+x+a$ и $y = |x^2 + x + a|$.

$x_в = -\frac{1}{2}$; $\quad y_в = a - \frac{1}{4}$,

т. е. $D\left(-\frac{1}{2}; a - \frac{1}{4}\right)$ — вершина параболы.

а) Пусть $a \geqslant 0$.

1. Пусть $a = 10$.



$$f(0) = |0^2 + 0 + a| = |a|; \quad \varphi(0) = 10 - |0| = 10,$$

т. е. $|a| = 10$; $a = 10$.

$$f(x) = x^2 + x + 10 = (x + 0{,}5)^2 + 9{,}75.$$

$$f(-0{,}5) = 9{,}75, \quad \varphi(-0{,}5) = 9{,}5,$$

т. е. $\varphi(-0{,}5) < f(-0{,}5)$.

Итак, при $a = 10$ существует единственный корень уравнения $|x^2 + x + a| + |x| = 10$.

Можно в этом убедиться, и непосредственно решая уравнение $x^2 + x + 10 = 10 - |x|$ $(x \leqslant 0)$.

2. Пусть $a > 10$. Тогда корней нет.

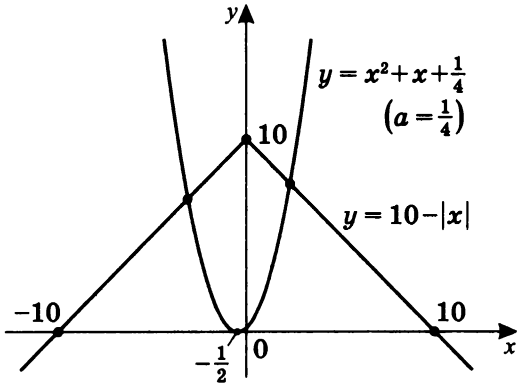
3. Пусть $0 \leqslant a < 10$.

Выясним, при каких значениях a график параболы $y = x^2 + x + a$ касается оси абсцисс.

Так как $x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{1}{4}$,

то если $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$,

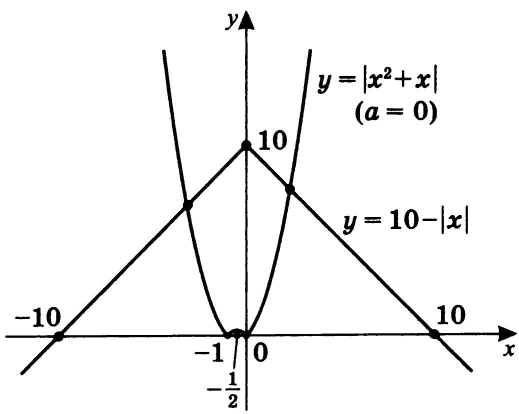
тогда $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0; \quad a = \frac{1}{4}$.



Очевидно, что при $a = \frac{1}{4}$ график параболы $y = x^2 + x + a$ касается оси абсцисс.

Значит, при $\frac{1}{4} \leqslant a < 10$ существуют два корня.

При $0 \leqslant a < \frac{1}{4}$ также имеются только два корня:



Вывод: при $0 \leqslant a < 10$ существуют только два корня.

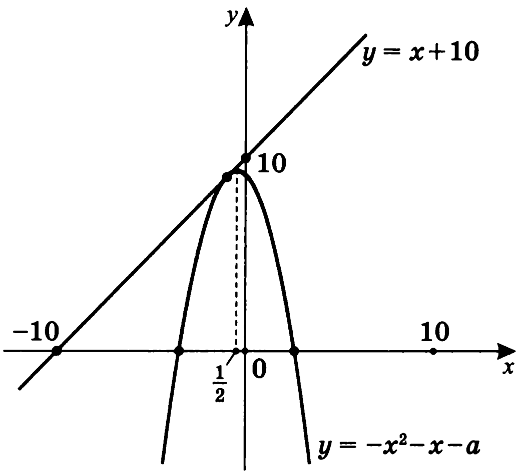
б) Пусть $a < 0$. Рассмотрим случаи касания графиков.

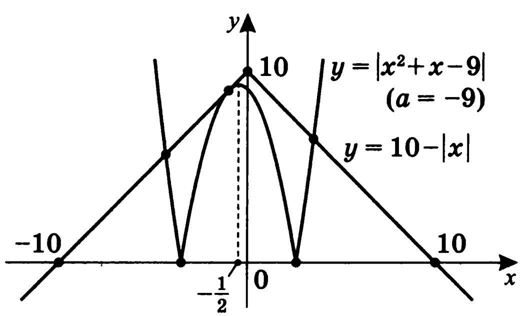
1. Рассмотрим график параболы $y = -x^2 - x - a$ и график прямой $y = x + 10$ ($|x| = -x$ при $x < 0$).

   $-x^2 - x - a = x + 10;\quad x^2 + 2x + a + 10 = 0;$

   $D = 1 - a - 10 = 0;\quad a = -9.$

   Это случай касания графика $y = |x^2 + x - 9|$ левой ветвью графика $y = 10 - |x|$.





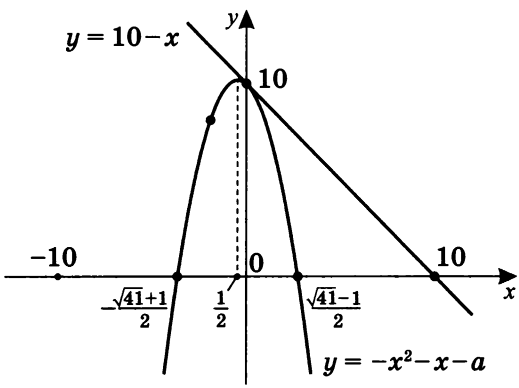
Значит, при $a = -9$ существуют три корня, а при $-9 < a < 0$ — только два корня.

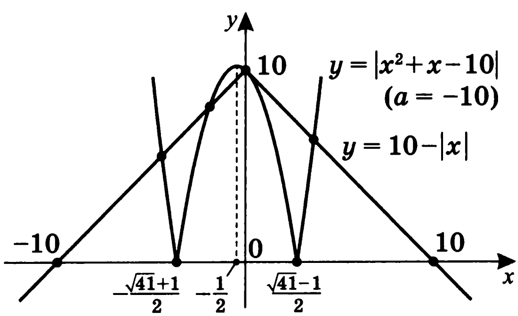
2. Рассмотрим случай касания графика параболы $y = -x^2 - x - a$ прямой $y = 10 - x$.

$-x^2 - x - a = 10 - x; \quad x^2 = -a - 10.$

При $a = -10$ существует единственная точка касания $(0; 10)$, т. е. $x = 0$ — корень уравнения.

$y = -x^2 - x + 10 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{41}-1}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{41}+1}{2} \end{array}\right.$ — абсциссы точек перегиба графика $y = |x^2 + x - 10|$.

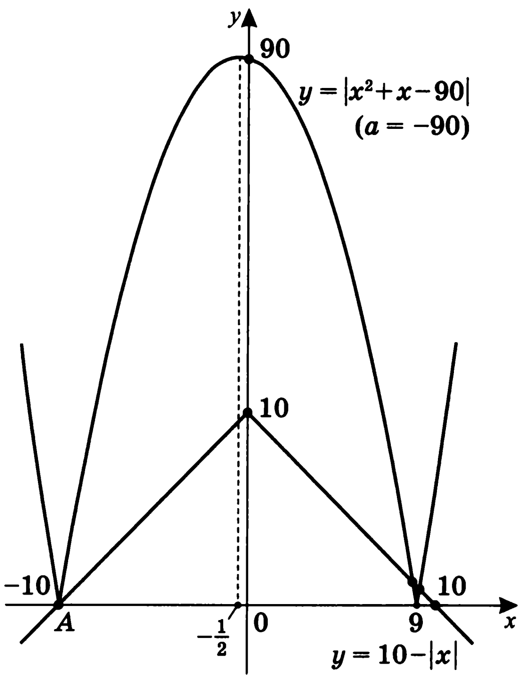




Значит, при $a = -10$ существуют четыре корня (см. график выше).

Вывод: при $-10 \leqslant a < -9$ уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет только четыре корня.

в) Рассмотрим случай, при котором точка перегиба графика $y = |x^2 + x + a|$ совпадает с точкой пересечения графиком $y = 10 - |x|$ оси абсцисс — $A(-10; 0)$.



$f(-10) = |x^2 + x + a| = 0,$

т. е. $|100 - 10 + a| = 0;$

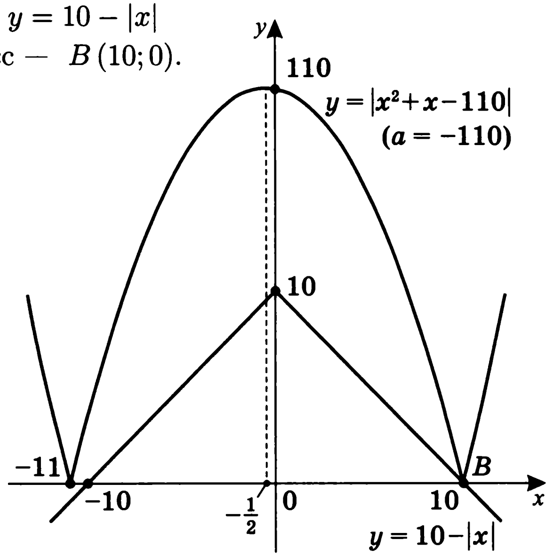
$a = -90.$

Тогда при $|x^2 + x - 90| = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -10 \end{array}\right.$.

Значит, при $a = -90$ существуют три корня.

Таким образом, при $-90 < a < -9$ существуют четыре корня.

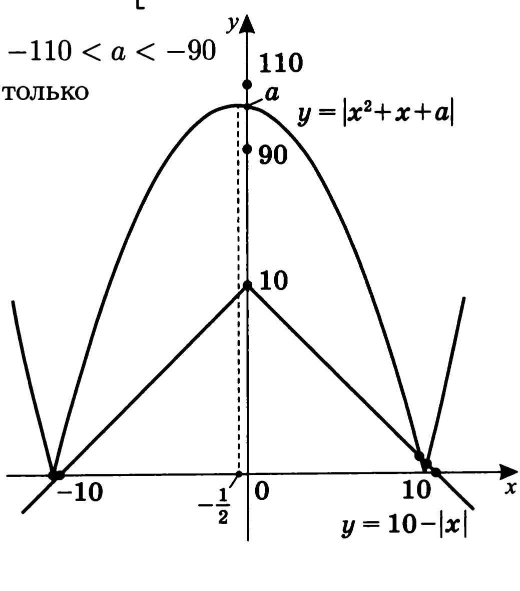
г) Рассмотрим случай, при котором точка перегиба графика $y = |x^2 + x + a|$ совпадает с точкой пересечения графиком $y = 10 - |x|$ оси абсцисс — $B\,(10; 0)$.



$f(10) = |10^2 + 10 + a| = 0;$

$a = -110$ — существует один корень, так как если $|x^2 + x - 110| = 0$, то $\left[\begin{array}{l} x = -11 \\ x = 10 \end{array}\right.$.

Значит, при $-110 < a < -90$ существуют только два корня.



е) Рассмотрим случай, при котором абсциссы точек перегиба $y = |x^2 + x + a|$ находятся вне отрезка $[-10; 10]$. Очевидно, при таком условии точек пересечения графиков $y = |x^2 + x + a|$ и $y = 10 - |x|$ нет.

Значит, при $a < -110$ корней нет.

Ответ: уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a > 10$ — корней нет.
2. При $a = 10$ — один корень.
3. При $-9 < a < 10$ — два корня.
4. При $a = -9$ — три корня.
5. При $-90 < a < -9$ — четыре корня.
6. При $a = -90$ — три корня.
7. При $-110 < a < -90$ — два корня.
8. При $a = -110$ — один корень.
9. При $a < -110$ — корней нет.

Примечание. Разумеется, в чистом виде такие задачи на экзаменах не предлагаются. Но отдельные вопросы по данному уравнению вполне возможны. Например:

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет единственный корень?
2. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет два корня?
3. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет три корня?
4. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 + x + a| + |x| = 10$ имеет четыре корня?

Домашняя творческая работа-исследование

Сколько корней имеет уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ в зависимости от значения параметра a?

Самостоятельная работа 9

1. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

2. Определите графически, сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:
$(5 - |x|)(x + 1) = a$.

3. При каких значениях параметра a уравнение
$|x^2 - x + a| + |x| = 9$ имеет:
а) нечетное число корней;
б) четное число корней?

4. Сколько корней имеет уравнение $a|x - 3|(x + 2) = 5$ в зависимости от неотрицательного значения параметра a?

5. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a: $\left|\frac{5}{x-1} - 3\right| = ax - (a + 2)$?

6. При каких значениях параметра a уравнение
$|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет ровно три корня?

Практикум 12

1. Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + a \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{cases}$$
в зависимости от параметра a?

2. Сколько решений существует у системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$ в зависимости от положительного значения параметра a?

3. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0 \\ x^2 - 2a(x+y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$$
имеет единственное решение?

4. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} 1 - |x-1| = 5|y| \\ 25y^2 + 4a = 2x - x^2 - 1 \end{cases}$ имеет четыре решения?

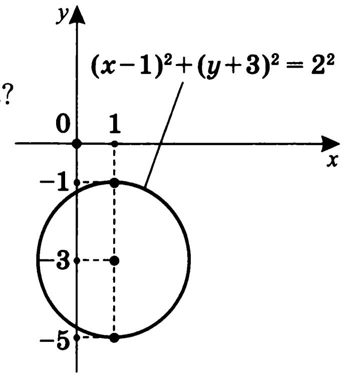
Примечание. Отметим, что большое количество примеров на графическое решение уравнений с параметром есть в книге Шахмейстер А. Х. Задачи с параметрами на экзаменах. СПб.; М., 2011, 2015. С. 19, 20, 116, 135, 165, 168, 189, 191, 192, 193, 194, 196, 197, 201, 202, 213, 215, 216, 223, 224, 228, 229, 231, 232, 233, 235, 238, 245.

Решение практикума 12

1. Сколько решений имеет система уравнений

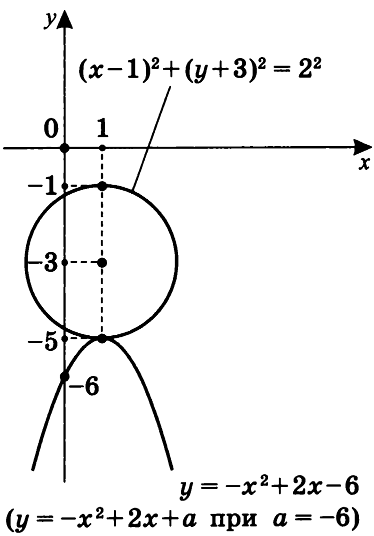
$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + a \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{cases}$$

в зависимости от параметра a?



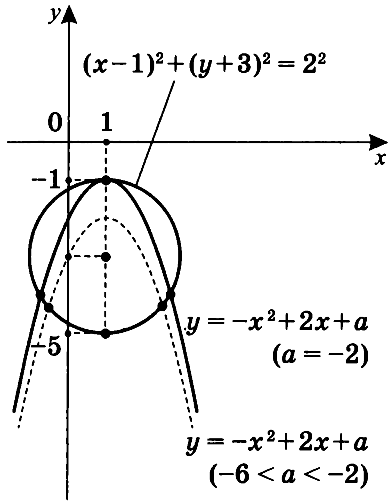
Построим график уравнения $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$ — это окружность с центром в точке $(1; -3)$ и радиусом 2.

а) Так как $y = -x^2 + 2x + a$ — парабола, ветви которой направлены вниз, и ее уравнение представимо в виде $y = -(x-1)^2 + a + 1$, то при $a+1 = -5$ ($a = -6$) существует единственная точка пересечения окружности и параболы. Эта точка имеет координаты $(1; -5)$, и это единственное решение.



б) При $a+1=-1$ ($a=-2$) существуют 3 корня, т. е. есть три решения.

в) При $-6<a<-2$ существуют 2 корня (парабола показана пунктиром), т. е. есть два решения.



г) Найдем случай касания параболы окружности в двух точках.

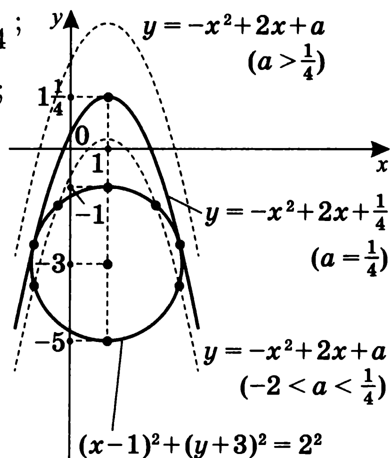
$$\begin{cases} y=-(x-1)^2+a+1 \\ (x-1)^2+(y+3)^2=4 \end{cases};$$

$a+1-y+(y+3)^2=4;$

$y^2+5y+a+6=0;$

$D=25-4a-24=0;$

$a=\frac{1}{4}.$



Значит, при $a=\frac{1}{4}$ существуют 2 точки касания, т. е. два решения.

При $a>\frac{1}{4}$, очевидно, точек пересечения параболы с окружностью нет (этот случай обозначен верхним пунктиром).

д) При $-2<a<\frac{1}{4}$ существуют 4 точки пересечения (нижняя пунктирная парабола), т. е. есть четыре решения.

Ответ: система уравнений $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + a \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2 \end{cases}$

в зависимости от параметра a имеет:

1. При $a > \frac{1}{4}$ — решений нет.
2. При $a = \frac{1}{4}$ — три решения.
3. При $-2 < a < \frac{1}{4}$ — четыре решения.
4. При $a = -2$ — три решения.
5. При $-6 < a < -2$ — два решения.
6. При $a = -6$ — одно решение.
7. При $a < -6$ — решений нет.

Примечание. Очевидно, что не любой график уравнения является графиком функции (например, уравнение окружности, уравнение параболы $y^2 = x$ и т. д.). Более подробно см.: Шахмейстер А. Х. Множества. Функции. Последовательности. СПб.; М., 2014. С. 85–92.

2. Сколько решений существует у системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$ в зависимости от положительного значения параметра a?

Построим график уравнения

$2|x| + |y| = 4.$

I случай $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

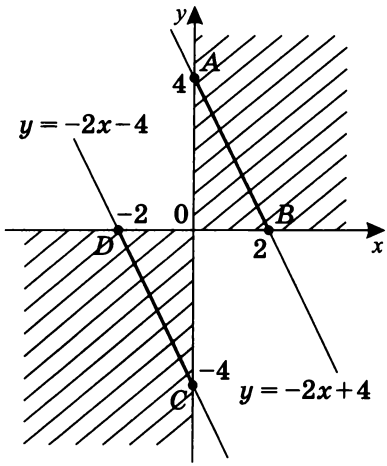
x	y
0	4
2	0

$A\,(0;4)$; $B\,(2;0)$

II случай $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ -2x - y = 4 \end{cases}$

x	y
0	-4
-2	0

$C\,(0;-4)$. $D\,(-2;0)$



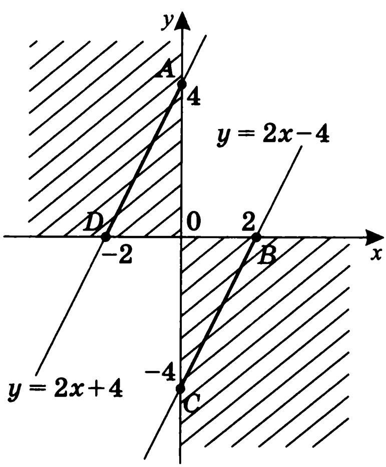
III случай $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

x	y	
0	−4	$C\,(0;-4)$;
2	0	$B\,(2;0)$

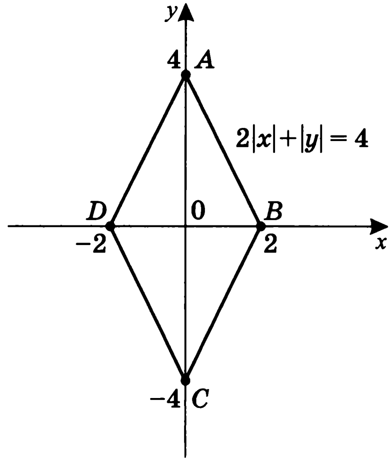
IV случай $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

x	y	
0	4	$A\,(0;4)$
−2	0	$D\,(-2;0)$

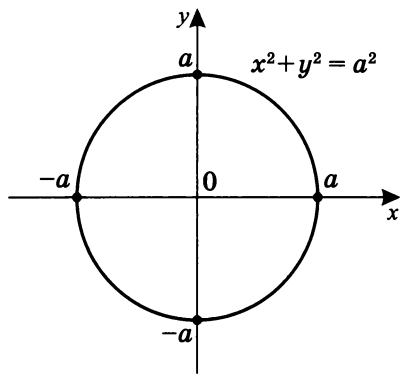
.



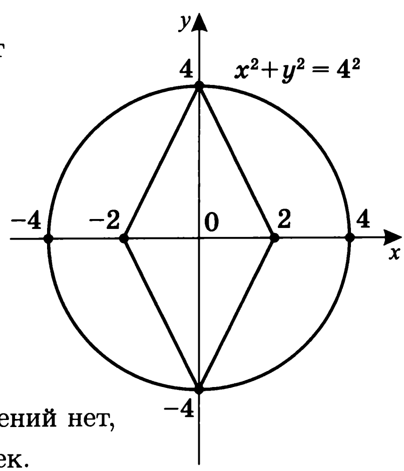
Собирая, получим график уравнения $2|x| + |y| = 4$:



Рассмотрим график уравнения $x^2 + y^2 = a^2$. Так как по условию $a > 0$, то это окружность с центром в начале координат и радиусом a.

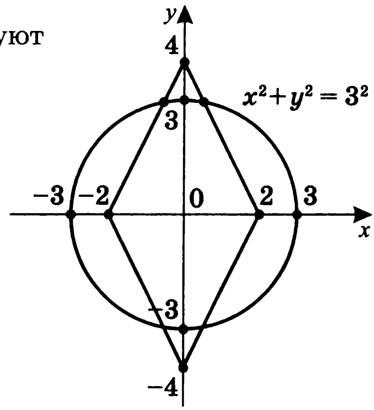


а) При $a = 4$ существуют 2 решения, так как имеются две общие точки:

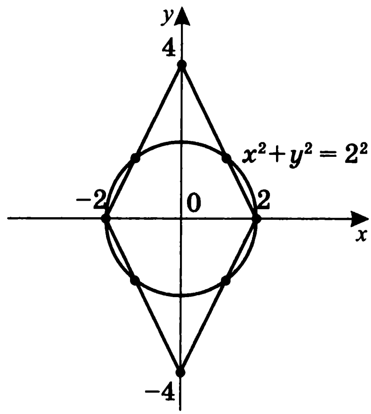


Значит при $a > 4$ решений нет, так как нет общих точек.

б) При $2 < a < 4$ существуют 4 решения, так как имеются четыре общие точки.



в) При $a = 2$ существуют 6 решений, так как имеются шесть общих точек.



г) Рассмотрим случай касания окружностью сторон ромба.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD;$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16.$

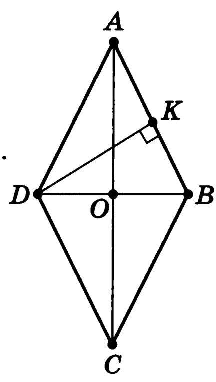
$2r_{\text{в}} = DK$, но $S_{ABCD} = DK \cdot AB.$

$2r_{\text{в}} = \frac{S_{ABCD}}{AB}$; $r_{\text{в}} = \frac{16}{2AB} = \frac{8}{AB}.$

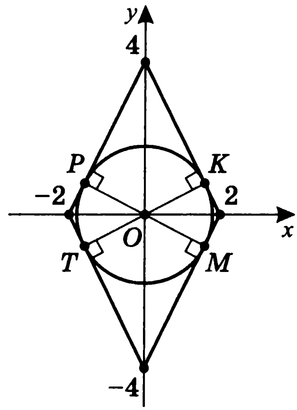
$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2};$

$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$

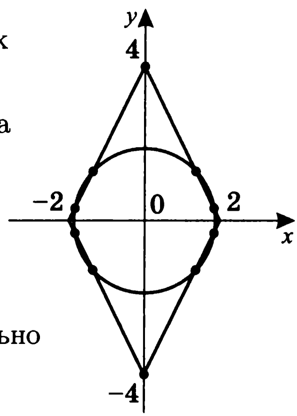
Значит $r_{\text{в}} = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}.$



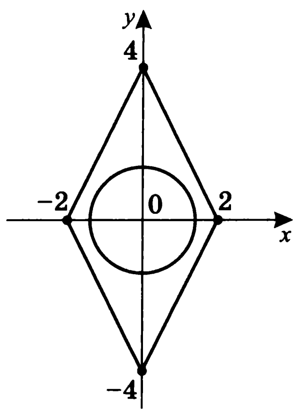
Таким образом, при
$a = r_{\text{в}} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$
существуют 4 решения,
так как имеются четыре
общие точки.



д) При $\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < 2$
существуют 8 решений, так как
имеются восемь общих точек.
Например, пусть $a = 1{,}9$, тогда
$\frac{16}{5} < 1{,}9^2 < 2^2$, и система
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1{,}9^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$
имеет восемь решений.
Убедитесь в этом, самостоятельно
аналитически решив систему
уравнений.



е) При $a < \frac{4}{5}\sqrt{5}$ решений нет,
так как общих точек нет.



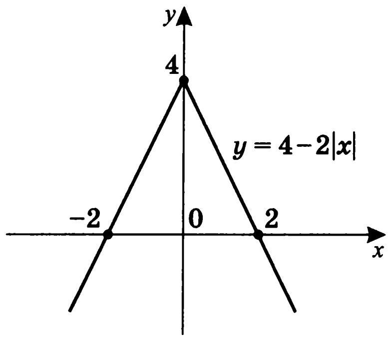
Ответ: система уравнений
$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$ в зависимости
от положительного значения
параметра a имеет:

1. При $a > 4$ — решений нет.
2. При $a = 4$ — два решения.

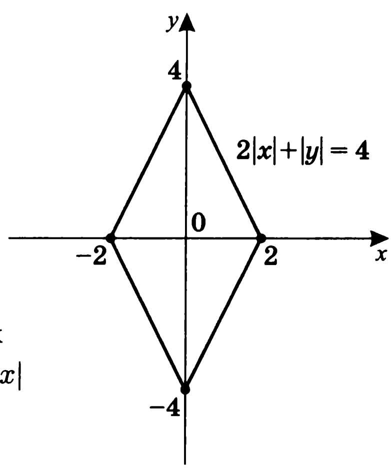
3. При $2 < a < 4$ — четыре решения.
4. При $a = 2$ — шесть решений.
5. При $\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < 2$ — восемь решений.
6. При $a = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ — четыре решения.
7. При $a < \frac{4}{5}\sqrt{5}$ — решений нет.

Примечание. График уравнения $2|x| + |y| = 4$ можно построить проще, используя преобразование графиков.

а) Сначала построим график $y = 4 - 2|x|$.



б) Так как $|y|$ сохраняет график в верхней полуплоскости и симметрично относительно оси абсцисс отражает его в нижнюю полуплоскость, то график $|y| = 4 - 2|x|$ будет выглядеть так:



Очевидно, что график уравнения $|y| = 4 - 2|x|$ не может быть функциональным.

3. При каких положительных значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0 \\ x^2 - 2a(x+y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

а) Так как известно, что графиком уравнения второй степени с двумя переменными в содержательном (не вырожденном) смысле является либо парабола, либо гипербола, либо эллипс (в частном случае, окружность), то попытаемся алгебраически преобразовать уравнения системы, чтобы понять, с какими кривыми мы имеем дело. (В вырожденном случае это пучок прямых, например, $x^2 = y^2$.)

1. $x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17$ можно представить в виде
$\underline{x^2 - 6x + 9} - 9 + \underline{y^2 - 6y + 9} - 9 + 17 = 0,$
т. е. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$.

   Очевидно, в этом случае мы имеем дело с окружностью с центром в точке $O\,(3;3)$ радиуса 1.

2. $x^2 - 2a(x+y) + y^2 + a^2 = 0;$
$x^2 - 2ax - 2ay + y^2 + a^2 = 0;$
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2;$
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2.$

   Очевидно, что это тоже окружность — с центром в точке $O_1\,(a;a)$ и радиуса a.

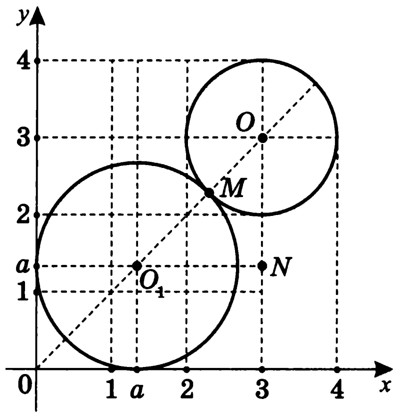
3. Таким образом, исходная система приняла вид:
$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \end{cases}.$

   Значит, мы имеем дело с двумя окружностями. Тогда единственное решение возможно только в случае касания этих окружностей.

б) Построим графики уравнений $(x-3)^2+(y-3)^2=1$ и $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$.

Отметим, что окружность $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ при всех a касается оси ординат и оси абсцисс, т. е. центр принадлежит прямой $y=x$.

Для $(x-3)^2+(y-3)^2=1$ $O\,(3;3)$ также принадлежит прямой $y=x$.

1. 

Из $\triangle O_1ON$ $\quad O_1N^2+ON^2=O_1O^2$,

где $O_1N=3-a$; $\quad ON=3-a$.

Здесь неявно задано условие $a<3$.

$O_1O=O_1M+MO=a+1$.

Тогда

$2(3-a)^2=(a+1)^2$;

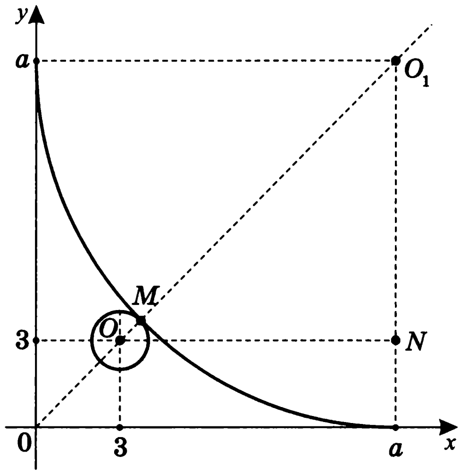
$18-12a+2a^2=a^2+2a+1$;

$a^2-14a+17=0$;

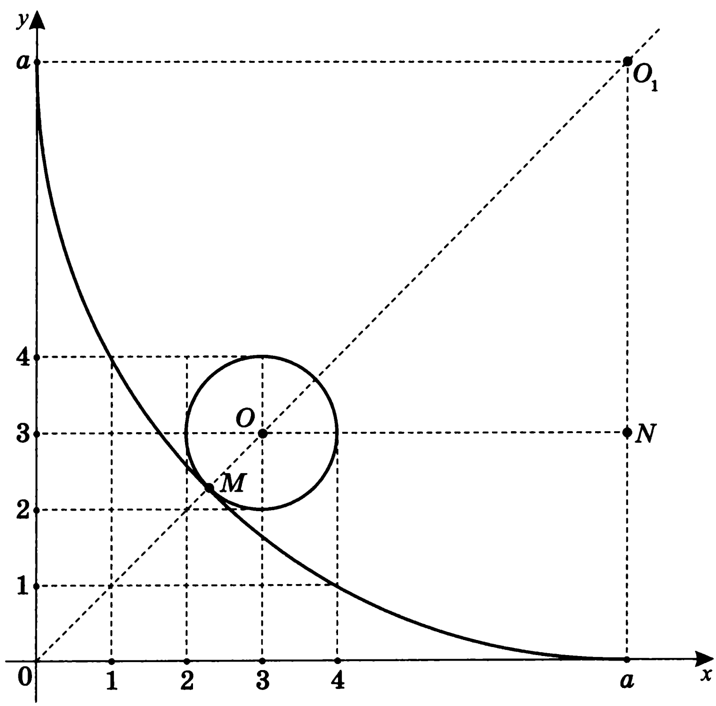
$a_{1,2}=7\pm\sqrt{49-17}=7\pm4\sqrt{2}$.

Очевидно, что $a=7-4\sqrt{2}$ — иллюстрация случая *внешнего* касания, который изображен на рисунке выше.

2. Рассмотрим случай $a > 3$. При $a = 7 + 4\sqrt{2}$ также существует внешнее касание:

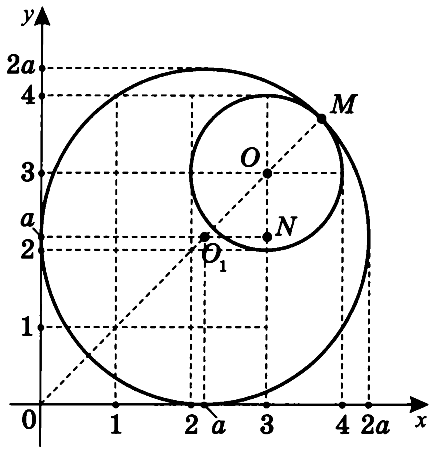


3. Возможны случаи внутреннего касания.



Из $\triangle OO_1N$ (здесь неявно задано условие $a > 3$):
$ON = a - 3;\quad O_1N = a - 3;\quad OO_1 = a - 1;$
$ON^2 + O_1N^2 = OO_1^2;\quad 2(a-3)^2 = (a-1)^2;$
$a^2 - 10a + 17 = 0;\quad a_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{2}.$
При $a = 5 + 2\sqrt{2}$ см. рис. на с. 287, п. 3.

4. Рассмотрим случай $a < 3$. При $a = 5 - 2\sqrt{2}$ см. данный рисунок:



Ответ: система уравнений $\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 - 6y + 17 = 0 \\ x^2 - 2a(x+y) + y^2 + a^2 = 0 \end{cases}$

в зависимости от значения параметра a:

при $a = 7 \pm 4\sqrt{2}$ имеет единственное решение, связанное с внешним касанием данных окружностей;

при $a = 5 \pm 2\sqrt{2}$ имеет единственное решение, связанное с внутренним касанием данных окружностей.

Примечание 1.

При $a \in \left(7-4\sqrt{2}; 5-2\sqrt{2}\right) \cup \left(5+2\sqrt{2}; 7+4\sqrt{2}\right)$ существует больше одного решения.

При $a \in \left(-\infty; 7-4\sqrt{2}\right) \cup \left(5-2\sqrt{2}; 5+2\sqrt{2}\right) \cup \left(7+4\sqrt{2}; \infty\right)$ решений нет (проверьте это сами).

Примечание 2. Возможно и иное решение.

Пусть $O_1(x_1; y_1)$ — центр окружности радиуса R_1; $O_2(x_2; y_2)$ — центр окружности радиуса R_2.

Так как единственное решение возможно только если расстояние между центрами окружностей равно либо сумме их радиусов, либо их разности, то в общем виде

$$\left[\begin{array}{l}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 + R_2)^2\\ (x_1 - x^2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (R_1 - R_2)^2\end{array}\right. .$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l}(x - 3 - x + 1)^2 + (y - 3 - x + a)^2 = (a + 1)^2\\ (x - 3 - x + 1)^2 + (y - 3 - x + a)^2 = (a - 1)^2\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}2(a - 3)^2 = (a + 1)^2\\ 2(a - 3)^2 = (a - 1)^2\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}a^2 - 14a + 17 = 0\\ a^2 - 10a + 17 = 0\end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l}a = 7 + 4\sqrt{2}\\ a = 7 - 4\sqrt{2}\\ a = 5 + 2\sqrt{2}\\ a = 5 - 2\sqrt{2}\end{array}\right. ;$$

$$\left\{7 \pm 4\sqrt{2}; 5 \pm 2\sqrt{2}\right\}.$$

Решение домашней творческой работы-исследования

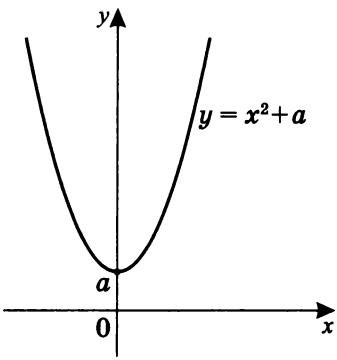
Рассмотрим графоаналитический способ решения.

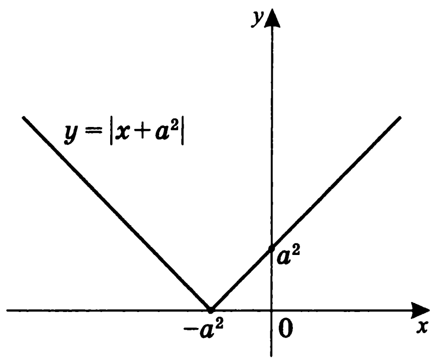
Положим $f(x) = |x + a^2|$; $g(x) = |x^2 + a|$.

Тогда необходимо графически решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = |x + a^2| \\ y = |x^2 + a| \end{cases}.$$

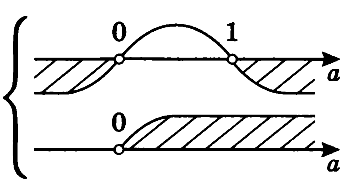
I. При $\boldsymbol{a > 0}$ $|x^2 + a| = x^2 + a > 0$ (парабола находится в верхней полуплоскости), а график $y = |x + a^2|$ касается только левой части оси абсцисс.



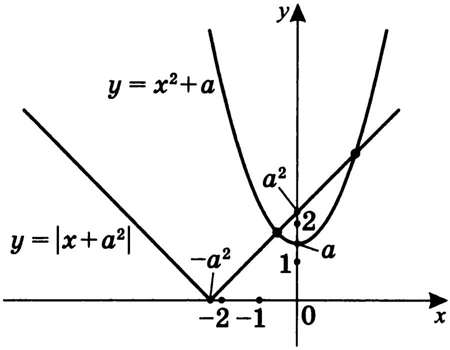


1. Пусть точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *выше* соответствующей точки пересечения графика $y = x^2 + a$ с осью ординат.

   Значит, $0 < a < a^2$; $\begin{cases} a(1-a) < 0 \\ a > 0 \end{cases}$.



$a > 1$.



Очевидно, что при этих значениях a существуют два корня, так как имеются две общие точки.

Эту гипотезу можно иллюстрировать. Рассмотрим удобное значение $a = 2$ $(a > 1)$. Тогда получается уравнение:

$$|x + 4| = x^2 + 2; \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = x + 4 \\ x^2 + 2 = -x - 4 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - x - 2 = 0 & x = 2;\ x = -1 \\ x^2 + x + 6 = 0 & D < 0 \end{array}\right.$$

Гипотеза подтвердилась. Попробуйте сами доказать эту гипотезу в общем виде

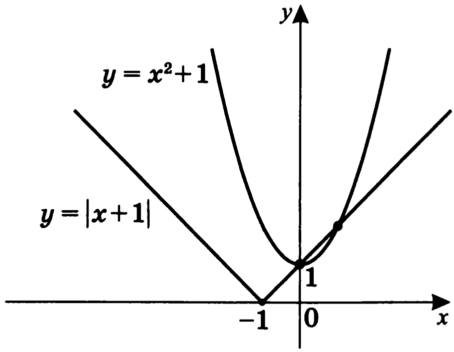
2. Пусть точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *совпадает* с точкой пересечения оси ординат графиком параболы $y = x^2 + a$.

Тогда $\begin{cases} a^2 = a \\ a > 0 \end{cases}; \quad a = 1.$

Рассмотрим наличие и количество корней при $a = 1$.

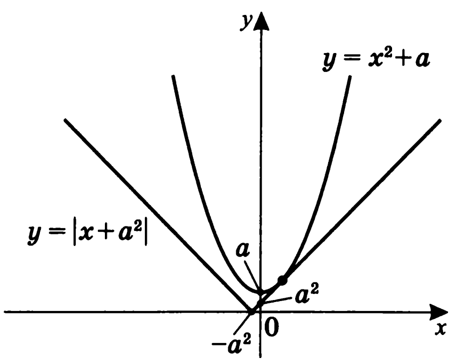
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}; \quad x^2 + 1 = x + 1; \quad x^2 = x; \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.,$$

значит и при $a = 1$ существуют два корня $(x = 0$ и $x = 1)$.



3. Рассмотрим случай касания правой ветвью графика $y = |x + a^2|$ параболы $y = |x^2+a|$ — в данном случае $y = x^2 + a$ $(a > 0)$.

   Тогда точка пересечения графика $y = |x+a^2|$ с осью ординат *ниже* точки пересечения графика $y = x^2+a$ с осью ординат. Более подробно остальные случаи рассмотрим в следующем пункте.



   По сути, нам нужно найти точку касания прямой $y = x + a^2$ с графиком уравнения параболы $y = x^2 + a$.

   В данном случае прямая $y = x+a^2$ имеет ровно одну общую точку с графиком параболы $y = x^2+a$, тогда $x + a^2 = x^2 + a$; $x^2 - x + a - a^2 = 0$;

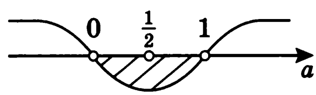
$D = 1 - 4a + 4a^2$. $D = 0$ при $a = \frac{1}{2}$ $(x_1 = x_2)$, т. е. при $a = \frac{1}{2}$ существует один корень.

Это возможно только для графиков уравнений

$y = x^2 + \frac{1}{2}$ и $y = x + \frac{1}{4}$.

4. Теперь рассмотрим остальные случаи, при которых точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *ниже* точки пересечения графика $y = |x^2 + a|$ с осью ординат,

т. е. $\begin{cases} 0 < a^2 < a \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$



$$\begin{cases} a(a-1) < 0 \\ a > 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}; \quad 0 < a < \frac{1}{2} \text{ или } \frac{1}{2} < a < 1.$$

С другой стороны, рассмотрим случаи, при которых $x^2+a < x+a^2$, т. е. необходимо выяснить, при каких a существуют точки графика $y = x^2+a$ (параболы) *ниже* соответствующих точек графика $y = x+a^2$ (прямой) (т. е. имеющие одну и ту же абсциссу). См. чертеж на с. 295, 296, 297.

$x^2 - x + a - a^2 < 0$;

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a+4a^2}}{2} = \frac{1 \pm (2a-1)}{2}; \quad \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 1-a \end{array}\right. .$$

При $x_1 \neq x_2$, следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \text{если } 1-a > a, \text{ то } a < x < 1-a, \text{ при } 0 < a < \frac{1}{2}; \\ \text{если } 1-a < a, \text{ то } 1-a < x < a, \text{ при } \frac{1}{2} < a < 1. \end{array}\right.$$

5. Выясним, при каких значениях

$a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ существуют три корня.

Это возможно только если $x^2 + a = |x + a^2|$ имеет три корня, что выполняется, если график $y = x^2 + a$ касается левой ветви графика $y = |x + a^2|$ и пересекается с его правой ветвью (см. график на с. 295).

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} x^2 + a = x + a^2 \\ x^2 + a = -(x + a^2) \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x + a - a^2 = 0 \\ x^2 + x + a + a^2 = 0 \end{array}\right.$; $\quad \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = 1 - a \\ D = 1 - 4a - 4a^2 = 0 \end{array}\right. \left(a \neq \frac{1}{2}\right)$;

$4a^2 + 4a - 1 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{-2+2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0, \text{ и } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right); \\ a = \frac{-2-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2} < 0 \text{ — не подходит } (a > 0). \end{array}\right.$

Значит при $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ $\quad x_1 = x_2 = \frac{-1\pm 0}{2} = -\frac{1}{2}$.

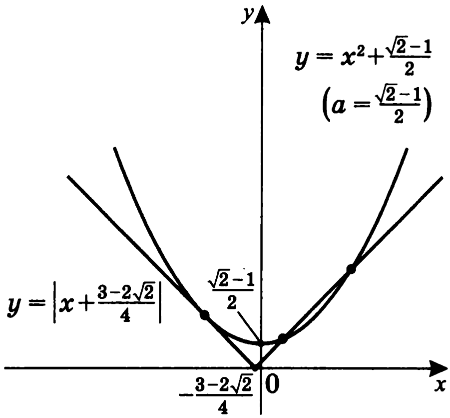
Таким образом, при $D = 0$ $\quad x = -\frac{1}{2}$,

и при $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ существуют три корня:

$$\left[\begin{array}{l} x = a = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ x = 1 - a = 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Так как $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, то получается, что графики уравнений $y = x^2 + \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ и $y = x + \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$

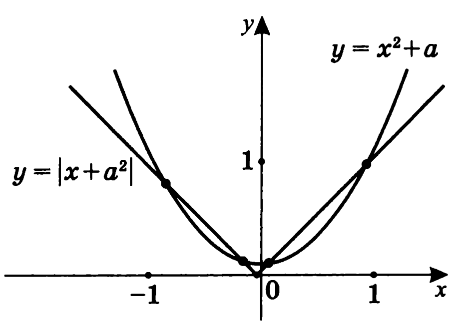
$\left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}\right)$ имеют три общих точки.



6. При $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, похоже, существуют четыре корня, так как, возможно, график $y = x^2$ опускается вниз на a быстрее, чем график $y = |x|$ сдвигается влево на a^2 (так как $a^2 < a$ на $\left(0; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$).

Можно привести и другие обоснования.

При $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ график $y = x^2 + a$ пересекает левую ветвь графика $y = |x + a^2|$ в двух точках. Далее при $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{1}{2}$ правая ветвь $y = |x + a^2|$ пересекает график $y = x^2 + a$ также в двух точках.



Проверим эту гипотезу.

$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2$ (с недостатком), тогда

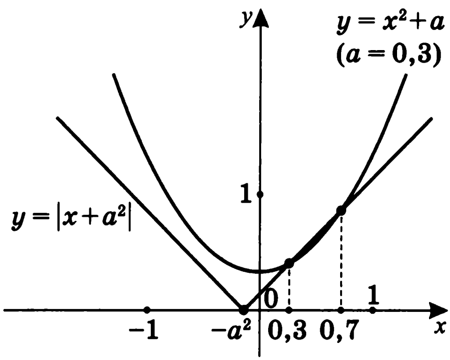
$|x+0{,}04| = x^2+0{,}2;\quad \left[\begin{array}{l} x^2+0{,}2 = x+0{,}04 \\ x^2+0{,}2 = -x-0{,}04 \end{array}\right.;$

$\left[\begin{array}{l} x^2-x+0{,}16=0 \\ x^2+x+0{,}24=0 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} D=1-0{,}64=0{,}36>0 \\ D=1-0{,}96=0{,}04>0 \end{array}\right..$

Итак, действительно в этом случае существуют четыре корня — $\{-0{,}6; -0{,}4; 0{,}3; 0{,}8\}$.

7. При $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < a < \frac{1}{2}$, похоже, существуют два корня.

Проверим эту гипотезу.



$\frac{\sqrt{2}-1}{2} < 0{,}3 < \frac{1}{2}$, т. е. $|x+0{,}09| = x^2+0{,}3;$

$\left[\begin{array}{l} x^2+0{,}3 = x+0{,}09 \\ x^2+0{,}3 = -x-0{,}09 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} x^2-x+0{,}21=0 \\ x^2+x+0{,}39=0 \end{array}\right..$

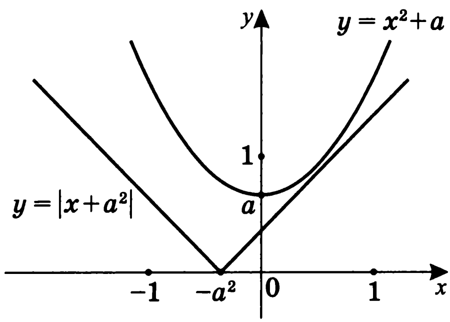
$\left[\begin{array}{lll} D=1-0{,}84>0 \text{ — } 2 \text{ корня} & & (x=0{,}3,\ x=0{,}7) \\ D=1-1{,}56<0 \quad \emptyset & & (\text{корней нет}) \end{array}\right..$

Действительно, существуют только два корня (см. иллюстрацию на чертеже выше при $a = 0{,}3$).

8. Рассмотрим случай $\frac{1}{2} < a < 1$.

Так как, похоже, график параболы $y = x^2$ сдвигается вверх на a $(a > 0)$ быстрее, чем график прямой $y = |x|$ сдвигается влево на a^2, а при $a = \frac{1}{2}$ график $y = x^2 + \frac{1}{2}$ касается прямой $y = x + \frac{1}{4}$, то общих точек графиков в этом случае нет, а значит, и корней нет.

Проверим эту гипотезу.



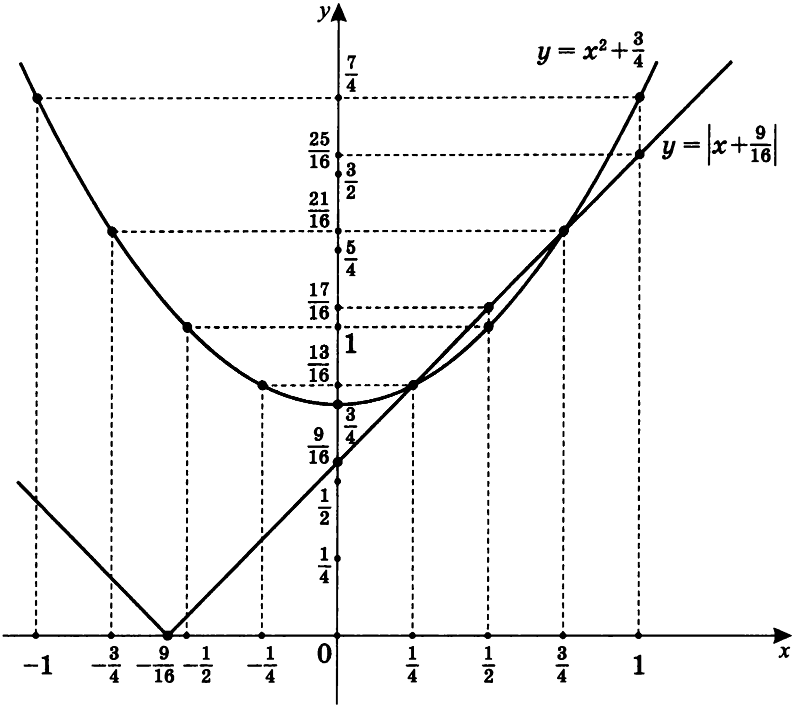
Пусть $a = \frac{3}{4}$, где $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$, тогда $\left|x + \frac{9}{16}\right| = x^2 + \frac{3}{4}$;

$$\left[\begin{aligned} x^2 + \frac{3}{4} &= x + \frac{9}{16} \\ x^2 + \frac{3}{4} &= -x - \frac{9}{16} \end{aligned}\right.; \qquad \left[\begin{aligned} 16x^2 - 16x + 3 = 0 \\ 16x^2 + 16x + 21 = 0 \end{aligned}\right.;$$

$$\left[\begin{aligned} &D = 8^2 - 3 \cdot 16 > 0 \text{ — два корня: } \left(x = \frac{1}{4},\ x = \frac{3}{4}\right) \\ &D = 8^2 - 21 \cdot 16 < 0 \text{ — } \emptyset \text{ (корней нет)} \end{aligned}\right..$$

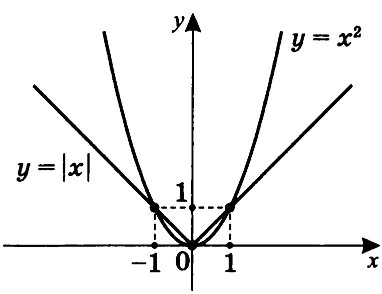
Таким образом, гипотеза и картинка ложны, и существуют два корня.

Построим график $y = \left|x + \frac{9}{16}\right|$ и $y = x^2 + \frac{3}{4}$ в одной системе координат.



Примечание. Соображение о том, что график $y = x^2$ сдвигается вверх на a быстрее, чем график $y = x$ влево на a^2, оказалось в данном случае неверным.

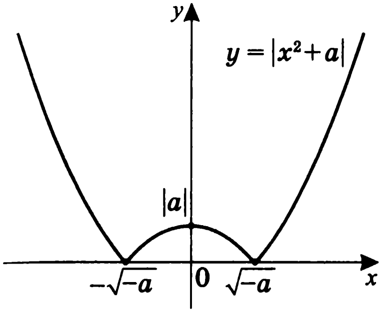
II. Пусть $a = 0$. Тогда $\begin{cases} y = x^2 \\ y = |x| \end{cases}$.

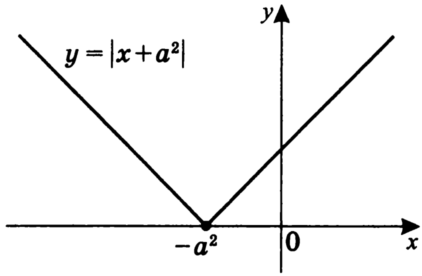


Значит, существуют три корня, так как имеются три общие точки.

III. Пусть $\boldsymbol{a < 0}$. Тогда $|a| = -a$.

В этом случае графики функций имеют следующий вид:





1. Прежде всего, рассмотрим случай, при котором абсцисса точки пересечения графиков $y = |x^2 + a|$ и $y = |x + a^2|$ с осью абсцисс совпадают.

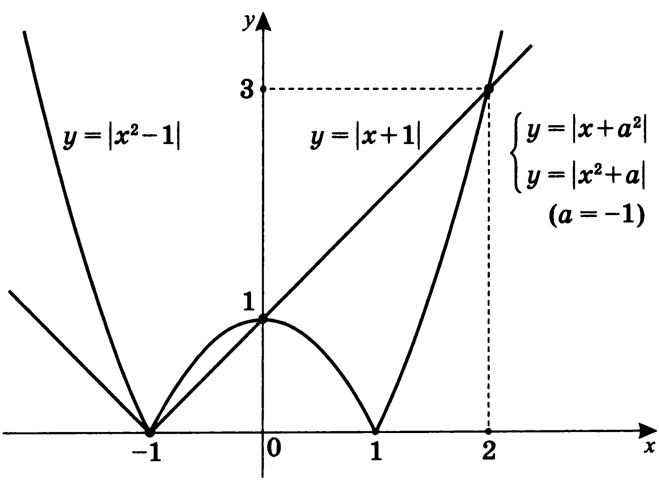
   $-a^2 = -\sqrt{-a}$; $\quad a^2 = \sqrt{-a}$; $\quad a^4 = -a$;

   $a(a^3 + 1) = 0$; $\quad a(a+1)(a^2 - a + 1) = 0$.

   $a \in (-\infty; 0)$, т. е. $a \neq 0$,

   $a^2 - a + 1 \neq 0$, так как $D < 0$.

   Остается лишь $a = -1$, и функции имеют вид $y = |x^2 - 1|$ и $y = |x + 1|$.

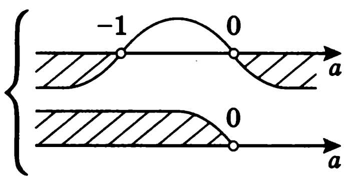


Отметим, что точки пересечения графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$ с осью ординат совпадают.

Очевидно, что в этом случае уравнение имеет три корня: $x = -1$, $x = 0$ и $x = 2$.

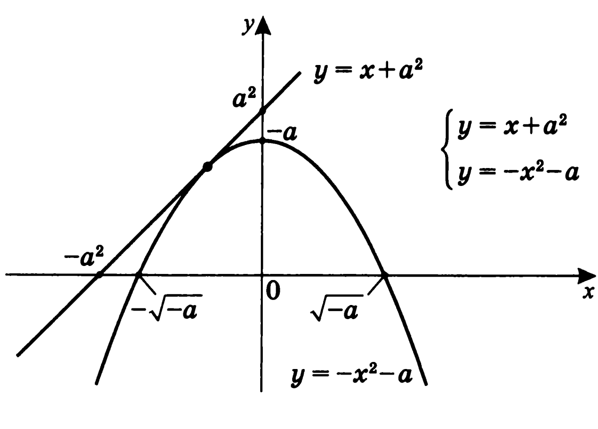
2. Рассмотрим случаи, когда ордината точки пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью ординат *выше* ординаты точки пересения графика $y = |x^2 + a|$ с осью ординат. Это связано с тем, что только правая ветвь графика $y = |x + a^2|$ пересекает ось ординат. Значит, в этом случае возможно рассматривать только график прямой $y = x + a^2$.

Тогда $a^2 > -a$, т. е. $\begin{cases} a(a+1) > 0 \\ a < 0 \end{cases}$;



$a < -1.$

Для того чтобы найти другие возможные случаи существования трех решений, определим точку касания графиков $y = x + a^2$ и $y = -x^2 - a$ $(-a > 0)$.



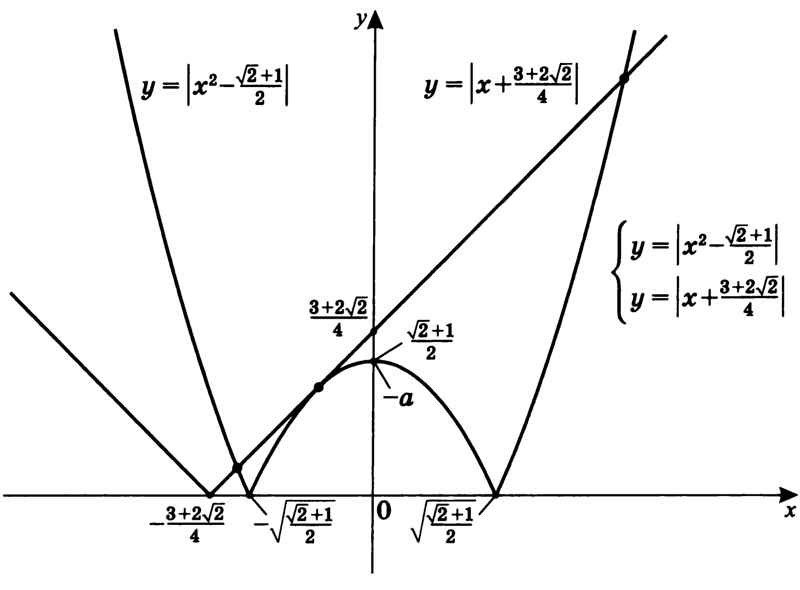
$$|x^2+a| = \begin{cases} x^2+a, & x^2 > -a \text{ (любой } x \text{ при } a>0) \\ -x^2-a, & x^2 < -a \text{ (возможно при } a<0) \end{cases}.$$

Итак, $x + a^2 = -x^2 - a; \quad x^2 + x + a^2 + a = 0;$

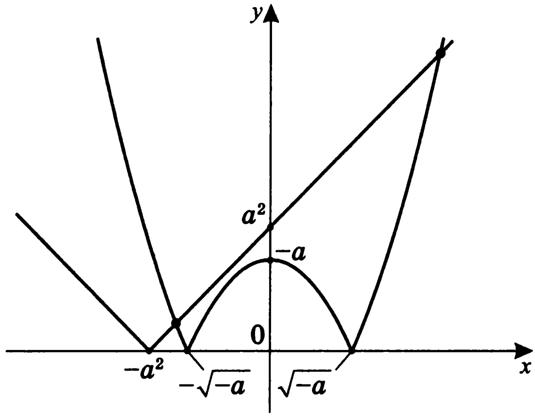
$D = 1 - 4a^2 - 4a; \quad D = 0,$ тогда

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} < -1 < 0 \\ a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} > 0 \text{ (не подходит, так как } a<0) \end{array}\right.$$

Значит для графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$ при $a = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ существуют три точки пересечения, а для уравнения $|x + a^2| = |x^2 + a|$ — три корня.



3. При $a < -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ похоже, что будут только две точки пересечения графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$.



Соответственно, у уравнения $|x + a^2| = |x^2 + a|$ будет два корня.

В этом случае $-a^2 < -\sqrt{-a}$ (см. чертеж), т. е. точки касания графиком $y = |x + a^2|$ оси абсцисс левее точки касания графиком $y = |x^2 + a|$ оси абсцисс.

Одновременно с этим точки пересечения графиком $y = |x + a^2|$ оси ординат выше точки пересечения графиком $y = |x^2 + a|$ оси ординат.

Тогда $\begin{cases} a^2 > -a \\ a^2 > \sqrt{-a} \end{cases}$; $\begin{cases} a(a+1) > 0 \\ a(a+1)\left(a^2 - a + 1\right) > 0 \end{cases}$,

т. е. $a(a+1) > 0$, значит $a < -1$ $(a < 0)$.

Проверим гипотезу существования двух корней.

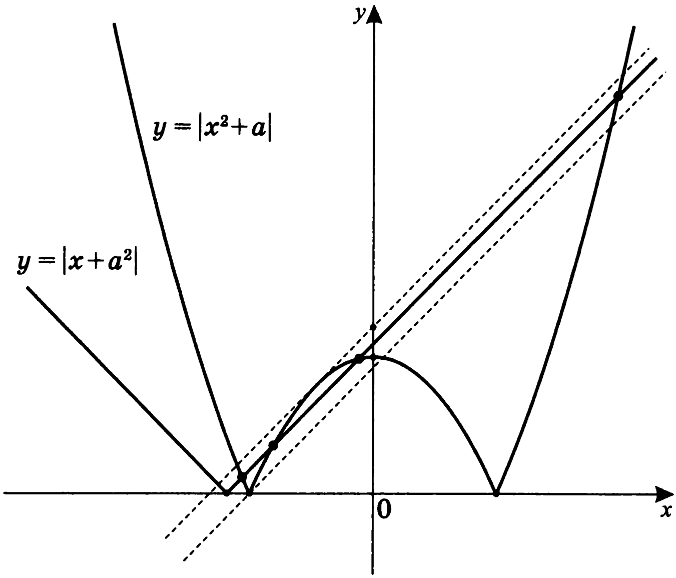
Выберем $a = -2 < -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Тогда

$|x+4| = |x^2 - 2|$; $\left|\frac{x^2-2}{x+4}\right| = 1$; $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-2}{x+4} = 1 \\ \frac{x^2-2}{x+4} = -1 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0,\ x = 3,\ x = -2 \\ x^2 + x + 2 = 0,\ D < 0 \end{array}\right.$.

Гипотеза подтвердилась.

4. Рассмотрим случай $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} < a < -1$ (случаи $a = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $a = -1$ мы уже рассматривали).

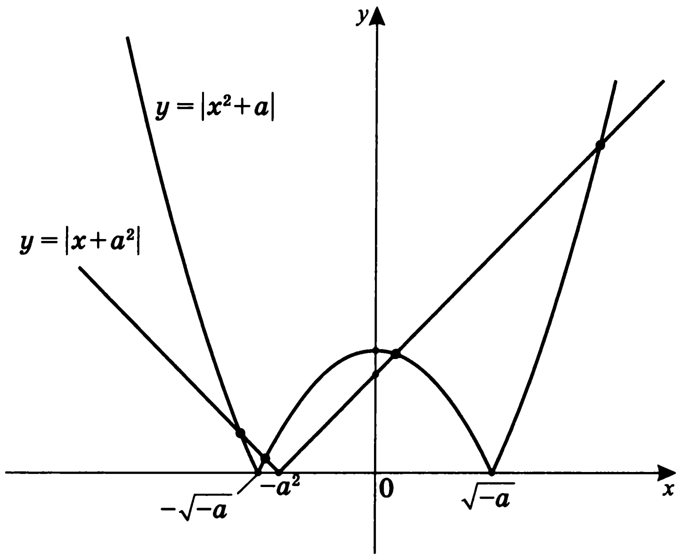


Возможно, что в этом случае существуют четыре точки пересечения графиков $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$.

Для проверки этой гипотезы достаточно рассмотреть, $a = -1{,}2$ $\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2} < -1{,}2 < -1\right)$ и, решив уравнение $|x+1{,}44| = |x^2-1{,}2|$, убедиться в наличии четырех корней ($x = -1{,}2$, $x = -0{,}51$, $x = -0{,}49$, $x = 2{,}2$).

Отметим, что при этом точки касания графиком $y = |x + a^2|$ оси абсцисс левее точки касания графиком $y = |x^2 + a|$ оси абсцисс, а точка пересечения оси ординат графиком $y = |x + a^2|$ выше точки пересечения оси ординат графиком $y = |x^2 + a|$.

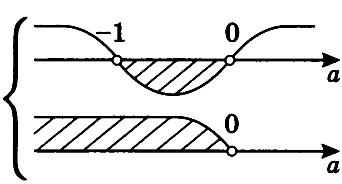
5. Рассмотрим случаи, когда точка пересечения оси ординат графиком $y = |x + a^2|$ ниже соответствующей точки пересечения оси ординат графиком $y = |x^2 + a|$, при этом точка пересечения графика $y = |x + a^2|$ с осью абсцисс находится правее точки пересечения графика $y = |x^2 + a|$ с осью абсцисс:



$-a^2 > -\sqrt{a}$; $\quad a^2 < \sqrt{-a}$; $\quad a^4 < -a$;

$a(a^3 + 1) < 0$; $\quad a(a + 1)(a^2 - a + 1) < 0.$

Так как $a^2 - a + 1 > 0$ для всех a, то $a(a + 1) < 0$.

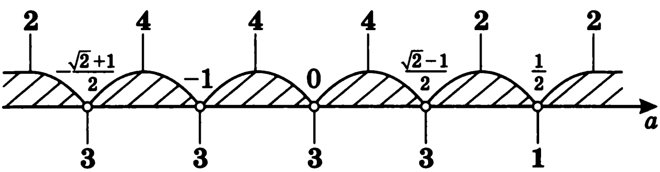


$-1 < a < 0.$

Значит, и в этом случае, возможно, графики $y = |x + a^2|$ и $y = |x^2 + a|$ пересекаются в четырех точках.

Для проверки гипотезы рассмотрите $a = -0{,}5$ ($-1 < -0{,}5 < 0$) и убедитесь в наличии четырех корней в уравнении $|x + 0{,}25| = |x^2 - 0{,}5|$: $x = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$.

Теперь обобщим все случаи и запишем ответ. Чтобы не пропустить какие-нибудь случаи, изобразим количество ответов на параметрической прямой:



Ответ: у уравнения $|x^2+a| = |x+a^2|$ в зависимости от значения параметра a:

1. При $a < -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ существуют два корня.
2. При $a = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ существуют три корня.
3. При $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} < a < -1$ существуют четыре корня.
4. При $a = -1$ существуют три корня.
5. При $-1 < a < 0$ существуют четыре корня.
6. При $a = 0$ существуют три корня.
7. При $0 < a < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ существуют четыре корня.
8. При $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ существуют три корня.
9. При $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < a < \frac{1}{2}$ существуют два корня.
10. При $a = \frac{1}{2}$ существует один корень.
11. При $a > \frac{1}{2}$ существуют два корня.

Самостоятельная работа 10

Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра?

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b \end{cases};$

2. $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2x + m \end{cases};$

3. $\begin{cases} x + y = a \\ \left(y^2 - x - 2\right)\left(y - x^2 + 2\right) = 0 \end{cases};$

4. $\begin{cases} (|x| + |y| - 10)(9 - |xy|) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0) \end{cases};$

5. $\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = 4 \\ \big||x| - 2\big| = y \end{cases}.$

Итоговая самостоятельная работа

I. **1.** Графически решите уравнение с параметрами:

$$(x^2+y^2-5)\cdot(xy+2)=a.$$

2. Графически решите уравнение с параметрами:

$$(x^2+y^2-10)\cdot(|xy|-3)=a.$$

II. **1.** При каких значениях параметра a существует не единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2-6x+y^2-6y+14=0 \\ x^2-2a(x+y)+y^2+a^2=0 \end{cases}?$$

2. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 2|x|+|y|=a \end{cases}$?

3. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a:

$$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=3a-8 \end{cases}?$$

4. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ xy=7-a \end{cases}?$$

5. При каких значениях параметра a

система $\begin{cases} ax^2+y+2a=0 \\ ay^2+x+2a=0 \end{cases}$:

а) имеет единственное решение;

б) имеет два решения;

в) не имеет решений.

III. **1.** Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a: $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$?

2. Сколько корней имеет уравнение $a|x-2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от положительного значения параметра a: а) на $(-\infty;\infty)$; б) на $[-1;\infty)$?

3. При каких значениях параметра b уравнение $|x - b^2 + 4b - 2| + |x - b^2 + 2b + 3| = 2b - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5;23]$?

4. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1?

5*. При каких значениях x неравенство $(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5 > 0$ справедливо для $a \in [-2;1]$?

6*. Решите уравнение $(x-1)\log_3 x = \frac{x+1}{2}$.

5 Ответы

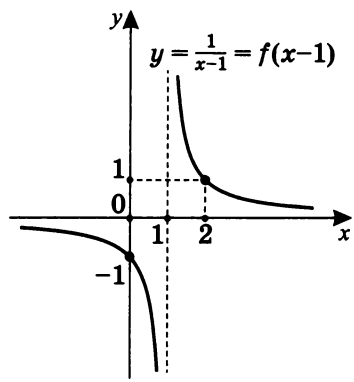
Ответы на самостоятельную работу 1

1. $y = \frac{1}{x-1}$.

Вид преобразования:

$y = f(x-1)$,

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



2. $y = \frac{1}{-x}$.

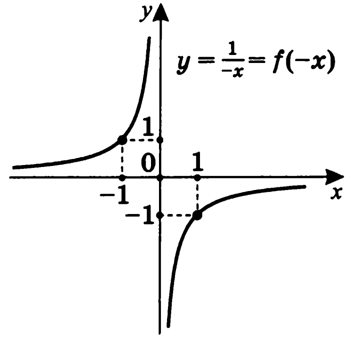
Вид преобразования:

$y = f(-x)$,

где $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

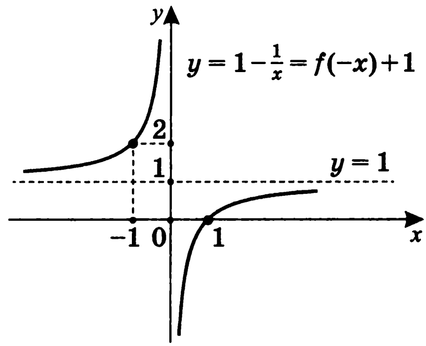
или, в данном случае,

$y = -f(x)$.



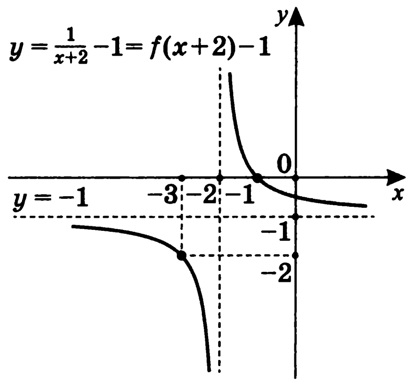
3. $y = 1 - \frac{1}{x}$.

Вид преобразования:
$y = f(-x) + 1$,
где $y = f(x) = \frac{1}{x}$,
или $y = 1 - f(x)$.



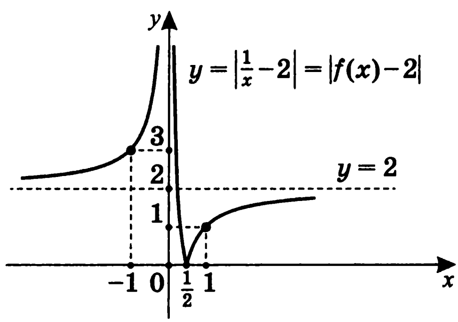
4. $y = \frac{1}{x+2} - 1$.

Вид преобразования:
$y = f(x+2) - 1$,
где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



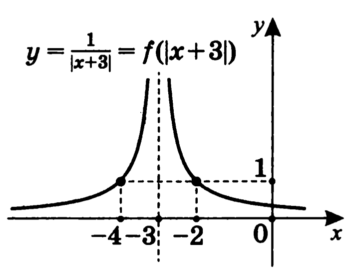
5. $y = \left|\frac{1}{x} - 2\right|$.

Вид преобразования:
$y = |f(x) - 2|$,
где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



6. $y = \frac{1}{|x+3|}$.

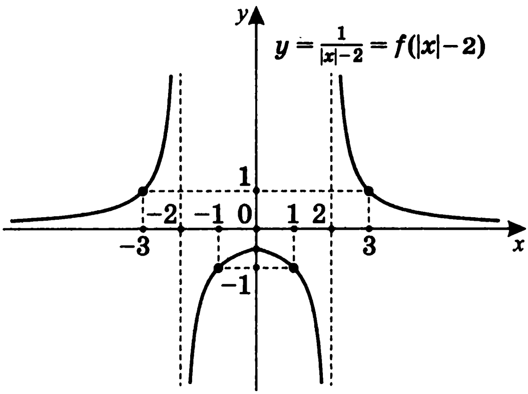
Вид преобразования:
$y = f\,|x+3|$,
где $y = f(x) = \frac{1}{x}$,
или, в данном случае,
$y = |f(x+3)|$.



7. $y = \frac{1}{|x|-2}$.

Вид преобразования:

$y = f\left(|x| - 2\right)$, где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



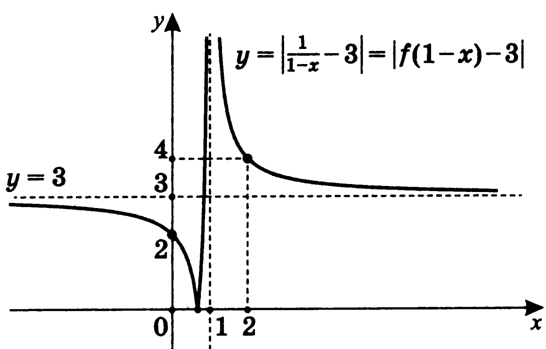
8. $y = \left|\frac{1}{1-x} - 3\right|$.

Вид преобразования: $y = |f(1-x) - 3|$,

или так как можно преобразовать

$y = \left|-\frac{1}{x-1} - 3\right| = \left|\frac{1}{x-1} + 3\right|$,

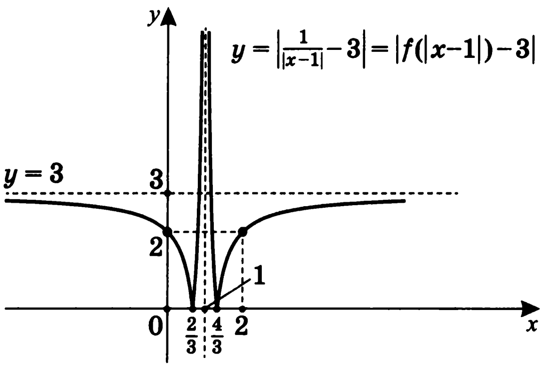
то $y = |f(x-1) + 3|$, причем $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



9. $y = \left| \frac{1}{|x-1|} - 3 \right|$.

Вид преобразования:

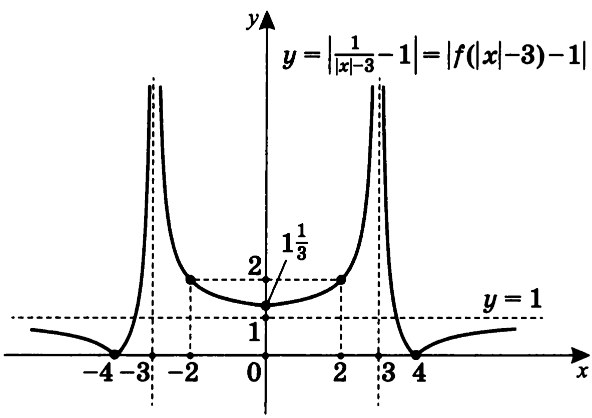
$y = |f(|x-1|) - 3|$, где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



10. $y = \left| \frac{1}{|x|-3} - 1 \right|$.

Вид преобразования:

$y = |f(|x|-3) - 1|$, где $y = f(x) = \frac{1}{x}$.



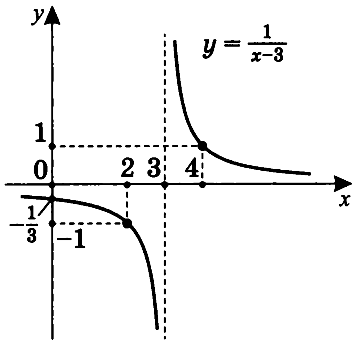
Ответы на самостоятельную работу 2

Зная график $y = f(x)$, постройте графики:

1. $y = f(x-3)$.

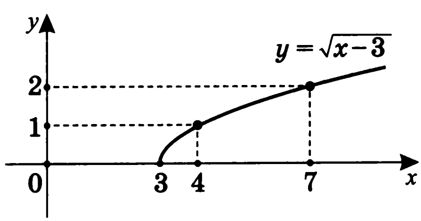
а) $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

тогда $y = f(x-3) = \frac{1}{x-3}$.



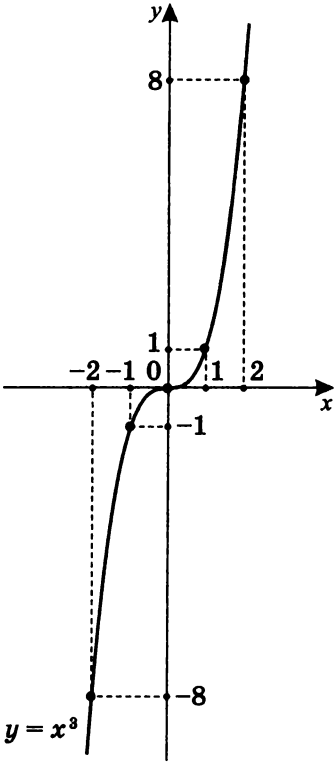
б) $y = f(x) = \sqrt{x}$,

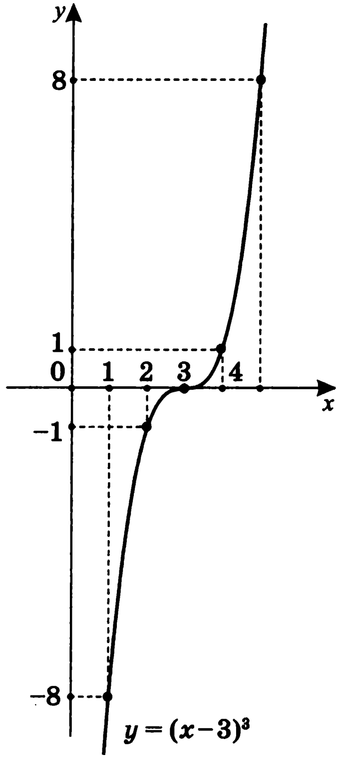
тогда $y = f(x-3) = \sqrt{x-3}$.



в) $y = f(x) = x^3$,

тогда $y = f(x-3) = (x-3)^3$.

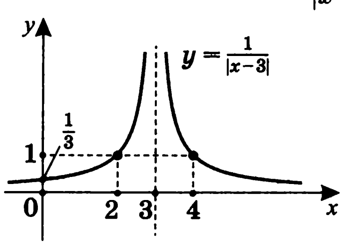




2. $y = f(|x-3|)$.

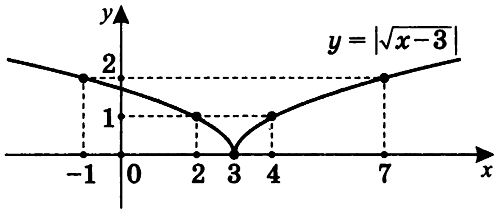
а) $y = f(x) = \frac{1}{|x|}$,

тогда $y = f(|x-3|) = \frac{1}{|x-3|}$.



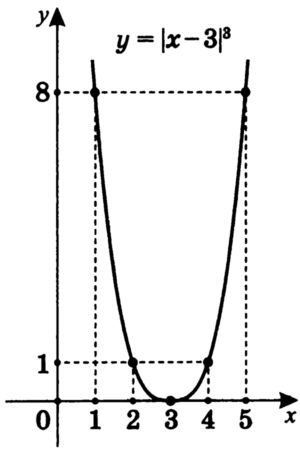
б) $y = f(x) = \sqrt{x}$,

тогда $y = f(|x-3|) = \sqrt{|x-3|}$.



в) $y = f(x) = x^3$,

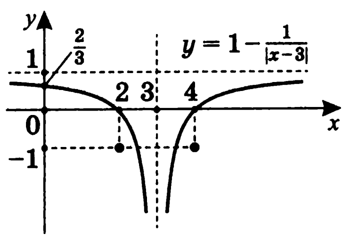
тогда $y = f(|x-3|) = (|x-3|)^3$.



3. $y = 1 - f(|x-3|)$.

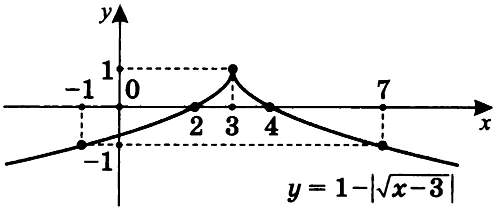
а) $y = f(x) = \frac{1}{x}$,

тогда $y = 1 - f(|x-3|) = 1 - \frac{1}{|x-3|}$.



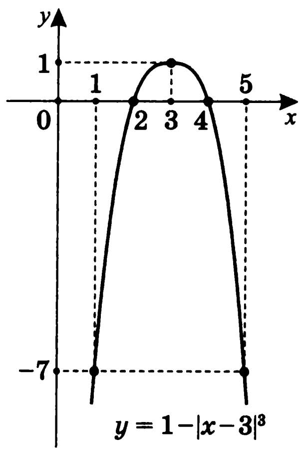
б) $y = f(x) = \sqrt{x}$,

тогда $y = 1 - f(|x-3|) = 1 - \sqrt{|x-3|}$.



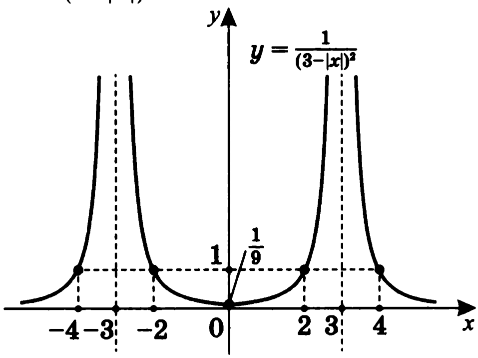
в) $y = f(x) = x^3$,

тогда $y = 1 - f(|x-3|) = 1 - |x-3|^3$.

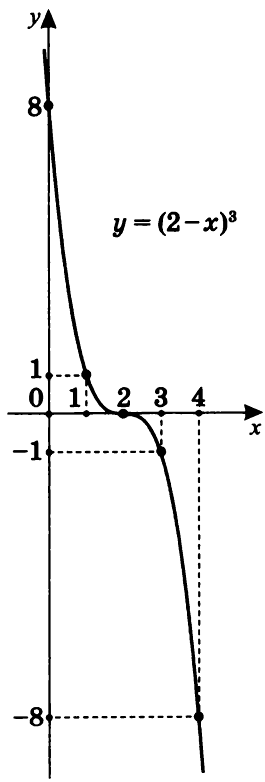


Ответы на самостоятельную работу 3

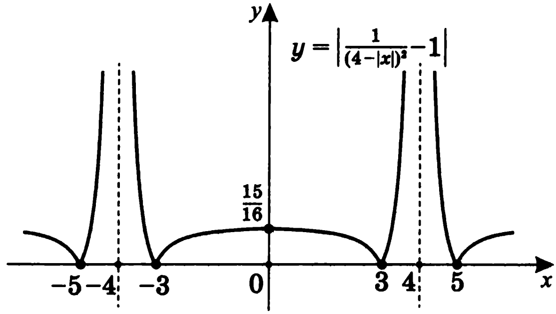
1. $y = \frac{1}{(3-|x|)^2}$.



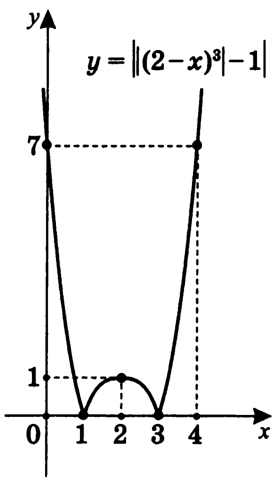
2. $y = (2-x)^3$.



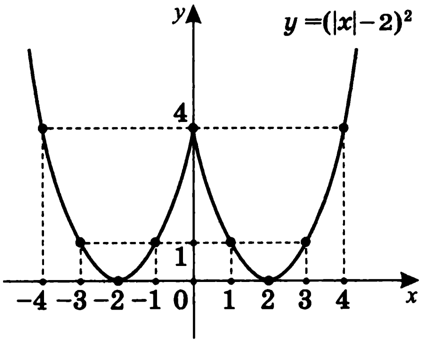
3. $y = \left|\dfrac{1}{(4-|x|)^2} - 1\right|.$



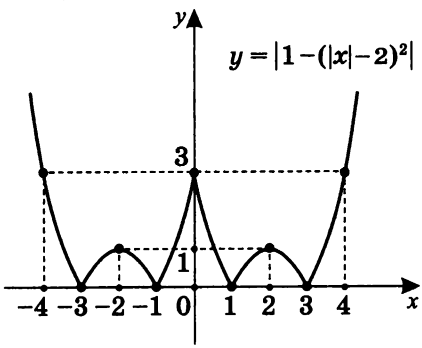
4. $y = \Big|\left|(2-x)^3\right| - 1\Big|.$



5. $y = (|x| - 2)^2$.

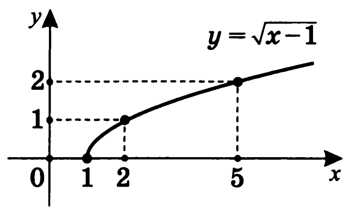


6. $y = \left|1 - (|x| - 2)^2\right|$.

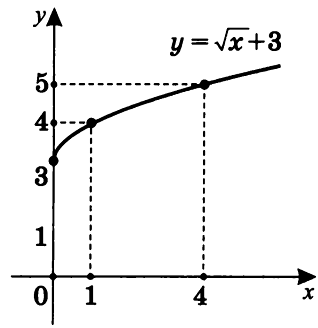


Ответы на самостоятельную работу 4

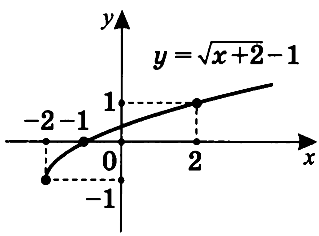
1. $y = \sqrt{x-1}$.



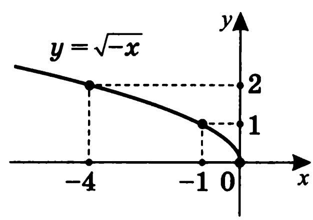
2. $y = \sqrt{x} + 3$.



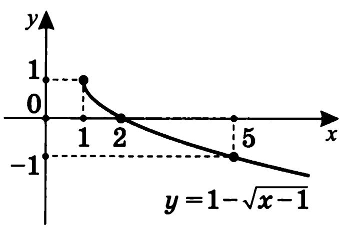
3. $y = \sqrt{x+2} - 1$.



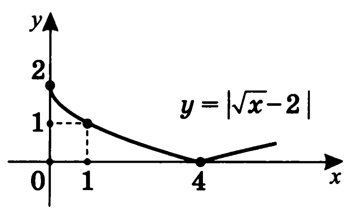
4. $y = \sqrt{-x}$.



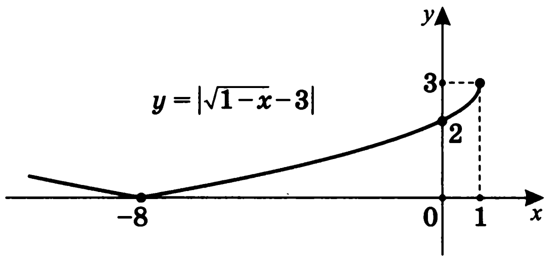
5. $y = 1 - \sqrt{x-1}$.



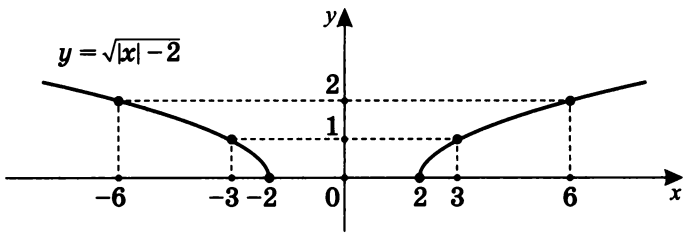
6. $y = |\sqrt{x} - 2|$.



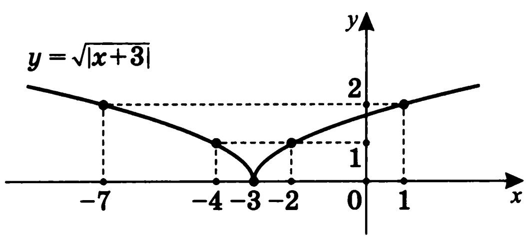
7. $y = \left|\sqrt{1-x} - 3\right|.$



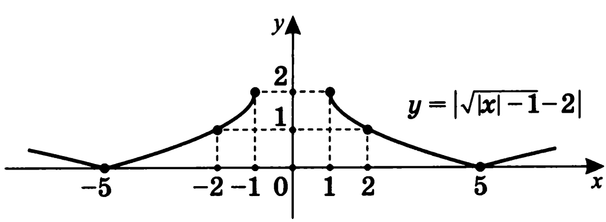
8. $y = \sqrt{|x| - 2}.$



9. $y = \sqrt{|x+3|}.$



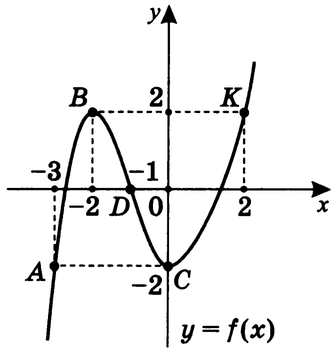
10. $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 2\right|.$



Ответы на самостоятельную работу 5

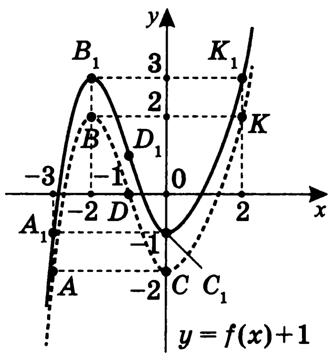
Вариант I

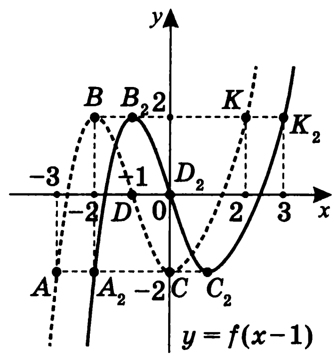
Дан график функции $f(x)$.



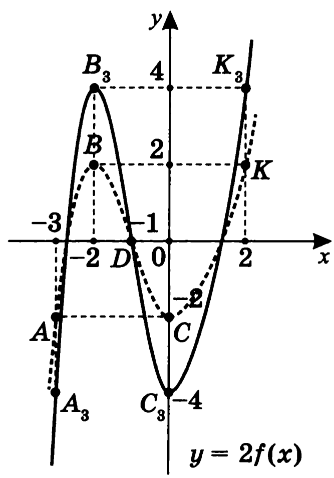
Построим на одном чертеже (или в одной системе координат) графики функций.

1. $y = f(x)$ и $y = f(x) + 1$. **2.** $y = f(x)$ и $y = f(x - 1)$.

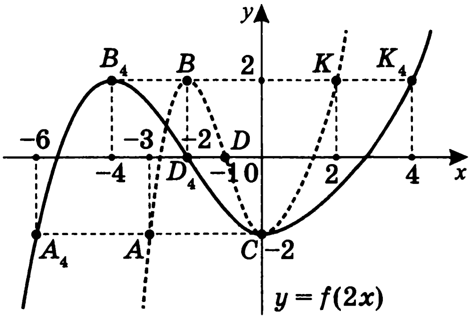




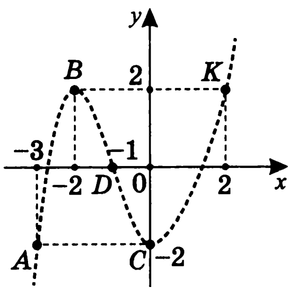
3. $y = f(x)$ и $y = 2f(x)$.

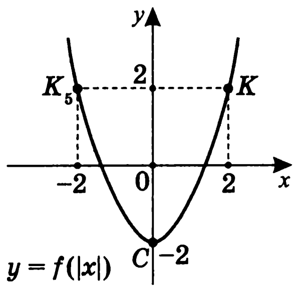


4. $y = f(x)$ и $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



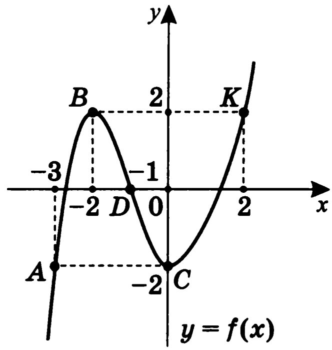
5. $y = f(x)$ и $y = f(|x|)$.





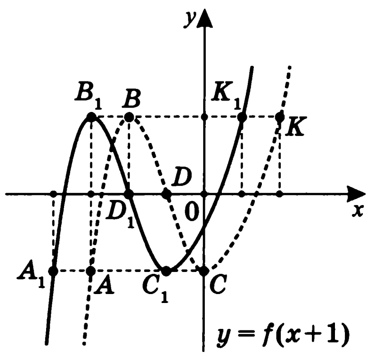
Вариант II

Дан график функции $f(x)$.

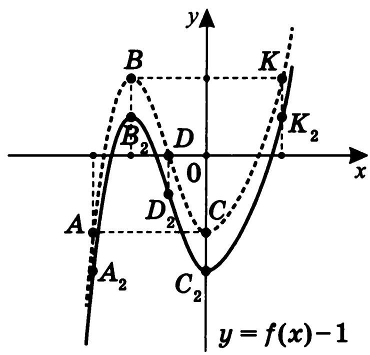


Построим на одном чертеже (или в одной системе координат) графики функций.

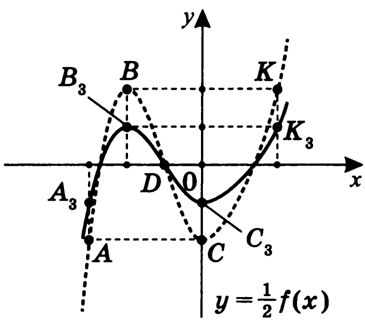
1. $y = f(x)$ и $y = f(x+1)$.



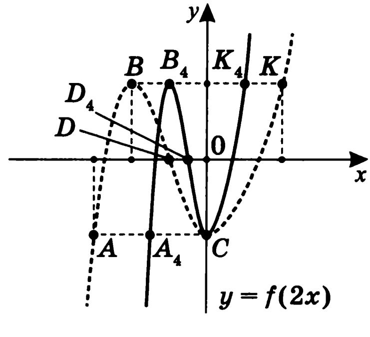
2. $y = f(x)$ и $y = f(x) - 1$.



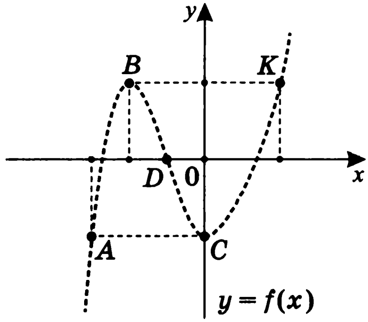
3. $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$.

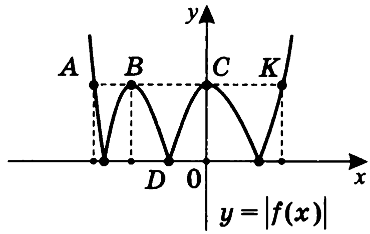


4. $y = f(x)$ и $y = f(2x)$.



5. $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$.



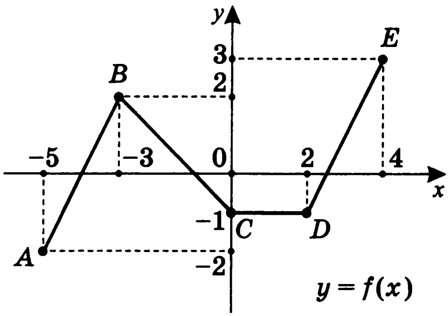


Примечание. На всех графиках пунктиром обозначен график исходной функции $f(x)$. Координаты его точек указаны на исходном графике и для лучшей читаемости на остальных графиках не указываются.

Ответы на самостоятельную работу 6

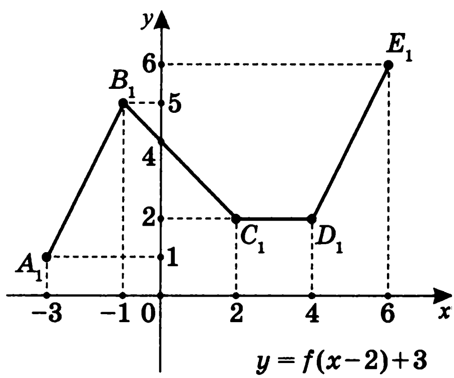
Вариант I

Дан график функции $y = f(x)$:

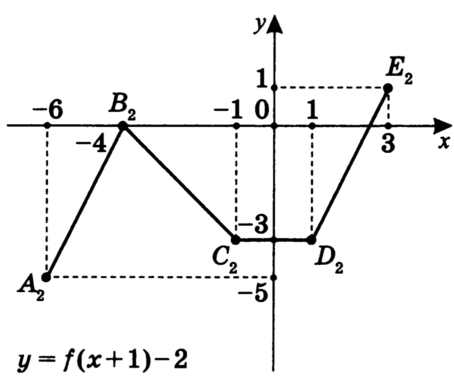


Построим графики:

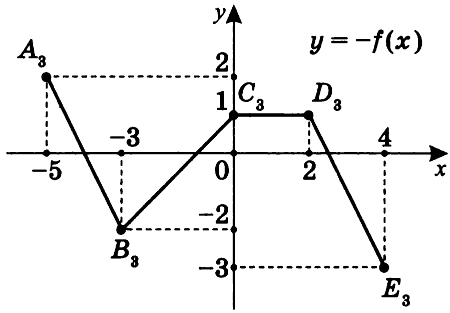
1. $y = f(x-2)+3$.



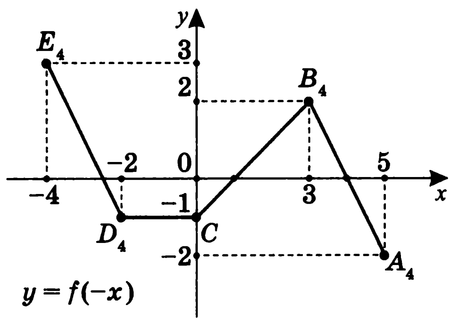
2. $y = f(x+1)-2$.



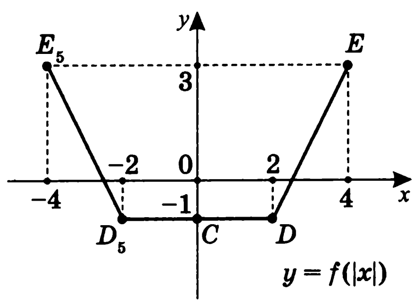
3. $y = -f(x)$.



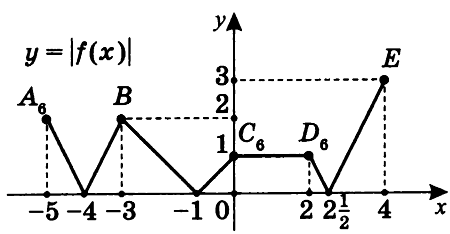
4. $y = f(-x)$.



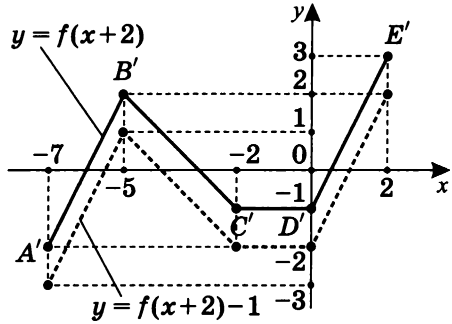
5. $y = f(|x|)$.

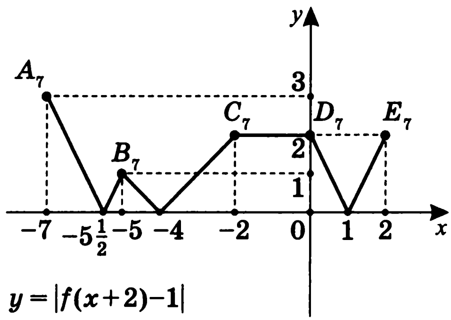


6. $y = |f(x)|$.

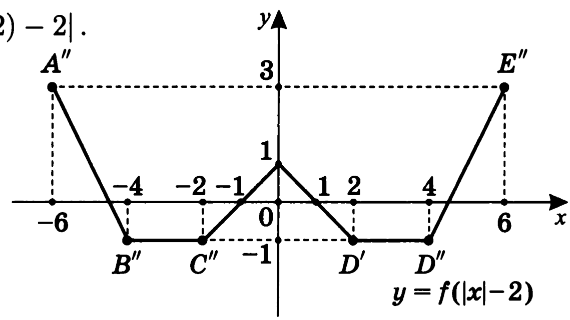


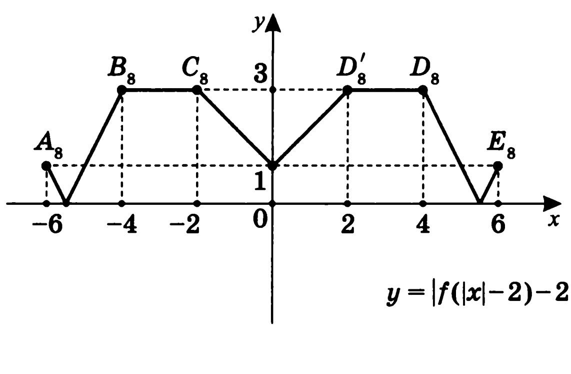
7. $y = |f(x+2) - 1|$.





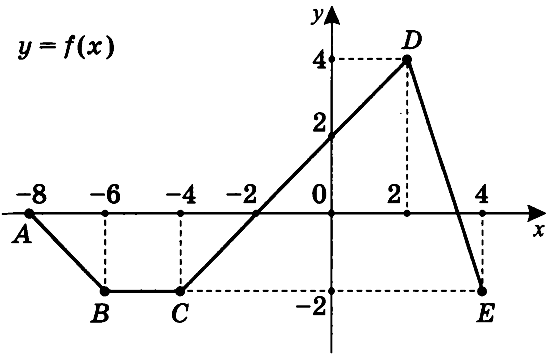
8. $y = |f(|x| - 2) - 2|$.





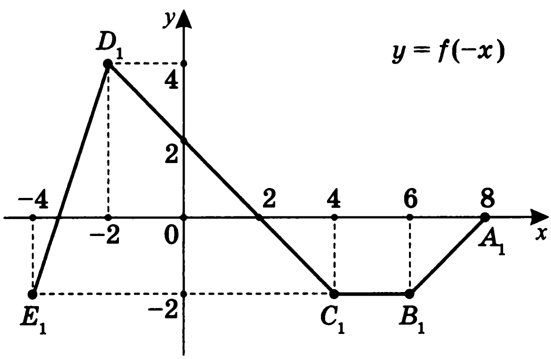
Вариант II

Дан график функции $y = f(x)$:

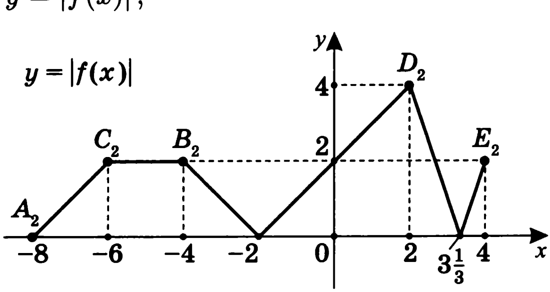


Построим графики:

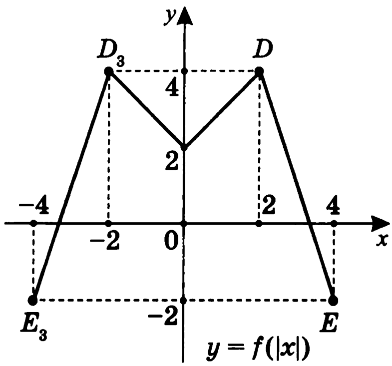
1. $y = f(-x)$;



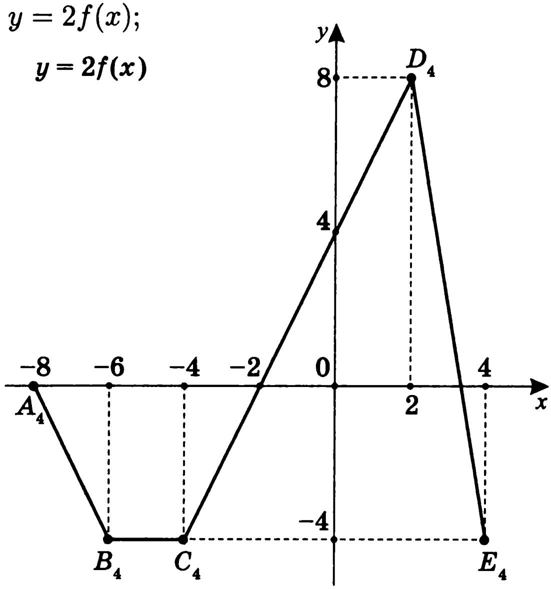
2. $y = |f(x)|$;



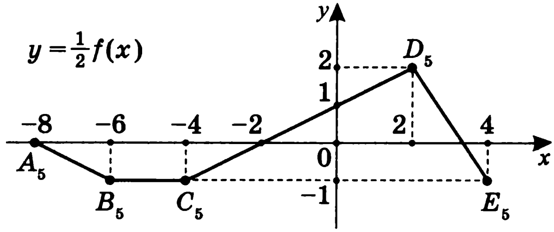
3. $y = f(|x|)$;



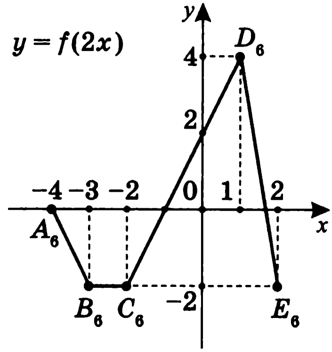
4. $y = 2f(x)$;



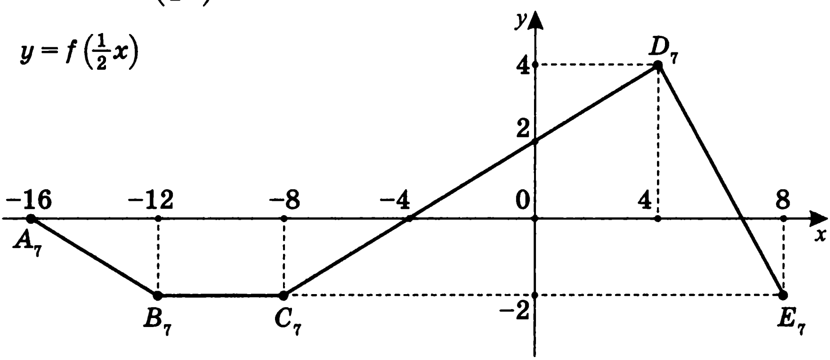
5. $y = \frac{1}{2}f(x)$;



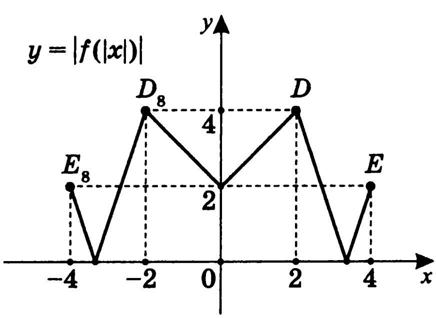
6. $y = f(2x)$;



7. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;



8. $y = |f(|x|)|$.

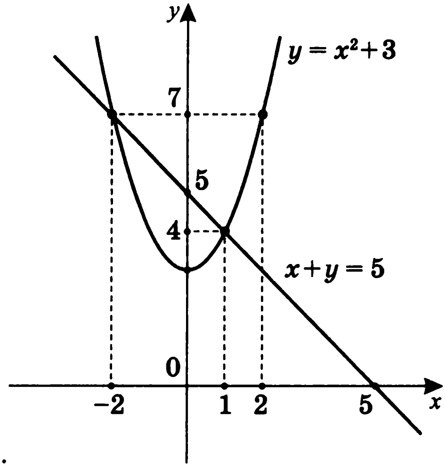


Решение самостоятельной работы 7

Построим графики систем уравнений и приведем ответы.

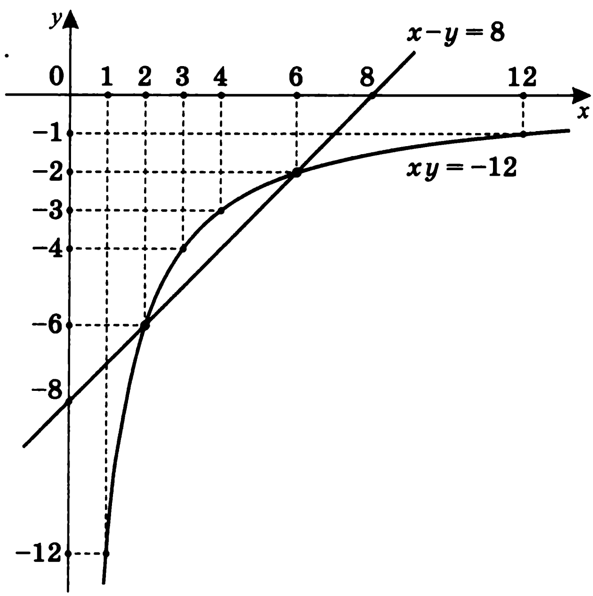
Вариант I

1. $\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$



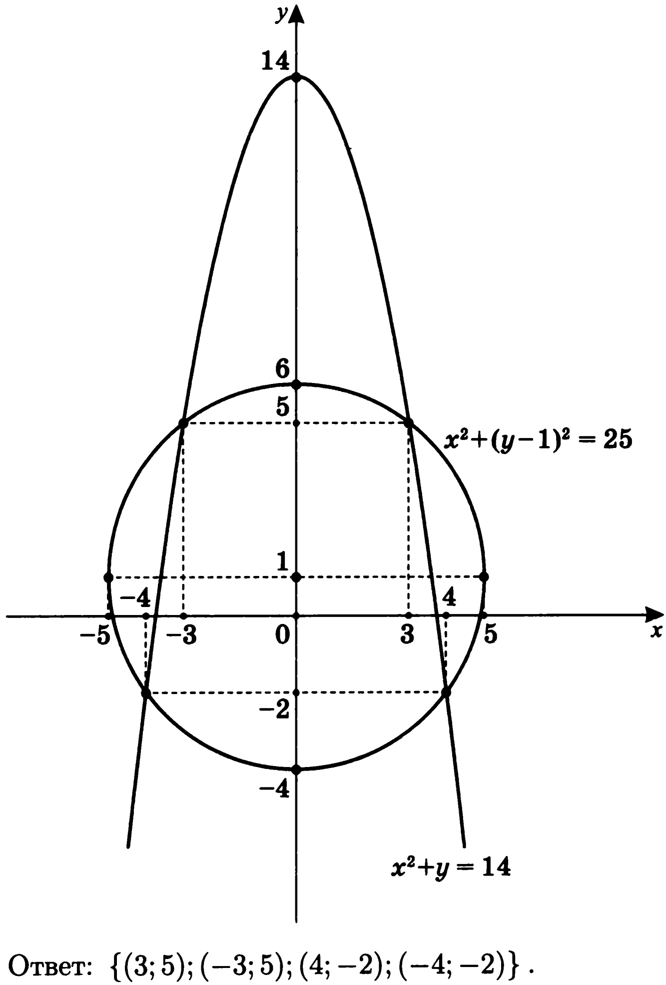
Ответ: $\{(-2; 7); (1; 4)\}$.

2. $\begin{cases} xy = -12 \\ x - y = 8 \end{cases}$.



Ответ: $\{(2; -6); (6; -2)\}$.

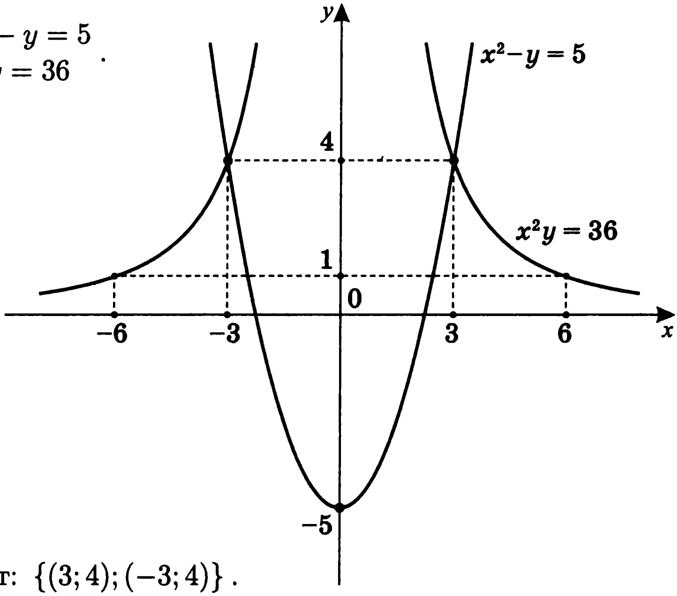
3. $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 25 \\ x^2 + y = 14 \end{cases}.$



Ответ: $\{(3;5);(-3;5);(4;-2);(-4;-2)\}$.

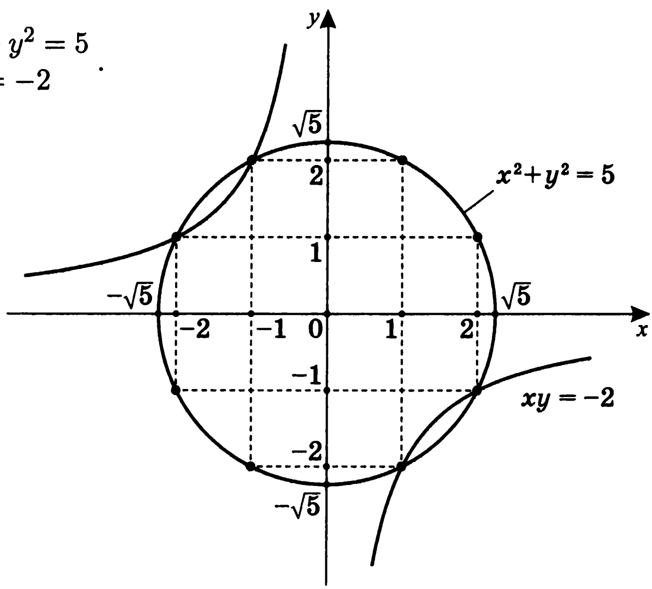
Вариант II

1. $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ x^2 y = 36 \end{cases}$.



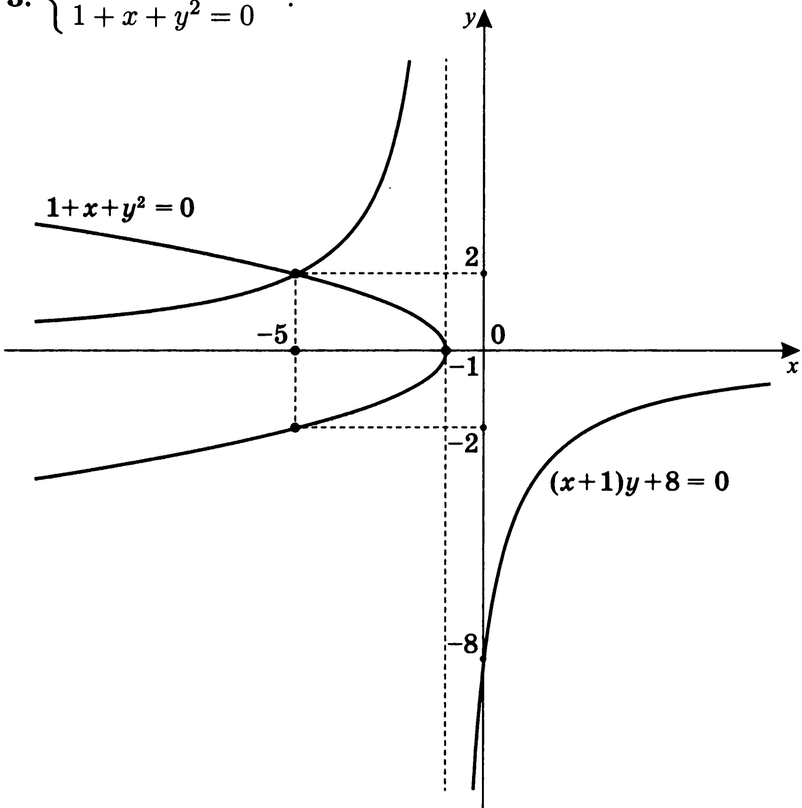
Ответ: $\{(3; 4); (-3; 4)\}$.

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$.



Ответ: $\{(-1; 2); (-2; 1); (1; -2); (2; -1)\}$.

3. $\begin{cases} (x+1)y+8=0 \\ 1+x+y^2=0 \end{cases}.$



Ответ: $\{(-5;2)\}$.

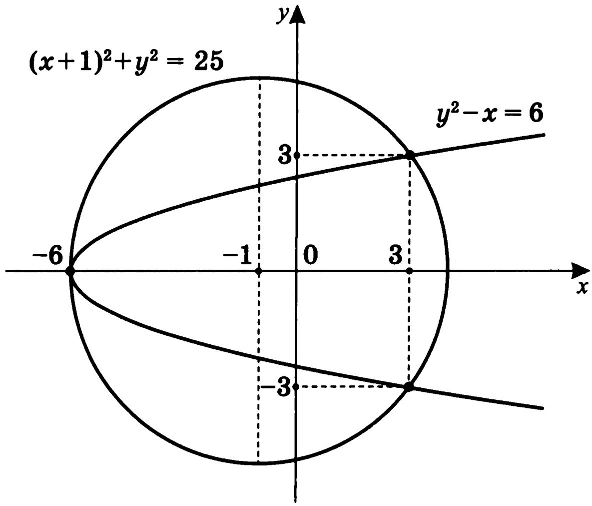
Примечание. Второе уравнение системы $1+x+y^2=0$ равносильно уравнению $y^2=-x-1$, порождающему

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\sqrt{-x-1} \quad (-x-1\geqslant 0) \\ y\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{-x-1} \quad (-x-1\geqslant 0) \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Первое уравнение системы $(x+1)y+8=0$ есть уравнение вида $y=-\frac{8}{x+1}$. Графиком его является гипербола $y=\frac{1}{x}$, сдвинутая влево на 1, симметрично отраженная относительно оси абсцисс и растянутая в 8 раз вдоль оси ординат.

Вариант III

1. $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ y^2 - x = 6 \end{cases}$



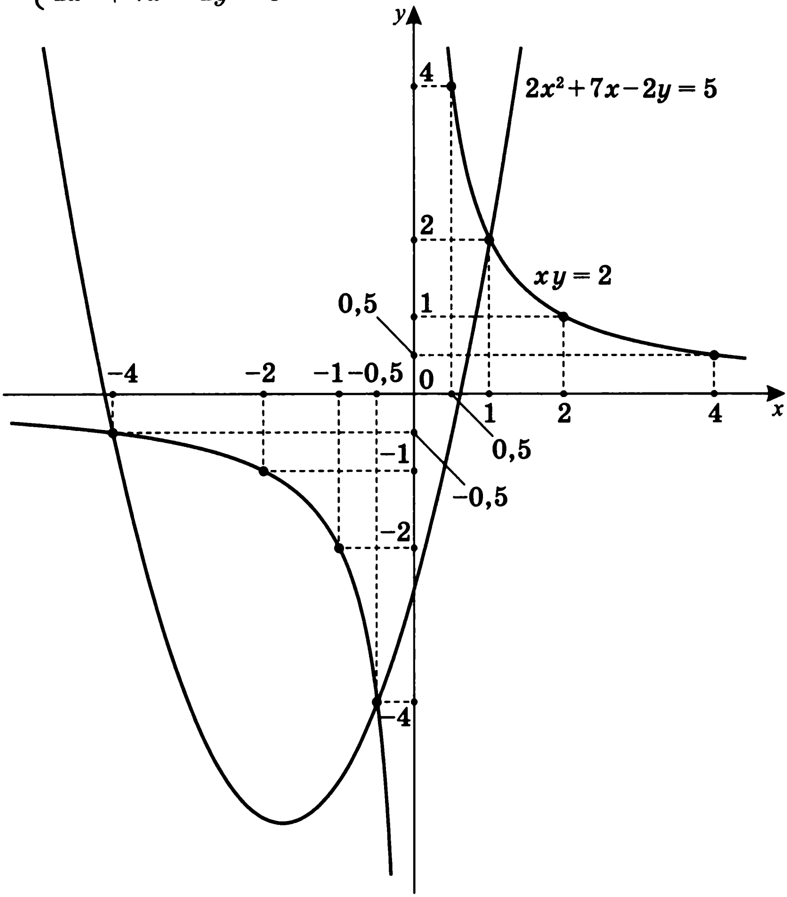
Ответ: $\{(-6;0);(3;3);(3;-3)\}$.

Примечание. Первое уравнение системы — окружность с центром в точке $(-1;0)$ и радиусом 5.

Второе уравнение системы $y^2 - x = 6$ равносильно уравнению $y^2 = x + 6$, порождающему:

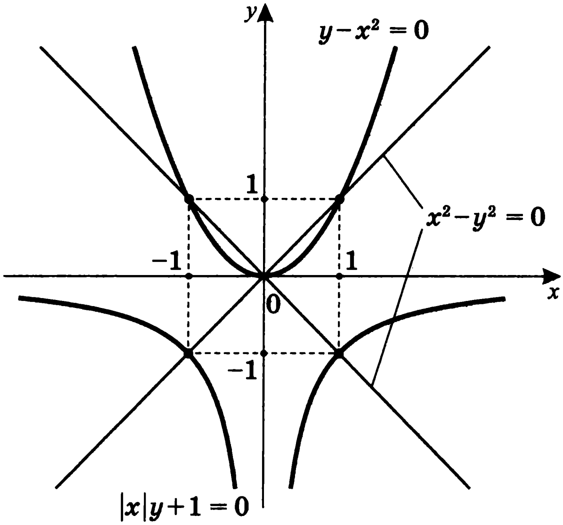
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \sqrt{x+6} \quad (x+6 \geqslant 0) \\ y \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\sqrt{x+6} \quad (x+6 \geqslant 0) \\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

2. $\begin{cases} xy = 2 \\ 2x^2 + 7x - 2y = 5 \end{cases}.$



Ответ: $\left\{\left(-4; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -4\right); (1; 2)\right\}.$

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (y - x^2)(|x| \cdot y + 1) = 0 \end{cases}.$



Ответ: $\{(1;1);(1;-1);(-1;1);(-1;-1);(0;0)\}$.

Примечание. Первое уравнение системы $x^2 - y^2 = 0$ равносильно уравнению $|x| = |y|$, график которого есть пара пересекающихся прямых.

Второе уравнение системы $(y-x^2)(|x| \cdot y+1) = 0$ порождает совокупность уравнений:

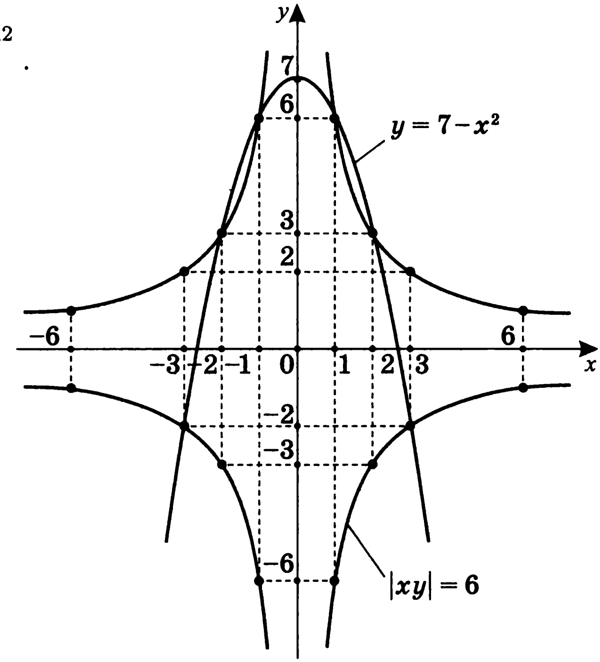
$\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ |x| \cdot y + 1 = 0 \end{array}\right.$, где

$y = x^2$ — парабола;

$y = -\dfrac{1}{|x|}$ — две ветви гиперболы в нижней полуплоскости.

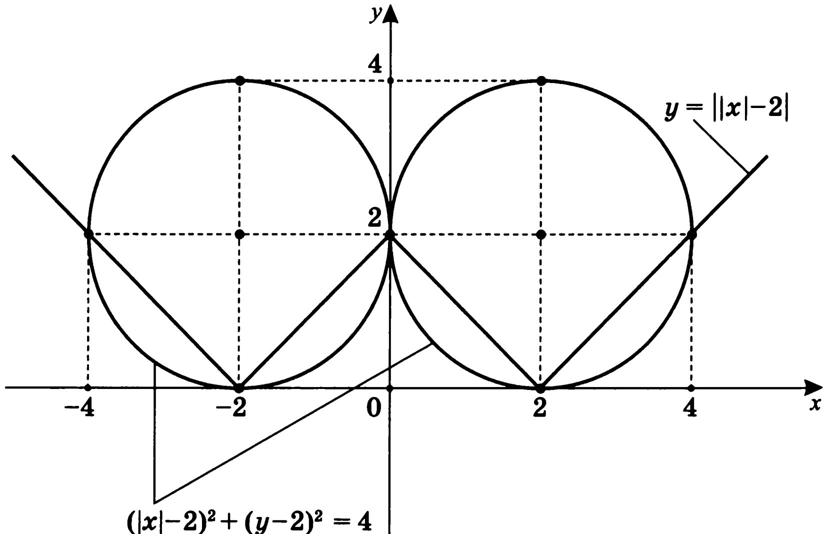
Вариант IV

1. $\begin{cases} y = 7 - x^2 \\ |xy| = 6 \end{cases}$.



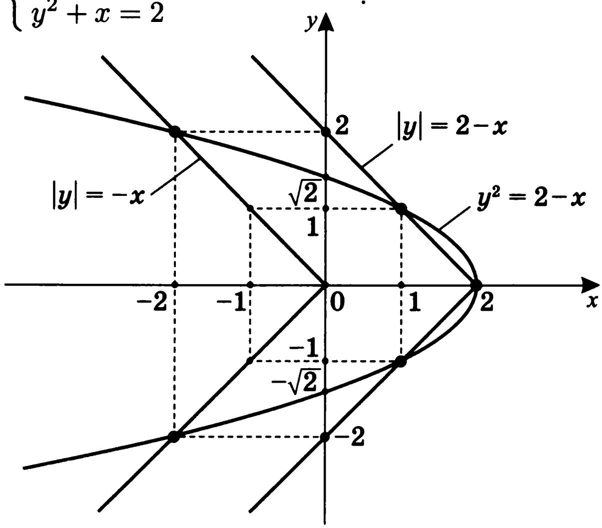
Ответ: $\{(-3;-2);(-2;3);(-1;6);(1;6);(2;3);(3;-2)\}$.

2. $\begin{cases} y = ||x| - 2| \\ (|x| - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}.$



Ответ: $\{(-4; 2); (-2; 0); (0; 2); (2; 0); (4; 2)\}$.

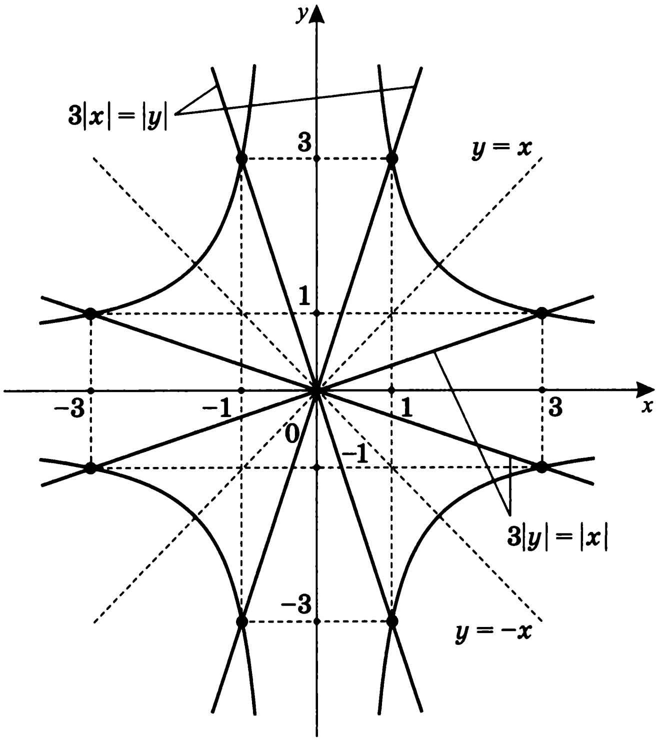
3. $\begin{cases} (|y| + x - 2)(|y| + x) = 0 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}.$



Ответ: $\{(-2; 2); (1; 1); (2; 0); (1; -1); (-2; -2)\}$.

Вариант V

1. $\begin{cases} |xy| = 3 \\ 3y^2 - 10|xy| + 3x^2 = 0 \end{cases}$.



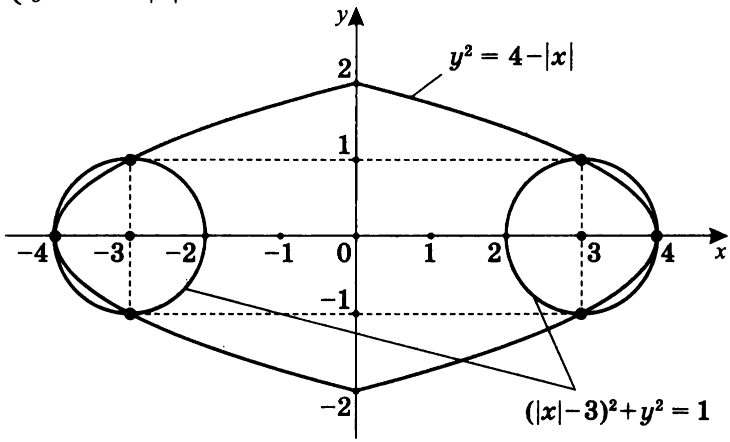
Ответ: $\{(1;3);(3;1);(3;-1);(1;-3);(-1;-3);(-3;-1);$ $(-3;1);(-1;3)\}$.

Примечание.

$3y^2 - 10|xy| + 3x^2 = (3|x| - |y|) \cdot (3|y| - |x|)$,

где $3|x| = |y|$ и $3|y| = |x|$ — две пары пересекающихся прямых.

2. $\begin{cases} (|x|-3)^2+y^2=1 \\ y^2=4-|x| \end{cases}$.



Ответ: $\{(-4;0);(-3;1);(3;1);(4;0);(3;-1);(-3;-1)\}$.

Примечание.

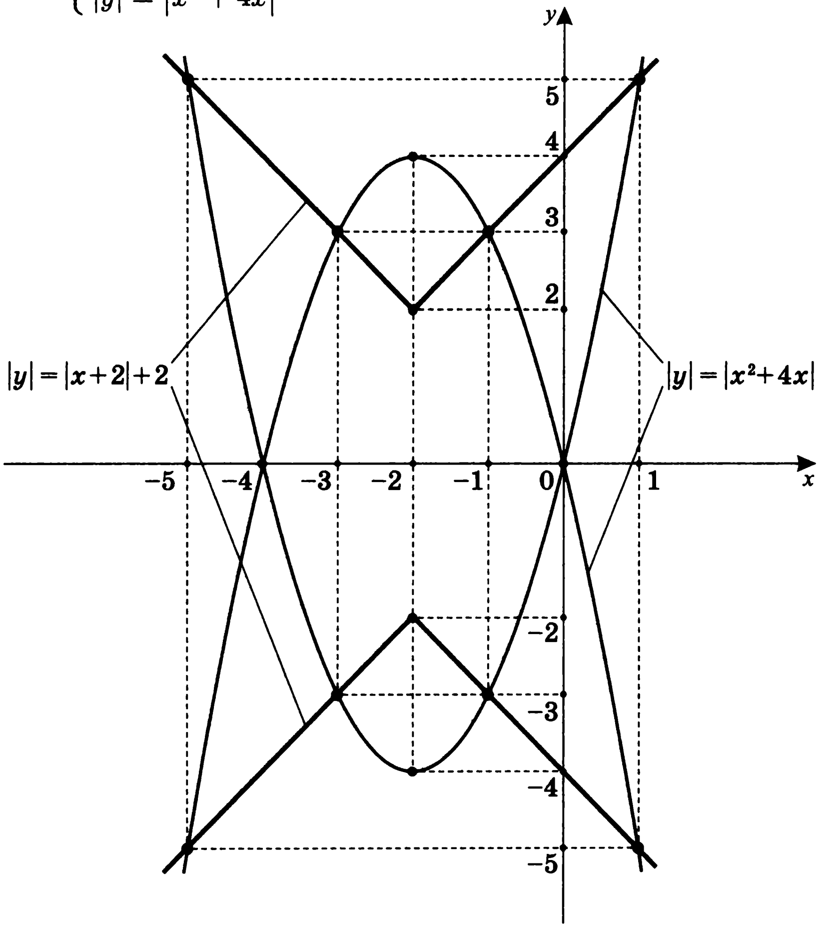
Уравнение $y^2=4-|x|$ порождает $|y|=\sqrt{4-|x|}$,

т. е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\sqrt{4-|x|} \quad (4-|x|\geqslant 0) \\ y\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\sqrt{4-|x|} \quad (4-|x|\geqslant 0) \\ y<0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Уравнение $(|x|-3)^2+y^2=1$ порождает

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)^2+y^2=1 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+3)^2+y^2=1 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right.$, т. е. две окружности радиуса 1.

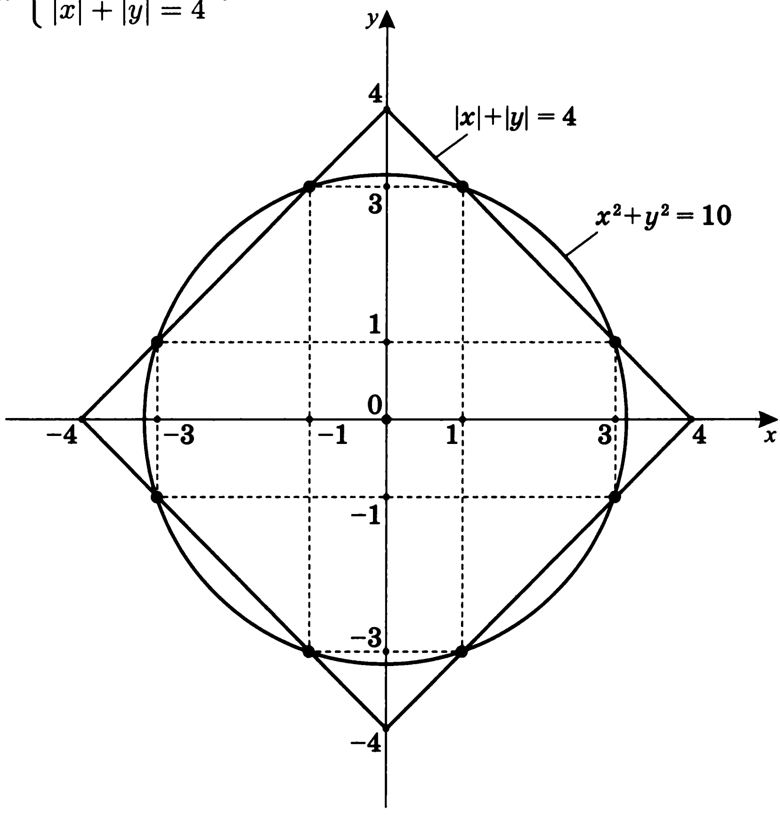
3. $\begin{cases} |y| = |x+2|+2 \\ |y| = \left|x^2+4x\right| \end{cases}.$



Ответ: $\{(-5;5);(-3;3);(-1;3);(1;5);(1;-5);$
$(-1;-3);(-3;-3);(-5;-5)\}$.

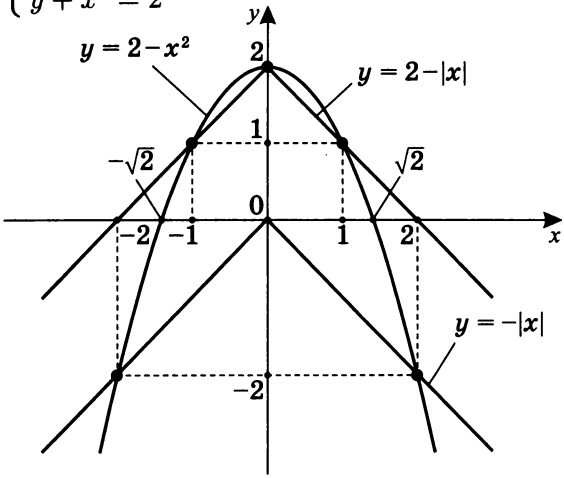
Вариант VI

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$.



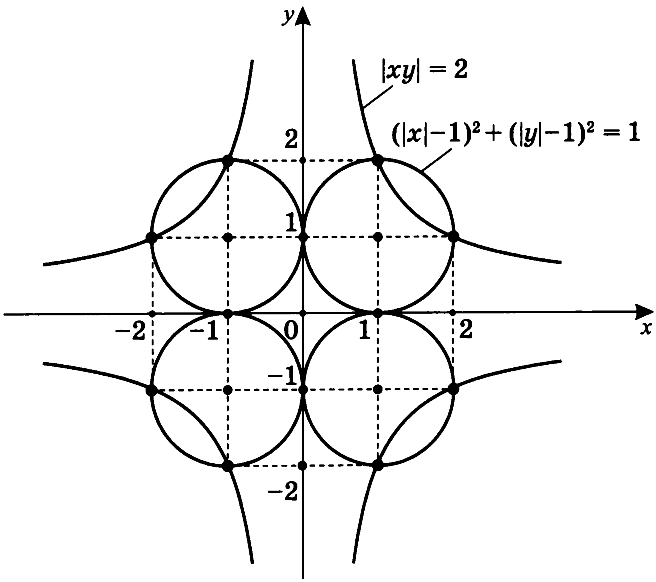
Ответ: $\{(1;3); (3;1); (3;-1); (-1;-3); (1;-3); (-3;-1); (-3;1); (-1;3)\}$.

2. $\begin{cases} (y+|x|-2)\cdot(y+|x|)=0 \\ y+x^2=2 \end{cases}.$



Ответ: $\{(0;2);(1;1);(2;-2);(-1;1);(-2;-2)\}$.

3. $\begin{cases} |xy|=2 \\ (1-|x|)^2+(|y|-1)^2=1 \end{cases}.$

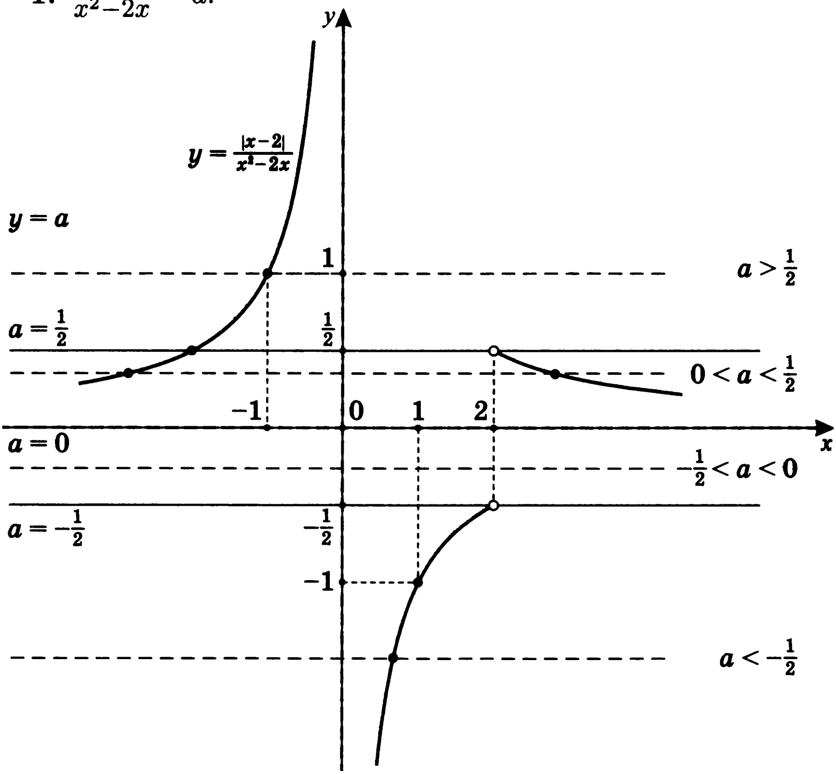


Ответ: $\{(1;2);(2;1);(2;-1);(1;-2);(-1;-2);(-2;-1);$
$(-2;1);(-1;2)\}$.

Ответы на самостоятельную работу 8

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значения параметра a?

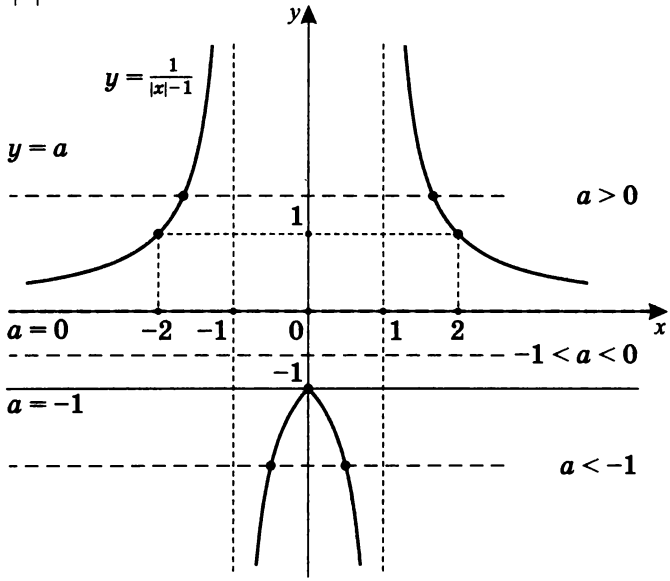
1. $\dfrac{|x-2|}{x^2-2x} = a.$



Ответ: уравнение $\dfrac{|x-2|}{x^2-2x} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -0{,}5)$ — один корень.
2. При $a \in [-0{,}5; 0]$ — корней нет.
3. При $a \in (0; 0{,}5)$ — два корня.
4. При $a \in [0{,}5; \infty)$ — один корень.

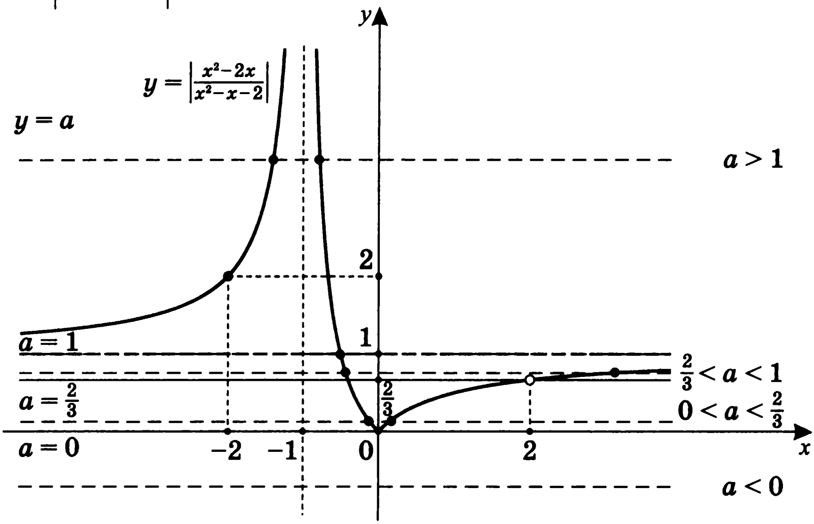
2. $\dfrac{1}{|x|-1} = a.$



Ответ: уравнение $\dfrac{1}{|x|-1} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -1)$ — два корня.
2. При $a = -1$ — один корень.
3. При $a \in (-1; 0]$ — корней нет.
4. При $a \in (0; \infty)$ — два корня.

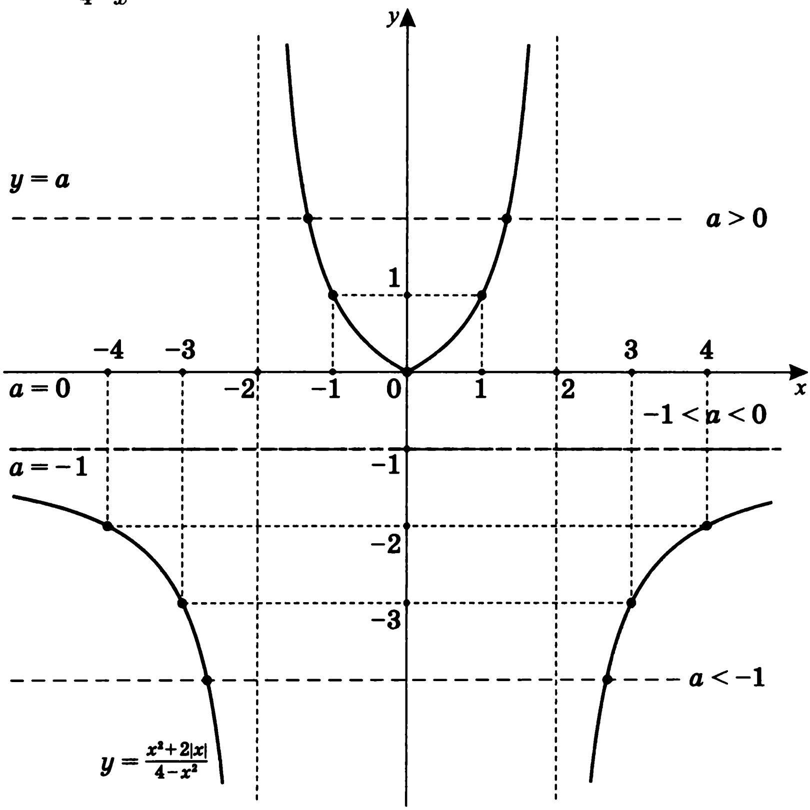
3. $\left|\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}\right| = a.$



Ответ: уравнение $\left|\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}\right| = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; 0)$ — корней нет.
2. При $a = 0$ — один корень.
3. При $a \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$ — два корня.
4. При $a = \dfrac{2}{3}$ — один корень.
5. При $a \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$ — два корня.
6. При $a = 1$ — один корень.
7. При $a \in (1; \infty)$ — два корня.

4. $\frac{x^2+2|x|}{4-x^2} = a.$

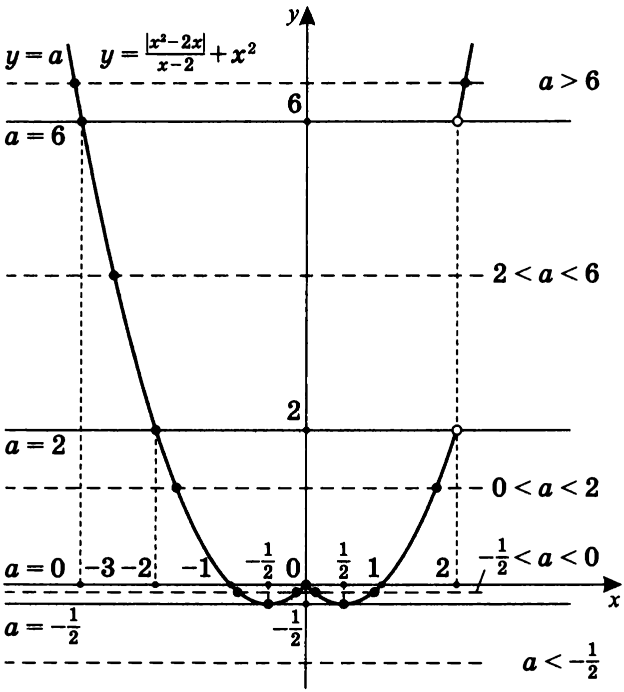


Ответ: уравнение $\frac{x^2+2|x|}{4-x^2} = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; 1)$ — два корня.
2. При $a \in [-1; 0)$ — корней нет.
3. При $a = 0$ — один корень.
4. При $a \in (0; \infty)$ — два корня.

5. $a - x^2 = \frac{|x^2-2x|}{x-2}$.

Пусть $y = x^2 + \frac{|x^2-2x|}{x-2}$.

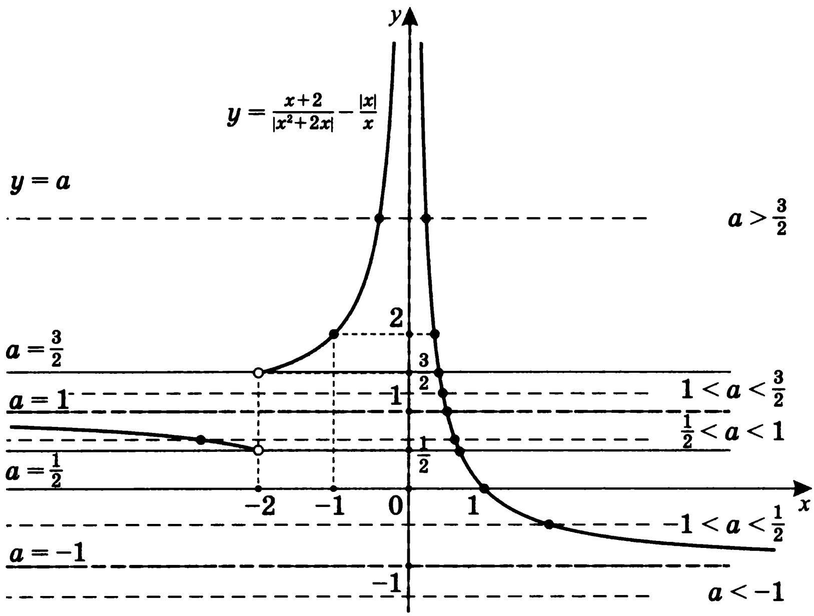


Ответ: уравнение $a - x^2 = \frac{|x^2-2x|}{x-2}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -0{,}5)$ — корней нет.
2. При $a = -0{,}5$ — два корня.
3. При $a \in (-0{,}5; 0)$ — четыре корня.
4. При $a = 0$ — три корня.
5. При $a \in (0; 2)$ — два корня.
6. При $a \in [2; 6]$ — один корень.
7. При $a \in (6; \infty)$ — два корня.

6. $\frac{|x|}{x}+a=\frac{x+2}{|x^2+2x|}$.

Пусть $y=\frac{x+2}{|x^2+2x|}-\frac{|x|}{x}$.

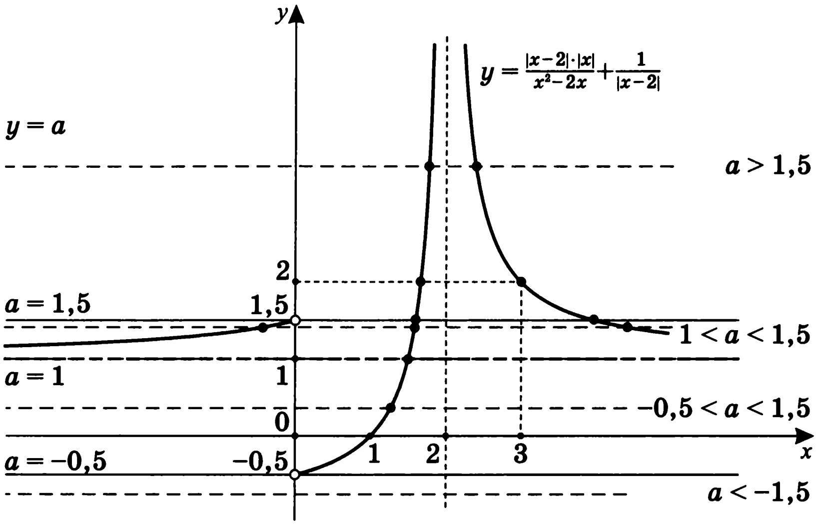


Ответ: уравнение $\frac{|x|}{x}+a=\frac{x+2}{|x^2+2x|}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a\in(-\infty;-1]$ — корней нет.
2. При $a\in\left(-1;\frac{1}{2}\right]$ — один корень.
3. При $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)$ — два корня.
4. При $a\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$ — один корень.
5. При $a\in\left(\frac{3}{2};\infty\right)$ — два корня.

7. $a - \frac{1}{|x-2|} = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x}$.

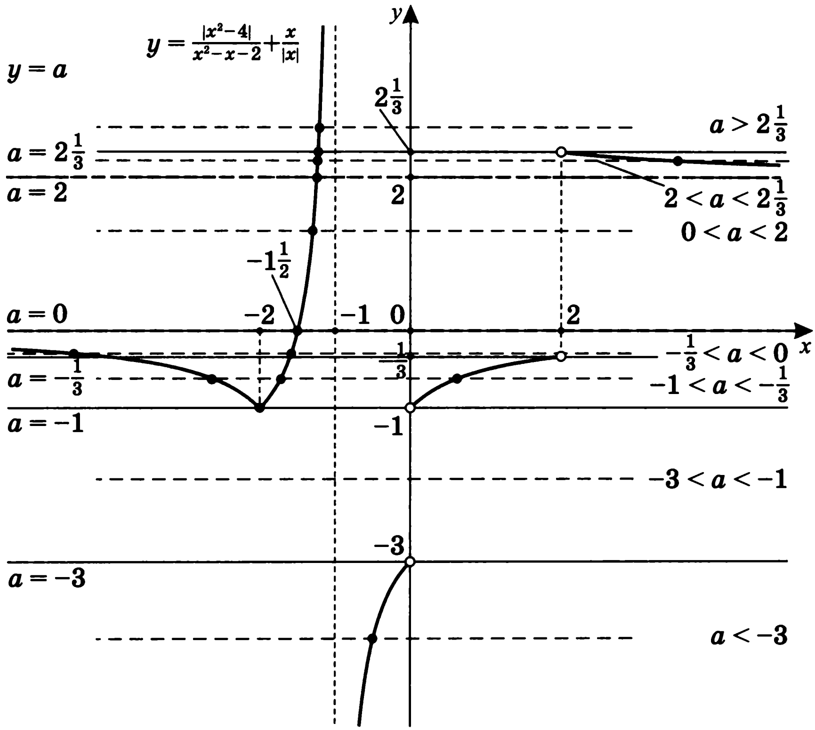
Пусть $y = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x} + \frac{1}{|x-2|}$.



Ответ: уравнение $a - \frac{1}{|x-2|} = \frac{|x-2| \cdot |x|}{x^2-2x}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -0,5]$ — корней нет.
2. При $a \in (-0,5; 1]$ — один корень.
3. При $a \in (1; 1,5)$ — три корня.
4. При $a \in [1,5; \infty)$ — два корня.

8. $a-\frac{x}{|x|}=\frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$. Пусть $y=\frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}+\frac{x}{|x|}$.



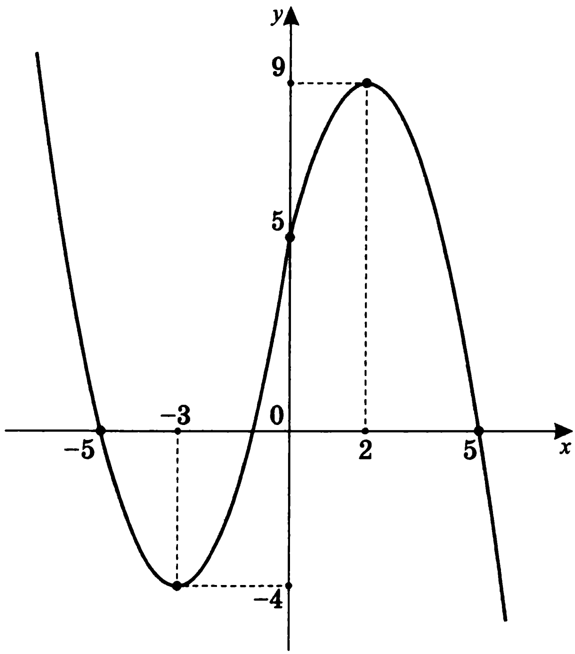
Ответ: уравнение $a-\frac{x}{|x|}=\frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a\in(-\infty;-3)$ — один корень.
2. При $a\in[-3;-1)$ — корней нет.
3. При $a=-1$ — один корень.
4. При $a\in\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ — три корня.
5. При $a\in\left[-\frac{1}{3};0\right)$ — два корня.
6. При $a\in[0;2]$ — один корень.
7. При $a\in\left(2;2\frac{1}{3}\right)$ — два корня.
8. При $a\in\left[2\frac{1}{3};\infty\right)$ — один корень.

Ответы на самостоятельную работу 9

1. $a \geqslant 0$; $a \leqslant -2$.

2. График функции $y = (5 - |x|)(x + 1)$:



1. При $a > 9$ существует единственный корень.
2. При $a = 9$ существуют два корня.
3. При $a \in (-4; 9)$ существуют три корня.
4. При $a = -4$ существуют два корня.
5. При $a < -4$ существует единственный корень.

3. 1. При $a > 9$ корней нет.
2. При $a = 9$ существует единственный корень.
3. При $-8 < a < 9$ существуют два корня.
4. При $a = -8$ существуют три корня.
5. При $-72 < a < -8$ существуют четыре корня.
6. При $a = -72$ существуют три корня.

7. При $-90 < a < -72$ существуют два корня.
8. При $a = -90$ существует единственный корень.
9. При $a < -90$ корней нет.

Значит

а) нечетное число корней при $a \in \{-90; -72; -56; 9\}$;

б) четное число корней

при $a \in (-90; -72) \cup (-72; -56) \cup (-56; 9)$.

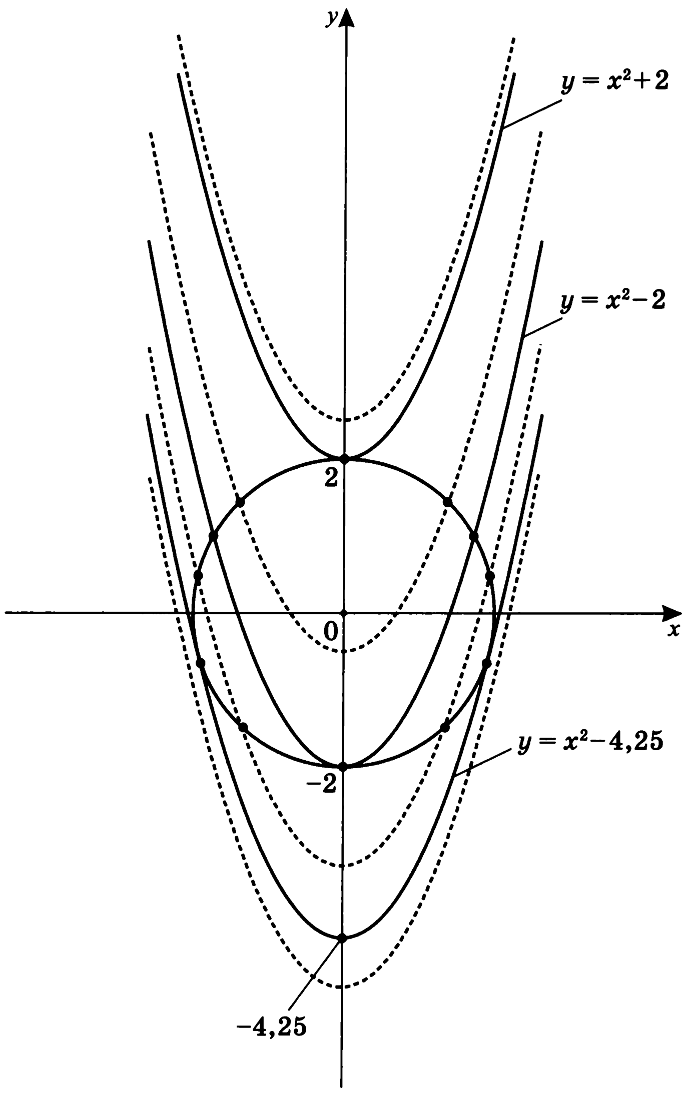
4. 1. При $a > \frac{20}{21}$ существует единственный корень.
2. При $a = \frac{20}{21}$ существуют два корня.
3. При $0 < a < \frac{20}{21}$ существуют три корня.
4. При $a = 0$ существуют два корня.

5. 1. При $a < -2$ существует единственный корень.
2. При $-2 \leqslant a < 0$ существуют два корня.
3. При $a = 0$ корней нет.
4. При $0 < a < 1{,}2$ существует единственный корень.
5. При $a = 1{,}2$ существуют два корня.
6. При $1{,}2 < a < 1{,}25$ существуют три корня.
7. При $a = 1{,}25$ существуют два корня.
8. При $a > 1{,}25$ существует единственный корень.

6. При $a \in \left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2}; 0; 1; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Ответы на самостоятельную работу 10

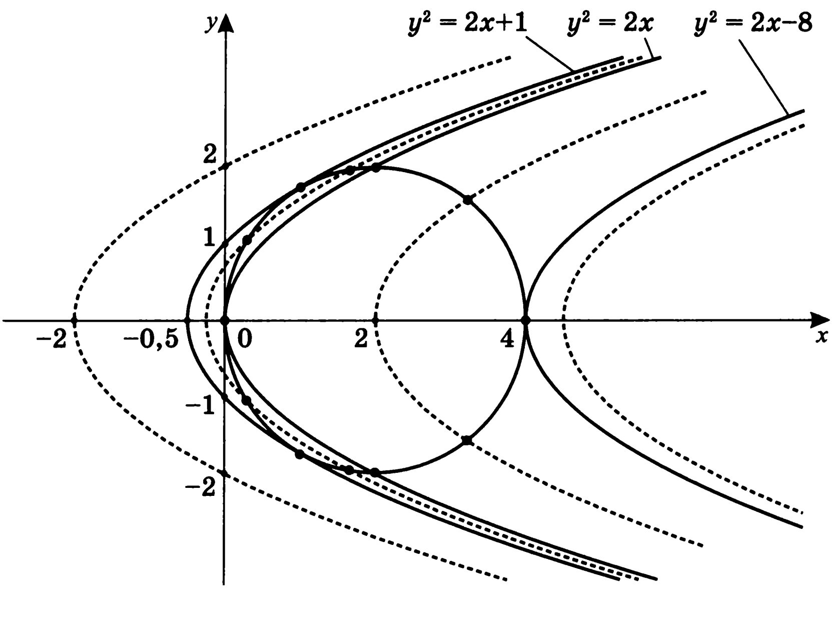
1. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра b: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b \end{cases}$?



Ответ: система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 + b \end{cases}$ в зависимости от значения параметра b имеет:

1. При $b \in (-\infty; -4{,}25)$ — решений нет.
2. При $b = -4{,}25$ — два решения.
3. При $b \in (-4{,}25; -2)$ — четыре решения.
4. При $b = -2$ — три решения.
5. При $b \in (-2; 2)$ — два решения.
6. При $b = 2$ — одно решение.
7. При $b \in (2; \infty)$ — решений нет.

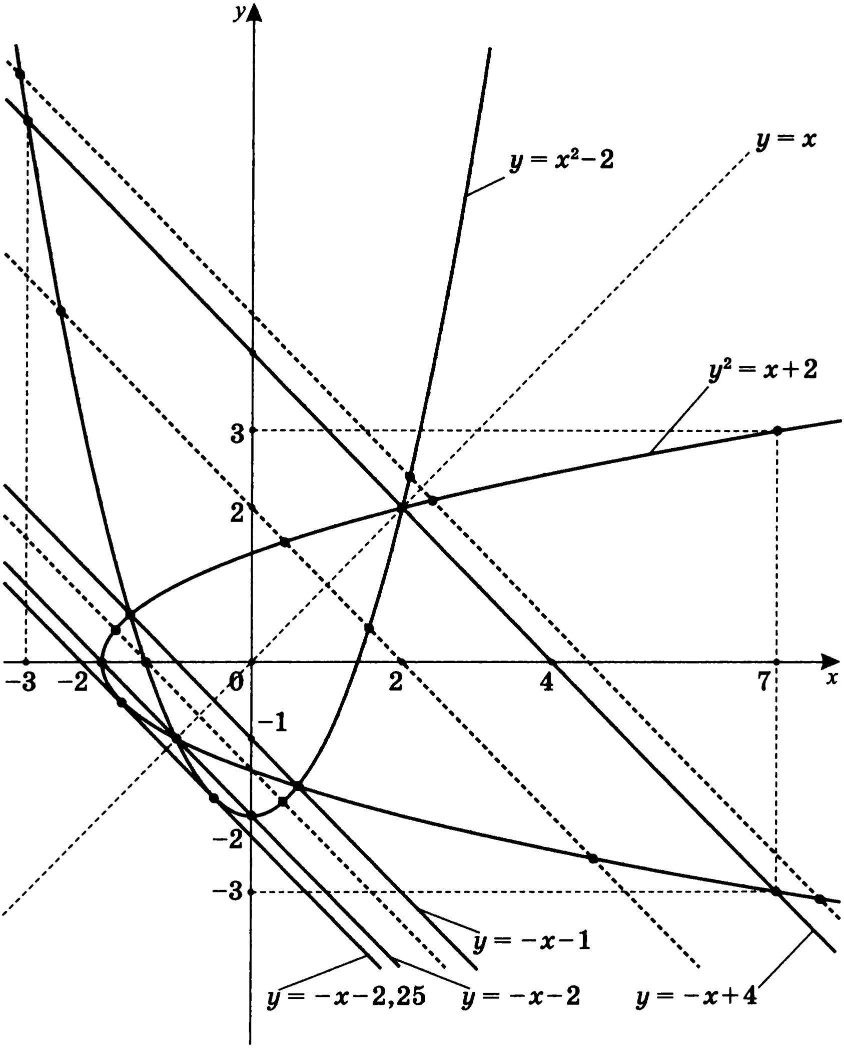
2. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра m: $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2x + m \end{cases}$?



Ответ: система уравнений $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 2x + m \end{cases}$ в зависимости от значения параметра m имеет:

1. При $m \in (-\infty; -8)$ — решений нет.
2. При $m = -8$ — одно решение.
3. При $m \in (-8; 0)$ — два решения.
4. При $m = 0$ — три решения.
5. При $m \in (0; 1)$ — четыре решения.
6. При $m = 1$ — два решения.
7. При $m \in (1; \infty)$ — решений нет.

3. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a: $\begin{cases} x+y=a \\ (y^2-x-2)(y-x^2+2)=0 \end{cases}$?

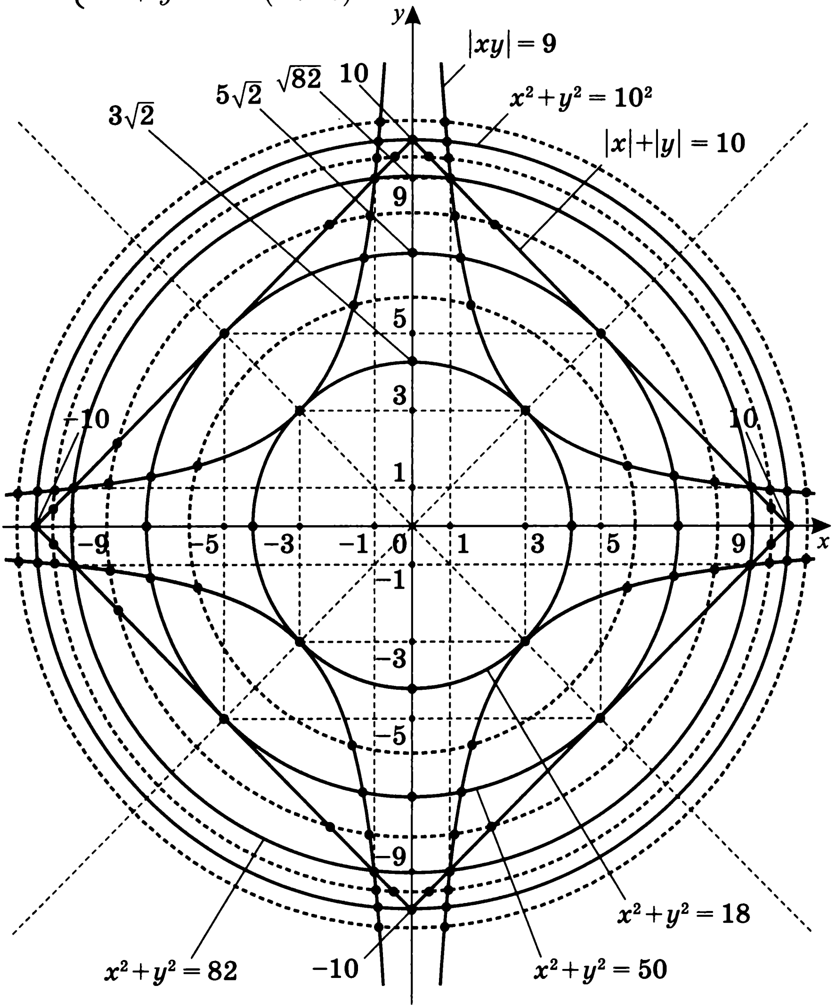


Ответ: система уравнений $\begin{cases} x+y=a \\ (y^2-x-2)\,(y-x^2+2)=0 \end{cases}$

в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -2{,}25)$ — решений нет.
2. При $a = -2{,}25$ — два решения.
3. При $a \in (-2{,}25; -2)$ — четыре решения.
4. При $a = -2$ — три решения.
5. При $a \in (-2; -1)$ — четыре решения.
6. При $a = -1$ — два решения.
7. При $a \in (-1; 4)$ — четыре решения.
8. При $a = 4$ — три решения.
9. При $a \in (4; \infty)$ — четыре решения.

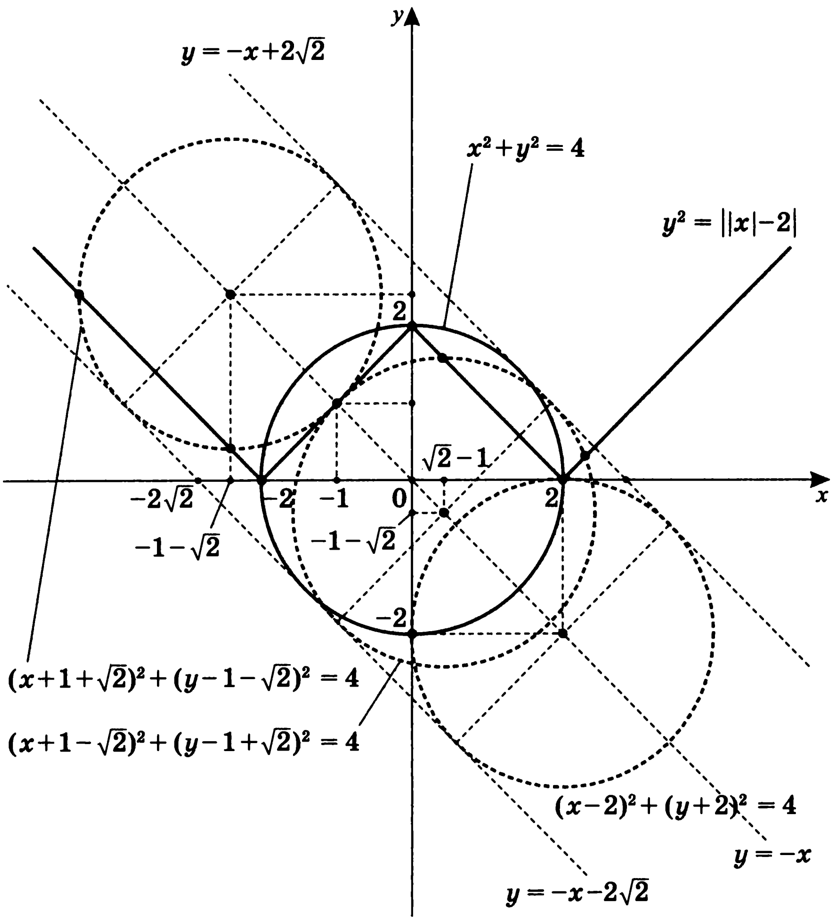
4. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от положительного значения параметра a: $\begin{cases} (|x|+|y|-10)(9-|xy|)=0 \\ x^2+y^2=a^2\ (a>0) \end{cases}$?



Ответ: система уравнений $\begin{cases} (|x| + |y| - 10)(9 - |x|) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0) \end{cases}$ в зависимости от положительного значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(0; 3\sqrt{2}\right)$ — решений нет.
2. При $a = 3\sqrt{2}$ — четыре решения.
3. При $a \in \left(3\sqrt{2}; 5\sqrt{2}\right)$ — восемь решений.
4. При $a = 5\sqrt{2}$ — двенадцать решений.
5. При $a \in \left(5\sqrt{2}; \sqrt{82}\right)$ — шестнадцать решений.
6. При $a = \sqrt{82}$ — восемь решений.
7. При $a \in \left(\sqrt{82}; 10\right)$ — шестнадцать решений.
8. При $a = 10$ — двенадцать решений.
9. При $a \in (10; \infty)$ — восемь решений.

5. Сколько решений имеет система уравнений в зависимости от значения параметра a: $\begin{cases} (x-a)^2+(y+a)^2=4 \\ \big||x|-2\big|=y \end{cases}$?



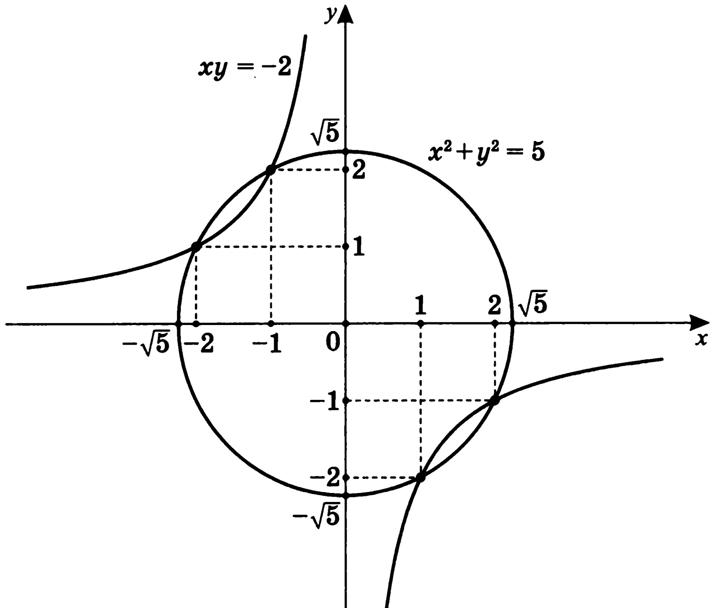
Ответ: система уравнений $\begin{cases} (x-a)^2+(y+a)^2=4 \\ \big||x|-2\big|=y \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a\in\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right)$ — два решения.
2. При $a=-1-\sqrt{2}$ — три решения.

3. При $a \in \left(-1-\sqrt{2}; -2\right)$ — четыре решения.
4. При $a = -2$ — три решения.
5. При $a \in (-2; 0)$ — два решения.
6. При $a = 0$ — три решения.
7. При $a \in \left(0; \sqrt{2}-1\right)$ — четыре решения.
8. При $a = \sqrt{2}-1$ — три решения.
9. При $a \in \left(\sqrt{2}-1; 2\right)$ — два решения.
10. При $a = 2$ — одно решение.
11. При $a \in (2; \infty)$ — решений нет.

Решение итоговой самостоятельной работы

I. **1.** Графически решите уравнение с параметрами: $(x^2+y^2-5)\cdot(xy+2)=a$.

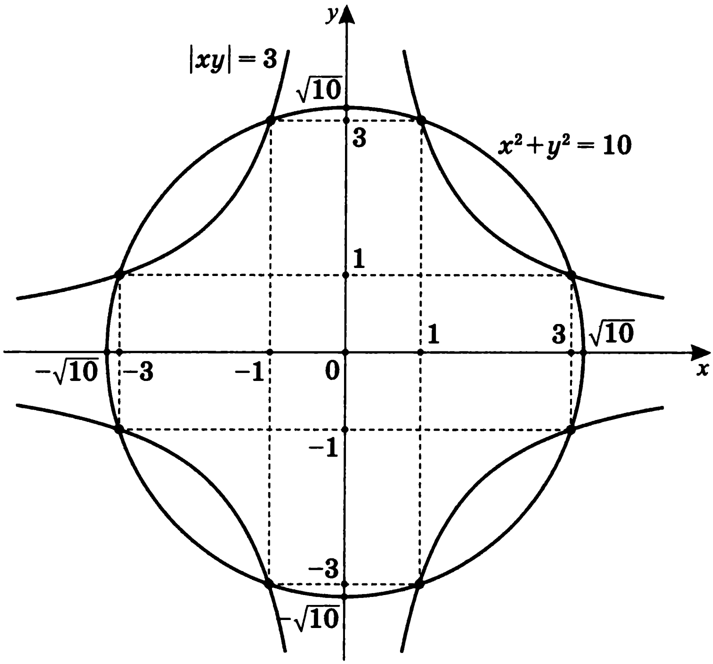


Ответ: уравнение $(x^2+y^2-5)\cdot(xy+2)=a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a\in(-\infty;-\sqrt{5})$ — один корень.
2. При $a=-\sqrt{5}$ — два корня.
3. При $a\in(-\sqrt{5};-2)$ — три корня.
4. При $a=-2$ — два корня.
5. При $a\in(-2;-1)$ — три корня.
6. При $a=-1$ — два корня.
7. При $a\in(-1;0)$ — три корня.
8. При $a\in(0;1)$ — три корня.
9. При $a=1$ — два корня.
10. При $a\in(1;2)$ — три корня.
11. При $a=2$ — два корня.

12. При $a \in \left(2; \sqrt{5}\right)$ — три корня.
13. При $a = \sqrt{5}$ — два корня.
14. При $a \in \left(\sqrt{5}; \infty\right)$ — один корень.

2. Графически решите уравнение с параметрами:
$\left(x^2 + y^2 - 10\right) \cdot \left(|xy| - 3\right) = a.$



Ответ: уравнение $\left(x^2 + y^2 - 10\right) \cdot \left(|xy| - 3\right) = a$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(-\infty; -\sqrt{10}\right)$ — два корня.
2. При $a = -\sqrt{10}$ — три корня.
3. При $a \in \left(-\sqrt{10}; -3\right)$ — четыре корня.
4. При $a = -3$ — два корня.
5. При $a \in (-3; -1)$ — четыре корня.
6. При $a = -1$ — два корня.
7. При $a \in (-1; 0)$ — четыре корня.

8. При $a \in (0;1)$ — четыре корня.
9. При $a = 1$ — два корня.
10. При $a \in (1;3)$ — четыре корня.
11. При $a = 3$ — два корня.
12. При $a \in \left(3;\sqrt{10}\right)$ — четыре корня.
13. При $a = \sqrt{10}$ — три корня.
14. При $a \in \left(\sqrt{10};\infty\right)$ — два корня.

II. **1.** При $a \in \left(8-5\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right) \cup \left(4+\sqrt{2};8+5\sqrt{2}\right)$.

2. 1. При $a > 2$ корней нет.
2. При $a = 2$ существуют два корня.
3. При $1 < a < 2$ существуют четыре корня.
4. При $a = 1$ существуют шесть корней.
5. При $\frac{2}{5}\sqrt{5} < a < 1$ существуют восемь корней.
6. При $a = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ существуют четыре корня.
7. При $a < \frac{2}{5}\sqrt{5}$ корней нет.

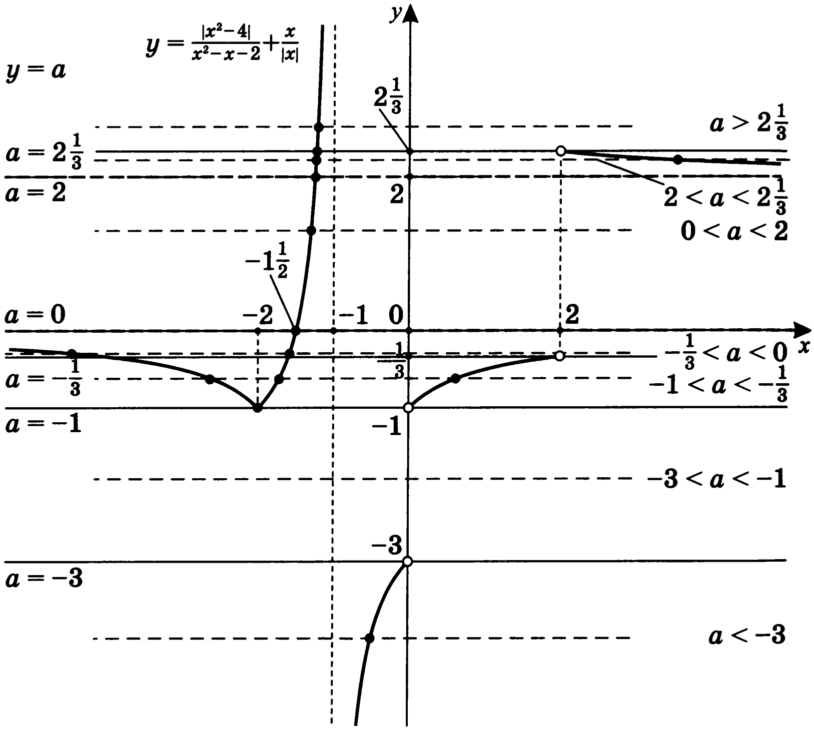
3. 1. При $a \in (3;11)$ решений нет.
2. При $\left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 11 \end{array}\right.$ существует единственное решение.
3. При $\left[\begin{array}{l} a < 3 \\ a > 11 \end{array}\right.$ существуют два решения.

4. 1. При $a \in (-\infty;3)$ решений нет.
2. При $a = 3$ существуют два решения.
3. При $a > 3$ существуют четыре решения.

5. 1. При $a \in \left\{0;\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$ существует единственное решение.
2. При $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0\right) \cup \left(0;\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ существуют два решения.
3. При $a \in \left(-\infty;-\frac{2}{4}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{4};\infty\right)$ решений нет.

III. **1.** Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a: $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$?

Пусть $y = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2} + \frac{x}{|x|}$.



Ответ: уравнение $a - \frac{x}{|x|} = \frac{|x^2-4|}{x^2-x-2}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in (-\infty; -3)$ — один корень.
2. При $a \in [-3; -1)$ — корней нет.
3. При $a = -1$ — один корень.
4. При $a \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$ — три корня.

5. При $a \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ — два корня.
6. При $a \in [0; 2]$ — один корень.
7. При $a \in \left(2; 2\frac{1}{3}\right)$ — два корня.
8. При $a \in \left[2\frac{1}{3}; \infty\right)$ — один корень.

2. Сколько корней имеет уравнение $a|x-2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от *положительного* значения параметра a: а) на $(-\infty; \infty)$; б) на $[-1; \infty)$?

Первый способ

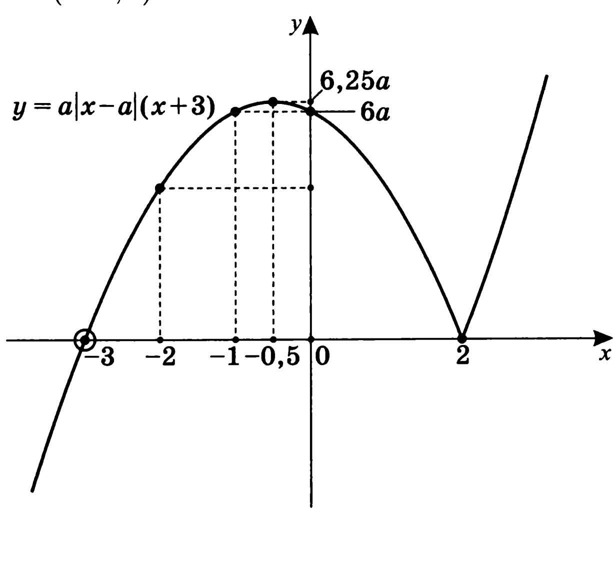
а) Так как $x + 3 \neq 0$, то уравнение равносильно $a|x-2|(x+3) = 5$.

Пусть $f(x) = a|x-2|(x+3)$.

Так как $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geqslant 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$, то

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2+x-6), & x \geqslant 2 \\ -a(x^2+x-6), & x < 2 \end{cases}.$$

Отметим, что $f(x) = -a\left((x+0{,}5)^2 - 6{,}25\right)$ на $(-\infty; 2)$.



При пересечении графика уравнения $y = f(x)$ и прямой $y = 5$ получим:

1. Если $6{,}25a < 5$, т. е. $0 < a < 0{,}8$ — один корень.

2. Если $a = 0{,}8$ — два корня.

3. Если $a > 0{,}8$ — три корня.

б) Возможна и иная, более сложная постановка вопроса: сколько корней имеет уравнение $a|x-2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от положительного значения параметра a на $[-1; \infty)$?

Тогда ответ будет таким:

1. При $a \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — один корень.

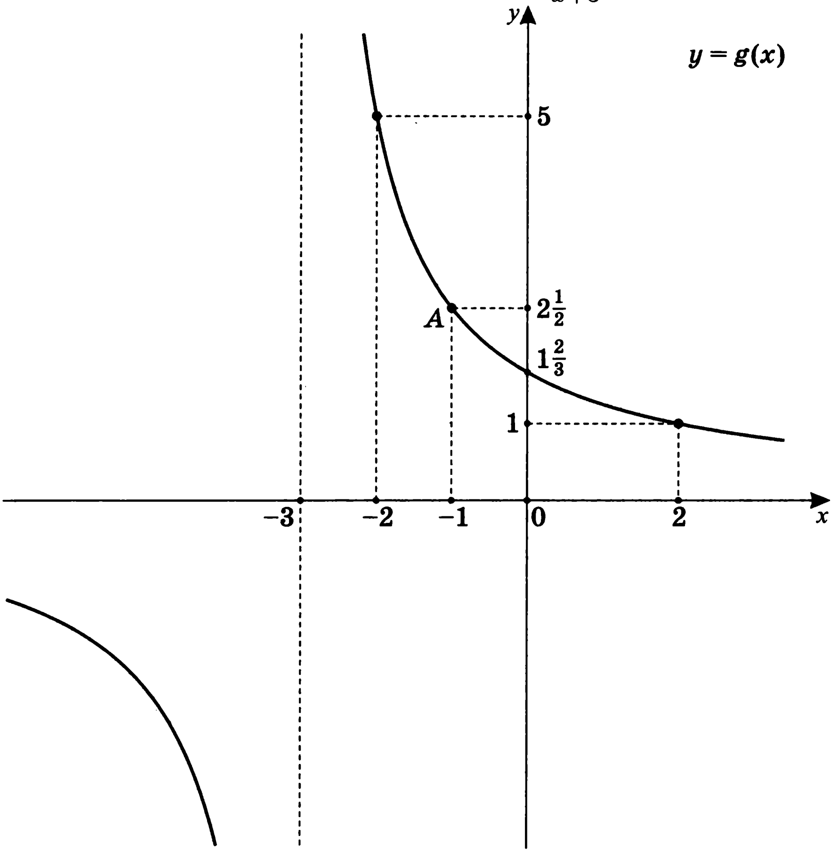
2. При $a = \frac{4}{5}$ — два корня.

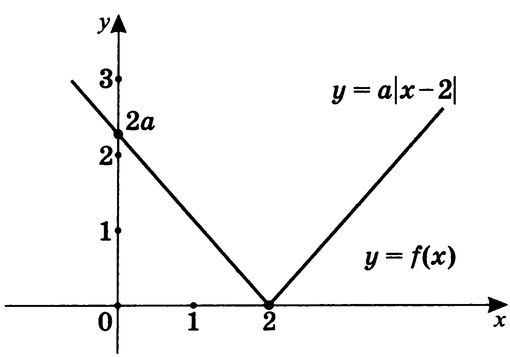
3. При $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right]$ — три корня.

4. При $a \in \left(\frac{5}{6}; \infty\right)$ — два корня.

Второй способ

Пусть $f(x) = a|x-2|$, $g(x) = \frac{5}{x+3}$.





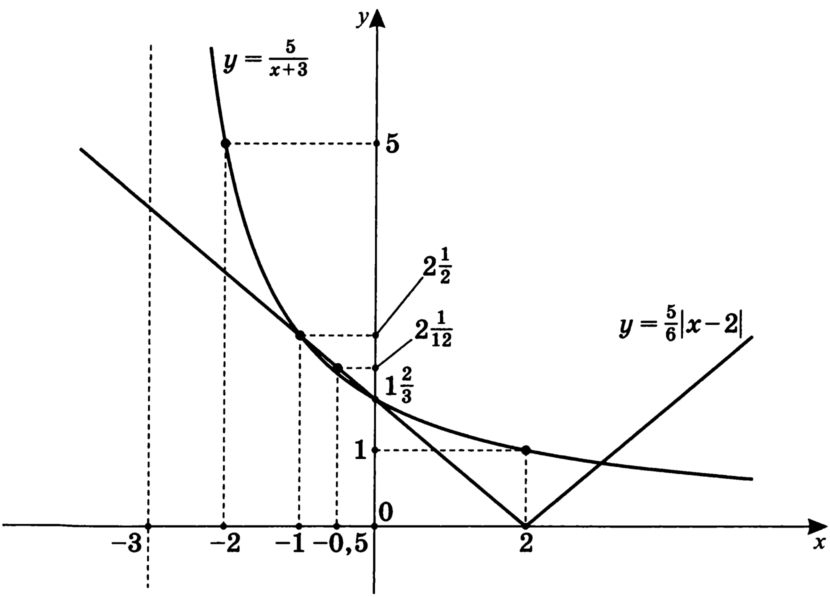
Прежде чем мы рассмотрим оба графика на одном чертеже, напишем уравнение прямой, проходящей через точки $\left(-1; 2\frac{1}{2}\right)$ и $\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$.

$$\begin{cases} 2\frac{1}{2} = -k + b \\ 1\frac{2}{3} = k \cdot 0 + b \end{cases}; \quad \begin{cases} k = -\frac{5}{6} \\ b = 1\frac{2}{3} \end{cases},$$

значит $y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3}$, или $y = -\frac{5}{6}(x - 2)$.

Таким образом, $y = -\frac{5}{6}(x-2)$ — левая ветвь графика $y = \frac{5}{6}|x - 2|$.

Рассмотрим на одном чертеже графики $y = \frac{5}{x+3}$ и $y = \frac{5}{6}|x - 2|$.



Так как $x < 2$, то выясним, при каком значении параметра a прямая $y = a(2 - x)$ касается гиперболы $y = \frac{5}{x+3}$, т. е. решим уравнение $\frac{5}{x+3} = a(2 - x)$ и выясним, при каком a имеется только одно решение.

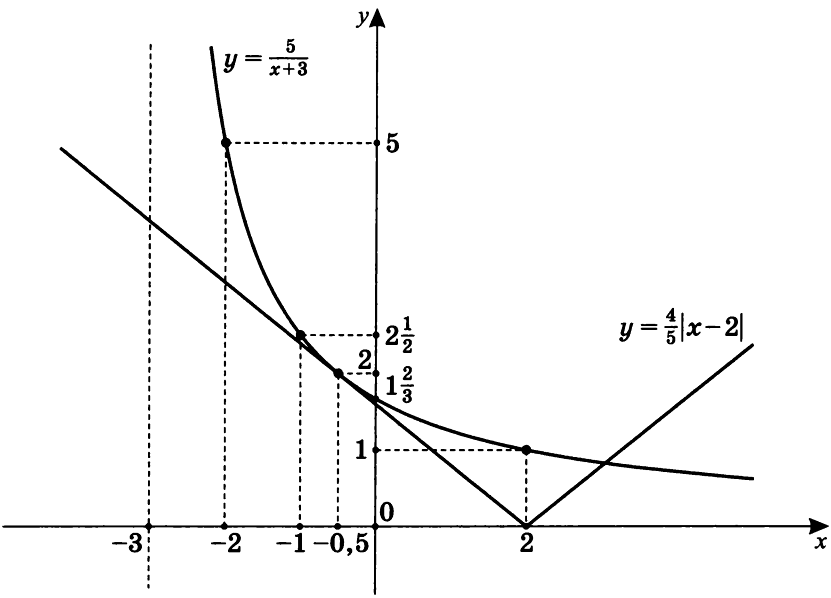
$$y = a(-x^2 - x + 6); \qquad ax^2 + ax - 6a + 5 = 0;$$

$$D = a^2 + 24a^2 - 20a = 0;$$

$$25a^2 - 20a = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} a = 0 \ (a > 0) \\ a = \frac{4}{5} \end{array}\right. .$$

Очевидно, что $x_0 = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$,

и $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{-\frac{1}{2}+3} = 2.$



В первичной постановке задачи ответ исходя из графиков будет таким:

1. При $a \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — один корень.

2. При $a = \frac{4}{5}$ — два корня.

3. При $a \in \left(\frac{4}{5}; \infty\right)$ — три корня.

Учитывая более сложную постановку задачи и исходя из чертежей, можно записать ответ следующим образом.

Ответ: уравнение $a|x-2| = \frac{5}{x+3}$ в зависимости от значения параметра a имеет:

1. При $a \in \left(0; \frac{4}{5}\right)$ — один корень.
2. При $a = \frac{4}{5}$ — два корня.
3. При $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{6}\right]$ — три корня.
4. При $a \in \left(\frac{5}{6}; \infty\right)$ — два корня.

3. При каких значениях параметра b уравнение $|x - b^2 + 4b - 2| + |x - b^2 + 2b + 3| = 2b - 5$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$?

Обратим внимание на тот факт, что разность подмодульных значений равна правой части,

т. е. $(x - b^2 + 4b - 2) - (x - b^2 + 2b + 3) = 2b - 5$.

Тогда, полагая, что

$x - b^2 + 4b - 2 = m$, а $x - b^2 + 2b + 3 = n$,

получим другую запись исходного уравнения:

$|m| + |n| = m - n$.

Так как $|m| + |n| = \left\{\begin{array}{c} m+n,\ m \geqslant 0,\ n \geqslant 0 \\ -m+n,\ m \leqslant 0,\ n \geqslant 0 \\ m-n,\ m \geqslant 0,\ n \leqslant 0 \\ \hline -m-n,\ m \leqslant 0,\ n \leqslant 0 \end{array}\right.$,

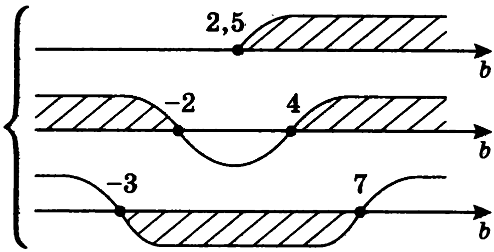
то $|m| + |n| = m - n$ только при $\begin{cases} m \geqslant 0 \\ n \leqslant 0 \end{cases}$.

Значит, $\begin{cases} x \geqslant b^2 - 4b + 2 \\ x \leqslant b^2 - 2b - 3 \end{cases}$,

т. е. $b^2 - 4b + 2 \leqslant x \leqslant b^2 - 2b - 3$.

Тогда получаем:

$$\begin{cases} b^2-4b+2\leqslant b^2-2b-3 \\ b^2-2b-3\geqslant 5 \\ b^2-4b+2\leqslant 23 \end{cases};\quad \begin{cases} b\geqslant 2{,}5 \\ b^2-2b-8\geqslant 0 \\ b^2-4b-21\leqslant 0 \end{cases};$$



$b\in[4;7]$.

Примечание. Если было бы требование о том, чтобы все корни уравнения принадлежали отрезку $[5;23]$, то должно было бы выполняться условие

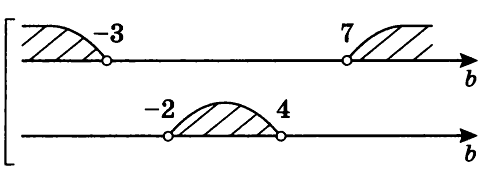
$5\leqslant b^2-4b+2\leqslant x\leqslant b^2-2b-3\leqslant 23$,

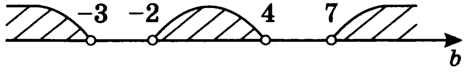
т. е. $\begin{cases} b^2-4b+2\leqslant b^2-2b-3 \\ b^2-2b-3\leqslant 23 \\ b^2-4b+2\geqslant 5 \end{cases}$

Но требование иное: необходимо найти значение параметра, при котором имеется хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[5;23]$.

В этом случае проще вначале выяснить вопрос, при каких b корень уравнения не принадлежит отрезку $[5;23]$:

$$\left[\begin{array}{l} b^2-2b-3<5 \\ b^2-4b+2>23 \end{array}\right.;\quad \left[\begin{array}{l} (b-4)(b+2)<0 \\ (b-7)(b+3)>0 \end{array}\right.;$$





Значит, при $b \in [-3; -2] \cup [4; 7]$ возможный корень есть.

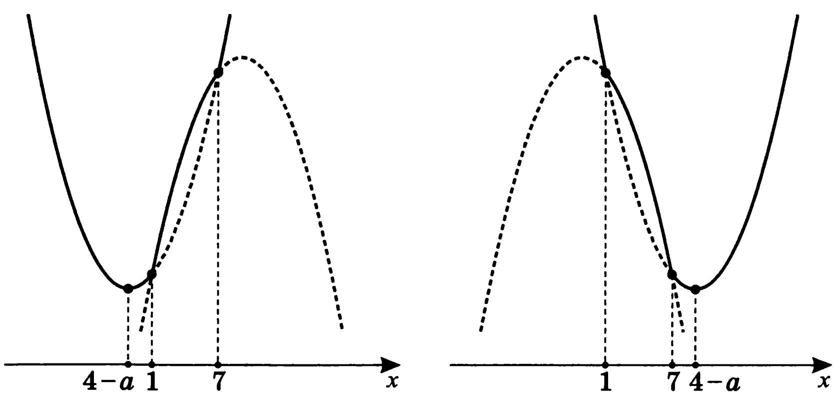
Учитывая, что $b^2 - 4b + 2 \leqslant b^2 - 2b - 3$, получим, что при $b \in [4; 7]$ существует хотя бы один корень на $[5; 23]$.

4. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1?

$$t(x) = |x^2 - 8x + 7| = \begin{cases} x^2 - 8x + 7, \ x \leqslant 1, \ x \geqslant 7 \\ -(x^2 - 8x + 7), \ 1 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}.$$

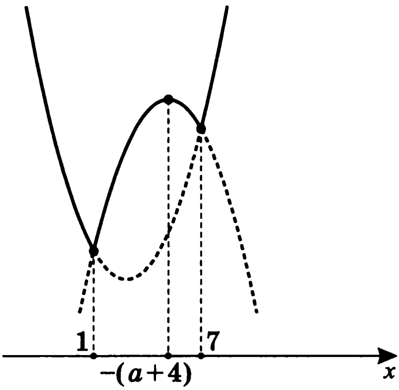
а) Если $x^2 - 8x + 7 \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant 1$ или $x \geqslant 7$,
то $f(x) = 2ax + x^2 - 8x + 7$;
$f(x) = x^2 + 2x(a - 4) + 7$,
где $x_0 = 4 - a$ — абсцисса вершины параболы.

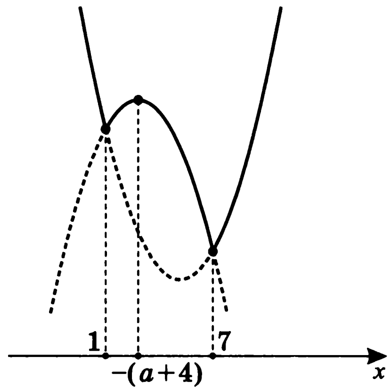
Возможный вид графика:



б) Если $x^2 - 8x + 7 \leqslant 0$, т.е. $1 \leqslant x \leqslant 7$,
то $f(x) = -x^2 + 2(a + 4)x - 7$,
где $x_0 = -4 - a$ — абсцисса вершины параболы.

Возможный вид графика:





Из графиков очевидно следует, что наименьшее значение функция может принимать только в точках с абсциссами $x = 1$, $x = 7$ или $x = 4 - a$. Тогда

$$\begin{cases} f(1) > 1 \\ f(7) > 1 \\ f(4-a) > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2a > 1 \\ 14a > 1 \\ 2a(4-a) + \left|(4-a)^2 - 8(4-a) + 7\right| > 1 \end{cases};$$

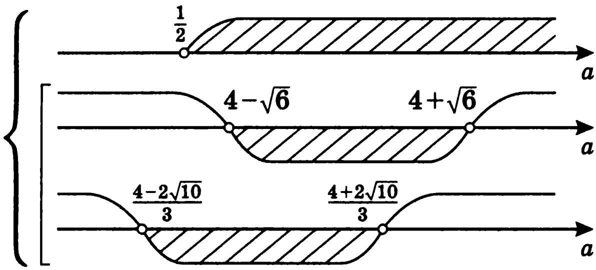
$$\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ 2a^2 - 8a + 1 < |a^2 - 9| \end{cases}.$$

Известно второе свойство модульных неравенств:

$$|\alpha| > \beta \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \alpha < -\beta \end{array}\right..$$

Используя его, получим:

$$\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - 9 > 2a^2 - 8a + 1 \\ a^2 - 9 < -2a^2 + 8a - 1 \end{array}\right. \end{cases}; \qquad \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - 8a + 10 < 0 \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{array}\right. \end{cases};$$



Значит, при $a \in \left(\frac{1}{2}; 4+\sqrt{6}\right)$ наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

5*. При каких значениях x неравенство

$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5 > 0$ справедливо для $a \in [-2; 1]$?

Так как корни данного неравенства есть делители $a^2 + 4a - 5 = (a-1)(a+5)$, то проверим корень $x = a - 1$. Действительно,

$f(a-1) =$

$= (a+2)(a-1)^3-(1+2a)(a-1)^2-6(a-1)+(a-1)(a+5) =$

$= (a-1)\Big((a+2)(a-1)^2-(1+2a)(a-1)-6+a+5\Big) =$

$= (a-1)\Big((a+2)(a-1)^2-(1+2a)(a-1)+a-1\Big),$

т. е. $f(x) = \Big(x-(a-1)\Big)\Big((a+2)x^2-(1+2a)x+a-1\Big).$

Очевидно, что из предыдущего разложения следует, что $x = a - 1$ — корень двойной кратности.

Для $(a+2)x^2 - (1+2a)x + a - 1 = 0$

$D = (1+2a)^2 - 4(a+2)(a-1) = 9,$

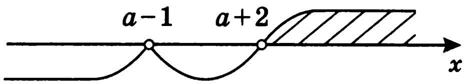
т. е. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+2a+3}{2} = a+2 \\ x = \frac{1+2a-3}{2} = a-1 \end{array}\right.$.

Тогда неравенство

$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$

имеет вид: $\Big(x-(a-1)\Big)^2\Big(x-(a+2)\Big)>0$

$(\,a+2>a-1,$ так как $2>-1\,)$.



Значит, $x\in(0;3)$, так как $-2\leqslant a\leqslant 1$.

6*. Решите уравнение $(x-1)\log_3 x=\frac{x+1}{2}$.

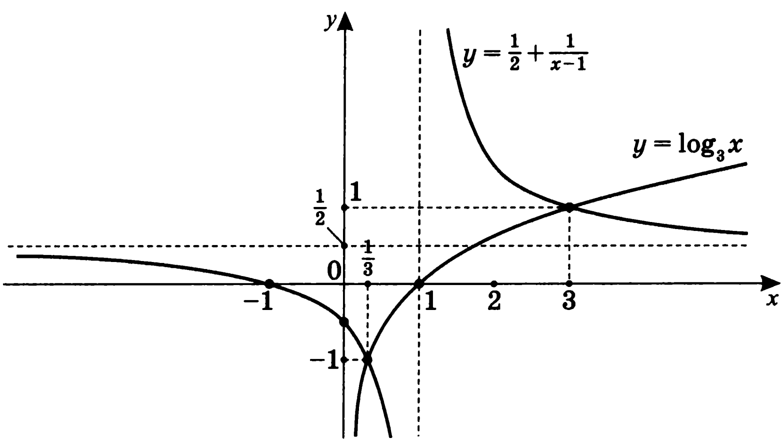
а) Пусть $x=1$, тогда $0=1$ — ложь.

б) Пусть $x\neq 1$, тогда $\log_3 x=\frac{x+1}{2(x-1)}$.

Попробуем решить это уравнение графически, так как для трансцендентных уравнений общих методов решения нет.

Построим график $t(x)=\frac{x+1}{2(x-1)}$.

$\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{x-1+2}{2(x-1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x-1}$.



Из графиков следует, что есть две общие точки, т. е. два решения.

Так как $y = \log_3 x$, то проверим целые значения логарифма.

Пусть $x = 3$, тогда $\log_3 3 = 1$.

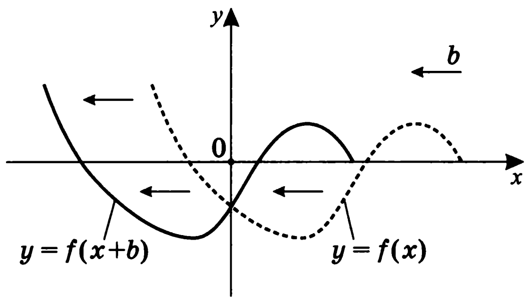
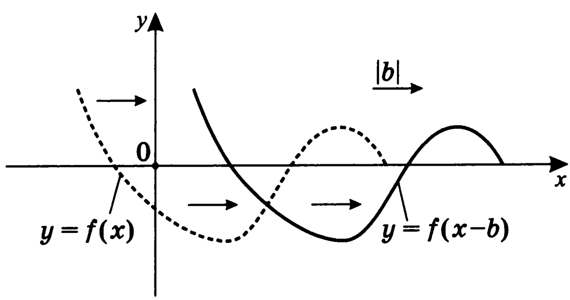
$t(3) = \frac{3+1}{2\cdot(3-1)} = 1$, значит, $x = 3$ — корень исходного уравнения.

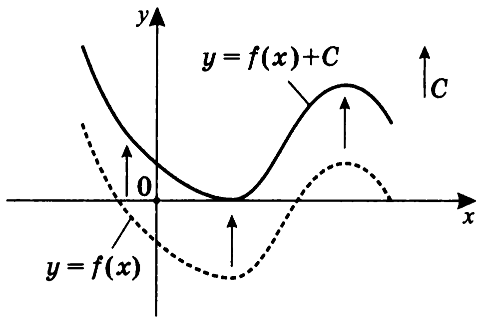
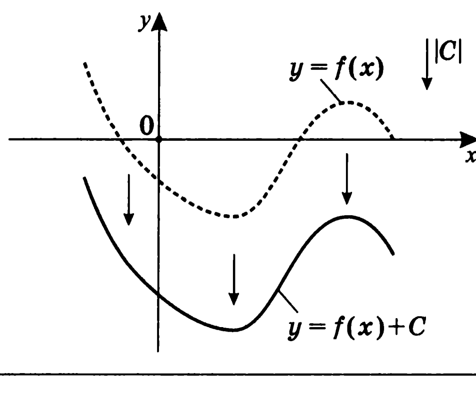
Пусть $x = \frac{1}{3}$, тогда $\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

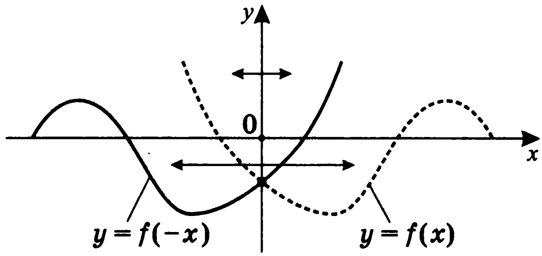
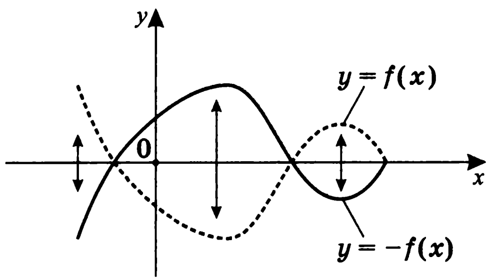
$t\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}+1}{2\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)} = -1$, значит, $x = \frac{1}{3}$ — также корень исходного уравнения.

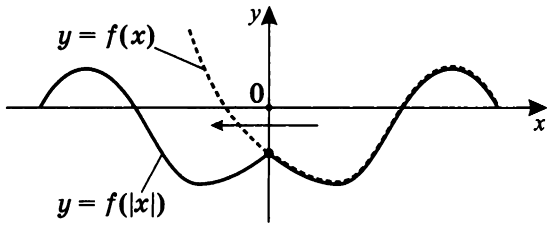
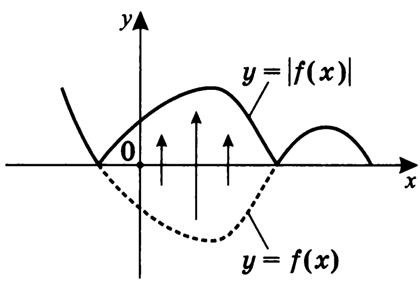
Ответ: $\left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$.

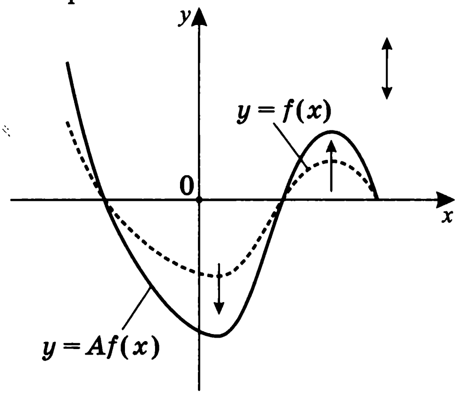
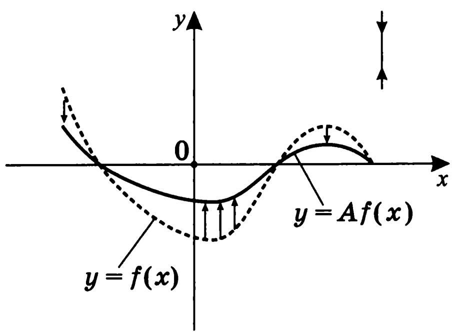
Основные виды преобразований графиков

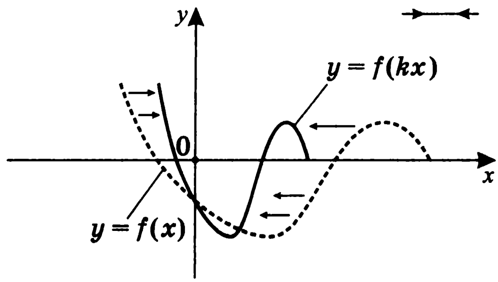
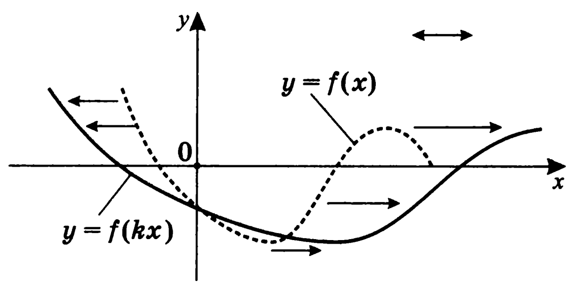
<table>
<tr><td colspan="2">Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x+b)$ графика функции $y = f(x)$ область изменения остается прежней, а конечная область определения сдвигается на $|b|$ вправо при $b < 0$ и влево при $b > 0$. Если область определения — $(-\infty; \infty)$, то изменений нет.</td></tr>
<tr><td>1. $y = f(x+b)$
$(b > 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц влево.

</td></tr>
<tr><td>2. $y = f(x+b)$
$(b < 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $|b|$ единиц вправо.

</td></tr>
</table>

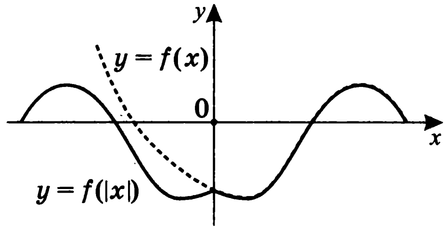
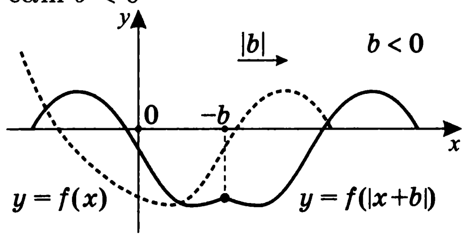
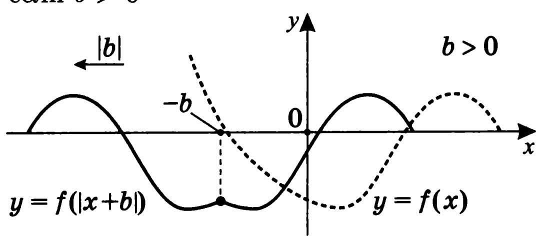
<table>
<tr><td colspan="2">Очевидно, что при преобразовании вида $y = f(x) + C$ графика функции $y = f(x)$ область определения остается прежней, а конечная область изменений сдвигается по сравнению с $y = f(x)$ на $|C|$ согласно знаку. Если область изменений — $(-\infty; \infty)$, то она сохраняется.</td></tr>
<tr><td>3. $y = f(x) + C$ $(C > 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вверх.

</td></tr>
<tr><td>4. $y = f(x) + C$ $(C < 0)$</td><td>График получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $|C|$ единиц вниз.

</td></tr>
</table>

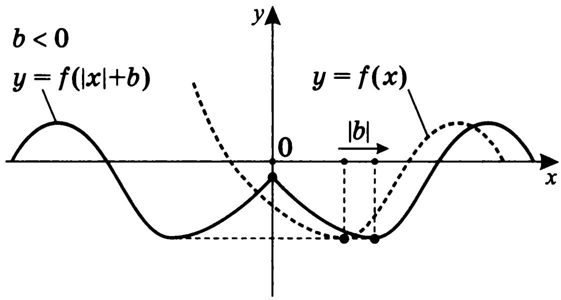
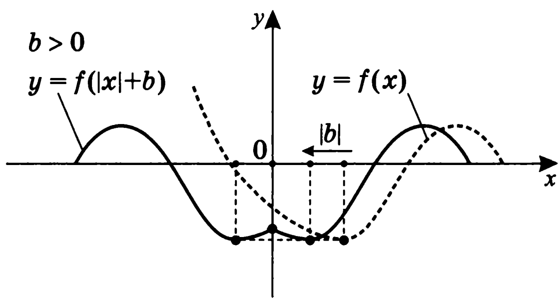
5. $y = f(-x)$	График получается симметричным отражением относительно оси Oy.  Точка пересечения графика $y = f(x)$ с осью Oy остается неизменной.
6. $y = -f(x)$	График получается симметричным отражением относительно оси Ox.  Точки пересечения графика $f(x)$ с осью Ox остаются неизменными.

7. $y = f(\lvert x \rvert)$	Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси Oy, удаляется, а вся часть, лежащая правее оси Oy и на ней, остается без изменений, а кроме того, симметрично отражается относительно оси Oy в левую полуплоскость. 
8. $y = \lvert f(x) \rvert$	Вся часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox и на оси, остается без изменения, а лежащая ниже оси Ox — симметрично отражается относительно этой оси вверх.  Итоговый график располагается в верхней полуплоскости.

9. $y = Af(x)$ $(A > 1)$	График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в A раз.  $D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.
10. $y = Af(x)$ $(0 < A < 1)$	График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в $\frac{1}{A}$ раз.  $D(f(x)) = D(Af(x))$. Точки пересечения графика с осью Ox остаются неизменными.

11. $y = f(kx)$ $(k > 1)$	График получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в k раз.  $E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.
12. $y = f(kx)$ $(0 < k < 1)$	График получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.  $E(f(x)) = E(f(kx))$. Точки пересечения графика с осью Oy остаются неизменными.

$y = f\,(\lvert x + b \rvert)$	Для построения данного графика сначала построим график $y = f\,(\lvert x \rvert)$: 
13. $y = f(\lvert x+b \rvert)$ $(b < 0)$	График $y = f(\lvert x \rvert)$ сдвинем вправо на $\lvert b \rvert$, если $b < 0$ 
14. $y = f(\lvert x+b \rvert)$ $(b > 0)$	График $y = f(\lvert x \rvert)$ сдвинем влево на $\lvert b \rvert$, если $b > 0$ 

15. $y=f(\|x\|+b)$ $(b<0)$	Сдвиг графика $y=f(x)$ вправо на $\|b\|$ и отражение полученного графика, находящегося в правой полуплоскости $(x \geqslant 0)$, в левую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика. 
16. $y=f(\|x\|+b)$ $(b>0)$	Сдвиг графика $y=f(x)$ влево на $\|b\|$ и отражение полученного графика, находящегося в левой полуплоскости $(x<0)$, в правую полуплоскость. Затем склейка обеих частей графика. 

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович

ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ.

ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Художник *Ю.Н. Куликов*
Компьютерная Верстка *С.С. Афонин*
Корректоры *Е.Г. Никитина, С.С. Афонин, О.А. Войтишек*

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 12.08.2015 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 24,5 печ. л. Тираж 1500 экз. Заказ № 576.

Отпечатано в «Академиздатцентр «Наука» РАН»,
ОП Производственно-издательски» комбинат «ВИНИТИ» – «Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: (495) 554-21-86, (495) 554-25-97, (495) 974-69-76.

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Построение и преобразования графиков. Параметры. (в 3-х книгах)
12. Уравнения и неравенства с параметрами.
13. Задачи с параметрами на экзаменах.
14. Введение в математический анализ.
15. Комплексные числа.
16. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
18. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 978-5-4439-0348-4
9 785443 903484

ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЯ
ЧАСТЬ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

ПОСТРОЕНИЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ. ПАРАМЕТРЫ

А. Х. Шахмейстер