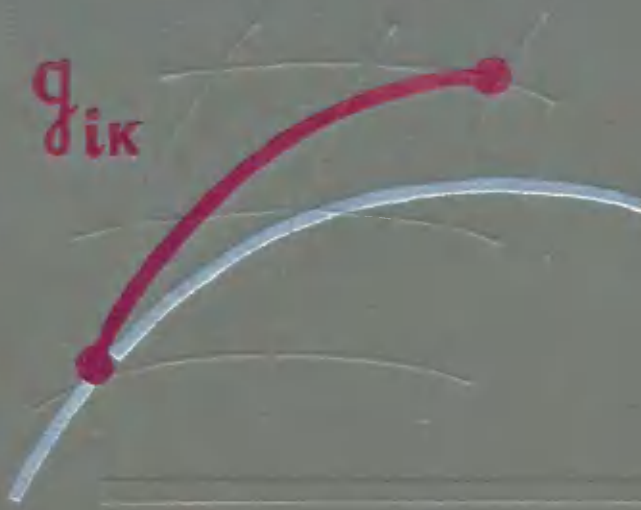


q_{ik}



В.С.ШЕБШАЕВИЧ

**ВВЕДЕНИЕ
В ТЕОРИЮ
КОСМИЧЕСКОЙ
НАВИГАЦИИ**

В. С. ШЕБШАЕВИЧ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ



Издательство «Советское радио» Москва — 1971

Ш е б ш а е в и ч В. С. Введение в теорию космической навигации. М. Изд-во «Советское радио» 1971, стр. 296, т. 3900 экз., ц. 1 р. 28 к.

Книга посвящена последовательному изложению ряда основных вопросов теории космической навигации. В ней в сжатом виде, но с сохранением требуемого научного уровня рассматриваются: свойства пространств разной мерности, особенности навигационной информации, обобщенное уравнение навигации, геометрические свойства навигационных функций, релятивистские явления в космической навигации, основы методики припланетного, околопланетного и межпланетного местоопределения, особенности решения задач в искривленных пространствах, статистические методы определения параметров движения, информационные свойства методов навигации.

Изложение основано на использовании современных взглядов на пространство, время и тяготение. Это позволило подойти к анализу основных закономерностей с наиболее общих позиций и внести в навигационную методику ряд новых, оригинальных представлений, что и отличает книгу от существующих учебников и монографий по навигации.

Книга рассчитана на студентов и слушателей, которым она может служить в качестве учебного пособия по соответствующим курсам, а также на широкий круг научных работников и инженеров, занимающихся исследованиями и разработками в области методов и средств навигации.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы космической навигации усиленно развиваются в течение последнего десятилетия, особенно в связи с полетами обитаемых космических аппаратов (КА), которые пилотируются в околоземном и окололунном пространстве. Эти методы заимствовали многое от методов вождения морских и воздушных кораблей. Но на основе традиционной методики сформировались новые, более совершенные способы определения координат и скорости подвижных объектов и приемы управления их движением.

Полеты в космосе отличаются многими особенностями: большой скоростью движения, детерминированностью траектории, большой протяженностью маршрутов, значительной продолжительностью полета, изменением потенциала поля тяготения вдоль траектории и т. п. С этим связаны наиболее характерные особенности навигационной методики, используемой при вождении космических аппаратов.

Предлагаемая книга посвящена изложению ряда основных вопросов, относящихся к теории припланетной, околопланетной и межпланетной навигации. Не претендуя на полноту изложения, она представляет собой лишь введение в космическую навигацию.

Многие материалы книги основываются на оригинальных исследованиях, проведенных в последние годы. В первую очередь это относится к главам: третьей, шестой, девятой, а также к главе одиннадцатой, которую по просьбе автора написал ст. научный сотрудник, кандидат техн. наук Н. К. Сергеев.

При доработке рукописи и подготовке ее к изданию большую помощь оказали ценные советы и замечания, высказанные докторами техн. наук, профессорами В. А. Вейцелем, С. Д. Сильвестровым, В. Н. Типугиным, канд. техн. наук А. Ф. Смирновским, канд. техн. наук, доцентами Г. А. Бобровником и М. И. Паншиным, которым автор выражает искреннюю признательность.

Построение и уровень изложения материала рассчитаны на использование книги в качестве учебного пособия студентами и слушателями радиотехнических факультетов вузов, а также научными работниками и инженерами, специализирующимися в области навигации.

Автор будет благодарен за сообщение замечаний и пожеланий по построению, содержанию и изложению материала книги.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Навигация — наука о методах и средствах вождения подвижных объектов (морских кораблей, самолетов, космических аппаратов и т. п.). Она представляет собой теоретическую основу практического процесса вождения этих объектов. Задачей навигации в наиболее общей постановке является обеспечение вывода подвижного объекта в заданную точку пространства, в назначенное время, по наимыгоднейшей траектории.

Навигация подвижных объектов основана на использовании специфического вида информации — навигационной информации. Состояние объекта описывается такой совокупностью величин, которая позволяет на любой момент времени указать его положение в некоторой системе отсчета.

Методы навигационных определений, а также вычислительные и отобразительные средства, относящиеся к ним, в значительной степени зависят от типа пространства, в котором осуществляется вождение подвижных объектов. В самом деле, методы определения положения объекта на земной поверхности, в околоземном пространстве и в космическом пространстве заметно отличаются друг от друга. Наряду с этим, своеобразными оказываются и способы использования навигационной информации в процессе вождения различных кораблей. Это дает основание говорить о таких самостоятельных видах навигации, как морская, воздушная и космическая.

С развитием космических полетов содержание навигационной работы расширилось, а функциональность ее усилилась.

В течение длительного времени в морской и воздушной навигации функции штурмана и пилота (рулевого) были разделены, а навигационные определения предшествовали коррекции направления и режима движения и имели самостоятельное значение. В дальнейшем наметилось сближение навигации и управления. Так, на беспилотных самолетах и на ракетах-носителях контроль движения и подача команд управления стали выполняться автоматически и непрерывно (или дискретно, но с малым периодом) с помощью действующего навигационного комплекса, так что там собственно навигационные определения стало трудно отделять от автоматического пилотирования.

В космическом полете периоды управления значительно короче интервалов времени, в которые ведется наблюдение за режимом дви-

жения. Это создает объективные предпосылки для повышения роли навигационных определений, а также для большей активности в работе штурмана. Наряду с этим участие пилота в управлении кораблем несколько снижается, поскольку оказывается возможным выполнение заданных маневров на смену орбиты, сближение или посадку возлагать на автомат.

Навигационная методика, применявшаяся издавна в морском судовождении, развивалась на основе решения задач в двумерном пространстве — на плоскости или на поверхности сферы. В самолетовождении длительное время сохранялся, по существу, двумерный характер навигационных задач: высота измерялась и использовалась независимо от двух координат на земной поверхности. Навигационные точки (НТ) располагались при этом либо на поверхности Земли (зрительно наблюдаемые ориентиры, акустические навигационные точки, радионавигационные точки — РНТ), либо на столь большом удалении от нее (небесные светила), что лучи к любым наземным наблюдателям можно было считать параллельными и, пользуясь двумерной небесной сферой, задавать положение НТ двумя углами, исключив из расчетов расстояния до них. Такой характер навигационной методики длительное время удовлетворял потребности практического кораблевождения по земной поверхности или вблизи нее.

В последние десятилетия развитие техники привело к необходимости решения навигационных задач в трехмерном пространстве. Траектории полетов стали значительно удаляться от Земли, резко повысились требования к точности навигационных расчетов, навигационные точки потребовалось размещать вне земной поверхности. Внеземные НТ в виде искусственных источников излучения и в виде активных и пассивных ретрансляторов открыли возможности значительного увеличения дальности действия навигационных средств, так как они сняли ограничения в дальности использования радиоволн, распространяющихся над искривленной поверхностью Земли.

Развитие трехмерных навигационных систем связано прежде всего с усложнением задач навигационного обеспечения космических полетов.

Трехмерные навигационные системы обладают рядом особенностей, оказывающим влияние на свойства методов и средств космической навигации. Высокая скорость относительного перемещения КА и навигационных точек является основной особенностью. Она налагает жесткие требования на быстродействие всех звеньев навигационной системы, а также представляет возможность для использования новых методов измерений. Эта же особенность открывает возможность для навигационных определений космического аппарата при числе НТ, меньшем числа определяемых координат. Быстрое изменение величин навигационных параметров, связанное также с относительным движением КА и НТ, позволяет в течение

небольших интервалов времени получить большой объем информации, а необходимость выполнения большого объема вычислений в сжатые сроки делает принципиально необходимым использование быстродействующих вычислительных устройств. Важной особенностью является допустимость работы в ультракоротковолновом диапазоне.

Развитие космической навигации привлекло внимание к ряду новых теоретических вопросов, таких, как: измерение производных от навигационных параметров; статистические способы определения параметров движения; методы навигационных определений по движущимся радионавигационным точкам; оценка влияния относительного движения звеньев навигационной системы на величины эталонов длины и времени, а следовательно, на сдвиг значений измеряемых параметров; анализ влияния гравитационных и электромагнитных полей на траектории навигационных сигналов; методы решения навигационных задач в искривленных пространствах; аналитические оценки информационной производительности различных навигационных методов.

В связи с разработкой этих вопросов выявляется ограниченность традиционных предпосылок, принятых в теории навигации, о распространении сигналов по прямолинейным траекториям, об относительной неподвижности (или медленном движении) звеньев навигационных систем, а также о том, что эффекты отклонения от этих условий следует рассматривать как ошибки, подлежащие компенсации путём внесения поправок. В этих условиях более оправданным представляется рассмотрение реальной совокупности условий работы навигационных средств в качестве некоторого нормального процесса, поддающегося непосредственному аналитическому описанию. Большое значение приобретает теория, предоставляющая математический аппарат для решения задач в искривленных пространствах с неевклидовой метрикой с учетом взаимного движения систем отсчета.

Данное обстоятельство привело к расширению научных основ навигации за счет привлечения идей и методов современной теории пространства, времени и тяготения.

Методы космической навигации разрабатывались и совершенствовались в соответствии с развитием и усложнением космических полетов. Успехи Советского Союза в области освоения космического пространства основывались, в частности, на достижениях в вопросах навигации. Каждый из этих выдающихся успехов (запуск первого ИСЗ, первый межпланетный корректируемый полет КА, орбитальный полет первого космонавта, первая мягкая посадка на Луну, первая автоматическая стыковка КА, автоматная добыча и доставка на Землю лунного грунта, исследование Луны автоматом—луноходом) отмечает очередные научно-технические достижения в области космической навигации.

Советским специалистам принадлежит много трудов, важных для теории и практики навигации космических аппаратов. Фундаментальное значение имеют книга П. Е. Эльясберга «Введение в теорию полета искусственных спутников Земли» [57] и работа Э. Л. Акима и Т. М. Эннеева «Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений» [39]. Исследования актуальных проблем теории космической навигации проведены в трудах Б. Н. Петрова, Д. Е. Охочимского, Б. В. Раушенбаха, А. Ю. Ишлинского, С. Д. Сильвестрова, И. К. Бажинова, В. Д. Ястребова, А. В. Брыкова [26, 41, 43, 69, 72, 73, 79, 86 и др.]. Системам с навигационными ИСЗ посвящена книга Л. И. Гордеева, В. П. Заколядяжного, Е. Ф. Суворова, В. А. Фуфаева, Е. П. Чурова «Космические маяки в навигации» [52]. Изложение методики и техники космической навигации дано в книгах В. П. Селезнева и М. А. Кирста «Системы навигации космических летательных аппаратов» [55] и Л. М. Воробьева «Навигация космических кораблей» [51]. Отдельным вопросам космической навигации посвящен ряд статей в периодической печати [16, 28, 33, 48, 49, 76] и в энциклопедическом издании «Космонавтика» [93].

Космической навигации посвящены также многие работы зарубежных авторов. Прежде всего следует упомянуть книгу Беттина Р. «Наведение в космосе» [59] и его работу «Статистический метод оптимальной навигации для космических полетов» [34]. Рассмотрение различных задач околоземной и межпланетной навигации приведено в книге Стирнса Э. «Космическая навигация» [71]. Описание систем навигации околоземных и лунных обитаемых кораблей содержится в сборнике «Пилотируемые космические корабли» [90].

К сожалению, еще не созданы книги, где бы с достаточной глубиной и обстоятельностью на единой методической основе излагался весь комплекс вопросов, связанных с теоретическими основами навигационной методики в космосе, с обоснованием принципов построения систем навигации космических аппаратов, с описанием типовых навигационных средств и способов их применения. Между тем, представляется возможным выделить определенный круг вопросов, относящихся к нахождению параметров движения космических аппаратов в околопланетном и межпланетном пространстве и к определению координат объектов на планетной поверхности, и подойти к теоретическому обоснованию навигационных методов с наиболее общих позиций, привлекая для описания их свойств необходимый аналитический аппарат. Такая совокупность теоретических и методических вопросов может рассматриваться как введение в теорию космической навигации.

Предлагаемая книга построена именно по такому плану. В ней дается краткое изложение задач навигации космических аппаратов и применяемых методов измерений. Приводится характеристика используемых мерных пространств и описываются соответствующие преобразования трехмерного евклидова пространства,

четырехмерного пространства событий и шестимерных фазовых пространств. Особо рассматривается проявление релятивистских явлений в космической навигации.

Делается попытка изложить элементы общей теории навигации и применить ее к решению некоторых задач, требующих анализа метрических свойств искривленных пространств, образованных совокупностью траекторий сигналов.

Основы местоопределения рассматриваются в рамках использования минимально необходимого числа измерений, что позволяет более четко пояснить геометрические основы методов. Вслед за этим излагаются наиболее распространенные способы статистического решения навигационных задач.

Анализ информационных свойств навигационных методов строится на исследовании свойств матриц систем нормальных уравнений, относящихся к обработке информации по методу наименьших квадратов. В связи с этим обращается внимание на геометрические свойства навигационных функций и вовлекаются в рассмотрение фундаментальные и градиентные матрицы.

Материал представлен в сравнительно сжатом виде, но с соблюдением последовательности изложения и сохранением требуемого уровня математического анализа. Основные работы по теории современной навигации, указанные в перечне литературы, могут использоваться для более углубленного изучения отдельных вопросов.

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

§ 1.1. ЗАДАЧИ И ОСОБЕННОСТИ НАВИГАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Космическая навигация занимается методами и средствами вождения космических аппаратов различного назначения. Много заимствовано ею из методов и средств навигации самолетов и морских кораблей, однако специфичность полетов в космосе накладывает свой отпечаток на ее развитие.

Круг задач, которые стоят перед космической навигацией, сравнительно широк.

Каждому полету предшествует расчет траектории движения. При замкнутом орбитальном и при межпланетном полетах рассчитываются траектории, оптимальные по тем или иным параметрам, определяется режим скорости движения, вычисляется требуемый расход горючего, находится наивыгоднейший момент старта, отрабатывается программа работы наземных и бортовых средств, обеспечивающих полет. Все это относится к задаче навигационного планирования полета.

Следующей важной задачей, которая решается с помощью специальных технических средств, является вывод космического аппарата на расчетную траекторию. На этом этапе с большой точностью при высоком быстродействии измеряются навигационные параметры КА относительно старта и его движение так регулируется по положению и скорости, чтобы обеспечивался вывод в расчетную точку с заданным вектором скорости.

Обычно по наибольшей части маршрута КА движется пассивно, без тяги. Здесь задачей навигационных средств является определение фактической траектории движения. С помощью наземных и бортовых измерителей определяются параметры траектории КА, по которым осуществляется прогнозирование дальнейшего движения аппарата.

При дальних полетах (к Луне или в сторону планет) средствами вывода на траекторию обычно не удастся обеспечить движение точно по заданному маршруту. Возникает задача коррекции траектории, которая может проводиться несколько раз. Перед коррекцией и

после нее навигационные измерения выполняются с предельно высокой точностью.

Частным случаем задачи коррекции траектории является стабилизация орбиты КА. Так, некоторые из ИСЗ должны обращаться строго по полярной или по суточной экваториальной орбите, тогда как за счет возмущений спутник будет периодически с такой орбиты сходить. В этом случае требуется определить положение ИСЗ относительно заданной плоскости орбиты и своевременно и в нужном режиме, включая корректирующие двигатели, добиваться возвращения на заданную орбиту.

При выполнении ряда специальных задач может потребоваться маневр космического аппарата. В этой обстановке навигатор должен быстро определить параметры предстоящего маневра, вычислить необходимые затраты энергии и найти требуемые точности выполнения этого маневра.

Средствами навигации обеспечивается взаимное сближение космических аппаратов. Такое сближение может оказаться необходимым при совместном выполнении несколькими КА каких-то действий, при доставке блоков тяжелых КА, собираемых на орбите, при доставке и отсылке персонала и оборудования орбитальных лабораторий и т. д. На всех этапах выполнения этой задачи основу маневрирования составляют точные навигационные измерения и расчеты. Наиболее ответственные измерения должны при этом выполняться на борту космических аппаратов.

При возвращении на Землю (после облета Луны или планет, или с околоземной орбиты) возникает задача правильного расчета и поддержания траектории с целью вхождения в плотные слои атмосферы в нужном районе и под требуемым углом снижения. Маневру схождения с орбиты предшествуют наиболее точные и тщательные навигационные определения.

При посадке космических аппаратов с целью наискорейшего обнаружения спускающегося и приземляющегося корабля и его экипажа требуется широкое применение наземных и воздушных навигационных средств.

Ориентация космического аппарата относительно Земли, Солнца, Луны или планеты составляет важную навигационную задачу. Правильная ориентация осей КА в пространстве необходима для эффективного использования солнечных источников энергии, для вхождения в связь с помощью узконаправленных систем, для обеспечения точного маневрирования, для выполнения ряда научных исследований.

В ходе освоения Луны и ближайших планет возрастет роль задачи окололунной (околопланетной) навигации, поскольку длительное пребывание на околопланетных орбитах окажется необходимым как при эпизодических высадках исследовательских групп, так и при проведении продолжительных работ на поверхности Луны. Наряду с этим должны будут решаться задачи поверхностной (при-

планетной) навигации, обеспечивающей перемещение различных мобильных средств, а также и пешеходов.

Работа всех технических средств, обеспечивающих космические полеты, должна проводиться в единой системе отсчета времени. Обычно на КА и в наземных пунктах устанавливаются местные эталоны времени, однако все такие местные часы должны работать синхронно. Синхронизация таких эталонов, разнесенных в пространстве, выполняется с помощью навигационной методики с применением специальных технических средств.

Следует отметить, что в первые годы освоения космоса навигационная информация получалась и обрабатывалась исключительно на Земле. Сейчас начинают развиваться методы и средства навигационных определений на борту самого КА (самоопределение).

Навигационно-космическая техника используется также для обеспечения действий приземных объектов. Для навигации подводных лодок и морских кораблей большое значение приобрели специальные навигационные ИСЗ, с помощью которых можно круглосуточно, независимо от метеоусловий и в любом районе земного шара, решать задачу местоопределения. Навигационные ИСЗ могут также применяться для определения параметров движения самолетов и других летательных аппаратов.

Строго говоря, к космическим аппаратам следует относить лишь объекты, летающие в космическом пространстве. Но можно причислить к ним также и средства перемещения относительно поверхности Луны и планет. Тогда появляются основания говорить о таких видах космической навигации, как межпланетная, околопланетная и припланетная.

Методическая основа припланетной навигации та же, что и для навигации приземной: задачи решаются на двумерной поверхности, моделирующей реальную фигуру данного небесного тела.

Особенности припланетной и околопланетной навигации определяются возможностью применения измерительных средств, расположенных на самой планете, а также допустимостью использования планетной поверхности для отражения навигационных сигналов. С этим связан более широкий выбор измеряемых параметров и участие в навигационной работе персонала стационарных служб.

При обеспечении межпланетных полетов, напротив того, состав измеряемых величин сокращается, значение наземных и планетных средств падает, в то время как роль навигатора и его квалификации возрастает, а высокие требования по точности сохраняются в течение длительного срока полета по траектории.

Решение многих навигационных задач строится на использовании информации о пространственном положении КА и его векторе скорости. Нахождение этих величин составляет содержание, по существу, основной навигационной задачи. При дальнейшем изложении преимущественное внимание будет уделено теоретическим основам решения именно этой основной задачи.

§ 1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЙ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В НАВИГАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

При вождении космических аппаратов находят применение различные методы измерения. Не существует универсальных методов, с помощью которых решались бы все задачи, возникающие на отдельных этапах маршрута. Различные методы измерений используются в комплексе, так что измерению подлежит обычно некоторая группа величин.

Для классификации методов измерений необходимо выбрать несколько существенных признаков, которые легли бы в основу первого и последующих разделений.

Наиболее сильные различия связаны с видом применяемого сигнала. Именно сигнал решающим образом определяет особенности метода измерения и свойства навигационного измерителя, так что радиотехнические измерители оказываются не похожими на измерители, например магнитные, а оптические измерители — на акустические. Вслед за сигналом наибольшее влияние оказывает вид первичного измеряемого параметра.

Поэтому методы навигационных измерений в первом разделении целесообразно классифицировать по виду сигнала, а во втором разделении — по виду первичного измеряемого параметра.

В соответствии со сказанным различают методы: радиотехнические, оптические (с выделением среди них инфракрасных, ультрафиолетовых, лазерных), гравитационные (с выделением инерциальных), магнитные, акустические (звуковые), радиационные.

Непосредственному измерению поддаются расстояния, разности расстояний и производные от них. На измерении расстояний (r) основана дальномерная методика, на измерении разности расстояний (Δr) — разностно-дальномерная. На фиксировании направлений (θ) при распространении сигнала вдоль близких параллельных трасс (и фактическом использовании разностно-дальномерных явлений) основана угломерная методика. Измерения первых производных по времени от названных выше величин лежат в основе методов радиально-скоростного, разностно-дальномерно-скоростного и угломерно-скоростного. Из вторых производных измеряется в настоящее время лишь линейное ускорение. Таким образом, в основе использования современных средств лежат измерения следующих величин: r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, Δr , $(\Delta \dot{r})$, θ и $\dot{\theta}$.

Представление о возможностях различных методов измерений дает табл. 1.2.1, в которой указано, какие параметры могут в настоящее время измеряться с помощью основных навигационных методов.

Метод измерения	Измеряемый параметр						
	r	$\dot{r}$	$\ddot{r}$	Δr	$(\Delta \dot{r})$	θ	$\dot{\theta}$
Радиотехнический	+	+		+	+	+	+
Оптический	+	+		+	+	+	+
Гравитационный (инерци- альный)			+			+	
Магнитный						+	
Акустический	+			+		+	
Радиационный	+					+	

§ 1.3. ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

Для навигации космических аппаратов находят применение различные навигационные средства.

Радиотехнические дальномерные устройства — самые распространенные средства измерения параметров движения КА. Они строятся как временные (импульсные), частотные и фазовые дальномеры. Ввиду трудностей длительного поддержания синфазности бортовых и наземных эталонов, применяется принцип ретрансляции сигналов. При измерениях с земли на борту КА размещается ретранслятор (ответчик), который при фазовом способе работы обеспечивает когерентное переизлучение сигналов. При методе самоопределения на борт помещается запросчик, а ответчик должен устанавливаться в фиксированной точке на поверхности Земли или иной планеты. Когда дальномеры применяются в качестве измерителей высоты полета (высотомеров), то ретрансляция бывает пассивной — за счет отражения от земной, лунной и других поверхностей.

Следующее по распространенности место занимают радиально-скоростные устройства, работа которых основывается на измерении доплеровского смещения частоты. Достоинством их является безретрансляционный способ работы, при котором требуемая стабильность частоты должна поддерживаться в оконечных пунктах лишь на время сеанса измерений и в то же время обеспечивается высокая точность измерений.

Разностно-дальномерные устройства реализуются в вариантах временных (импульсных) и фазовых измерений, а также в варианте измерений доплеровской частоты, которая интегрируется затем в пределах некоторого временного интервала. Измерители разности радиальных скоростей (что эквивалентно измерению $\Delta \dot{r}$) относятся к числу сравнительно точных устройств.

Угломерные радиотехнические средства делятся на радиомаяки и радиопеленгаторы. Первые из них создают поле излучения, один из параметров которого связывается функциональной зависимостью с угловой координатой. При установке радиомаяков на Земле, Луне или планете, можно создать навигационное поле в определенных областях околопланетного пространства, что позволит на борту определять угловое положение относительно маяка. Радиопеленгаторы обычно устанавливаются на Земле и служат для определения направления на КА по излучаемым ими назатухающим колебаниям. Радиопеленгаторы используются в амплитудном и фазовом вариантах. Для угломерных определений могут применяться и частотные (доплеровские) устройства. Несколько своеобразными являются радиотехнические построители местной вертикали, действие которых основано на отыскании экстре-

мального положения бортовой антенны, принимающей пассивно отраженные от земной (лунной и др.) поверхности сигнала бортового передатчика.

Необходимо отметить, что часто проектируют комплексные радиотехнические системы, способные измерять несколько различных параметров, например r , $\dot{r}$, θ_1 и θ_2 , причем дальность и углы измеряются в фазовом режиме, а радиальная скорость — в доплеровском.

Радиотехнические навигационные средства продемонстрировали эффективную работу на весьма больших расстояниях. Так, с помощью этих средств велось измерение параметров движения межпланетных станций на удалениях до 400 млн. км [79].

Оптические навигационные приборы до последнего времени находили применение в качестве угломерных устройств. С помощью оптических приборов, установленных на КА, можно фиксировать направления на небесные тела, являющиеся естественными источниками излучения. С помощью фотоследящих систем возможно измерять углы между направлениями на две планеты, углы между направлениями на планету и удаленную звезду, угловой диаметр планет. На этой основе возможны различные методы определения пространственного местоположения КА: метод измерения диаметров трех небесных тел, метод измерения диаметров двух небесных тел и угла между одним из них и удаленной звездой, метод измерения углов между центрами трех небесных тел и т. д. Все эти методы относятся к категории астрономических, они в высокой степени автономны.

В последние годы с развитием квантовомеханических приборов появилась возможность создания когерентных источников света и были разработаны лазерные дальномеры и угломеры. Применение лазерных дальномеров для космической навигации — многообещающе. Лазерные устройства можно использовать для измерений $\dot{r}$. Кроме того, на основе измерения разности доплеровских сдвигов частот двух лазерных лучей, движущихся встречно по замкнутому контуру, можно судить об угловой скорости этого контура, а следовательно, об угловой скорости космического аппарата, на борту которого этот контур закреплен. Точность последнего метода весьма высокая.

По собственному излучению планет и их атмосферы в инфракрасном (ИК) диапазоне можно находить вертикаль к их поверхности; бортовые построители вертикали относятся к числу приборов, необходимых в космическом полете.

Инерциальные методы в космическом полете могут реализоваться путем использования акселерометров — приборов, реагирующих на линейные ускорения. Располагая тремя акселерометрами со взаимно перпендикулярными осями и интегрируя измеренные ускорения, можно найти составляющие скорости КА, а затем и его координаты.

Хорошую комбинацию способны образовать оптико-астрономические и инерциальные методы; соответствующие астроинерциальные приборы имеют большое будущее.

Отметим в заключение, что магнитные методы в космической навигации пока не играют заметной роли ввиду их малой точности, связанной со слабой изученностью околоземного и космических магнитных полей и их нестационарностью на больших удалениях от Земли. Акустический и радиационный методы также не нашли еще своего применения.

**МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ****§ 2.1. ПРОСТРАНСТВА РАЗНОЙ МЕРНОСТИ
И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ**

Пространства как некоторые множества абстрактных объектов используются в космической навигации в различных формах. Находят применение метрические пространства, пространство событий и фазовые пространства.

Пространство рассматривается как система элементов, между которыми устанавливаются отношения, сходные с отношениями, существующими между точками обычного евклидова пространства. Удобство состоит в том, что некоторая функция n переменных трактуется как точка n -мерного пространства, что допускает использование геометрических методов и представлений при исследовании этой многомерной функции.

Метрические пространства представляются в виде совокупности точек, расстояние между которыми исчисляется по определенным правилам. В евклидовом пространстве расстояние задается отрезками прямых линий, в искривленных пространствах — отрезками геодезических линий, кратчайшим образом соединяющих точки.

Одномерному метрическому пространству могут уподобляться траектории космических аппаратов. Обычно это — кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Двумерные пространства вовлекают в рассмотрение при решении задач поверхностной (припланетной) навигации. В зависимости от условий — это плоскости, поверхности сферы или эллипсоида. Трехмерное пространство выступает в задачах межпланетной навигации либо как обычное евклидово пространство, либо как пространство искривленное полями тяготения.

Положение КА задается и определяется именно в метрических пространствах. В них же задаются скорости и ускорения КА.

Пространство событий — это четырехмерное пространственно-временное многообразие. Каждая точка его характеризуется тремя пространственными координатами x_1 , x_2 и x_3 и одной временной координатой t . Указание места и времени представляет

собой характеристику некоторого события, вследствие чего каждая четырехмерная точка именуется точка-событие или мировая точка. Пространство в целом является множеством событий.

Такие многообразия представляют особый интерес для теории навигационных определений, так как позволяют установить связь пространственных и временных координат.

Фазовые пространства определяются как совокупности всех возможных состояний некоторой системы. Каждое из состояний, характеризующее обычно рядом величин, рассматривается как точка этого пространства.

В качестве фазового пространства может рассматриваться совокупность всех возможных текущих состояний КА, каждое из которых описывается 6-ю координатами (три координаты x_1, x_2, x_3 и три составляющие $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}$ вектора скорости). Это — шестимерное пространство состояний КА.

С математической точки зрения не существует принципиальных различий между упомянутыми выше типами пространств: они отличаются лишь мерностью. Однако при $n \leq 3$ легко представить геометрическую модель и выявить метрические свойства пространства. Поэтому в навигации удобно такие пространства рассматривать особо. Удобно выделять и пространство событий.

Группу величин, дающую n -мерную характеристику каждой точке используемого пространства, можно называть координатами. Вид таких координат и начала их отсчета могут выбираться по-разному, что диктуется удобством навигационных измерений или обработки информации. Однако в процессе навигационной работы приходится переходить от одной системы координат к другой. Эта операция выражается в преобразовании некоторого пространства. Преобразования пространств различной мерности занимают, поэтому, видное место в теории космической навигации.

§ 2.2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

2.2.1. ОПИСАНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Задать метрику пространства — значит определить, как выражается дифференциальный интервал ds между бесконечно близкими точками. При евклидовой метрике кратчайшим расстоянием между двумя точками будет прямая и тогда ds выражается через квадраты соответствующих дифференциалов координат dx_i ($i = 1, 2, 3$) по обычной формуле аналитической геометрии:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2. \quad (2.2.1)$$

Заметим, что в правой части этого соотношения отсутствуют члены со смешанным произведением приращений координат ($dx_i dx_k$), а коэффициенты при членах с одинаковыми множителями (квадраты) равны единице.

В искривленном пространстве дифференциальный интервал ds , соединяющий две точки кратчайшим образом, будет выражаться, кроме того, через смешанные произведения приращений координат, причем коэффициенты g_{ih} при членах в общем случае отличаются от единицы. Так, для поверхностей будет справедливо записать:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + g_{21} dx_2 dx_1 + g_{22} dx_2^2 = \\ &= \sum_{i, k=1}^2 g_{ik} dx_i dx_k. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

В дифференциальной геометрии доказывается *, что именно коэффициенты g_{11} , g_{12} , g_{21} , g_{22} и характеризуют искривленность пространства, вследствие чего они и могут использоваться для описания его метрических свойств.

Совокупность g_{ih} можно рассматривать как слагающие некоторого фундаментального показателя метрических свойств. Для двумерного пространства таких составляющих будет четыре, для трехмерного — соответственно девять. Подобным количеством составляющих обладают тензорные величины. Ввиду этого совокупность g_{ih} именуют фундаментальным метрическим тензором.

В пространстве постоянной кривизны компоненты g_{ih} постоянны. В пространстве, где кривизна меняется от точки к точке, изменение компонент g_{ih} учитывается с помощью специальных величин (именуемых символами Кристоффеля и обозначаемых $\Gamma_{k,ij}$), которые представляют собой комбинацию из частных производных метрических компонент g_{ih} по координатам.

В соответствии со сказанным для евклидовых пространств метрические коэффициенты $g_{ii} = g_{kk} = 1$, $g_{ih} = 0$, а символы $\Gamma_{k,ij} = 0$.

Рассмотрим далее способы задания координат в пространствах с линейной метрикой, а также преобразование таких пространств, оставив разбор метрических свойств искривленных пространств до глав 6 и 9, где им посвящен специальный анализ.

2.2.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При навигации космических объектов могут использоваться разнообразные системы координат. Вид применяемой координатной системы определяется областью космического пространства, в которой осуществляется навигация, содержанием навигационной задачи, методом навигации, геометрическими свойствами пространства.

Введем классификацию координатных систем, проводя последовательное разделение по признакам:

— положение начала координатной системы;

* Коэффициенты метрической формы ввел впервые Гаусс в 1827 г., обозначив $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$ и $g_{22} = G$. Эта запись сохранена до сих пор в ряде курсов дифференциальной геометрии.

- ориентация первой плоскости отсчета;
- связанность с телом, в центре которого размещено начало координат;
- геометрические свойства координат.

Первое деление основывается на следующих соображениях. Положение движущегося объекта относительно некоторого космического тела или их совокупности удобно задавать в такой системе, которая является преимущественной для области космического пространства, примыкающей к этому телу или к совокупности тел. При этом начало координат целесообразно совмещать с центром масс тела, определяющего гравитационное поле. Наряду с этим, когда требуется описать взаимное положение двух космических аппаратов, начало координат выгодно совмещать с центром масс одного из них. В других условиях по необходимости применяются координатные системы, связанные с точками расположения измерителей — либо с точками на поверхности Земли (в будущем — Луны, планет), либо с точками, где в моменты измерений находится КА.

Таким образом, начало координатной системы может помещаться в центре естественного космического тела (их совокупности), располагаться на поверхности этого тела, или выводиться вовне (совмещаться с КА). В соответствии с этим все координатные системы возможно разделить на *астроцентрические* (от греческого *αστερεζ* — звезда), *топоцентрические* (от греческого *τοπος* — место) и *экзоцентрические** (от греческого *εξω* — вне). В первой группе будут геоцентрическая, гелиоцентрическая, селеноцентрическая, галактоцентрическая и другие подобные системы. Во второй — геотопоцентрическая, селенотопоцентрическая и др. Там, где ясно, что из этой группы систем используется лишь одна — с началом на поверхности Земли, название «топоцентрическая» может явиться сокращенным наименованием системы геотопоцентрической. Из числа систем третьей группы геоэкзоцентрическая и селеноэкзоцентрическая системы уже употребляются при измерениях на борту искусственных спутников Земли и Луны соответственно.

Для следующего деления нужно выяснить возможную ориентацию первой плоскости отсчета координат. Наиболее характерными положениями этой плоскости бывают совмещения ее с экваториальной плоскостью космического тела, с плоскостью орбиты спутника или с плоскостью горизонта некоторой точки на поверхности планеты. В соответствии с этим по второму признаку координатные системы можно разделить на *экваториальные*, *орбитальные* и *горизонтальные*.

Для дальнейшего деления важно оговорить, меняется ли со временем положение второй плоскости начала отсчета координат.

* Употребляемый иногда [98] термин *объектоцентрическая система* представляется менее определенным.

Если в экваториальной системе вторую отсчетную плоскость направить по меридиану, то такая система будет жестко связана с планетой, но окажется вращающейся в инерциальном пространстве. В другом случае, ориентируя соответствующую ось координат в направлении на удаленную звезду, можно получить систему, не участвующую в суточном вращении планеты. В орбитальных системах вторая начальная плоскость может направляться по линии узлов (линии апсид) спутника; такая система не будет участвовать в движении спутника. Если же эта плоскость совпадает с радиус-вектором спутника, она будет перемещаться относительно планеты.

Таким образом, следующее разделение может проводиться по признаку связанности координатной системы с телом, в центре которого размещено ее начало. По этому признаку системы делятся на *связанные* и *несвязанные* (в частном случае — инерциальные).

Наконец, последнее разделение должно учитывать геометрические свойства координатных систем: их ортогональность или косоугольность, линейность или криволинейность и т. п. По этому признаку можно выделить группы прямоугольных, сферических, эллиптических и тому подобных координат.

Та или иная координатная система может оказаться предпочтительной в зависимости от условий навигации. Так, для задания координат приземных и околоземных объектов удобно располагать геоцентрической системой, одна координатная плоскость которой совпадает с плоскостью земного экватора, вторая проходит через точку весны (Υ) перпендикулярно к первой, а третья оказывается перпендикулярной первым двум, т. е. геоцентрической экваториальной прямоугольной несвязанной системой. Такой системе в группе сферических координатных систем соответствует так называемая вторая экваториальная система. Для межпланетной навигации интерес представляет гелиоцентрическая эклиптическая (частный случай орбитальной, поскольку эклиптическая плоскость является плоскостью орбиты Земли) сферическая несвязанная система. Для межзвездных перелетов может оказаться целесообразным употреблять одну из галактоцентрических координатных систем.

При решении задач встречи космических аппаратов, их сближения и стыковки на орбите удобно пользоваться геоэкоцентрической системой. Задача посадки на Землю, Луну или планеты может потребовать использования планетотопоцентрических координат.

2.2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ КАК АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА

На различных этапах навигационной работы оказывается необходимым переходить от одной координатной системы к другой. Операции преобразования пространственных координат неизбежны при использовании различных технических средств навигации.

Взаимооднозначное отображение пространства, при котором всякие три точки, расположенные на одной прямой, переходят в три точки, также расположенные на одной прямой, называется аффинным преобразованием. Переход от одной координатной системы к другой требует сохранения прямых линий и их параллельности. Такой переход представляется аффинным преобразованием.

Пусть положение какой-либо точки в одной системе координат задается радиус-вектором $\bar{X}$ с компонентами x^j ($j = 1, 2, 3$) и необходимо задать ее положение в другой системе координат в виде радиус-вектора $\bar{\Xi}$ с компонентами ξ^j при условии, что начало новой системы в старой системе выражается радиус-вектором $\bar{A}$ с компонентами a^j . В общем виде данное преобразование описывается векторным уравнением

$$\bar{\Xi} = \mathcal{A}\bar{X} + \bar{A}, \quad (2.2.3)$$

где $\mathcal{A}$ — оператор преобразования (аффинор), определяемый девятичной матрицей:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{array} \right\|. \quad (2.2.4)$$

Между компонентами ξ^j и x^j устанавливаются линейные соотношения типа

$$\xi^j = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^j x^i + a^j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.2.5)$$

Обратное преобразование пространства дает выражение вектора $\bar{X}$ через вектор $\bar{\Xi}$ и вектор $\bar{B}$ (с компонентами b^1, b^2, b^3) с помощью оператора $\mathcal{B}$, определяемого матрицей

$$\| \beta_i^j \| \quad (2.2.6)$$

в виде векторного уравнения

$$\bar{X} = \mathcal{B}\bar{\Xi} + \bar{B}, \quad (2.2.7)$$

так что между компонентами векторов устанавливается связь типа

$$x^j = \sum_{i=1}^3 \beta_i^j \xi^i + b^j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.2.8)$$

При навигационных определениях встречаются различные преобразования. Рассмотрим некоторые из них.

2.2.4. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Положение наземных РНТ задают обычно в виде географических координат φ и λ , причем третья координата — земной радиус-вектор вычисляется как функция φ и сжатия e в виде

$$\rho = \rho(\varphi, e). \quad (2.2.9)$$

Эти три величины образуют геоцентрическую экваториальную сферическую систему координат.

Переход от координат $\{\varphi, \lambda, \rho\}$ к геоцентрическим прямоугольным координатам $\{x, y, z\}$ можно рассматривать как тождественное эквиаффинное преобразование с матрицей $||\beta_i^j||$, определитель которой равен нулю, и с нулевыми свободными членами $b^j = 0$.

Связь координат $\{x, y, z\}$ и $\{\varphi, \lambda, \rho\}$ дается тождествами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= \rho \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.10)$$

Обратное преобразование дает:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \varphi &= \arcsin \frac{z}{\rho}, \\ \lambda &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.11)$$

2.2.5. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНЫЕ И ОРБИТАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Положение искусственных спутников Земли, обращающихся по эллиптическим орбитам, часто определяют в геоцентрической орбитальной прямоугольной системе координат, определенным образом связанной с плоскостью орбиты ИСЗ. Центр такой системы фиксируют в фокусе эллипса (центре масс Земли), одну ось (ξ) направляют по линии апсид, вторую ось (ζ) — по нормали к плоскости орбиты, а третью (η) — так, чтобы она образовывала с первыми двумя правый триэдр (рис. 2.2.1).

Переход от таких орбитальных координат $\{\xi, \eta, \zeta\}$ к геоцентрическим экваториальным прямоугольным координатам $\{x, y, z\}$ осуществляется центроаффинным преобразованием с помощью оператора $\mathcal{B}$, определяемого следующей девятичленной матрицей:

$$\left\| \begin{array}{c} (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega) \\ (\cos \Omega \cos i \sin \omega + \sin \Omega \cos \omega) \\ \sin i \sin \omega \\ \hline -(\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos i \cos \omega) \\ -(\sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega) \\ \sin i \cos \omega \\ \hline \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{array} \right\|, \quad (2.2.12)$$

где Ω — прямое восхождение восходящего узла орбиты; i — наклонение плоскости орбиты; ω — угловое расстояние перигея от узла.

В этом случае члены $b^j = 0$.

Обратный переход от экваториальных координат к орбитальным выполняется по формулам преобразования со свободными членами $a^j = 0$

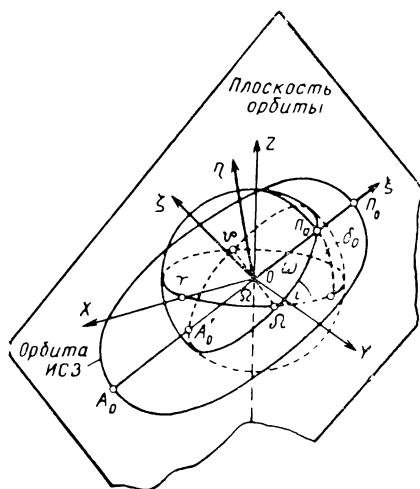


Рис. 2.2.1. Геоцентрические экваториальная и орбитальная системы координат.

и матрицей оператора $\mathcal{A}$ в виде

$$\left\| \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \cos i \sin \omega) \\ -(\cos \Omega \sin \omega + \sin \Omega \cos i \cos \omega) \\ \sin \Omega \sin i \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega) \\ -(\sin \Omega \sin \omega - \cos \Omega \cos i \cos \omega) \\ -\cos \Omega \sin i \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{l} \sin i \sin \omega \\ \sin i \cos \omega \\ \cos i \end{array} \right) \end{array} \right\|. \quad (2.2.13)$$

При использовании орбитальной системы координат слагающие по осям выражаются через модуль радиус-вектора ρ и истинную аномалию ϑ в виде

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \rho \cos \vartheta, \\ \eta = \rho \sin \vartheta, \\ \zeta = 0, \end{array} \right\} \quad (2.2.14)$$

причем ρ и ϑ в свою очередь находятся через большую полуось эллипса a , его эксцентриситет e и эксцентрическую аномалию E из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \rho &= a(1 - e \cos E), \\ \vartheta &= \arccos \left(\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.15)$$

Отметим, что при круговой орбите $e = 0$, и поэтому $\vartheta = E$ или в соответствии с уравнением Кеплера $\vartheta = M = n(t - t_0)$, где n — среднее угловое движение; t — текущее время и t_0 — момент прохождения через перигей.

2.2.6. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В ряде случаев положение внеземных РНТ или подвижных объектов определяется в прямоугольной или сферической системах координат, связанных с какой-либо точкой на поверхности Земли (топоцентрические системы). Такие координаты могут выдавать наземные радиотехнические средства контроля траектории.

Возникает задача перехода от топоцентрических координат к геоцентрическим координатам, а также задача обратного перехода.

Пусть ось ξ топоцентрической прямоугольной системы направлена из наземной точки T , имеющей географические координаты φ и λ , по местной вертикали, ось ξ — по местному меридиану, а ось η — дополняет их до правостороннего триэдра. Пусть местная вертикаль составляет угол τ с лучом, проведенным из центра Земли O через точку T . Величина угла τ является функцией φ и φ (рис. 2.2.2).

Переход от одной системы координат к другой осуществляется аффинным преобразованием, характеризующимся 12-членной группой: 9-членным аффинором и тремя компонентами вектора переноса.

Аффинор $\mathcal{A}$, преобразующий координаты x^i в координаты ξ^i , имеет матрицу:

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda \sin(\varphi + \tau) & \sin \lambda \sin(\varphi + \tau) & -\cos(\varphi + \tau) \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \lambda \cos(\varphi + \tau) & \sin \lambda \cos(\varphi + \tau) & \sin(\varphi + \tau) \end{vmatrix}, \quad (2.2.16)$$

а компоненты вектора переноса $\bar{A}$ характеризуются матрицей

$$\begin{vmatrix} -\rho \sin \tau \\ 0 \\ -\rho \cos \tau \end{vmatrix}. \quad (2.2.17)$$

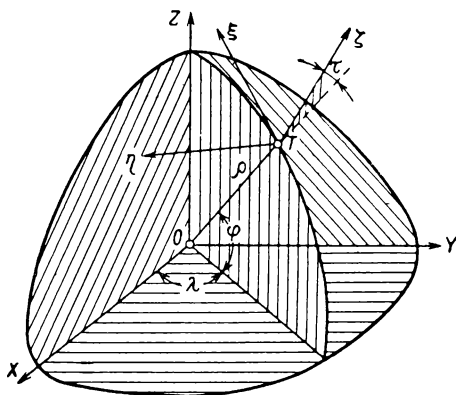


Рис. 2.2.2. Геоцентрическая и топоцентрическая прямоугольные системы координат.

Преобразование координат ξ^j в координаты x^j выполняется аффинором $\mathcal{A}$, имеющим матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda \sin(\varphi + \tau) & -\sin \lambda & \cos \lambda \cos(\varphi + \tau) \\ \sin \lambda \sin(\varphi + \tau) & \cos \lambda & \sin \lambda \cos(\varphi + \tau) \\ -\cos(\varphi + \tau) & 0 & \sin(\varphi + \tau) \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

при учете, что компоненты вектора переноса $\bar{B}$ выражаются матрицей

$$\begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \cos \lambda \\ \rho \cos \varphi \sin \lambda \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.2.19)$$

Если в точке T определена координация не прямоугольная, а сферическая и координаты задаются в виде азимута θ , угла места (высоты) h и модуля радиус-вектора r^* , то следует дополнительно осуществить тождественный переход от координат $\{\theta, h, r\}$ к координатам $\{\xi, \eta, \zeta\}$, используя зависимости (2.2.10), (2.2.11) с соответствующей заменой символов угловых величин.

2.2.7. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

В астронавигации часто применяются геоцентрические сферические и топоцентрические сферические координаты, фиксируемые на небесной сфере произвольного радиуса. Это — экваториальные координаты α (прямое восхождение) и δ (склонение) и горизонтальные координаты h (высота) и θ (азимут), отнесенные к некоторой точке по поверхности Земли с координатами φ и λ . Обычно формулы преобразования одной из этих систем координат в другую выводятся из параллактического треугольника при использовании зависимостей сферической тригонометрии.

Укажем, что это преобразование можно получить весьма просто, не прибегая к решению сферического треугольника, из общего векторного уравнения аффинного преобразования пространства с помощью матриц (2.2.16), (2.2.18).

Рассматривая данное преобразование как центроаффинное и полагая $\rho = r$, из уравнения (2.2.5), где ξ^i и x^i заменяем согласно выражению (2.2.10) их выражениями через сферические координаты соответственно h и θ и α и δ , а коэффициенты α_i^j — их значениями в соответствии с матрицей (2.2.16), найдем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \cos h \cos \theta &= \cos \lambda \sin(\varphi + \tau) \cos \delta \cos \alpha + \\ &+ \sin \lambda \sin(\varphi + \tau) \cos \delta \sin \alpha - \cos(\varphi + \tau) \sin \delta, \\ \cos h \sin \theta &= -\sin \lambda \cos \delta \cos \alpha + \cos \lambda \cos \delta \sin \alpha, \\ \sin h &= \cos \lambda \cos(\varphi + \tau) \cos \delta \cos \alpha + \sin \lambda \times \\ &\times \cos(\varphi + \tau) \cos \delta \sin \alpha + \sin(\varphi + \tau) \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.20)$$

Решение системы (2.2.20) относительно h и θ дает:

$$\left. \begin{aligned} \sin h &= \sin \delta \sin(\varphi + \tau) + \cos \delta \cos(\varphi + \tau) \cos(\lambda - \alpha), \\ \operatorname{ctg} \theta &= \operatorname{tg} \delta \cos(\varphi + \tau) \operatorname{cosec}(\lambda - \alpha) - \sin(\varphi + \tau) \operatorname{ctg}(\lambda - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

* Радиус-вектор в топоцентрической системе обозначаем через r , в отличие от символа ρ , используемого в геоцентрической системе.

Аналогичным путем, используя матрицу (2.2.18), можно получить выражение экваториальных координат α и δ через горизонтальные координаты h и θ и географические координаты φ и λ .

Если в уравнениях (2.2.21) разность $(\lambda - \alpha)$ заменить символом часового угла t , азимут θ обозначить символом A , а Землю уподобить сфере ($\tau = 0$), то получим традиционное написание формул преобразования экваториальных координат в горизонтальные:

$$\left. \begin{aligned} \sin h &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ \operatorname{ctg} A &= \operatorname{tg} \delta \cos \varphi \operatorname{cosec} t - \sin \varphi \operatorname{ctg} t. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.22)$$

Следует отметить, что нахождение указанной связи координат с использованием аффинора $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ дает более общие выражения, позволяющие учесть несферичность Земли.

2.2.8. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И ГЕОЭКЗОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Более общим является случай, когда устанавливается связь между координатами систем геоцентрической и геоэкзоцентрической. Такой случай может иметь место при определении положения космических объектов из точек, расположенных вне Земли.

Векторы переноса начал координат $\bar{A}$ и $\bar{B}$ задаются компонентами, выраженными через геоцентрические координаты внеземной точки, например в экваториальной системе в соответствии с выражением (2.2.10) или в орбитальной системе в соответствии с выражениями (2.2.14), (2.2.15).

Аффиноры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ должны выражаться через какие-то параметры, отражающие ориентацию осей внешней системы относительно осей системы центральной.

Пусть начало внешней системы фиксируется в геоцентрической экваториальной системе и задается радиус-вектором ρ_0 и углами λ и φ .

Одна из вероятных ориентаций состоит в том, что ось ζ внеземной системы направляется по местной вертикали, а ось ξ — в плоскости, проходящей через внеземную точку S , центр Земли и полюс мира (рис. 2.2.3). Ориентация оси ζ относительно плоскости, в которой лежит ось мира и оба начала координатных систем (плоскость OSZ), задается углом σ , а ее проекция в этой плоскости относительно луча OS — углом τ .

Аффинор $\mathcal{A}$, преобразующий координаты x^i в координаты ξ^i , имеет матрицу:

$$\left\| \begin{array}{l} \cos \lambda \sin (\varphi + \tau) \\ -[\sin \lambda \cos \sigma + \cos \lambda \cos (\varphi + \tau) \sin \sigma] \\ -[\sin \lambda \sin \sigma + \cos \lambda \cos (\varphi + \tau) \cos \sigma] \\ \hline \sin \lambda \sin (\varphi + \tau) \\ [\cos \lambda \cos \sigma - \sin \lambda \cos (\varphi + \tau) \sin \sigma] \\ [\cos \lambda \sin \sigma + \sin \lambda \cos (\varphi + \tau) \cos \sigma] \\ \hline -\cos (\varphi + \tau) \\ -\sin (\varphi + \tau) \sin \sigma \\ \sin (\varphi + \tau) \cos \sigma \end{array} \right\|, \quad (2.2.23)$$

причем компоненты вектора перенота $\bar{A}$ выражаются матрицей

$$\begin{pmatrix} -\rho_0 \sin \tau \\ \rho_0 \cos \tau \sin \sigma \\ -\rho_0 \cos \tau \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.2.24)$$

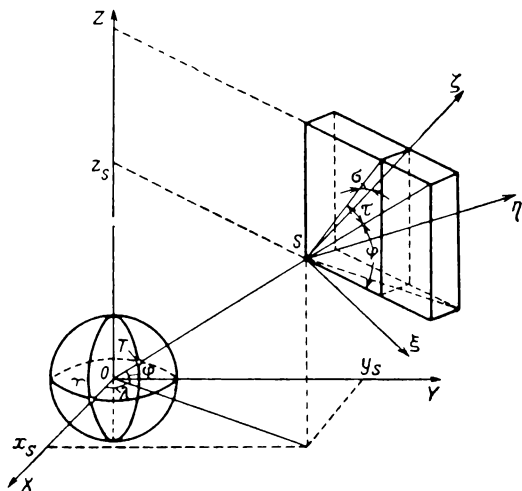


Рис. 2.2.3. Геоцентрическая и геоэксцентрическая прямоугольные системы координат.

Обратное преобразование координат ξ^j в координаты x^j выполняется аффинором $\mathcal{B}$, характеризуемым матрицей:

$$\begin{pmatrix} \cos \lambda \sin (\varphi+\tau) \\ \sin \lambda \sin (\varphi+\tau) \\ -\cos (\varphi+\tau) \\ -[\sin \lambda \cos \sigma+\cos \lambda \cos (\varphi+\tau) \sin \sigma] \\ [\cos \lambda \cos \sigma-\sin \lambda \cos (\varphi+\tau) \sin \sigma] \\ -\sin (\varphi+\tau) \sin \sigma \\ -[\sin \lambda \sin \sigma-\cos \lambda \cos (\varphi+\tau) \cos \sigma] \\ [\cos \lambda \sin \sigma+\sin \lambda \cos (\varphi+\tau) \cos \sigma] \\ \sin (\varphi+\tau) \cos \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.2.25)$$

В этом случае компоненты вектора переноса $\bar{B}$ имеют матрицу

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \cos \lambda \cos \varphi \\ \rho_0 \sin \lambda \cos \varphi \\ \rho_0 \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.2.26)$$

Приведенные преобразования справедливы, очевидно, и для случая, когда ось ζ направлена не по местной вертикали, а углы τ и σ лишь фиксируют положение триэдра $\xi\eta\zeta$ относительно луча OS и оси мира.

Заметим, что матрица (2.2.23) выполняет также преобразование геоцентрической системы координат в топоцентрическую с началом на поверхности трехосного эллипсоида, а матрица (2.2.25) — обратное преобразование. В самом деле, перенесение точки S на поверхность такого эллипсоида приводит к изменению величин компонент векторов $\bar{A}$ и $\bar{B}$, но аффиноры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ при этом не меняются. Углы τ и σ могут рассматриваться в этом случае как характеристики уклонения отвесной линии.

Следует отметить, что матрицы (2.2.12), (2.2.13), (2.2.16), (2.2.18), (2.2.23), (2.2.25) обладают свойством ортогональности, а описываемые ими преобразования являются изометрическими.

2.2.9. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И ГЕОЭКЗОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим взаимные преобразования геоцентрических и экзосцентрических координатных систем орбитального типа. От предшествующего варианта этот случай отличается тем, что начало внешней системы задается в плоскости орбиты радиусом-вектором $\rho(t)$ и истинной аномалией $\vartheta(t)$ (рис. 2.2.4). Сама орбитальная плоскость фиксируется в пространстве углами i и Ω , а линия апсид — соответственно углом ω .

Как $\rho(t)$, так и $\vartheta(t)$ являются функцией времени и могут выражаться через эксцентрическую аномалию E в соответствии с (2.2.15).

Переходы между геоцентрическими орбитальной и экваториальной системами описываются матрицами (2.2.12) и (2.2.13). Поэтому, найдя преобразования для рассматриваемых орбитальных систем, можно далее экзосцентрическую орбитальную систему преобразовать в геоцентрическую экваториальную и через нее в любую иную.

Обозначив координаты центральной системы через x, y и z , а координаты внешней системы через ξ, η и ζ (рис. 2.2.4), заметим, что оси z и ζ перпендикулярны плоскости орбиты. Поэтому в девятичленных матрицах преобразования одна строка и один столбец окажутся нулевыми.

Используя (2.2.14) и (2.2.15), можно получить аффинор $\mathcal{A}$, преобразующий координаты x^i в координаты ξ^i в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1} & \sqrt{1 - e^2} \sin E (1 - e \cos E)^{-1} & 0 \\ -\sqrt{1 - e^2} \sin E (1 - e \cos E)^{-1} & (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.27)$$

и компоненты вектора переноса $\bar{A}$ в виде

$$\begin{pmatrix} a(1 - e \cos E) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.28)$$

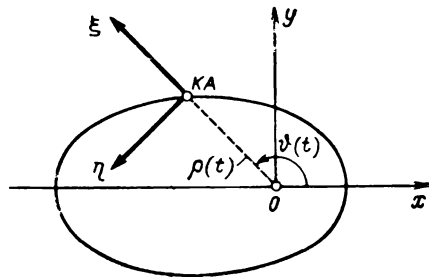


Рис. 2.2.4. К геоцентрической и геоэкзосцентрической орбитальным системам координат.

Преобразование координат ξ^i в координаты x^j выполняется с помощью матрицы

$$\begin{vmatrix} (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1} & -\sqrt{1 - e^2} \sin E (1 - e \cos E)^{-1} & 0 \\ \sqrt{1 - e^2} \sin E (1 - e \cos E)^{-1} & (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.2.29)$$

причем компоненты вектора переноса $\bar{B}$ выражаются

$$\begin{vmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (2.2.30)$$

Матрицы (2.2.27)–(2.2.30) зависят, естественно, от кеплеровых элементов, определяющих движение КА в плоскости орбиты. Члены матриц являются функциями времени.

2.2.10. СВЯЗАННЫЕ И НЕСВЯЗАННЫЕ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ И ЭКВАТОРИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

При решении некоторых навигационных задач удобно проводить вычисления в геоцентрической прямоугольной системе координат, жестко связанной с Землей. Переход от геоцентрических связанных координат $\{x_{св}, y_{св}, z_{св}\}$ к геоцентрическим координатам $\{x, y, z\}$ системы, ось OX которой направлена в точку Υ , выполняется центроаффинным преобразованием с помощью оператора, определяемого матрицей

$$\begin{vmatrix} \cos \Omega_3(t - t_0) & -\sin \Omega_3(t - t_0) & 0 \\ \sin \Omega_3(t - t_0) & \cos \Omega_3(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.2.31)$$

где Ω_3 — угловая скорость вращения Земли; $(t - t_0)$ — время, истекшее от момента совпадения осей OX и $OX_{св}$.

Обратный переход от координат $\{x, y, z\}$ к координатам $\{x_{св}, y_{св}, z_{св}\}$ выполняется преобразованием с матрицей, определенной в виде

$$\begin{vmatrix} \cos \Omega_3(t - t_0) & \sin \Omega_3(t - t_0) & 0 \\ -\sin \Omega_3(t - t_0) & \cos \Omega_3(t - t_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.2.32)$$

Укажем, что переход от прямоугольных геоцентрических связанных координат к орбитальным координатам и обратный переход выполняются операторами с матрицами, задаваемыми выражениями (2.2.12) и (2.2.13), в которых прямое восхождение Ω должно заменяться величиной

$$\Omega_{св} = \Omega + \Omega_3(t - t_0). \quad (2.2.33)$$

2.2.11. ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ И ПРОСТРАНСТВО УСКОРЕНИЙ

При нахождении оптимальных траекторий космических аппаратов, а также при определении и прогнозировании их орбит применяются специальные аналитические методы, среди которых особое место принадлежит методу орбитальных годографов. Лежа-

шая в его основе теория позволяет динамические связи, характеризующие движение КА в центральном поле тяготения, заменить чисто геометрическими соотношениями. Такая геометризация приводит к использованию своеобразных метрических пространств — пространства скоростей и пространства ускорений.

Предложенный впервые У. Р. Гамильтоном (1846 г.) метод орбитальных годографов усиленно развивается в последние годы.

В процессе анализа траектории с помощью орбитальных годографов неизбежно сталкиваются с преобразованиями метрических пространств: евклидова пространства в пространство скоростей или ускорений, пространства скоростей — в пространство ускорений, а также с обратными преобразованиями.

Рассмотрим основы этих преобразований.

Обратимся к рис. 2.2.4, где изображены геоцентрическая и геоэксцентрическая прямоугольные системы координат $\{x, y\}$ и $\{\xi, \eta\}$. Из закона тяготения Ньютона следует, что для невозмущенного кеплеровского движения составляющие ускорения по осям x и y имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu \frac{x}{\rho^3}, \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{\rho^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.34)$$

где μ — произведение гравитационной постоянной f на массу центрального тела m_n , а ρ — модуль радиус-вектора.

Задав размеры и форму орбиты ее большой полуосью a и эксцентриситетом e и введя ее фокальный параметр $p = a(1 - e^2)$, можно прийти [83] к выражениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -C \frac{y}{\rho}, \\ \dot{y} - Q &= C \frac{x}{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.35)$$

где

$$C = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \quad \text{и} \quad Q = e \sqrt{\frac{\mu}{p}}. \quad (2.2.36)$$

Возведя далее в квадрат левые и правые части уравнений (2.2.35) и просуммировав их попарно, получим новое уравнение

$$(\dot{x})^2 + (\dot{y} - Q)^2 = C^2. \quad (2.2.37)$$

Последнее выражение формально представляет собой уравнение окружности с размером радиуса C , которая построена в системе отсчета $\{x, \dot{y}\}$ так, что начало ее смещено по оси $\dot{y}$ на величину Q .

Таким образом эллиптической фигуре пространства $\{x, y\}$ ока-

залась сопоставленной круговая фигура пространства $\{\dot{x}, \dot{y}\}$. Но поскольку прямоугольная система отсчета $\{x, y\}$ задана в пространстве скоростей, формулы (2.2.35) определяют преобразование пространства координат в пространство скоростей.

Наложим геометрически пространство $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ на пространство $\{x, y\}$, направив оси $\dot{x}$ и $\dot{y}$ соответственно по осям x и y (рис. 2.2.5). Отмерив на оси $\dot{y}$ отрезок OO' , равный Q , из точки O' , как из

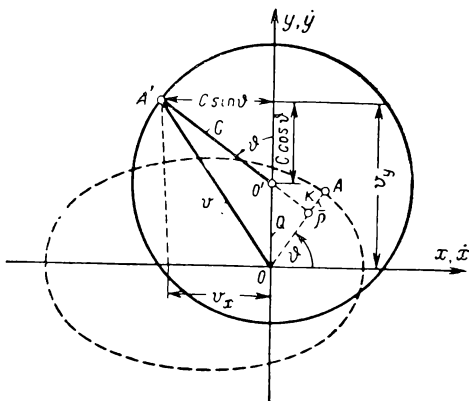


Рис. 2.2.5. К отображению эллиптического движения в пространство скорости.

центра, опишем окружность радиуса C . Полученная окружность является графическим выражением в пространстве скоростей уравнения (2.2.37). Каждая ее точка будет характеризовать скорость КА при нахождении его в соответствующей точке эллиптической орбиты.

Так, если взять на эллиптической орбите точку A , положение которой задается радиус-вектором $\bar{\rho}$, то в пространстве скоростей ей будет отвечать точка A' , положение которой задается вектором $\overline{OA'}$. Этот вектор по величине и направлению равен вектору скорости $\bar{v}$ КА, находящегося в точке A своей орбиты. В последнем убеждает анализ рис. 2.2.5. Можно показать, что линия $O'A'$ составляет с осью $\dot{y}$ угол ϑ , равный истинной аномалии КА. Тогда продолжение этой линии до пересечения с радиус-вектором $\bar{\rho}$ образует прямоугольный треугольник $OO'K$, катеты которого равны соответственно $Q \sin \vartheta$ и $Q \cos \vartheta$. Вектор скорости $\bar{v}$ принято раскладывать на радиальную v_r и тангенциальную v_t составляющие, причем для рассматриваемого чертежа

$$v_r = \dot{\rho} = Q \sin \vartheta \quad (2.2.38)$$

и

$$v_t = \rho \dot{u} = \mathbf{C} + \mathbf{Q} \cos \vartheta, \quad (2.2.39)$$

где u — аргумент широты.

Являясь их векторной суммой, OA' представляет собой вектор скорости КА $\bar{v}$.

Поскольку конец этого вектора при движении КА по орбите перемещается по окружности, последняя будет годографом скорости.

Вектор $\bar{v}$ при проектировании на оси $\dot{x}$ и $\dot{y}$ дает в согласии с (2.2.35) соответствующие слагающие:

$$v_x = \dot{\rho}_x = \mathbf{C} \sin \vartheta \quad (2.2.40)$$

и

$$v_y = \dot{\rho}_y = \mathbf{Q} + \mathbf{C} \cos \vartheta. \quad (2.2.41)$$

Смещение центра годографа относительно начала отсчета зависит от $\mathbf{Q}$, т. е. определяется величиной эксцентриситета. Для случая круговой орбиты $\mathbf{Q} = 0$, точки O и O' совмещаются и, как это видно из рис. 2.2.5, имеет место равенство $v_t = v$, причем $v_r = 0$.

Для принятого на рис. 2.2.5 способа наложения пространств $\{x, y\}$ и $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ вектор $\bar{v}$ упреждает на $\pi/2$ вектор $\bar{\rho}$.

Отображение траектории КА в пространство скоростей для неэллиптических орбит также приводит к круговым фигурам. Однако при параболических орбитах годограф будет проходить через начало отсчета O , а при эллиптических орбитах не будет его охватывать.

Уравнение (2.2.37) относилось к преобразованию геоцентрической координатной системы. Подобные преобразования применимы и к геоэксцентрической системе $\{\xi, \eta\}$ (рис. 2.2.4), начало которой совмещено с движущимся КА. Не рассматривая специально это преобразование, приведем вид уравнения в пространстве скоростей:

$$(v_r)^2 + (v_t - \mathbf{C})^2 = \mathbf{Q}^2. \quad (2.2.42)$$

Особенность состоит здесь в том, что годограф строится в осях $v_r - v_t$.

Для перехода к пространству ускорений потребуется в основных уравнениях движения

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{u}^2 + \frac{\mu}{\rho^2} = \frac{1}{m} F_r \quad (2.2.43)$$

и

$$2\dot{\rho}\dot{u} + \rho\ddot{u} = \frac{1}{m} F_t,$$

где F_r, F_t — составляющие силы, приложенной к космическому аппарату, а m — его масса, переменные ρ и u заменить параметрами

годографа $\mathbf{C}$ и $\mathbf{Q}$. Дифференцирование по времени (2.2.38) и (2.2.39) позволяет получить выражения для $\dot{\rho}$, $\dot{\rho} \dot{u}$, $\rho \ddot{u}$. После их подстановки в (2.2.43) при использовании (2.2.39) и учета того, что $u = \omega + \vartheta$ и

$$\mathbf{C} \dot{u} = \frac{\mu}{\rho^2}, \quad (2.2.44)$$

можно получить

$$\left. \begin{aligned} a_r &= \dot{\mathbf{Q}} \sin \vartheta - \mathbf{Q} \dot{\omega} \cos \vartheta - \mathbf{C} \dot{u}, \\ a_t &= \dot{\mathbf{C}} + \dot{\mathbf{Q}} \cos \vartheta + \mathbf{Q} \dot{\omega} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.45)$$

Поскольку составляющие ускорения по осям $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ вычисляются как

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= a_t \sin \vartheta - a_r \cos \vartheta, \\ \ddot{y} &= a_t \cos \vartheta - a_r \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.46)$$

соответствующие вычисления приведут к виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - \mathbf{Q} \dot{\omega} &= \dot{\mathbf{C}} \sin \vartheta + \mathbf{C} \dot{u} \cos \vartheta, \\ \ddot{y} - \dot{\mathbf{Q}} &= \dot{\mathbf{C}} \cos \vartheta - \mathbf{C} \dot{u} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.47)$$

Возведя в квадрат левые и правые части уравнений (2.2.47) и проведя их суммирование, можно получить новое уравнение:

$$(\ddot{x} - \mathbf{Q} \dot{\omega})^2 + (\ddot{y} - \dot{\mathbf{Q}})^2 = \dot{\mathbf{C}}^2 + (\mathbf{C} \dot{u})^2. \quad (2.2.48)$$

Последнее выражение определяет движение КА в пространстве ускорений для общего случая полета с непрерывной тягой. При движении без тяги $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{C}} = \dot{\omega} = 0$ и тогда справедливо уравнение

$$(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 = (\mathbf{C} \dot{\vartheta})^2. \quad (2.2.49)$$

Введение модуля ускорения $|a|$ дает

$$|a| = \mathbf{C} \dot{\vartheta}, \quad (2.2.49')$$

откуда в результате некоторых преобразований можно прийти к виду

$$\sqrt{|a|} = \alpha + \beta \cos \vartheta, \quad (2.2.50)$$

где

$$\alpha = \frac{\mathbf{C}^2}{\sqrt{\mu}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\mathbf{C} \mathbf{Q}}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.2.50')$$

По виду уравнения (2.2.50) можно судить о полученных фигурах. Это — улитки Паскаля. Для эллиптической орбиты $\alpha > \beta$ и имеет место улитка с одним минимумом (рис. 2.2.6). В частном

случае круговой орбиты $Q = 0$, а следовательно, и $\beta = 0$, и улитка вырождается в окружность.

При неэллиптических траекториях годограф ускорения приобретает форму других разновидностей улиток Паскаля. Для параболической траектории имеет место кардиоиды ($\alpha = \beta$), для гиперболической траектории — двунаправленная улитка ($\alpha < \beta$).

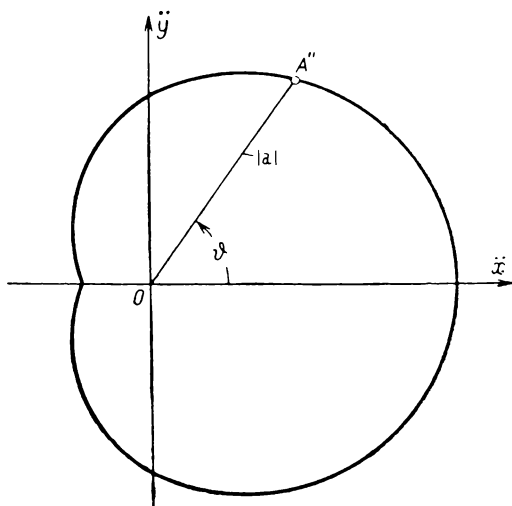


Рис. 2.2.6. К отображению эллиптического движения в пространство ускорения.

Если обратиться к преобразованиям пространства, заданного геоэксцентрическими координатами $\{\xi, \eta\}$, то для траекторий с тягой можно прийти к уравнению

$$(a_r + C \dot{u})^2 + (a_t - \dot{C}) = \dot{Q}^2 + (Q \dot{\omega})^2, \quad (2.2.51)$$

которое в случае свободного полета ($\dot{C} = \dot{Q} = \dot{\omega} = 0$) дает

$$(a_r + C \dot{\vartheta})^2 + (a_t)^2 = 0. \quad (2.2.52)$$

Особенность состоит в том, что построение годографа ускорений проводится в осях $a_r - a_t$, причем сам он изображается в виде отрезка прямой на отрицательной полуоси a_r .

§ 2.3. ПРОСТРАНСТВО СОБЫТИЙ

2.3.1. ЗАДАНИЕ ТОЧЕК-СОБЫТИЙ В ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

В пространстве событий мировые точки задаются 4-мя координатами: x_0, x_1, x_2, x_3 , среди которых одна — временная: $x_0^2 = -c^2 t^2$.

Квадрат расстояния между точками исчисляется по обычной геометрической схеме

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - c^2 \Delta t^2 = \sum_{i=0}^3 \Delta x_i^2. \quad (2.3.1)$$

Пространство событий связывается с инерциальной системой отсчета, в которой могут фиксироваться координаты мировых точек.

Из всех материальных тел Вселенной выделяется некоторая их совокупность, связанная внутренними взаимодействиями, причем всеми взаимодействиями этой системы с телами, расположенными вне ее, пренебрегают. Движение материальных точек внутри этой системы будет определяться их взаимодействием, но сама система в целом может находиться только в равномерном и прямолинейном движении. В ней справедлив закон инерции.

Если центр масс подобной системы принять за начало координат, а координатные оси ориентировать на такие удаленные тела, которые в течение длительного времени можно считать неподвижными относительно начала координат, получится инерциальная система отсчета.

Любая система отсчета, не подверженная действию внешних сил и сохраняющая свою скорость по величине и направлению, будет системой *инерциальной*. С большой точностью ею является система отсчета, центр которой совмещен с центром масс Солнца, а оси направлены на удаленные звезды. Для ряда задач космической навигации за инерциальную систему можно принять систему отсчета, начало которой помещено в центре масс Земли. Так, рассмотренные в § 2.2 геоцентрические экваториальные несвязанные (одна из осей направлена в точку γ) системы будут приближенно инерциальными.

Инерциальные системы могут различаться сдвигом или поворотом координатных осей в трехмерном пространстве, сдвигом начала отсчета времени, а также направлением и скоростью движения их начал отсчета. Переход от одной системы к другой совершается по определенным правилам. Эти правила различаются в зависимости от соотношения скорости относительного движения v и скорости света c :

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (2.3.1')$$

При малых β имеют место преобразования Галилея, при β , сравнимых с единицей, — преобразования Лоренца.

2.3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Преобразования Галилея устанавливают связь между координатами точек пространства событий, которые рассматриваются в различных инерциальных системах отсчета, находящихся в отно-

сительном движении при условии $\beta \ll 1$. Иными словами, эти преобразования связывают координаты трехмерного пространства и время какого-либо события, регистрируемого в двух относительно движущихся системах отсчета.

Если в системе отсчета К координаты точки-события обозначить $x_1, x_2, x_3, x_0 = i c t$, а в системе К' — $x'_1, x'_2, x'_3, x'_0 = i c t'$, то преобразование выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - v_{x1} t, \\ x'_2 &= x_2 - v_{x2} t, \\ x'_3 &= x_3 - v_{x3} t \quad \text{и} \quad t' = t, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.2)$$

где v_{x1}, v_{x2} и v_{x3} — составляющие относительной скорости.

Таким образом координаты трехмерного пространства x_1, x_2, x_3 преобразуются, независимо от временной координаты, по формулам, рассмотренным в § 2.2. Время же остается неизменным, независимо от того, в какой системе оно измеряется.

Законы классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея.

2.3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Преобразования Лоренца обобщают галилеевы преобразования на случай относительного движения с любой скоростью.

Если скорость движения координатной системы К' равна v и произвольно ориентирована относительно осей системы К, причем составляющими скорости будут v_{x1}, v_{x2} и v_{x3} , то имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{\alpha}{v^2} v_{x1} [v_{x1}x_1 + v_{x2}x_2 + v_{x3}x_3 - c^2 t (1 + \sqrt{1-\beta^2})], \\ x'_2 &= x_2 + \frac{\alpha}{v^2} v_{x2} [v_{x1}x_1 + v_{x2}x_2 + v_{x3}x_3 - c^2 t (1 + \sqrt{1-\beta^2})], \\ x'_3 &= x_3 + \frac{\alpha}{v^2} v_{x3} [v_{x1}x_1 + v_{x2}x_2 + v_{x3}x_3 - c^2 t (1 + \sqrt{1-\beta^2})], \\ t' &= t - \frac{1}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} [v_{x1}x_1 + v_{x2}x_2 + v_{x3}x_3 - \\ &\quad - c^2 t (1 - \sqrt{1-\beta^2})], \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1.$$

В том частном случае, когда v направлена по оси OX_1 системы K и, следовательно, $v_{x1} = v$, а $v_{x2} = v_{x3} = 0$, из преобразований (2.3.3) вытекает специальное преобразование:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

Одно из важнейших свойств преобразования (2.3.3) состоит в том, что квадрат интервала Δs^2 [выражение (2.3.1)] оказывается инвариантным относительно этого преобразования. Лоренцовы преобразования лежат в основе описания ряда кинематических эффектов теории относительности.

Законы релятивистской механики инвариантны относительно преобразований Лоренца. Нерелятивистский предел этих преобразований составляют галилеевы преобразования, получаемые из (2.3.3) в предположении, что $\beta \ll 1$.

§ 2.4. ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.4.1. ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КА

Можно создать модель движения космического аппарата, при которой значения текущих координат будут всецело определяться некоторой совокупностью параметров.

Систему величин, характеризующих движение объекта навигации, будем называть *параметрами движения* объекта * и обозначать символом q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$).

При полном знании сил, действующих на объект, и безошибочном нахождении начальных условий точный прогноз можно было бы давать на неограниченный срок вперед. Ввиду отсутствия этих идеальных условий прогноз дается с ошибками, что вынуждает, во-первых, ограничивать срок прогноза и, во-вторых, прибегать к периодическому уточнению параметров движения, выполняемому с использованием обновленных навигационных измерений.

Параметры движения, как правило, непосредственному измерению не поддаются, и только гипотетически можно представить некоторые ситуации, когда это можно сделать. Так, например, при двумерной навигации в случае движения объекта по меридиану планеты измеренная долгота будет являться параметром движения,

* Применительно к космическим аппаратам говорят также о *параметрах орбиты* или же об *элементах орбиты*.

так как она будет определять траекторию движения объекта. В другом случае, при полете по околоземной орбите и описании движения в сферической системе координат с началом в некоторой наземной точке, измеренные из этой точки с помощью шестипараметрической радионавигационной системы величины дадут совокупность параметров движения. Вообще же измерения не дают непосредственной информации о параметрах движения, и они находятся путем обработки результатов измерений.

За параметры, задающие движение космического аппарата, обычно принимают или три его координаты (x_{10}, x_{20}, x_{30}) и три составляющие вектора скорости ($\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}$) в начальный момент времени t_0 , или же шесть кеплеровских элементов: наклонение i , долготу восходящего узла Ω , угловое расстояние перигея от узла ω (см. рис. 2.2.1), большую полуось a , эксцентриситет e и момент прохода через перигей τ_0 . Первая совокупность используется в качестве начальных условий при интегрировании дифференциальных уравнений движения и именуется — начальные условия, вторая — применяется для интегрального описания положения траектории в пространстве и положения объекта на траектории и называется — элементы орбиты.

Кроме названных совокупностей начальных условий и кеплеровых элементов орбиты параметры движения могут задаваться в виде иных групп шести величин. Так, вместо большой полуоси применяют период обращения T , функционально связанный с нею

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}, \quad (2.4.1)$$

где μ представляется произведением гравитационной постоянной f на массу планеты m_n , причем $f = 6,67 \cdot 10^{-11} [м^3/кг \cdot сек^2]$ и для околоземных орбит $\mu = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} = 3,986 \cdot 10^{14} [м^3/сек^2]$.

Включают в число параметров фокальный параметр p , который для эллипса имеет выражение

$$p = a(1 - e^2), \quad (2.4.2)$$

заменяя им либо полуось a , либо эксцентриситет e .

Весьма часто вместо элемента τ_0 применяют среднюю аномалию M , определяемую по соотношению:

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - \tau_0) = \mu^{1/2} a^{-3/2} (t - \tau_0). \quad (2.4.3)$$

Ряд вычислительных преимуществ возникает при использовании в качестве параметров движения величин типа

$$q_i \cos q_k \quad \text{и} \quad q_i \sin q_k. \quad (2.4.4)$$

Таким образом, можно сформировать множество фазовых пространств, и в каждом из них любая из траекторий КА будет представляться точкой шести измерений.

Вся совокупность точек того или иного пространства должна отвечать всем возможным комбинациям параметров движения КА.

В частных случаях шестимерное пространство превращается в четырехмерное. Для круговых орбит $e = 0$ и ω не фиксируется ввиду отсутствия перигея, поэтому каждая точка пространства состояния будет характеризоваться элементами i, Ω, a и τ_0 .

Переход от одного пространства к другому сводится к преобразованиям соответствующих фазовых координат.

Рассмотрим наиболее важные преобразования.

2.4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЕПЛЕРОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Фазовые пространства $\{x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$ и $\{i, \Omega, \omega, a, e, \tau_0\}$ преобразуются взаимно однозначно. Переход от кеплеровых элементов к системе начальных условий выполняется по следующей схеме.

Матрица перехода (2.2.12) преобразует геоцентрические орбитальные координаты ξ, η и ζ в геоцентрические экваториальные координаты x, y и z с использованием первых трех кеплеровых элементов i, Ω и ω . Поэтому, если найти выражения для координат ξ, η и ζ через величины, характеризующие движение КА по орбите в плоскости $\xi O \eta$ (см. рис. 2.2.1), т. е. через a, e и τ_0 , то представится возможным с помощью матрицы перехода от орбитальных координат к экваториальным получить искомое преобразование.

Итак, подставив зависимости (2.2.15) в выражения (2.2.14), получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e), \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E, \\ \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

Здесь E — эксцентрическая аномалия, которая представляется степенным рядом от средней аномалии M :

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{8} (3 \sin 3M - \sin M) + \\ &+ \frac{e^4}{6} (2 \sin 4M - \sin 2M) + \dots, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

причем последняя, в свою очередь, имеет выражение через период обращения спутника T_0 , момент прохода через перигей (узел) τ_0 и текущее время t в виде (2.4.3).

Применив к (2.4.5) координатное преобразование в соответствии с матрицей (2.2.12) и положив время равным начальному моменту $t = t_0$, получим искомые выражения для начальных условий x_0, y_0 и z_0 . Продифференцировав далее зависимости $x_0(i, \Omega, \omega, a, e, \tau_0)$,

y_0 ($i, \Omega, \omega, a, e, \tau_0$) и z_0 ($i, \Omega, \omega, a, e, \tau_0$) по времени, придем к выражениям для x_0, y_0 и z_0 .

Выполнение названных действий дает следующие уравнения преобразования пространства кеплеровых элементов в пространство начальных условий:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \{ [(\cos E_0 - e) \cos \omega - \sqrt{1-e^2} \sin E_0 \sin \omega] \cos \Omega - \\ &\quad - [(\cos E_0 - e) \sin \omega + \sqrt{1-e^2} \sin E_0 \cos \omega] \cos i \sin \Omega \}, \\ y_0 &= a \{ [(\cos E_0 - e) \sin \omega + \sqrt{1-e^2} \sin E_0 \cos \omega] \cos i \cos \Omega + \\ &\quad + [(\cos E_0 - e) \cos \omega - \sqrt{1-e^2} \sin E_0 \sin \omega] \sin \Omega \}, \\ z_0 &= a [(\cos E_0 - e) \sin \omega + \sqrt{1-e^2} \sin E_0 \cos \omega] \sin i \}, \\ \dot{x}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} [(\sin \omega \sin E_0 - \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos E_0) \cos i \times \\ &\quad \times \sin \Omega - (\cos \omega \sin E_0 + \sqrt{1-e^2} \sin \omega \cos E_0) \cos \Omega], \\ \dot{y}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} [(-\sin \omega \sin E_0 + \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos E_0) \cos i \times \\ &\quad \times \cos \Omega - (\cos \omega \sin E_0 + \sqrt{1-e^2} \sin \omega \cos E_0) \sin \Omega], \\ \dot{z}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{a}} [(-\sin \omega \sin E_0 + \sqrt{1-e^2} \cos \omega \cos E_0) \sin i], \end{aligned} \right\} \quad (2.4.7)$$

где E_0 — эксцентрисическая аномалия, вычисляемая для начального момента t_0 из решения уравнения Кеплера

$$E_0 - M_0 = e \sin E_0, \quad (2.4.8)$$

причем средняя аномалия M_0 , в свою очередь, выражается через шестой элемент τ_0 согласно (2.4.3). Для нахождения E_0 можно пользоваться также рядом (2.4.6).

При круговой орбите, когда эксцентриситет $e = 0$ и соответственно эксцентрисическая аномалия E тождественно равна истинной аномалии ϑ , формулы преобразования упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \rho_0 [\cos (\vartheta + \omega) \cos \Omega - \sin (\vartheta + \omega) \cos i \sin \Omega], \\ y_0 &= \rho_0 [\sin (\vartheta + \omega) \cos i \cos \Omega + \cos (\vartheta + \omega) \sin \Omega], \\ z_0 &= \rho_0 [\sin (\vartheta + \omega) \sin i], \\ \dot{x}_0 &= -\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} [\cos (\vartheta + \omega) \cos i \sin \Omega + \sin (\vartheta + \omega) \cos \Omega], \\ \dot{y}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} [\cos (\vartheta + \omega) \cos i \cos \Omega - \sin (\vartheta + \omega) \sin \Omega], \\ \dot{z}_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} [\cos (\vartheta + \omega) \sin i]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

2.4.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В КЕПЛЕРОВЫ ЭЛЕМЕНТЫ

Обратный переход от начальных условий к кеплеровым элементам орбиты осуществляется [57] с применением системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} i &= \arccos [(x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0) C_0^{-1}], \\ \Omega &= \arctg [-(y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0) (z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0)^{-1}], \\ \omega &= \arctg \{ z_0 C_0 [y_0 (y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0) - x_0 (z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0)]^{-1} \} - \\ &\quad - \arctg [(K_0 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0) (K_0 \cos^2 \Theta_0 - 1)^{-1}], \\ a &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2} (2 - K_0)^{-1}, \\ e &= [1 - K_0 (2 - K_0) \cos^2 \Theta_0]^{1/2}, \\ \tau_0 &= t_0 - (E_0 - e \sin E_0) a^{3/2} \mu^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.10)$$

причем вспомогательные величины C_0 , K_0 и Θ_0 выражаются, в свою очередь, через начальные условия в виде

$$C_0 = [(x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0)^2 + (y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0)^2 + (z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0)^2]^{1/2}, \quad (2.4.11)$$

$$K_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) \mu^{-1}, \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \arcsin [(x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0) \times \\ &\quad \times (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{-1/2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2)^{-1/2}], \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

а E_0 находится через K_0 и Θ_0 с помощью соотношения

$$\begin{aligned} E_0 &= 2 \arccos \{ (1 - e)^{1/2} (1 + e)^{-1/2} \times \\ &\quad \times \arctg \left[\frac{1}{2} \arctg (K_0 \sin \Theta_0 \cos \Theta_0) (K_0 \cos^2 \Theta_0 - 1)^{-1} \right] \}. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

В этом случае уравнения Кеплера для вычисления не используются, так как ввиду неизвестности τ_0 средняя аномалия M_0 остается также неизвестной.

При использовании преобразований (2.4.10) надлежит внимательно следить за знаками тригонометрических функций и при исчислении углов правильно фиксировать квадрант.

**ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
НАВИГАЦИИ****§ 3.1. ОБ ОСНОВАХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАВИГАЦИИ**

К настоящему времени сложилось много различных методов навигации. Они положены в основу принципов построения различных технических средств. Наряду с этим элементы навигационных методов используются при обнаружении и определении местоположения различных объектов с помощью отражения от них электромагнитных или акустических волн (радиолокация, гидролокация), при геологической разведке, при сейсмических измерениях и т. д.

Современные технические средства навигации разнообразны и непохожи друг на друга, а физические процессы, протекающие в отдельных устройствах, резко различаются между собой. Это дает повод говорить о многообразии видов навигации и рассматривать независимо навигацию компасную, оптикоастрономическую, инерциальную, радио, акустическую, радиоастрономическую и т. п. Применение такого разделения, однако, приводит к подчеркиванию взаимных различий не только технических средств, но и методов навигации. Между тем необходимо обращать внимание на их общность. Важно выявить тот единый физический принцип, который охватывает принципы действия отдельных навигационных измерителей, поскольку это облегчает выработку некоторых критериев их сравнительной оценки.

Важно и методы навигации рассмотреть с некоторых общих позиций, так как это позволит все их разнообразие свести к определенному числу основных вариантов. Полезен такой подход и для уточнения вопроса о первичных и вторичных навигационных параметрах, поскольку с этим связывается изыскание рациональных схем комплексирования различных измерителей.

Такой общий подход представляется возможным наметить, опираясь на теорию пространства, времени и тяготения. Эта теория, основоположником которой является А. Эйнштейн и которая была существенно развита в работах В. А. Фока, выступает в настоящее время как наиболее общая теория [31]. Частная (специальная) теория относительности и теория тяготения (общая теория относительности) приобретают все более важное значение для различных

областей науки. Они имеют непосредственное отношение и к навигации, предметом исследования которой являются пространственные и временные характеристики тел, движущихся в гравитационных полях.

Одним из важных выводов этой теории является утверждение о том, что пространство и время не являются априорными, обособленными от материи категориями, вместилищами, в которых материя существует в своих различных формах, но объединены в единую форму существования материи — форму пространства — времени. Пространственные и временные отношения не существуют сами по себе, они зависят от материальных связей между предметами и явлениями. Разделение пространства и времени — относительно, оно допустимо лишь применительно к той или иной системе отсчета.

Геометрические свойства (метрика) пространства — времени не являются абсолютными и неизменными, они зависят от размещения и движения материальных масс. Поэтому движение тел и распространение волновых процессов в пространстве будет зависеть от того, как в нем распределена материя. От этого будет зависеть и вид траекторий навигационных сигналов. Теория тяготения дает методы определения метрических свойств пространства — времени в зависимости от распределения и движения тел.

В теории пространства, времени и тяготения показано, что течение времени зависит как от выбора системы отсчета, так и от гравитационных полей, действующих в этой системе. Дается метод расчета временных процессов в зависимости от взаимного движения инерциальных систем, а также в зависимости от действия гравитационных сил.

Следует оговорить, что эффекты, определяемые специальной и общей теорией относительности, в условиях обычной приземной навигации имеют незначительное проявление, однако условия космической навигации в ряде случаев требуют их учета. Представляется поэтому целесообразным уже в настоящее время принимать их во внимание.

В этой теории выбор системы координат ничем не ограничен, причем использование символики и приемов тензорного анализа позволяет давать математические формулировки, справедливые в любой произвольно выбранной системе координат. Эта особенность представляет хорошие возможности для обобщенных записей, в том числе для формулирования пространственно-временных соотношений в наиболее общем виде. Такой математический аппарат хорошо подходит для теории навигации.

Теория пространства, времени и тяготения является поэтому основой общей теории навигации. Наряду с этим для развития навигационных методов и средств важную роль играют теория информационных электрических систем, теория случайных процессов, теория автоматического управления и другие научные дисциплины.

Рассмотрим далее некоторые принципиальные методические вопросы, связанные с основами навигационной теории. Прежде всего остановимся на вопросе об определении и содержании понятия навигационной информации.

§ 3.2. НАВИГАЦИОННАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Навигационные системы, как системы информационные, отличаются от связных систем. В системах передачи информации источник информации находится до передатчика и сигнал приобретает специфическую информацию еще до его поступления в линию связи. Радионавигационные системы нельзя, естественно, отнести к таким системам, так как до поступления в линию связи сигнал еще не является носителем навигационной информации, а, представляя собой обычно периодическую функцию времени, несет лишь в условном виде сведения о последовательном ряде временных отметок.

Не представляется далее возможным локализовать источник навигационной информации в каких-либо выделенных точках, расположенных за передатчиком, так как нет никаких оснований приписывать априорно каждой точке пространства какой-то запас информации.

Источник навигационной информации нельзя поэтому считать расположенным ни у передатчика, ни у приемника, ни в какой-то выделенной точке пространства. Эта информация не может быть связана только с одной точкой, она по сущности своей является информацией относительной. Фиксировать координаты какого-либо объекта имеет смысл лишь тогда, когда задано начало отсчета, поэтому оконечные пункты навигационной линии (пункт, координаты которого измеряются, и пункт, относительно которого координаты измеряются) следует рассматривать в их взаимной связи.

Среди различных возможных характеристик материальных тел (или систем материальных точек) можно выделить одну, описывающую их взаимное положение в пространстве, во времени или в общем случае в пространственно-временном многообразии. Именно эта характеристика составляет содержание понятия навигационной информации.

Будем считать, что навигационная информация — это информация об относительных координатах тел (совокупностей материальных точек) в четырехмерном пространственно-временном многообразии. При этом в качестве относительных координат выступают величины, характеризующие взаимное положение центров масс тел, взаимную ориентацию осей, связанных с ними, а также производные различных степеней от этих величин. Эти координаты в ряде случаев могут представляться в виде функций от некоторых параметров, тогда информация приобретает форму совокупности таких парамет-

ров, например совокупности кеплеровых элементов орбиты КА. Подобная трактовка предполагает, что для математической характеристики навигационной информации не обязательно рассчитывать количество информации, а необходимы вычисления, соотносящиеся с качественным своеобразием данного вида информации. Это, впрочем, находится в согласии с общими положениями теории информации [15].

Центры масс тел могут рассматриваться как точки в четырехмерном многообразии. Такие точки принято называть мировыми точками. Их взаимное положение определяется пространственно-временным интервалом. Для нахождения этого интервала необходимо сопоставить события в рассматриваемых точках. Так как не существует мгновенной передачи действия, для сопоставления событий в удаленных точках нужно воспользоваться каким-либо материальным носителем, перемещающимся в пространственно-временном многообразии и имеющим значение сигнала. С помощью сигнала сопоставляемые мировые точки оказываются связанными так называемой мировой линией.

Объективным фактом, сопутствующим перемещению сигнала, является изменение его положения в некоторой системе отсчета. Однако для выявления этого изменения требуется сравнить координаты, характеризующие какие-то последовательные положения сигнала. Такое сравнение завершает процесс выработки навигационной информации. Следует считать поэтому, что навигационная информация формируется в том месте, где с помощью сигнала производится сопоставление событий. Она формируется тогда, когда эти события сопоставляются. Местом формирования навигационной информации является сравнивающее устройство. В качестве такого выступают компараторы, индикаторы, антенные системы и другие устройства.

Весь этот процесс связан с определенными энергетическими затратами. При посылке сигнала ему сообщается энергия, обеспечивающая движение. Кроме того, энергия расходуется на выделение и преобразование сигнала, а также на сопоставление с его помощью интересующих событий.

Изложенное приводит к соответствующим обобщенным понятиям. Можно считать, что *навигационная система* — это система пространственно разнесенных технических средств и естественных космических тел, предназначенная для выработки навигационной информации и используемая в интересах вождения подвижных объектов. *Навигационная точка* — это естественная или искусственная материальная точка, относительно которой определяются пространственно-временные координаты объекта навигации. *Сравнивающее устройство* — это часть навигационной системы, в которой производится сопоставление событий, относящихся к навигационным точкам и объекту навигации, и завершается формирование навигационной информации.

Важно обратить внимание на следующее обстоятельство. Следует отличать методы и средства, применяемые для выработки информации, от тех, которые предназначены для передачи уже имеющейся информации.

Методы и средства для выработки информации о различных процессах (естественных, социальных, технических и т. п.) резко специфичны и непохожи друг на друга. Методы и средства для передачи различных видов информации на расстояние сходны между собой.

Когда в теории информации сообщения о событиях самого различного рода считаются одинаковыми категориями, так как после соответствующих изоморфных преобразований все они превращаются в сигналы однородной структуры, то совершенно отвлекаются от того, с помощью каких специальных приемов та или иная информация была добыта. В этом случае речь идет об информации, уже подготовленной для передачи на расстояние, и для любых ее видов источник сообщения будет располагаться до передатчика. Навигационная информация не будет составлять исключение: предварительно добытая, она может передаваться по любым каналам, в том числе и по радиоканалам.

Своеобразие этого вида информации состоит в том, что для ее выработки необходимы сигналы, способные связать сопоставляемые точки пространства. И в случае применения электромагнитных сигналов устройства для *выработки* навигационной информации оказываются похожими на устройства для электромагнитной *передачи* информации любого вида.

§ 3.3. НАВИГАЦИОННЫЙ СИГНАЛ

Навигационный сигнал — неотъемлемый элемент навигационной системы. Именно с его помощью осуществляется сопоставление событий в пространственно-временном многообразии.

Навигационные сигналы несут информацию только о началах отсчета координат. Такими сигналами могут являться различные физические поля, распространяющиеся в пространстве, и различные движущиеся материальные тела. Основными требованиями, определяющими возможность использования их в качестве навигационного сигнала, выступают следующие:

- энергия, сообщаемая сигналу источником (естественным или искусственным), должна быть достаточной для прохождения им любых возможных интервалов в пределах рабочего пространства;
- траектория и скорость движения сигнала должны быть детерминированы;
- должна обеспечиваться возможность селективного обнаружения сигнала и фиксация его координат;

— структура сигнала и закономерности его движения должны обладать устойчивостью.

Этим требованиям в свободном пространстве хорошо удовлетворяют волны радио- и светового диапазонов, а в водной среде — звуковые волны, чем и объясняется широкое навигационное использование этих волн в качестве сигналов.

Собственное излучение космических тел в световом диапазоне волн используется в качестве навигационных сигналов издавна. В последние годы в связи с развитием техники лазеров появились реальные возможности для искусственного генерирования навигационных сигналов оптического диапазона. В радиодиапазоне, напротив того, навигационная техника зародилась и усиленно развивалась на основе искусственного генерирования сигналов. Лишь в течение последнего десятилетия в качестве источников сигналов стали использоваться космические тела, самоизлучающие радиоволны.

Звуковые волны нашли использование в гидроакустических навигационных приборах.

Гравитационные явления, связанные с естественным полем тяготения Земли, давно использовались в навигации. Возможность искусственного генерирования гравитационных волн теоретически была предсказана А. Эйнштейном около полувека тому назад. В последние годы появились соответствующие разработки гравитационных генераторов и детекторов [35, 53]. Однако в настоящее время еще не ясны технические перспективы использования гравитационных волн в качестве искусственно создаваемых сигналов. Твердые тела, траектории и скорость движения которых заранее известны, при определенных условиях могут быть отнесены к категории навигационных сигналов. С этой точки зрения можно рассматривать роль корабля, перевозящего хронометр, который используется для определения долготы этого корабля. Имеются основания в некоторых случаях рассматривать сами орбитальные и космические объекты в качестве навигационных сигналов, применяемых для выработки информации о навигационных параметрах этих объектов.

Вполне возможно, что будут открыты и освоены некоторые новые физические явления, пригодные для использования их в роли навигационных сигналов.

Детерминированность траектории сигнала вытекает из общезначимого принципа наименьшего действия, в соответствии с которым движение материальных тел, а также распространение электромагнитных, гравитационных и других возмущений осуществляется по экстремальным траекториям.

Скорость сигналов в зависимости от их природы может быть равна скорости света и меньше скорости света.

Следует обратить внимание на отличие в трактовке свойств сигнала в навигации и в общей теории связи. При описании сигнала как переносчика информации подчеркивается, что для него суще-

ственным является не наличие энергии, а изменение ее поступления, и это справедливо. Однако к навигационному сигналу такая характеристика не вполне применима, поскольку модуляция сигнала в этом случае не является существенной особенностью, хотя и находит использование для фиксации начала отсчета. В самом деле, в ряде случаев в качестве навигационного сигнала используются практически монохроматические колебания. Известно также, что при отсутствии силовых полей тело с постоянным запасом энергии будет равномерно перемещаться, а оно может служить навигационным сигналом.

Заметим, что возможны такие технические системы, в которых сигнал подвергается энергетической обработке, в результате чего он не только исползуется для выработки навигационной информации, но и становится носителем смысловой информации.

§ 3.4. НАВИГАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Среда, где перемещается сигнал, оказывает влияние на процесс измерений и навигационных вычислений. Распределение в пространстве вещества определяет метрику пространства, а следовательно, и траекторию сигнала. Знание метрики придает, таким образом, навигационной информации количественную определенность [49].

Полезно ввести понятие *навигационного пространства* как пространства, в котором локализуется перемещающийся сигнал. Метрические свойства такого пространства будут зависеть от распределения и движения материальных тел и элементарных частиц.

При использовании современных навигационных средств в большинстве случаев эти пространства характеризуются евклидовой метрикой. Однако в ряде случаев их метрика отклоняется от евклидовой. Так, при использовании радионавигационных систем, работающих на длинных волнах, диффрагирующих около Земли, двумерное навигационное пространство будет иметь вид той или иной области геоида, а траекториями сигнала будут являться отрезки геодезических линий на поверхности геоида. В другом случае при использовании радионавигационных систем, работающих на коротких и ультракоротких волнах, претерпевающих рефракцию в атмосфере, траектории сигналов будут искривленными, искривленным будет и навигационное пространство. Траектории сигналов в космическом пространстве из-за влияния полей тяготения в ряде случаев также искривляются.

Необходимо отметить, однако, что в развитии навигации определились две тенденции, находящиеся в противоречии. С одной стороны, в результате увеличения дальности действия, высоты и скорости объектов навигации, а также в соответствии с увеличением разнообразия технических средств, траектории навигационных сиг-

налов стали уклоняться от прямолинейных, а число измерений навигационных пространств возросло. С другой стороны, имеет место естественное стремление возвратиться к пространству с наименьшим числом измерений, обладающему обычной метрикой.

Так, во времена, когда навигация ограничивалась малыми расстояниями, штурманов вполне удовлетворяло навигационное пространство в виде плоскости. С течением времени, с увеличением протяженности маршрутов стало очевидным, что такое пространство должно рассматриваться в виде шаровой поверхности. И тем не менее развитие навигационной картографии на протяжении ряда столетий было подчинено задаче создания плоской модели навигационного пространства. При этом преимущество отдавалось тем проекциям, которые линеаризуют это пространство и соответствующие линии положения как в малых, так и в больших областях (проекции Маркатора для локсодромий, полярные центральные проекции для ортодромий).

Воздушная навигация по существу своему должна быть трехмерной. Однако длительное время решаемая трехмерная задача сводилась к двумерной, а третья координата (в виде высоты) рассматривалась обособленно от двух поверхностных координат.

При аналитическом решении навигационных задач обычно стремятся проводить решения в неискривленном пространстве двух или трех измерений, а фактическое отклонение метрики от евклидовой учитывать путем внесения соответствующих поправок. Так, в случае приземной навигации линеаризация пространства сочеталась с вычислением специальных поправок на сферичность или сфероидичность Земли. При использовании радиоволн, испытывающих рефракцию в нижней атмосфере или в ионосфере, основные расчеты проводились для линеаризованного навигационного пространства и дополнялись соответствующими поправками на рефракцию и запаздывание сигнала. Подобное упрощение пространств с точки зрения практической навигации оказывалось вполне оправданным, пока простота, свойственная линеаризации, не вступила в противоречие с точностью и удобством применения поправок. В пространственных радионавигационных системах такой подход не представляется наилучшим, тем более, что с методологической точки зрения он не является адекватным решаемым задачам.

Полагается, что в общем случае навигационному пространству не следует обязательно приписывать евклидову метрику. Правильнее считать, что оно — риманово пространство соответствующего числа измерений и что поэтому отклонение его метрики от евклидовой представляется номинальным свойством. Методы решения навигационных задач должны зависеть от метрических свойств навигационного пространства. При этом алгоритмы для неевклидовых пространств должны представлять собой обобщение алгоритмов обычной евклидовой навигации.

Разработка навигационной методики должна основываться на анализе метрики данного пространства и свойств геодезических линий в нем. Так, например, точную методику решения навигационных задач на поверхности Земли следует строить на анализе геодезических линий на поверхности того геометрического тела, которому уподобляется геоид.

Метрические свойства пространств описываются фундаментальным метрическим тензором с компонентами g_{ik} . Содержание этого понятия было пояснено в § 2.2.

Различают ковариантные компоненты g_{ik} и контравариантные компоненты g^{ik} . И те и другие выражаются через частные производные от декартовых координат вмещающего евклидова пространства по криволинейным координатам. В элементарной теории тензоров показано [7], что эти компоненты могут вычисляться по формулам:

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x^k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.4.1)$$

где x^j — криволинейная координата *;

q_{α} — прямолинейная координата вмещающего пространства;

$$g^{ik} = \frac{1}{g} G_{hi}, \quad (3.4.2)$$

где g — фундаментальный определитель, представляющий собой определитель матрицы, составленной из элементов g_{ik} :

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad (3.4.3)$$

G_{hi} — адьюнкта элемента g_{hi} .

Применяются символы Кристоффеля первого рода $\Gamma_{k,ij}$ и второго рода Γ_{ij}^k . Эти символы выражаются через частные производные метрических компонент g_{ik} по координатам [13]:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad (3.4.4)$$

а также

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{t=1}^n g^{kt} \Gamma_{t,ij}. \quad (3.4.5)$$

Свойства геодезических линий некоторого пространства могут быть проанализированы в результате решения системы дифференциальных уравнений геодезических линий, принадлежащих дан-

* Здесь и далее применяемые при координатах и производных от них буквенные и цифровые верхние индексы не являются показателями степени.

ному пространству. Известно, что в общем виде эти уравнения имеют следующую запись [7]:

$$\frac{d^2 x^k}{dp^2} - \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} - \Phi(p) \frac{dx^k}{dp} = 0, \quad (3.4.6)$$

при этом p — некоторый параметр, а $\Phi(p)$ выражается через производные от лонгального параметра S (длины, отсчитываемой вдоль геодезической линии):

$$\Phi(p) = \frac{\dot{S}}{S}. \quad (3.4.7)$$

Отметим, что описание свойств геодезических линий с помощью тензорных величин имеет определенные преимущества. Из теории пространства, времени и тяготения [31] следует, что метрические свойства многообразия пространства — времени зависят от матрицы пространства — времени, вследствие чего производится отождествление характеристик гравитационного поля с метрическими характеристиками: гравитационных потенциалов с компонентами g_{ik} , а напряженностей гравитационного поля с символами $\Gamma_{k, ij}$. Такой подход открывает возможности по заданному распределению материальных тел находить траектории навигационных сигналов как экстремальные линии навигационного пространства.

§ 3.5. НАВИГАЦИОННО-ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ И НАВИГАЦИОННО-ВРЕМЕННЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В результате сопоставления событий в точках, связанных сигналом, устанавливается пространственно-временная связь этих точек. Аналитическим выражением ее является четырехмерный интервал s . Его дифференциал выражается через координаты x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) и метрические компоненты g_{ik} [31]:

$$ds^2 = \sum_{i, k=0}^3 g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^{k*}, \quad (3.5.1)$$

а конечная величина находится путем интегрирования по некоторому параметру p , функционально связанному с координатами:

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^k}{dp}} dp. \quad (3.5.2)$$

* Здесь и далее будем пользоваться принятым в теории пространства, времени и тяготения обозначением суммы без символа Σ , путем различной постановки дважды повторяющихся индексов: у g_{ik} — внизу, а у координат x^i , x^k или у дифференциалов dx^i , dx^k — вверху.

Формула (3.5.2) в конечном счете дает связь приращений пространственных координат с приращением времени, соответствующим прохождению сигнала между сопоставляемыми точками. Из этой зависимости вытекает возможность постановки двух вполне равноправных типов задач: нахождения пространственных координат по известным временным координатам и нахождения временных координат по известным пространственным координатам.

Представляется поэтому целесообразным обобщить понятие навигационного определения и включить в него наряду с навигационно-пространственным определением также и определение навигационно-временное [49].

Навигационно-пространственные определения — это традиционная задача навигации подвижных объектов (кораблей, самолетов, космических аппаратов и т. д.). Навигационно-временные определения — это сравнительно новая техническая задача. Она приобрела практическое значение лишь в связи с необходимостью синхронизации часов в удаленных точках, что важно для обеспечения работы системы единого времени.

Подчеркнем, что обе эти задачи — две стороны единого физического процесса, связанного с выработкой навигационной информации. Это определяет тесную связь техники практической навигации и техники единого времени.

В основе задач навигации подвижных объектов лежит определение пространственных координат. Поэтому навигационно-пространственные методы основываются на измерении временных координат (временных интервалов). Различные средства навигации отличаются друг от друга техническими способами измерения этих временных интервалов, а также приемами образования на основе этих измерений тех или иных производных величин.

В современных навигационных устройствах для измерения временных интервалов применяются либо часы (механические, электронные), либо процессы, параметры которых функционально связаны с течением времени. В последнем случае время моделируется в некотором масштабе.

Параметр такого процесса, допускающий его непосредственное измерение с помощью технических средств, обозначим через N . Тогда масштабный коэффициент моделирования времени k можно представить в виде производной от времени по измеряемому параметру:

$$k = \frac{dt}{dN}. \quad (3.5.3)$$

В целях постоянства k выбираются процессы, обеспечивающие линейную зависимость между t и N .

Так, при использовании в качестве навигационных сигналов радиоволн их фаза и частота оказываются функциями времени, вследствие чего эти параметры сигнала применяют для моделирования времени в соответствующем масштабе. В табл. 3.5.1 указаны некоторые значения масштабного коэффициента k для случаев использования временных (импульсных) радионавигационных измерений (когда $N = T$), фазовых измерений ($N = \psi$) и частотных измерений ($N = F$), причем рабочая частота обозначена через f , ее девиация — через Δf , частота модуляции — через F_m .

ТАБЛИЦА 3.5.1

Измеряемый параметр N	T	ψ	F
Масштабный коэффициент моделирования k	1	$\frac{1}{4\pi f}$	$\frac{1}{8\Delta f F_m}$

Отметим, что с принципиальных методических позиций и временная (импульсная), и фазовая, и частотная методики — равноправны. С этой точки зрения и временные, и фазовые, и частотные устройства относятся к единой категории технических средств, с помощью которых может измеряться физический параметр — время. Это, разумеется, несколько не уравнивает технические характеристики подобных устройств: для решения конкретных задач предпочтение может быть отдано какому-либо одному методу.

Наряду с абсолютными навигационными измерениями, которым соответствует формула (3.5.2), возможна реализация разностных измерений, дающих разность Δs четырехмерных интервалов на каких-либо двух трассах сигналов. Разность Δs аналитически представляется разностью двух интегралов, имеющих один общий предел:

$$\Delta s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\frac{dx_1^i}{g_{ik}} \frac{dx_1^k}{dp}} dp - \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\frac{dx_2^i}{g_{ik}} \frac{dx_2^k}{dp}} dp, \quad (3.5.4)$$

причем индексы 1 и 2 относятся к разным трассам.

При навигационно-пространственных определениях разностная методика основывается на измерении разности временных интервалов на двух трассах сигналов. Более общим случаем является измерение на пересекающихся трассах, частным — на близких параллельных трассах, в том числе на совпадающих. При этом особое место занимают измерения с приведением разности временных интервалов к нулю. Так измеряются разности расстояний и углы.

Важное место в современной навигации занимают оценки изменения разностей временных интервалов со временем, иначе — их

производные по времени. Кинематическими эквивалентами оценок по первым разностям будут скорости, по вторым разностям — ускорения и т. д. Так, последовательные во времени измерения первых и вторых разностей, выполняемые вдоль какой-либо трассы, дают значения радиальных скоростей и ускорений. Аналогичные измерения, проводимые на двух пересекающихся трассах, предоставляют данные о скорости и ускорении отклонения направления на точку пересечения трасс относительно линии, соединяющей их начала (базовой линии). В частном случае получаются данные об угловых скорости и ускорении этой точки относительно центра базы.

Исходя из этого, можно считать, что только расстояния, разности расстояний и их производные различных степеней являются первичными навигационными параметрами. Все прочие параметры, используемые в навигации, получаются из этих первичных путем соответствующих преобразований и в силу этого должны относиться к категории параметров вторичных.

При навигационно-пространственных определениях информация в ее первичном виде представляет собой сведения о геодезических дальностях, разностях дальностей (в том числе — об углах) и их производных различных степеней.

Непосредственному измерению с помощью технических средств, основанных на использовании различных принципов, поддаются первичные навигационные параметры.

Общность различных навигационных методов, используемых для измерения расстояний, а именно: радиотехнических (при фазовых, частотных, временных, корреляционных измерителях), акустических (с передачей начала отсчета радиосигналами), оптических (при использовании источников когерентного излучения) — состоит именно в том, что с помощью различных технических приемов измеряется одна и та же физическая величина — абсолютное значение временного интервала. Заметим, что если бы удалось генерировать, модулировать и селективно принимать гравитационные волны требуемой мощности, могли бы появиться гравитационные дальномеры, в которых с помощью гравитационных сигналов измерялись бы интервалы между временными координатами точек.

Аналогично этому сходство различных разностно-дальномерных методов, основанных на перечисленных выше физических принципах, состоит в фактическом измерении разности временных интервалов на пересекающихся трассах.

Общность различных методов, используемых для визирования направлений (и на этой основе — для измерения углов), таких, как радиотехнические методы (радиопеленгаторы, пеленговые радиомаяки, радиоастрономические секстанты и ориентаторы), оптические методы (секстанты, ориентаторы, вертикали), акустические методы (локаторы), магнитные методы (компасы), гравитационные

методы (отвесы) и другие, состоит в том, что в основе их использования лежит отыскание экстремального (нулевого) значения разности временных интервалов вдоль близких параллельных трасс.

Отметим, что инерциальные методы несколько обособлены от методов, основанных на использовании электромагнитного и гравитационного полей, и это затрудняет рассмотрение их с развиваемых общих позиций. Однако известно, что в теории тяготения [31] признается локальная эквивалентность полей ускорения и тяготения. Это дает основание для сведения в определенных условиях инерциальных сил к силам гравитационным, что позволяет динамические эффекты, связанные с ускорением, заменить эффектом действия гравитационного поля на покоящееся тело. При этих условиях появляется возможность считать инерциальные устройства подпадающими под категорию устройств, принцип действия которых основан на использовании свойств силового поля.

§ 3.6. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ НАВИГАЦИИ

Представляется возможным получить уравнение, описывающее принцип навигационных определений в наиболее общем виде. Такое уравнение должно основываться на вышеизложенных методологических соображениях и на аналитическом описании четырехмерного пространственно-временного интервала.

Это уравнение должно охватывать случаи абсолютных и разностных навигационных определений в пространствах с евклидовой и неевклидовой метрикой и различным числом измерений. Оно должно распространяться на случаи использования сигналов, имеющих различные скорости перемещения, и на случаи применения любых технических способов навигационных измерений. Весьма важно, чтобы это уравнение было инвариантно относительно координатных преобразований.

Исходным явится выражение для дифференциала четырехмерного интервала (3.5.1), в котором одна (временная) координата особо выделяется путем раздельной записи членов, содержащих dx^0 и $(dx^0)^2$:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (3.6.1)$$

В соответствии с выражением коэффициента моделирования времени (3.5.3) производится замена $dx^0 = k dN$ и в согласии с (3.5.2) величина интервала записывается в виде интеграла по некоторому параметру:

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \left[g_{00} k^2 \left(\frac{dN}{dp} \right)^2 + 2g_{0i} k \frac{dN}{dp} \frac{dx^i}{dp} + g_{ik} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^k}{dp} \right]^{1/2} dp. \quad (3.6.2)$$

Из теории относительности [31] известно далее, что в случае установления физической связи во времени каких-то двух событий, происшедших в двух пунктах в последовательные моменты времени, интервал τ собственного времени (т. е. отсчитываемого в системе сигнала) будет связан с интервалом s соотношением

$$s^2 - c^2 \tau^2 = 0. \quad (3.6.3)$$

По существу, запись (3.6.3) представляет собой выражение для инварианта преобразований Лоренца (см. § 2.3).

Имея в виду, что более общим является случай разностных измерений, сохраняя лишь действительные решения, можем обобщенное уравнение навигации записать в следующем виде:

$$\sum_{\mu=1}^2 (-1)^{\mu+1} \left\{ \int_{p_1}^{p_{\mu+1}} \left[g_{00} k^2 \left(\frac{dN}{dp} \right)^2 + 2g_{0i} k \left(\frac{dN}{dp} \right) \frac{dx^i}{dp} + \right. \right. \\ \left. \left. + g_{ih} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^h}{dp} \right]^{1/2} dp - c\tau_{\mu} \right\} = 0, \quad (3.6.4)$$

где x^i — пространственные координаты ($i, k = 1, 2, 3$); g_{ih} — компоненты фундаментального метрического тензора ($i, k = 0, 1, 2, 3$); p — параметр, через который выражаются x^i и g_{ih} ; k — масштабный коэффициент моделирования времени; N — навигационный параметр; c — скорость света; τ — интервал собственного времени.

Индексы $\mu = 1$ и $\mu = 2$ относятся к разным трассам сигналов.

Нетрудно видеть, что в случае абсолютных измерений в формуле (3.6.4) останутся только члены, относящиеся к какой-то одной трассе сигнала.

В целях иллюстрации приведем выражения для уравнения навигации при некоторых частных условиях.

Прежде всего обратимся к пространству с евклидовой метрикой. Известно [31], что для случая евклидового характера геометрии пространства — времени имеют место условия

$$g_{00} = c^2, \quad g_{0i} = 0 \quad \text{и} \quad g_{ih} = -\delta_{ih} \quad (3.6.5) \\ (i, k = 1, 2, 3),$$

где δ_{ih} — символ Кронекера.

Производя соответствующие подстановки в выражение (3.6.4), имеем:

$$\sum_{\mu=1}^2 (-1)^{\mu+1} \left[V \overline{c^2 k^2 (\Delta N)_{\mu}^2 - \delta_{ih} \Delta x_{\mu}^i \Delta x_{\mu}^h} - c\tau_{\mu} \right] = 0. \quad (3.6.6)$$

Если в качестве навигационного сигнала используются электромагнитные колебания, то собственное время $\tau = 0$, и тогда

$$ck(\Delta N_1 - \Delta N_2) = \sqrt{\delta_{ih} \Delta x_1^i \Delta x_1^k} - \sqrt{\delta_{ih} \Delta x_2^i \Delta x_2^k}. \quad (3.6.7)$$

Переноса далее начало отсчета координат в точку пересечения трасс сигналов, обозначая длины трасс через r_1 и r_2 , а также подставляя вместо k его значение в соответствии с выражением (3.5.3), получим соотношение, широко употребляемое в линейной навигации:

$$r_2 - r_1 = c(t_2 - t_1). \quad (3.6.8)$$

Если в выражении вида (3.6.6), взятом для абсолютных измерений, заменить время τ на время t , отсчитываемое в покоящейся системе, по известному релятивистскому соотношению

$$\tau = t \sqrt{1 - \left(\frac{v_c}{c}\right)^2},$$

где v_c — скорость сигнала, то получим

$$\delta_{ih} \Delta x^i \Delta x^k - v_c k \Delta N = 0. \quad (3.6.9)$$

Отсюда нетрудно получить выражение, относящееся к случаю использования электромагнитных волн ($v_c = c$):

$$r = ct. \quad (3.6.10)$$

Это соотношение также широко используется в обычной, линейной навигации.

Некоторые другие частные случаи уравнения (3.6.4) будут рассмотрены при дальнейшем изложении. Вытекающая из обобщенного уравнения формула навигации в двумерном искривленном пространстве, которому можно уподобить поверхность Земли, Луны или иной планеты, будет приведена в гл. 6. Основные навигационные формулы для одномерного пространства эллиптического типа и для двумерного пространства, образованного эффективными траекториями радиоволн в ионосфере, рассматриваются в гл. 9.

§ 3.7. ОБОБЩЕННЫЕ БЛОК-СХЕМЫ РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО И ВРЕМЕННОГО ТИПА

Блок-схема навигационной системы дает представление о функциональной связи элементов, принимающих участие в выработке навигационной информации.

Рассмотрим, исходя из развитых выше представлений, обобщенные блок-схемы некоторых радионавигационных систем.

В навигационной системе можно усмотреть наличие двух каналов: измерительного и калибровочного. Оба эти канала имеют принципиальное значение. По своей структуре они могут быть аналогичны и сохранять при этом функциональное различие. В канале измерений передается сигнал, с помощью которого измеряется навигационный параметр. По каналу калибровки проходит сигнал, используемый для согласования начал отсчета пространственных и временной координат.

Отметим, что измерения пространственных и временной координат производится в системах отсчета, преимущественный характер которых вытекает из самого содержания навигационных задач. Чаще всего это — инерциальные системы координат. Канал калибровки обеспечивает одинаковую фиксацию начала отсчета координат во всех звеньях навигационной системы.

Подлежат согласованию начала отсчета пространственных координат и начала отсчета временной координаты. Эти начала отсчета используются на разных этапах навигационной работы в соответствии с типом навигационной системы.

Процесс навигации подвижных объектов складывается из многих последовательно выполняемых операций, и лишь условно его можно разбить на несколько этапов. Представляется оправданным провести деление, исходя из следующих соображений.

Навигационная информация должна оформляться в той системе координат, в которой осуществляется вождение подвижного объекта. При двумерной навигации это — географическая или ортодромическая система, при трехмерной — геоцентрические, селеноцентрические, гелиоцентрические и другие системы. Между тем измерения в большинстве случаев выполняются в других, местных координатных системах, начало которых привязывается к точкам расположения аппаратуры. Для определения параметров, характеризующих положение и движение объекта в преимущественной системе координат, требуется привести к этой системе результаты измерений, полученные в местных системах, и далее решить навигационную задачу тем или иным методом. Измерения в местных системах и определение параметров выполняются с применением различных средств: в первом случае — измерительных, во втором — вычислительных. Различны они и по техническому содержанию.

Для управления объектом производится сопоставление фактических значений параметров движения с заданными, в результате чего формируются сигналы управления. Эта задача решается с помощью специфических программных, сравнивающих и решающих устройств.

Поэтому навигационную работу можно разбить на три этапа: измерений, определений и коррекции.

На этапе измерений находится навигационный параметр, поддающийся непосредственному измерению с помощью технических

средств. В зависимости от метода измерений, по существу, находится разность фаз, частот и т. п. Однако сам результат измерений выдается обычно или в виде какого-то условного отсчета (количество условных единиц, номер линии положения), или в виде первичного навигационного параметра (расстояние, радиальная скорость и т. п.). В последнем случае предполагается дополнительная операция пересчета с учетом скорости сигнала v_c и масштабного коэффициента k .

На этапе определений осуществляется координатный переход и в результате решения геометрической задачи определяется положение (в общем случае — движение) объекта. При этом учитываются метрические характеристики навигационного пространства g_{ik} . Для облегчения решения задачи иногда переходят ко вторичным навигационным параметрам.

На этапе коррекции с помощью программного устройства и сравнивающего устройства (компаратора) выявляются расхождения фактического и заданного состояний объекта, на основе чего формируются управляющие сигналы (действия).

Следует заметить, что в современных автоматизированных навигационных системах устройства измерения первичных параметров и определения параметров движения совмещаются.

В навигационных системах пространственного типа фиксация начала отсчета времени важна для этапа измерений, а фиксация начала отсчета пространственных координат — для этапа определений. В системах временного типа, наоборот, для этапа измерений требуется предварительная фиксация начала отсчета пространственных координат, тогда как для этапа определений требуется располагать данными о начале отсчета временной координаты.

В том случае, когда начальные значения пространственных и временной координат в избранных системах отсчета оказываются неизменными для всего периода применения навигационной системы, измерительный канал можно заранее откалибровать. Если же их значения будут нестабильными, то они должны фиксироваться перед каждым измерением с помощью канала калибровки. Естественно, что в целях упрощения технических средств навигации желательно располагать возможностью априорной калибровки.

Можно в связи с этим отметить, что в течение длительного времени при использовании радионавигационных систем требование априорной фиксации начала отсчета пространственных координат вполне удовлетворялось, так как положение радионавигационных точек было заранее определено. В то же время априорная фиксация начала отсчета временной координаты была недостижима из-за малой стабильности измерительных генераторов.

Успехи квантовой радиофизики изменили положение: высокая стабильность молекулярных и атомных генераторов представила возможность длительного хранения начала отсчета времени [74].

С другой стороны, переход от приземного характера навигации к внеземному и в особенности выявление возможностей применения орбитальных радионавигационных точек приводят к утрате информацией о начале отсчета пространственных координат ее априорного характера, что вызывает потребность в фиксации этого начала перед каждым навигационным измерением.

Блок-схемы навигационных систем, основанных на абсолютных измерениях, отличаются от блок-схем систем, где выполняются разностные измерения. Остановимся вначале на системах с абсолютными измерениями.

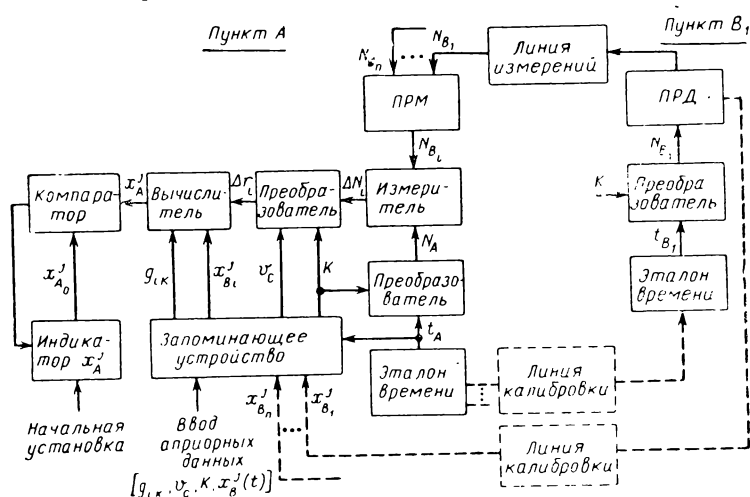


Рис. 3.7.1. Блок-схема навигационно-пространственной системы с абсолютными измерениями, используемой для определения положения объекта.

Практические задачи, решаемые с помощью навигационных систем, могут ставиться в следующем виде:

— определяется пространственное (или временное) положение объекта, временное (или пространственное) положение которого задано с помощью сигналов от навигационных точек с известным пространственно-временным положением;

— ведется управление по заданному закону пространственно-временным положением объекта с помощью сигналов от навигационных точек с известным пространственно-временным положением.

Этим задачам соответствуют следующие четыре блок-схемы радиотехнических систем.

На рис. 3.7.1 приведена схема навигационной радиотехнической системы с абсолютными измерениями, которая используется для определения пространственного положения объекта.

Имеются пункт A , пространственные координаты которого X_A^j определяются, и навигационные точки $B_1, \dots, B_n$ с известными координатами $x_{B_i}^j$. С помощью сигнала, передаваемого по линии измерений, сопоставляются события в точках A и B_i .

Координаты x_A^j и $x_{B_i}^j$ фиксируются в одной системе отсчета. В случае если точки B_i неподвижны в этой системе отсчета, то координаты $x_{B_i}^j$ в качестве априорных данных заранее вводятся в запоминающее устройство (ЗУ). Если же точки B_i подвижны (как, например, в системах с использованием ИСЗ), то в ЗУ вводятся зависимости $x_{B_i}^j(t)$. Может оказаться при этом, что на требуемый срок зависимость $x_{B_i}^j(t)$ не задана. Тогда возникает необходимость в коррекции. Для этого периодически по линиям калибровки, например из самих точек B_i , передаются опорные значения $x_{B_i}^j$ (или значения параметров, через которые $x_{B_i}^j$ могут задаваться, например, элементы орбитальных точек B_i).

Временные координаты t_A и t_{B_i} должны также задаваться в единой системе отсчета. Для этого в точках A и B_i могут применяться эталоны времени, синхронность и синфазность которых гарантирована в течение всего срока работы системы. Если нет гарантии синфазности или даже синхронности, то требуется коррекция с помощью сигнала, передаваемого по линиям калибровки периодически или даже перед каждым измерением.

Наиболее распространен способ коррекции, состоящий в формировании в пунктах B_i сигналов, передаваемых далее по линиям измерений, из калибрующих сигналов за счет их ретрансляции или простого отражения. В этом случае принудительно устанавливается синхронность при сдвиге по фазе, определяемом выражением

$$t_A - t_{B_i} = \frac{1}{v_c} r_{AB_i}.$$

Вообще же линии калибровки не всегда совпадают по положению с измерительными линиями.

В зависимости от принятого способа моделирования времени, с помощью преобразователей вырабатываются навигационные параметры N_A и N_{B_i} , в масштабе которых и выполняются измерения. Измеритель выдает разность $\Delta N_i = N_A - N_{B_i}$. Переход к первичному навигационно-пространственному параметру Δr_i осуществляется в преобразователе, куда из ЗУ вводятся значения v_c и масштабного коэффициента k .

Для вычисления x_A^j в соответствии с обобщенным уравнением навигации (3.6.4) из ЗУ в вычислитель поступают значения метрических компонент g_{ih} и координат $x_{B_i}^j$. В зависимости от мет-

рики навигационного пространства и принятого способа обработки навигационной информации выбирается соответствующее число точек $B_1, \dots, B_n$ и относящихся к ним координат $x_{B_i}^j$.

В том случае, когда рассчитанные значения x_A^j используются для коррекции априорных значений $x_{A_0}^j$, регистрируемых индикатором (доставляемых предварительными измерениями или уста-

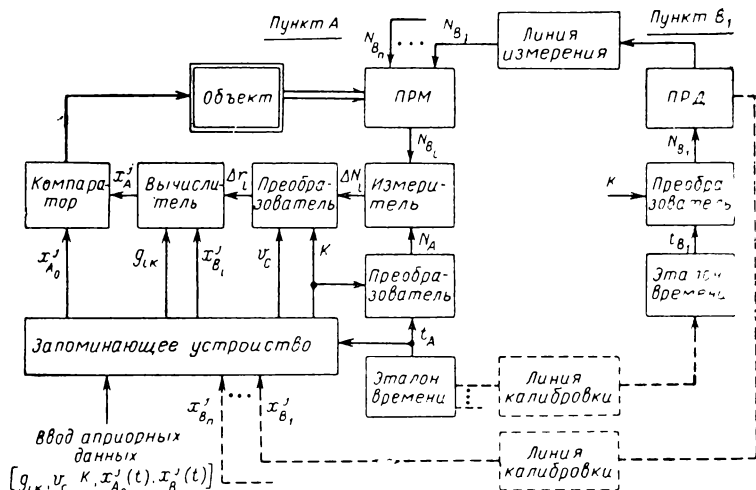


Рис. 3.7.2. Блок-схема навигационно-пространственной системы с абсолютными измерениями, используемой для управления объектом.

навливаемых по результатам работы других навигационных средств), значения x_A^j и $x_{A_0}^j$ сопоставляются в компараторе, где формируется сигнал, управляющий приводом перестройки индикатора.

Блок-схема навигационной системы, используемой для управления по заданному закону пространственно-временным положением объекта, приведена на рис. 3.7.2. Данная схема отличается от предыдущей тем, что в ее запоминающее устройство вводится требуемый закон $x_{A_0}^j(t)$ в соответствии с которым в компаратор выдаются требуемые значения $x_{A_0}^j$, соответствующие текущему времени. Сигнал управления, сформированный в соответствии с выходным напряжением компаратора, используется для управления режимом движения объекта. Система управления должна, очевидно, так изменять пространственное положение объекта, чтобы изменение значений N_{B_i} привело к совпадению x_A^j с $x_{A_0}^j$.

На рис. 3.7.3 и 3.7.4 показаны блок-схемы навигационных систем временного типа с абсолютными измерениями, используемых соот-

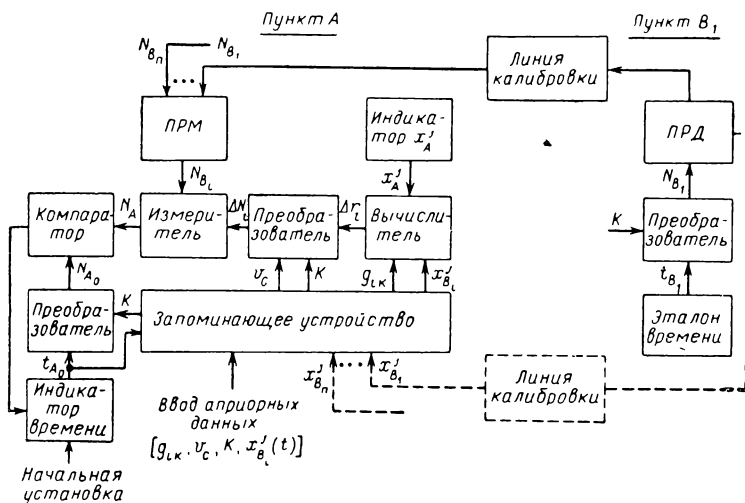


Рис. 3.7.3. Блок-схема навигационно-временной системы с абсолютными измерениями, используемой для определения положения объекта.

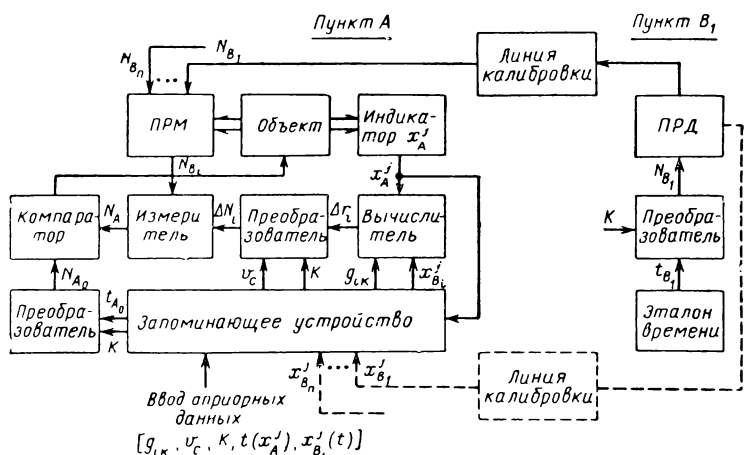


Рис. 3.7.4. Блок-схема навигационно-временной системы с абсолютными измерениями, используемой для управления объектом.

ветственно для определения временного положения объекта и для управления его пространственно-временным положением.

В данных вариантах координаты точек B_i фиксируются так же, как в рассмотренных выше случаях. Координаты пункта A полагаются известными и регистрируемыми индикатором x_A^j . В запоминающее устройство также вводятся значения g_{ih} , v_c , k и $x_{B_i}^j(t)$.

На схеме рис. 3.7.3 показано, что в вычислителе по данным x_A^j , $x_{B_i}^j$ и g_{ih} в соответствии с метрикой навигационного пространства и избранным методом обработки навигационной информации рассчитываются значения Δt_i . Из них при использовании значений v_c и k получаются ΔN_i . Для формирования же информации о временной координате t_A (в масштабе N_A) необходимо передать начала отсчета t_{B_i} от соответствующих эталонов времени. Для этого из B_i в A по линиям калибровки передаются сигналы, что позволяет в измерителе путем сложения N_{B_i} с ΔN_i получить значение N_A .

Если N_A используется для коррекции априорных значений t_{A_0} , регистрируемых индикатором времени (им может быть местный эталон времени), то значение N_A сопоставляют в компараторе со значением N_{A_0} , полученным из t_{A_0} преобразованием с учетом величины k . Формируемый в компараторе сигнал используется для управления приводом подстройки индикатора времени.

Задача определения временного положения объекта, реализуемая с помощью рассматриваемой схемы, по существу, является задачей синхронизации часов в удаленных пунктах, пространственные координаты которых известны заранее. Такая задача решается службой единого времени.

Блок-схема следующей системы, применяемой для управления по заданному закону пространственно-временным положением объекта, изображена на рис. 3.7.4.

От предыдущей схемы ее отличает то, что в ЗУ закладывается заданный закон $t(x_A^j)$, в соответствии с которым для текущих значений x_A^j в компаратор выдаются требуемые величины N_{A_0} , получаемые из t_{A_0} линейным преобразованием.

Сигнал с выхода компаратора используется для управления пространственным положением объекта. Система управления должна так изменять его положение, чтобы изменение значений N_{B_i} и x_A^j привело к совпадению N_{A_0} с N_A .

Следует обратить внимание на то, что система временного типа для определения координаты t_A (см. схему рис. 3.7.3) может являться составной частью системы пространственного типа для определения координат x_A^j (см. схему рис. 3.7.1), где она будет решать задачу согласования начал отсчета времени в конечных точках измерительной линии. И, наоборот, пространственная система может как составная часть входить во временную систему, где она будет использоваться для нахождения координат x_A^j .

В рассмотренных выше схемах все этапы навигационной работы выполняются в том пункте (в пункте A), пространственные или временные координаты которого либо определяются, либо контролируются. Такой режим работы уместно назвать *самоопределением**.

Противоположностью этому режиму является режим *иноопределения*, когда в результате навигационной работы определяется или контролируется положение объекта, находящегося на удалении от измерителей навигационных параметров. В этом случае с помощью сигналов, распространяющихся по измерительным линиям $A_i - B$, в пунктах A_i проводятся соответствующие измерения, результаты которых совместно обрабатываются. Вычисления дают координаты x_B^j или t_B , тогда как величины x_{Ai}^j и t_{Ai} определяют начала отсчетов.

Если навигационная работа ведется в интересах объекта B , то для передачи полученной информации требуется соответствующая линия связи, и в режиме управления пространственно-временным положением объекта — линия телеуправления.

На принципе абсолютных измерений могут основываться дальномерные системы: радиодальномерные (с фазовыми, частотными, временными измерениями), оптикодальномерные и другие, а также системы синхронизации пунктов сети единого времени.

Что касается систем с разностными измерениями, то в вариантах пространственного типа фактически измеряется разность временных интервалов, соответствующих распространению сигналов по двум различным пересекающимся трассам. В вариантах временного типа фактически измеряется разность отрезков геодезических линий, соответствующих распространению сигналов по таким трассам. Чтобы отличать эти разности от разностей, относящихся к абсолютным измерениям по одиночным трассам, будем обозначать их соответственно через $\Delta(\delta t)$ и $\Delta(\delta r)$. Тогда можно сказать, что в первом варианте систем по измеренной $\Delta(\delta t)$ можно определить соответствующую ей $\Delta(\delta r)$, а затем, располагая необходимым количеством $\Delta(\delta r)$, вычислить требуемые навигационные параметры. В варианте втором измерение $\Delta(\delta r)$ позволяет определять $\Delta(\delta t)$ и затем решать соответствующие навигационно-временные задачи.

Отметим, что временная система с разностными измерениями может применяться для контроля за синхронизмом временных эталонов в пунктах, куда затруднен непосредственный доступ (автоматические станции, ИСЗ и т. п.) с помощью вынесенного комплекта аппаратуры, не имеющего точной привязки к единому времени.

* Подробнее об этом см. § 7.1.

НАВИГАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

§ 4.1. НАВИГАЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ, ПРОСТРАНСТВА ПОЛОЖЕНИЯ И НАВИГАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Решение навигационных задач основывается, по существу, на определении точки пространства некоторой мерности: метрического евклидова или искривленного пространства (при определении положения объекта), шестимерного фазового пространства (при вычислении параметров движения КА), четырехмерного пространства событий (в случае нахождения пространственно-временного положения объекта при весьма высоких скоростях относительного движения).

Если число измерений n не менее мерности m пространства, то решение может дать искомую точку. Группа измерений при $n < m$ доставляет информацию лишь о каких-то подпространствах вероятного расположения искомой точки. В частности, одно измерение позволяет выделить из m -мерного пространства совокупность точек, образующих подпространство $(m - 1)$ -го измерения.

С помощью технических средств измеряются физические величины различной размерности. Им сопоставляются определенные геометрические величины: r , $\dot{r}$, Δr , (Δr) , θ , $\dot{\theta}$ и т. д. Любая из этих величин определяет совокупность возможных положений объекта в рассматриваемом мерном пространстве. Таким образом, она выступает в качестве параметра, характеризующего данную совокупность.

Величину, соответствующую навигационному измерению и определяющую совокупность возможных положений объекта в некотором мерном пространстве, будем называть *навигационным параметром*. Символом R_i будем обозначать навигационный параметр, относящийся к i -му измерению.

Навигационные параметры, непосредственно полученные из результатов измерений (при учете коэффициента моделирования k и скорости сигнала v_c), можно отнести к группе *первичных* параметров. Группу *вторичных* параметров составят те, которые получены из первичных путем выполнения над ними тех или иных математических операций. Переход ко вторичным параметрам оказы-

вается иногда целесообразным по соображениям повышения эффективности обработки измерительной информации.

При отсутствии априорной информации до навигационных измерений можно считать, что объект навигации с равной вероятностью находится в любой точке m -мерного пространства. Задание какого-либо навигационного параметра позволяет локализовать этот объект в пределах подпространства $(m - 1)$ -го измерения. Совокупность точек мерного подпространства, соответствующих некоторому значению навигационного параметра, будем называть *пространством положения*.

Для трехмерного евклидова пространства ($m = 3$) возможна наглядно-геометрическая интерпретация. Нетрудно представить, что в этом случае пространство положения будет двумерным, вследствие чего оно может называться *поверхностью положения*. Для случая, когда $m = 2$, оно превращается в одномерное, именуемое *линией положения*.

Информация о первичных параметрах вырабатывается в виде, характерном для примененного метода навигационных измерений. Так, при использовании радиотехнических сигналов измеряемые параметры могут иметь различную размерность: фазы Ψ (безразмерная величина — радиан, цикл, градус), частоты F (сек^{-1}), времени T (сек), амплитуды A (v , v/m и др.). Размерность первичных параметров: L , LT^{-1} , LT^{-2} и т. д. Размерность же вторичных параметров соответствует некоторой степени от метрической длины: L^n , где $0 \leq n \leq p$, а p — порядок полинома, описывающего пространство положения.

Размерность навигационных параметров, используемых для задания поверхности положения p -го порядка, может лежать в пределах от 0 до p . Это значит, что для задания поверхности положения второго порядка ($p = 2$; сфера, эллипс, гиперболоид и др.) могут использоваться навигационные параметры с размерностью L^0 , L^1 и L^2 .

Разумеется, число членов полинома, описывающего поверхность некоторого порядка, может быть различным в зависимости от выбора начала отсчета и ориентировки координатных осей, а также в зависимости от принятого способа задания поверхности. Целесообразно стремиться к такой форме задания, которая является компромиссом между удобством получения навигационных параметров и экономичностью записи соответствующих алгоритмов.

Введем понятие навигационной функции. Отметим, что решения навигационных задач основываются на использовании функциональной связи между параметрами R_i и искомыми координатами q_j точек m -мерного пространства. Поэтому функцию, выражающую навигационный параметр через координаты точек m -мерного пространства, будем называть *навигационной функцией*. В общем случае эта функция выражает связь между измеренным параметром R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и параметрами движения q_j ($j = 1, 3, \dots, 6$).

Ее конкретный вид определяется: а) характером измеряемого навигационного параметра; б) избранной системой параметров q_j (геоцентрические координаты и их производные: $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; кеплеровы элементы: $i, \Omega, \omega, a, e, \tau_0$; сферические координаты и их производные: $\varphi, \lambda, \rho, \dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \dot{\rho}$ и т. п.); в) закономерностями движения летательного аппарата; г) избранной системой параметров Q_j , описывающих движение РНТ.

Общим обозначением навигационной функции является выражение $R_i(q_1, \dots, q_6, Q_1, \dots, Q_6; t_i)$.

В случае евклидова пространства с $m = 3$ и решения задачи местоопределения объекта по РНТ с известными и не изменяющимися координатами навигационная функция будет выражать параметр R_i через координаты x, y, z объекта. В этом случае применимо обозначение $R_i[x(t), y(t), z(t)]$.

§ 4.2. ОСНОВНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ

Поверхности положения как геометрические образы (для случая $m = 3$) являются удобным аппаратом для изучения свойств рабочей области навигационной системы и выявления ее точностных характеристик. Наряду с этим поверхности положения и линии положения позволяют связать навигационные параметры с тем инструментом, который дает наглядное представление о положении объекта навигации (карта, модель околоземного пространства и т. п.).

Рассмотрим некоторые характерные поверхности положения, соответствующие таким навигационным параметрам, как дальность, разность дальностей, сумма дальностей, радиальная скорость и угловые величины.

4.2.1. ДАЛЬНОСТЬ r

Дальности r как первичному параметру соответствует поверхность положения в виде сферы как геометрического места точек, равноудаленных от данной точки. При построении такой поверхности положения центр сферы совмещается с точкой, от которой измерялось расстояние (навигационная точка, объект навигации). Относительно навигационной точки можно построить семейство поверхностей положения, соответствующих различным возможным расстояниям до объекта. Для дальномерного метода измерений семейство поверхностей положения будет, очевидно, иметь вид совокупности концентрических сфер различного радиуса.

На рис. 4.2.1 показано, как с помощью трех поверхностей положения можно определить местоположение объекта (МО) по двум навигационным ИСЗ. Пусть с некоторого объекта навигации (само-

лета, корабля) измерены два расстояния r_1 и r_2 до двух ИСЗ, используемых в качестве навигационных точек, или до двух последовательных положений одного ИСЗ. Данным отсчетам соответствуют две сферические поверхности положения $r_1 = \text{const}$ и $r_2 = \text{const}$, пересечение которых дает окружность. Знание геоцентрической дальности до объекта (высоты его) позволяет фиксировать третью поверхность положения $H = \text{const}$. Пересечение ее с полученной ранее окружностью дает две точки MO_1 и MO_2 , в одной из которых рас-

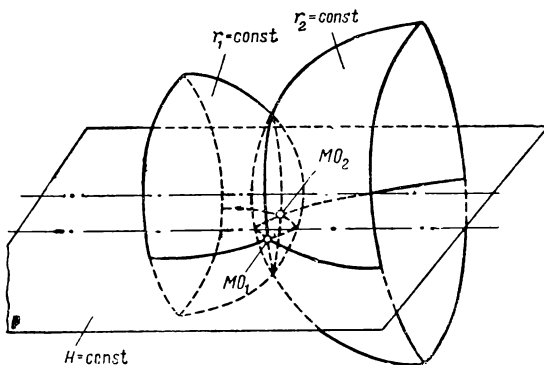


Рис. 4.2.1. Поверхности положения при измерениях дальности.

положен объект. Ввиду значительного разноса этих точек выбор нужной из них производится по предварительной, менее точной навигационной информации или с привлечением дополнительных измерений.

4.2.2. РАЗНОСТЬ ДАЛЬНОСТЕЙ Δr

Геометрическим местом точек, разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек постоянны, будет двухполостный гиперболоид вращения. Поэтому поверхность положения, соответствующая разностно-дальномерному измерению Δr , имеет вид двухполостного гиперболоида, в фокусах которого помещены навигационные точки. Семейство поверхностей положения в этом случае будет иметь вид совокупности конфокальных гиперболоидов вращения.

Геометрические основы определения местоположения объекта с помощью гиперболоидных поверхностей положения иллюстрируются рис. 4.2.2. Здесь показано, как в результате измерения двух разностей расстояний (Δr_1) и (Δr_2) до двух навигационных ИСЗ

(или до соответствующих точек, в которые последовательно перемещается один ИСЗ) можно получить две поверхности положения $(\Delta r_1) = \text{const}$ и $(\Delta r_2) = \text{const}$. Знание геоцентрической высоты дает

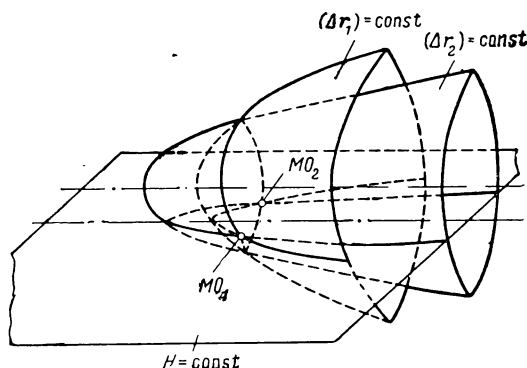


Рис. 4.2.2. Поверхности положения при измерениях разности дальностей.

поверхность $H = \text{const}$. Пересечение этих трех поверхностей фиксирует точки MO_1 и MO_2 , нужная из которых выбирается так же, как и в предшествующем случае.

4.2.3. СУММА ДАЛЬНОСТЕЙ Σr

Геометрическим местом точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек постоянна, является эллипсоид вращения. Поэтому поверхность положения, соответствующая суммарно-дальномерному отсчету Σr , будет иметь вид эллипсоида вращения, в фокусах которого расположены навигационные точки. Совокупность конфокальных эллипсоидов образует семейство поверхностей положения.

В простейшем случае сумму дальностей можно образовать путем комбинирования двух дальномерных отсчетов, выполненных одновременно и независимо относительно двух навигационных точек. Однако существуют условия, при которых отсчет Σr получается непосредственно в результате одиночного измерения. Это имеет место в случае измерения дальности из навигационной точки, перемещающейся со скоростью, соизмеримой со скоростью распространения навигационного сигнала.

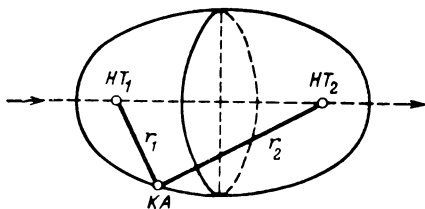


Рис. 4.2.3. Поверхности положения при измерениях суммы дальностей.

Скорость распространения звуковых сигналов, имеющая в воздушной среде величину $v_c = 0,3 \text{ км/сек}$ и в морской воде $v_c = 1,5 \text{ км/сек}$, оказывается соизмеримой со скоростями подвижных навигационных точек. Поэтому возможны ситуации, когда за время перемещения звукового сигнала от навигационной точки до объекта и обратно их относительное положение изменится. Тогда отсчету Σr будет соответствовать поверхность положения в виде эллипсоида вращения, как это показано на рис. 4.2.3. При использовании же радиосигналов такие условия могут наступить только при весьма высоких скоростях навигационных точек.

4.2.4. РАДИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ $\dot{r}$

Поверхности положения, соответствующие скоростным измерениям, естественно фиксировать в таком метрическом пространстве, в котором интервал между двумя точками имеет размерность скорости (пространство скоростей). В этом пространстве радиально-скоростная поверхность положения будет подобна сферической поверхности пространства E_3 . Однако для совместного использования различных измерений целесообразно скоростные поверхности положения привести к пространству E_3 .

Радиальная составляющая скорости некоторого движущегося объекта (например, ИСЗ) относительно какой-то точки, полагаемой неподвижной, пропорциональна косинусу угла, составленного вектором скорости объекта $\bar{v}$ с направлением от объекта в точку наблюдения:

$$\dot{r} = v \cos \alpha. \quad (4.2.1)$$

Размерность навигационного параметра $\dot{r}$ не соответствует метрике пространства E_3 . Поэтому навигационный параметр $\dot{r}$ следует привести либо к размерности длины, либо к относительной угловой мере. Удобно выражать его в безразмерном виде, в долях модуля относительной скорости $\rho = \dot{r}/v$. Тогда величина ρ представит собой косинус угла между вектором $\bar{v}$ и направлениями, на которых радиальная скорость оказывается равной именно значению $\dot{r}$.

Для построения поверхности положения как геометрического образа, соответствующего постоянной радиальной скорости, требуется задать опорное направление. Таким направлением может быть вектор скорости $\bar{v}$.

Поверхности положения, удовлетворяющие условию

$$\rho_i = \cos \alpha_i = \text{const}, \quad (4.2.2)$$

представляют собой конусы, описанные относительно вектора $\bar{v}$, с раствором угла, равным $2 \arccos (\dot{r}/v)$ (рис. 4.2.4). Параметр α изменяется в пределах от 0 до 2π , причем при предельных его значениях

поверхности положения вырождаются в лучи, совпадающие с вектором $\pm \vec{v}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ поверхность положения вырождается в плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{v}$.

Одним из видов навигационных измерений является способ фиксации момента, когда доплеровская частота $F_d = 0$. Таким радионавигационным измерениям соответствуют значение навигационного параметра $\alpha = 90^\circ$ и поверхность положения в виде плоскости, перпендикулярной к траектории РНТ.

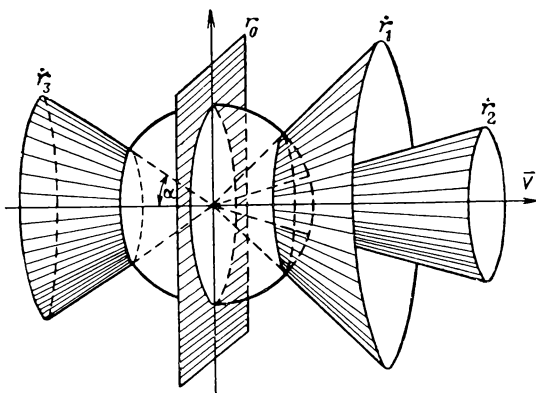


Рис. 4.2.4. Поверхности положения при измерениях радиальной скорости.

Использование измерений текущего значения доплеровской частоты F_d и поверхностей положения в виде конусов предполагает знание годографа скорости РНТ, что в принципе не должно вызывать затруднений.

4.2.5. ПЕЛЕНГ Θ

Пространственное визирование позволяет обозначить луч, соединяющий НТ и определяющийся объект. Процессу пространственного пеленгования отвечает множество поверхностей, с которыми можно совместить луч визирования. Разумеется, поверхностями положения в этом случае могут быть только те из них, которые имеют линейные образующие. Это линейчатые поверхности: плоскость, конус (первого или второго рода), цилиндр (простой, эллиптический, гиперболический, параболы первого и второго рода), гиперболоид однополостный, параболоид гиперболический.

Рассмотрим некоторые из этих поверхностей — плоскость и конус.

Если в точке измерений Об воспроизводится преимущественная система координат, то может быть выделено несколько плоскостей, положение которых удобно задавать относительно координатных осей. Эти плоскости получаются, если через радиолуч Об — НТ провести перпендикулярные плоскости соответственно к координатным плоскостям XOY , YOZ и ZOX . Положение каждой из них можно задать двугранным углом, отсчитываемым от положительного направления второй координаты, обозначающей плоскость начала отсчета, против часовой стрелки. Для плоскости Z

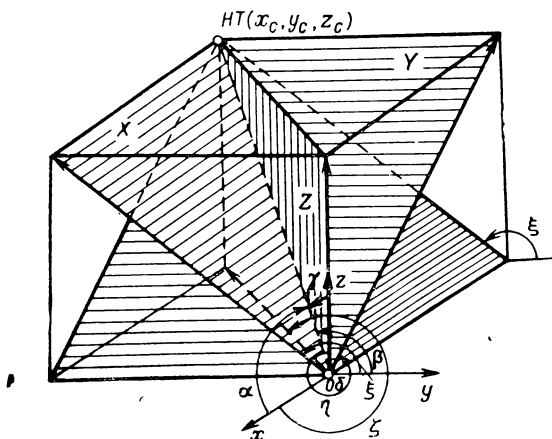


Рис. 4.2.5. Плоскостные поверхности положения, фиксирующие линию визирования.

(рис. 4.2.5) этот угол отсчитывается в координатной плоскости XOY , от оси X против часовой стрелки (угол ζ), для плоскости X он отсчитывается от оси Y в плоскости YOZ (угол ξ), и, наконец, для плоскости Y — от оси Z в плоскости ZOX (угол η). Любая пара указанных углов (т. е. любая пара соответствующих плоскостей) задает в совокупности положение радиолуча Об — НТ. Для задания линии радиовизирования с помощью углов ξ , η и ζ должна воспроизводиться полностью преимущественная система отсчета (через какие-либо две оси). И при этом все пары углов будут равноценны. Уравнения плоскостей находятся так.

Каждая из плоскостей X , Y , и Z , как проходящая через НТ с координатами x_c , y_c и z_c , будет определяться соответственно углами ξ , η и ζ .

Использував значения координат x_c , y_c и z_c , а также углов ξ , η и ζ для исчисления отрезков, отсекаемых каждой из плоскостей

на координатных осях, можно получить аналитические выражения для этих плоскостей:

$$\frac{y}{y_c - z_c \operatorname{ctg} \xi} + \frac{z}{z_c - y_c \operatorname{tg} \xi} = 1, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{x}{x_c - z_c \operatorname{tg} \eta} + \frac{z}{z_c - x_c \operatorname{ctg} \eta} = 1, \quad (4.2.4)$$

$$\frac{x}{x_c - y_c \operatorname{ctg} \xi} + \frac{y}{y_c - x_c \operatorname{tg} \xi} = 1. \quad (4.2.5)$$

Линию визирования можно задавать конусами, для которых эта линия является образующей. Возможны разные способы задания конических поверхностей положения.

Линию Об — НТ удобно задавать направляющими углами α , β и γ , заключенными между этой линией и координатными осями X , Y и Z (рис. 4.2.5). Вместо углов возможно употреблять значения их косинусов ($\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$), что удобно для нахождения через эти направляющие косинусы соответствующих слагающих координат по осям. Из направляющих углов только два являются независимыми, а третий определяется через них.

Каждому значению направляющего угла отвечает коническая поверхность, описанная вокруг оси, от которой этот угол отсчитан, раствором, зависящим от величины угла. Конические поверхности можно образовывать с вершиной в точке Об. Однако более простое решение связано с построением поверхностей положения относительно НТ, поскольку заранее известно положение именно НТ. Такой перенос вершины приведет к изменению величин направляющих углов до значений, дополняющих их до 2π , а новые конусы окажутся соприкасающимися с конусами, построенными при точке Об, по образующей Об — НТ.

Любые две конические поверхности зададут линию визирования. Каждая пара в этом смысле равноценна. Однако в ряде случаев может оказаться удобным измерять определенные направляющие углы. Так, если одна из плоскостей имитирует плоскость горизонта, то более удобными оказываются технические способы измерения направляющих косинусов относительно горизонтальных координатных осей или угла возвышения относительно горизонта.

На рис. 4.2.6 показано, как будет выглядеть поверхность положения при измерении угла места (угловой высоты) ИСЗ из некоторой наземной точки T в случае, когда сам ИСЗ используется в качестве навигационной точки (НИСЗ), по которой ведется местоопределение призмемных объектов. Для данного случая семейство поверхностей положения представится совокупностью конусов с вершинами в точке НИСЗ и различными растворами.

В качестве примера семейства линий положения рассмотрим совокупность линий равных радиальных скоростей, которую можно

построить на модели земной поверхности (карте) для случая навигации по ИСЗ с использованием радиально-скоростных измерений (рис. 4.2.7). Такое семейство получится как результат пересечения в некоторый момент времени совокупности поверхностей положения, изображенной на рис. 4.2.4, с земной поверхностью. Каждая линия положения представляет собой гиперболу (искаженную за счет условности картографической проекции), соответствующую определенному значению $\cos \alpha$. Видно, что линия положения, перпендикулярная к проекции траектории объекта, вырождается в прямую и относится к значению $\cos \alpha = 0$.

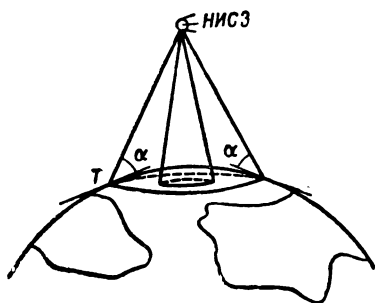


Рис. 4.2.6. Поверхности положения при измерениях угла высоты.

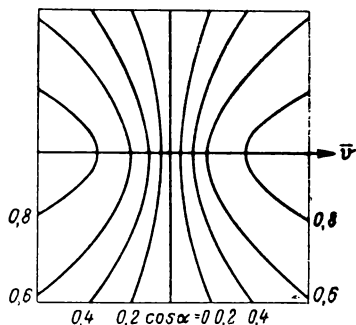


Рис. 4.2.7. Сеть линий положения при измерениях радиальной скорости.

Линии положения, соответствующие угломерным измерениям (рис. 4.2.6), представляют собой малые круги на земной сфере.

Вторичным навигационным параметрам отвечают свои поверхности или линии положения.

§ 4.3. СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТЫ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ТОЧКАМ

Рассмотрим закономерности изменения дальности и радиальной скорости в пространственных навигационных системах.

Зависимость расстояния от времени $r(t)$ определяется законом движения объекта и навигационных точек и может быть рассчитана, если эти законы известны. В тех случаях, когда движущимися являются орбитальные объекты, зависимость $r(t)$ может определяться заранее, причем r будет выражаться как функция элементов орбиты подвижной точки и координат точки неподвижной.

Один из распространенных случаев относится к ситуации, когда навигационной точкой является искусственный спутник планеты, а объект навигации (наблюдатель) расположен на ее поверхности

Не утрачивая общности, можно обратиться к условиям приземной навигации по ИСЗ. При этом удобно в качестве преимущественной системы отсчета принять геоцентрическую систему координат.

Изменение во времени расстояния между ИСЗ и наземным наблюдателем зависит от элементов орбиты ИСЗ и от положения наблюдателя относительно орбиты. Найдем аналитические выражения для $r(t)$ и $\dot{r}(t)$.

Пусть орбита задана ее элементами $i, \Omega, \omega, \alpha, e, \tau_0$, а положение наблюдателя определяется его координатами φ, λ . Для некоторого

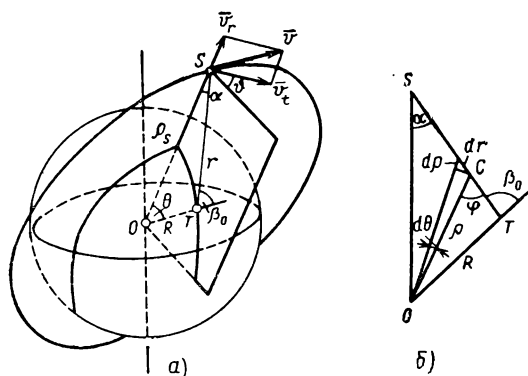


Рис. 4.3.1. К выводу зависимости $r(t)$:
а — взаимное положение ИСЗ и наблюдателя; б — к дифференциальным соотношениям.

момента времени t взаимное положение спутника и наблюдателя показано на рис. 4.3.1, а. Расстояние $r(t)$, а также углы $\beta_0(t)$ и $\Theta(t)$ зависят от времени, как от параметра.

Элемент наклонной дальности dr (рис. 4.3.1, б), удаленный от центра O на расстояние ρ , связан с дифференциалом $d\rho$ и углом φ соотношением

$$dr = \sec \varphi d\rho. \quad (4.3.1)$$

Из треугольников OST следует:

$$\sec \varphi = [1 - q^2(\rho, t)]^{-1/2}. \quad (4.3.2)$$

Здесь

$$q(\rho, t) = \frac{R}{\rho(t)} \sin \beta_0(t), \quad (4.3.3)$$

причем для $\rho = \rho_s$, что имеет место при $\varphi = \alpha$,

$$q_s(t) = R\rho_s^{-1}(t) \sin \beta_0(t) = \sin \alpha. \quad (4.3.4)$$

Учитывая выражения (4.3.1) и (4.3.2), имеем:

$$r(t) = \int_R^{\rho_s(t)} [1 - q^2(\rho, t)]^{-1/2} d\rho. \quad (4.3.5)$$

Рассматривая интеграл (4.3.5) как зависящий от параметра t , дифференцируем обе части равенства по этому параметру, что дает

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) = R \sin \beta_0(t) \int_R^{\rho_s(t)} \frac{R \cos \beta_0(t)}{\rho^2 [1 - q^2(\rho, t)]^{3/2}} \dot{\beta}_0(t) d\rho + \\ + \frac{\dot{\rho}_s(t)}{[1 - q_s^2(t)]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Интеграл в (4.3.6) можно выразить через кинематические параметры. Для этого получим выражение для центрального угла $\Theta(t)$. Дифференциал $d\Theta$, как это видно из чертежа (рис. 4.3.1, б), можно записать:

$$d\Theta = \frac{1}{\rho} \operatorname{tg} \varphi d\rho. \quad (4.3.7)$$

Принимая во внимание выражение (4.3.2), получим:

$$\Theta(t) = \int_R^{\rho_s(t)} \frac{1}{\rho} q(\rho, t) [1 - q^2(\rho, t)]^{-1/2} d\rho. \quad (4.3.8)$$

Дифференцируя интеграл (4.3.8) по t как по параметру, получим:

$$\int_R^{\rho_s(t)} \frac{R \cos \beta_0(t) \dot{\beta}_0(t)}{\rho^2 [1 - q^2(\rho, t)]^{3/2}} d\rho = \dot{\Theta}(t) - \frac{q_s(t) \dot{\rho}_s(t)}{\rho_s(t) [1 - q_s^2(t)]^{1/2}}. \quad (4.3.9)$$

Подставим последнее выражение в (4.3.6). Тогда после некоторых преобразований можно найти выражение для $\dot{r}(t)$:

$$\dot{r}(t) = R \dot{\Theta}(t) \sin \beta_0(t) + \dot{\rho}_s(t) [1 - q_s^2(t)]^{1/2}. \quad (4.3.10)$$

Очевидно, выражения для $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ сохраняют навигационный смысл лишь в тех случаях, пока имеет место прямая видимость между объектами.

Выясним кинематический смысл выражения (4.3.10). Для этого обозначим через $\gamma(t)$ угол между вектором $\vec{v}$ скорости ИСЗ и его радиус-вектором $\vec{\rho}_s$, а также введем угол $\vartheta(t)$ — двугранный угол между плоскостью орбиты и вертикальной плоскостью, проходя-

шей через точки O , S и T . Тангенциальную и радиальную составляющие вектора $\bar{v}$ обозначим соответственно v_t и v_r . Тогда имеют место соотношения

$$\dot{\Theta}(t) \rho_s(t) = v_t(t) \cos \vartheta(t) = v(t) \sin \gamma(t) \cos \vartheta(t) \quad (4.3.11)$$

и

$$\dot{\rho}_s(t) = v_r(t) = v(t) \cos \gamma(t). \quad (4.3.12)$$

Замечаем далее, что в силу (4.3.4) возможна замена:

$$\left[1 - q_s^2(t)\right]^{1/2} = \cos \alpha(t) \quad (4.3.13)$$

и

$$\rho_s(t) R^{-1} \sin \alpha(t) = \sin \beta_0(t). \quad (4.3.14)$$

Производя соответствующие подстановки в (4.3.10), получаем:

$$\dot{r}(t) = v_t(t) \cos \vartheta(t) \sin \alpha(t) + v_r(t) \cos \alpha(t). \quad (4.3.15)$$

Из соотношения (4.3.15) нетрудно видеть, что первое слагаемое является проекцией на направление «ИСЗ — наблюдатель» тангенциальной составляющей скорости ИСЗ, а второе слагаемое — проекцией на это направление радиальной составляющей его скорости.

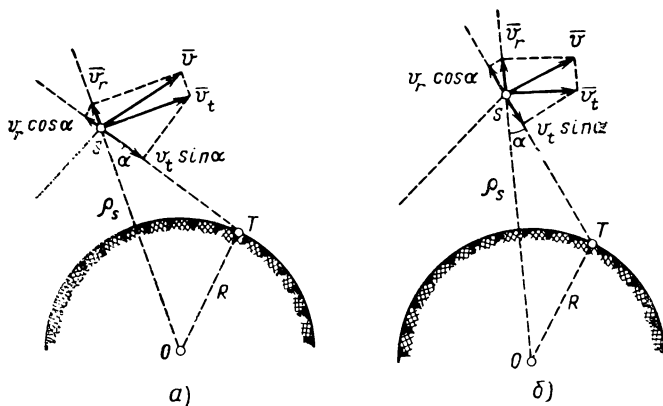


Рис. 4.3.2. Соотношение компонент скорости:
 α — до траверза ($v_t \sin \alpha > v_r \cos \alpha$); δ — в траверзе ($v_t \sin \alpha = v_r \cos \alpha$).

Рис. 4.3.2, a иллюстрирует соотношение компонент скоростей для случая нахождения наблюдателя в плоскости орбиты ($\vartheta = 0$). Для показанной ориентировки вектора $\bar{v}$ компоненты $v_t \sin \alpha$ и $v_r \cos \alpha$ имеют противоположное направление.

Положив в выражении (4.3.15) $\dot{r}(t) = 0$, найдем условие траверза

$$\gamma = \alpha \pm \frac{\pi}{2}. \quad (4.3.16)$$

На рис. 4.3.2, б показано соотношение скоростей для этого условия. Видно, что при $\dot{r}(t) = 0$ происходит компенсация составляющих $v_t \sin \alpha$ и $v_r \cos \alpha$.

Очевидно, что для круговой орбиты ($\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $v_r = 0$) условие $\dot{r}(t) = 0$ будет удовлетворяться при $\alpha = 0$, т. е. при нахождении ИСЗ в зените.

Если же наблюдатель расположен вне плоскости орбиты ИСЗ ($\vartheta \neq 0$), то условие траверза находится из соотношения

$$v \sin \gamma \cos \vartheta \sin \alpha + v \cos \gamma \cos \alpha = 0,$$

что дает

$$\vartheta = \arccos(-\operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha). \quad (4.3.17)$$

В этом случае при круговой орбите ($v_r = 0$) траверзное условие выполняется при

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}. \quad (4.3.18)$$

Формулу для $\dot{r}(t)$ можно представить в развернутом виде, заменив $v_t(t)$, $v_r(t)$ и $\rho_s(t)$ их выражениями через элементы орбиты a и e , а также через эксцентрическую аномалию $E(t)$.

Известно [29,57], что

$$v_t(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{1-e^2} [1-e \cos E(t)]^{-1}, \quad (4.3.19)$$

$$v_r(t) = \sqrt{\frac{\mu}{a}} e \sin E(t) [1-e \cos E(t)]^{-1}, \quad (4.3.20)$$

$$\rho_s(t) = a [1-e \cos E(t)]^{-1}, \quad (4.3.21)$$

где $\mu = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ (м}^3/\text{сек}^2\text{)}$.

Подставив в (4.3.15) значения $v_t(t)$ и $v_r(t)$ из (4.3.19) и (4.3.20), а также воспользовавшись соотношением (4.3.4), в котором $\rho_s(t)$ заменяем согласно (4.3.21), получим:

$$\dot{r}(t) = \mu^{1/2} R a^{-3/2} [1-e \cos E(t)]^{-2} \{ (1-e^2)^{1/2} \cos \vartheta(t) \sin \beta_0(t) + e \sin E(t) [a^2 R^{-2} (1-e \cos E(t))^2 - \sin^2 \beta_0(t)]^{1/2} \}. \quad (4.3.22)$$

Скорость $\dot{r}(t)$ представлена в функции a , e , t , ϑ и β_0 . При этом углы $\vartheta(t)$ и $\beta_0(t)$ являются в свою очередь функциями орбиты, времени и координат наблюдателя.

Заметим, что выражение $\dot{r}(t)$ через составляющие скорости $v_t(t)$ и $v_r(t)$, а также через углы $\vartheta(t)$ и $\beta_0(t)$ позволяет наглядно пояснить характер изменения навигационной функции. Между тем в навигационных алгоритмах употребляются выражения функций через координаты конечных пунктов или же непосредственно через элементы орбиты ИСЗ.

§ 4.4. СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ НА КОСМИЧЕСКОМ АППАРАТЕ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ТОЧКАМ

4.4.1. ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ $r(t)$ И $\dot{r}(t)$

При орбитальном движении и навигационной точки и объекта функции $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ приобретают ряд особенностей. На их характер наибольшее влияние оказывают высоты орбит над поверхностью планеты и угол между орбитальными плоскостями. Поэтому при аналитическом рассмотрении стремятся $\dot{r}(t)$ и $r(t)$ представить как функции этих величин.

Если учитывать эллиптичность орбиты, то соответствующие выражения оказываются сравнительно громоздкими [82]. Между тем наиболее характерные особенности сохраняются при некоторых упрощениях в исходных условиях. Ввиду этого будем считать, что движение происходит по круговым невозмущенным орбитам радиусов ρ_1 и ρ_2 , а начало отсчета времени ($t = 0$) соответствует наименьшему расстоянию между навигационной точкой и КА.

Итак, пусть параметры движения НТ будут: i_1 , Ω_1 , ρ_1 и M_1 , а параметры движения КА — i_2 , Ω_2 , ρ_2 и M_2 , причем $M_{10} = M_{20}$. Обозначим угол между плоскостями орбит через α . Его величина зависит, очевидно, от i_1 , i_2 , Ω_1 и Ω_2 , поэтому в дальнейшем вместо наклонений орбит и долгот их восходящих узлов можно использовать угол α . Найдем его выражение через указанные кеплеровы элементы.

На рис. 4.4.1 показаны плоскости орбит и линия их пересечения OC , причем точка C взята на сфере произвольного радиуса. Точки A и B представляют собой проекции на эту сферу восходящих узлов орбит. В образовавшемся сферическом треугольнике ABC угол при вершине C является мерой двугранного угла между орбитальными плоскостями, углы при вершинах A и B равны соответственно $A = i_1$ и $B = (180 - i_2)$, а заключенная между ними сторона $AB = \Omega_2 - \Omega_1$. Из решения сферического треугольника, воспользовавшись теоремой косинусов, можно найти

$$\alpha = \arccos [\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos (\Omega_2 - \Omega_1)]. \quad (4.4.1)$$

Для нахождения функции $r(t)$ введем круговые частоты ω_1 и ω_2 вращения соответственно НТ и КА, определяемые через периоды их обращения T_1 и T_2 соотношениями

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}. \quad (4.4.2)$$

Введем координатную систему $O\xi\eta\zeta$ (рис. 4.4.2), совместив ее начало с центром масс планеты, плоскость $\xi O\eta$ — с плоскостью

орбиты НТ и направив ось $O\xi$ по линии пересечения орбитальных плоскостей.

Тогда координаты НТ и КА приобретут выражения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \rho_1 \cos \omega_1 t, \\ \eta_1 &= \rho_1 \sin \omega_1 t, \\ \zeta_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \rho_2 \cos \omega_2 t, \\ \eta_2 &= \rho_2 \cos \alpha \sin \omega_2 t, \\ \zeta_2 &= \rho_2 \sin \alpha \sin \omega_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.4)$$

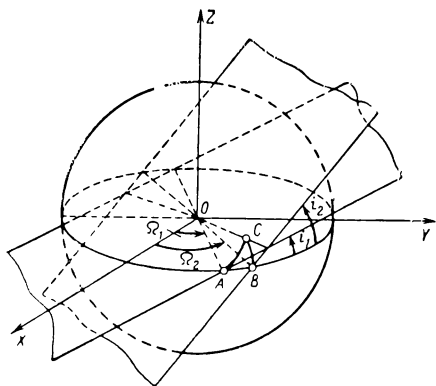


Рис. 4.4.1. К определению угла α .

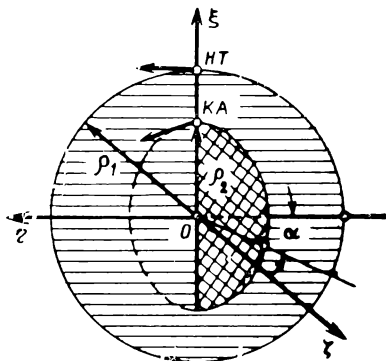


Рис. 4.4.2. К определению $r(t)$.

Находим $r(t)$ по правилам определения расстояний между точками с известными координатами [формула (2.2.1)]; после необходимых преобразований получим

$$r(t) = [\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 (\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \cos \alpha \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t)]^{1/2}. \quad (4.4.5)$$

Для определения функции $\dot{r}(t)$ дифференцируем (4.4.5) по времени, что дает

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{\rho_1 \rho_2}{r(t)} [(\omega_1 - \omega_2 \cos \alpha) \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t + \\ &+ (\omega_2 - \omega_1 \cos \alpha) \sin \omega_2 t \cos \omega_1 t]. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Выражения (4.4.5) — (4.4.6) позволяют проанализировать закономерности изменения $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ со временем и в зависимости от α и соотношения ρ_1 и ρ_2 . Однако следует иметь в виду, что планета, в силовом поле которой совершают движение НТ и КА, накладывает ограничения на условия их взаимной видимости. Связь между

НТ и КА возможна лишь тогда, когда линия, их соединяющая, находится выше касательных к поверхности планеты. При этом расстояние $r(t)$ должно быть меньше суммы касательных L_K . Введя радиус планеты R_n и высоты НТ и КА над ее поверхностью H_1 и H_2 , можем условие взаимной видимости записать в виде

$$r(t) \leq L_K = [H_1(2R_n + H_1)]^{1/2} + [H_2(2R_n + H_2)]^{1/2}. \quad (4.4.7)$$

4.4.2. АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ $r(t)$ и $\dot{r}(t)$

Если плоскости орбит совпадают, то выражение для $r(t)$ упрощается и приобретает вид

$$r(t) = [\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\omega_1 \mp \omega_2) t]^{1/2}, \quad (4.4.8)$$

где верхний знак относится к $\alpha = 0$, а нижний — к $\alpha = 180^\circ$, причем первому случаю отвечает движение орбитальных объектов в одном направлении, а второму — встречное.

Функция $r(t)$ — периодическая, ее период зависит от периодов обращения T_1 и T_2 , а также от α и соотношения ρ_1 и ρ_2 .

Введем относительную высоту КА, определяемую в виде

$$k = \frac{H_2}{H_1}. \quad (4.4.9)$$

Тогда период времени изменения T_r представится для $\alpha = 0$ как

$$T_{r0} = \frac{T_1 T_2}{\pm (T_1 - T_2)}, \quad (4.4.10)$$

где верхний знак относится к условиям $k < 1$, а нижний знак справедлив для $k > 1$, и для $\alpha = 180^\circ$ как

$$T_{r\pi} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \quad (4.4.11)$$

Для рассматриваемого случая функция $\dot{r}(t)$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \rho_1 \rho_2 (\omega_1 \mp \omega_2) \sin(\omega_1 \mp \omega_2) t \times \\ &\times [\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\omega_1 \mp \omega_2) t]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

причем верхние знаки относятся к $\alpha = 0$, а нижние — к $\alpha = 180^\circ$.

Из последнего выражения можно заключить, что $\dot{r}(t)$ существенно зависит от k . Наибольшее из максимальных за период значений $\dot{r}_{\text{наиб}}$ будет иметь место при $\alpha = 180^\circ$ и $k = 1$. При этом для $H_1 = 1000$ км $\dot{r}_{\text{наиб}} \rightarrow 15$ км/сек.

Для встречного движения $\dot{r}_{\text{наиб}}$ больше, чем для однонаправленного, однако с ростом k это различие уменьшается и при $k \gg 100$ максимальные за период значения практически совпадают.

Обратившись к углам $\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 270^\circ$, можно обнаружить, что $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ претерпевают одинаковые временные изменения, так что при взаимно перпендикулярных орбитах направление вращения не влияет на величины этих функций.

Характер изменения $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ при $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ можно проследить с помощью графиков рис. 4.4.3 и 4.4.4, которые рассчитаны

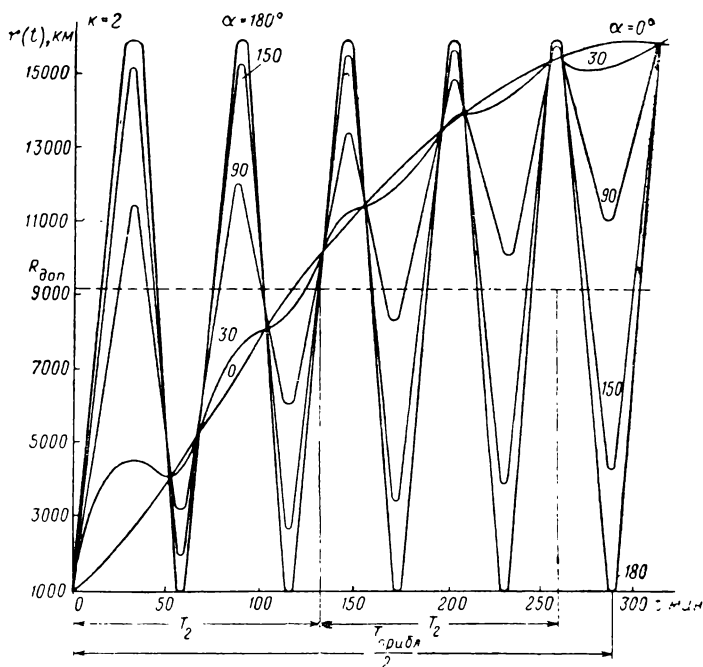


Рис. 4.4.3. Графики навигационной функции $r(t)$.

по зависимостям (4.4.5) и (4.4.6). Графики относятся к случаю $k = 2$, причем показаны изменения функций за время, соответствующее половине периода для $\alpha = 0$.

Периоды функций $r(t)$ и $\dot{r}(t)$ имеют сравнительно большие значения, однако для любого k можно установить приближенную периодичность. Для рассматриваемого случая $T_{прибл} \approx T_{r0}$.

Следует отметить, что для любого k кривые $r(t)$, построенные для различных углов α , пересекаются друг с другом в одних и тех же точках, соответствующих моментам времени

$$t_i = 0,5 T_i l, \quad (i = 1, 2), \quad (4.4.13)$$

причем $l = 0, 1, 2, \dots$

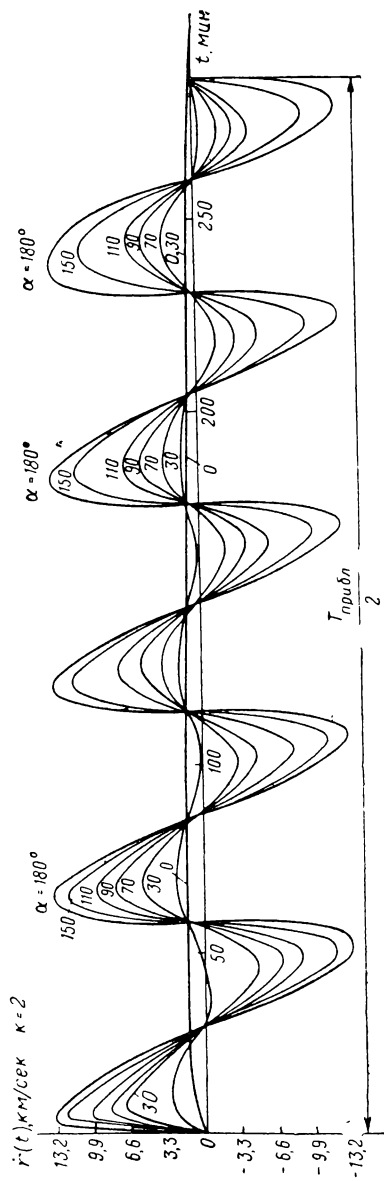


Рис. 4.4.4. Графики навигационной функции $r(t)$.

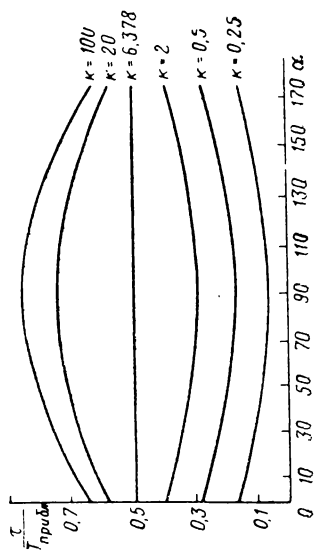


Рис. 4.4.5. Зависимость относительного времени взаимной видимости от угла α .

По графику рис. 4.4.4 можно проследить, как максимальное за период значение $\dot{r}(t)$ зависит от угла α , увеличиваясь с ростом α . Только при весьма больших k эта зависимость пропадает.

Представляет интерес влияние параметра k и угла α на продолжительность сеансов взаимной видимости. Обозначив через τ' интервал времени, соответствующий выполнению условия $r(t) \leq L_K$, и найдя затем сумму τ всех таких интервалов за период изменения функции $r(t)$, можно построить кривые зависимости $\tau/T_{\text{прибл}}$ от угла α при k как параметре. На рис. 4.4.5 показано семейство таких кривых. Обращает внимание то обстоятельство, что при высоте КА, превышающей радиус планеты, в течение большей половины общего времени будет поддерживаться взаимная видимость НТ и КА. В этих же условиях наибольшая продолжительность сеансов связи будет при углах $\alpha = 90^\circ$. При малых k наибольшее значение $\tau/T_{\text{прибл}}$ соответствует углам $\alpha = 0$ и $\alpha = 180^\circ$.

§ 4.5. ОСНОВНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ КАК ИНВАРИАНТЫ КООРДИНАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Навигационные функции могут задаваться в различных координатных системах. В результате координатных преобразований меняется вид функций. При аффинных преобразованиях евклидова пространства инвариантными оказываются расстояния между двумя точками. Поэтому для таких навигационных параметров, как r , $\dot{r}$, Δr , (Δr) , координатные преобразования, рассмотренные в § 2.2, будут инвариантными.

Рассмотрим некоторые из преобразований, сохраняющих инвариантными выражения основных навигационных параметров, имея в виду, что начала координатных систем не совмещаются с навигационными точками и КА.

4.5.1. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

В геоцентрической экваториальной прямоугольной системе координат удобно описывается движение и околоземных КА и подвижных навигационных точек.

Если задать такую систему координат XYZ и координаты КА и НТ обозначить $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$, то расстояние между ними r выразится как

$$r = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (4.5.1)$$

Разность расстояний между КА и двумя НТ запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta r = r_{12} - r_{13} = & [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2} - \\ & - [(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Радиальная скорость может быть найдена путем дифференцирования (4.5.1) по времени, что дает

$$\dot{r} = [(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + (z_1 - z_2)(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)] \times \\ \times [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{-1/2}. \quad (4.5.3)$$

Скорость изменения разности расстояний представится через разность радиальных скоростей:

$$(\Delta \dot{r}) = \dot{r}_{12} - \dot{r}_{13} = \frac{1}{r_{12}} [(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \\ + (z_1 - z_2)(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)] - \frac{1}{r_{13}} [(x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + \\ + (y_1 - y_3)(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) + (z_1 - z_3)(\dot{z}_1 - \dot{z}_3)]. \quad (4.5.4)$$

4.5.2. КЕПЛЕРОВЫ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

Когда навигационные измерения проводятся на КА по орбитальным НТ, текущие координаты обоих объектов могут выражаться через кеплеровы элементы орбиты. В этом случае выражение для r приобретает вид

$$r = \{[\rho_1 (\cos u_1 \cos \Omega_1 - \sin u_1 \sin \Omega_1 \cos i_1) - \\ - \rho_2 (\cos u_2 \cos \Omega_2 - \sin u_2 \sin \Omega_2 \cos i_2)]^2 + \\ + [\rho_1 (\cos u_1 \sin \Omega_1 + \sin u_1 \cos \Omega_1 \cos i_1) - \\ - \rho_2 (\cos u_2 \sin \Omega_2 + \sin u_2 \cos \Omega_2 \cos i_2)]^2 + \\ + (\rho_1 \sin u_1 \sin i_1 - \rho_2 \sin u_2 \sin i_2)^2\}^{1/2}, \quad (4.5.5)$$

причем аргумент широты u_i и радиус-вектор ρ_i имеют следующие выражения ($i = 1, 2$):

$$u_i = \omega_i + \vartheta_i \quad \text{и} \quad \rho_i = \frac{a_i (1 - e_i^2)}{1 + e_i \cos \vartheta_i}, \quad (4.5.6)$$

где ϑ — истинная аномалия, в свою очередь, представляемая через среднюю аномалию $M = \mu^{1/2} a^{-3/2} (t - \tau_0)$ в виде ряда

$$\vartheta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \\ + \frac{e^3}{12} (13 \sin 3M - 3 \sin M) + \dots \quad (4.5.7)$$

Разность расстояний будет находиться по соотношению

$$\Delta r = r_{12}(\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, \Omega_1, \Omega_2, i_1, i_2) - \\ - r_{13}(\rho_1, \rho_3, u_1, u_3, \Omega_1, \Omega_3, i_1, i_3), \quad (4.5.8)$$

где каждое из слагаемых выражается по формуле (4.5.5).

Радиальная скорость находится в результате дифференцирования по времени выражения (4.5.5) при учете, что ρ_i и u_i являются функциями времени. Соответствующие вычисления приводят к виду

$$\begin{aligned} \dot{r} = & \frac{1}{r} \{ [\rho_1 (\cos u_1 \cos \Omega_1 - \sin u_1 \sin \Omega_1 \cos i_1) - \\ & - \rho_2 (\cos u_2 \cos \Omega_2 - \sin u_2 \sin \Omega_2 \cos i_2)] \times \\ & \times ([\dot{\rho}_1 (\cos u_1 \cos \Omega_1 - \sin u_1 \sin \Omega_1 \cos i_1) - \\ & - \rho_1 (\sin u_1 \cos \Omega_1 + \cos u_1 \sin \Omega_1 \cos i_1)] \dot{u}_1 - \\ & - [\dot{\rho}_2 (\cos u_2 \cos \Omega_2 - \sin u_2 \sin \Omega_2 \cos i_2) - \\ & - \rho_2 (\sin u_2 \cos \Omega_2 + \cos u_2 \sin \Omega_2 \cos i_2)] \dot{u}_2) + \\ & + [\rho_1 (\cos u_1 \sin \Omega_1 + \sin u_1 \cos \Omega_1 \cos i_1) - \\ & - \rho_2 (\cos u_2 \sin \Omega_2 + \sin u_2 \cos \Omega_2 \cos i_2)] \times \\ & \times ([\dot{\rho}_1 (\cos u_1 \sin \Omega_1 + \sin u_1 \cos \Omega_1 \cos i_1) - \\ & - \rho_1 (\sin u_1 \sin \Omega_1 - \cos u_1 \cos \Omega_1 \cos i_1)] \dot{u}_1 - \\ & - [\dot{\rho}_2 (\cos u_2 \sin \Omega_2 + \sin u_2 \cos \Omega_2 \cos i_2) - \\ & - \rho_2 (\sin u_2 \sin \Omega_2 - \cos u_2 \cos \Omega_2 \cos i_2)] \dot{u}_2) + \\ & + (\rho_1 \sin u_1 \sin i_1 - \rho_2 \sin u_2 \sin i_2) \times \\ & \times [(\dot{\rho}_1 \sin u_1 \sin i_1 + \rho_1 \cos u_1 \sin i_1) \dot{u}_1 - \\ & - (\dot{\rho}_2 \sin u_2 \sin i_2 + \rho_2 \cos u_2 \sin i_2) \dot{u}_2] \}, \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

причем входящие в (4.5.9) $\dot{\rho}_i$ и $\dot{u}_i$ ($i = 1, 2$) вычисляются по соотношениям:

$$\dot{\rho}_i = \rho_i e_i \sin \vartheta_i (1 + e_i \cos \vartheta_i)^{-1}, \quad (4.5.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_i = & \mu^{1/2} a_i^{-3/2} \left[1 + 2e_i \cos M_i + \frac{5}{2} e_i^2 \cos 2M_i + \right. \\ & \left. + \frac{e_i^3}{4} (13 \cos 3M_i - \cos M_i) \right], \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

а значение r берется в соответствии с (4.5.5).

Скорость изменения разности расстояний можно выражать через разность радиальных скоростей

$$\begin{aligned} (\Delta \dot{r}) = & \dot{r}_{12} (\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, \Omega_1, \Omega_2, i_1, i_2, \dot{\rho}_1, \dot{\rho}_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) - \\ & - \dot{r}_{13} (\rho_1, \rho_3, u_1, u_3, \Omega_1, \Omega_3, i_1, i_3, \dot{\rho}_1, \dot{\rho}_3, \dot{u}_1, \dot{u}_3), \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

имея в виду, что каждое из слагаемых, в свою очередь, представляется в соответствии с (4.5.9) при учете (4.5.10) и (4.5.11).

4.5.3. ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Если навигационные функции описываются в геоцентрической орбитальной прямоугольной системе, то координаты КА выражаются элементарно через радиус-вектор ρ и истинную аномалию ϑ [см. выражения (2.2.14), а также (2.2.15) или (4.5.6) и (4.5.7)]. В то же время координаты НТ, если они заданы как сферические φ , λ и ρ_3 , потребуется привести к ξ_2 , η_2 и ζ_2 путем двойного преобразования в соответствии с матрицами (2.2.10), (2.2.13), (2.2.31). Расстояние r приобретает в этом случае вид

$$r = \{\rho^2 + \rho_3^2 - 2\rho\rho_3 [\cos \varphi \cos i \sin (\omega + \vartheta) \sin (\Omega - \lambda - \Omega_3(t - t_0)) - \\ - \cos \varphi \cos (\omega + \vartheta) \cos (\Omega - \lambda - \Omega_3(t - t_0)) - \\ - \sin \varphi \sin i \sin (\omega + \vartheta)]\}^{1/2}, \quad (4.5.13)$$

где Ω_3 — угловая скорость вращения Земли и t_0 — момент совпадения связанной и несвязанной систем отсчета.

Разность расстояний можно будет выразить соотношением

$$\Delta r = r_{12}(\rho, \rho_{32}, \varphi_2, \lambda_2, i, \Omega, \vartheta, \omega) - \\ - r_{13}(\rho, \rho_{33}, \varphi_3, \lambda_3, i, \Omega, \vartheta, \omega), \quad (4.5.14)$$

в котором каждое из слагаемых находится в соответствии с (4.5.13).

Чтобы найти выражение для радиальной скорости $\dot{r}$, нужно продифференцировать по времени (4.5.13), принимая во внимание, что функциями времени являются ϑ и $\Omega_3(t - t_0)$. Это дает

$$\dot{r} = \frac{\rho\rho_3}{r} \{ [\cos \varphi \cos i \sin (\omega + \vartheta) \cos (\Omega - \lambda - \Omega_3(t - t_0)) + \\ + \cos \varphi \cos (\omega + \vartheta) \sin (\Omega - \lambda - \Omega_3(t - t_0))] \Omega_3 - \\ - [\cos \varphi \cos i \sin (\Omega - \lambda - \Omega_3(t - t_0)) \cos (\omega + \vartheta) + \\ + \cos \varphi \cos (\Omega - \lambda - \Omega_3(t - t_0)) \sin (\omega + \vartheta) - \\ - \sin \varphi \sin i \cos (\omega + \vartheta)] \dot{\vartheta} \}, \quad (4.5.15)$$

причем значение r берется по (4.5.13), а для нахождения $\dot{\vartheta}$ используется выражение (4.5.11), поскольку $\dot{u} = \dot{\vartheta}$.

Как разность радиальных скоростей находится скорость

$$(\Delta \dot{r}) = \dot{r}_{12}(\rho, \rho_{32}, \varphi_2, \lambda_2, i, \Omega, \omega, \vartheta, \dot{\vartheta}) - \\ - \dot{r}_{13}(\rho, \rho_{33}, \varphi_3, \lambda_3, i, \Omega, \omega, \vartheta, \dot{\vartheta}). \quad (4.5.16)$$

Каждое из слагаемых берется в соответствии с выражением (4.5.15).

§ 4.6. ГРАДИЕНТЫ ПОЛЕЙ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Навигационные параметры R_i можно рассматривать как скалярные величины. Скалярное поле геометрических параметров распределено в пространстве, окружающем навигационную точку. Уровневыми поверхностями такого поля будут поверхности положения.

В пределах рабочих областей навигационных систем параметры R_i представляют собой непрерывные функции координат и имеют

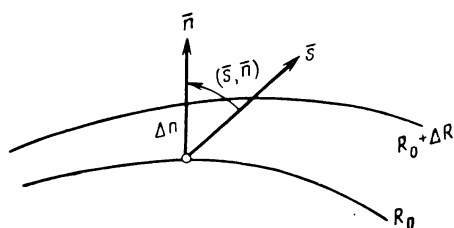


Рис. 4.6.1. К соотношению между градиентом и производной по направлению.

непрерывные первые производные, поэтому изменение поля навигационного параметра можно описывать его градиентом. Градиент — векторная величина, показывающая направление наибольшего роста скалярной функции, ее модуль характеризует степень изменения этой функции.

Если обозначить через $\bar{n}$ нормаль к поверхности положения, направленную в сторону возрастания R , то градиент навигационного параметра представится в виде:

$$\text{grad } R = \bar{G}_R = \frac{\partial R}{\partial n} \bar{n}. \quad (4.6.1)$$

С помощью градиентов $\bar{G}_R$ можно определять значения производных от параметра R по любому направлению. Так, если задано значение градиента и известен угол между нормалью к поверхности положения $\bar{n}$ и направлением $\bar{s}$, производная по которому отыскивается, то эта производная выразится в виде (рис. 4.6.1):

$$\frac{\partial R}{\partial s} = |\bar{G}_R| \cos(\bar{s}, \bar{n}). \quad (4.6.2)$$

В частном случае, при введении прямоугольной системы координат x^i ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$) градиент находится как

$$\bar{G}_R = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial R}{\partial x^i} \bar{k}^{0i}, \quad (4.6.3)$$

где $\bar{k}^{0i}$ — единичные векторы, параллельные координатным осям, а $\frac{\partial R}{\partial x^i}$ — частные производные от навигационного параметра по

j -й координате. В этих условиях модуль градиента имеет выражение

$$|G_R| = \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial R}{\partial x^j} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4.6.4)$$

Понятием градиента удобно пользоваться для вычисления частных производных от навигационных функций по начальным значениям координат, которые оказываются необходимыми при статистической обработке результатов навигационных измерений (см. гл. 10).

Градиенты облегчают анализ точностных характеристик навигационных систем, поскольку они позволяют связывать погрешности в измеряемом параметре N с погрешностями в фиксации поверхности (линии) положения Δn . Так, перейдя в выражении (4.6.1) к конечным приращениям, можем найти, что

$$\Delta n = \frac{\Delta R}{|G_R|}. \quad (4.6.5)$$

Поэтому если только градиент $|G_R|$ известен, то ошибка поверхности (линии) положения Δn находится непосредственно из оценки ошибки измерения навигационного параметра N , который при известных k и v_c характеризует параметр R . Выражение (4.6.5) свидетельствует о том, что для уменьшения ошибок местоопределения необходимо стремиться к увеличению градиента поля навигационного параметра.

Градиенты $|G_R|$, соответствующие различным измеряемым параметрам, нетрудно найти, располагая уравнениями поверхностей положения, отвечающим этим параметрам.

В виде иллюстрации приведем выражения для модулей градиентов поверхностей положения, соответствующих измерениям дальности, разности и суммы дальностей, радиальной скорости и угловой величины.

Все названные поверхности представляют собой поверхности вращения — сферу, гиперболоид, эллипсоид, конус. Вследствие осесимметричности этих поверхностей на всех их образующих распределение градиентов будет подобным. Кроме того, градиент в любой точке поверхности положения будет лежать в секущей плоскости проходящей через данную точку и ось вращения. Это значит, что распределение градиентов в некоторой секущей плоскости сможет характеризовать и их пространственное распределение, а, стало быть, задача пространственная сводится к плоскостной.

Таким образом, потребуется найти распределение модулей градиентов по окружности, гиперболе, эллипсу, лучам угла.

Связав с центром окружности радиуса r начало координатной системы XOY , запишем навигационную функцию в виде

$$r = [x^2 + y^2]^{1/2}. \quad (4.6.6)$$

Вычислив частные производные типа $\frac{\partial r}{\partial x}$ и $\frac{\partial r}{\partial y}$, по формуле (4.6.4) непосредственно находим, что

$$|G_r| = 1. \quad (4.6.7)$$

Обратившись далее к гиперболе и эллипсу, поместим начало системы XOY посередине базовой линии B_1B_2 , имеющей протяженность d (рис. 4.6.2). Траектории сигналов r_1 и r_2 представляются как фокальные радиус-векторы, образующие в пересечении угол φ . Обозначив

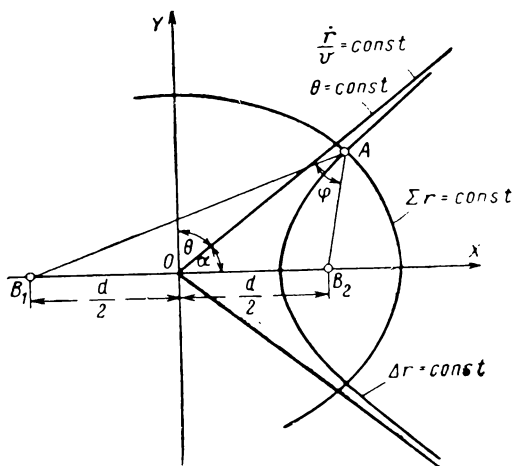


Рис. 4.6.2. К вычислению модулей градиентов.

ради компактности последующей записи измеряемые параметры как $\Delta r = R_\Delta$ и $\Sigma r = R_\Sigma$, сможем выразить разностно-дальномерную и суммарно-дальномерную навигационные функции в виде

$$R_{\Delta, \Sigma} = \left[\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2} \mp \left[\left(x - \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}. \quad (4.6.8)$$

Вычислив частные производные типа $\frac{\partial R_\Delta}{\partial x}$, $\frac{\partial R_\Delta}{\partial y}$, $\frac{\partial R_\Sigma}{\partial x}$ и $\frac{\partial R_\Sigma}{\partial y}$, и воспользовавшись далее общим выражением (4.6.4), после ряда необходимых преобразований можно найти значения модулей градиентов

$$|G_{\Delta r}| = 2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (4.6.9)$$

а также

$$|G_{\Sigma r}| = 2 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (4.6.10)$$

Для конических поверхностей, относящихся к радиально-скоростным измерениям, начало координатной системы XOY следует совместить с вершиной конуса, угол раствора которого равен 2α . В свою очередь, угол α связан с навигационным параметром соотношением (4.2.1), из которого следует, что

$$\dot{r} = v \cos \left(\arccos \frac{x}{r} \right) = v \left[1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.6.11)$$

Вычисляя частные производные $\frac{\partial \dot{r}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \dot{r}}{\partial y}$ и пользуясь общим выражением (4.6.4), можно в результате соответствующих преобразований получить искомое соотношение

$$|G_r| = v \sin \alpha. \quad (4.6.12)$$

В случае угловых измерений ось OY удобно ориентировать по северному направлению меридиана, тогда навигационный параметр — угол θ — будет иметь выражение (рис. 4.6.2):

$$\theta = \arctg \frac{x}{y}. \quad (4.6.13)$$

Применяя тот же способ нахождения модуля градиента, можно получить

$$|G_\theta| = \frac{1}{r}. \quad (4.6.14)$$

Для истолкования выражений $|G_r|$, $|G_{\Delta r}|$, $|G_{\Sigma r}|$, $|G_r|$ и $|G_\theta|$ следует обратиться к формуле (4.6.5), дающей связь ошибки Δn в фиксации поверхности положения с ошибкой ΔR в измерении навигационного параметра и модулем градиента $|G_r|$.

Полученное для дальномерного метода соотношение $|G_r| = 1$ означает, что ошибка в определении поверхности положения равна ошибке измерения $\Delta n = \Delta R$.

Выражение $(G_{\Delta r})$ через $\sin \varphi/2$ показывает, что ошибка в нахождении гиперболической поверхности будет тем меньше, чем ближе угол φ между фокальными радиус-векторами будет приближаться к 180° , т. е. чем ближе к базовой линии находится объект навигации, а при заданном удалении, чем ближе он оказывается к плоскости, перпендикулярной базовой линии и проходящей через ее середину.

В случае эллипсоидальной поверхности положения $|G_{\Sigma r}|$ пропорционален $\cos \varphi/2$. Следовательно, поверхность положения точнее фиксируется при малых углах φ , т. е. вдали от базы. При столь большом удалении, что $r \gg d$, эллипсоид вырождается в сферу. В этих условиях $|G_{\Sigma r}|_{\varphi \rightarrow 0} = 2$, что согласуется со значением модуля $|G_r|$ [соотношение (4.6.7)], если учесть, что при этом $\Sigma r = 2r$.

Для конических поверхностей, соответствующих радиально-скоростным измерениям, $|G_r|$, будучи пропорционален $\sin \alpha$, приобретает максимальное значение при траверзных измерениях, когда конус вырождается в плоскость, перпендикулярную вектору скорости v .

Наконец, обратно пропорциональная зависимость $|G_\theta|$ от r при угловых измерениях свидетельствует о том, что ошибка в фиксации поверхности положения растет с ростом расстояния между РНТ и объектом навигации.

§ 4.7. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ГРАДИЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Параметры движения КА (как и координаты иного подвижного объекта) определяются по результатам измерений с использованием выражений навигационных функций. Получающиеся уравнения — обычно нелинейные. В целях линеаризации решаемых уравнений применяют разложение функций $R_i(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{06}, t_i)$ в ряд в окрестностях их расчетных значений по степеням малых отклонений параметров движения. При этом в исходные уравнения в качестве коэффициентов входят частные производные $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$.

Представим производную $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$ в виде:

$$\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} = \frac{\partial R_i}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial q_{0j}} + \frac{\partial R_i}{\partial Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_{0j}} + \dots + \frac{\partial R_i}{\partial Q_6} \frac{\partial Q_6}{\partial q_{0j}} = \sum_{p=1}^6 \frac{\partial R_i}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial q_{0j}}, \quad (4.7.1)$$

где $Q_1, Q_2, \dots, Q_6$ — система некоторых промежуточных координат (например, геоцентрических или топоцентрических), и рассмотрим отдельно полученные совокупности частных производных типа $\frac{\partial R_i}{\partial Q_p}$ и $\frac{\partial Q_p}{\partial q_{0j}}$.

Частные производные

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_{0j}}, \frac{\partial Q_2}{\partial q_{0j}}, \dots, \frac{\partial Q_6}{\partial q_{0j}}, (j = 1, 2, \dots, 6) \quad (4.7.2)$$

характеризуют изменение промежуточных координат с изменением параметров движения. Совокупность их будет включать 36 элементов, образующих квадратную матрицу. Если выбрать в качестве промежуточной системы геоцентрические прямоугольные коор-

динаты и их производные, а в качестве параметров движения — кеплеровы элементы, то образуется матрица вида:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial i} & \frac{\partial x}{\partial \Omega} & \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial e} & \frac{\partial x}{\partial \tau_0} \\ \frac{\partial y}{\partial i} & \frac{\partial y}{\partial \Omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial e} & \frac{\partial y}{\partial \tau_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial e} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \tau_0} \end{vmatrix}. \quad (4.7.3)$$

Вместо прямоугольных координат могут использоваться сферические, цилиндрические и иные координатные системы.

Эту матрицу можно рассматривать как совокупность частных производных от текущих координат КА и их производных по начальным условиям движения. Называется она *фундаментальной матрицей * первого* рода.

Если вовлечь в рассмотрение частные производные второго порядка, то появятся члены вида $\frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{0j} \partial q_{0k}}$. Очевидно, каждой строке матрицы (4.7.3) может быть сопоставлена квадратная матрица вида

$$\Psi_p = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{01}^2} & \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{01} \partial q_{02}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{01} \partial q_{06}} \\ \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{02} \partial q_{01}} & \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{02}^2} & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{02} \partial q_{06}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{06} \partial q_{01}} & \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{06} \partial q_{02}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 Q_p}{\partial q_{06}^2} \end{vmatrix}. \quad (4.7.4)$$

Всего таких 36-членных матриц будет шесть. Совокупность $\Psi_p (p = 1, 2, \dots, 6)$ называется группой *фундаментальных* матриц *второго* рода.

Частные производные типа $\frac{\partial R_i}{\partial Q_p}$ образуют матрицу-строку

$$\Gamma_i = \left\| \frac{\partial R_i}{\partial Q_1} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial Q_2} \dots \frac{\partial R_i}{\partial Q_6} \right\|. \quad (4.7.5)$$

Эта матрица характеризует, как изменяются навигационные функции с изменением текущих координат КА. Она называется *градиентной* матрицей *первого* рода.

* В литературе встречаются также наименования: «матрица изохронных производных» [48] и «матрица баллистических производных».

Название градиентной матрицы связано со следующей геометрической интерпретацией частных производных типа (4.7.5). Введем в рассмотрение поверхности положения $R_i = \text{const}$ и учтем, что их свойства можно характеризовать градиентами $\text{grad } R_i$. Примем в качестве промежуточных координат геоцентрические координаты x, y и z и представим далее производные $\frac{\partial R_i}{\partial Q_p}$ в виде

$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = \frac{\partial R_i}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{\partial R_i}{\partial y} = \frac{\partial R_i}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \frac{\partial R_i}{\partial z} = \frac{\partial R_i}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z}$$

или, используя выражение (4.6.2), как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial x} &= |G_{Ri}| \cos(\bar{x}, \bar{n}), \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} &= |G_{Ri}| \cos(\bar{y}, \bar{n}), \\ \frac{\partial R_i}{\partial z} &= |G_{Ri}| \cos(\bar{z}, \bar{n}). \end{aligned} \right\} \quad (4.7.6)$$

Последнее выражение показывает, что частные производные рассматриваемого типа выражаются через модуль градиента и направляющие косинусы, определяющие ориентацию градиента поверхности положения. Следовательно, они представляют собой компоненты градиента поверхности положения, а их совокупность имеет значение градиентной матрицы.

Обратившись к частным производным второго порядка, можно из каждого элемента матрицы (4.7.5) получить строку и прийти к квадратной матрице вида

$$\Pi_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_1 \partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_1 \partial Q_6} \\ \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_2 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_2 \partial Q_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_6 \partial Q_1} & \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_6 \partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 R_i}{\partial Q_6^2} \end{vmatrix}. \quad (4.7.7)$$

Выражение (4.7.7) определяет *градиентную матрицу второго рода*.

§ 4.8. ОБЩИЕ И ВИДОВЫЕ СВОЙСТВА НАВИГАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Различные навигационные параметры связаны с параметрами движения не одинаковыми функциональными зависимостями. Поэтому различные методы навигационных измерений способны доставить не одинаковую информацию о параметрах движения.

Изучать информационные свойства целесообразно на основе анализа особенностей функциональных связей измеряемых параметров и параметров движения. Особое значение приобретает анализ частных производных от навигационных функций по параметрам движения.

Производные $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$ характеризуют свойства навигационных методов, поскольку они определяют, как будут изменяться навигационные параметры с изменением начальных условий движения. Эти производные для различных навигационных функций R_i будут, естественно, не одинаковыми. Тем не менее представляется возможным разделить их на части так, чтобы одна из них воплощала индивидуальные свойства навигационного метода измерений, а другая — была бы одинаковой для всех методов.

Приведенное в предшествующем параграфе представление производной $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$ через $\frac{\partial R_i}{\partial Q_p}$ и $\frac{\partial Q_p}{\partial q_{0j}}$ [выражение (4.7.1)] намечает один из путей такого разделения, причем для выявления свойств методов могут использоваться фундаментальная и градиентная матрицы.

Фундаментальная матрица для всех навигационных методов будет одинаковой, поэтому можно считать, что она выражает *общие свойства* методов.

В противоположность этому градиентная матрица для каждого навигационного метода будет своеобразной, вследствие чего можно считать, что она отражает *видовые свойства* методов.

В настоящее время применяются статистические методы определения и уточнения параметров движения. При использовании метода наименьших квадратов решается система нормальных уравнений, коэффициенты которых формируются из частных производных вида $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$. При этом точностные свойства навигационного метода оцениваются в результате обращения матрицы, составленной из этих коэффициентов.

Таким образом, анализ фундаментальной и градиентной матриц позволяет выявить общие и видовые особенности методов навигации и путем оценки их точностных характеристик произвести сравнение информационных свойств различных методов.

Специально этот вопрос рассматривается в гл. 11.

§ 4.9. НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖЕНИЯ

4.9.1. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Какому-либо ряду значений измеряемого параметра N_i или соответственно параметра R_i отвечает совокупность поверхностей положения (или линий положения). При местоопределении некоторого объекта по данным ряда параметров N_i , определенных относительно соответствующего числа навигационных точек, объект локализуется в области взаимного пересечения поверхностей или линий положения. По соображениям повышения точности местоопределения желательно, чтобы системы поверхностей положения или соответственно сети линий положения* в области вероятного нахождения объекта обладали свойством ортогональности.

Сети, соответствующие первичным навигационным параметрам, обладают ортогональными свойствами лишь в пределах ограниченных районов рабочих областей навигационных систем. Надлежащий же выбор вторичных параметров позволяет удовлетворить требованию ортогональности если не во всей области, то по крайней мере в нужных районах. Поэтому ортогонализация сетей способна придать поверхностям положения оптимальные свойства по критерию минимума дисперсии пространственного местоположения.

Криволинейность используемых поверхностей положения приводит к нелинейности аналитических зависимостей, которые применяются при решении навигационных задач. Естественно, что линейаризация решений приводит к упрощению навигационных алгоритмов и сокращению объема вычислений. В связи с этим линейаризацию сетей можно рассматривать как один из способов, оптимизирующих навигационный метод по объему вычислений.

Требование повышения точности измерения координат находится в противоречии с требованием однозначности отсчета. Наиболее ярко это проявляется при фазовой методике измерений. Часто избранная из соображений точности сеть оказывается неоднозначной, и поэтому приходится пользоваться несколькими разномасштабными сетями. В связи с этим встает вопрос о такой координации разномасштабных сетей поверхностей или линий положения, которая приводит к более компактному их построению. Координация сетей, таким образом, способна оптимизировать геометрическую структуру сетей и порядок формирования отсчета при измерениях.

Рассмотрим некоторые возможности оптимизации поверхностей положения, исходя из высказанных соображений.

4.9.2. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ СЕТЕЙ

Условие ортогональности применительно к сетям линий положения можно сформулировать следующим образом.

Пусть в двумерном навигационном пространстве заданы координаты u и v . Семейства линий $u(v = \text{const})$ и линий $v(u = \text{const})$ образуют сети линий положения. Пусть уравнение пространства задано в векторном виде:

$$\bar{R} = \bar{R}(u, v). \quad (4.9.1)$$

Условием ортогональности сетей линий u и линий v является равенство нулю скалярного произведения:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} = 0. \quad (4.9.2)$$

* Будем далее условно совокупность и поверхностей положения и линий положения именовать сетью.

Наряду с этим следует отметить, что условие независимости u и v как параметров функции $\bar{R} = \bar{R}(u, v)$ равносильно условию пересечения сетей между собой. Таким необходимым и достаточным условием является следующее соотношение:

$$\left[\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} \right] \neq 0. \quad (4.9.3)$$

Известны способы, при которых вторичные параметры получаются как комбинации первичных, причем в различных районах рабочей области системы применяются именно те комбинации, которые способны там дать сети, близкие к ортогональным.

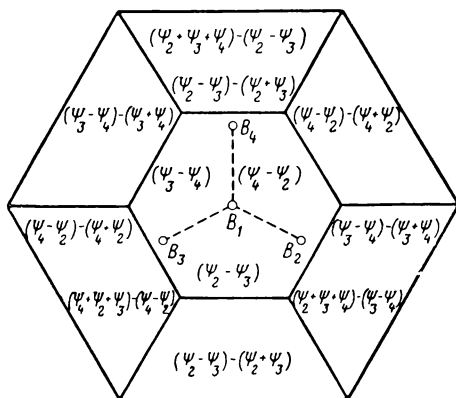


Рис. 4.9.1. К принципу ортогонализации сетей линий положения.

На рис. 4.9.1 схематически показано, как рабочая область двумерной фазовой радионавигационной системы, включающей четыре РНТ (1, 2, 3 и 4), разбивается на ряд районов, в пределах которых оптимальными будут те или иные суммовые или разностные комбинации фазовых отсчетов: $\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$; $\psi_3 = \varphi_3 - \varphi_1$; $\psi_4 = \varphi_4 - \varphi_1$.

Объяснить подобную ортогонализацию нетрудно. Совокупности суммовых и разностных отсчетов $\psi_i \pm \psi_k$ отвечает совокупность поверхностей положения в виде конфокальных эллипсоидов и гиперболоидов вращения

$$\frac{x_i^2}{a_i^2} \pm \frac{y_i^2 + z_i^2}{b_i^2} = 1, \quad (4.9.4)$$

где x_i , y_i и z_i — координаты в системах с началом в центре i -й базы. Наряду с этим комбинирование первичных отсчетов равносильно переходу к более удлиненной базе, вследствие чего расхождение поверхностей положения в пределах некоторого района уменьшается, так как их смещение в точке, из которой база видна под углом φ , в $\cos \varphi/2$ больше, чем на базе.

4.9.3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СЕТЕЙ

Способ образования вторичных параметров с использованием суммовых и разностных комбинаций первичных параметров представляет также возможность линейаризации алгоритмов пространственного местоопределения. Разберем этот вопрос.

Представим себе, что имеется m навигационных точек с известными координатами, относительно которых измеряются расстояния r_i до объекта. Составляя из этих РНТ комбинации по два, можно образовать некоторое число баз и получить для каждой базы суммовый $\Sigma_i r$ и разностный $\Delta_i r$ отсчеты. Полученным отсчетам будут соответствовать поверхности второго порядка, и для местоопределения потребуется решать нелинейные уравнения. Однако в целях линеаризации уравнений можно отсчетам $\Sigma_i r$ и $\Delta_i r$ сопоставить поверхности первого порядка — некоторые плоскости, перпендикулярные

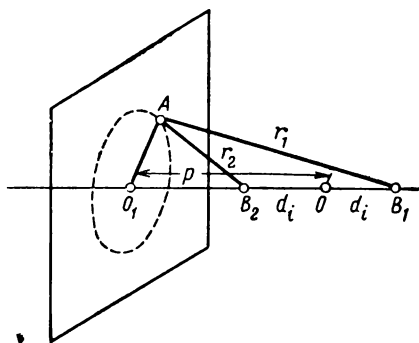


Рис. 4.9.2. К принципу линеаризации поверхности положения.

к базам или к их продолжениям, проходящие через точку объекта. Поскольку направляющие косинусы баз l_i , m_i и n_i известны, то определена и ориентация соответствующих плоскостей: их направляющие косинусы L_i , M_i и N_i будут связаны с l_i , m_i и n_i очевидным соотношением

$$\frac{L_i}{l_i} = \frac{M_i}{m_i} = \frac{N_i}{n_i}. \quad (4.9.5)$$

В системах координат с началом в центре базы уравнения поверхностей записываются как

$$x_i - p_i = 0. \quad (4.9.6)$$

При этом параметры p_i находятся из геометрических соображений (рис. 4.9.2). Для треугольников AO_1B_1 и AO_1B_2 справедливо соотношение

$$r_1^2 - (d_i \pm p_i)^2 = r_2^2 - (d_i \mp p_i)^2, \quad (4.9.7)$$

где $2d_i$ — соответствующие базы. Из выражения (4.9.7) следует:

$$p_i = \pm \frac{1}{4d_i} (r_1^2 - r_2^2). \quad (4.9.8)$$

Поэтому уравнения линеаризованных поверхностей положения представляются в виде

$$x_i \mp \frac{1}{4d_i} \Sigma_i r \times \Delta_i r = 0. \quad (4.9.9)$$

Таким образом, достаточно располагать совокупностью $\Sigma_i r$ и $\Delta_i r$, чтобы относительно фиксированной базы можно было задать вторичную поверхность положения в виде плоскости.

На рис. 4.9.3. показано, как для случая двумерной навигации при четырех РНТ можно получить совокупность вторичных линий положения в виде пучка прямых.

Можно оценить, какое количество вторичных поверхностей положения рассматриваемого типа будет получено при использовании системы m навигационных точек.

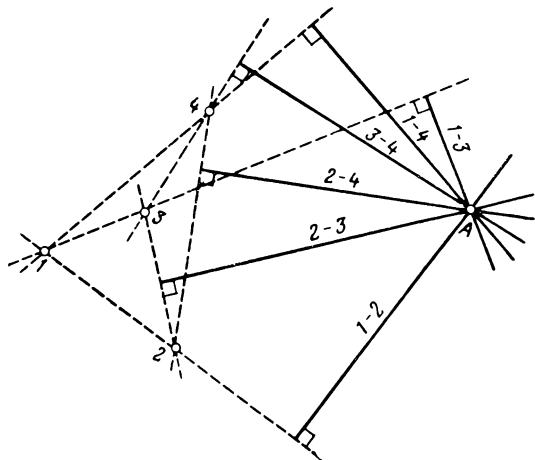


Рис. 4.9.3. К принципу линейризации линий положения.

Пусть среди m навигационных точек p источников сигнала и q его только приемников, так что

$$q + p = m. \quad (4.9.10)$$

Если при этом начала отсчета временной координаты согласованы заранее, имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq p \leq m, \\ 0 \leq q \leq m. \end{aligned} \right\} \quad (4.9.11)$$

В случае отсутствия синхронизации эталонов времени на объекте и в РНТ должен быть хотя бы один источник сигнала, выражением чего будут соотношения

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq q \leq (m-1), \\ 1 \leq p \leq m. \end{aligned} \right\} \quad (4.9.12)$$

Для условий (4.9.11) всего может быть образовано

$$M = C_m^2 = \frac{1}{2} m(m-1) \quad (4.9.13)$$

семейств поверхностей положения. Условиям (4.9.12) соответствует число семейств поверхностей положения

$$M = C_p^2 + pq = \frac{1}{2} p[(p-1) + 2q]. \quad (4.9.14)$$

Следует отметить, что сравнительная простота линейризованных алгоритмов облегчает использование статистических методов обработки результатов радионавигационных измерений.

4.9.4. КООРДИНАЦИЯ РАЗНОМАСШТАБНЫХ СЕТЕЙ

В настоящее время для разрешения неоднозначности радионавигационных измерений нашли широкое применение методы одновременного создания нескольких разномасштабных сетей пространств положений. В пределах рабочей области системы задается несколько фазовых сетей с различной пространственной плотностью, а на объекте навигации предусматривается соответствующее число индикаторов. При этом измерения могут проводиться на различных частотах: несущих, модулирующих, биений, комбинационных при условии, что число частот измерения соответствует количеству фазовых сетей.

Величины используемых частот измерения различаются в той же мере, что и масштабные коэффициенты фазовых сетей. Это приводит к осложнениям: при измерениях на несущих частотах ошибки из-за условий распространения для различных измерений будут неодинаковыми, при измерениях на модулирующих частотах или на частотах биений усложняются требования к диапазонам измерительных трактов. Применение нескольких декадных сетей приводит к еще большему различию.

В целях устранения отмеченного недостатка для задания грубой сети на разностной частоте используются измерения не на этой частоте, а на двух высоких (или модулирующих) частотах, отличающихся между собой на величину разностной частоты. Один из двух отсчетов дает точное значение поверхности (линии) положения, а разностный отсчет, который образуется из снятых отсчетов, служит для устранения неоднозначности.

Вопрос о согласовании таких разномасштабных сетей имеет существенное значение. Обычно применяется такое согласование, при котором какому-либо сочетанию отсчетов по различным шкалам соответствует в конечном счете одна определенная поверхность (линия) положения. Это требование является необходимым, причем оно лишь в том случае реализуется, если погрешность по грубой сети оказывается меньше, чем ширина зоны однозначного отсчета точной фазовой сети. Однако удовлетворение только этому требованию приводит к необходимости оперировать фактически с несколькими фазовыми сетями, с произвольным соотношением их масштабных коэффициентов.

Возможны различные способы выбора масштабов сетей. Одни из них могут наилучшим образом удовлетворять требованию минимальности затраты энергии, другие — удобству формирования отсчета. К последним относится и такой, при котором последовательные отсчеты по нескольким неоднозначным сетям входят как различные значащие цифры суммарного отсчета по самой точной сети, приобретающей в силу этого однозначный характер. При таком согласовании на карты достаточно нанести всего одну фазовую сеть. Этот способ представляет также удобства для ввода навигационной информации в цифровые вычислительные машины.

Пусть точная сеть задана на частоте ω_1 .
Введем коэффициент изменения масштаба

$$K_M = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} = \dots = \frac{\omega_i}{\omega_i - \omega_{i+1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dots = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}, \quad (4.9.15)$$

показывающий, во сколько раз можно уменьшить неоднозначность за счет образования разностного отсчета.

Если требуется согласовать n фазовых сетей, масштабы которых последовательно отличаются в K_M раз, то i -я разностная частота должна быть меньше основной частоты в K_M^i раз:

$$\Omega_i = \omega_1 - \omega_{i+1} = \omega_1 K_M^{-i}, \quad (4.9.16)$$

где $i = 1, 2, \dots, (n-1)$, откуда:

$$\omega_{i+1} = \omega_1 (1 - K_M^{-i}), \quad (4.9.17)$$

При этом длины волн соответствующих разностных колебаний будут равны:

$$\lambda_i = \lambda_1 K_M^i. \quad (4.9.18)$$

Выбор коэффициентов K_M^i целесообразно согласовать с применяемой системой счисления. Так, при использовании десятичной системы выбирается $K_M = 10$. И тогда

$$\omega_{i+1} = \omega_1 [1 - (0,1)^i]. \quad (4.9.19)$$

В этом случае для образования, например четырехдекадной системы фазовых сетей потребуется следующий набор частот:

$$\begin{aligned} \omega_1 \\ \omega_2 &= \omega_1 (1 - 0,1) = 0,9\omega_1; \\ \omega_3 &= \omega_1 (1 - 0,01) = 0,99\omega_1; \\ \omega_4 &= \omega_1 (1 - 0,001) = 0,999\omega_1. \end{aligned}$$

При работе на ЦВМ удобно пользоваться двоичной системой. В этом случае при согласовании масштабов фазовых сетей нужно будет принять $K_M = 2$. При этом набор масштабных частот должен включать значения, относящиеся как числа $1,0 : 0,5 : 0,75 : 0,875 : 0,9375$ и т. д.

В общем случае, если требуется согласовать сети с максимальным отношением масштабов G , потребуется всего

$$n = 1 + \log_{K_M} G \quad (4.9.20)$$

сетей или масштабных частот. При этом $(n-1)$ частот, используемых для устранения неоднозначности, займут интервал

$$f_1 \left(\frac{1}{K_M} - \frac{1}{K_M^{\log_{K_M} G}} \right),$$

где f_1 — масштабная частота точной сети.

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

§ 5.1. ПРОЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

Системы космической навигации могут использоваться в таких условиях, когда будут проявляться эффекты, учитываемые специальной и общей теорией относительности. Первые из них связаны с явлением изменения расстояний и течения времени, вызванным относительным движением систем отсчета, вторые — с явлением изменения течения времени под воздействием гравитационных полей.

Релятивистские явления выступают тем ярче, чем ближе скорость движения к скорости света и чем сильнее меняются гравитационные поля по трассе полета.

Степень проявления эффектов специальной теории относительности может характеризоваться коэффициентом α в формулах преобразования Лоренца (2.3.3). Он пропорционален квадрату отношения скоростей:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \approx \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (5.1.1)$$

При существующем уровне космической техники, когда полеты совершаются в пределах Солнечной системы, скорости относительного движения лежат в пределах до 100 км/сек, и параметр β значительно меньше единицы. Так, космический корабль, который отлетает со второй космической скоростью $v_{II} = 11,2$ км/сек от Земли, совершающей свое орбитальное движение со скоростью $v_z = 30$ км/сек, сможет в околосолнечном пространстве перемещаться со скоростью $v = 41,2$ км/сек, чему будет соответствовать

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{4,1 \cdot 10}{3 \cdot 10^8} \right)^2 = 10^{-8}.$$

Эффекты такого рода хотя и малы, но уже приближаются по порядку величины к точности современных расчетов и измерений и в ряде случаев должны учитываться.

Существенно большие скорости потребуются при реализации межзвездных полетов. При полете даже к ближайшей от Земли звезде, так называемой «ближайшей Центавра», космический аппарат должен развить скорость, соизмеримую со скоростью света. В этих условиях космонавтика встретится с сильными релятивистскими явлениями.

Однако межзвездные полеты — дело отдаленного будущего, так как пока еще не определены реальные пути создания требуемых энергетических установок. Основное внимание следует поэтому уделить рассмотрению только тех явлений, которые имеют определенное практическое значение.

Эффекты специальной теории относительности имеют следующие особенности.

В процессе измерений, выполняемых в радионавигационных системах, используются вполне определенные единицы времени (в системах навигационно-пространственных) и длины (в системах навигационно-временных) и результаты измерений выражаются в соответствующих им величинах. Поверхности положения, фиксируемые в некоторой координатной системе, также оказываются заданными в принятом масштабе мер. Однако измеренные величины редко используются в тех системах отсчета, в которых они получены. Обычно результаты измерений, найденные в одной системе координат, приводятся затем к новой системе отсчета, которая к тому же пребывает в состоянии относительного движения. Так, измерения, проведенные в топоцентрических координатных системах, используются далее для описания движения КА в системе геоцентрической или гелиоцентрической. По результатам измерений, выполненных в какой-либо бортовой системе (например, в геоэксцентрической), приходится оценивать положение КА в системе гелиоцентрической, причем в будущем, при более протяженных космических полетах, быть может, окажется необходимым переходить к галактоцентрическим системам.

Таким образом, возникают задачи перевода из одной системы отсчета в другую различных навигационных параметров — расстояний, относительных скоростей, промежутков времени.

В классической механике используются преобразования Галилея (см. п. 2.3.2), относительно которых указанные выше параметры рассматриваются как величины инвариантные.

В более общем случае, имея дело со взаимно движущимися системами отсчета, приходится пользоваться преобразованиями, согласующимися с постулатом специальной теории относительности о независимости скорости света от движения системы отсчета. С этих позиций четырехмерный пространственно-временной интервал s является инвариантным лишь по отношению к преобразованиям Лоренца (см. п. 2.3.3).

Движение системы отсчета своеобразно влияет на эффект Доплера. Явление Доплера вызывается влиянием относительного

движения источника и приемника сигналов: а) на пересчет моментов излучения в моменты приема и б) на изменение масштаба времени в движущейся системе отсчета. Следствием первого является пропорциональность доплеровского смещения частоты радиальной составляющей скорости v_r ; в результате второго появляется релятивистская компонента доплеровского смещения, зависящая от отношения скорости движения v и скорости света c . В условиях приземной навигации, осуществляемой с применением радиотехнических и лазерных устройств, погрешности измерителей в ряде случаев оказываются соизмеримыми с релятивистской компонентой.

Различие в гравитационных потенциалах конечных точек радиотрассы приводит к смещению частоты. Гравитационное смещение при продолжительном околоземном полете может приводить к погрешностям, превышающим ошибки за счет нестабильности бортовых эталонов частоты.

Изменение масштабов длины и времени при переходе от одной из относительно движущихся систем отсчета к другой приводит к эффектам, которые при работе наиболее точных радионавигационных систем в пределах Солнечной системы по порядку величины близки к ошибкам измерений.

Своеобразное течение времени в космическом полете можно в настоящее время обнаружить даже для околоземных условий.

Относительное движение навигационной точки и КА и значительная протяженность космических радиотрасс приводит к деформации поверхностей положения. Так, сферическая поверхность, соответствующая дальномерному методу, превращается в эллипсоидальную.

В двух относительно движущихся средах направления на одну и ту же удаленную точку (звезду) не совпадают. Это приводит к явлению астрономической абберации, с которым следует считаться при использовании методов космической навигации по естественным источникам излучения.

§ 5.2. ДОППЛЕРОВСКОЕ СМЕЩЕНИЕ ЧАСТОТЫ

Эффект Доплера проявляется в тех физических процессах, в которых прямо или косвенно производится сравнение интервалов времени во взаимно движущихся системах отсчета. Доплеровское смещение частоты наблюдается при использовании звуковых, световых и радиосигналов.

В акустике изменение частоты зависит как от относительного движения конечных аппаратов, так и от скорости их движения относительно среды. В противоположность этому в оптике и радиотехнике оно зависит только от относительной скорости источника и приемника колебаний, так как согласно основному постулату Эйнштейна скорость электромагнитных колебаний не меняется при

движении излучателя и наблюдателя. В этих случаях доплеровский эффект следует из теории относительности и аналитическая его формулировка вытекает из преобразований Лоренца.

Связь между частотами, регистрируемыми в движущейся и покоящейся системах отсчета, дается выражением [31]:

$$f' = f \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)^{-1}, \quad (5.2.1)$$

где f' — принимаемая частота; f — излучаемая частота; v — абсолютная величина скорости; c — скорость света; v_r — радиальная составляющая скорости v .

Доплеровское смещение частоты составляет при этом:

$$F_\partial = f \left[\sqrt{1 - \beta^2} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)^{-1} - 1 \right]. \quad (5.2.2)$$

Влияние v и v_r на формирование F_∂ различное. Если принять $v_r = 0$, то остается только составляющая*, вызванная неодинаковым течением времени в движущихся системах. В этих условиях

$$F_{\partial n} = f (\sqrt{1 - \beta^2} - 1) \approx -\frac{1}{2} f \beta^2. \quad (5.2.3)$$

Выражение (5.2.3) позволяет оценить величину эффекта. Так, при скорости $v_1 = 8 \cdot 10^3$ м/сек и рабочей частоте $f_1 = 10^9$ гц имеет место $F_{\partial n1} = 0,4$ гц. В случае же значений скорости и частоты, близких к предельным для современной радионавигации: $v_2 = 16,7 \cdot 10^3$ м/сек и $f_2 = 10^{10}$ гц, величина рассматриваемой составляющей $F_{\partial n2}$ будет равна 15,5 гц. Между тем, влияние радиальной составляющей значительно больше. Для тех же значений скоростей и частот имеем соответственно $F_{\partial r1} = 26,7$ кгц и $F_{\partial r2} = 557$ кгц. Естественно, что при использовании лазерных измерителей возрастут и $F_{\partial n}$ и $F_{\partial r}$.

В условиях околоземной радионавигации пренебрегают влиянием релятивистского члена β^2 и пользуются упрощенным выражением

$$F_\partial = -f \frac{v_r}{c} + f \left(\frac{v_r}{c} \right)^2 - \dots \approx -f \frac{v_r}{c} = -\frac{v_r}{\lambda}. \quad (5.2.4)$$

При распространении радиоволн в свободном пространстве v_r является производной по времени от геометрически кратчайшего расстояния между передатчиком и приемником:

$$v_r(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}(t).$$

* Эта составляющая в литературе именуется «поперечным доплеровским эффектом», поскольку $v_r = 0$ имеет место при движении в «поперечном» направлении от наблюдателя.

Точное значение $\dot{r}(t)$ было приведено выше в § 4.3 и 4.4. [см. выражения (4.3.10), (4.3.22) и (4.4.6)].

Приближенное выражение для функции $\dot{r}(t)$, соответствующее предположению о движении РНТ относительно неподвижного наблюдателя вблизи траверза с постоянной скоростью по прямолинейной траектории, имеет вид [16, 32]:

$$F_{\partial} = \pm \frac{v}{\lambda} \left| \left(\frac{l_0}{v} - t \right) \left[\left(\frac{l_0}{v} - t \right)^2 + \left(\frac{r_0}{v} \right)^2 \right]^{-1/2} \right|, \quad (5.2.5)$$

где r_0 — траверзное расстояние*; l_0 — удаленность от траверза в момент начала наблюдения.

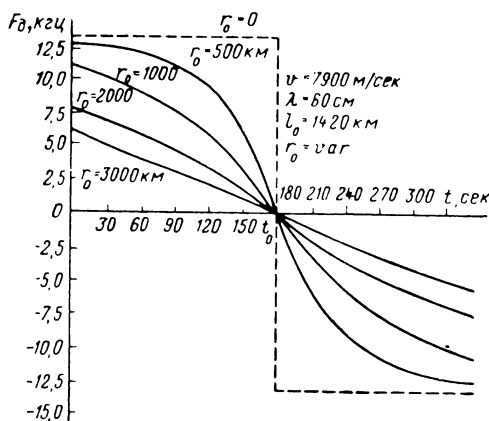


Рис. 5.2.1. Графики зависимости $F_{\partial}(t)$.

В этой формуле знак плюс соответствует условию $0 \leq t < t_0$ (сближение), а знак минус — условию $t_0 < t < \infty$ (удаление), причем момент t_0 определяет геометрический траверз.

Формула (5.2.5) показывает, что доплеровская частота зависит как от v и λ , так и от t , r_0 и l_0 . Зависимость от времени — нелинейная.

Графики зависимости $F_{\partial}(t)$ изображены на рис. 5.2.1. При их расчете были приняты следующие типичные параметры: $v = 7900$ м/сек; $l_0 = 1420$ км; $\lambda = 60$ см; $r_0 = 500, 1000, 2000$ и 3000 км.

Графики показывают, что кривые $F_{\partial}(t)$ в точке t_0 делятся на две ветви, симметричные относительно этой точки. Левая ветвь

* Термин «траверзное расстояние» представляется более четким, чем употребляющиеся в литературе наименования «параметр» или «расстояние наименьшего удаления».

относится к положительным значениям F_{∂} , правая — к отрицательным.

В момент t_0 доплеровская частота переходит через нуль. В этот момент передатчик находится на кратчайшем расстоянии от приемника, равном r_0 . Наблюдатель оказывается расположенным на траверзе передатчика. На рис. 5.2.1 пунктиром показана кривая для случая прохождения траектории через приемный пункт ($r_0 = 0$). Для нее $F_{\partial} = \pm v/\lambda$.

Все кривые при $r_0 \neq 0$ в пределе стремятся к значению $|F_{\partial}| = \frac{v}{\lambda}$. Однако при увеличении r_0 наклон кривых уменьшается, а их линейный участок становится более протяженным во времени.

Чтобы определить протяженность линейного участка кривой $F_{\partial}(t)$, удобно начало отсчета перенести в точку t_0 , что равносильно требованию $t_0 = 0$. Тогда интервал линейного изменения функции $F_{\partial}(t)$ может быть найден из условия пренебрежимости квадратичным членом от t в выражении (5.2.5):

$$t^2 \ll \left(\frac{r_0}{v} \right)^2, \quad (5.2.6)$$

поскольку при этом доплеровская частота становится линейной функцией времени:

$$F_{\partial} = - \frac{v^2}{\lambda r_0} t. \quad (5.2.7)$$

Если положить

$$t^2 = \alpha \left(\frac{r_0}{v} \right)^2, \quad (5.2.8)$$

где $\alpha \ll 1$, и в выражении (5.2.5) t заменить в соответствии с условием (5.2.8), то получится выражение для величины, до которой доплеровская частота успеет дорасти к концу линейного участка кривой:

$$|F_{\partial}| = \sqrt{\alpha} \frac{v}{\lambda} = \sqrt{\alpha} F_{\partial \max}. \quad (5.2.9)$$

Таким образом, функция $F_{\partial}(t)$, независимо от значения r_0 , на линейном участке нарастает до вполне определенной величины, составляющей $\sqrt{\alpha}$ от предельного значения $F_{\partial \max}$.

Величина r_0 влияет, однако, на протяженность линейного участка, как это непосредственно следует из условия (5.2.6). Так, например, если положить $\alpha = 0,02$ и скорость движения передатчика v принять равной $7,9 \text{ км/сек}$, то получим следующее выражение для продолжительности линейного нарастания функции $F_{\partial}(t)$:

$$t_{\text{лин (сек)}} = 0,14 \left(\frac{r_0}{v} \right) \approx 0,02 r_0 (\text{км}). \quad (5.2.10)$$

В соответствии с данным выражением линейные участки для расстояний $r_0 = 500, 1000, 2000$ и 3000 км будут иметь длину соответственно $t_{\text{лин}} = 9, 18, 36$ и 54 сек .

Значительный интерес представляет скорость изменения доплеровской частоты $\frac{d}{dt}(F_{\partial}) = F_{\partial}$. На линейном участке кривой

величину $\dot{F}_\partial$ можно найти дифференцированием по времени выражения (5.2.7), что дает

$$\dot{F}_\partial = -\frac{v^2}{\lambda r_0}. \quad (5.2.11)$$

Отсюда, кстати, получается выражение для нахождения r_0 по $\dot{F}_\partial$:

$$r_0 = \frac{v^2}{\lambda |\dot{F}_\partial|}. \quad (5.2.12)$$

Для рассматриваемого диапазона расстояний $r = 500 \div 3000$ км и принятых выше величин v и λ скорость изменения доплеровской частоты составит:

$$\dot{F}_\partial = (208,0 \div 34,7) \text{ гц/сек.}$$

С ростом r_0 производная $\dot{F}_\partial$ уменьшается. Ее изменение можно оценить, продифференцировав выражение (5.2.11) по r_0 , что дает:

$$\frac{d}{dr_0} (\dot{F}_\partial) = \frac{v^2}{\lambda r_0^2}. \quad (5.2.13)$$

Выражение (5.2.13) показывает, что производная по r_0 от крутизны кривой $\dot{F}_\partial$ убывает пропорционально квадрату расстояния r_0 . Так, вблизи расстояния $r_0 = 500$ км крутизна изменяется с расстоянием значительно быстрее, чем вблизи расстояния $r_0 = 3000$ км.

Влияние скорости v на изменение крутизны кривой $F_\partial(t)$ находится дифференцированием выражения (5.2.11) по v . В результате дифференцирования получим:

$$\frac{d}{dv} (\dot{F}_\partial) = -2 \frac{v}{\lambda r_0}. \quad (5.2.14)$$

Отсюда видно, что производная изменяется прямо пропорционально скорости v . При скорости вблизи $v = 7900$ м/сек, расстоянии $r_0 = 1000$ км и длине волны $\lambda = 60$ см изменение крутизны будет характеризоваться значением производной

$$(\dot{F}_\partial)'_v = 0,026 \frac{\text{гц/сек}}{\text{м/сек}}.$$

Что касается абсолютного значения доплеровской частоты, то при космических скоростях F_∂ имеет значительную величину. Так, на рис. 5.2.1 кривые стремятся к величине $F_\partial = 13,167$ кгц.

В зависимости от соотношения скорости v и длины волны λ доплеровская частота может меняться в значительных пределах. На рис. 5.2.2 представлены зависимости $F_\partial(\lambda)$, рассчитанные для различных значений скорости. Диапазон волн $\lambda = 3 \div 300$ см ограничен справа участком, в котором уже заметно сказывается влияние ионосферы, а слева — участком, в котором начинает сказывать-

ся поглощение в тропосфере. Графики 1, 2 относятся к скоростям, достигнутым или достижимым в ближайшее время в авиации, $v = (1 \div 3)$ М, графики 3, 4 — к уже достигнутым с помощью ракет первой и второй космическим скоростям, график 5 — к третьей космической скорости, а график 6 — к скорости, которая может иметь место при космических полетах в пределах Солнечной системы.

При приеме радиосигналов с объекта, перемещающегося с первой космической скоростью,

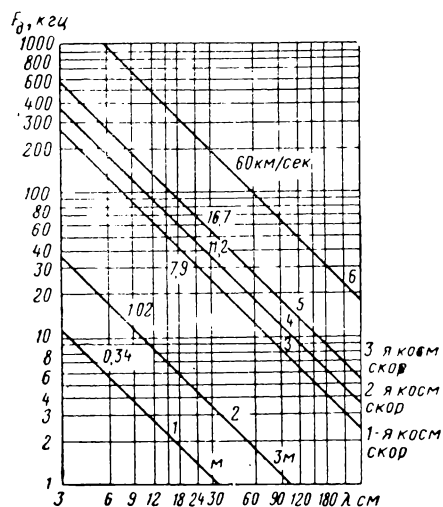


Рис. 5.2.2. Графики зависимости $F_d(\lambda)$.

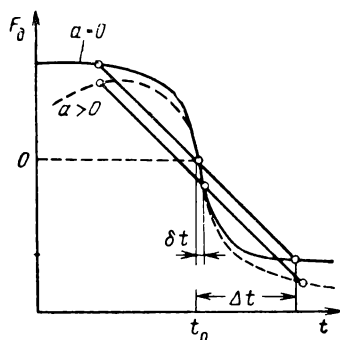


Рис. 5.2.3. Искажение кривой $F_d(t)$ при наличии постоянного ускорения.

доплеровская частота в пределах диапазона волн $\lambda = 3 \div 300$ см (частота $f = 10\,000 \div 100$ МГц) изменяется от $F_{d\max} = 263,33$ кГц до $F_{d\min} = 2,63$ кГц.

Приближенная зависимость (5.2.5) относится к случаю равномерного прямолинейного движения. Вопрос о влиянии на изменение доплеровской частоты ускорения и кривизны траектории проанализирован в работе [16].

При равномерно-ускоренном движении по прямолинейной траектории в момент t_0 (траверзное положение) доплеровское смещение, как и при равномерном движении, равно нулю. Следовательно, условие $F_d = 0$ по-прежнему соответствует прохождению спутника на кратчайшем расстоянии. Однако кривая $F_d(t)$ перестает быть симметричной относительно точки перегиба. На рис. 5.2.3 показан примерный вид такой кривой, причем кривая для ускоренного движения (ускорение $a > 0$) сопоставлена с кривой для равномерного движения ($a = 0$). На рисунке показаны секущие, подобранные так, что их левые и правые отрезки равны. Видно, что при симметричной кривой секущая делит кривую $F_d(t)$ в момент t_0 , тогда как при несимметричной кривой соответствующая секущая

будет делить ее в момент, отстоящий от t_0 на величину δt . При ускорении, равном единицам $м/сек^2$, и движении с первой космической скоростью отклонение δt составляет единицы секунд.

Рассмотрение движения по криволинейной траектории, аппроксимирuемой дугой круга с радиусом, равным радиусу кривизны в точке траверза, показывает, что закон изменения доплеровской частоты вблизи t_0 остается тем же, что и при прямолинейном движении. Однако в формуле для смещения частоты место множителя v занимает произведение

$$v \sqrt{\frac{R_0 - r_0}{R_0}} \approx v \left(1 - \frac{r_0}{2R_0} \right), \quad (5.2.15)$$

где R_0 — радиус кривизны. Это эквивалентно приуменьшению скорости движения v , причем по известным r_0 и R_0 данное приуменьшение нетрудно учесть.

При работе космических навигационных систем доплеровский сдвиг частоты будет формироваться не в свободном пространстве, а в неоднородной дисперсной среде, так как радиолиния РНТ — КА проходит через ионизированные слои атмосферы. В этом случае появится дополнительная составляющая в доплеровской частоте — рефракционная составляющая ΔF_θ [81].

Диапазон изменения доплеровской частоты возрастет с увеличением скорости полета. В отдаленном будущем, когда начнут приближаться к субсветовым скоростям, принимаемые навигационные сигналы будут значительно отличаться от излучаемых, что предъявит особые требования к широкополосности приемных устройств.

При использовании сигналов от естественных источников видимого излучения астронавигаторы вследствие ограниченности полосы пропускания встретятся со своеобразным явлением исчезновения известных звезд и появления новых, ранее не виданных. Причиной этого явится настолько большое доплеровское смещение, при котором прежде обнаруживаемые спектральные составляющие выйдут за пределы видимого участка, в то время как до этого не наблюдаемое излучение переместится внутрь этого участка спектра.

Оказывается, что в различных направлениях относительно оси полета характер смещения будет не одинаковым.

Во всех направлениях, которые образуют с осью полета критический угол α_0 , являющийся функцией β , смещения спектра не происходит. Внутри конуса с раствором $2\alpha_0$ будет обнаружено смещение в коротковолновую часть спектра, а за пределами конуса — в длинноволновую его часть. Заметим, что при $\beta \ll 1$ этот конус вырождается в траверзную плоскость (ср. § 4.2).

Расчеты [30] показывают, что в системе отсчета, движущейся со скоростью $v = 0,866 c$, угол $\alpha_0 = 125^\circ 10'$. Величины же смещений частоты оказываются значительными. Если в неподвижной системе излучение звезд фиксировалось как фиолетовое (длина волны $4000 \text{ \AA}$), как зеленое ($5000 \text{ \AA}$) или как красное ($8000 \text{ \AA}$), то в движущейся системе отсчета внутри конуса (вспереди корабля) красные звезды будут видны как зеленые, зеленые — как фиолетовые, а последние выйдут за пределы видимого участка. В то же время ранее не видимые инфракрасные звезды ($14950\text{—}29900 \text{ \AA}$) будут наблюдаться и оцениваться как красные.

За пределами конуса (позади корабля) произойдет обратный процесс: ранее не обнаруживаемые ультрафиолетовые звезды ($1070\text{—}2140 \text{ \AA}$) попадут в фиолетовую часть спектра, фиолетовое излучение будет регистрироваться как зеленое, зеленое — как красное, а последнее выйдет за границы наблюдаемого диапазона волн.

Наибольшим смещение будет в направлении полета и в противоположном направлении.

Навигационная методика должна будет учитывать это явление.

§ 5.3. ГРАВИТАЦИОННОЕ СМЕЩЕНИЕ ЧАСТОТЫ

Наличие полей тяготения влияет на свойства пространства и времени. В результате этого периоды колебаний сигналов, испускаемых из точек с различными гравитационными потенциалами, будут неодинаковы и отличны от периода их колебаний при отсутствии полей тяготения. Если собственный период колебаний обозначить через T_0 , гравитационные потенциалы точек — через U_1 и U_2 , то разность периодов T_2 и T_1 колебаний, идущих из этих точек, выразится [31]:

$$T_2 - T_1 = T_0 \frac{U_2 - U_1}{c^2}. \quad (5.3.1)$$

В гравитационном поле Земли разность потенциалов определяется разностью высот ΔH соответствующих точек. Поэтому частота какого-либо генератора будет изменяться с изменением положения в околоземном пространстве.

Относительное смещение периода колебаний (а следовательно, и частоты) двух конструктивно подобных и одинаково настроенных генераторов, размещенных на различных высотах относительно поверхности Земли, выразится как

$$\xi = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{g}{c^2} \Delta H, \quad (5.3.2)$$

где $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$.

В соответствии с этим гравитационное смещение частоты генератора, размещенного на КА с высотой орбиты, например, $H = 3000 \text{ км}$, составит:

$$\xi = \frac{9,8}{(3 \cdot 10^8)^2} \cdot 3 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^{-10}.$$

Такое смещение частоты может оказаться заметным, так как современная радиокосмическая техника уже подошла к применению источников колебаний с относительной нестабильностью $\xi = 10^{-10} \div 10^{-11}$.

Изменение гравитационного потенциала вдоль радиотрассы Земля — КА сопровождается относительным движением ее оконечных пунктов, поэтому гравитационное смещение выступает со-

вместно с доплеровским. Можно получить выражение [74] для частотного смещения, вызванного обоими эффектами, в виде, который явится обобщением зависимости (5.2.1):

$$f' = f \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 + 2 \frac{\Delta U}{c^2} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)^{-1}}, \quad (5.3.3)$$

где ΔU — положительная разность гравитационных потенциалов.

Представляет интерес техническая возможность непосредственного измерения гравитационного смещения. Трудность состоит в том, что сопутствующая гравитационному смещению нерелятивистская составляющая доплеровского сдвига оказывается на несколько порядков больше его. Для регистрации только этого смещения нужно скомпенсировать указанную составляющую доплеровского сдвига. Возможна автоматическая ее компенсация, один из вариантов которой был экспериментально подтвержден при использовании высокостабильного генератора, установленного на ИСЗ.

Идея компенсации состоит в следующем. Проходящий по трассе Земля — КА сигнал частоты f при движении в каждом из направлений приобретает одинаковый сдвиг F_∂ . Поэтому если перед излучением вводить поправку (уменьшая частоту передатчика) — $F_{\partial\kappa}$, то появляющийся в процессе прохождения сигнала доплеровский сдвиг будет скомпенсирован при условии, что $F_\partial = F_{\partial\kappa}$, и приемник зарегистрирует номинальную частоту f . Чтобы достичь точной компенсации, поправку формируют с использованием фактического значения F_∂ . Для этого с Земли излучают частоту f , которая принимается на борту КА как $f' = f + F_\partial$. Здесь далее, используя местный генератор той же частоты f , формируют новые колебания по правилу

$$f_{\text{отв}} = 2f - f' = f - F_\partial \quad (5.3.4)$$

и излучают их на Землю. При распространении в обратном направлении происходит автоматическая компенсация:

$$f'_{\text{отв}} = f_{\text{отв}} + F_\partial = f. \quad (5.3.5)$$

На искусственном спутнике Земли «Космос-97», выведенном в ноябре 1965 г. на орбиту с высотой в апогее 2160 км и в перигее 221 км, был установлен молекулярный генератор на пучках молекул аммиака с относительной нестабильностью частоты порядка 10^{-11} за сутки [74]. Подобные генераторы размещались и на Земле. В процессе двусторонней связи в непрерывном режиме в канале КА — Земля автоматически вводилась поправка на доплеровский сдвиг в соответствии с (5.3.4). При этом остаток нерелятивистской составляющей имел величину, меньшую 10^{-5} от ее значения, в результате чего оказалось возможным измерять частоту бортового генератора с точностью до относительных величин 10^{-11} .

Поскольку работа велась в дециметровом диапазоне, для реализации требуемой точности потребовалось учитывать влияние ионосферы. Для этого применялся второй, когерентный сигнал, с помощью которого находились, по существу, рефракционные составляющие ΔF_0 и вычислялись ионосферные поправки к регистрируемой разности частот бортового и наземного генераторов.

§ 5.4. ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБОВ ДЛИНЫ И ВРЕМЕНИ

В условиях, когда $\beta \ll 1$, координатные переходы описываются галилеевыми преобразованиями [см. выражение (2.3.2)]. Инвариантом таких преобразований является пространственный интервал (расстояние между точками), выражаемый через суммы квадратов координатных разностей.

Так, если в системах $X_1X_2X_3$ и $X'_1X'_2X'_3$, движущихся с относительной скоростью v так, что их оси OX_1 и OX'_1 совпадают, взять точки A и B , то, пользуясь преобразованиями (2.3.2) в обеих системах, получим одинаковые выражения для расстояний $r_{AB} = x_{1B} - x_{1A}$, а также $r'_{AB} = x'_{1B} - x'_{1A} = (x_{1B} + vt) - (x_{1A} + vt) = x_{1B} - x_{1A}$. Наряду с этим промежутки времени между моментами, когда события происходят в точках A и B , в обеих системах отсчета будут одинаковыми и равными $t_B - t_A$.

Когда проявляются эффекты специальной теории относительности и преобразования совершаются по формулам Лоренца [выражение (2.3.3)], инвариантом преобразований оказывается четырехмерный интервал Δs [выражение (2.3.1)], тогда как расстояние между точками и временной интервал между событиями в этих точках по отдельности изменяются с переходом от одной системы отсчета к другой. В этом можно убедиться, обратившись ко введенным выше относительно движущимся системам. Для данного случая, когда скорость v направлена по оси OX_1 , лоренцовы преобразования записываются в виде (2.3.4).

Пусть с системой $X_1X_2X_3$ скреплен некоторый предмет и две его точки A и B совпадают с осью OX'_1 . Отрезок между A и B обозначим R_0 , и его длина в системе $X'_1X'_2X'_3$ будет $R_0 = x'_{1B} - x'_{1A}$. Итак, в первой системе отмечена длина R_0 . В системе же $X_1X_2X_3$, относительно которой движется система $X'_1X'_2X'_3$ вместе с предметом, за длину принимается расстояние между точками x_{1A} и x_{1B} в тот момент времени t , когда с этими точками совпадут фиксируемые точки A и B . Важно обратить внимание на то, что эти совпадения считаются нами одновременными в системе $X_1X_2X_3$, но тогда в движущейся системе они не могут быть одновременными. Длина в покоящейся системе выражается

$$R_* = x_{1B}(t) - x_{1A}(t). \quad (5.4.1)$$

Воспользовавшись преобразованиями (2.3.4), можно $x_{1A}(t)$ выразить через x'_{1A} , а $x_{1B}(t)$ — через x'_{1B} , и подставить их в соотношение (5.4.1). Это дает

$$R_* = (x'_{1B} \sqrt{1 - \beta^2} + vt) - (x'_{1A} \sqrt{1 - \beta^2} + vt) = R_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (5.4.2)$$

Таким образом, длина отрезка R_* в неподвижной системе оказывается меньше его длины R_0 , регистрируемой в движущейся системе, с которой предмет соединен. Это дает основание считать, что при регистрации размеров тел в некоторой системе, относительно которой эти тела движутся, наблюдается сокращение размеров в направлении движения.

Пусть далее с системой $X_1 X_2 X_3$ связаны часы и время регистрируется между двумя фиксированными положениями стрелки на циферблате. Если первому положению стрелки соответствовало время t'_1 , а второму — t'_2 , то интервал, отсчитываемый по этим часам, составит $T_0 = t'_2 - t'_1$. Перейдя к отсчету времени по часам, находящимся в системе $X_1 X_2 X_3$, можно тем же положениям стрелки сопоставить моменты t_1 и t_2 и задать интервал $T_* = t_2 - t_1$.

Преобразования Лоренца дают переход от t_1 к t'_1 и от $t_2 = t_1 + T_*$ — к $t'_2 = t'_1 + T_0$. Временной интервал T_* находится при использовании последнего выражения из (2.3.4). Подстановка дает

$$\begin{aligned} T_* = t_2 - t_1 &= \left(t'_2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{v}{c^2} x_1 \right) - \left(t'_1 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{v}{c^2} x_1 \right) = \\ &= T_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Таким образом, в неподвижной системе между двумя положениями стрелки истекает меньшее время T_* , чем время T_0 в движущейся системе. Стало быть, часы в движущейся системе как бы замедляют ход по сравнению с часами в системе неподвижной.

Сокращение размеров и замедление течения времени приводят к тому, что в относительно движущихся системах отсчета масштабы длины и времени оказываются неодинаковыми.

Влияние релятивистского эффекта будет зависеть от величины β [см. выражение (2.3.1)]. При $\beta^2 \ll 1$ оно, разумеется, ничтожно мало. Так, движение системы отсчета за счет вращения Земли приводит к незначительному эффекту. Дело в том, что начала топосцентрических систем отсчета будут перемещаться относительно геоцентрической несвязанной системы с окружной скоростью $v = 0,463 \cos \varphi$ км/сек, где φ — географическая широта. В этом случае релятивистский член будет иметь величину:

$$\beta = \frac{0,46}{3 \cdot 10^5} \approx 1,5 \cdot 10^{-6},$$

что приведет к поправкам, лежащим ниже уровня погрешностей современных измерительных средств околоземной навигации.

Наряду с этим при работе космических радионавигационных систем могут возникать условия, когда высокая скорость относительного движения заставляет учитывать члены порядка β^2 . Это будет иметь место при учете орбитального движения Земли [33].

Если одна из систем отсчета связана с Землей, перемещающейся по своей орбите со скоростью $v_3 = 29,76$ км/сек, то параметр β^2 приобретает величину

$$\beta^2 = \left(\frac{29,8}{3 \cdot 10^5} \right)^2 \approx 10^{-8}.$$

Такое значение β^2 приводит к поправкам, сопоставимым с погрешностями измерений, уже учитываемыми при расчетах.

Орбитальное движение Земли может оказывать влияние на расчеты параметров движения КА в гелиоцентрической (солнечной) системе координат. В самом деле, при навигационных измерениях с помощью наземных радиотехнических средств используются, так сказать, «земные» эталоны времени и длины, и результаты измерений будут выражены в единицах этих эталонов. Однако относительно Солнечной системы отсчета эти эталоны окажутся движущимися, следовательно, их размеры представятся уже измененными: единица времени будет увеличенной, а единица длины — уменьшенной.

Чтобы достичь необходимой точности в расчетах параметров движения КА (или соответственно его координат), потребуются в результаты измерений внести релятивистские поправки. При этом следует иметь в виду, что в земной системе отсчет времени получается заниженным, а отсчет расстояний — завышенным.

В соответствии с этим найденные по оценке времени такие величины как размеры орбиты, скорости и периоды обращения надлежит увеличить, введя множитель $(1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Заметим, что при этом нуждаются в коррекции не только результаты измерения расстояний и радиальных скоростей, но также и разностей расстояний и углов. Вызывается это тем, что размеры наземных базовых линий в гелиоцентрической системе отсчета представляются уменьшенными.

В будущем, при полетах со скоростями, близкими к скорости света, навигатор может встретиться еще с одним релятивистским явлением — искажением формы встречаемых тел.

Из преобразований Лоренца следует, что проносящаяся мимо наблюдателя сфера превращается в эллипсоид, сжатый в направлении движения, и имеющий соотношение осей $\sqrt{1 - \beta^2}$: 1. Такая конфигурация соответствует истинному расположению точек тела для какого-либо момента времени по часам неподвижного наблюдателя. Это, однако, не означает, что наблюдаемый вид тела будет таким же. Дело в том, что в каждый момент времени будут регистрироваться разновременные положения точек движущегося тела, так

как волны тратят неодинаковое время на распространение от различных его точек.

Соответствующий анализ [30] показывает, что видимой формой сферы явится овал, который по мере прохождения мимо наблюдателя поворачивается, а также сильно меняет форму и скорость движения. Пока сфера наблюдается издали, она представляется эллипсоидом, сильно вытянутым по направлению движения. Приближаясь, она превращается в овал и поворачивается острым углом к наблюдателю, затем на большом удалении она вновь устремляется к своей первоначальной форме, но будет уже сплюснута по оси движения.

Разумеется, при известной скорости движения можно восстановить действительную форму тела, перейдя к неподвижной системе отсчета.

§ 5.5. ТЕЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ В КОСМИЧЕСКОМ ПОЛЕТЕ

Признание того факта, что в движущейся системе отсчета часы идут медленнее, чем в покоящейся, и что гравитационные поля влияют на исчисление отрезков времени, приводит к выявлению особенностей течения времени в космическом полете.

Отправляющийся в полет КА по отношению к Земле представляется движущейся системой отсчета, и его бортовые часы должны идти медленнее, чем земные. В соответствии с этим на КА должны замедляться все технологические циклы, а также биологические и физиологические ритмы. Это замедление тем значительнее, чем более скорость полета приближается к скорости света. Повышение скорости до субсветовых значений и увеличение протяженности маршрутов приводят к весьма значительной разнице в оценке продолжительности полета по земным и бортовым часам.

Наибольший психологический эффект производит вывод о том, что один из близнецов может возвратиться из космического полета, оставаясь молодым, тогда как второй, находясь на Земле, за это время сильно состарится. «Парадокс часов» или «парадокс близнецов» в последние годы, в связи с открывшимися перспективами длительных космических путешествий, привлекает к себе значительное внимание [70].

Следует еще раз подчеркнуть, что рассуждения о полетах со скоростями, близкими к скорости света, представляются пока что фантастическими. Анализировать данный вопрос представляется уместным применительно к меньшим скоростям, которые принципиально достижимы на основе ядерного горючего.

Пусть в точке A в неподвижной инерциальной системе отсчета $X_1X_2X_3$ находятся часы, отсчитывающие время t_* , а другие часы, одинаковые с первыми и регистрирующие время t_0 , движутся вместе с системой $X'_1X'_2X'_3$ из точки A в точку B со скоростью v (рис. 5.5.1). Пройдя весь путь между A и B , система $X'_1X'_2X'_3$ резко замедляет движение, и без остановки набрав скорость противоположного знака — v , движется в обратном направлении. Считаем, что изменение скорости v на $-v$ происходит за достаточно

малый интервал времени по сравнению с прямолинейным и равномерным движением на трассе.

При возвращении часов в точку A они покажут время t_0 , тогда как покоящиеся часы зарегистрируют время t_* . Эти показания можно высчитать, пользуясь зависимостью (5.4.3), если учесть, что по «быстрым» земным часам будет снят отсчет t_* , больший чем отсчет t_0 по «медленным» космическим часам. Так, если по бор-

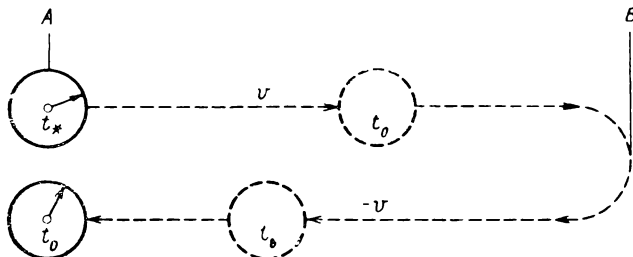


Рис. 5.5.1. К замедлению времени в космическом полете.

товым часам истекло t_0 , то неподвижные часы отмеряют $t_* = t_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$. Поэтому после возвращения бортовые часы отстанут от наземных на

$$\Delta t = t_* - t_0 = t_* (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \approx \frac{1}{2} \beta^2 t_*. \quad (5.5.1)$$

Последнее выражение приближенно в том отношении, что не учитывает поправки к t_0 на время ускоренного движения космических часов, которой пренебрегли в силу принятой выше оговорки.

Важно подчеркнуть что отставание движущихся часов является реальным явлением, а не следствием выбранного способа измерений. Может показаться, что в силу принципа относительности отстающими могли бы быть любые из часов, так как движение КА относительно Земли равнозначно движению Земли относительно КА. Однако в действительности системы $X_1X_2X_3$ и $X'_1X'_2X'_3$ не равноправны, поскольку система $X_1X_2X_3$ остается все время инерциальной, тогда как система $X'_1X'_2X'_3$ перестает быть инерциальной на время торможения и изменения направления движения. А именно при ускоренном движении ход часов меняется, что можно объяснить, исходя из замены эффекта ускорения эффектом воздействия гравитационного поля.

Справедливо утверждать, что в течение времени, когда обе системы движутся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, они оказываются равноправными. В этот период можно считать, что с точки зрения системы $X'_1X'_2X'_3$ земные часы не уходят вперед, а отстают, причем отстают как раз на время Δt , выражаемое

формулой (5.5.1). Однако, приняв это, потребуется признать, что за тот малый промежуток времени, когда на КА действуют инерциальные силы, земные часы сразу уходят вперед на величину, равную удвоенному интервалу Δt , так что в конечном счете бортовые часы отстанут именно на Δt .

При полетах в околоземном пространстве бортовое время отличается от времени, исчисляемого на Земле, незначительно. В самом деле, за две недели орбитального полета со скоростью около $v = 8 \text{ км/сек}$ замедление бортового времени составит примерно:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{2} \beta^2 t_* = \frac{8^2}{2(3 \cdot 10^5)^2} t_* = 3,55 \cdot 10^{-10} t_* = \\ &= 3,55 \cdot 10^{-10} \cdot 14 \cdot 8,64 \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 430 \text{ мксек.}\end{aligned}$$

Подобные различия во времени не имеют, разумеется, практического значения для действий экипажа космического корабля. Однако они могут повлиять на работу некоторых технических средств. Так, если применять дальномерный метод навигационных измерений с хранением начала отсчета, то, располагая высокостабильным цезиевым генератором с относительной нестабильностью 10^{-12} [68], можно было бы в продолжение тех же двух недель фиксировать временные интервалы с точностью до 1 мксек. Естественно, что релятивистское замедление времени будет нарушать согласование начал временных отсчетов и начнет ощущаться уже в первые сутки полета.

Изменение гравитационного потенциала по траектории полета КА приводит к соответствующим сдвигам бортового времени. С удалением от источника тяготения гравитационный потенциал падает и ход времени ускоряется.

Относительную деформацию единицы отсчета времени можно рассчитывать по формуле (5.3.2), примененной ранее для нахождения гравитационного смещения частоты.

Чтобы оценить смещение ξ на лунных удалениях, следует в (5.3.2) подставить $\Delta H = 3,8 \cdot 10^8 \text{ м}$, что дает

$$\xi_{\text{л}} = \frac{9,8}{(3 \cdot 10^5)^2} 3,8 \cdot 10^8 \approx 4 \cdot 10^{-8}.$$

Смещение временной шкалы за час пребывания в районе Луны, если пока не учитывать влияния ее собственного поля тяготения, оценивается величиной

$$\Delta t = 4 \cdot 10^{-8} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 150 \text{ мксек.}$$

Для расчета полного гравитационного сдвига времени требуется учесть закономерности падения по трассе полета потенциала тяготения. В то же время для нахождения результирующего сдвига бортовой временной шкалы в процессе полета к Луне следует также

учесть изменение масштаба времени за счет движения КА относительно Земли.

Так, за время полета к Луне, пребывания на селеноцентрических орбитах и возвращения на Землю бортовые часы, по оценке физика К. Элли, опережают земные примерно на 300 *мксек**.

Реальность замедления времени в космическом полете можно проверить путем прямых экспериментов.

В настоящее время это возможно осуществить, применяя высокостабильные стандарты частоты. Так, располагая цезиевым атомным генератором с относительной нестабильностью 10^{-12} , за интервал времени, равный трем суткам, можно надежно гарантировать точность хода часов порядка 1 *мксек*. Колебания двух эталонов сводятся по частоте и по фазе, после чего один из них остается на Земле, а второй совершает полет на космическом аппарате. Для скорости $v = 8$ км/сек отставание бортовых часов оценивается величиной

$$\Delta t = 3,55 \cdot 10^{-10} \cdot 2,59 \cdot 10^{11} = 92 \text{ мксек.}$$

Погрешности первоначального сведения частот, а также погрешности самого эксперимента будут лежать ниже этой величины, поэтому возможность такой проверки уже при современном уровне развития техники представляется вполне реальной.

Интересен метод оценки изменения биологических ритмов на неэкипажном КА по результатам наблюдения за полным циклом развития колонии микроорганизмов [44]. Разработаны и проверены в космическом полете биоэлементы, допускающие автоматический посев микроорганизмов с помощью программного устройства или по сигналам с Земли, регистрацию их размножения с передачей данных по телеметрическому каналу. Имеются микроорганизмы с суточным циклом размножения. Поскольку случайные отклонения от этого периода составляют 10%, для достоверного выявления парадокса часов цикл размножения на космическом аппарате должен занять около 29 земных часов. При этом отношение временных интервалов $\frac{t_0}{t_*} = 0,85$. Поэтому скорость движения КА должна составить примерно 160 000 км/сек. Очевидно, такая проверка возможна только в отдаленном будущем.

§ 5.6. АБЕРРАЦИЯ

Влияние относительного движения КА и НТ проявляется при угловых измерениях в смещении линии визирования. Это явление применительно к использованию световых сигналов называется абберацией света.

* Имеется в виду полет по маршруту космонавтов Ф. Бормана, Д. Ловелла и У. Андерса (на корабле «Аполлон-8» 21—27 декабря 1968 г.).

Объясняется данное явление с позиций теории относительности изменением направления фронта волны при переходе от одной системы отсчета к другой. Величина эффекта зависит от относительной скорости движения систем отсчета и от угла между направлениями светового луча и вектора скорости.

Обозначив угол между направлением на НТ и направлением вектора скорости КА через ψ , а угол между фактическим направлением визирования относительно вектора скорости через θ , можно угол абберации α выразить как

$$\alpha = \psi - \theta. \quad (5.6.1)$$

Теория относительности дает для выражения абберации формулу

$$\operatorname{ctg} \theta = (\operatorname{ctg} \psi + \beta \operatorname{cosec} \psi) (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (5.6.2)$$

Разлагая правую часть (5.6.2) в ряд по степеням β и ограничиваясь членами второго порядка, получаем

$$\operatorname{ctg} \theta = \operatorname{ctg} \psi + \beta \operatorname{cosec} \psi + \frac{1}{2} \beta^2 \operatorname{ctg} \psi. \quad (5.6.3)$$

Если принять $v = 30 \text{ км/сек}$, то $\beta^2 = 10^{-8}$ и тогда для угла $\psi = 45^\circ$ релятивистский член составит 10^{-3} угл. сек, что лежит за пределами современных точностей угловых измерений. В то же время член с β дает величину, соизмеримую с погрешностями навигационных пеленгаторов.

В самом деле, сохранив в выражении (5.6.3) член первого порядка и разрешив его относительно угла α , можно для случая $\theta \gg \alpha$ получить

$$\sin \alpha = \beta \sin \theta, \quad (5.6.4)$$

или ввиду малости угла α , выражая угловые величины в секундах:

$$\alpha'' = 206\,265 \frac{v}{c} \sin \theta. \quad (5.6.5)$$

Имея в виду, что $\beta = 10^{-4}$, получим $\alpha = 20'',6$. Такая величина должна учитываться.

При астрономической навигации КА координаты удаленных звезд заранее даются в системах либо геоцентрической, либо гелиоцентрической. Однако за счет абберации положение их на небесной сфере как бы смещается. При замкнутой траектории КА, вследствие периодического изменения направления его скорости, видимое положение НТ также будет описывать замкнутую кривую — эллипс.

В случае астрономической навигации на поверхности планеты абберация появляется за счет орбитального движения планеты и ее суточного вращения. Расчеты показывают, что для Земли максимальное значение абберации, вызванной орбитальным движением

(годовой), составит $20'', 5$, в то время как суточная абберация дает наибольшее значение (на экваторе) $0'', 13$. Смещение за счет движения Солнечной системы пренебрежимо мало и не учитывается даже в астрономии.

Положение, однако, существенно изменится, если когда-либо скорости космических кораблей начнут приближаться к скорости света. Смещение линии визирования окажется настолько значительным, что изменится сам вид звездного неба.

Движущийся космонавт обнаружит, что вследствие абберации звезды сгущаются впереди по направлению полета и разрежаются сзади корабля. Вся та совокупность небесных тел, которая ранее была видна в пределах всей передней полусферы, окажется для космонавта собранной в пределах узкого конуса по курсу полета. Раствор такого конуса нетрудно вычислить, пользуясь формулой (5.6.2).

Считая, что границей обозреваемой передней полусферы является угол $\psi = 90^\circ$, найдем, что для $v = 0,5 c$ эта граница фактически будет наблюдаться при углах

$$\theta = \arccos \left[(\cos 90^\circ + 0,5 \operatorname{cosec} 90^\circ) \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5^2}} \right] = 60^\circ.$$

Стало быть, все звезды передней полусферы неподвижного наблюдателя сгруппируются в пределах конуса с углом раствора $2\theta = 120^\circ$.

При скорости $v = 0,866 c$ конус сожмется до $2\theta = 60^\circ$, а при $v = 0,95 c$ он будет иметь раствор всего $2\theta = 36^\circ$.

Эффект абберации при релятивистских скоростях наложит, без сомнения, значительный отпечаток на всю методику астронавигации.

§ 5.7. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Рассмотрим некоторые явления, имеющие принципиальное значение, хотя и не такое, как вышеизложенные эффекты.

Влияние относительного движения КА и навигационных точек на деформацию поверхностей положения можно проследить на примере измерения дальности до удаленного КА с Земли, совершающей свое орбитальное движение.

В гелиоцентрической системе координат Земля имеет скорость движения v_z порядка 30 км/сек . При измерении расстояний до удаленных космических объектов положение некоторой наземной навигационной точки за время распространения радиосигнала τ заметно изменится. На рис. 5.7.1. показан эллипсоид вращения, точка которого O удалена от фокусов, представляющих собой последовательные положения навигационной точки HT_1 и HT_2 , соответственно на расстояниях r_1 и r_2 .

Большая полуось такого эллипсоида равна:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1}{2} \sum r. \quad (5.7.1)$$

Если межфокусное расстояние обозначить через $2f$, то эксцентриситет e выразится:

$$e = \frac{f}{2a} = \frac{f}{\sum r}. \quad (5.7.2)$$

Учитывая, что $f = v_3 \tau$ и $\sum r = c\tau$, имеем:

$$e = \frac{v_3}{c}. \quad (5.7.3)$$

Подстановка численного значения $e = \frac{3 \cdot 10}{3 \cdot 10^8} = 10^{-4}$ показывает, что эксцентриситет будет все же сравнительно мал, вследствие чего эллипсоидальность поверхности положения должна учитываться лишь при расчетах с весьма высокой точностью.

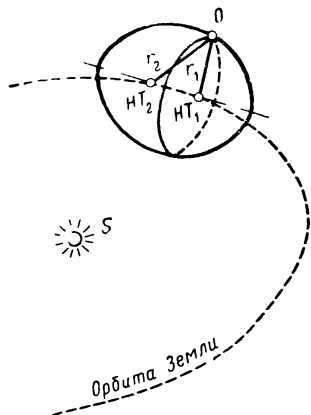


Рис. 5.7.1. Поверхность положения при измерениях с Земли, совершающей орбитальное движение.

Следует упомянуть далее об одном из эффектов теории тяготения, который имеет принципиальное значение, хотя проявление его в космической навигации практического значения не имеет. Речь идет о смещении перигея орбиты спутников. Из общей теории относительности следует, что орбиты не смыкаются и после каждого оборота орбита как бы поворачивается на некоторый угол в направлении движения спутника.

Применительно к движению искусственных спутников получена следующая формула для оценки угла прецессии орбиты ψ , вызываемой релятивистским эффектом,

$$\psi = 3 (f m_{\text{п}})^{3/2} (1 - e)^{3/2} c^{-2} r_0^{-5/2}. \quad (5.7.4)$$

Здесь r_0 — расстояние от фокуса орбиты до перигея; e — ее эксцентриситет; f — гравитационная постоянная; $m_{\text{п}}$ — масса центрального тела; c — скорость света.

Для ИСЗ с высотой перигея 300 км и эксцентриситетом $e = 0,1$ смещение составляет $4 \cdot 10^{-7}$ угл.сек/сек. За сутки это дает всего 0,035 угл.сек.

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ПРИПЛАНЕТНОЙ ДВУМЕРНОЙ НАВИГАЦИИ

§ 6.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНЕТНЫХ ФИГУР КАК НАВИГАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Навигация на поверхности планеты прежде всего связана с решением задач в двумерном пространстве. По своей форме планеты близки к телам вращения, однако вид навигационного пространства должен соответствовать условиям местоопределения объектов. Так, при навигации на малые расстояния возможно пользоваться плоской двумерной моделью. При увеличении дальности действия неизбежен переход к сферической модели. Повышение требований по точности заставляет учитывать сжатие и уподоблять фигуру планеты эллипсоиду вращения. Более точные измерения приведут к учету осевой несимметричности, и тогда потребуется привлекать более сложную модель, например трехосный эллипсоид. Последний считается наиболее общей моделью планетных фигур для условий, когда еще не учитывается несимметрия Северного и Южного полушарий.

Хотя различные планеты различаются по своей форме, для описания геометрических свойств их поверхностей могут применяться одни и те же модели — сфера, эллипсоид вращения и трехосный эллипсоид.

Между навигационными точками и объектом сигналы перемещаются по кратчайшим для данного пространства (геодезическим) линиям. В основе решения задач местоопределения лежит, по существу, решение треугольников, стороны которых образованы геодезическими линиями. Решение плоских и сферических треугольников выполняется по правилам элементарной тригонометрии и сферической тригонометрии. Сложнее обстоит дело с решением задач на поверхности эллипсоида.

В высшей геодезии решаются задачи построения треугольников на поверхности земного эллипсоида, однако само решение выносится из эллиптического пространства [6,17]. Следуя методу Ф. В. Бесселя, в геодезии решения основывают на переходе от поверхности эллипсоида к некоторой условной сферической по-

верхности, в результате чего в формульные зависимости входят координаты, относящиеся к этой фиктивной сфере. Для навигационных задач более удобно пользоваться координатами, задаваемыми на самой поверхности эллипсоида, которому уподоблено навигационное пространство. Так, к примеру, при навигации на земной поверхности удобно пользоваться экваториальной сферической системой координат, в которой положение точки на поверхности Земли задается широтой φ и долготой λ , причем земной радиус-вектор ρ является в общем случае функцией координат φ и λ и определяется фигурой Земли. Методика решения задач непосредственно в эллипсоидальном пространстве была разработана в [49, 81]. Рассмотрим ее основы, имея в виду, что эта методика является наиболее общей для двумерной навигации, и из нее как частные случаи вытекают сферический и плоскостной навигационные алгоритмы.

Важным является аналитическое описание геодезических линий. Их свойства определяются внутренней геометрией поверхности и описываются с помощью компонент фундаментального метрического тензора g_{ih} (или g^{ik}) и их частных производных по координатам, выражаемым символами Кристоффеля $\Gamma_{k,ij}$ (или Γ_{ij}^k). Приведем, поэтому, вначале выражения для метрических характеристик рассматриваемых пространств, установим затем основные соотношения между длинами геодезических линий, углами и поверхностными координатами, после чего рассмотрим решения основных навигационных задач.

§ 6.2. МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛАНЕТ

Будем называть условно эллипсоидным такое навигационное пространство, которое можно уподобить эллипсоиду вращения, имея в виду то обстоятельство, что рассматриваемое пространство представляет собой лишь частный случай эллипсоидных пространств.

Найдем выражения g_{jk} и $\Gamma_{k,ij}$ для случая, когда $\rho = \rho(\varphi, \lambda)$, откуда как частный случай получим подобные выражения для эллипсоида вращения.

Пусть φ , λ и $\rho(\varphi, \lambda)$ — планетоцентрические экваториальные сферические координаты, с помощью которых задается положение точки на поверхности грехосного эллипсоида, а x , y и z — прямоугольные координаты вмещающего трехмерного пространства. Обозначим полуоси эллипсоида через a , b и c , а величины, им обратные, — соответственно через α , β и γ . Преобразование координат описывается формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho(\varphi, \lambda) \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= \rho(\varphi, \lambda) \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= \rho(\varphi, \lambda) \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1)$$

Подставляя выражения (6.2.1) в уравнение эллипсоида

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 1,$$

получим следующее выражение для радиуса-вектора:

$$\rho(\varphi, \lambda) = [(\alpha \cos \varphi \cos \lambda)^2 + (\beta \cos \varphi \sin \lambda)^2 + (\gamma \sin \varphi)^2]^{-1/2}. \quad (6.2.2)$$

Компоненты ковариантного фундаментального метрического тензора равны [7]:

$$g_{ik} = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial x_a}{\partial u^i} \frac{\partial x_a}{\partial u^k}, \quad (i, k = 1, 2). \quad (6.2.3)$$

Для расчета g_{ik} необходимо вычислить частные производные $\frac{\partial x_a}{\partial u^i}$ и подставить их в выражение (6.2.3). После необходимых преобразований можно прийти к выражениям $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\varphi\lambda} = g_{\lambda\varphi}$ и $g_{\lambda\lambda}$, которые помещены в табл. 6.2.1.

В этой таблице приняты сокращенные обозначения $\frac{\partial}{\partial \varphi} \rho(\varphi, \lambda) = \rho'_\varphi(\varphi, \lambda) = \rho'_\varphi$ и $\frac{\partial}{\partial \lambda} \rho(\varphi, \lambda) = \rho'_\lambda(\varphi, \lambda) = \rho'_\lambda$.

Исчисление далее значений производных $\rho'_\varphi(\varphi, \lambda)$ и $\rho'_\lambda(\varphi, \lambda)$ позволяет после соответствующих преобразований найти выражения

$$\left. \begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= \frac{(\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda)^2 \cos^2 \varphi + \gamma^4 \sin^2 \varphi}{[(\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda) \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi]^3}, \\ g_{\varphi\lambda} = g_{\lambda\varphi} &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda - \gamma^2) \cos^2 \varphi \sin 2\varphi \sin 2\lambda}{4[(\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda) \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi]^3}, \\ g_{\lambda\lambda} &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 \cos^4 \varphi \sin^2(2\lambda) + 4[(\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda) \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi]^2 \cos^2 \varphi}{4[(\alpha^2 \cos^2 \lambda + \beta^2 \sin^2 \lambda) \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi]^3} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{+ \beta^2 \sin^2 \lambda \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi]^2 \cos^2 \varphi}{+ \gamma^2 \sin^2 \varphi]^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

Для нахождения $\Gamma_{k,ij}$ воспользуемся общим выражением (7):

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (6.2.5)$$

Тогда, определив частные производные $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}$, можно будет в результате соответствующих преобразований найти выражения для $\Gamma_{\varphi,\varphi\varphi}$, $\Gamma_{\varphi,\varphi\lambda} = \Gamma_{\varphi,\lambda\varphi}$, $\Gamma_{\varphi,\lambda\lambda}$, $\Gamma_{\lambda,\varphi\varphi}$, $\Gamma_{\lambda,\varphi\lambda} = \Gamma_{\lambda,\lambda\varphi}$ и $\Gamma_{\lambda,\lambda\lambda}$. Все эти выражения также запишем в табл. 6.2.1, используя сокращения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\rho'_\varphi(\varphi, \lambda)] &= \rho''_\varphi(\varphi, \lambda) = \rho''_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} [\rho'_\lambda(\varphi, \lambda)] &= \rho''_\lambda(\varphi, \lambda) = \rho''_\lambda, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} [\rho'_\varphi(\varphi, \lambda)] &= [\rho'_\varphi(\varphi, \lambda)]'_\lambda = (\rho'_\varphi)'_\lambda, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} [\rho'_\lambda(\varphi, \lambda)] &= [\rho'_\lambda(\varphi, \lambda)]'_\varphi = (\rho'_\lambda)'_\varphi. \end{aligned}$$

Параметр	Модель планеты		
	Эллипсоид трехосный	Эллипсоид вращения	Сфера
ρ	$[(\alpha \cos \varphi \cos \lambda)^2 + (\beta \cos \varphi \sin \lambda)^2 + (\gamma \sin \varphi)^2]^{-1/2}$	$(\alpha^2 \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$	$a = b = c$
$g_{\varphi\varphi}$	$(\rho_{\varphi}')^2 + \rho^2$	$(\rho')^2 + \rho^2$	ρ^2
$g_{\varphi\lambda} = g_{\lambda\varphi}$	$\rho_{\varphi}' \rho_{\lambda}'$	0	0
$g_{\lambda\lambda}$	$(\rho_{\lambda}')^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi$	$\rho^2 \cos^2 \varphi$	$\rho^2 \cos^2 \varphi$
$\Gamma_{\varphi, \varphi\varphi}$	$\rho_{\varphi}' (\rho_{\varphi}'' + \rho)$	$\rho' (\rho'' + \rho)$	0
$\Gamma_{\varphi, \varphi\lambda} = \Gamma_{\lambda, \varphi\varphi}$	$\rho_{\varphi}' (\rho_{\varphi}')_{\lambda}' + \rho \rho_{\lambda}'$	0	0
$\Gamma_{\varphi, \lambda\lambda}$	$\rho_{\varphi}' (\rho_{\lambda}'' - \rho \cos^2 \varphi) + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi$	$-\rho \left(\rho' \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \rho \sin 2\varphi \right)$	$\frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi$
$\Gamma_{\lambda, \varphi\varphi}$	$\rho_{\lambda}' (\rho_{\varphi}'' - \rho)$	0	0
$\Gamma_{\lambda, \varphi\lambda} = \Gamma_{\lambda, \lambda\varphi}$	$\rho_{\lambda}' (\rho_{\lambda}')_{\varphi}' + \rho \rho_{\varphi}' \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi$	$\rho \left(\rho' \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \rho \sin 2\varphi \right)$	$-\frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi$
$\Gamma_{\lambda, \lambda\lambda}$	$\rho_{\lambda}' (\rho_{\lambda}'' + \rho \cos^2 \varphi)$	0	0

Для эллипсоида вращения имеем $a=b$ ($\alpha=\beta$). Взяв эксцентриситет $\varepsilon = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ при использовании (6.2.2) получим выражение для радиуса-вектора

$$\rho(\varphi) = (\alpha^2 \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = c(1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1/2}. \quad (6.2.6)$$

Поскольку теперь $\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = 0$, величины $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\varphi\lambda}$, $g_{\lambda\varphi}$ и $g_{\lambda\lambda}$ упрощаются (см. соответствующую колонку табл. 6.2.1) в развернутом виде представляются так:

$$\left. \begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= (a^4 \cos^2 \varphi + \gamma^4 \sin^2 \varphi) (\alpha^2 \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi)^{-3} = \\ &= c^2 (1 - \delta \cos^2 \varphi) (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-3}, \\ g_{\varphi\lambda} &= g_{\lambda\varphi} = 0, \\ g_{\lambda\lambda} &= \cos^2 \varphi (\alpha^2 \cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi)^{-1} = \\ &= c^2 (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1} \cos^2 \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (6.2.7)$$

при этом

$$\delta = 1 - \frac{\alpha^4}{\gamma^4} = 1 - \frac{c^4}{a^4}.$$

Если учесть, что $\rho'_\lambda = 0$, то далее упростятся и выражения для $\Gamma_{k,ij}$ (см. табл. 6.2.1), причем

$$\Gamma_{\varphi,\varphi\lambda} = \Gamma_{\varphi,\lambda\varphi} = \Gamma_{\lambda,\varphi\varphi} = \Gamma_{\lambda,\lambda\lambda} = 0.$$

Отметим, кстати, что для сферы $\rho = a = c$ ($\rho = \text{const}$) и $\rho' = 0$, поэтому многие составляющие пропадут и останутся только

$$\left. \begin{aligned} g_{\varphi\varphi} &= \rho^2, \quad \Gamma_{\varphi,\lambda\lambda} = \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi, \\ g_{\lambda\lambda} &= \rho^2 \cos^2 \varphi, \quad \Gamma_{\lambda,\varphi\lambda} = \Gamma_{\lambda,\lambda\varphi} = -\frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

Результаты вычисления g_{ik} и $\Gamma_{k,ij}$ для трехосного эллипсоида и эллипсоида вращения в табл. 6.2.1 сопоставлены со значениями этих параметров для сферы.

Определенные выражением (6.2.4) g_{ik} представляют собой компоненты ковариантного фундаментального метрического тензора. Наряду с этими компонентами для последующего требуются компоненты g^{ik} контравариантного фундаментального метрического тензора, а также символы Кристоффеля второго рода Γ_{ij}^k . Компоненты g^{ik} выражаются через g_{ik} , а символы второго рода Γ_{ij}^k — через $\Gamma_{k,ij}$ (см. приложение 1). Вычисления этих метрических характеристик для трехосного эллипсоида, двухосного эллипсоида и сферы имеются в [81]. Опуская соответствующие преобразования, приведем окончательные выражения (табл. 6.2.2).

Параметр	Модель планеты		
	Эллипсоид трехосный	Эллипсоид вращения	Сфера
g	$[(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2] [(\rho'_\lambda)^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi] - (\rho'_\varphi \rho'_\lambda)^2$	$[(\rho')^2 + \rho^2] \rho^2 \cos^2 \varphi$	$\rho^4 \cos^2 \varphi$
$g^{\varphi\varphi}$	$-\frac{1}{g} [(\rho'_\lambda)^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi]$	$[(\rho')^2 + \rho^2]^{-1}$	$(\rho^2)^{-1}$
$g^{\varphi\lambda} = g^{\lambda\varphi}$	$-\frac{1}{g} \rho'_\varphi \rho'_\lambda$	0	0
$g^{\lambda\lambda}$	$-\frac{1}{g} [(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2]$	$(\rho^2 \cos^2 \varphi)^{-1}$	$(\rho^2 \cos^2 \varphi)^{-1}$
$\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi$	$-\frac{1}{g} [\rho'_\varphi \rho^2 \cos^2 \varphi (\rho''_\varphi + \rho) + 2\rho'_\varphi (\rho'_\lambda)^2 \rho]$	$\rho' (\rho'' + \rho) [(\rho')^2 + \rho^2]^{-1}$	0
$\Gamma_{\varphi\lambda}^\varphi = \Gamma_{\lambda\varphi}^\varphi$	$\frac{1}{g} \{ \rho'_\varphi (\rho'_\varphi)_\lambda' \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho'_\lambda \rho [(\rho'_\lambda)^2 + \cos^2 \varphi (\rho^2 - (\rho'_\varphi)^2 + \rho'_\varphi \rho \operatorname{tg} \varphi)] \}$	0	0
$\Gamma_{\lambda\lambda}^\varphi$	$-\frac{1}{g} \left[\left(-\rho'_\varphi \rho \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi \right) \rho^2 \cos^2 \varphi + (\rho'_\varphi \rho''_\lambda + (\rho'_\lambda)^2 \operatorname{tg} \varphi - 2\rho'_\varphi (\rho'_\lambda)^2 \rho^{-1}) \rho^2 \cos^2 \varphi \right]$	$\left(-\rho' \rho \cos^2 \varphi + \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi \right) \times$ $\times [(\rho')^2 + \rho^2]^{-1}$	$\frac{1}{2} \sin 2\varphi$
$\Gamma_{\varphi\varphi}^\lambda$	$-\frac{1}{g} [\rho'_\lambda \rho^2 (\rho''_\varphi - \rho) - 2(\rho'_\varphi)^2 \rho'_\lambda \rho]$	0	0
$\Gamma_{\varphi\lambda}^\lambda = \Gamma_{\lambda\varphi}^\lambda$	$-\frac{1}{g} [(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2] \left(\rho'_\varphi \rho \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\varphi \right) + \rho'_\lambda (\rho'_\lambda)_\varphi' \rho^2 - \rho'_\varphi (\rho'_\lambda)^2 \rho$	$\frac{\rho'}{\rho} - \operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \varphi$
$\Gamma_{\lambda\lambda}^\lambda$	$-\frac{1}{g} \{ \rho'_\lambda \rho^2 [\rho''_\lambda + (\rho - \rho'_\varphi \operatorname{tg} \varphi + 2(\rho'_\varphi)^2 \rho^{-1}) \cos^2 \varphi] \}$	0	0

Значения метрических характеристик используем далее для вывода системы формул одного из видов эллиптической тригонометрии.

§ 6.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ НА ЭЛЛИПСОИДЕ ВРАЩЕНИЯ. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА НАВИГАЦИИ

В основу методики решения навигационных задач должна быть положена относящаяся к эллипсоиду совокупность формул, определяющая зависимости между длинами геодезических линий, азимутами и поверхностными координатами.

Если в эллиптическом пространстве рассматриваемого типа задать координатную сеть в виде ортогональных меридианов ($\lambda = \text{const}$) и параллелей ($\varphi = \text{const}$), то совокупность зависимостей между длинами геодезических линий, ортогональными координатами и геодезическими азимутами будет иметь значение тригонометрических формул в этом пространстве.

На рис. 6.3.1 показаны элементы, важные для решения треугольников: азимутальный угол θ между меридианом и геодезической, угол i наклона геодезической линии к экватору, длина S геодезической между двумя фиксированными точками, разность долгот $\Lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ этих двух точек геодезической, широта точки φ .

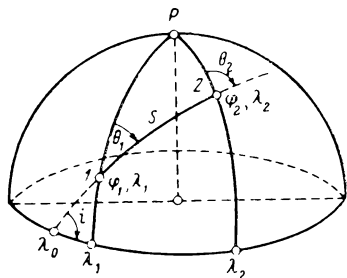


Рис. 6.3.1. К решению навигационных задач с использованием одной навигационной точки.

Между различными комбинациями указанных элементов можно установить функциональные зависимости. Из различных комбинаций по три прежде всего интерес представляют зависимости типов: $\theta - \varphi - i$, $S - \theta - i$, $S - \varphi - i$, $S - \varphi - \theta$, $\Lambda - \varphi - i$, $\Lambda - \theta - i$ и $\Lambda - \varphi - \theta$. Найдем последовательно эти зависимости.

Первую зависимость можно найти, воспользовавшись общим видом выражения первой квадратичной формы и уравнений геодезических линий [7, 13]:

$$dS^2 = g_{ik} du^i du^k, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (6.3.1)$$

где u^i — координаты; g_{ik} — компоненты фундаментального метрического тензора, а также

$$\frac{d^2 u^i}{dp^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{du^\alpha}{dp} \frac{du^\beta}{dp} + \Phi(p) \frac{du^i}{dp} = 0 \quad (6.3.2)$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ — символы Кристоффеля второго рода; p — некоторый параметр, через который выражается геодезическая линия; $\Phi(p)$ — функция, связанная с производными от лонгального параметра S :

$$\Phi(p) = \dot{S}(S)^{-1}.$$

Для эллиптического пространства имеют место соотношения (см. табл. 6.2.1 и 6.2.2):

$$g_{\phi\lambda} = g_{\lambda\phi} = \Gamma_{\phi\lambda}^{\phi} = \Gamma_{\lambda\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\phi}^{\lambda} = \Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} = 0.$$

С учетом этого интеграл от первой квадратичной формы и уравнения геодезических линий принимают вид

$$S = \int_{p_1}^{p_2} \left[g_{\phi\phi}(p) \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 + g_{\lambda\lambda}(p) \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 \right]^{1/2} dp, \quad (6.3.3)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dp^2} + \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 + \Gamma_{\lambda\lambda}^{\phi} \left(\frac{d\lambda}{dp} \right)^2 + \Phi(p) \frac{d\phi}{dp} &= 0 \\ \text{и} \\ \frac{d^2\lambda}{dp^2} + 2\Gamma_{\lambda\phi}^{\lambda} \frac{d\phi}{dp} \frac{d\lambda}{dp} + \Phi(p) \frac{d\lambda}{dp} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.4)$$

Введем угол θ между координатной линией $\phi(\lambda = \text{const})$ и геодезической линией, а также параметр G , определяемый с помощью выражения (6.2.6)

$$G = \rho(\phi) \cos \phi = c(1 - \varepsilon \cos^2 \phi)^{-1/2} \cos \phi \quad (6.3.5)$$

и представляющий собой, стало быть, проекцию $\rho(\phi)$ на экваториальную плоскость.

Из рис. 6.3.2 видно, что

$$\frac{d\phi}{dS} = \rho^{-1}(\phi) \cos \theta \quad \text{и} \quad \frac{d\lambda}{dS} = \frac{1}{G} \sin \theta. \quad (6.3.6)$$

Рис. 6.3.2. К дифференциальным соотношениям.

Ведя исчисление геодезических линий через лонгальный параметр S , подставляя в уравнения (6.3.4) значения $\Gamma_{\phi\phi}^{\phi}$ и $\Gamma_{\lambda\lambda}^{\phi}$ (по табл. 6.2.2), а величины $\frac{d\phi}{dS}$, $\frac{d^2\phi}{dS^2}$ и $\frac{d\lambda}{dS}$ беря в соответствии с (6.3.6), после необходимых преобразований можно прийти к следующему:

$$\rho(\phi) \cos \phi \cos \theta \frac{d\theta}{dS} - [\rho(\phi) \sin \phi - \rho'(\phi) \cos \phi] \sin \theta \frac{d\phi}{dS} = 0. \quad (6.3.7)$$

Отсюда нетрудно получить

$$\frac{d}{dS}(G \sin \theta) = 0. \quad (6.3.8)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (6.3.8), приходим к решению¹

$$\int_S (G \sin \theta)' dS = \rho(\varphi) \cos \varphi \sin \theta = q. \quad (6.3.9)$$

Произвольная постоянная q определяется из начальных условий. Если угол наклона геодезической линии к экватору обозначить через i , тогда при $\varphi_0 = 0$ будем иметь $\theta_0 = 90^\circ - i$. Наряду с этим при $\varphi_0 = 0$ радиус-вектор $\rho_0(\varphi) = a$.

Поэтому

$$q = a \cos i. \quad (6.3.10)$$

Сопоставляя выражения (6.3.10) и (6.3.9), а также учитывая соотношение (6.3.5), получим:

$$\begin{aligned} \cos i &= \frac{c}{a} \cos \varphi \sin \theta (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1/2} = \\ &= \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Уравнение (6.3.11) является первым интегралом дифференциальных уравнений геодезической линии и дает для эллипсоида вращения связь широты φ и азимутального угла θ с углом i наклона к экватору (зависимость типа $\theta - \varphi - i$).

Заметим, что из уравнения (6.3.11) легко находится значение наибольшей широты, которой достигает геодезическая на эллипсоиде. На наивысшей параллели, которой касается геодезическая, $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$, и поэтому

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \left(\frac{c}{a} \operatorname{tg} i \right) = \operatorname{arc cosec} \left(\frac{a}{c} \sqrt{\operatorname{cosec}^2 i - \varepsilon} \right). \quad (6.3.12)$$

В частном случае сферы $\rho = a = c$, $\varepsilon = 0$, и тогда из формулы (6.3.11) получается известное соотношение сферической тригонометрии

$$\cos i = \cos \varphi \sin \theta, \quad (6.3.11')$$

откуда следует также, что

$$\varphi_{\max} = i. \quad (6.3.12')$$

Зависимости трех следующих типов требуют вычисления длины геодезической линии. Это выполняется интегрированием по формуле (6.3.3), причем в качестве параметра можно брать либо θ , либо φ . Поэтому входящие в интеграл (6.3.3) $g_{\varphi\varphi}(\rho)$, $g_{\lambda\lambda}(\rho)$, $\frac{d\varphi}{d\rho}$ и $\frac{d\lambda}{d\rho}$, должны выражаться как функции либо θ , либо φ .

Соответствующие вычисления, приведенные в [81], дают необходимые выражения для метрических компонент:

$$g_{\varphi\varphi}(\theta) = (\alpha^4 + \gamma^4 A(\theta)^2) (1 + A(\theta)^2) (\alpha^2 + \gamma^2 A(\theta)^2)^{-3}; \quad (6.3.13)$$

где

$$A(\theta) = \frac{\alpha^2}{\gamma^2} (\sin^2 \theta \sec^2 i - 1);$$

$$g_{\varphi\varphi}(\varphi) = (\alpha^4 + \gamma^4 A(\varphi)^2) (1 + A(\varphi)^2) (\alpha^2 + \gamma^2 A(\varphi)^2)^{-3}, \quad (6.3.14)$$

где

$$A(\varphi) = \operatorname{tg}^2 \varphi; \quad (6.3.14')$$

$$g_{\lambda\lambda}(\theta) = \alpha^{-2} \operatorname{cosec}^2 \theta \cos^2 i, \quad (6.3.15)$$

$$g_{\lambda\lambda}(\varphi) = c^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{-1} \cos^2 \varphi \quad (6.3.16)$$

и для производных поверхностных координат

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\alpha^2}{2\gamma^2} \sin 2\theta \sec^2 i A(\theta)^{-1} [1 + A(\theta)^2]^{-1}. \quad (6.3.17)$$

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = A(\theta)^{-1} \left[A(\theta)^2 + \frac{\alpha^4}{\gamma^4} \right]^{1/2} \quad (6.3.18)$$

и

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \sec^2 \varphi \left(1 - \frac{\varepsilon}{B(\varphi)^2} \right)^{1/2} \left(\frac{c^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 i - \operatorname{tg}^2 \varphi \right)^{-1/2}, \quad (6.3.19)$$

где

$$B(\varphi) = \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right)^{1/2}. \quad (6.3.19')$$

Найдем зависимость типа $S - \theta - i$.

На основании (6.3.3) запишем:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[g_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 + g_{\lambda\lambda} \left(\frac{d\lambda}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta, \quad (6.3.20)$$

где пределы интегрирования θ_1 и θ_2 определяются значениями азимутальных углов в начальной и конечной точках геодезической линии. Входящие в интеграл величины $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\lambda\lambda}$, $\frac{d\varphi}{d\theta}$ и $\frac{d\lambda}{d\theta}$ даются соответственно выражениями (6.3.13), (6.3.15), (6.3.17) и (6.3.18).

Подставив их в (6.3.20), после соответствующих выкладок, можно прийти к виду

$$S = a \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{1 - \varepsilon (\sin \theta \sec i)^{-2}}{\sin^2 \theta \sec^2 i - 1} \right]^{1/2} d\theta. \quad (6.3.21)$$

Дальнейшие преобразования приводят к эллиптическим интегралам. Вводим обозначения:

$$\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i = \operatorname{sn} u, \quad (6.3.22)$$

где $\operatorname{sn} u$ — эллиптическая функция Якоби [5], а также

$$\frac{\varepsilon \sin^2 i}{1 - \varepsilon \cos^2 i} = k^2. \quad (6.3.23)$$

Рассматривая k как модуль эллиптического интеграла, обозначим далее через ψ амплитуду от u при этом модуле:

$$\psi = \operatorname{am}(u, k). \quad (6.3.24)$$

В соответствии с этим $d\theta$ приобретает следующее выражение через эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$ и $\operatorname{sn} u$:

$$d\theta = -\operatorname{ctg} i \operatorname{cn} u (\operatorname{ctg}^2 i + \operatorname{sn}^2 u)^{-1} \operatorname{dn} u du. \quad (6.3.25)$$

Производя в интеграле (6.3.21) подстановки в соответствии с формулами (6.3.22), (6.3.23) и (6.3.25), после преобразований получим:

$$\begin{aligned} S &= -a(1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2} \int_{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi = \\ &= -a(1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2} \int_{\psi} \operatorname{dn}^2 u du. \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Из последнего выражения видно, что S выражается через эллиптический интеграл второго рода от ψ и k :

$$S = -R_s |E(\psi, k)|_{\psi_1}^{\psi_2}, \quad (6.3.27)$$

где

$$R_s = a(1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2}. \quad (6.3.28)$$

Остановимся на вопросе о пределах интеграла в формуле (6.3.27).

Прежде всего отметим, что при отсчете длины геодезических линий в направлении увеличения широты φ , амплитуда ψ вдоль геодезической линии будет убывать, так как с увеличением φ азимут θ возрастает, а

$$\operatorname{am}(u, k) = \operatorname{arc} \sin(\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i). \quad (6.3.29)$$

При таком способе отсчета значение интеграла при верхнем пределе будет меньшим, чем при нижнем пределе, и, следовательно, $S > 0$.

На экваторе $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i$, а следовательно, $\psi_0 = \operatorname{arc} \sin(1)$ и $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Этому значению предела соответствует полный эллиптический интеграл $E(\frac{\pi}{2}, k)$. Поэтому при исчислении длины S от экватора имеем:

$$S = R_s [E - E(\psi_2, k)]. \quad (6.3.30)$$

В точке максимальной широты $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$; $\psi_{\max} = \arcsin(0)$ и $\psi_{\max} = 0$. Этому значению предела соответствует нулевое значение интеграла $E(0, k) = 0$.

Длина геодезической линии от экватора до точки максимальной широты выражается полным эллиптическим интегралом и является функцией только угла i :

$$S_{0,25} = R_s E. \quad (6.3.31)$$

В общем случае вычисления должны производиться по формуле

$$S = R_s [E(\psi_1, k) - E(\psi_2, k)], \quad (6.3.32)$$

в которой первое и второе слагаемые представляют собой геодезические расстояния от точки максимальной широты соответственно до начальной и конечной точек исчисляемого отрезка геодезической линии.

Отметим, что для сферы ($\rho = a = c$) $k = 0$, и поскольку

$$E(\psi, 0) = \frac{2\psi}{\pi} E = \psi,$$

то для длины геодезической линии справедливо выражение:

$$S = \rho [|\psi|_0^1 - |\psi|_0^2].$$

При этом в случае отсчета расстояний от экватора

$$S = \rho \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\operatorname{ctg} \theta_2 \operatorname{ctg} i) \right], \quad (6.3.33)$$

откуда получаем известную формулу сферической тригонометрии

$$\cos S' = \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i, \quad (6.3.30')$$

где $S' = \frac{S}{\rho}$ — дуга большого круга в угловом исчислении.

Итак, длина геодезической линии S на эллипсоиде вращения выражается через эллиптические интегралы второго рода $E(\psi, k)$, и для соответствующих расчетов можно пользоваться имеющимися таблицами эллиптических интегралов или таблицами, вычисленными с требуемым шагом. Однако для ряда практических применений может оказаться целесообразным использовать асимптотические разложения эллиптических интегралов по степеням тригонометрических функций и модуля k .

Применяя к выражению (6.3.32) известное разложение [5,42], получим:

$$S = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[\psi_i \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} Q_1(n) k^{2n} \right) + \sin \psi_i \cos \psi_i \sum_{n=1}^{\infty} Q_2(n) k^{2n} \times \right. \\ \left. \times \sum_{p=1}^n Q_3(n, p) \sin^{2(n-p)} \psi_i \right]. \quad (6.3.34)$$

Здесь $Q_1(n)$, $Q_2(n)$ и $Q_3(n, p)$ выражаются через гамма-функции [81].

Чтобы определить необходимое число членов разложения, которые требуется удерживать при выполнении навигационных расчетов, оценим порядок ошибок, возникающих за счет пренебрежения членами со степенями k^2 , k^4 , k^6 и k^8 . Вычислим для этого длину геодезической линии в пределах от $\theta_1 = \theta_0 = \frac{\pi}{2} - i$ до $\theta_2 = \theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$. Для этих условий $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\psi_2 = 0$. В соответствии с разложением (6.3.34) получаем:

$$S = a (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{3}{64} k^4 - \frac{5}{256} k^6 - \frac{25}{16384} k^8 - \dots \right). \quad (6.3.35)$$

Наибольшей ошибка будет, очевидно, тогда, когда достигнет максимума произведение

$$P = (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2} k = \sqrt{\varepsilon} \sin i.$$

Экстремуму соответствует $dP = \sqrt{\varepsilon} \cos i = 0$, откуда следует, что максимум P будет при угле наклона $i = \frac{\pi}{2}$. При этом модуль

$$k = \sqrt{\varepsilon}. \quad (6.3.36)$$

Для случая приземной навигации, приняв данные эллипсоида Красовского $a = 6\,378\,245$ м и $c = 6\,356\,853$ м, будем иметь

$$\varepsilon = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 0,0066934216.$$

Произведя вычисления с учетом значения ε , находим:

$$S = a \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon - \frac{3}{64} \varepsilon^2 - \frac{5}{256} \varepsilon^3 - \frac{25}{16384} \varepsilon^4 - \dots \right), \quad (6.3.37)$$

откуда $S = 10\,018\,922 - 16\,765 - 21 - 0,06 - 0,00003$ м.

Из последнего расчета видно, что член, пропорциональный k^2 , может достигать 17 км, член с k^4 имеет величину порядка 20 м, тогда как член с k^6 оценивается величинами порядка единиц сантиметров. Ввиду этого для расчетов, проводимых с точностью до 20 м, достаточно ограничиться членами, содержащими k^4 .

В соответствии с изложенным, для целей навигации на поверхности Земли может использоваться формула, получаемая из разложения (6.3.34) путем пренебрежения членами высших порядков малости:

$$S = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (f_1 \psi_i + f_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + f_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i), \quad (6.3.38)$$

где

$$f_1 = 1 - f_2; \quad f_2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4; \quad f_3 = \frac{1}{32} k^4.$$

Заметим, что в разложении (6.3.35) каждый последующий член приблизительно на три порядка меньше предыдущего члена.

Перейдем к зависимости типа $S - \varphi - i$. Уравнение (6.3.3) имеет в этом случае выражение

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[g_{\varphi\varphi} + g_{\lambda\lambda} \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 \right]^{1/2} d\varphi. \quad (6.3.39)$$

Значения для $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\lambda\lambda}$ и $\frac{d\lambda}{d\varphi}$, выраженных через φ и i , даны соответственно в (6.3.14), (6.3.16) и (6.3.19).

Подставляя эти значения в (6.3.39), а также используя тождества

$$\sin \varphi \operatorname{cosec} i (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1/2} = \operatorname{sn} u, \quad (6.3.40)$$

где $\operatorname{sn} u$ — эллиптическая функция Якоби, и

$$k = \sqrt{\varepsilon} \sin i (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{-1/2}, \quad (6.3.41)$$

где k — модуль эллиптических интегралов, можно после надлежащих преобразований прийти к виду:

$$S = -a (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2} \int_u \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} \operatorname{dn} u du. \quad (6.3.42)$$

Поэтому решение дается эллиптическими интегралами второго рода в форме, аналогичной выражениям (6.3.27) и (6.3.32):

$$S = -R_s [E(\operatorname{am}(u, k))]|_{u_1}^{u_2} = R_s [E(\psi_1, k) - E(\psi_2, k)].$$

Для вычислений можно пользоваться разложением решения (6.3.34) по степеням тригонометрических функций и модуля k , а также приближенной формулой (6.3.38), имея в виду, что для этого случая

$$\psi = \operatorname{am}(u, k) = \arccos [\sin \varphi \operatorname{cosec} i (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1/2}]. \quad (6.3.43)$$

Отметим, что для сферы ($\rho = a = c$) $k = 0$, и поэтому $E(\psi, 0) = \psi$, так что при отсчете расстояний от экватора

$$S = \rho \left[\frac{\pi}{2} - \arccos (\sin \varphi \operatorname{cosec} i) \right],$$

откуда следует известная формула сферической тригонометрии:

$$\sin \varphi = \sin S' \sin i. \quad (6.3.44)$$

Чтобы получить зависимость типа $S - \varphi - \theta$, можно вновь воспользоваться формулой (6.3.3), подставив в нее значения $g_{\varphi\varphi}$, $g_{\lambda\lambda}$ и $\frac{d\lambda}{d\varphi}$, выраженные в соответствии с формулой (6.3.11) через φ и θ . Однако интегрирование и в этом случае приведет к эллиптическим интегралам вида (6.3.27). Поэтому целесообразней, не прибегая к интегрированию, воспользоваться результатом (6.3.27), выразив при этом амплитуду ψ через φ и θ .

Свяжем функцию от эллиптического интеграла первого рода u с углами φ и θ .

Пользуясь выражениями (6.3.22) и (6.3.40), можно сопоставить $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{sn} i$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i, \\ \operatorname{cn} u &= \sin \varphi (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1/2} \operatorname{cosec} i. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.45)$$

Исключив из систем (6.3.45) угол i , приходим к следующему соотношению:

$$\operatorname{sc} u = \frac{c}{a} \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta. \quad (6.3.46)$$

Если теперь положить амплитуду $am(u, k)$ равной

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{c}{a} \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta \right),$$

то можно выразить S в функции только φ и θ через эллиптические интегралы $E(\psi, k)$:

$$S = a(1 - \varepsilon B^{-2} \sin^2 \theta)^{1/2} [E(\psi_1, k) - E(\psi_2, k)], \quad (6.3.47)$$

где B — функция φ , определяемая соотношением (6.3.19'). В равной мере в этом случае могут быть использованы асимптотические решения типа (6.3.34) и (6.3.38).

Отметим, что для сферы ($k = 0$) при отсчете расстояний от экватора из уравнения (6.3.47) следует, что

$$S = \rho \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} (\operatorname{ctg} \varphi \cos \theta) \right], \quad (6.3.48)$$

и как частный случай получается известная формула сферической тригонометрии:

$$\operatorname{ctg} S' = \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta. \quad (6.3.49)$$

Таким образом, в рассмотренных выше трех случаях зависимости $S(\theta, i)$; $S(\varphi, i)$ и $S(\varphi, \theta)$ выражаются эллиптическими интегралами второго рода, модуль которых k и амплитуда ψ являются функциями соответствующих сочетаний углов:

$$\xi_{20} \quad [\theta, i], [\varphi, i] \text{ и } [\varphi, \theta].$$

Графики зависимостей амплитуды ψ от широты φ , азимута θ и угла наклона i приведены соответственно на рис. 6.3.3, 6.3.4 и 6.3.5. Заметим, что рис. 6.3.4 при перемене местами аргумента и параметра является также графиком зависимости $\psi(i)$ при параметре θ . График зависимости модуля k от угла i показан на рис. 6.3.6.

Найдем далее зависимости, содержащие параметр долготы.

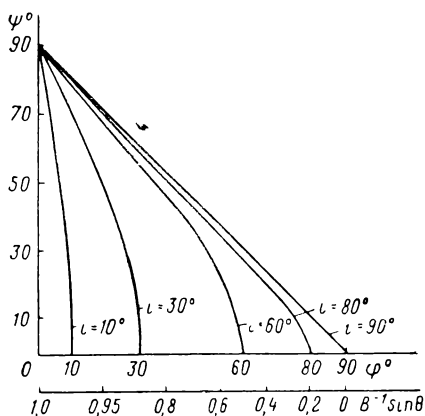


Рис. 6.3.3. График зависимости амплитуды ψ от геоцентрической широты φ .

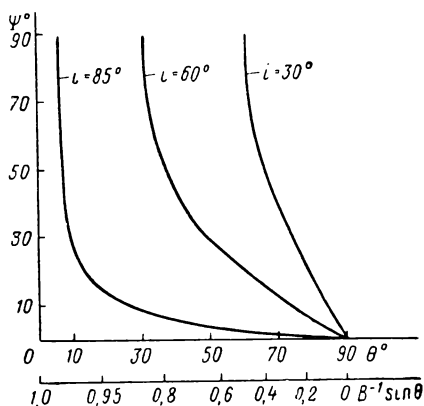


Рис. 6.3.4. График зависимости амплитуды ψ от геодезического азимута θ .

Обозначим разность долгот двух точек геодезической линии через Λ , а ее значение при отсчете от восходящего узла геодезической линии — через Λ_0 , так что

$$\Lambda_0 = \lambda - \lambda_0.$$

Ищем зависимость типа $\Lambda - \varphi - i$. На основании дифференциального соотношения (6.3.19) имеем:

$$\Lambda = \int_{\varphi} \sec^2 \varphi \left(1 - \frac{\varepsilon}{B^2}\right)^{1/2} \left(\frac{c^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 i - \operatorname{tg}^2 \varphi\right)^{-1/2} d\varphi. \quad (6.3.50)$$

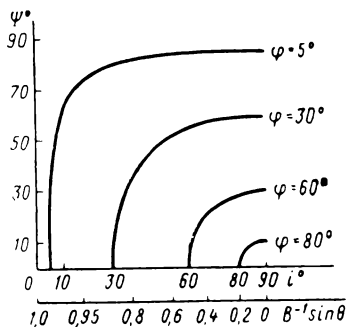


Рис. 6.3.5. График зависимости амплитуды ψ от угла наклона геодезической линии i .

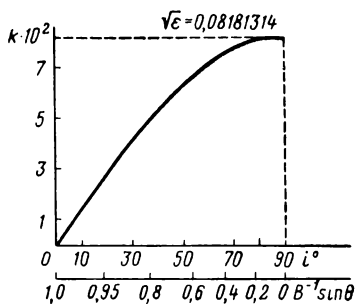


Рис. 6.3.6. График зависимости модуля эллиптических интегралов k от угла i наклона геодезической линии.

Воспользовавшись тождествами (6.3.40) и (6.3.41), получим:

$$\Lambda = -\sec i (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2} \int_u \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}{1 + \operatorname{tg}^2 i \sin^2 u} \operatorname{dn} u \, du. \quad (6.3.51)$$

Учитывая далее, что $\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \sin^2 u$, можем найти решение через эллиптические интегралы первого рода $F(\operatorname{am} u, k)$ и третьего рода $\Pi(\operatorname{am} u, \mu, k)$:

$$\Lambda = R_{\lambda_1} [\Pi(\psi_1, \mu, k) - \Pi(\psi_2, \mu, k)] - R_{\lambda_2} [F(\psi_1, k) - F(\psi_2, k)], \quad (6.3.52)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\lambda_1} &= \sec i (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{-1/2}; \\ R_{\lambda_2} &= \varepsilon \cos i (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{-1/2}; \\ \mu &= \operatorname{tg}^2 i, \end{aligned} \quad (6.3.52')$$

а $\psi = \operatorname{am}(u, k)$ дается в соответствии с выражениями (6.3.40) и (6.3.41).

При смещении по геодезической линии от ее узла в сторону возрастающих φ амплитуда ψ будет убывать, поэтому в выражении (6.3.52)

$$\Lambda > 0.$$

В точке узла $\varphi_0 = 0$, а следовательно, $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. С другой стороны, в точке максимальной широты

$$\varphi_{\max} = \arccos \left(1 + \frac{c^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 i \right)^{-1/2}, \quad (6.3.53)$$

поэтому $\psi_{\max} = 0$. Точке узла соответствуют значения эллиптических интегралов $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, k\right)$ и $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K$. Точке $\varphi_{\max}$ соответствуют нулевые значения этих интегралов: $\Pi(0, \mu, k) = 0$ и $F(0, k) = 0$:

При отсчете долготы от точки узла имеем

$$\Lambda_0 = R_{\lambda_1} \left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, k\right) - \Pi(\psi, \mu, k) \right] - R_{\lambda_2} [K - F(\psi, k)], \quad (6.3.54)$$

при этом разность долгот, соответствующая полуветви геодезической линии (от φ_0 до $\varphi_{\max}$), равна:

$$\Lambda_{0,25} = R_{\lambda_1} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \mu, k\right) - R_{\lambda_2} K. \quad (6.3.55)$$

Эллиптический интеграл третьего рода при $k = 0$ составляет:

$$\Pi(\psi, \mu, 0) = \int_0^\psi (1 + \mu \sin^2 \psi)^{-1} d\psi = \cos i \arctg(\sec i \operatorname{tg} \psi). \quad (6.3.56)$$

Поэтому для случая сферы ($k = 0$) из (6.3.54) получается следующая зависимость (поскольку при этом $\varepsilon = 0$):

$$\Lambda_0 = \operatorname{soc} i \left[\cos i \frac{\pi}{2} - \cos i \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sec i \operatorname{tg} \psi) \right], \quad (6.3.57)$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname{ctg} \Lambda_0 = \sec i \operatorname{tg} \psi. \quad (6.3.58)$$

Далее, в соответствии с формулой (6.3.40):

$$\operatorname{tg} \psi = (\sin^2 i \operatorname{cosec}^2 \varphi - 1)^{1/2}. \quad (6.3.59)$$

Подставляя выражение (6.3.59) в (6.3.58), получаем

$$\operatorname{ctg} \Lambda_0 = (\operatorname{tg}^2 i \operatorname{ctg}^2 \varphi - 1)^{1/2}.$$

откуда следует известная зависимость сферической тригонометрии

$$\sin \Lambda_0 = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.3.60)$$

Представим зависимость $\Lambda = \Lambda(\varphi, i)$ в виде разложения по степеням модуля k и тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \Lambda = & R_{\lambda_1} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[C_0 i + \sum_{n=1}^{\infty} Q_4(n) k^{2n} C_n i \right] + \\ & + R_{\lambda_2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left[\psi_i \sum_{n=1}^{\infty} Q_5(n) k^{2(n-1)} - \right. \\ & \left. - \sin \psi_i \cos \psi_i \sum_{n=1}^{\infty} Q_6(n) k^{2n} \sum_{p=1}^n Q_3(n, p) \sin^2(n-p) \psi_i \right], \end{aligned} \quad (6.3.61)$$

где

$$C_0 = \cos i \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sec i \operatorname{tg} \psi);$$

$$C_n = \operatorname{ctg}^2 i (A_{n-1} - C_{n-1});$$

$$A_0 = \psi;$$

$$A_n = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} - \frac{1}{2n} \cos \psi \sin^{2n-1} \psi,$$

причем $Q_4(n)$, $Q_5(n)$, $Q_6(n)$ выражаются через гамма-функции [81].

Учитывая, что $R_{\lambda_2} = k \sqrt{\varepsilon} \operatorname{ctg} i$ и ограничиваясь членами, содержащими сомножители не выше k^4 , получаем:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} [h_1 \psi_i + h_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + h_3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sec i \operatorname{tg} \psi_i)], \quad (6.3.62)$$

где

$$\begin{aligned}h_1 &= R_{\lambda_1} \left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{16} k^4 - \frac{3}{8} k^4 \operatorname{ctg}^2 i \right) \operatorname{ctg}^2 i - R_{\lambda_2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 \right); \\h_2 &= R_{\lambda_2} \frac{1}{4} k^2 - R_{\lambda_1} \frac{3}{16} k^4 \operatorname{ctg}^2 i; \\h_3 &= R_{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{ctg}^2 i + \frac{3}{8} k^4 \operatorname{ctg}^4 i \right) \cos i.\end{aligned}$$

Зависимость типа $\Lambda - \varphi - i$ [см. выражение (6.3.52)] была получена из интеграла разности долгот (6.3.51) путем интегрирования по φ функции $f_1(\varphi, i)$. Для нахождения зависимости типа $\Lambda - \theta - i$ следует интегрировать по θ с предварительным выражением подынтегральной функции в виде $f_2(\theta, i)$. Аналогично этому представление подынтегрального выражения в виде функции $f_3(\varphi, \theta)$ с последующим интегрированием по φ или по θ приведет к зависимости типа $\Lambda - \varphi - \theta$. Однако очевидно, что такой путь приведет к интегралам типа (6.3.51) и в конечном счете к эллиптическим интегралам. Поэтому возможно, не проводя указанных вычислений, сразу записать зависимость $\Lambda = \Lambda(\theta, i)$ в виде, повторяющем формулу (6.3.52), имея в виду, что в этом случае

$$\psi = \operatorname{am}(u, k) = \arcsin(\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i). \quad (6.3.29')$$

Подобно этому зависимость $\Lambda = \Lambda(\varphi, \theta)$ может быть записана в виде, отличающемся от (6.3.52) только сомножителями при $\Pi(\psi, \mu, k)$ и $F(\psi, k)$:

$$\begin{aligned}\Lambda &= B^2 \sin^{-1} \theta (B^2 - \varepsilon \sin^2 \theta)^{-1/2} [\Pi(\psi_1, \mu, k) - \Pi(\psi_2, \mu, k)] - \\&- \varepsilon \sin \theta (B^2 - \varepsilon \sin^2 \theta)^{-1/2} [F(\psi_1, k) - F(\psi_2, k)],\end{aligned} \quad (6.3.63)$$

причем теперь

$$\psi = \operatorname{am}(u, k) = \arctg \left(\frac{c}{a} \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta \right). \quad (6.3.64)$$

Для обеих зависимостей будут, разумеется, справедливы разложения (6.3.61) и (6.3.62).

Отметим, кстати, что для случая сферы ($k = 0$) из общей зависимости $\Lambda = \Lambda(\theta, i)$ следует частная:

$$\Lambda = \sec i [\Pi(\psi_1, \mu, 0) - \Pi(\psi_2, \mu, 0)], \quad (6.3.65)$$

и если вести отсчет долготы от точки узла, то в соответствии с формулами (6.3.58) и (6.3.29) приходим к известной формуле сферической тригонометрии:

$$\cos \Lambda_0 = \cos \theta \operatorname{cosec} i. \quad (6.3.66)$$

Зависимость $\Lambda = \Lambda(\varphi, \theta)$ в случае $k = 0$ и отсчете от точки узла превращается в следующую:

$$\Lambda_0 = B \sin^{-1} \theta \left[B^{-1} \sin \theta \frac{\pi}{2} - B^{-1} \sin \theta \arctg (B \sin^{-1} \theta \operatorname{tg} \psi) \right], \quad (6.3.67)$$

откуда при использовании формулы (6.3.64) получаем соответствующую формулу сферической тригонометрии:

$$\operatorname{tg} \Lambda_0 = \sin \varphi \operatorname{tg} \theta. \quad (6.3.68)$$

Используя полученные выше основные формулы, можно перейти к зависимостям, дающим связь длины геодезической линии S с разностью долгот Λ . Связь S и Λ может быть получена из совместного решения интегральных зависимостей $S = S(u)$ и $\Lambda = \Lambda(u)$. Заметим при этом, что поскольку u задается как функция двух параметров: или $u = u(\theta, i)$, или $u = u(\varphi, i)$, или $u = u(\theta, \varphi)$, то в иско- мых соотношениях пять параметров $S, \Lambda, \theta, i, \varphi$ будут связаны по четыре, образуя зависимости следующих типов: $S - \Lambda - \theta - i$, или $S - \Lambda - \varphi - i$, или $S - \Lambda - \theta - \varphi$.

Совместное решение уравнений $S = S(u)$ и $\Lambda = \Lambda(u)$, взятых в виде (6.3.32) и (6.3.52), приводит [81] к зависимостям типа

$$S = S(u, \Lambda) \quad \text{или} \quad \Lambda = \Lambda(u, S). \quad (6.3.69)$$

Более конкретный вид определяется выбором параметров, через которые выражается u (или соответственно амплитуда φ). Для наглядности возможные типы зависимостей $u = u(p_1, p_2)$ представлены в виде табл. 6.3.1.

Выбирая необходимую комбинацию параметров и желаемую функцию для их выражения ($\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ или $\operatorname{sc} u$), можно получить три различные зависимости:

$$S = S(\Lambda, \theta, i) \quad \text{или} \quad \Lambda = \Lambda(S, \theta, i) \quad (6.3.70)$$

$$S = S(\Lambda, \varphi, i) \quad \text{или} \quad \Lambda = \Lambda(S, \varphi, i) \quad (6.3.71)$$

$$S = S(\Lambda, \varphi, \theta) \quad \text{или} \quad \Lambda = \Lambda(S, \varphi, \theta). \quad (6.3.72)$$

Эти три зависимости дополняют уже полученные ранее семь формул [(6.3.11); (6.3.32) и (6.3.22); (6.3.32) и (6.3.40); (6.3.47) и (6.3.64); (6.3.52) и (6.3.22); (6.3.52) и (6.3.40); (6.3.63) и (6.3.64)] до полной группы формул эллиптической тригонометрии.

Отметим, что для случая сферы ($\rho = c = a$ и $k = 0$) и отсчета от точки восходящего узла геодезической линии из уравнений (6.3.33) и (6.3.57) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - S' &= \arcsin(\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i) = \arccos(\sin \varphi \operatorname{cosec} i) = \\ &= \arctg(\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{cosec} \theta), \end{aligned} \quad (6.3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \Lambda_0 &= \arccsc(\sec \theta \sin i) = \\ &= \operatorname{arcsec}(\operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} i) = \arctg(\operatorname{cosec} \varphi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (6.3.74)$$

Решая совместно эти уравнения и выбирая желаемый вид функции от нужной комбинации параметров, можно получить три различные зависимости. Так, взяв выражение в виде $S' = S'(\theta, i)$ и $\Lambda = \Lambda(\theta, i)$ и исключив из них угол θ , после соответствующих преобразований приходим к известной формуле сферической тригонометрии:

$$\operatorname{tg} S' = \operatorname{tg} \Lambda \sec i. \quad (6.3.75)$$

Выписав уравнения в виде $S' = S'(\varphi, i)$ и $\Lambda = \Lambda(\varphi, i)$ и исключив из них угол i , придем к другой формуле сферической тригонометрии:

$$\cos S' = \cos \Lambda \cos \varphi. \quad (6.3.76)$$

Вид эллиптической функции	Эксцентриситет	Параметры треугольника (p_1, p_2)		
		$\theta - i$	$\varphi - i$	$\varphi - \theta$
sn u	$\varepsilon \neq 0$	$\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i$	$[1 - \sin^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 i (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)]^{1/2}$	$\left(\frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \sec^2 \theta + 1\right)^{-1/2}$
	$\varepsilon = 0$	$\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i$	$(1 - \sin^2 \varphi \operatorname{cosec}^2 i)^{1/2}$	$(\operatorname{tg}^2 \varphi \sec^2 \theta + 1)^{-1/2}$
cn u	$\varepsilon \neq 0$	$(1 - \operatorname{ctg}^2 \theta \operatorname{ctg}^2 i)^{1/2}$	$\sin \varphi \operatorname{cosec} i (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi)^{-1/2}$	$\left(\frac{c^2}{a^2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 \theta + 1\right)^{-1/2}$
	$\varepsilon = 0$	$(1 - \operatorname{ctg}^2 \theta \operatorname{ctg}^2 i)^{1/2}$	$\sin \varphi \operatorname{cosec} i$	$(\operatorname{ctg}^2 \varphi \cos^2 \theta + 1)^{-1/2}$
sc u	$\varepsilon \neq 0$	$(\operatorname{tg}^2 \theta \operatorname{tg}^2 i - 1)^{-1/2}$	$[\sin^2 i \operatorname{cosec}^2 \varphi (1 - \varepsilon \cos^2 \varphi) - 1]^{1/2}$	$\frac{c}{a} \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta$
	$\varepsilon = 0$	$(\operatorname{tg}^2 \theta \operatorname{tg}^2 i - 1)^{-1/2}$	$(\sin^2 i \operatorname{cosec}^2 \varphi - 1)^{1/2}$	$\operatorname{ctg} \varphi \cos \theta$

Наконец, сопоставив выражения $S' = S'(\varphi, \theta)$ и $\Lambda = \Lambda(\varphi, \theta)$ и исключив из них угол φ , получим соответствующую формулу сферической тригонометрии

$$\sin S' = \sin \Lambda \operatorname{cosec} \theta. \quad (6.3.77)$$

Полученные зависимости представлены в виде табл. 6.3.2. В ней даны основные формулы, выраженные через эллиптические интегралы. Эти же зависимости представлены также в виде асимптотических разложений по степеням модуля k и тригонометрических функций, причем приведены только приближенные формулы, содержащие члены по k^4 , что является достаточным для навигационных расчетов. В последней колонке даны формулы сферической тригонометрии, являющиеся частным случаем формул, относящихся к эллиптическому пространству. Эти формулы по строкам сопоставлены с соответствующими общими формулами, из которых они получаются, если положить $\varepsilon = 0$.

Из табл. 6.3.2 видно, что в эллиптическом пространстве зависимости типов $S - \theta - i$, $S - \varphi - i$ и $S - \theta - \varphi$ одинаковы при выражении их через амплитуду эллиптического интеграла $\operatorname{am} i$, которая в свою очередь является функцией соответствующей комбинации параметров ($\theta - i$, или $\varphi - i$, или $\theta - \varphi$). Вид этой функциональной зависимости, который наиболее удобен для различных вариантов основных формул, также приведен в таблице, в колонке u .

Аналогично этому зависимости типа $\Lambda - \theta - i$, $\Lambda - \varphi - i$ и $\Lambda - \varphi - \theta$ имеют также одинаковое выражение через $\operatorname{am} i$. Зависимости типов $S - \Lambda - \theta - i$, $S - \Lambda - \varphi - i$ и $S - \Lambda - \varphi - \theta$ как производные от двух предшествующих групп в таблице опущены.

В табл. 6.3.2 показаны значения коэффициентов R_i , величины которых являются постоянными для данной геодезической линии. Графики зависимости коэффициентов R_s , R_{λ_1} , R_{λ_2} от угла наклона i даны на рис. 6.3.7.

На основе полученных зависимостей представляется возможным разработать алгоритмы решения различных навигационных задач непосредственно в рассматриваемом навигационном пространстве.

Приведем в заключение выражение для обобщенного уравнения навигации в двумерном пространстве типа эллипсоида вращения.

Воспользуемся зависимостью (6.3.32) для длины геодезической линии в таком пространстве, а также используем общие выражения уравнения навигации (3.6.4) и (3.6.9).

Тогда для рассматриваемого случая основная формула навигации примет вид:

$$\sum_{\mu=1}^2 (-1)^{\mu+1} \{R_s[E(\psi_1, k_\mu) - E(\psi_{\mu+1}, k_\mu)] - v_c k \Delta N_\mu\} = 0, \quad (6.3.78)$$

Зависимость

Тип	Эллиптическое пространство			Сферическое пространство ($\varepsilon=0$)
	Основные формулы	R_i	u	Приближенные формулы
$\theta-\varphi-i$	$\sin \theta = \cos i \times \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right)^{1/2} = \cos i \cdot B$	—	—	$\sin \theta = \cos i \sec \varphi$
$S-\theta-i$	$S = R_s [E(\psi_1, k) - E(\psi_2, k)]$	$R_s = a(1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2}$	$\operatorname{sn} u$	$S = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (f_1 \cdot \psi_i + f_2 \sin \psi_i \times$
				$\times \cos \psi_i + f_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i);$
$S-\varphi-i$			$\operatorname{cn} u$	где $f_1 = 1 - f_2;$
				$f_2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4;$
$S-\varphi-\theta$			$\operatorname{sc} u$	$f_3 = \frac{1}{32} k^4$
		$R_s = a(1 - \varepsilon B^{-2} \sin^2 \theta)^{1/2}$		$\operatorname{ctg} S' = \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta$

Зависимость

Тип	Эллиптическое пространство				Сферическое пространство ($\varepsilon=0$)
	Основные формулы	R_i	u	Приближенные формулы	
$\Lambda - \theta - i$	$\Lambda = R_{\lambda_1} [\Pi(\psi_1, \mu, k) - \Pi(\psi_2, \mu, k)] - R_{\lambda_2} [F(\psi_1, k) - F(\psi_2, k)]$	$R_{\lambda_1} = \sec i (1 - \varepsilon \times \cos^2 i)^{-1/2}$	$\operatorname{sn} u$	$\Lambda = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} [h_1 \psi_i + h_2 \sin \psi_i \times \cos \psi_i + h_3 \operatorname{arctg}(\sec i \operatorname{tg} \psi_i)],$ где $h_1 = R_{\lambda_1} \left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{16} k^4 - \frac{3}{8} k^4 \times \operatorname{ctg}^2 i \right) \operatorname{ctg}^2 i - R_{\lambda_2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 \right);$ $h_2 = R_{\lambda_2} \frac{1}{4} k^2 - R_{\lambda_1} \frac{3}{16} k^4 \operatorname{ctg}^2 i;$ $h_3 = R_{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{ctg}^2 i + \frac{3}{8} k^4 \operatorname{ctg}^4 i \right) \times \cos i$	$\cos \Lambda = \cos \theta \operatorname{cosec} i$
$\Lambda - \varphi - i$		$R_{\lambda_2} = \varepsilon \cos i (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{-1/2}$	$\operatorname{cn} u$		$\sin \Lambda = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} i$
		$R_{\lambda_1} = B^2 \operatorname{cosec} \theta (B^2 - \varepsilon \sin^2 \theta)^{-1/2}$ $R_{\lambda_2} = \varepsilon \sin \theta (B^2 - \varepsilon \times \sin^2 \theta)^{-1/2}$	$\operatorname{sc} u$		$\operatorname{ctg} \Lambda = \operatorname{cosec} \varphi \operatorname{ctg} \theta$
$\Lambda - \varphi - \theta$					

$$k = \sqrt{\varepsilon \sin i (1 - \varepsilon \cos^2 i)^{-1/2}};$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{c^2}{a^2}; \mu = \operatorname{tg}^2 k;$$

$$B = \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right)^{1/2}$$

$$\psi = \operatorname{am} u; \operatorname{sn} u = \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} i;$$

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cosec} i \left(\frac{c^2}{a^2} \operatorname{cosec}^2 \varphi + \varepsilon \right)^{-1/2};$$

$$\operatorname{sc} u = \frac{c}{a} \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta$$

где

$$R_s = a(1 - \varepsilon \cos^2 i)^{1/2},$$

здесь $\varepsilon = 1 - \frac{c^2}{a^2}$ (c и a — соответственно большая и малая полуоси эллипсоида); i — угол наклона геодезической линии к экватору; $E(\psi_j, k_\mu)$ — эллиптический интеграл второго рода, здесь $\psi_j = \arccos \left[\operatorname{cosec} i_\mu \left(\frac{c^2}{a^2} \operatorname{cosec}^2 \varphi_j + \varepsilon \right)^{1/2} \right]$ (φ — геоцентрическая

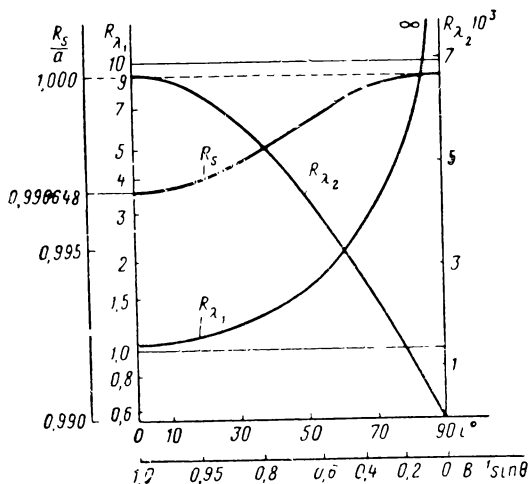


Рис. 6.3.7. Графики зависимости коэффициентов R_i от угла наклона геодезической линии i .

широта), $k_\mu = \sqrt{\varepsilon \sin i_\mu (1 - \cos^2 i_\mu)^{-1/2}}$; v_c — скорость сигнала; k — масштабный коэффициент моделирования времени; ΔN — разность навигационных параметров.

В данном случае уместно говорить о навигации с помощью радиоволн, поэтому скорость навигационного сигнала v_c принимается равной скорости света. Индекс 1 относится к точке пересечения трасс сигналов, индексы 2 и 3 — к конечным точкам трассы.

§ 6.4. АЛГОРИТМЫ ОСНОВНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим методы решения основных навигационных задач в двумерном навигационном пространстве типа эллипсоида вращения, используя для этого систему тригонометрических зависимостей, полученных в § 6.3.

Наиболее общей является задача определения поверхностных координат объекта навигации (φ_x и λ_x) по измерениям навигацион-

ных параметров относительно навигационных точек. Частной является задача определения азимутов θ линии визирования.

Будем иметь в виду при этом, что зависимости, разрешенные относительно интересующих элементов треугольника, могут легко находиться из основных формул § 6.3, разрешенных относительно других элементов.

Во избежание повторения однотипных выражений, которые содержатся в алгоритмах различных решений, введем для всех используемых зависимостей сокращенные обозначения, сопоставив им номера основных формул, непосредственно или после несложных преобразований эти зависимости дающих. Каждая зависимость будет обозначаться порядковой римской цифрой, которая и будет далее ради удобства сопровождать сокращенные обозначения.

6.4.1. СОКРАЩЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ИСХОДНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

I. Угол наклона геодезической линии, определяемый по известным широте φ и азимуту θ ,

$$i(\varphi, \theta) \quad (6.3.11).$$

II. Широта φ , определяемая по известным углу наклона i и азимуту θ ,

$$\varphi(i, \theta) \quad (6.3.11).$$

III. Азимутальный угол θ , определяемый по известным широте φ и углу наклона i ,

$$\theta(\varphi, i) \quad (6.3.11).$$

IV. Модуль k эллиптических интегралов, определяемый по известному углу наклона i ,

$$k(i) \quad (6.3.41).$$

V. Амплитуда ψ эллиптических интегралов, определяемая по известным азимуту θ и углу наклона i ,

$$\psi(\theta, i) \quad (6.3.29).$$

VI. Амплитуда ψ , определяемая по известным широте φ и углу наклона i ,

$$\psi(\varphi, i) \quad (6.3.43).$$

VII. Широта φ , определяемая по известным амплитуде ψ и углу наклона i ,

$$\varphi(\psi, i) \quad (6.3.43).$$

VIII. Коэффициент длины R_s , определяемый по известному углу наклона i ,

$$R_s(i) \quad (6.3.28).$$

IX. Эллиптический интеграл второго рода E , определяемый по известным его амплитуде ψ и модулю k ,

$$E(\psi, k) \quad (6.3.32), (6.3.38).$$

X. Длина геодезической линии S , определяемая по известным модулю k и амплитудам конечных точек ψ_1 и ψ_2 .

$$S(k, \psi_1, \psi_2) \quad (6.3.32), (6.3.38).$$

XI. Интеграл E_2 , относящийся к конечной точке и определяемый по модулю k , длине S , коэффициенту R_s и амплитуде ψ_1 , принадлежащей начальной точке,

$$E_2(k, S, R_s, \psi_1) \quad (6.3.32), (6.3.38).$$

XII. Амплитуда ψ , определяемая по известным значениям модуля k и интеграла E , $\psi(E, k)$.

Для нахождения $\psi(E, k)$ кроме использования таблиц эллиптических интегралов может применяться итерационный процесс [81], для которого исходное значение амплитуды берется из сферического ($\varepsilon = 0$) решения $\psi_0 = E$ и используется зависимость (6.3.38).

XIII. Угол наклона i , определяемый по известной длине S и широтам φ_1 и φ_2 конечных точек (рис. 6.3.1),

$$i(S, \varphi_1, \varphi_2).$$

Для нахождения $i(S, \varphi_1, \varphi_2)$ следует воспользоваться итерационным процессом, для которого первым приближением может служить сферическое ($\varepsilon = 0$) решение, вытекающее из (6.3.33).

XIV. Угол наклона i , определяемый по известной длине S , широте начальной точки φ_1 и азимуту конечной точки θ_2 .

$$i(S, \varphi_1, \theta_2).$$

Для нахождения $i(S, \varphi_1, \theta_2)$ возможно итерационное решение, первым приближением которого служит величина, полученная из сферического ($\varepsilon = 0$) решения уравнения типа (6.3.33), или $i_0 = \frac{\pi}{2}$.

XV. Коэффициент R_{λ_1} , выражаемый через угол наклона i ,

$$R_{\lambda_1}(i) \quad (6.3.52').$$

XVI. Коэффициент R_{λ_2} , выражаемый через угол наклона i ,

$$R_{\lambda_2}(i) \quad (6.3.52').$$

XVII. Коэффициент μ , выражаемый через угол наклона i ,

$$\mu(i) \quad (6.3.52').$$

XVIII. Долгота λ_2 конечной точки геодезической линии, определяемая по известным углу наклона i , долготе начальной точки λ_1 и амплитудам ψ_1 и ψ_2 конечных точек,

$$\lambda_2(i, \lambda_1, \psi_1, \psi_2). \quad (6.3.52), (6.3.62).$$

XIX. Угол наклона i , определяемый по известным широтам φ_1 и φ_2 и долготам λ_1 и λ_2 конечных точек,

$$i(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Для нахождения $i(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2)$ может применяться итерационное решение, первое приближение для которого берется из сферических формул типа (6.3.57).

XX. Угол наклона i , определяемый по известным широте φ_1 и долготе λ_1 начальной точки геодезической линии и азимуту θ_2 и долготе λ_2 ее конечной точки,

$$i(\varphi_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Находится $i(\varphi_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2)$ так же, как и в предшествующем случае.

XXI. Широта φ_2 конечной точки, определяемая по известным углу наклона i , широте φ_1 и долготе λ_1 начальной точки и долготе λ_2 конечной точки,

$$\varphi_2(i, \varphi_1, \lambda_1, \lambda_2).$$

Находится $\varphi_2(i, \varphi_1, \lambda_1, \lambda_2)$ так же, как и в предшествующем случае.

XXII. Широта φ_2 конечной точки, определяемая по известным длине S , широте φ_1 и долготе λ_1 начальной точки и долготе λ_2 конечной точки,

$$\varphi_2(S, \varphi_1, \lambda_1, \lambda_2).$$

Для нахождения $\varphi_2(S, \varphi_1, \lambda_1, \lambda_2)$ следует решить систему уравнений, относящихся к зависимостям X и XVIII:

$$\left. \begin{aligned} F(S, i, \varphi_1, \varphi_2) &= 0, \\ \Phi(\lambda_2, i, \lambda_1, \varphi_1, \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

XXIII. Широта φ_x объекта навигации, определяемая по известным широтам φ_1 и φ_2 и долготам λ_1 и λ_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстояниям S_1 и S_2 от объекта до этих точек (рис. 6.4.1).

$$\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2).$$

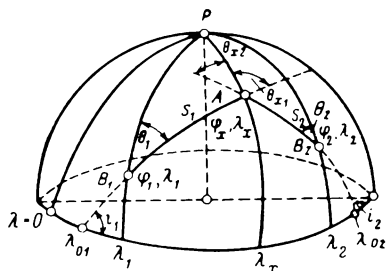
XXIV. Долгота λ_x объекта навигации, определяемая по известным широтам φ_1 и φ_2 и долготам λ_1 и λ_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстояниям S_1 и S_2 от объекта до этих точек

$$\lambda_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2).$$

Для нахождения $\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2)$ и $\lambda_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2)$ следует решить систему уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} F(S_1, \varphi_1, \varphi_x, i_1) &= 0, \\ \Phi(\varphi_1, \lambda_1, \varphi_x, \lambda_x, i_1) &= 0, \\ F(S_2, \varphi_2, \varphi_x, i_2) &= 0, \\ \Phi(\varphi_2, \lambda_2, \varphi_x, \lambda_x, i_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Рис. 6.4.1. К решению навигационных задач с использованием двух навигационных точек.



XXV. Широта φ_x объекта навигации, определяемая по известным широтам φ_1 и φ_2 и долготам λ_1 и λ_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстоянию S_1 и азимуту θ_2 :

$$\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, \theta_2).$$

XXVI. Долгота λ_x объекта навигации; определяемая по известным широтам φ_1 и φ_2 и долготам λ_1 и λ_2 двух навигационных точек, а также по измеренным расстоянию S_1 и азимуту θ_2 :

$$\lambda_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, \theta_2).$$

Для нахождения $\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, \theta_2)$ и $\lambda_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, \theta_2)$ решается система уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} F(S_1, \varphi_1, \varphi_x, i_1) &= 0, \\ \Phi(\varphi_1, \lambda_1, \varphi_x, \lambda_x, i_1) &= 0, \\ F(\theta_2, \varphi_2, i_2) &= 0, \\ \Phi(\varphi_2, \lambda_2, \varphi_x, \lambda_x, i_2) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

6.4.2. АЛГОРИТМЫ ОСНОВНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим алгоритмы решения основных задач навигации с использованием одной (см. рис. 6.3.1) или двух (см. рис. 6.4.1) навигационных точек. Координаты навигационных точек обозначены через $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2$ и λ_2 , а координаты объекта навигации — через φ_x и λ_x . Цифры в скобках, помещенные справа от условного обо-

значения каждого из этапов вычислений, указывают на номера действий или формул из п. 6.4.1, по которым можно произвести вычисления.

1. Определение φ_x и λ_x по измерениям азимута θ_1 и расстояния S . Определение φ_x и λ_x по известным координатам навигационной точки φ_1 и λ_1 , а также по измеренным θ_1 и S соответствует одному из наиболее распространенных навигационных методов — угломерно-дальномерному. Такую же формулировку имеет так называемая прямая геодезическая задача.

Порядок вычислений:

$i(\theta_1, \varphi_1)$	(I)
$k(i)$	(IV)
$\psi_1(\theta_1, i)$	(V)
$R_s(i)$	(VIII)
$E_1(\psi_1, k)$	(IX)
$E_x(S, \psi, k)$	(XI)
$\psi_x(E_x, k)$	(XII)
$\varphi_x(\psi_x, i)$	(VII)
$\lambda_x(\psi_1, \psi_x, \lambda_1, i)$	(XVIII)

2. Определение φ_x и λ_x по измерениям азимутов θ_1 и θ_2 . Может оказаться, что в процессе навигационных определений из навигационной точки измеряется азимут объекта θ_1 (прямой азимут), а на борту объекта — обратный азимут навигационной точки $\theta_2 + 180^\circ$. По измеренным θ_1 и θ_2 , а также по известным φ_1 и λ_1 можно определять координаты объекта. Правда, для реализации подобной методики требуется высокая точность измерения азимутальных углов.

Порядок вычислений:

$i(\theta_1, \varphi_1)$	(I)
$\varphi_x(\theta_2, i)$	(II)
$k(i)$	(IV)
$\psi_1(\theta_1, i)$	(V)
$\psi_2(\theta_2, i)$	(V)
$R_{\lambda_1}(i)$	(XV)
$R_{\lambda_2}(i)$	(XVI)
$\mu(i)$	(XVII)
$\lambda_x(i, \lambda_1, \psi_1, \psi_2)$	(XVIII)

3. Определение θ_x по известным φ_x и λ_x . Значительный практический интерес представляет задача определения азимута линии визирования навигационной точки с объекта по известным коор-

динатам φ_1 и λ_1 , а также по ранее найденным (любым способом) координатам φ_x и λ_x .

Порядок вычислений:

$$i(\varphi_1, \varphi_x, \lambda_1, \lambda_x) \dots \dots \dots (XIX)$$

$$\theta_x(\varphi_x, i) \dots \dots \dots (III)$$

4. Определение длины геодезической линии S по известным φ_x и λ_x . Определение длины геодезической линии S по известным координатам ее конечных точек относится к вспомогательным навигационным задачам. Эта задача по содержанию совпадает с обратной геодезической задачей.

Порядок вычислений:

$$i(\varphi_1, \varphi_x, \lambda_1, \lambda_x) \dots \dots \dots (XIX)$$

$$k(i) \dots \dots \dots (IV)$$

$$\psi_1(\varphi_1, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$\psi_x(\varphi_x, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$R_s(i) \dots \dots \dots (VIII)$$

$$S(k, \psi_1, \psi_x) \dots \dots \dots (X)$$

5. Определение φ_x и λ_x по измеренным S и θ_x . Такая задача возникает при самоопределении объекта по измерениям на его борту расстояния до навигационной точки и пеленга этой точки.

Порядок вычислений:

$$i(S, \varphi_1, \theta_x) \dots \dots \dots (XIV)$$

$$\varphi_x(i, \theta_x) \dots \dots \dots (II)$$

$$\psi_1(\varphi_1, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$\psi_x(\varphi_x, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$R_{\lambda_1}(i) \dots \dots \dots (XV)$$

$$R_{\lambda_2}(i) \dots \dots \dots (XVI)$$

$$\mu(i) \dots \dots \dots (XVII)$$

$$k(i) \dots \dots \dots (IV)$$

$$\lambda_x(\psi_1, \psi_x, \lambda_1, i) \dots \dots \dots (XVIII)$$

6. Определение λ_x по измеренным θ_1 и φ_x . Возможны такие варианты навигационных задач, когда на объекте измеряется одна из его координат (φ_x или λ_x), а также либо S , либо θ_x . Возможна и такая ситуация, когда при измерении на борту объекта одной из его координат располагают данными о S и θ_1 , сообщенными на борт по результатам их измерений в навигационной точке.

Если же измерены θ_1 и φ_x , то λ_x находится в следующем порядке:

$$i(\theta_1, \varphi_1) \dots \dots \dots (I)$$

$$k(i) \dots \dots \dots (IV)$$

$$\psi_1(\theta_1, i) \dots \dots \dots (V)$$

$$\psi_x(\varphi_x, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$R_{\lambda_1}(i) \dots \dots \dots (XV)$$

$$R_{\lambda_2}(i) \dots \dots \dots (XVI)$$

$$\mu(i) \dots \dots \dots (XVII)$$

$$\lambda_x(\psi_1, \psi_x, \lambda_1, i) \dots \dots \dots (XVIII)$$

7. Определение λ_x по измеренным S и φ_x . Последовательность вычислений:

$$i(S, \varphi_1, \varphi_x) \dots \dots \dots (XIII)$$

$$k(i) \dots \dots \dots (IV)$$

$$\psi_1(\varphi_1, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$\psi_x(\varphi_x, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$R_{\lambda_1}(i) \dots \dots \dots (XV)$$

$$R_{\lambda_2}(i) \dots \dots \dots (XVI)$$

$$\mu(i) \dots \dots \dots (XVII)$$

$$\lambda_x(\psi_1, \psi_x, \lambda_1, i) \dots \dots \dots (XVIII)$$

8. Определение λ_x по измеренным φ_x и θ_x . Если измерены φ_x и θ_x , то дается следующий расчет λ_x :

$$i(\theta_x, \varphi_x) \dots \dots \dots (I)$$

$$k(i) \dots \dots \dots (IV)$$

$$\psi_1(\varphi_1, i) \dots \dots \dots (VI)$$

$$\psi_x(\theta_x, i) \dots \dots \dots (V)$$

$$R_{\lambda_1}(i) \dots \dots \dots (XV)$$

$$R_{\lambda_2}(i) \dots \dots \dots (XVI)$$

$$\mu(i) \dots \dots \dots (XVII)$$

$$\lambda_x(\psi_1, \psi_x, \lambda_1, i) \dots \dots \dots (XVIII)$$

9. Определение φ_x по измеренным θ_1 и λ_x . Если измерениями даются θ_1 и λ_x , то широта φ_x определяется в следующем порядке:

$$i(\theta_1, \varphi_1) \dots \dots \dots (I)$$

$$\varphi_x(\varphi_1, \lambda_1, i, \lambda_x) \dots \dots \dots (XXI)$$

10. Определение φ_x по измеренным S и λ_x . В случае наличия величин S и λ_x широта φ_x находится:

$$\varphi_x(S, \varphi_1, \lambda_1, \lambda_x) \dots \dots \dots (XXII)$$

11. Определение φ_x по измеренным θ_x и λ_x . Если измерениями даются θ_x и λ_x , то порядок определения φ_x таков:

$$i(\varphi_1, \theta_x, \lambda_1, \lambda_x) \dots \dots \dots (XX)$$

$$\varphi_x(i, \theta_x) \dots \dots \dots (II)$$

12. Определение φ_x и λ_x по измеренным дальностям S_1 и S_2 . При использовании дальномерных радионавигационных средств (например, радиодальномеров) возникает задача определения координат объекта φ_x и λ_x по измерениям двух расстояний S_1 и S_2 при известных координатах навигационных точек $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2$ и λ_2 .

Порядок вычислений:

$$\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2) \dots \dots \dots (XXIII)$$

$$\lambda_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2) \dots \dots \dots (XXIV)$$

13. Определение углов θ_{x1} и θ_{x2} по измеренным дальностям S_1 и S_2 . Задача определения азимута линий визирования на две навигационные точки, расстояния до которых измерены, решается в следующем порядке:

$$\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2) \dots \dots \dots (XXIII)$$

$$i_1(S_1, \varphi_1, \varphi_x) \dots \dots \dots (XIII)$$

$$i_2(S_2, \varphi_2, \varphi_x) \dots \dots \dots (XIII)$$

$$\theta_{x1}(\varphi_x, i_1) \dots \dots \dots (III)$$

$$\theta_{x2}(\varphi_x, i_2) \dots \dots \dots (III)$$

14. Определение φ_x и λ_x по измеренным дальности S_1 и углу θ_{x2} . Возможен случай, когда относительно одной навигационной точки определяется дальность S_1 , тогда как относительно другой определяется угол θ_{x2} . Тогда φ_x и λ_x определяются в следующем порядке:

$$\varphi_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, \theta_{x2}) \quad \bullet \dots \dots (XXV)$$

$$\lambda_x(\varphi_1, \varphi_2, \lambda_1, \lambda_2, S_1, \theta_{x2}) \quad \bullet \dots \dots (XXVI)$$

Выше были рассмотрены способы решения основных навигационных задач. Изложенная методика служит основной для решения других возможных вариантов навигационных задач в пространстве рассмотренного типа.

§ 6.5. О ТАБЛИЦАХ ФУНКЦИЙ Φ_1 И Φ_2 ДЛЯ РАСЧЕТОВ ВРУЧНУЮ

При рассмотрении в предшествующем параграфе алгоритмов основных навигационных задач предполагалось, что расчеты выполняются на быстродействующих вычислительных машинах. Однако могут встретиться условия, при которых по необходимости потребуется выполнять расчеты вручную. В этом случае выполнение ряда операций, связанных с вычислением функций от эллиптических интегралов $E(\psi, i)$, $\Pi(\psi, i)$ и $F(\psi, i)$, будет затруднено из-за громоздкости расчетов.

Можно облегчить вычисления подготовкой специальных таблиц. С этой целью были рассчитаны таблицы функций $\Phi_1 = R_S E(\psi, i)$ и $\Phi_2 = R_{\lambda 1} \Pi(\psi, i) - R_{\lambda 2} F(\psi, i)$. Расчеты проводились на ЦВМ «М-20», при этом использовались формулы (см. приложение II), содержащие высшие члены разложения, что гарантировало получение верного восьмого знака.

Шаг таблиц выбирался из условий обеспечения линейной интерполяции. Диапазон изменения аргументов $\psi = 0 \div 90^\circ$, $i = 0 \div 90^\circ$.

Фрагменты таблиц функций Φ_1 и Φ_2 показаны в табл. 6.5.1 и 6.5.2. Для этого участка таблицы значения функций даются для каждых $30'$ по углам ψ и i .

Таблицы построены так, что зависимость функций Φ_1 и Φ_2 от угла i дается столбцами, тогда как в каждой строке содержатся относящиеся к некоторому i величины Φ_1 и Φ_2 , изменяющиеся по углу ψ .

Таблица функции Φ_1 дается в виде, обеспечивающем линейную интерполяцию при расчетах с точностью до 1 м. Значения Φ_1 выражены в дециметрах, значения Φ_2 — в радианах.

Функция $\Phi_1 = R_3 E(\psi, i)$

i	ψ					
	45°30'	46°00'	46°30'	47°00'	47°30'	48°00'
60°	50 585 253	51 140 677	51 696 088	52 251 487	52 806 874	53 362 248
60°30'	6 294	1 724	7 142	2 547	7 940	3 321
61°	7 323	2 760	8 184	3 596	8 996	3 483
61°30'	8 341	3 784	9 215	4 634	52 810 039	5 433
62°	9 347	4 797	51 700 235	5 660	1 072	6 471
62°30'	50 590 342	5 798	1 242	6 673	2 092	7 497
63°	1 324	6 787	2 238	7 675	3 099	8 511
63°30'	2 294	7 764	3 220	8 664	4 094	9 512
64°	3 252	8 727	4 190	9 640	5 076	53 370 500
64°30'	4 196	9 678	5 147	52 260 602	6 045	1 474
65°	5 127	51 150 615	6 090	1 552	7 000	2 435
65°30'	6 045	1 539	7 020	2 487	7 941	3 381
66°	6 949	2 449	7 935	3 408	8 868	4 314
66°30'	7 838	3 344	8 837	4 315	9 780	5 231
67°	8 714	4 225	9 723	5 207	52 820 678	6 135
67°30'	9 574	5 092	51 710 595	6 085	1 561	7 022
68°	50 600 420	5 943	1 452	6 947	2 428	7 895
68°30'	1 251	6 770	2 293	7 794	3 280	8 752
69°	2 066	7 600	3 119	8 625	4 116	9 593
69°30'	2 865	8 404	3 929	9 440	4 936	53 380 418
70°	3 649	9 193	4 723	52 270 238	5 739	1 226
70°30'	4 416	9 965	5 500	1 021	6 527	2 018
71°	5 167	51 160 721	6 261	1 786	7 297	2 793
71°30'	5 902	1 461	7 005	2 535	8 050	3 551
72°	6 619	2 183	7 732	3 267	8 786	4 291
72°30'	7 320	2 888	8 442	3 981	9 505	5 014
73°	8 003	3 576	9 134	4 677	52 830 206	5 719
73°30'	8 669	4 246	9 809	5 356	0 089	6 406
74°	9 317	4 899	51 720 465	6 017	1 553	7 025
74°30'	9 948	5 534	1 104	6 659	2 200	7 725
75°	50 610 560	6 150	2 724	7 284	2 828	8 357
75°30'	1 154	6 748	2 326	7 889	3 437	8 970
76°	1 730	7 327	2 909	8 476	4 027	9 564
76°30'	2 287	7 888	3 474	9 044	4 599	53 390 138
77°	2 825	8 430	4 019	9 592	5 151	0 694
77°30'	3 344	8 952	4 545	52 280 122	5 683	1 229
78°	3 845	9 456	5 052	0 632	6 196	1 746
78°30'	4 326	9 940	5 539	1 122	6 690	2 242
79°	4 787	51 170 405	6 007	1 593	7 163	2 718
79°30'	5 229	0 850	6 455	2 044	7 617	3 174
80°	5 652	1 275	6 883	2 474	8 050	3 610
80°30'	6 055	1 680	7 290	2 885	8 463	4 025
81°	6 437	2 066	7 678	3 275	8 855	4 420
81°30'	6 800	2 431	8 046	3 645	9 228	4 795
82°	7 143	2 776	8 393	3 994	9 579	5 148
82°30'	7 465	3 100	8 719	4 322	9 910	5 481

Функция $\Phi_2 = R_{\lambda_1} \Pi(\phi, i) - R_{\lambda_2} F(\phi, i)$

i	ψ					
	45°30'	46°00'	46°30'	47°00'	47°30'	48°00'
60°	1,11279401	1,11962281	1,12641152	1,13331316	1,13978448	1,14637159
60°30'	1879925	2559339	3231701	3897159	4555862	5207353
61°	2489985	3162764	3828451	4487199	5139158	5784475
61°30'	3106571	3772545	4431391	5083265	5728321	6368708
62°	3729874	4386969	5040505	5685341	6323333	6954934
62°30'	4359279	5011121	5655776	6293407	6924173	7548229
63°	4995370	5639881	6277184	6907443	7530919	8147470
63°30'	5637927	6274929	6904405	7527422	8143243	8752329
64°	6286927	6916240	7538314	8153318	8761419	9362778
64°30'	6942344	7563787	8177982	8785102	9385315	9978784
65°	7604149	8217539	8823878	9422740	1,20014996	1,20600312
65°30'	8272310	8877462	9473566	1,20066197	0650127	1,227326
66°	8948790	9543520	1,20133008	0715433	1290968	1859784
66°30'	9627550	1,20213872	0796564	1370407	1937376	2497644
67°	1,20314548	0893974	1465988	2037073	2589306	3140860
67°30'	1007736	1578078	2141233	2697383	3246708	3789382
68°	1707064	2269235	2822247	3369286	3909532	4443160
68°30'	2412479	2964289	3508976	4046726	4577722	5102139
69°	3123321	3666182	4201361	4729646	5251220	5766260
69°30'	3841330	4373852	4899341	5417985	5929966	6435462
70°	4564839	5087234	5602950	6111876	6613893	7109682
70°30'	5293778	5806259	6311520	6810951	7302936	7786852
71°	6029874	6530952	7026177	7514939	7997022	8472903
71°30'	6769248	7260336	7745845	8224164	8696077	9161759
72°	7515418	7996431	8470745	8938548	9400023	9855546
72°30'	8267098	8737251	9200791	9657906	1,30108778	1,30553583
73°	9024198	9483307	9935997	1,30382154	0822259	1256387
73°30'	9786821	1,30234506	1,30234506	1111201	1540577	1963872
74°	1,30554270	0990751	1420918	1844955	2263041	2675348
74°30'	1327042	1751341	2170838	2583318	2990156	3391322
75°	2104828	2517370	2925030	3326190	3721924	4111499
75°30'	2887517	3288729	3683986	4073467	4457343	4835181
76°	3574994	4064106	4447397	4825042	5197210	5564064
76°30'	4467138	4843985	5215149	5580803	5941115	6296244
77°	5263925	5628242	5987123	6340937	6688948	7032212
77°30'	6064328	6416756	6763200	7104426	7440594	7771958
78°	6870313	7209396	7543253	7872048	8195935	8515066
78°30'	7579846	8006031	8327156	8643579	8954951	9261721
79°	8493585	8806525	9114776	9418291	9717219	1,40011702
79°30'	9310787	9610739	9905978	1,40196955	1,40482911	0764886
80°	1,40131305	1,40416530	1,40700825	0978335	1251798	1511148
80°30'	0956387	1229451	1496574	1763195	2023748	2280360
81°	1784979	2044254	2299882	2551096	2798825	3042391
81°30'	2616022	2861885	3103800	3341894	3576292	3807108
82°	3450456	3682489	3910778	4135446	4356808	4574577
82°30'	4287816	4505307	4720464	4931802	5133431	5344058

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ОКОЛОПЛАНЕТНОЙ НАВИГАЦИИ

§ 7.1. САМООПРЕДЕЛЕНИЕ И ИНООПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ ОКОЛОПЛАНЕТНОЙ НАВИГАЦИИ

В предшествующей главе рассматривались методы навигации, относящиеся к условиям, когда и определяющийся объект и РНТ располагаются на некоторой геометрически правильной поверхности, которой употребляется фигура планеты. Все прочие ситуации можно отнести или к околопланетной или к межпланетной навигации. Провести границу здесь трудно, однако можно считать, что околопланетная навигация ограничивается условиями, когда расстояния между объектом и РНТ соизмеримы с радиусом планеты, а при межпланетной навигации эти расстояния значительно превышают размеры планеты.

При навигации подвижных объектов вблизи поверхности планеты (в море, на суше, в атмосфере, на околопланетных орбитах) измерения и обработка информации могут выполняться как на борту самого объекта, так и на навигационных точках, относительно которых проводятся измерения. Первый вариант носит название метода *самоопределения*, поскольку объект сам определяет свое местоположение или параметры движения. Во втором случае навигационные определения проводятся не в пункте расположения объекта, а в каком-то ином по отношению к нему месте. Этот вариант можно называть методом *иноопределения**.

Навигационные точки могут располагаться на поверхности планеты и на околопланетных орбитах. В первом случае условия для измерений и обработки информации более удобные, поэтому при прочих равных условиях навигационные определения, выполняемые с таких НТ, отличаются большей точностью. На первых этапах развития авиации определение координат проводилось именно с

* Этот термин представляется более общим по сравнению с используемыми «определение с поверхности Земли» или «определение с помощью наземных средств». Семантически он оправдан, так как связан с словами «иноткуда» или «инотколь», имеющими смысл «не отсюда, из какого-либо иного места».

Земли. Однако метод иноопределения обладает ограниченной пропускной способностью. По мере увеличения числа полетов стал широко распространяться метод самоопределения, при котором активная работа с РНТ переносилась на борт летательных аппаратов. Аналогичная картина наблюдается и в космонавтике. Первые ИСЗ и КА обеспечивались только наземными измерениями, что позволило реализовать максимально возможную точность навигации. Значительный рост числа космических пусков приводит к тому, что пропускная способность наземных измерительных комплексов оказывается недостаточной, и это вызвало в последние годы развитие космических методов самоопределения.

Проведем краткий обзор основных методов околопланетной навигации, обратившись вначале к самоопределению.

Для навигации на большие расстояния таких приземных объектов, как корабли, подводные лодки, самолеты, весьма перспективными оказались методы, основанные на использовании околосемных навигационных точек. Подобные методы обладают рядом существенных достоинств: практически неограниченной дальностью действия, независимостью точности от дальности, высокой помехозащищенностью и сравнительно высокой точностью. Навигационными точками служат искусственные источники электромагнитного излучения. Искусственные спутники Земли позволяют увеличить число внеземных радионавигационных точек и обеспечить навигацию в пределах всей земной поверхности.

Особое значение навигационные искусственные спутники Земли (НИСЗ) имеют для вождения подводных лодок и кораблей, длительное время находящихся в автономном плавании. Для их обеспечения в начале 60-х годов была создана система «Транзит», получившая позднее название «Навсат» (Navsat-navigational satellite), которая включает в себя 4 НИСЗ с высотой орбиты около 1000 км.

Успех использования спутников для кораблевождения позволил поставить вопрос о создании спутниковой системы для навигации трансокеанских самолетов и управления их движением. На такую систему могут возлагаться задачи: определения местоположения самолета, сохранения безопасности полета, предотвращения столкновений, проведения самолетами спасательных операций на море, передачи различных сообщений и команд управления. Следует отметить, что последняя функция, по существу связная, будет в дальнейшем возлагаться на НИСЗ, предназначенные для навигации морских кораблей.

Считается целесообразным использовать навигационные ИСЗ для определения местоположения наземного транспорта при движении его по безориентирной, пустынной местности.

В самое последнее время методы самоопределения по НИСЗ начинают переноситься и в навигацию космических аппаратов. Создана методика обработки доплеровского сигнала, обеспечивающая авто-

матическую выдачу навигационных данных, используемых для вождения не только кораблей и самолетов, но также ракет и искусственных спутников Земли. Наряду с этим навигационным ИСЗ придается значение как средства определения параметров движения обитаемых КА, в связи с чем планируются навигационные эксперименты с участием космонавтов на КА типа лунных «Apollo».

Большой интерес представляют методы самоопределения по точкам, расположенным на поверхности планет. Проработаны основы дальномерной системы самоопределения, в которой навигационные измерения проводятся на борту КА по наземным РНТ, снабженным приемопередатчиками, после чего бортовая ЦВМ вычисляет требуемые параметры движения. Аналогичные РНТ могут устанавливаться на поверхности Луны и других планет в интересах окололунной и околопланетной навигации. Этот метод представляет космическим аппаратам широкие возможности автономных действий.

В самое последнее время стали развиваться методы автономной орбитальной навигации на основе визирования неизвестных наземных ориентиров в оптическом диапазоне волн. Для первоначального определения координат неизвестного ориентира используют априорную информацию о положении КА и измерения двух углов наземной точки относительно ориентированных осей КА. Последующие измерения статистически обрабатываются так, что производится уточнение параметров движения КА одновременно с коррекцией координат ориентира.

При уточнении таких параметров движения КА, как полуось a , эксцентриситет e и перигейное расстояние ω , большую роль играет значение радиус-вектора ρ КА. Легко представить, что измерение высоты КА над поверхностью планеты доставляет информацию именно о ρ . В связи с этим при самоопределении КА измерения высоты помогают с высокой точностью определить внутрисферические параметры движения. Поскольку радиовысотометры автономны в своей работе и экономичны по конструкции, такие средства получают распространение [63].

Что касается методов иноопределения, то следует сказать, что в настоящее время параметры движения КА по преимуществу определяются с Земли. Из ряда наземных точек измеряются навигационные параметры КА, результаты измерений передаются в одну из точек (в координационно-вычислительный центр), где с использованием быстродействующих вычислительных средств решается навигационная задача при статистической обработке информации.

Упомянутая выше методика основана на независимых измерениях каждой из наземных РНТ. Дальнейшее развитие техники сделало возможным применить к задаче определения координат метод триангуляции, используемый в геодезии. Геодезическая методика предполагает, что координаты трех наземных точек известны, а ищутся координаты четвертой точки. На ИСЗ располагается ретранслятор,

с помощью которого фазовым способом измеряются расстояния до наземных точек. Это позволяет уточнить координаты самого ИСЗ и далее, используя тот же ретрансляционный способ, привязать координаты четвертой, неизвестной точки. Подобная методика реализует высокую точность определения наземных координат, а также координат ИСЗ — ретранслятора. Очевидно, что ограничив задачу определением координат только ретранслятора, можно получить высокоточную методику местоопределения околоземного КА.

Представляет интерес метод иноопределения с активной работой на борту навигационного ИСЗ [67]. По запросу корабля с ИСЗ проводятся измерения навигационных параметров, которые затем обрабатываются спутниковым вычислительным устройством. Найденные на борту ИСЗ координаты корабля сообщаются ему по каналу связи.

Методам самоопределения КА, а также определения чужих координат на борту навигационных ИСЗ предстоит интенсивное развитие, особенно в связи с тем, что в последнее время достигнуты заметные успехи в области создания компактных и высокоэффективных бортовых ЦВМ, которые необходимы для реализации этой методики.

Рассмотрим далее основы методики околоземной навигации по орбитальным РНТ, имея в виду, что приводимые соотношения в принципе сохраняются и для случаев навигации по искусственным спутникам Луны или других планет.

§ 7.2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИСТЕМЫ РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ ТОЧЕК И УСЛОВИЙ ИЗМЕРЕНИЙ

При использовании орбитальных точек элементы навигационной системы находятся в относительном движении. Именно это определяет основные черты навигационной методики и особенности построения навигационных систем.

Принципиальной основой использования орбитальных тел в качестве навигационных точек является закономерный характер их обращения относительно Земли, вследствие чего координаты таких подвижных РНТ могут прогнозироваться, а следовательно, — быть известными на требуемые моменты времени.

При выборе параметров орбиты РНТ должны учитываться следующие основные соображения. Влияние на орбиту возмущающих факторов должно быть столь малым, чтобы можно было с требуемой точностью вести прогноз параметров движения на нужный срок вперед. Высота орбиты должна обеспечивать максимально необходимые размеры зоны видимости и наиболее продолжительный интервал пребывания РНТ в области обзора с объекта навигации. При этом, естественно, надлежит стремиться к минимальной мощности передатчика РНТ. Ориентация орбиты навигационной точки должна

соответствовать максимальной продолжительности ее наблюдаемости в районах наиболее вероятного нахождения объектов навигации — самолетов, кораблей и т. п.

Влияние высоты H РНТ над поверхностью Земли на диаметр D зоны, из всех точек которой она может наблюдаться одновременно, находится из очевидных геометрических соображений. Так, для случая прямолинейного распространения радиоволн связь между D и H дается соотношением

$$D = 223 \operatorname{arc} \sec \left(\frac{H}{R_3} + 1 \right), \quad (7.2.1)$$

где $R_3 = 6371$ км; H и D выражены в километрах, а $\operatorname{arc} \sec$ — в градусах.

График зависимости $D = D(H)$ показан на рис. 7.2.1, причем по вертикальной оси даны линейное D и угловое Θ выражения диаметровой дуги зоны прямой видимости, а по горизонталь-

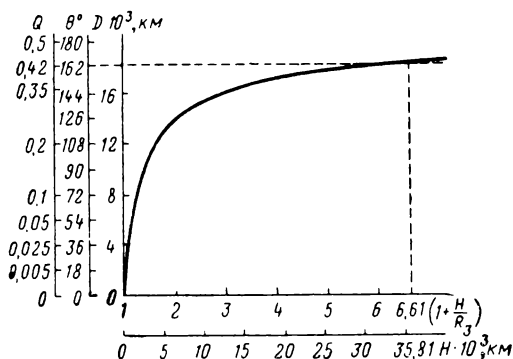


Рис. 7.2.1. Зависимость размера зоны геометрической видимости орбитальной навигационной точки от ее высоты.

ной оси — абсолютная высота H над поверхностью Земли и относительная удаленность от центра Земли, выраженная в земных радиусах $(1 + \frac{H}{R_3})$. Кроме того, приведен масштаб в единицах Q — площади обзора, отнесенной ко всей поверхности земного шара.

Из графиков видно, что при относительной высоте $(1 + \frac{H}{R_3}) < 6,6$ угол $\Theta < 162^\circ$. Наряду с этим все РНТ, кроме стационарных, для которых период обращения равен периоду вращения Земли вокруг своей оси и которые лежат в экваториальной плоскости, будут перемещаться относительно земной поверхности. Поэтому для создания глобальной системы необходимо применить несколько (n) РНТ.

При использовании стационарных РНТ достаточно иметь $n = 5$ (рис. 7.2.2), чтобы в любой точке земной поверхности в полосе широт, где $|\varphi| < 81^\circ$, в поле радиовидимости объекта навигации оказались по крайней мере две РНТ. В этих условиях добавление 1—2 полярных РНТ придаст системе вполне глобальный характер.

Стационарные РНТ, однако, не позволяют реализовать на борту малоподвижных приземных объектов скоростные методы измерений и, стало быть, осуществлять навигацию только по одному радиоориентире. Такие методы можно применить лишь при навигации КА.

При уменьшении высоты РНТ период их обращения уменьшается и число оборотов за сутки возрастает.

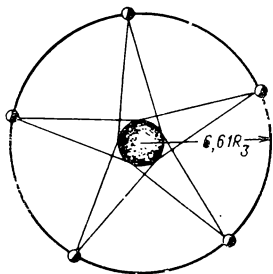


Рис. 7.2.2. Схема расположения радионавигационных точек на стационарной орбите.

Из одного и того же наземного пункта последовательно во времени может наблюдаться несколько проходов одной и той же орбитальной навигационной точки. Число проходов зависит от высоты орбиты. При $H = 900 \div 1700$ км суточное число оборотов $N_c = 15 \div 12$. Поскольку за время одного обращения Земля повернется на $24\text{—}30^\circ$, то каждый последующий виток будет смещаться к западу (для орбит прямого типа) — на экваторе на 2660—

3340 км и на широте $\varphi = 55^\circ$ соответственно на $1490\text{—}1870$ км. Поэтому, принимая во внимание размеры зоны видимости для рассматриваемых высот РНТ, можно убедиться, что перекрытие составит $2,0\text{—}4,6$ раза.

Полярные РНТ ($i = 90^\circ$) последовательно во времени наблюдаются в любой точке земной поверхности. При $i < 90^\circ$ их след на земной поверхности будет доходить до широт $\varphi = i$. В этом случае для углов $i = 60\div 65^\circ$ проекции орбит дают наиболее плотную сетку в районах интенсивного движения самолетов и кораблей.

Оптимальная высота H орбит навигационных точек, предназначенных для обеспечения самолетовождения и кораблевождения, лежит в пределах $1000\text{—}3000$ км. В этих условиях возмущения за счет сопротивления атмосферы будут столь малыми, что представляется возможным точно прогнозировать координаты РНТ вперед на несколько витков.

Количество орбитальных навигационных точек выбирается с учетом требований, предъявляемых к дискретности определений.

Если ставить требование возможности навигационных определений в любое время суток и в любом месте земной поверхности, то удовлетворить его можно будет только при условии применения синхронно обращающихся РНТ, причем количество их будет значительным. Так, для высоты $H = 1250$ км потребуется $n = 24$ РНТ.

Применение независимо обращающихся, несинхронизированных

РНТ обеспечит лишь дискретные навигационные определения, и значительное увеличение числа РНТ не устранил этого. В этом случае интервал времени между последовательными наблюдениями может изменяться в широких пределах, достигая в худшем случае периода обращения каждой из РНТ.

Системы с подвижными навигационными точками рассматриваются как средства дискретной навигации. К примеру, для высоты орбиты $H = 1000$ км период обращения составит: $T = 5,24 (R_3 + H)^{3/2} = 5,24 (6,37 + 1,00)^{3/2} = 105$ мин.

Диаметр зоны прямой видимости в соответствии с формулой (7.2.1) будет около 6700 км. Если применять измерения в направлениях выше 6° над горизонтом, то при $i = 90^\circ$ такая РНТ обеспечит возможность навигационных определений на экваторе в полосе долгот $\Delta\lambda = 120^\circ$. Следовательно, при числе $n = 3$ навигационных точек возможна будет навигация с дискретностью 105 мин в любом районе земного шара.

Если учесть, что наблюдатель перемещается, то появится возможность уменьшения дискретности. Дело в том, что при некомпланарности векторов скорости подвижного объекта и РНТ одной и той же навигационной точкой можно воспользоваться несколько раз в различных точках маршрута. При этом чем больше скорость объекта навигации, тем большее число последовательных определений будет по одной РНТ. Заметным такой эффект будет при навигации самолетов.

Нетрудно убедиться в том, что при полете самолетов по основным межконтинентальным маршрутам со скоростью $W = (1 \div 3)$ М можно с помощью всего одной РНТ (с $H = 1000$ км) выполнить 2—4 корректирующих навигационных определения.

Следует отметить, что имеется принципиальная возможность путем соответствующего запуска навигационных точек получить локализованные на земной поверхности зоны расположения подспутниковых точек. Так, если, например, с экватора последовательно через каждые 6 часов произвести запуски в южном направлении четырех полярных РНТ с суточным периодом обращения, то эти РНТ будут обращаться в двух взаимно перпендикулярных плоскостях синхронно с обращением Земли вокруг своей оси (рис. 7.2.3). При этом через каждые 6 часов будет повторяться одно и то же их взаимное расположение (с изменением лишь порядковых номеров РНТ). Образуются районы, где круглосуточно будут находиться по крайней мере две подспутниковые точки, и районы, куда они совсем не будут заходить. Географическое положение этих локальных зон можно изменять, меняя долготу точки старта и прямое направление вывода на обратное.

Продолжительность t_n наблюдения РНТ зависит от высоты ее орбиты и углового расстояния α наблюдателя от плоскости орбиты. В свою очередь, α непосредственно связано с максимальной угловой высотой $h_{\max}$, под которой наблюдается РНТ в момент ее кульмина-

ции. На рис. 7.2.4. дан график зависимости t_n от α для высоты орбиты $H=1000$ км. Наряду с масштабом α показан масштаб $h_{\max}$.

В результате пеленгации орбитальных точек измеряются топоцентрические координаты — высота h и азимут A . Координаты h и A таких точек изменяются во времени намного быстрее, чем коор-

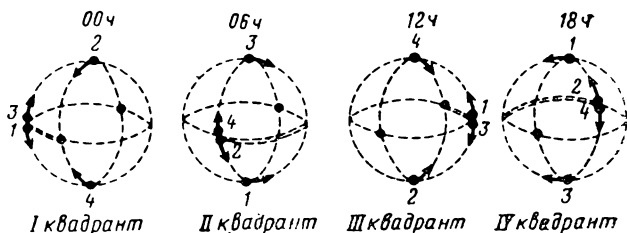


Рис. 7.2.3. Схема движения орбитальных РНТ, создающая локальные зоны расположения подспутниковых точек

динаты естественных небесных источников излучения. Законы изменения $h(t)$ и $A(t)$ различны, причем A изменяется в значительных пределах. На рис. 7.2.5 показаны зависимости $h(t)$ и $A(t)$ для РНТ с высотой орбиты $H=1000$ км и при максимальном значении высо-

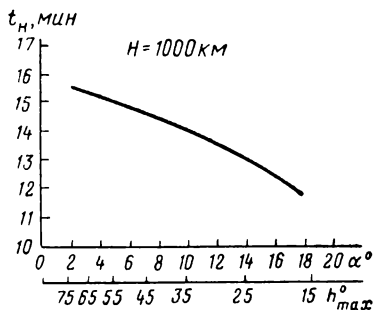


Рис. 7.2.4. Зависимость продолжительности наблюдения РНТ от удаленности объекта навигации от следа орбиты.

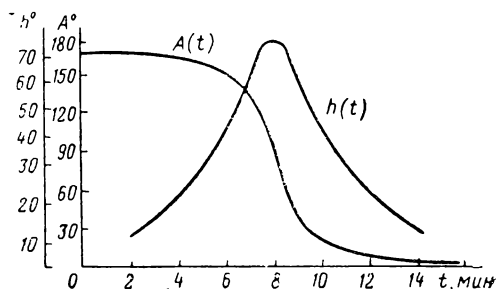


Рис. 7.2.5. Графики зависимости высоты h и азимута A от времени при $H=1000$ км и $h_{\max}=70^\circ$.

ты $h_{\max}=70^\circ$. Из графиков 7.2.4 и 7.2.5 видно, что общее время наблюдений такой навигационной точки составляет примерно 16 мин, причем в течение 12-мин она наблюдается при углах $h > 20^\circ$.

Высота h , измеренная из некоторой наземной точки, не будет тождественна геоцентрической высоте h_r , как это можно принять при навигации по естественным светилам. Разность $h_r - h$ пред-

ставляет собой параллакс p (рис. 7.2.6), величина которого выражается в виде

$$p = \arcsin [R_3 \cos h (R_3 + H)^{-1}]. \quad (7.2.2)$$

Находя связь дифференциалов Δh и Δh_r , можно прийти к соотношению

$$\Delta h = \Delta h_r + \Delta h \sin h \left[\left(1 + \frac{R_3}{H} \right)^2 - \cos^2 h \right]^{-1/2}, \quad (7.2.3)$$

из которого следует, что $\Delta h_r < \Delta h$.

При использовании дальномерных методов, в результате измерений определяется расстояние r от навигационной точки до подвижного объекта, которое представляет собой наклонную дальность. Величина r связана с длиной S геодезической линии, соединяющей наблюдателя с проекцией РНТ на поверхность Земли. Для случая,

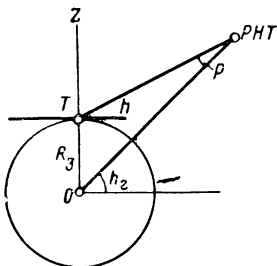


Рис. 7.2.6. К выводу выражения для параллакса p .

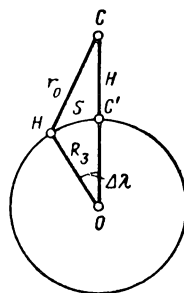


Рис. 7.2.7. К выводу выражения для разности долгот $\Delta \lambda$.

когда измеряемая дальность является траверсной r_0 (или наименьшей за прохождение РНТ) и $i = 90^\circ$, величина S может приблизительно выражаться через разность долгот $\Delta \lambda$. Связь $\Delta \lambda$ с r_0 нетрудно установить из геометрических соображений, пользуясь рис. 7.2.7, где показано сечение Земли плоскостью, перпендикулярной к плоскости орбиты, причем средний радиус Земли обозначен через R_3 , а геоцентрическая высота РНТ — $(R_3 + H)$. Из решения треугольника OCH следует, что

$$\Delta \lambda = 2 \arcsin \left[\frac{r_0^2 - H^2}{(2R_3 + H)^2 - r_0^2} \right]^{1/2} \quad (7.2.4)$$

При необходимости более точного вычисления S с учетом сжатия Земли следует пользоваться формулами § 6.3, беря в качестве исходных координат геоцентрические широту и долготу проекции навига-

ционной точки φ_c и λ_c и наблюдателя φ_n и λ_n , а также надлежит учитывать различие между малым кругом (параллелью) и большим кругом, перпендикулярным плоскости орбиты, в котором в действительности находится объект навигации.

§ 7.3. СОГЛАСОВАНИЕ НАЧАЛ ОТСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ И ВРЕМЕНИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОРБИТАЛЬНЫХ РНТ

При измерениях по орбитальным РНТ началом отсчета навигационных параметров будет ИСЗ, тогда как параметры движения околоземного объекта определяются затем в геоцентрической системе координат. Поскольку текущее положение РНТ меняется, требуется постоянно согласовывать начала отсчета пространственных координат. Реализация этого требования сводится к обеспечению объекта навигации данными о геоцентрических координатах РНТ на любой момент измерений.

Координаты небесных светил, вычисленные для ряда последовательных моментов времени, принято в астрономии называть *эфемеридами*. Поэтому сведения о текущих координатах навигационных ИСЗ называются эфемеридной информацией. Снабжение навигаторов этой информацией может осуществляться по-разному.

Наиболее удобным представляется такой вариант работы, когда эфемериды с требуемой дискретностью и точностью рассчитываются заранее на все время полета (плавания) и передаются экипажу до старта в виде соответствующей таблицы. В процессе измерений данные выбираются из этой таблицы непосредственно или путем элементарной интерполяции. Пределом развития этого варианта явится предварительная публикация справочника, наподобие астрономических ежегодников, в которых даются эфемериды естественных небесных тел.

Второй вариант работы относится к условиям, когда на все время навигационной работы нельзя дать прогноз с нужной точностью. Приходится периодически, по мере появления уточненных данных передавать на борт подвижного объекта очередную порцию эфемеридной информации. В этих условиях наиболее эффективным оказывается передача информации по космическому радиоканалу. Правда, нет необходимости привлекать для этого дополнительные связные ИСЗ, так как сам навигационный ИСЗ способен решить эту задачу в режиме ретрансляции с задержкой. Рассчитанные на Земле эфемериды передаются на борт НИСЗ, где они запоминаются и затем посылаются всем объектам навигации, находящимся в зоне приема сигналов данной орбитальной РНТ. Хранимая информация с периодичностью, обеспечивающей учет ее изменения, корректируется на основе свежих данных прогноза.

Что касается вида эфемерид, то наиболее универсальной является совокупность трех прямоугольных геоцентрических координат и трех составляющих вектора скорости НИСЗ, выдаваемых с такой дискретностью, которая допускает без потери точности нахождение промежуточных значений с помощью простых интерполяционных приемов. Для навигации приземных морских объектов достаточным оказывается интервал в 1 мин [23, 60].

Снабжение потребителей эфемеридной информации с необходимой дискретностью само по себе не требует закладки в память НИСЗ полного объема данных. В самом деле, при наличии на его борту вычислительной машины можно было бы ограничиться передачей с Земли только начальных условий (кеплеровых элементов) для каждого прогнозируемого витка, возложив на спутниковую машину расчет по этим данным эфемерид для всех требуемых точек каждого витка, полный объем которых и будет далее посылаться на объекты навигации.

Можно было бы применить и такую схему работы, когда НИСЗ ретранслирует получаемый с Земли прогноз начальных условий движения, а на объекте навигации с помощью ЦВМ решаются уравнения движения и вычисляются текущие координаты и составляющие скорости на моменты навигационных измерений, причем эти расчеты проводятся совместно с решением навигационных задач. Разумеется, такая организация эфемеридной службы может быть применена лишь при условии, что все объекты навигации имеют бортовые ЦВМ с требуемыми вычислительными возможностями.

Точность и долговременность прогноза движения навигационных ИСЗ зависят от полноты теории их движения. Поскольку высоты НИСЗ таковы, что случайные возмущения орбиты весьма малы по сравнению с регуляторами, точность описания движения определяется в основном степенью изученности гравитационного поля Земли. При создании первых НИСЗ накопленный объем геофизических знаний еще не позволял рассчитывать на использование более чем суточного прогноза, поэтому был принят вариант периодического обновления эфемеридной информации в пределах суточного срока [23].

Дальнейший прогресс геофизических исследований, проведенных с помощью навигационных и геодезических ИСЗ, открыл новые возможности для длительного прогнозирования эфемерид.

В результате уточнения формы и размеров Земли удалось создать модель ее гравитационного поля, включающую члены разложения до восьмого порядка и особые резонансные члены 13-го и 14-го порядков, причем предполагается в дальнейшем определить все члены до 10-го порядка. Это создает основу для вычисления эфемерид вперед на год [60].

Повышение точности прогноза и увеличение его срока приводят не только к повышению точности навигационных определений,

но и к существенному упрощению организации эфемеридной службы и используемой аппаратуры.

Измеренные навигационные параметры и эфемериды должны с высокой точностью привязываться к текущему времени. Это не вызывает затруднений при навигации самолетов, кораблей и других подвижных объектов, продолжительность маршрута которых без связи с Землей не превышает нескольких суток, если только на их борту имеется высокостабильный эталон времени. При относительной нестабильности 10^{-9} временная ошибка не превысит 1 мсек в течение примерно 10 суток. Однако для таких объектов, как подводные лодки, способные по нескольку месяцев находиться в автономном плавании, оказывается необходимым периодически корректировать бортовое время.

Согласование начала отсчета бортового времени с началом отсчета наземной временной шкалы может обеспечить сам навигационный ИСЗ, если его использовать в качестве ретранслятора точного времени. Наблюдения на Земле за сигналами ИСЗ позволяют решить навигационно-временную задачу, т. е. выявить расхождение спутниковой бортовой шкалы с наземной. На основе этих измерений с помощью корректирующих сигналов, посылаемых с Земли, проводится согласование этих временных шкал. Таким образом, орбитальная РНТ будет хранить наземное время. При дальнейшем полете РНТ излучает сигналы точного времени, по которым навигаторы, решая навигационно-временную задачу, подстраивают свои бортовые часы.

Требования к точности согласования начал отсчета времени повышаются, если бортовой эталон используется также для формирования опорных сигналов при измерении дальности беззапросным способом.

§ 7.4. ДАЛЬНОМЕРНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ РНТ

Дальномерный метод основан на измерении навигационных параметров, выражающих расстояние между радионавигационной точкой и подвижным объектом. Он может реализоваться в вариантах, когда над радиогоризонтом находятся несколько РНТ, расстояния до которых измеряются одновременно, и когда расстояния измеряются до точек, последовательно во времени занимаемых одной перемещающейся РНТ, при соответствующем учете движения объекта навигации в интервалах между измерениями.

Геометрические основы дальномерной методики с использованием нескольких РНТ иллюстрируются рис. 4.2.1, где показана совокупность сферических поверхностей положения, используемых для пространственного местоопределения.

Основы дальнометрического местоопределения подвижного объекта по одной РНТ поясняются геометрическим построением рис. 7.4.1.

Пусть в момент t_1 РНТ находится в точке C_1 с геоцентрическими координатами x_{c1} , y_{c1} и z_{c1} , а в момент t_2 — в точке C_2 с координатами x_{c2} , y_{c2} и z_{c2} . Объект навигации в общем случае может находиться над поверхностью Земли. Пусть в первый момент его положение обозначено точкой A_1 , которая на величину H_{A1} приподнята над поверхностью Земли в точке, где радиус-вектор ее равен

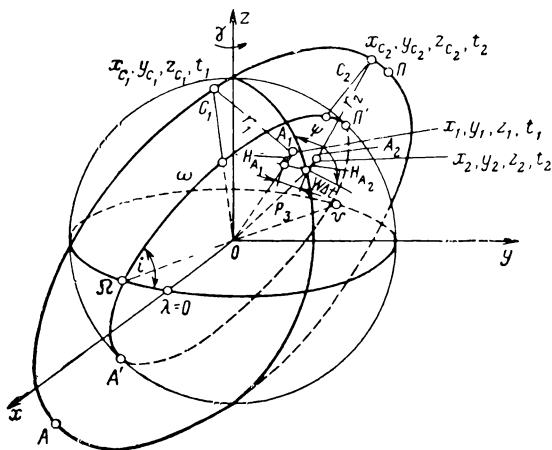


Рис. 7.4.1. Геометрические основы дальнометрического метода определений по одной РНТ.

ρ_{31} . В интервале $\Delta t = t_2 - t_1$ объект движется со скоростью $\bar{W}$ так, что линия пути составляет угол ψ с местным меридианом при угле наклона к горизонту α , и в момент t_2 занимает положение A_2 .

Обозначим направляющие косинусы проекции линии пути на плоскость горизонта через A_x , A_y , A_z , а направляющие косинусы касательной к меридиану — через B_x , B_y , B_z . Геоцентрические координаты объекта в начале и конце интервала обозначим соответственно через x_1 , y_1 , z_1 и x_2 , y_2 , z_2 . Пусть с помощью радиодальномерной системы в моменты t_1 и t_2 измерены расстояния r_1 и r_2 от объекта до РНТ. Измерения расстояний позволяют получить два уравнения вида:

$$(x_i - x_{ci})^2 + (y_i - y_{ci})^2 + (z_i - z_{ci})^2 = r_i^2, \quad (i = 1, 2). \quad (7.4.1)$$

В результате измерения геоцентрических высот образуются зависимости

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = (\rho_{3i} + H_{Ai})^2, \quad (i = 1, 2), \quad (7.4.2)$$

где ρ_{3i} — радиусы-векторы Земли, а H_{Ai} — абсолютные высоты объекта над земной поверхностью.

Модуль $|W|$ связан с координатами и временным интервалом соотношением

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = [W(t_2 - t_1)]^2. \quad (7.4.3)$$

Связь направляющих косинусов A_x, A_y, A_z проекции линии пути на плоскость горизонта с направляющими косинусами B_x, B_y, B_z касательной к меридиану и с путевым углом дает уравнение

$$[A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \cos \psi. \quad (7.4.4)$$

Преобразуя уравнения (7.4.1) и (7.4.3) и используя соотношение (7.4.2) и (7.4.4), можно прийти к следующей системе шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 x_{c1} + y_1 y_{c1} + z_1 z_{c1} &= \frac{1}{2} (\rho_1^2 + \rho_{c1}^2 - r_1^2), \\ x_2 x_{c2} + y_2 y_{c2} + z_2 z_{c2} &= \frac{1}{2} (\rho_2^2 + \rho_{c2}^2 - r_2^2), \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= (\rho_{s1} + H_{A1})^2, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= (\rho_{s2} + H_{A2})^2, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= \frac{1}{2} [\rho_1^2 + \rho_2^2 - W^2 (t_2 - t_1)^2], \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &= \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (7.4.5)$$

где ρ_{ci} и ρ_i — модули векторов, характеризующих положения РНТ и объекта в моменты t_i .

В свою очередь A_j и B_j могут быть также выражены через координаты объекта. Направляющие косинусы радиуса-вектора $\bar{\rho}_1$ будут $\frac{x_1}{\rho_1}, \frac{y_1}{\rho_1}$ и $\frac{z_1}{\rho_1}$. Условием перпендикулярности $\bar{\rho}_1$ и касательной к меридиану является

$$B_x \frac{x_1}{\rho_1} + B_y \frac{y_1}{\rho_1} + B_z \frac{z_1}{\rho_1} = 0. \quad (7.4.6)$$

Уравнение же касательной имеет вид:

$$\frac{x_1}{B_x} = \frac{y_1}{B_y} = \frac{z_1^2 - \rho_1^2}{z_1 B_z}. \quad (7.4.7)$$

Учитывая, что $B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = 1$, из уравнений (7.4.6) и (7.4.7) можно получить искомые значения проекций:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{x_1 z_1}{\rho_1 \sqrt{x_1^2 + z_1^2}}, \\ B_y &= -\frac{y_1 z_1}{\rho_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \\ B_z &= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\rho_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.8)$$

Направляющие косинусы радиус-вектора $\bar{\rho}_2$ будут $\frac{x_2}{\rho_2}, \frac{y_2}{\rho_2}, \frac{z_2}{\rho_2}$. При проектировании конца радиус-вектора $\bar{\rho}_2$ на плоскость горизонта координаты проекции будут отличаться от координат x_2, y_2, z_2 на величины:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= W \Delta t \sin \alpha \frac{x_2}{\rho_2}, \\ \Delta y &= W \Delta t \sin \alpha \frac{y_2}{\rho_2}, \\ \Delta z &= W \Delta t \sin \alpha \frac{z_2}{\rho_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.9)$$

Полагая

$$x'_2 = x_2 - \Delta x; \quad y'_2 = y_2 - \Delta y; \quad z'_2 = z_2 - \Delta z, \quad (7.4.10)$$

получим уравнение проекции линии пути в виде

$$\frac{x_1 - x'_2}{A_x} = \frac{y_1 - y'_2}{A_y} = \frac{z_1 - z'_2}{A_z}. \quad (7.4.11)$$

Условием перпендикулярности проекции к радиус-вектору является

$$A_x \frac{x_1}{\rho_1} + A_y \frac{y_1}{\rho_1} + A_z \frac{z_1}{\rho_1} = 0. \quad (7.4.12)$$

Учитывая, что $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = 1$, из уравнений (7.4.11) и (7.4.12) можно получить значения проекций:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= M(x_2 - x'_2), \\ A_y &= M(y_1 - y'_2), \\ A_z &= M(z_1 - z'_2), \end{aligned} \right\} \quad (7.4.13)$$

где (x_2') определяется в соответствии с выражениями (7.4.9) и (7.4.10), а

$$M = z_1 \{ [x_1(x_1 - x_2') + y_1(y_1 - y_2')]^2 + z_1^2 [(x_1 - x_2')^2 + (y_1 - y_2')^2] \}^{-1/2}. \quad (7.4.14)$$

Таким образом, система (7.4.5) совместно с соотношениями (7.4.8), (7.4.13) и (7.4.14) представляет собой аналитическое описание геометрических основ дальномерной методики, предназначенной для определения пространственных координат приземного объекта навигации по минимально необходимому числу измерений.

Если объект навигации находится на поверхности Земли и неподвижен (или его скорость пренебрежимо мала по сравнению со скоростью РНТ), система (7.4.5) упрощается:

$$\left. \begin{aligned} xx_{c1} + yy_{c1} + zz_{c1} &= \frac{1}{2} (\rho^2 + \rho_{c1}^2 - r_1^2), \\ xx_{c2} + yy_{c2} + zz_{c2} &= \frac{1}{2} (\rho^2 + \rho_{c2}^2 - r_2^2), \\ x^2 + y^2 + z^2 &= (\rho_3 + H_A)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4.15)$$

и ее решение дает искомые координаты x, y, z .

Имеется особенность в выборе геоцентрических координат x, y и z . Если принять не связанную с Землей систему, то придется учитывать изменение координат x^i подвижного объекта за счет вращения Земли в соответствии с выражением (2.2.31). Если же взять связанную систему, ось OX которой лежит в плоскости гринвичского меридиана, то придется при выражении координат РНТ учитывать суточное вращение координатной системы и в дополнение к формулам, связывающим геоцентрические прямоугольные координаты с кеплеровыми элементами [см. формулу (2.4.7)], воспользоваться зависимостями (2.2.32). В этом случае переход от координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ и λ будет осуществляться по простым соотношениям (2.2.11).

Следует отметить, что незнание высот H_{A1} и H_{A2} , путевой скорости W и угла ψ можно восполнить соответствующим числом дополнительных дальномерных измерений.

При проведении дальномерных определений в интервале времени, соответствующем полному прохождению РНТ в зоне видимости, целесообразно вовлекать в навигационные расчеты избыточный объем информации и применять методику статистических решений.

На точность местоопределения влияет продолжительность интервала наблюдений. С геометрических позиций увеличение этого интервала выгодно, так как оно эквивалентно увеличению угла пересечения поверхностей положения. Для увеличения этого угла

(при сохранении общего времени наблюдения) целесообразно уменьшать высоту РНТ.

Дальномерные системы можно строить в вариантах с ретрансляцией сигналов и с хранением начала отсчета. В первом случае требуется лишний радиоканал. Во втором случае к стабильности частоты бортового эталона на РНТ предъявляются трудно обеспечиваемые требования.

В самом деле, временной интервал хронирования t_{xp} , в течение которого из-за нестабильности частоты сдвиг начала отсчета дальности не превысит заданной величины Δ_{xp} , составляет [32]:

$$t_{xp} = 9,26 \cdot 10^{-10} \Delta_{xp} \xi_{xp}^{-1}, \quad (7.4.16)$$

где ξ — относительная нестабильность частоты хронизатора, причем t_{xp} выражено в часах, а Δ_{xp} — в километрах. Если принять $\Delta_{xp} = 0,5$ км, то величина ξ , обеспечивающая такое сохранение начала отсчета в течение $t_{xp} = 24$ час, составит:

$$\xi = \frac{9,26 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5}{24} \approx 2 \cdot 10^{-11}.$$

В настоящее время эталоны обеспечивают такую стабильность в течение нескольких десятков часов. Очевидно, что без периодической коррекции эталона на РНТ метод с хранением начала отсчета не может применяться.

§ 7.5. РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ РНТ

Разностно-дальномерный метод основан на определении места в результате измерений разности расстояний между подвижным объектом и двумя радионавигационными точками. Разностно-дальномерные базы можно образовывать при одновременном использовании двух РНТ с нетождественными параметрами орбиты. Но возможно также последовательные во времени положения одной РНТ рассматривать как различные навигационные точки, образующие соответствующие базы, учитывая при этом перемещение объекта в интервале измерений.

Разность расстояний Δr как навигационный параметр может измеряться непосредственно, но может быть получена на основе измерения производных параметров $\dot{r}$ и $(\Delta \dot{r})$.

Геометрические основы разностно-дальномерной методики с использованием нескольких РНТ были показаны на рис. 4.2.2, где дана совокупность гиперболоидных поверхностей положения, отвечающих параметру Δr_i .

Основы определения места подвижного объекта с помощью одной РНТ иллюстрируются рис. 7.5.1 и 7.5.2.

Если две РНТ, образующие базу B_1-B_1 , равную d (рис. 7.5.1), перемещаются с одной скоростью v , то в момент t_1 можно измерить разность расстояний $\Delta_1 = r_1 - r'_1$, а в момент t_k , когда база переместится на расстояние $v(t_k - t_1)$, разность

$$\Delta_k = r_k - r'_k. \quad (7.5.1)$$

Закон изменения $\Delta_i(t)$ зависит от взаимного положения точки A относительно перемещающейся базы, причем это положение можно характеризовать, например, траверзным расстоянием r_0 и началь-

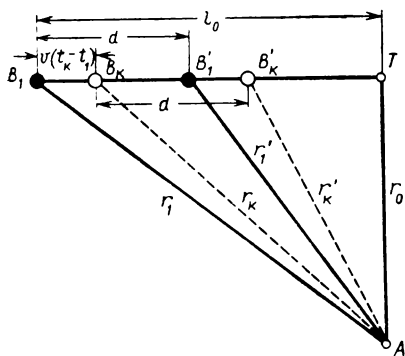


Рис. 7.5.1. К выводу основных соотношений для разностно-дальномерного метода.

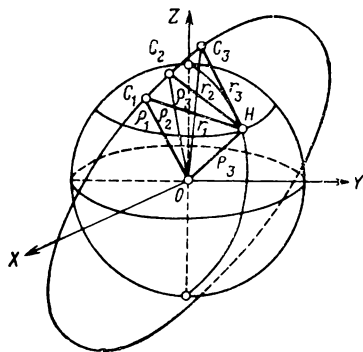


Рис. 7.5.2. Геометрические основы разностно-дальномерного метода определений по одной РНТ.

ным удалением l_0 края базы от траверзной точки T . В соответствии с этим по зависимости $\Delta_i(t)$ можно определить относительное местоположение объекта навигации в данной плоскости.

Для момента t_1 справедливо равенство

$$\Delta_1^2 - 2\Delta_1 \sqrt{r_0^2 + l_0^2} - d^2 \left(1 - 2\frac{l_0}{d} \right) = 0. \quad (7.5.2)$$

Аналогично этому для момента t_k имеет место соотношение

$$\Delta_k^2 - 2\Delta_k \sqrt{r_0^2 + [l_0 - v(t_k - t_1)]^2} - d^2 \left[1 + 2\frac{v}{d}(t_k - t_1) - 2\frac{l_0}{d} \right] = 0. \quad (7.5.3)$$

В зависимости типа (7.5.3) входят два неизвестных l_0 и r_0 , поэтому для их определения требуется иметь по крайней мере два уравнения, т. е. располагать не менее чем двумя измерениями Δ_i .

Теперь представим, что между последовательными измерениями навигационные точки перемещаются на длину базы d . Тогда всю совокупность РНТ можно рассматривать как последовательные во

времени положения одной движущейся РНТ. В этом случае $v(t_k - t_1) = d(k - 1)$ и имеет место соотношение

$$\Delta_k^2 - 2\Delta_k \sqrt{r_0^2 + [l_0 - d(k - 1)]^2} - d^2 \left(2k - 1 - 2\frac{l_0}{d} \right) = 0. \quad (7.5.4)$$

Учитывая, что

$$r_k = r_1 + \sum_{i=1}^{(k-1)} \Delta_i, \quad (7.5.5)$$

имеем далее

$$\Delta_k^2 - 2\Delta_k \left(r_1 + \sum_{i=1}^{(k-1)} \Delta_i \right) - d^2 \left(2k - 1 - 2\frac{l_0}{d} \right) = 0. \quad (7.5.6)$$

Выражения типа (7.5.4) и (7.5.6) показывают, что та же задача относительного местоопределения решается с использованием одной движущейся РНТ.

Аналитическое обоснование метода можно понять, пользуясь рис. 7.5.2. Пусть геоцентрические координаты РНТ, занимающей на орбите последовательные положения C_i , есть x_{ci} , y_{ci} , z_{ci} , координаты объекта навигации, соответствующие его положению в точке H , будут x , y , z и пусть r_1 , r_2 , ... есть расстояния от РНТ до объекта, а непосредственному измерению подлежат разности расстояний $\Delta_1 = r_2 - r_1$, $\Delta_2 = r_3 - r_2$, ... Выясним, как можно выразить некоторую разность расстояний $\Delta_k = r_{k+1} - r_k$ через другие параметры.

Из треугольника OC_1H следует, что

$$r_1^2 = \rho_1^2 + R_3^2 - 2\rho_1 R_3 \cos \alpha = \rho_1^2 + R_3^2 - 2(x_{c1}x + y_{c1}y + z_{c1}z). \quad (7.5.7)$$

Из треугольника OC_2H вытекает

$$r_2^2 = \rho_2^2 + R_3^2 - 2(x_{c2}x + y_{c2}y + z_{c2}z). \quad (7.5.8)$$

С другой стороны,

$$r_2 = r_1 + \Delta_1$$

или

$$r_2^2 = r_1^2 + 2r_1 \Delta_1 + \Delta_1^2. \quad (7.5.9)$$

Из сопоставления уравнений (7.5.8) и (7.5.9) при учете выражения (7.5.7) можно найти соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_1(r_1 + \Delta_1) - \frac{\Delta_1^2}{2} &= \frac{1}{2}(\rho_2^2 - \rho_1^2) - [x(x_{c2} - x_{c1}) + \\ &+ y(y_{c2} - y_{c1}) + z(z_{c2} - z_{c1})]. \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

Повторение подобных рассуждений для нахождения $\Delta_2, \Delta_3, \dots$, дает следующее выражение для k -й разности расстояний:

$$\Delta_k \left(r_1 + \sum_{i=1}^k \Delta_i \right) - \frac{\Delta_k^2}{2} - \frac{1}{2} (\rho_{k+1}^2 - \rho_k^2) + \\ + [x(x_{c(k+1)} - x_{ck}) + y(y_{c(k+1)} - y_{ck}) + z(z_{c(k+1)} - z_{ck})] = 0. \quad (7.5.11)$$

Последняя зависимость связывает координаты объекта x, y и z с координатами и геоцентрическими радиусами навигационной точки, с начальным расстоянием r_1 и измеренными разностями расстояний $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$. Поскольку орбита РНТ известна, а в процессе измерений находятся разности расстояний Δ_i , то рассматриваемое выражение включает четыре неизвестных: координаты объекта и начальное расстояние до него. Поэтому для нахождения неизвестных необходимы по крайней мере четыре подобных уравнения, и для этого нужно располагать четырьмя измерениями разности расстояний. Избыточное количество измерений будет способствовать повышению точности местоопределения.

Заметим, что в результате решения задачи может определяться начальное расстояние r_1 . Его значение вместе с совокупностью разностей Δ_i позволяет найти абсолютные значения расстояний r_i . Таким образом, разностно-дальномерный алгоритм решения навигационной задачи может перейти в алгоритм дальномерный.

Измерения Δ_i могут выполняться с помощью различных технических средств. Прежде всего применим импульсный способ работы, при котором передатчик РНТ излучает серию импульсных сигналов, следующих с определенными интервалами. Величины Δ_i находятся в этом случае путем сопоставления моментов прихода фронтов последовательных импульсов с учетом интервала между их излучением. Возможно использовать фазовую методику измерений.

Особое место занимает способ измерений, основанный на интегрировании доплеровского смещения частоты F_d . Если передатчик РНТ работает незатухающими колебаниями, то, интегрируя $F_d(t)$ в каком-то интервале времени, получим:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F_d(t) dt = -\frac{1}{\lambda} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{r}(t) dt. \quad (7.5.12)$$

Однако интеграл от радиальной составляющей скорости и есть разность расстояний. Ввиду этого можно записать:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} F_d(t) dt = -\frac{1}{\lambda} (r_{k+1} - r_k) = -\frac{1}{\lambda} \Delta_k. \quad (7.5.13)$$

Данный вариант метода носит название *доплеровского интегрального метода*.

§ 7.6. РАДИАЛЬНО-СКОРОСТНОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ РНТ

Радиально-скоростной метод основан на измерении радиальной составляющей скорости радионавигационной точки относительно объекта навигации, которая меняется при пролете РНТ в зоне видимости объекта. Радиальная составляющая скорости находится путем замера доплеровского смещения частоты F_d в соответствии с соотношением (5.2.4).

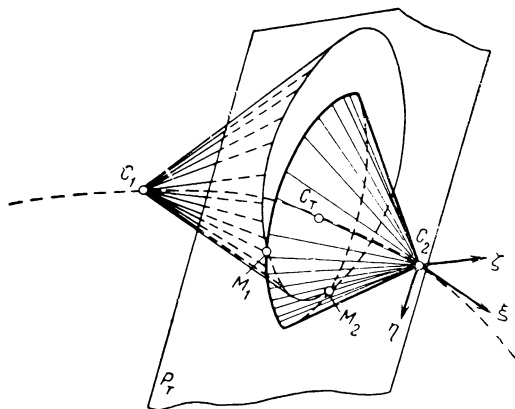


Рис. 7.6.1. Геометрические основы радиально-скоростного метода определений по одной РНТ.

Между радиальной составляющей скорости v_r и полной скоростью РНТ v существует очевидная связь $v_r = v \cos \alpha$. Поэтому в результате измерений F_{di} оказывается известной серия угловых величин

$$\alpha_i = \arccos \left(\frac{\dot{r}_i}{v} \right). \quad (7.6.1)$$

Как было указано в § 4.2 и показано на рис. 4.2.4, углу α соответствует поверхность положения в виде кругового конуса, вершина которого совпадает с РНТ, а ось — с вектором ее скорости. Один отсчет α фиксирует в пространстве одну коническую поверхность. Несколько последовательных отсчетов дают, очевидно, соответствующее количество поверхностей с вершинами, расположенными в последовательных точках траектории РНТ, и с различными углами раствора α_i .

Геометрические основы радиально-скоростного метода поясняются рис. 7.6.1. Пусть неизвестные координаты объекта навигации x , y и z , а координаты РНТ в последовательные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ соответственно x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} ($i = 1, 2, \dots, n$).

В результате измерения доплеровской частоты F_{di} получается серия значений углов раствора α_i конических поверхностей.

Если ввести местные системы координат, начала которых совмещены с последовательными положениями РНТ, оси $O\xi_i$ направлены по касательной к орбите, оси $O\eta_i$ — по главным нормальям к ней, а оси $O\xi_i$ — по бинормальям, то уравнение поверхностей положения, соответствующих измерениям α_i , выразятся в этих системах в виде:

$$\xi_i - \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2} \cos \alpha_i = 0. \quad (7.6.2)$$

Из уравнения (7.6.2) вытекает, что в частном случае траверзных измерений, когда $\alpha_T = 90^\circ$, уравнение поверхности будет:

$$\xi_T = 0, \quad (7.6.3)$$

что свидетельствует о вырождении конической поверхности в плоскость.

Система уравнений (7.6.2) в геоцентрической системе координат представляется как

$$A_{xi}(x - x_{ci}) + A_{yi}(y - y_{ci}) + A_{zi}(z - z_{ci}) - \sqrt{(x - x_{ci})^2 + (y - y_{ci})^2 + (z - z_{ci})^2} \frac{\dot{r}_i}{v} = 0, \quad (7.6.4)$$

где A_{xi} , A_{yi} , A_{zi} — направляющие косинусы касательных к орбите (совпадающих с осями $O\xi_i$), имеющие в свою очередь выражения через координаты x , y и z в виде:

$$\left. \begin{aligned} A_{xi} &= \frac{dx}{ds_i}, \\ A_{yi} &= \frac{dy}{ds_i}, \\ A_{zi} &= \frac{dz}{ds_i}, \end{aligned} \right\} \quad (7.6.5)$$

где ds_i — элементы дуги траектории.

На рис. 7.6.1 показаны три поверхности положения: две конические и траверзная плоскость, соответствующие трем измерениям. Видно, что оба конуса дают в пересечении с траверзной плоскостью две эллиптические фигуры, которые в свою очередь пересекаются в двух точках M_1 и M_2 . Точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от орбиты, вследствие чего, привлекая априорную навигационную информацию, образующуюся двузначность можно разрешить. Однако аналитически однозначное решение получается при добавлении четвертого отсчета α_4 , поскольку в этом случае четвертая коническая поверхность дает на траверзной плоскости еще один эллипс, пересекающийся с первыми двумя лишь в одной из точек M_1 и M_2 .

Таким образом, для местоопределения требуется по крайней мере четыре измерения навигационного параметра. Разумеется, место одной из поверхностей положения, соответствующих радиально-скоростному отсчету, представляется возможным использовать сферическую поверхность, отвечающую измерению геоцентрической высоты подвижного объекта, например самолета.

С целью повышения точности местоопределения целесообразно не ограничиваться минимально необходимым числом измерений, а привлекать избыточную выборку измеренных навигационных параметров.

Рассмотренный метод именуется иногда *доплеровским дифференциальным* методом в отличие от интегрального варианта методики (упомянутого в предшествующем параграфе), где измеряется интеграл доплеровской частоты.

§ 7.7. УГЛОМЕРНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ РНТ

Угломерный метод основан на измерении углов прихода радиоволн, посылаемых с РНТ, с последующим преобразованием их в координаты объекта навигации. Применяемая методика имеет много общего со способами, используемыми при навигации по естественным небесным светилам, в оптическом и радиотехническом диапазонах волн. В качестве измеряемых навигационных параметров выступают углы высоты h , азимутальные углы A , их производные и комбинации. Эти параметры измеряются путем пеленгования навигационных точек, вследствие чего сама методика именуется *пеленгационной*.

На орбитальной навигационной точке размещают передатчик незатухающих колебаний, а на объекте навигации — радиоастрономический пеленгатор [32]. Поскольку от искусственной РНТ можно получить более мощный сигнал, чем от естественных источников радиоизлучения, то размеры антенн бортового пеленгатора можно сократить по сравнению с антеннами в случае использования сигналов от Солнца или Луны. Кроме того, при наличии нескольких РНТ можно обеспечить круглосуточную навигацию в любом районе.

Естественно, что радиопеленгаторы должны в рассматриваемом случае отличаться по своим параметрам от устройств, пеленгующих собственное радиоизлучение небесных источников. Наиболее существенное отличие связано с требованием обеспечить значительную скорость слежения за объектом пеленгации. Поэтому антенна может принудительно вестись по программе вдоль ожидаемой траектории РНТ, а следящая система пеленгатора будет тогда вести обработку углов только в пределах возможного расхождения прогнозированных и фактических значений угловых координат.

Другое отличие состоит в том, что радионавигационные точки находятся на существенно меньших расстояниях от Земли по сравнению с небесными светилами. Ввиду этого измеряемые углы высоты h (или углы, дополняющие их до 90° , — так называемые зенитные расстояния z) будут отличаться от соответствующих углов, фиксируемых при центре Земли, на величину параллакса p (рис. 7.2.6), и учет его требует знания высоты РНТ [см. выражение (7.2.2)].

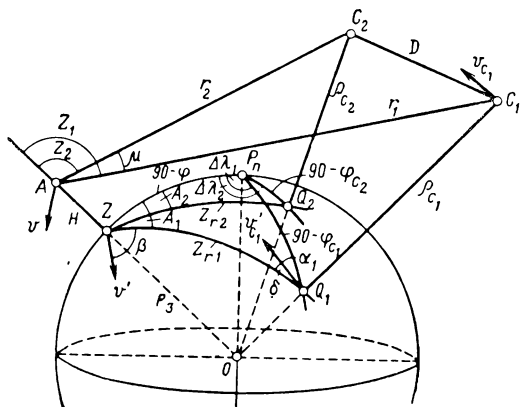


Рис. 7.7.1. Геометрические основы угломерного метода определений по двум РНТ.

С возможностями угломерной методики ознакомимся по ее варианту [36], основанному на измерении углов высоты h (или соответственно зенитных расстояний z), отсчитываемых от плоскости местного горизонта (или соответственно от местной вертикали).

Геометрические основы метода поясняются рис. 7.7.1. Объект навигации находится в точке A , которая приподнята над земной поверхностью на высоту H , а от центра Земли O находится на удалении $(\rho_3 + H)$ причем ρ_3 — радиус-вектор земного эллипсоида. Проекция вектора скорости на плоскость горизонта обозначена как v' . Точки C_1 и C_2 соответствуют положениям двух навигационных точек, которые можно рассматривать как две различные РНТ, наблюдаемые одновременно, а также как два последовательных положения одной перемещающейся РНТ. Величина v_{c1} — проекция вектора скорости РНТ₁ на плоскость, касательную к земной поверхности в точке Q_1 следа РНТ₁. Геоцентрические расстояния до РНТ есть ρ_{c1} и ρ_{c2} , расстояния от объекта до РНТ — соответственно r_1 и r_2 , а расстояние между самими навигационными точками есть D . Угол между направлениями от объекта на РНТ₁ и РНТ₂ обозначим через μ .

Треугольники ZP_NQ_1 и ZP_NQ_2 — так называемые параллактические треугольники. Их стороны образуют: зенитные расстояния z_{r1} и z_{r2} , соответствующие измеряемым зенитным углам z_1 и z_2 , величины $(90^\circ - \varphi_{c1})$ и $(90^\circ - \varphi_{c2})$ и величина $(90^\circ - \varphi)$. Углами являются азимуты A_1 и A_2 , разности долгот $(\lambda - \lambda_{c1})$ и $(\lambda - \lambda_{c2})$, а также углы Q_1 и Q_2 . Отметим, что углы Q_1 и Q_2 разбиваются проекциями векторов скорости РНТ v_{c1} и v_{c2} соответственно на два угла:

$$Q_1 = \alpha_1 + \delta_1 \text{ и } Q_2 = \alpha_2 + \delta_2.$$

Поскольку движение РНТ известно, то величины φ_{c1} , λ_{c1} , φ_{c2} , λ_{c2} , ρ_{c1} , ρ_{c2} , D , α_1 , α_2 могут рассчитываться заранее. Непосредственно измеряются зенитные расстояния z_1 и z_2 , курсовые углы β_1 и β_2 и угол μ .

Рассмотрим вначале определение координат по одной РНТ — C_1 . Из треугольника AC_1O можно вывести зависимость

$$\sin(z_1 - z_{r1}) = \frac{(\rho_3 + H)}{\rho_{c1}} \sin z_1, \quad (7.7.1)$$

которая разрешается относительно z_{r1} :

$$z_{r1} = z_1 - \arcsin \left(\frac{\rho_3 + H}{\rho_{c1}} \sin z_1 \right). \quad (7.7.2)$$

Таким образом, один элемент параллактического треугольника оказывается найденным. Для нахождения второго его элемента — угла Q_1 — ищется его составляющая — угол δ_1 . Для этого проектируются скорости v_{c1} и v на плоскость вертикали, что дает

$$\frac{v^1}{\rho_3 + H} \cos \beta - \frac{v_{c1}^1}{\rho_{c1}} \cos \delta_1 = \dot{z}_{r1}, \quad (7.7.3)$$

где $\frac{v^1}{\rho_3 + H}$ — угловая скорость отклонения местной вертикали;

$\frac{v_c^1}{\rho_c}$ — угловая скорость навигационной точки; $\dot{z}_{r1}$ — производная от зенитного расстояния по времени.

Поскольку составляющая угловой скорости местной вертикали в плоскости измерения зенитного угла известна, из уравнения (7.7.3) можно найти угол δ_1 , а по нему [в соответствии с выражением (7.7.1)] и угол Q_1 .

Располагая двумя элементами треугольника ZP_NQ_1 , по формулам сферической тригонометрии нетрудно найти географическую широту φ и долготу λ объекта:

$$\varphi = \arcsin (\sin \varphi_{c1} \cos z_{r1} + \cos \varphi_{c1} \sin z_{r1} \cos Q_1), \quad (7.7.4)$$

$$\lambda = \lambda_{c1} + \arcsin (\sin z_{r1} \sin Q_1 \sec \varphi). \quad (7.7.5)$$

Если требуется определить его курс γ , то используется непосредственное измерение курсового угла β . Из того же сферического треугольника ZP_nQ_1 следует, что

$$A = \arcsin(\sin Q_1 \cos \varphi_{c1} \sec \psi) \quad (7.7.6)$$

и далее

$$\gamma_1 = A_1 - \beta_1. \quad (7.7.7)$$

Укажем, что имея координаты φ , λ и $(\rho_3 + H)$, можно без труда преобразовать их в иную требуемую координатную систему.

В случае использования двух РНТ (см. рис. 7.7.1). можно составить следующую систему из уравнений:

$$(\rho_3 + H) \sin z_1 = \rho_{c1} \sin(z_1 - z_{r1}), \quad (7.7.8)$$

$$(\rho_3 + H) \sin z_2 = \rho_{c2} \sin(z_2 - z_{r2}), \quad (7.7.9)$$

$$r_1^2 = (\rho_3 + H)^2 + \rho_{c1}^2 - 2(\rho_3 + H) \rho_{c1} \cos z_{r1}, \quad (7.7.10)$$

$$r_2^2 = (\rho_3 + H)^2 + \rho_{c2}^2 - 2(\rho_3 + H) \rho_{c2} \cos z_{r2}, \quad (7.7.11)$$

$$D^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \mu. \quad (7.7.12)$$

Углы z_1 , z_2 и μ находятся в результате прямых измерений. Величины ρ_{c1} , ρ_{c2} и D известны заранее по прогнозу движения РНТ. Решение системы (7.7.8)—(7.7.12) позволяет вычислить z_{r1} и z_{r2} , а также и H . Знание z_{r1} и z_{r2} позволяет найти широту φ и долготу λ объекта навигации.

§ 7.8. УГЛОМЕРНО-ДАЛЬНОМЕРНЫЙ (ТРАВЕРЗНЫЙ) МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ОРБИТАЛЬНЫМ РНТ

При выполнении из одной точки одновременных измерений угла и дальности соответствующие поверхности положения (конус и сфера) пересекаются под прямыми углами. Столь благоприятные геометрические соотношения способствуют повышению точности определения места и выступают как существенное достоинство угломерно-дальномерной методики.

Рассматриваемая методика может являться сочетанием разобранных выше пеленгационного и дальномерного методов. Однако возможны угломерно—дальномерные определения, основанные на измерении расстояния между РНТ и объектом навигации при фиксированном значении угла между линией радиовизирования и касательной к орбите, равном 90° .

Наглядно-геометрическое пояснение такого метода дано на рис. 7.8.1. Объект навигации A показан расположенным в траверзной плоскости P_T , перпендикулярной к плоскости орбиты P_0 . По-

сколько положение плоскости P_T становится известным, положение объекта может характеризоваться всего двумя параметрами: траверзным расстоянием r_0 и геоцентрической высотой $(\rho_3 + H)$.

Если не учитывать перемещение объекта и вращение Земли, то в момент траверза доплеровская частота окажется равной нулю. Поэтому, наблюдая за $F_\partial(t)$ и фиксируя момент, когда $F_\partial = 0$, можно найти положение, при котором объект окажется в плоскости P_T . При этом расстояние r_0 может быть найдено путем исчисле-

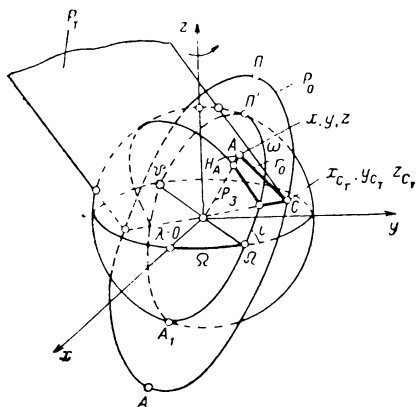


Рис. 7.8.1. Геометрические основы угломерно-дальномерного (траверзного) метода определений по одной РНТ.

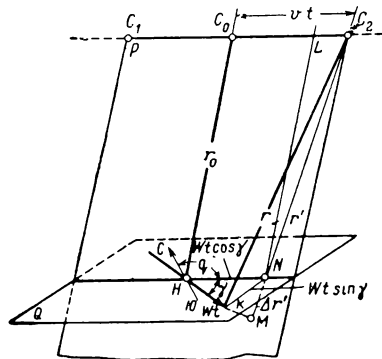


Рис. 7.8.2. К учету влияния на траверзные измерения движения объекта навигации.

ния производной от доплеровской частоты в соответствии с выражением (5.2.12). Геоцентрическая высота $(\rho_3 + H)$ полагается известной.

Если объект перемещается, то момент геометрического траверза F_∂ будет иметь значение, зависящее от вектора путевой скорости. Убедиться в этом можно, проведя следующие упрощенные (без учета вращении Земли) рассуждения. Пусть РНТ движется с постоянной скоростью v под углом q к северному направлению меридиана наблюдателя, а последний перемещается с путевой скоростью W при путевом угле ψ . Через линейный участок орбиты вблизи траверза и точку наблюдателя A можно провести плоскость P , которая пересечет плоскость Q горизонта наблюдателя по линии HN (рис. 7.8.2). Обозначим траверзное расстояние через r_0 , текущее расстояние через r . Угол между проекцией орбиты и линией пути будет при этом равен $\gamma = \psi - q$. Время будем отсчитывать от момента пролета навигационной точкой траверза.

При взаимном перемещении РНТ и наблюдателя текущее расстояние будет изменяться по величине, причем линия r будет описывать некоторую криволинейную поверхность.

Через время t наблюдатель переместится от траверсной точки на расстояние Wt и окажется в точке K , а РНТ переместится на расстояние vt и дойдет до точки C_2 . Отрезок C_2K , характеризующий расстояние между РНТ и наблюдателем, будет лежать вне плоскостей P и Q , но его можно выразить через отрезки прямых, лежащих в этих плоскостях.

Используя очевидные геометрические соотношения и вводя некоторые упрощения, можно получить, хотя и приближенное, но наглядное выражение для текущего расстояния [81]:

$$r = [r_0^2 + (v - W \cos \gamma)^2 t^2]^{1/2} + Wt \sin \gamma. \quad (7.8.1)$$

Из последнего выражения видно, что текущее расстояние r является функцией как скорости v РНТ, траверсного расстояния r_0 и времени t , так и параметров движения наблюдателя — его путевой скорости W и угла γ .

Для нахождения доплеровской частоты продифференцируем выражение (7.8.1) по времени, что дает

$$\dot{r} = W \sin \gamma + \frac{(v - W \cos \gamma)^2 t}{\sqrt{r_0^2 + (v - W \cos \gamma)^2 t^2}}. \quad (7.8.2)$$

В окрестности траверсной точки $t \rightarrow 0$ и поэтому

$$F_{\partial|t \rightarrow 0} = -\frac{1}{\lambda} W \sin \gamma. \quad (7.8.3)$$

Видно, что в траверсной точке F_{∂} уже не равна нулю, а имеет конечную величину, пропорциональную радиальной скорости наблюдателя. Поскольку к моменту навигационных измерений W и γ бывают известны, значение доплеровского смещения на траверзе можно заранее вычислить и учесть при фиксации момента прохода траверза. В момент достижения доплеровской частотой значения $\left| \frac{W \sin \gamma}{\lambda} \right|$ РНТ окажется на траверзе наблюдателя.

Для нахождения траверсного расстояния вычисляем производную от r и берем ее значение вблизи точки траверза

$$r|_{t \rightarrow 0} = \frac{(v - W \cos \gamma)^2}{r_0}, \quad (7.8.4)$$

откуда непосредственно получаем

$$r_0 = \frac{(v - W \cos \gamma)^2}{\lambda |F_{\partial}|}. \quad (7.8.5)$$

Выражение (7.8.5) показывает, что траверсное расстояние r_0 зависит как от v , λ и F_{∂} , так и от параметров движения наблюдателя — путевой скорости W и угла γ .

Итак, вычисляя заранее траверзное значение $F_{\partial T}$ и наблюдая за $F_{\partial}(t)$, можно далее фиксировать геометрический траверз в момент достижения доплеровской частотой величины $F_{\partial T}$. Траверзное расстояние в этом случае вычисляется также по величине производной $\dot{F}_{\partial}$, но с учетом W и γ , как это следует из выражения (7.8.5).

Аналитическое описание основ траверзной методики состоит в следующем. Обозначим координаты объекта навигации через x , y и z , траверзные координаты РНТ через $x_{\text{ст}}$, $y_{\text{ст}}$ и $z_{\text{ст}}$. Тогда, учитывая вышесказанное, можем составить три уравнения (рис. 7.8.1):

$$(x - x_{\text{ст}})^2 + (y - y_{\text{ст}})^2 + (z - z_{\text{ст}})^2 = r_0^2, \quad (7.8.6)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\rho_s + H_A)^2, \quad (7.8.7)$$

$$Ax + By + Cz + K = 0, \quad (7.8.8)$$

где коэффициенты A , B , C и K определяются из условий перпендикулярности плоскостей P_0 и P_T .

Уравнение плоскости орбиты РНТ имеет вид:

$$x_c \sin \Omega \sin i - y_c \cos \Omega \cos i + z_c \cos i = 0, \quad (7.8.9)$$

где Ω — долгота восходящего узла, а i — наклонение.

Для круговой орбиты ($e = 0$) имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A \sin \Omega \sin i + B \cos \Omega \cos i + C \cos i &= 0, \\ Ax_{\text{ст}} + By_{\text{ст}} + Cz_{\text{ст}} &= 0, \\ A^2 + B^2 + C^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.10)$$

Для эллиптической же орбиты ($e \neq 0$) коэффициент $K \neq 0$ и зависит от Ω , i , полуоси a , эксцентриситета e и углового расстояния перигея ω :

$$K = K(y_{\text{ст}}, z_{\text{ст}}, a, e, \Omega, \omega, i). \quad (7.8.11)$$

Совокупность уравнений (7.8.6) — (7.8.8) при учете зависимостей (7.8.10) и (7.8.11) позволяет найти неизвестные x , y и z .

Движение РНТ может быть задано не через кеплеровы элементы, а с помощью геоцентрических координат x_c , y_c , z_c и их производных $\dot{x}_c$, $\dot{y}_c$ и $\dot{z}_c$. Тогда аналитическое описание метода несколько изменится.

В траверзе направление радиовизирования будет перпендикулярным к касательной к орбите, с которой будет совпадать вектор скорости РНТ $\vec{v}_{\text{ст}}$, имеющий своими слагающими $\dot{x}_{\text{ст}}$, $\dot{y}_{\text{ст}}$ и $\dot{z}_{\text{ст}}$. Это позволяет вместо условия (7.8.8) записать условие перпендикулярности $\vec{r}_0 \vec{v}_{\text{ст}} = 0$, выражаемое в проекциях как

$$(x - x_{\text{ст}}) \dot{x}_{\text{ст}} + (y - y_{\text{ст}}) \dot{y}_{\text{ст}} + (z - z_{\text{ст}}) \dot{z}_{\text{ст}} = 0. \quad (7.8.12)$$

С учетом того, что $x_{\text{ст}}^2 + y_{\text{ст}}^2 + z_{\text{ст}}^2 = \rho_{\text{ст}}^2$, уравнения (7.8.6), (7.8.8) и (7.8.12) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} xx_{\text{ст}} + yy_{\text{ст}} + zz_{\text{ст}} &= \frac{1}{2} (\rho_3^2 + \rho_{\text{ст}}^2 - r_0^2), \\ x^2 + y^2 + z^2 &= (\rho_3 + H_A)^2, \\ \dot{x}x_{\text{ст}} + \dot{y}y_{\text{ст}} + \dot{z}z_{\text{ст}} &= \\ &= x_{\text{ст}} \dot{x}_{\text{ст}} + y_{\text{ст}} \dot{y}_{\text{ст}} + z_{\text{ст}} \dot{z}_{\text{ст}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.13)$$

Входящие в систему (7.9.13) величины $x_{\text{ст}}$, $y_{\text{ст}}$, $z_{\text{ст}}$ и зависящие от них значения $\rho_{\text{ст}}$, $\dot{x}_{\text{ст}}$, $\dot{y}_{\text{ст}}$, $\dot{z}_{\text{ст}}$ могут быть вычислены при известных начальных условиях движения РНТ. Значение $(\rho_3 + H_A)$ получается из результатов измерения высоты полета, например с помощью радиовысотомера, а расстояние r_0 , соответствующее траверзному положению, определяется по наблюдениям за изменением доплеровской частоты. При определении места подвижного объекта по орбитальным РНТ требуется в кратчайшее время выполнить большой объем вычислений. В связи с этим для достижения максимально возможной точности местоопределения нельзя обойтись без бортовой цифровой вычислительной машины. Между тем имеются возможности существенно упростить вычисления, если только допустить меньшую точность определений.

Рассмотрим один из вариантов упрощенной угломерно-дальномерной методики [14].

Простота методики основывается на том, что траверзную плоскость, в которой лежит объект навигации, полагают не перпендикулярной к плоскости орбиты и, следовательно, лежащей в плоскости большого круга земной сферы, а считают совпадающей с плоскостью параллели проекции РНТ. Такое допущение не приводит к значительным ошибкам в случаях, когда объект не слишком удален от плоскости орбиты РНТ.

Положим, что три навигационные точки обращаются по полярным орбитам. Если высота орбиты будет около 1000 км, то, как было вычислено в § 7.2, период обращения составит 105 мин, а наибольшая продолжительность пребывания каждой РНТ над горизонтом составит 16 мин.

Пусть с борта РНТ посылаются сигналы на присвоенной каждой РНТ частоте f_i , регулярно меняющиеся в течение каждого оборота. Это могут быть импульсные посылки, частота следования которых за период оборота изменяется, к примеру каждую минуту скачком по 50 гц. Начальное значение при этом соответствует моменту пересечения навигационной точкой экватора при ее движении с севера на юг. Точная установка начала изменения частоты повторения обеспечивается коррекцией, вводимой на каждом обороте по управляющим сигналам, посылаемым с Земли.

Таким образом, вся орбита оказывается как бы оцифрованной этими сигналами, причем какому-либо значению частоты соответствует определенное время и определенное положение РНТ на орбите. Но так как орбита — полярная и круговая и полный период обращения соответствует равномерному изменению географической широты РНТ на 360° , то оцифровка по времени является в некотором масштабе и оцифровкой по географической широте.

Информация, заключенная в частоте повторения, используется для определения географической широты проекции РНТ на земную поверхность. Можно составить таблицу, дающую соответствие между частотой повторения и временем, истекшим после пересечения РНТ экватора, или, что то же самое, географической широтой. И тогда, измерив частоту повторения импульсных сигналов, можно непосредственно определить широту.

Долгота проекции РНТ может быть определена так: зная закономерность обращения навигационных точек по орбите, можно заранее предсказать, в какое время и на какой долготе λ_0 она будет начинать каждый новый оборот. Известно далее, что за время одного оборота РНТ, т. е. за 105 мин, Земля повернется примерно на 26° , следовательно, за одну минуту долгота проекции РНТ будет изменяться на $\delta\lambda = 15'$. Поэтому, добавляя к начальной долготе λ_0 поправку $\delta\lambda t$ на время, истекшее с начала оборота, можно найти текущую долготу

$$\lambda_c = \lambda_0 + \delta\lambda t. \quad (7.8.14)$$

В помощь расчетам составляются таблицы следующего вида. В первой из них (табл. 7.8.1) для каждой РНТ указываются время t_0 и долгота λ_0 начала каждого оборота.

ТАБЛИЦА 7.8.1

Радионавигационные точки					
РНТ ₁ $f_1 = 100,2 \text{ МГц}$		РНТ ₂ $f_2 = 100,1 \text{ МГц}$		РНТ ₃ $f_3 = 100,0 \text{ МГц}$	
t_0	λ_0	t_0	λ_0	t_0	λ_0
13.20	170° в. д.	07.50	115° з. д.	04.00	60° в. д.
	...		...		

Вторая таблица (табл. 7.8.2) дает связь между частотой повторения F_n , временем от начала оборота t , широтой φ_c и долготной поправкой $\delta\lambda t$.

Таким образом, принимая сигналы навигационных точек, определяя частоту F_n и располагая часами, можно с помощью подобных таблиц определить координаты РНТ в момент навигационных измерений.

F_{Π} , кгц	t , мин	φ_c	$\delta\lambda t$
50,00	0	0°	0
50,05	1	3°42' ю. ш.	0°15'
...	...	...	...
54,50	90	43°19' с. ш.	24°46'
54,55	91	39°54' с. ш.	25°01'
54,60	92	36°29' с. ш.	25°16'
...	...	...	...

Само определение места наблюдателя состоит в следующем. Принимая сигналы, наблюдают за изменением доплеровского смещения частоты и фиксируют момент, когда $F_{\partial} = 0$. Равенство нулю доплеровского смещения означает, что радиальная составляющая скорости отсутствует и наблюдатель находится на перпендикуляре к траектории РНТ. Но орбита — полярная и поэтому широта наблюдателя, если он не слишком удален от плоскости орбиты, оказывается равной широте проекции РНТ, т. е. $\varphi = \varphi_c$.

Долгота определяется так. Проследивая изменение доплеровской частоты, определяют ее производную $\dot{F}_{\partial}$. Но с производной $\dot{F}_{\partial}$ при известных v и рабочей частоте f однозначно связана величина r_0 кратчайшего расстояния наблюдателя от РНТ [см. формулу (5.2.12)]. Поскольку пространственное положение навигационной точки известно, а также известно направление от нее на наблюдателя, то значение r_0 позволяет определить и долготу наблюдателя. Для удобства пересчитывают наклонное расстояние в разность долгот $\Delta\lambda$ наблюдателя и РНТ. И тогда долготу наблюдателя находят как сумму:

$$\lambda = \lambda_c + \Delta\lambda. \quad (7.8.15)$$

При этом возможно разность долгот выразить непосредственно в виде функции от производной $\dot{F}_{\partial}$, используя выражение (7.2.4), поясняемое рис. 7.2.7.

Совместное решение уравнений (7.2.4) и (5.2.12) дает искомую зависимость:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda(\dot{F}_{\partial}, v, f, H). \quad (7.8.16)$$

Пользуясь выражением (7.8.16), можно рассчитать график зависимости от разности долгот доплеровского сдвига F_{∂} , который будет иметь место по истечении различного времени с момента прохождения частоты $F_{\partial}(t)$ через нуль. Такой график показан на рис. 7.8.3, б. На рис. 7.8.3, а показана схема, поясняющая, как изменяется видимая часть траектории РНТ с увеличением разности долгот $\Delta\lambda$.

Во время навигационных определений, прослеживая, до какой величины нарастет $F_{\theta}(t)$ за интервал, например, 10 сек, 20 сек и т. д., с помощью графика можно непосредственно найти разность долгот РНТ и наблюдателя и затем, добавив ее к долготе РНТ, получить свою долготу.

Методика определения места не учитывает вращение Земли и собственное перемещение наблюдателя. Кроме того, расчеты исходят из предпосылки, что все орбиты навигационных точек строго

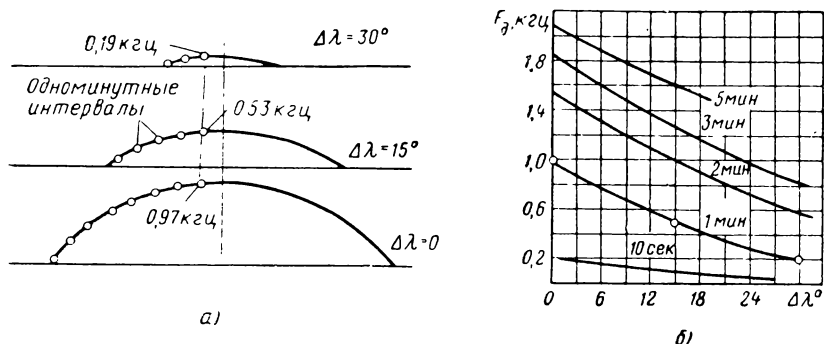


Рис. 7.8.3. К упрощенному методу навигации по орбитальной РНТ (а). График для определения $\Delta\lambda^\circ$ (б).

идентичны, а само движение их известно настолько достоверно, что заранее можно составлять наперед таблицы, определяющие моменты прохождения каждой из РНТ различных точек своей орбиты. Все это, разумеется, снижает точность местоопределения, но окупается простотой требуемых измерительных и расчетных средств.

§ 7.9. МЕТОДЫ САМООПРЕДЕЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПО ПЛАНЕТНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ТОЧКАМ

При околопланетных полетах в качестве НТ могут использоваться установленные на поверхности планеты излучатели или ответчики. Навигационные параметры оказывается возможным измерять одновременно до нескольких НТ, находящихся в зоне видимости. Такие синхронные измерения позволяют получить высокую точность местоопределения КА, в чем нетрудно убедиться, представив геометрическую картину взаимного пересечения поверхностей положения, фиксируемых для одного и того же момента времени.

Могут применяться все основные методы измерений — дальномерный, разностно-дальномерный, угломерный и соответствующие им скоростные варианты. Дальномерный ретрансляционный метод

(в том числе вариант измерения высоты) предполагает излучение с борта КА, в чем нет необходимости при использовании других методов. Угломерный метод может применяться при условии точного воспроизведения на борту КА начальных плоскостей отсчета, чего не требуют прочие методы. На выбор метода влияют размещение навигационных точек и положение орбиты КА относительно них, так как именно эти факторы определяют значения градиентов поля навигационных параметров в области возможного нахождения КА.

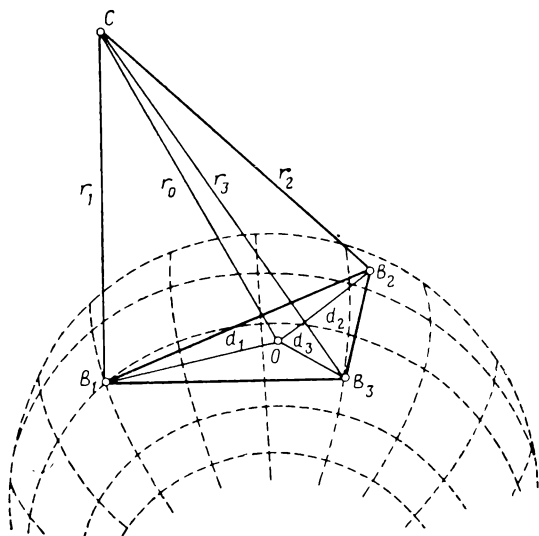


Рис. 7.9.1. К методу самоопределения КА по планетным навигационным точкам.

Наиболее просты и наглядны геометрические основы дальномерной методики. Рассмотрим обоснование этого метода применительно к бортовым измерениям по трем НТ.

Пусть положение навигационных точек B_1 , B_2 и B_3 задано их планетоцентрическими прямоугольными координатами x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 . Ищутся координаты x, y и z космического аппарата (точка C) по трем дальностям r_1, r_2 и r_3 , измеренным до соответствующих НТ в некоторый момент времени (рис. 7.9.1).

Уравнения для навигационных функций, соответствующих измерениям, записываются через координаты точек B_1, B_2, B_3 и C в очевидной форме

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 &= r_1^2, \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 &= r_2^2, \\ (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2 &= r_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.1)$$

Система трех уравнений (7.9.1) в принципе позволяет найти искомые координаты x , y и z . Геометрическим эквивалентом этой системы является совокупность трех сферических поверхностей с центрами в B_1 , B_2 и B_3 , точка пересечения которых совпадает с точкой C .

Полученные значения позволяют привязать КА в избранной планетоцентрической системе координат. Если положение навигационных точек задать в иной координатной системе, совершив необходимые преобразования, то и координаты КА будут найдены в этой системе. Естественно, что выбор начала отсчета и ориентации координатных осей определяет выражение координат КА. Между тем, может оказаться целесообразным привязать КА к базисному треугольнику $B_1B_2B_3$, не конкретизируя сразу значения координат НТ.

Местоположение КА относительно базисного треугольника удобно задавать расстоянием r_0 от центра тяжести треугольника и направляющими косинусами A_{0x} , A_{0y} и A_{0z} вектора r_0 .

Координаты центра тяжести O (рис. 7.9.1) вычисляются по известному соотношению:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_0 &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \\ z_0 &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3). \end{aligned} \right\} \quad (7.9.2)$$

Введя расстояния центра O от навигационных точек d_1 , d_2 и d_3 , дальность r_0 можно определить с помощью выражения

$$r_0 = \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (r_i^2 - d_i^2) \right]^{1/2}, \quad (7.9.3)$$

где в свою очередь d_i ($i = 1, 2, 3$) находятся как

$$d_i = [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2]^{1/2}. \quad (7.9.4)$$

Для нахождения направляющих косинусов составляется очевидная система уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= r_0^2 + d_1^2 - 2r_0 d_1 \cos(\widehat{r_0 d_1}), \\ r_2^2 &= r_0^2 + d_2^2 - 2r_0 d_2 \cos(\widehat{r_0 d_2}), \\ r_3^2 &= r_0^2 + d_3^2 - 2r_0 d_3 \cos(\widehat{r_0 d_3}). \end{aligned} \right\} \quad (7.9.5)$$

Однако наличие функциональных зависимостей (7.9.2) и (7.9.3) свидетельствует о том, что между уравнениями системы (7.9.5) существует линейная зависимость, вследствие чего независимыми из них являются только два. Анализ показывает [64], что по сооб-

ражениям точности следует исключить уравнение, относящееся к наибольшему значению r_i . Вместо него надлежит добавить уравнение связи направляющих косинусов A_{0i} . Тогда, выразив члены $r_0 d_i \cos(\widehat{r_i d_0})$ через суммы произведений слагающих r_0 и d_i по координатным осям, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} r_0 A_{0x}(x_1 - x_0) + r_0 A_{0y}(y_1 - y_0) + r_0 A_{0z}(z_1 - z_0) &= \\ &= \frac{1}{2} (r_0^2 + d_1^2 - r_1^2), \\ r_0 A_{0x}(x_2 - x_0) + r_0 A_{0y}(y_2 - y_0) + r_0 A_{0z}(z_2 - z_0) &= \\ &= \frac{1}{2} (r_0^2 + d_2^2 - r_2^2), \\ A_{0x}^2 + A_{0y}^2 + A_{0z}^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.6)$$

Система (7.9.6) содержит три неизвестных — A_{0x} , A_{0y} и A_{0z} и может быть разрешена относительно них. Можно показать [64], что каждое из неизвестных находится решением квадратного уравнения, в процессе которого требуется выбирать результат, относящийся к действительному положению КА. Ввиду линейности первых двух уравнений алгоритм решения будет проще, чем для решения системы (7.9.1).

Теперь искомые координаты КА можно привязать к центру базисного треугольника:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + r_0 A_{0x}, \\ y &= y_0 + r_0 A_{0y}, \\ z &= z_0 + r_0 A_{0z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9.7)$$

§ 7.10. ОСОБЕННОСТИ НАВИГАЦИИ ПРИ ПОДЛЁТЕ К ПЛАНЕТЕ И ПОСАДКЕ

В районе планеты требования к точности навигации повышаются. При подлёте к Луне с целью посадки на нее, выхода на низкую селеноцентрическую орбиту или облета все возможные для данного энергетического класса траектории собираются в сравнительно узкий пучок относительно оси, направленной в центр Луны. Различные по назначению траектории отличаются по ориентации вектора скорости и по его величине сравнительно мало. Поэтому для выхода на нужную траекторию требуется весьма точно задать ее параметры и надежно их контролировать.

При посадке на поверхность планеты, окруженной атмосферой, для гашения вертикальной скорости спуска применяются, как правило, парашюты. Возможности их по маневрированию ограничены, следовательно, ограничен и выбор места посадки. Это заставляет

с повышенной точностью определить точку схода с орбиты и весьма критично назначать тормозной импульс для перехода на траекторию снижения. При околопланетных полетах предшествующие спуску витки используют для уточняющих измерений. Если орбита слабо возмущается, оказывается достаточным измерений на участках витков, видимых с контролирующей территории. Для уточнения возмущенного движения значительную роль приобретают бортовые измерения.

Точность посадки может повыситься, если применять космические аппараты с подъемной силой. Регулируя подъемную силу, удастся маневрировать углом и направлением спуска. Управление спуском в этом случае основывается на непрерывном определении пространственного положения КА. Подобная навигационная задача решается на основе измерения углов, высоты, дальности.

Поскольку планеты лежат вблизи плоскости эклиптики, траектории преимущественно проходят вблизи нее. Однако при подлете к Земле в этой плоскости КА попадает под интенсивное облучение радиационных поясов. Чтобы исключить воздействие радиации на экипаж корабля без усиления биологической защиты КА целесообразно, чтобы орбита проходила через приполярные области Земли и спуск начинался в плоскости, перпендикулярной плоскости эклиптики. Оказывается, что в этих условиях траектория спуска будет весьма чувствительна к начальным параметрам, так что ширина входного коридора будет очень узкой (в ряде случаев менее 10 км). Это обстоятельство предъявляет дополнительные требования к точности навигационных определений при подходе к Земле.

При спуске с орбиты желательно, чтобы приземление состоялось в дневное время. Однако дневная посадка может быть лишь при определенном расположении плоскости орбиты относительно Солнца. Так, для околоземных орбит сроки возможной посадки в освещенную область непрерывно меняются из-за годового движения Земли вокруг Солнца и из-за прецессии плоскости орбиты.

Показателем освещенности точки посадки является величина углового размера S' дуги большого круга, стягивающей точку посадки π (с координатами φ_{π} и $\lambda_{оп}$) и точку проекции Солнца (с координатами $-\alpha_{\odot}$ и $\delta_{\odot}$). Если $S' < 90^\circ$, то точка посадки освещена, если $S' > 90^\circ$, посадка совершается в неосвещенную область (рис. 7.10.1).

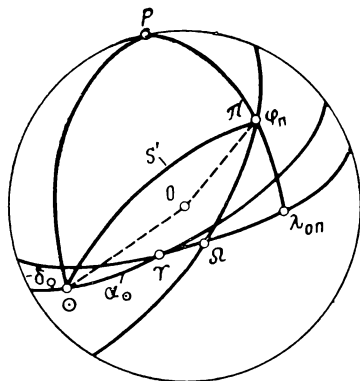


Рис. 7.10.1. К расчету попадания точки посадки КА в освещенную область.

Пользуясь рис. 7.10.1 и применяя зависимости сферической тригонометрии (см. табл. 6.3.2), можно найти выражение для угла S' :

$$S' = \arccos [\sin \delta_{\odot} \sin \varphi_{\Pi} + \cos \delta_{\odot} \cos \varphi_{\Pi} \cos (-\alpha_{\odot} + \Omega + \lambda_{0\Pi})]. \quad (7.10.1)$$

Входящие в формулу (7.10.1) склонение $\delta_{\odot}$ и прямое восхождение $\alpha_{\odot}$ имеют годовой ход ввиду вращения направления на Солнце со скоростью $\omega_{\odot} = 1^{\circ}/\text{сутки}$, так что

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\odot} &= \arcsin (\sin 23,5^{\circ} \cdot \sin \omega_{\odot} t), \\ \alpha_{\odot} &= \arccos (\cos \omega_{\odot} t \sec \delta_{\odot}). \end{aligned} \right\} \quad (7.10.2)$$

В свою очередь долгота восходящего узла орбиты Ω меняется ввиду прецессии, вызванной несферичностью Земли, в зависимости от высоты H орбиты и ее наклонения i :

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_0 \left(\frac{\rho_3}{\rho_3 + H} \right)^{3,5} \cos i, \quad (7.10.3)$$

где $\dot{\Omega}_0$ — некоторая постоянная, равная $\approx 10^{\circ}/\text{сутки}$.

Учет приведенных зависимостей позволяет рассчитать периодичность изменения условий освещенности при посадке. Средний период $T_{\odot}$ в зависимости от угла наклона орбиты i при высоте ее как параметре показан на рис. 7.10.2. Видно, что для средних значений i

и высот $H = 500 \div 1000$ км периодичность изменения освещенности составляет 50—70 суток.

Подобно возвращению с околоземной орбиты, при отлете от Луны существуют определенные сроки, обеспечивающие приземление в дневное время. Соответствующий анализ показывает, что при продолжительности обратного полета 50—100 часов с целью посадки в Северном полушарии в дневное время наиболее благоприятным временем отлета является период с начала мая по начало сентября.

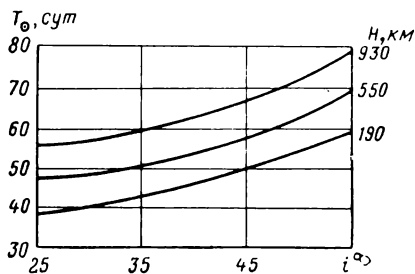


Рис. 7.10.2. График периодичности изменения условий освещенности точки посадки КА.

При спуске космического корабля с орбиты с целью посадки рассчитывается требуемое изменение его скорости. При заданной точке посадки точность назначения переходной орбиты определяется точностью предшествующих навигационных определений.

Рассмотрим основы нахождения оптимального тормозного импульса, переводящего КА на траекторию спуска с орбиты, принимая для простоты движение КА невозмущенным, совершающимся по круговой орбите.

Пусть КА, обращающийся по орбите высотой H , которой соответствует относительная высота $h = H/\rho_3$, должен совершить посадку в точке π в результате мгновенного изменения скорости в точке орбиты C (рис. 7.10.3).

Положение точки π задается углом отхода от плоскости орбиты δ и угловым расстоянием θ траектории спуска $Сл$. Ищется величина минимального тормозного импульса, а также положение точки C , при котором этот минимум достигается.

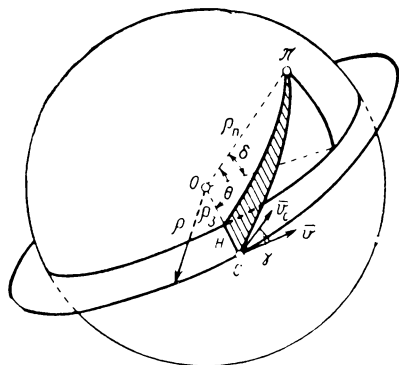


Рис. 7.10.3. К расчету импульсного изменения скорости при спуске с орбиты.

Орбитальная скорость v , выражаемая через радиус-вектор ρ и гравитационный параметр μ как $v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, в результате приложения импульса скорости v_t снижается до скорости спуска v_c , так что $v_c = \bar{v} + \bar{v}_t$.

Если угол между первоначальной плоскостью орбиты и плоскостью снижения обозначить γ , то из геометрических соображений можно записать

Если угол между первоначальной плоскостью орбиты и плоскостью снижения обозначить γ , то из геометрических соображений можно записать

$$v_t^2 = v^2 + v_c^2 - 2vv_c \cos \delta \cos \gamma. \quad (7.10.4)$$

Введя относительные величины

$$v'_t = \frac{v_t}{v} \text{ и } v'_c = \frac{v_c}{v}, \quad (7.10.5)$$

получаем далее

$$v'_t = [1 + v'^2_c - 2v'_c \cos \delta \cos \gamma]^{1/2}. \quad (7.10.6)$$

Можно затем ввести угол α между вектором скорости в точке посадки и местным горизонтом и получить соотношение между v'_c , α , Θ и h в виде

$$\begin{aligned} (v'^2_c \cos^2 \alpha - 1) \cos \Theta - v'^2_c \sin \alpha \cos \alpha \sin \Theta = \\ = (v'^2_c \cos^2 \alpha - 1) + v'^2_c h \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (7.10.7)$$

откуда следует решение относительно v'_c :

$$v'_c = \left[\frac{(1 - \cos \Theta)}{\cos^2 \alpha (1 - \cos \Theta + h + \operatorname{tg} \alpha \sin \Theta)} \right]^{1/2}. \quad (7.10.8)$$

В свою очередь угол α составит

$$\alpha = \arctg \left[\frac{1}{1+h} \left(\operatorname{tg} \delta + h \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2} \right) \right]. \quad (7.10.9)$$

Существует такой δ_0 , при котором траектория спуска оказывается касательной к плоскости местного горизонта ($\alpha = 0$):

$$\operatorname{tg} \delta_0 = -h \operatorname{ctg} \frac{\Theta}{2}. \quad (7.10.10)$$

Из (7.10.6), (7.10.7) и (7.10.10) можно получить значение необходимого изменения скорости v'_c при заданном θ для приземления по касательной

$$v'_{c0} = 1 + \frac{1 - \cos \Theta + h^2 (1 + \cos \Theta)}{1 - \cos \Theta (1 + h)} - 2 \left[\frac{(1 - \cos \Theta)}{1 - \cos \Theta (1 + h)} \left(1 - \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2 \Theta} \right) \right]^{1/2}. \quad (7.10.11)$$

На графике рис. 7.10.4 показаны значения требуемого v'_{c0} при $h = 0,1$. Видно, что наименьшим значение относительной ско-

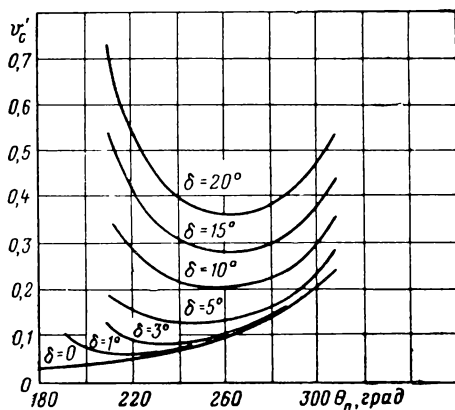


Рис. 7.10.4. График зависимости относительной скорости спуска v'_c от θ и δ .

рости будет при $\delta = 0$ и $\Theta = 180^\circ$, что соответствует посадке в плоскости первоначальной орбиты. Выход из этой плоскости ($\delta \neq 0$) требует существенного увеличения тормозного импульса скорости.

Оптимальное значение угловой дальности Θ будет зависеть от δ и h , увеличиваясь с ростом δ и с уменьшением h .

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ МЕЖПЛАНЕТНОЙ НАВИГАЦИИ

§ 8.1. ОСОБЕННОСТИ НАВИГАЦИИ НА МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАССАХ

К межпланетной навигации можно отнести различные виды навигационной работы в условиях, когда расстояние между НТ и объектом значительно превышает размеры планеты отлета или назначения.

Подобные условия в настоящее время возникают в основном при полетах КА к Луне и ближайшим планетам — Марсу и Венере.

Особенности навигации межпланетных объектов состоят, прежде всего, в значительной протяженности каналов передачи сигналов, что требует больших мощностей передатчиков, высокой чувствительности приемников, применения пространственной и частотной селекции. В этой связи повышается значение естественных навигационных точек с неограниченными запасами энергии (Солнце, звезды).

В силу удаленности от планет по необходимости усиливается автономный характер работы КА, что предопределяет стремление к использованию методики самоопределения. Повышение роли автономных навигационных определений приводит к возрастанию значения оператора и его квалификации.

При протяженных космических полетах приходится считаться с ограниченностью энергоресурса, поэтому тщательно подходят к выбору траекторий, назначая их из условий минимальности затрат энергии и наилучшего использования гравитационного поля Солнца и планет.

Оптимальные по энергетике траектории оказываются далеко не кратчайшими по расстоянию и не быстрейшими по времени. Так, к примеру, орбита перелета к Венере, оптимальная по расходу энергии, будет иметь вид эллипса, касательного к орбитам Земли и Венеры (полагаемых круговыми), и должна проходить через Землю в момент старта и Венеру в момент прибытия (рис. 8.1.1). Продолжительность полета по ней составит 145 суток

при скорости выведения на орбиту $v_n = 28,5 \text{ км/сек}$, так как длина такой траектории во много раз превышает кратчайшее расстояние между орбитами Земли и Венеры.

На межпланетных трассах измерения должны проводиться по всей траектории, в интервале всего времени пассивного полета с предельно возможной точностью. При этом особенно ответственны измерения перед включением двигателя для коррекции траектории или для выполнения длительного маневра.

Межпланетный полет отличается от околопланетного также и возможным составом измеряемых параметров. Не используются,

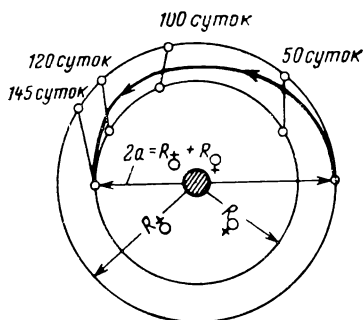


Рис. 8.1.1. Траектория перехода к Венере.

естественно, измерения высоты, разности расстояний до двух поверхностных НТ или скорости изменения такой разности расстояний. Измерять на борту расстояния и радиальные скорости относительно планетных НТ возможно, но приемно-измерительная часть аппаратуры усложняется по сравнению с бортовыми средствами околоземных кораблей. Между тем роль измерения углов и угловых скоростей возрастает и появляются возможности для измерения таких специфических величин, как угло-

вые размеры диска планеты или время затмения звезд планетным диском.

Когда траектория полета хорошо детерминирована и в полете имеют место лишь незначительные от нее отклонения, успешно применяются методы определения, основанные на линеаризации навигационных функций и уравнений движения в окрестностях опорной орбиты. При длительном космическом полете может возникнуть потребность в совершении непредвиденного маневра со значительными отклонениями от расчетной орбиты. Подобные условия характерны и для аварийной ситуации. В этих случаях итерационные методы уточнения элементов орбиты не дадут нужной сходимости. Данное обстоятельство лишает веса априорную информацию и заставляет обратиться к методам первоначального определения параметров движения КА.

Для межпланетной навигации могут применяться искусственные РНТ, расположенные на суточных стационарных околоземных орбитах с высотой порядка 36100 км , селеноцентрические орбитальные радионавигационные точки, а также опорные точки, оборудованные на поверхности Луны и планет.

§ 8.2. НАВИГАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ САМООПРЕДЕЛЕНИИ В МЕЖПЛАНЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

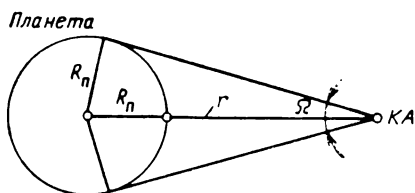
Для определения параметров движения КА в межпланетном пространстве применяются различные навигационные измерения, выполняемые как с Земли, так и с борта самого КА. В случае решения задачи местоопределения на борту КА особую роль играют измерения относительно естественных космических тел, дающих собственное электромагнитное излучения (Солнце, звезды) или отражающих падающую на них солнечную радиацию (Луна, планеты). Соответственно этому находят применение своеобразные навигационные функции.

Рассмотрим основные из них, используя выражения в гелиоцентрической прямоугольной системе координат.

1. Угловой размер Ω планеты или Солнца

В условиях межпланетного полета Солнце и планеты могут наблюдаться в оптическом диапазоне волн. С КА они будут иметь вид дисков различной величины. Размер диска можно характеризовать углом, под которым он просматривается. Чем ближе наблюдатель к планете или Солнцу, тем угловой размер Ω будет больше (рис. 8.2.1).

Рис. 8.2.1. К определению углового размера планеты Ω .



Обозначим координаты центра планеты через x_n , y_n и z_n , координаты КА — x , y и z , радиус планеты — R_n , расстояние от КА до поверхности планеты — r . Между r и Ω существует связь, усматриваемая из рис. 8.2.1:

$$(R_n + r) \sin \frac{\Omega}{2} = R_n, \quad (8.2.1)$$

откуда следует

$$r = R_n \left(\operatorname{cosec} \frac{\Omega}{2} - 1 \right). \quad (8.2.2)$$

Таким образом, измеряемый угол Ω доставляет информацию непосредственно о дальности r .

Связь координат x^j и $x_{\text{п}}^j$ с углом Ω и дальностью r дается выражением

$$\sum_{j=1}^3 (x^j - x_{\text{п}}^j)^2 = R_{\text{п}}^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\Omega}{2}. \quad (8.2.3)$$

Если измерения проводятся относительно Солнца, последнее уравнение упрощается

$$\sum_{j=1}^3 (x^j)^2 = R_{\odot}^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\Omega}{2}. \quad (8.2.3')$$

Функции (8.2.3) соответствует поверхность положения в виде сферы с центром, совпадающим с центром планеты (или Солнца), поскольку геометрическим местом точек, из которых планета видна под некоторым углом Ω , является именно сфера. Таким образом в геометрическом плане измерения Ω эквивалентны измерению дальности от КА до планеты.

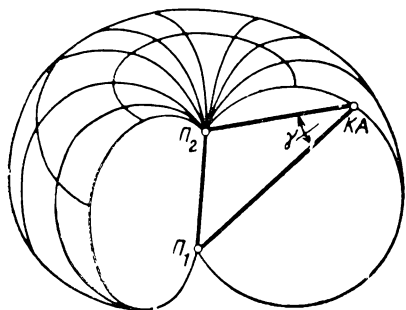


Рис. 8.2.2. Поверхность положения при измерении угла γ между центрами двух планет.

2. Угол γ между центрами двух планет или планеты и Солнца

Если с помощью двух оптических пеленгаторов визировать направления на центры двух планет, то представляется возможным измерять угол γ между

линиями визирования. Величина этого угла зависит от расстояния между планетами и от положения КА относительно базы, образованной линией, соединяющей центры планет (рис. 8.2.2).

Пусть база обозначена d , а расстояния от КА до центров планет — соответственно ρ_1 и ρ_2 . Из геометрического построения видно, что эти величины связаны следующей зависимостью:

$$\cos \gamma = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - d^2). \quad (8.2.4)$$

Приняв координаты центров планет $x_{\text{п}1}^j$ и $x_{\text{п}2}^j$ и координаты КА — x^j , будем иметь для d , ρ_1 и ρ_2 соответственно:

$$\left. \begin{aligned} d^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_{\text{п}1}^j - x_{\text{п}2}^j)^2, \\ \rho_1^2 &= \sum_{j=1}^3 (x^j - x_{\text{п}1}^j)^2, \\ \rho_2^2 &= \sum_{j=1}^3 (x^j - x_{\text{п}2}^j)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.5)$$

В частном случае, когда вместо одной из планет используется Солнце, $x_{п1}^j = 0$. При этом вид навигационной функции сохраняется (8.2.4), тогда как два соотношения из (8.2.5) упрощаются

$$\left. \begin{aligned} d^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_{п2}^j)^2, \\ \rho_1^2 &= \sum_{j=1}^3 (x^j)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.5')$$

Функции (8.2.4) соответствует поверхность положения, образованная вращением дуги $P_1 - P_2$ вокруг линии d . Во всех точках этой поверхности центры планет будут просматриваться под углом γ . По форме эта поверхность приближается к так называемым циклидам, которые образуются путем перемещения окружности так, что ее центр скользит по другой окружности, причем плоскость движущейся окружности остается перпендикулярной к направляющей. Однако точно циклидой (ее частным видом — тором) данная поверхность стать не может, так как измеряемый параметр должен быть $\gamma \neq 0$.

Прямоугольные координаты $x_{п1}^j$ и $x_{п2}^j$ вычисляются заранее по эфемеридам планет, рассчитываемым вперед на длительный срок. Если эфемериды даются в гелиоцентрической сферической системе координат в виде радиус-вектора ρ_{pi} , прямого восхождения α_{pi} и склонения δ_{pi} , то применяются зависимости:

$$\left. \begin{aligned} x_{pi} &= \rho_{pi} \cos \delta_{pi} \cos \alpha_{pi}, \\ y_{pi} &= \rho_{pi} \cos \delta_{pi} \sin \alpha_{pi}, \\ z_{pi} &= \rho_{pi} \sin \delta_{pi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

3. Угол ω между направлением на звезду и на центр планеты или на центр Солнца

Определяя одновременно направления на звезду и на планету, можно измерить угол ω между линиями визирования. Существенным отличием этого случая от пеленгования двух планет является то, что в силу большой удаленности звезды направления движения фронта волны, исходящей от нее, можно считать одинаковыми для всех точек межпланетного пространства. Следовательно, линия визирования звезды с КА будет параллельной линии, соединяющей звезду с центром планеты. Тогда угол при центре планеты между направлениями на звезду и на КА (рис. 8.2.3) будет также равен ω .

Это дает основания считать, что геометрическим местом точек, отвечающих отсчету ω , будет круговой конус с началом в центре планеты, с осью в направлении на звезду и с раствором, равным двум углам ω .

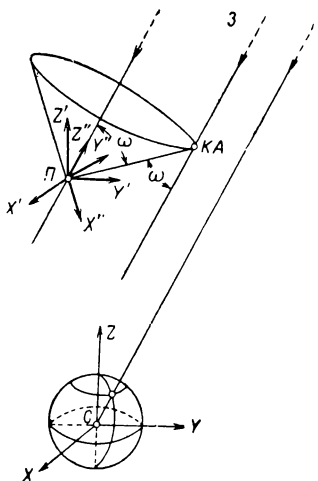


Рис. 8.2.3. К измерению угла ω между направлениями на звезду и на центр планеты.

Введем прямоугольные гелиоцентрическую $X Y Z$ и планетоцентрическую $X' Y' Z'$ системы координат, причем начальные плоскости отсчета выберем одинаковыми (экваториальные или эклиптические), а оси X и X' согласуем по направлению. Тогда в обеих координатных системах угловое положение звезды будет задаваться одинаковыми координатами — прямым восхождением α и склонением δ . Повернем далее систему $X' Y' Z'$ вокруг оси Z' на угол α и затем вокруг оси Y' на угол $(90 - \delta)$. Ось Z'' новой системы $X'' Y'' Z''$ будет направлена на звезду (рис. 8.2.3).

Координаты KA x'' , y'' , z'' и измеренный угол ω будут связаны уравнением конической поверхности

$$(x'')^2 + (y'')^2 = (z'')^2 \operatorname{tg}^2 \omega. \quad (8.2.7)$$

Координаты x'' , y'' и z'' преобразуются в координаты x , y и z по формулам, учитывающим переход от планеты к Солнцу и повороты на углы α и $(90 - \delta)$:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= [(x - x_{\text{п}}) \cos \alpha - (y - y_{\text{п}}) \sin \alpha] \sin \delta - (z - z_{\text{п}}) \cos \delta, \\ y'' &= (x - x_{\text{п}}) \sin \alpha + (y - y_{\text{п}}) \cos \alpha, \\ z'' &= (z - z_{\text{п}}) \sin \delta + [(x - x_{\text{п}}) \cos \alpha - (y - y_{\text{п}}) \sin \alpha] \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.8)$$

В свою очередь прямоугольные координаты планеты при задании ее сферических координат $\rho_{\text{п}}$, $\alpha_{\text{п}}$ и $\delta_{\text{п}}$ находятся с помощью зависимостей (8.2.6).

Совокупность (8.2.7) и (8.2.8) дает выражение навигационной функции, соответствующей измерению угла между направлениями на звезду и планету.

Случай измерения угла между направлениями на звезду и на Солнце представляется частным по отношению к рассмотренному выше. Для этих условий вершина конической поверхности положения будет располагаться в начале гелиоцентрической системы координат. Вид навигационной функции упрощается

$$\begin{aligned} &[(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \sin \delta - z \cos \delta]^2 + [x \sin \alpha + y \cos \alpha]^2 = \\ &= [(x \cos \alpha - y \sin \alpha) \cos \delta + z \sin \delta]^2 \operatorname{tg}^2 \omega. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Следует отметить, что при визировании планеты для правильного учета ее координат на борту требуется моделировать течение эфемеридного времени. Наряду с этим при визировании звезды ее

координаты могут приниматься неизменными для различных сеансов навигационных измерений, что освобождает от необходимости фиксировать эфемеридное время.

4. Дальность ρ до центра планеты

Расстояние ρ от КА до центра планеты может измеряться различными способами. С помощью радиотехнических дальномеров, работающих в режиме ретрансляции или с хранением начала отсчета на борту, находится расстояние r до некоторой точки на поверхности планеты. Зная координаты расположения навигационной точки, а также размеры планеты, нетрудно пересчитать эту величину в дальность до центра ρ .

Имеется возможность для измерения ρ по оценке различия воздействий гравитационного поля планеты на две разнородные массы [77]. Если на борту КА в направлении на центр планеты разместить две одинаковые массы m на расстоянии l , то эти массы будут испытывать притягивающие силы, разность которых ΔF в принципе можно измерить динамометром. Она равна

$$\Delta F = f m_{\text{п}} m \left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{(\rho + l)^2} \right],$$

откуда, учитывая, что $l \ll \rho$, находится

$$\Delta F \approx 2f\rho^{-3}m_{\text{п}}ml. \quad (8.2.10)$$

Измерению будет соответствовать уравнение

$$\sum_{j=1}^3 (x^j - x_{\text{п}}^j)^2 = \left(\frac{2fm_{\text{п}}ml}{\Delta F} \right)^{2/3}. \quad (8.2.11)$$

В рассмотренном варианте информацию о дальности несет разность сил ΔF . Однако для тех же условий дальность можно оценивать по тому, как с течением времени изменяется расстояние между пробными массами. Меняется же расстояние оттого, что ближайшая к планете масса приобретает большее ускорение и будет проходить больший путь, нежели расположенная сзади нее масса. Заметим, что в силу малой величины эффекта оба варианта измерителей трудно реализовать.

5. Радиальная скорость $\dot{r}$ относительно навигационной точки

На борту КА по измерениям доплеровского смещения частоты можно определять радиальную составляющую скорости $\dot{r}$ относительно навигационной точки, излучающей сигналы. Навигационная точка, располагаясь на поверхности планеты или на искусственном спутнике планеты, будет иметь собственное движение в гелиоцентрической системе отсчета. Поэтому регистрируемый доплеровский сдвиг будет соответствовать фактической относительной скорости КА и НТ. Это вынуждает располагать предварительной информацией о скорости КА (ср. с учетом движения объекта навигации в § 7.8).

Поверхности положения будут иметь вид семейства конусов (см. рис. 4.2.4). Вершины конусов совпадают с НТ, а ось этого семейства будет отклонена от направления вектора НТ в соответствии с влиянием вектора скорости КА.

6. Разность дальностей Δr до двух орбитальных навигационных точек

Разностно-дальномерная методика проявляет свои достоинства на таких удалениях от навигационных точек, которые соизмеримы с размером базы, их связывающей. Для межпланетного полета могут использоваться базы, образованные точками, которые размещены на поверхности планет или на их искусственных спутниках. Такие базы будут изменять свой размер, однако по расчету эфемерид координаты навигационных точек могут уточняться.

Поверхности положения будут иметь вид семейства двуполостных гиперболоидов, фокусы которых совмещены с навигационными точками (ср. с рис. 4.2.2).

Разностно-дальномерные измерения по одной РНТ также возможны, если такая точка имеет значительную относительную скорость. Основы такого использования можно проследить по рис. 7.5.1.

§ 8.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Космические аппараты, запускавшиеся в течение последнего десятилетия к Луне и к ближайшим планетам Солнечной системы, представляли собой автоматические межпланетные станции. Советские станции типа «Луна», «Марс», «Венера», а также американские аппараты типа «Сервейер», «Маринер» управлялись дистанционно и в навигационном отношении обслуживались измерениями с поверхности Земли. Навигационная методика в этом случае основывается на измерениях дальности, радиальной скорости и угловых координат с наземных НТ. Положение НТ выбирается так, что объект периодически попадает в зону видимости на длительное время. Вследствие движения Земли измерения, разнесенные во времени, оказываются выполненными из разных точек пространства. Так, при скорости $v_z = 30$ км/сек Земля за время, равное 30 мин, переместится вдоль по своей орбите примерно на 50 000 км. Поэтому измерения выполняются как бы по большим базам, что позволяет работать при более выгодных углах пересечения поверхностей положения.

В будущем роль методики самоопределения должна возрасти, особенно для экипажных КА. Следует отметить, что в околоземных полетах уже первые космонавты успешно пользовались бортовыми измерениями по звездам. При облете Луны экипаж космического

корабля рассчитывает маневр на возврат к Земле по результатам своих бортовых измерений.

Определение параметров движения КА основывается на нахождении его пространственного положения по крайней мере для двух последовательных моментов времени. Фиксация двух положений КА равнозначна тому, что из центра тяготения заданы радиус-векторы двух точек орбиты. По двум же точкам орбиты ее элементы находятся аналитическим путем [57].

Выясним, каков минимальный состав измерений, обеспечивающий решение задачи местоположения.

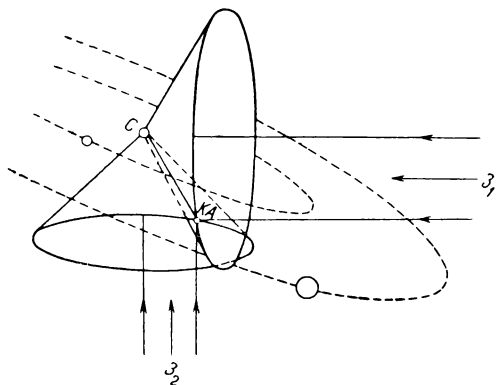


Рис. 8.3.1. Геометрическая схема определения местоположения КА.

Рассмотренные в § 8.2 навигационные функции содержат три группы величин: известные заранее координаты НТ (звезды, планеты, орбитальной НТ), измеряемые навигационные параметры и координаты КА. Таким образом, каждая функция включает из неизвестных только три x^i .

Для аналитического нахождения неизвестных координат КА требуется располагать по крайней мере системой трех уравнений. При решении системы в силу особенностей функций, а также ввиду наличия ошибок измерений может появиться неоднозначность в координатах. Тогда для ее разрешения привлекаются дополнительные уравнения. С геометрической точки зрения это эквивалентно тому случаю, когда три поверхности положения дают при своем пересечении не одну точку.

На рис. 8.3.1 показано пересечение поверхностей положения, соответствующих измерению углов ω между направлениями на Солнце и на две звезды. Видно, что пересечение двух конических поверхностей обозначает направление, на котором находится КА. Если привлечь третье измерение вида Ω , позволяющее оценить дальность до Солнца, то третьей поверхностью положения явится

сфера с центром в начале гелиоцентрической системы отсчета. В результате пересечения трех поверхностей будет обозначено место КА.

Из многих возможных комбинаций измеряемых величин можно выделить несколько, представляющихся наиболее удобными для межпланетной навигации.

Прежде всего — это состав измерений, включающий: угол ω_1 между направлениями на Солнце и на первую звезду, угол ω_2 между направлениями на Солнце и на вторую звезду и угловой диаметр Ω Солнца. Второй состав измерений: угол ω_1 между направлениями на Солнце и на первую звезду, угол ω_2 между направлениями на Солнце и на вторую звезду и угол ω_3 между направлениями на планету и на звезду. В этом случае, естественно, для точной выборки эфемериды планеты требуется фиксация эфемеридного времени. Необходимость в этом отпадает, если добавить четвертое измерение типа угла ω_4 между направлениями на планету и на звезду.

Упомянутые выше составы измерений могут реализовываться уже в настоящее время, на базе хорошо освоенных технических средств оптического диапазона. В дальнейшем при размещении на Луне, планетах, а также на суточных стационарных орбитах радионавигационных точек с автоматическими радиоориентирами угловые измерения смогут дополняться измерениями радиальных скоростей или разности радиальных скоростей.

Итак, в результате бортовых измерений минимального объема могут определяться положения КА в преимущественной системе координат.

Обратимся далее к методу нахождения элементов орбиты КА по двум ее точкам. Принципиальная возможность этого вытекает из того обстоятельства, что движение по эллиптической орбите определяется шестью параметрами, а две точки орбиты фактически дают их. В самом деле, располагая последовательными значениями координат КА, можно вычислить составляющие его скорости $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ и $v_z = \dot{z}$. Но тогда три координаты x , y , z и три производных от них $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ составят в совокупности требуемую группу начальных условий движения.

Вопрос об определении орбиты по двум заданным положениям спутника тщательно проанализирован в книге П. Е. Эльясберга [57] применительно к различным типам орбит (эллиптические, параболические, гиперболические) и для различных вариантов расположения известных точек. В работе [76] дается компактный алгоритм, который можно привести в качестве примера расчета приближенных элементов орбиты межпланетного КА.

Исходными являются гелиоцентрические прямоугольные координаты x_1 , y_1 , z_1 для момента t_1 и x_2 , y_2 и z_2 для момента t_2 , принадлежащие двум точкам на маловозмущенном участке кеплеровой

орбиты. Движение КА описывается обычными элементами: i , Ω , ω , a , e и ϑ_1 — истинной аномалией для момента t_1 (рис. 8.3.2).

Образовав векторное произведение $\bar{\rho} = [\bar{\rho}_1 \times \bar{\rho}_2]$, можно далее его слагающие по координатным осям выразить через модули ρ_1 и ρ_2 , а также через разность истинных аномалий $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$, наклонение i и долготу восходящего узла Ω в виде

$$\rho_x = \rho_1 \rho_2 \sin \Delta\vartheta \sin i \sin \Omega = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad (8.3.1)$$

$$\rho_y = \rho_1 \rho_2 \sin \Delta\vartheta \sin i \cos \Omega = x_1 z_2 - z_1 x_2, \quad (8.3.2)$$

$$\rho_z = \rho_1 \rho_2 \sin \Delta\vartheta \cos i = x_1 y_2 - y_1 x_2. \quad (8.3.3)$$

Пользуясь значениями ρ_x , ρ_y и ρ_z , можно прийти к выражениям для i , Ω и $\Delta\vartheta$:

$$\operatorname{tg} i = \left[\frac{1}{\rho_z^2} (\rho_x^2 + \rho_y^2) \right]^{1/2}, \quad (8.3.4)$$

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{\rho_x}{\rho_y}, \quad (8.3.5)$$

$$\sin \Delta\vartheta = \frac{\rho_x}{\rho_1 \rho_2}. \quad (8.3.6)$$

Последнее уравнение используется для проверки, не оказывается ли разность $\Delta\vartheta$ близкой к целому числу π , поскольку в этом случае будет иметь место значительное понижение точности.

Чтобы избежать этого, заменяют вектор $\bar{\rho}_2$ другим вектором $\bar{\rho}_3$, уводящим решение от условий, когда $\Delta\vartheta \rightarrow k\pi$ ($= 0, 1, \dots$).

Полуось a находится так: вводится фиктивный эллипс с большой полуосью a_Φ , равной четверти периметра треугольника $ОКА_1КА_2$

$$a_\Phi = \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + S), \quad (8.3.7)$$

так что отношение a_Φ и a дает некоторое число:

$$m = \frac{a_\Phi}{a}. \quad (8.3.8)$$

При этом отношение времени движения между заданными точками к периоду орбиты с полуосью a_Φ составит

$$l = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} (t_2 - t_1) a_\Phi^{-3/2}. \quad (8.3.9)$$

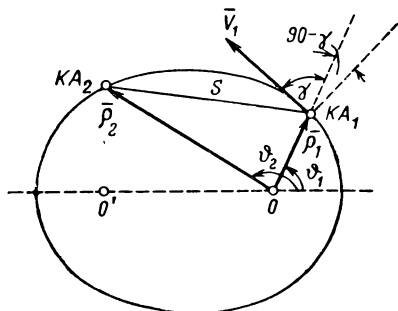


Рис. 8.3.2. К определению параметров орбиты по двум местоположениям КА.

Оба коэффициента зависят от a_Φ , т. е. от заданного положения точек на орбите. Это позволяет путем нескольких итераций уточнить значение m и определить полуось a как

$$a = \frac{a_\Phi}{m}. \quad (8.3.10)$$

Для нахождения эксцентриситета e вычисляется модуль v_1 скорости

$$v_1 = \left[2\mu \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{m}{2a_\Phi} \right) \right]^{1/2} \quad (8.3.11)$$

и затем искомая величина

$$e = \left(1 - \frac{m}{a_{\Phi\mu}} v_1^2 \rho_1^2 \sin^2 \gamma \right)^{1/2}, \quad (8.3.12)$$

причем угол γ (см. рис. 8.3.2) заключен между векторами $\bar{\rho}_1$ и $\bar{v}_1$.

Зная a и e , по известному соотношению находят параметр p :

$$p = a(1 - e^2), \quad (8.3.13)$$

после чего можно вычислить истинную аномалию первой точки

$$\vartheta_1 = \arccos \left(\frac{p - \rho_1}{\rho_1 e} \right), \quad (8.3.14)$$

а затем и ϑ_2 .

Угловое расстояние перицентра от узла ω находится по правилу, изложенному в § 2.4.

Близость найденных элементов к истинным их значениям зависит от точности определения векторов $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$, а также от точности фиксации моментов времени t_1 и t_2 .

§ 8.4. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОРРЕКЦИИ ТРАЕКТОРИИ И МАНЕВРИРОВАНИЯ

Для коррекции межпланетной траектории необходимо предварительно вычислить текущее значение отклонения от заданного маршрута, на основании чего определяется требуемая поправка к скорости. Эффективность коррекции зависит, таким образом, и от точности определения параметров движения КА, и от точности введения скоростной поправки.

На выбор моментов коррекции влияют противоборствующие факторы. С одной стороны, чем раньше введена поправка к скорости, тем к большим смещениям КА в районе цели она приведет. Но, с другой стороны, сама цель — планета используется для навигационных определений, так что точность их возрастает по мере приближения к конечной точке маршрута. Поэтому слишком позд-

ная коррекция может быть более точной, но потребует большого изменения скорости, тогда как слишком ранняя коррекция, хотя и выгодна по энергетике, но выполняется по менее точным навигационным измерениям и может потребовать многократных последующих исправлений.

При возвращении на Землю лунных кораблей обычно применяется двухразовая коррекция траектории. На рис. 8.4.1 показано схематически положение точек коррекции. Видно, что перед коррекциями траектория возврата уточняется на протяженном мерном участке.

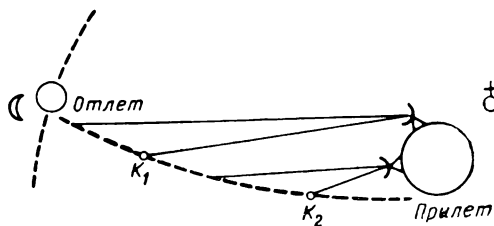


Рис. 8.4.1. Типовая схема расположения точек коррекции траектории возврата лунных КА.

Первая коррекция выполняется с целью устранения выявившихся ошибок в широте и долготе точки входа в атмосферу и в угле входа, причиной которых является неточное выполнение маневра на возвращение.

Вторая коррекция проводится примерно через 48 часов полета (при варианте общей продолжительности полета 90 часов) и служит для компенсации ошибок за счет неточного знания участка орбиты перед первой коррекцией и за счет неточностей самой первой коррекции.

Маневрирование космических аппаратов применяется при выполнении ряда задач: для встречи КА в космическом пространстве, для изменения маршрута полета, для перехода с орбиты спутника на межпланетную орбиту и для обратного перехода, для уклонения от внезапно появившегося препятствия и т. п. В основе маневрирования лежит переход с одной орбиты полета на другую.

Наиболее общим случаем является переход между орбитами, лежащими в разных плоскостях. При таком некомпланарном переходе сначала переводят КА в плоскость назначенной орбиты, затем меняют его орбиту. На поворот плоскости орбиты расходуется значительно большая энергия, чем на переходы в одной плоскости.

Возможны различные варианты поворота плоскости орбиты. На рис. 8.4.2 показаны схемы одноимпульсного, двухимпульсного и трехимпульсного переходов между эллиптическими орбитами, лежащими во взаимно перпендикулярных плоскостях. Одноимпульс-

ный переход выгоден при малых эксцентриситетах, выдается Δv при прохождении КА через линию пересечения плоскостей. Двухимпульсный переход предполагает предварительный перевод КА из апоцентра одной орбиты в апоцентр другой импульсом Δv_1 по промежуточной траектории с последующим направлением его импульсом Δv_2 в новой плоскости. При больших эксцентриситетах оптимальным является трехимпульсный переход. Здесь импульс Δv_1 переводит КА из апоцентра в первой плоскости по промежуточной орбите до линии пересечения со второй плоскостью. Оттуда Δv_2 приводит КА в апоцентр новой орбиты, вслед за чем импульсом Δv_3 КА переводится в этой плоскости на эллиптическую орбиту.

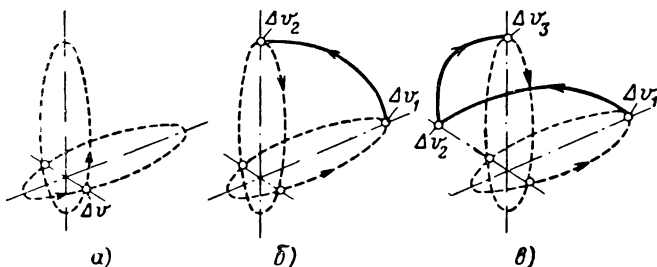


Рис. 8.4.2. Схема переходов между некомпланарными орбитами:

a — одноимпульсного; *b* — двухимпульсного и *v* — трехимпульсного

При компланарном переходе между круговыми орбитами оптимальным является двухимпульсный переход *. При таком варианте переходная орбита представляет собой эллипс, перицентр которого касается внутренней окружности, а апоцентр — внешней (см. рис. 8.1.1). Первый разгонный импульс Δv_1 переводит КА на промежуточную орбиту, второй Δv_2 переводит на новую круговую.

Характеристическая скорость такого перехода v_n выражается через скорость на внутренней орбите v_1 и отношение радиусов внешней и внутренней орбит K в виде

$$v_n = v_1 \left[\sqrt{\frac{2(K-1)^2}{K(K+1)}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{K}}\right) \right]. \quad (8.4.1)$$

Оптимальные по расходу топлива переходы между круговой и эллиптической орбитами иллюстрируются рис. 8.4.3. В зависимости от взаимного расположения орбит импульс Δv_1 переводит КА либо в апоцентр эллипса, либо в перицентр его, а импульс Δv_2 направляет по новой орбите.

* По имени исследовавшего его В. Хоманна этот переход иногда называется «хомановским».

Если маневрирование выполняется в интересах сближения двух космических аппаратов, то соответствующие навигационные расчеты могут основываться на результатах бортовых измерений. В этом случае измерения, дающие относительные координаты и составляющие относительной скорости, позволяют выбрать оптимальные условия сближения.

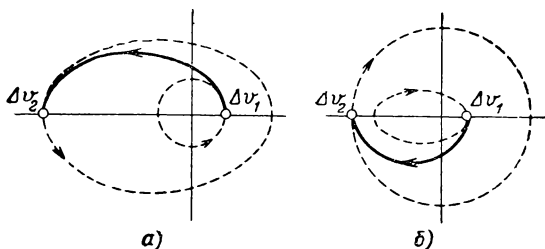


Рис. 8.4.3. Схема компланарных двухимпульсных переходов между орбитами:
а — круговой и эллиптической; б — эллиптической и круговой

Если КА-цель движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью относительно приближающегося КА, то полное изменение скорости Δv , необходимое для встречи в момент t_B , рассчитывается по соотношению:

$$\Delta v = \{ [\dot{x}_0 - \dot{x}'_0(t_B)]^2 + [\dot{y}_0 - \dot{y}'_0(t_B)]^2 + [\dot{z}_0 - \dot{z}'_0(t_B)]^2 \}^{1/2}, \quad (8.4.2)$$

где $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ — составляющие фактической скорости в начальный момент, $\dot{x}'_0, \dot{y}'_0, \dot{z}'_0$ — потребные составляющие скорости для встречи, которые являются функцией относительных координат и угловой скорости и могут рассчитываться по соответствующим формулам.

Ведя по результатам измерений оперативный расчет Δv , можно отметить момент, когда измерения дадут минимум $\Delta v_{\min}$, который и может быть принят для исполнения.

Время сближения может быть выражено через относительные координаты x_0, y_0, z_0 и слагающие относительной скорости в виде:

$$t_{B \text{ opt}} = \frac{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{-(x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0)}. \quad (8.4.3)$$

Это будет оптимальное время встречи.

ОСОБЕННОСТИ НАВИГАЦИОННОЙ МЕТОДИКИ В НЕКОТОРЫХ ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 9.1. О ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ, ВЫЗЫВАЮЩИХ ИСКРИВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ СИГНАЛОВ

Задачи, связанные с определением положения объектов в околоземном (околопланетном) пространстве, решаются обычно как трехмерные. Такая постановка применима и для условий, когда траектории навигационных сигналов отклоняются от прямолинейных. Однако в отдельных случаях, когда положение объекта можно задавать удобными для практического использования криволинейными координатами, возможно пользоваться навигационными пространствами с меньшим числом измерений ($n = 1$ или $n = 2$), рассматривая эти искривленные пространства как вмещенные соответственно в двумерное и трехмерное.

Хотя искривление траектории вызывается вполне определенными физическими явлениями (например, влиянием поля тяготения или наличием градиента показателя преломления), представляется возможным отвлечься от этого, переведя физические параметры среды, влияющей на движение сигнала, в метрические характеристики навигационного пространства. Метрические компоненты g_{ik} явятся функцией как геометрических, так и физических величин. Траектория сигнала представится кратчайшей (геодезической) линией, свойства которой соответствуют внутренней геометрии данного искривленного пространства. Таким путем в рамках навигационной задачи представляется возможным динамическое (электродинамическое) решение заменить решением чисто геометрическим.

В ряде случаев такое рассмотрение может оказаться удобным. Приведем несколько частных случаев, иллюстрирующих особенности подобной методики.

§ 9.2. НЕКОТОРЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАНИЕМ ОДНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ОРБИТАЛЬНОГО ТИПА

9.2.1. МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВА

Применим общую методику исчисления длин криволинейных траекторий к случаю одномерного пространства. Будем рассматривать одномерное пространство эллиптического типа. Таким будет навигационное пространство в случаях, когда определяется положение космического аппарата на его орбите, заданной некоторой совокупностью элементов, причем сам орбитальный аппарат используется в качестве навигационного сигнала.

Пусть орбита КА (невозмущенная кеплерова или оскулирующая) задана ее элементами: прямым восхождением восходящего узла Ω , наклонением i , угловым расстоянием перигея ω , большой полуосью a , эксцентриситетом e и моментом прохождения через перигей τ_0 . Введем во вмещающем двумерном пространстве прямоугольную систему координат $\xi - \eta$, начало которой совмещено с фокусом эллипса F (с центром масс планеты), ось $O\xi$ совпадает с большой осью, а ось $O\eta$ лежит в плоскости орбиты (рис. 9.2.1). Положение КА будем задавать истинной аномалией — углом ϑ .

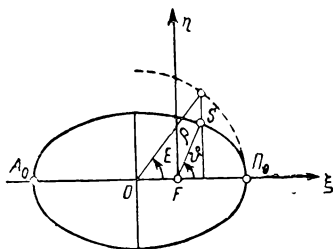


Рис. 9.2.1. К вычислению длины траектории в одномерном пространстве.

Геометрические свойства эллипса можно характеризовать с помощью параметра $g_{\vartheta\vartheta}$, определяемого в соответствии с выражением (3.4.1).

Связь координат ξ , η и ϑ дается в виде (см. § 2.2)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho(\vartheta) \cos \vartheta, \\ \eta &= \rho(\vartheta) \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.1)$$

где $\rho(\vartheta)$ — расстояние от КА до фокуса орбиты, радиус-вектор КА.

Подставляя систему (9.2.1) в уравнение эллипса

$$a^2 \left(\xi + \frac{e}{a} \right)^2 + \eta^2 = 1,$$

после соответствующих преобразований получим выражение для

$$\rho(\vartheta) = p(1 + e \cos \vartheta)^{-1}, \quad (9.2.2)$$

где p — параметр эллипса, равный $a(1 - e^2)$.

Метрический параметр $g_{\vartheta\vartheta}$ имеет выражение

$$g_{\vartheta\vartheta} = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial \vartheta} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right)^2. \quad (9.2.3)$$

Поскольку частные производные равны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} &= \rho'(\vartheta) \cos \vartheta - \rho(\vartheta) \sin \vartheta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} &= \rho'(\vartheta) \sin \vartheta + \rho(\vartheta) \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.4)$$

получаем

$$g_{\vartheta\vartheta} = [\rho'(\vartheta)]^2 + \rho^2(\vartheta). \quad (9.2.5)$$

Вычислив далее $\rho'(\vartheta)$, а также рассчитав $\rho^2(\vartheta)$ и $[\rho'(\vartheta)]^2$, после подстановки их значений в (9.2.5) и соответствующих выкладок получим выражение

$$g_{\vartheta\vartheta} = p^2(1 + 2e \cos \vartheta + e^2)(1 + e \cos \vartheta)^{-4} \quad (9.2.6)$$

Воспользовавшись известным в небесной механике соотношением, связывающим истинную аномалию ϑ с эксцентрической аномалией E [91]:

$$\cos \vartheta = (\cos E - e)(1 - e \cos E)^{-1}, \quad (9.2.7)$$

заменяем в (9.2.6) $\cos \vartheta$ его выражением через $\cos E$ и e , что дает

$$g_{\vartheta\vartheta} = a^2(1 - e^2 \cos^2 E)(1 - e \cos E)^2(1 - e^2)^{-1}. \quad (9.2.8)$$

9.2.2. ДЛИНА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Дифференцируя обе части выражения (9.2.7), найдем связь дифференциалов истинной и эксцентрической аномалий:

$$d\vartheta = (1 - e^2)^{1/2} (1 - e \cos E)^{-1} dE. \quad (9.2.9)$$

Первая квадратичная форма для рассматриваемого случая имеет вид:

$$dS^2 = g_{\vartheta\vartheta} d\vartheta^2.$$

В соответствии с этим длина отрезка траектории сигнала составит:

$$S = \int_{\vartheta} [g_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)]^{1/2} d\vartheta. \quad (9.2.10)$$

Производя замену переменной интегрирования в соответствии с (9.2.8) и (9.2.9), получим

$$S = \int_E [g_{\Phi\Phi}(E)(1-e^2)^{1/2}(1-e\cos E)^{-1}]^{1/2} dE = \\ = a \int_E (1-e^2 \cos^2 E)^{1/2} dE. \quad (9.2.11)$$

Вводя угол $E = \frac{\pi}{2} - E$, приходим к выражению S через эллиптические интегралы второго рода

$$S = a [E(E_1, e^2) - E(E_2, e^2)]. \quad (9.2.12)$$

Заметим, что при движении в сторону возрастания Φ угол E будет убывать, что приведет к убыванию $E(E, e^2)$. При этом длина отрезка траектории S будет больше нуля:

$$S > 0.$$

Положительным значениям S соответствует движение от перигея в сторону возрастания аномалии E .

Если вести отсчет расстояний от перигея, которому отвечают условия $\Phi = 0$ и $E = \frac{\pi}{2}$, получим

$$S = a [E(e^2) - E(E, e^2)], \quad (9.2.13)$$

где $E(e^2)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. При этом длина четверти от полной длины эллиптической траектории составит:

$$S_{0,25} = aE(e^2),$$

что хорошо известно из аналитической геометрии.

9.2.3. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ НАВИГАЦИИ

Величина дифференциала дуги дана выражением (9.2.9). Наряду с этим известно, что скорость орбитального движения выражается через E в виде [91]:

$$v = an(1 - e^2 \cos^2 E)^{1/2} (1 - e \cos E)^{-1}, \quad (9.2.14)$$

где $n = a^{-3/2}(f m_{\text{п}})^{1/2}$, причем f — гравитационная постоянная, а $m_{\text{п}}$ — масса планеты.

В соответствии с выражениями (9.2.9) и (9.2.14) дифференциал времени, затраченного на перемещение ds , составит:

$$dt = \frac{dS}{v} = n^{-1} (1 - e \cos E) dE. \quad (9.2.15)$$

Интегрирование этого выражения в пределах от E_1 до E_2 даст время движения на участке, соответствующем изменению угла от E_1 до E_2 :

$$t_2 - t_1 = n^{-1} \int_{E_1}^{E_2} (1 - e \cos E) dE = n^{-1} \left| (E - e \sin E) \right|_{E_1}^{E_2}. \quad (9.2.16)$$

В свою очередь E выражается через координату ϑ в виде:

$$E = \arccos [(\cos \vartheta + e)(1 + e \cos \vartheta)^{-1}], \quad (9.2.17)$$

поэтому основная навигационная формула для рассматриваемого случая принимает следующий вид:

$$n^{-1} [(E_2 - E_1) - e(\sin E_2 - \sin E_1)] - k \Delta N = 0. \quad (9.2.18)$$

В рассматриваемом случае интерес могут представить только абсолютные измерения навигационного параметра. Очевидно, при тех скоростях, которые имеют околоземные орбитальные объекты, не представляет практического смысла делать различие между отсчетами времени в системе объект — сигнал и в некоторой земной системе.

Остановимся далее на некоторых задачах, решаемых в одномерном эллиптическом пространстве.

Пусть начальное положение объекта навигации задано координатой ϑ_1 , пройденное расстояние обозначено через S , а координата конечной точки — через ϑ_2 . Пусть далее геоцентрические декартовы координаты вмещающего пространства будут x, y и z , а геоцентрические сферические координаты — соответственно φ, λ и ρ .

9.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОМУ РАССТОЯНИЮ S

Если известно расстояние S , пройденное от точки с координатой ϑ_1 , то координата ϑ_2 определяется следующим образом.

Находится $E(E_2, e^2)$ из соотношения (9.2.12):

$$E(E_2, e^2) = E(E_1, e^2) - Sa^{-1}. \quad (9.2.19)$$

Затем по значению $E(E_2, e^2)$ определяется амплитуда эллиптического интеграла E_2 , что можно выполнить с помощью таблиц интегралов или аналитически, применяя итерационное решение. В последнем случае в качестве исходного приближения берется E_{20} , соответствующее круговой орбите:

$$E_{20} = E(E_2, e^2),$$

причем первое уточненное значение E_{21} вычисляется по схеме

$$E_{21} = E_{20} - [f_1 E_{20} + f_2 \sin(E_{20}) \cos(E_{20}) + f_3 \sin^3(E_{20}) \cos(E_{20})] + E(E_2, e^2),$$

где коэффициенты f_1 , f_2 и f_3 для малых эксцентриситетов те же, что и в § 6.3:

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 - f_2, \\f_2 &= \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4, \\f_3 &= \frac{1}{32} k^4.\end{aligned}$$

Координата ϑ_2 определяется в соответствии с формулой (9.2.7):

$$\vartheta_2 = \arccos [(\sin E_2 - e)(1 - e \sin E_2)^{-1}].$$

Геоцентрические декартовы координаты вычисляются по известным формулам:

$$\left. \begin{aligned}x_2 &= [a (\sin E_2 - e) \cos \omega - c \cos E_2 \sin \omega] \cos \Omega - \\&\quad - [a (\sin E_2 - e) \sin \omega + c \cos E_2 \cos \omega] \cos i \sin \Omega, \\y_2 &= [a (\sin E_2 - e) \sin \omega + c \cos E_2 \cos \omega] \cos i \cos \Omega + \\&\quad + [a (\sin E_2 - e) \cos \omega - c \cos E_2 \sin \omega] \sin \Omega, \\z_2 &= [a (\sin E_2 - e) \sin \omega + c \cos E_2 \cos \omega] \sin i.\end{aligned} \right\} \quad (9.2.20)$$

Сферические координаты нетрудно получить из соотношений:

$$\left. \begin{aligned}\varphi_2 &= \arcsin \left\{ \sin i (1 - e \sin E_2)^{-1} \times \right. \\&\quad \times \left[\sin \omega (\sin E_2 - e) + \cos \omega \frac{c}{a} \cos E_2 \right] \Big\}, \\ \lambda_2 &= \Omega + \arccos \left\{ \sec \varphi (1 - e \sin E_2)^{-1} \times \right. \\&\quad \times \left[\cos \omega (\sin E_2 - e) - \sin \omega \frac{c}{a} \cos E_2 \right] \Big\}, \\ \rho_2 &= a (1 - e \sin E_2).\end{aligned} \right\} \quad (9.2.21)$$

9.2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОМУ ВРЕМЕНИ ДВИЖЕНИЯ ($\tau_2 - \tau_1$)

Если известно время движения ($\tau_2 - \tau_1$), измеренное в системе отсчета навигационного сигнала, то координаты объекта могут определяться в следующем порядке.

Для момента τ_2 находится значение средней аномалии M_2 :

$$M_2 = 2\pi (f m_{\Pi})^{1/2} a^{-3/2} (\tau_2 - \tau_1),$$

где f — гравитационная постоянная ($f = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$),
 m_{Π} — масса планеты.

Из известного соотношения, связывающего эксцентрическую и среднюю аномалии, находится значение E_2 :

$$E_2 = M_2 + e \sin M_2 + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M_2 + \frac{1}{8} e^3 (3 \sin 3M_2 - \sin M_2).$$

Определяется координата ϑ_2 :

$$\vartheta_2 = \arccos [(\cos E_2 - e)(1 - e \cos E_2)^{-1}]. \quad (9.2.22)$$

Координаты x , y и z , а также φ , λ и ρ вычисляются при этом по формулам (9.2.20) и (9.2.21) при учете того, что

$$E_2 = \frac{\pi}{2} - E_2.$$

9.2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОМУ УГЛУ МЕЖДУ МЕСТНОЙ ВЕРТИКАЛЬЮ И НАПРАВЛЕНИЕМ ВЕКТОРА СКОРОСТИ

Возможны случаи, когда непосредственному измерению поддается угол γ между местной вертикалью объекта и направлением вектора скорости. Если при этом условия таковы, что допустимо пренебречь уклонением отвесной линии и считать, что продолжение местной вертикали проходит через центр масс планеты, то местоположение можно определить сравнительно несложно.

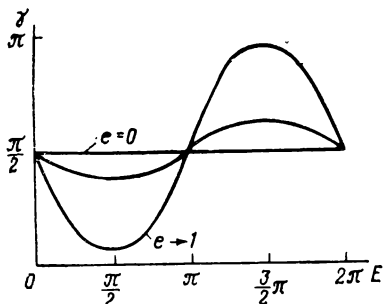


Рис. 9.2.2. График зависимости угла γ от эксцентрической аномалии E .

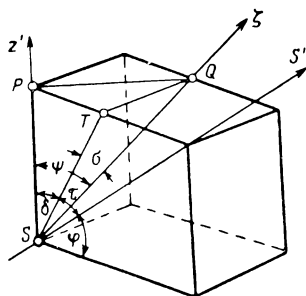


Рис. 9.2.3. К выражению угла ψ между местной вертикалью и направлением оси мира.

Воспользовавшись известным соотношением между углами γ и E в следующей записи:

$$\cos \gamma = (1 - e^2 \cos^2 E)^{-1/2} e \sin E,$$

получаем величину E , определяемую через γ и e :

$$E = \arccos [\pm \operatorname{cosec} \gamma (1 - \cos^2 \gamma e^{-2})^{1/2}]. \quad (9.2.23)$$

Зависимость $\gamma(E)$ иллюстрируется графиком рис. 9.2.2. Видно, что амплитуда изменения угла γ составляет:

$$\gamma_m = \arccos e.$$

Используя значение E , угол ϑ находим по формуле (9.2.22), а координаты x , y и z , а также φ , λ и ρ — соответственно с помощью выражений (9.2.20) и (9.2.21) при учете того, что $E = \frac{\pi}{2} - E$.

Заметим, что пренебрежение уклонением местной отвесной линии предопределяет использование данного способа расчетов лишь для приближенных оценок координат.

9.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОМУ УГЛУ ψ МЕЖДУ МЕСТНОЙ ВЕРТИКАЛЬЮ И НАПРАВЛЕНИЕМ ОСИ МИРА

В ряде случаев возможно с применением бортовых технических средств измерять угол ψ между местной вертикалью и направлением оси мира. Угол ψ показан на рис. 9.2.3, где линия SP представляет ось мира, линия SQ — местную вертикаль, линия SS' — планетоцентрический радиус-вектор. Уклонение отвесной линии по широте и долготе задано соответственно углами σ и τ .

На основании измерения ψ можно рассчитать координаты объекта. Для этого от угла ψ следует перейти к углу φ , который затем нетрудно связать с углом E , и по углу E вычислить Φ , а также x , y и z (или φ , λ и ρ).

Трудность состоит в том, что углы σ и τ являются функцией пока еще неизвестных координат. Поэтому целесообразно применять последовательные приближения.

Пользуясь чертежом рис. 9.2.3, можно найти связь между углами δ , ψ и σ :

$$\cos \delta = \cos \psi \sec \sigma. \quad (9.2.24)$$

Поскольку $\varphi = \frac{\pi}{2} - (\delta + \tau)$, имеем далее:

$$\varphi = \arcsin (\cos \psi \sec \sigma) - \tau. \quad (9.2.25)$$

В качестве первого приближения удобно взять случай неуклоненной вертикали, когда $\sigma = 0$ и $\tau = 0$. При этом в соответствии с формулой (9.2.25) имеет место выражение

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Для нахождения первого приближения угла E_0 следует разрешить относительно E уравнение типа $\varphi(i, e, \omega, E)$ [первое уравнение системы (9.2.21)]. Соответствующие вычисления приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \cos E_0 = & [(A + e \sin \varphi_0)(eA + \sin \varphi_0) \pm B(1 - e^2)^{1/2}(\sin^2 i - \sin^2 \varphi_0)^{1/2}] \times \\ & \times [(A + e \sin \varphi_0)^2 + B^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

где

$$A = \sin i \sin \omega;$$

$$B = \sin i \cos \omega (1 - e^2)^{1/2}.$$

По формулам (9.2.21) находятся соответствующие значению E_0 приближенные координаты x_0 , y_0 и z_0 , что позволяет ввести в расчеты приближенные значения углов σ_0 и τ_0 . Пользуясь значениями σ_0 и τ_0 , находится следующее приближение для широты:

$$\varphi_1 = \arcsin (\cos \psi \sec \sigma_0) - \tau_0.$$

Это позволяет по зависимости (9.2.25) найти значение E_1 и далее уточненные координаты x_1 , y_1 и z_1 . Последующие циклы вычислений аналогичны; они позволяют найти с требуемой точностью угол E , а следовательно, истинную аномалию Φ [по формуле (9.2.7)], координаты x , y и z [по формулам (9.2.20)], или координаты φ , λ и ρ [по формулам (9.2.21)].

Следует заметить, что рассмотренный способ местоопределения применим также и к случаям, когда ось SQ , относительно которой измеряется угол ψ , не является вертикалью, если только положение этой оси задано относительно начальных плоскостей отсчета углами σ и τ .

§ 9.3. ОСОБЕННОСТИ НАВИГАЦИОННОЙ МЕТОДИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ, ИСКРИВЛЕННОМ В РЕЗУЛЬТАТЕ РЕФРАКЦИИ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

9.3.1. МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТРАНСТВА

Обратимся к следующему примеру решения задач в искривленном пространстве. Он будет относиться к двумерному пространству, искривленному за счет ионосферной рефракции радиоволн. Следует иметь в виду, что это один из частных случаев искривления траектории сигналов в результате влияния внешних полей. Рефракция радиолуча наблюдается и в тропосфере. К искривлению траекторий приводит также воздействие гравитационного поля. Рассматриваемый пример интересен с методической точки зрения.

При прохождении радиосигналов через неоднородную дисперсную среду, какой являются верхние слои атмосферы, траектория сигнала искривляется, а скорость сигнала оказывается функцией координат и изменяется вдоль траектории.

Можно не отступать от представлений о распространении сигнала с постоянной скоростью, если рассматривать эффективные траектории, понимая под эффективной длиной траектории такое расстояние, которое сигнал со скоростью света проходит за интервал времени, фактически затраченный на прохождение данной траектории с переменной скоростью.

Совокупность возможных эффективных траекторий сигналов, исходящих под некоторым углом β к вертикали, образует двумерное искривленное пространство. Метрические свойства такого пространства будут зависеть от распределения во вмещающем трехмерном пространстве электрических зарядов, а также от частоты сигнала. Поэтому тензор $g_{\alpha\beta}$ будет определяться зависимостью

$$g_{\alpha\beta} = F [N(x, y, z), f_0, \Phi(q_1, q_2)], \quad (9.3.1)$$

где N — плотность зарядов, эл/см^3 ; x, y, z — декартовы координаты вмещающего пространства; f_0 — частота сигнала; $\Phi(q_1, q_2)$ — некоторая функция поверхностных координат.

Определим геометрические характеристики такого пространства; для этого вычислим компоненты тензора $g_{\alpha\beta}$.

Будем считать, что в невозмущенной верхней атмосфере электронная концентрация N изменяется только с высотой и поверхности с $N = \text{const}$ концентричны поверхности Земли.

При анализе необходимо различать случай, когда характеристикой реального процесса распространения сигнала является фазовая скорость (что имеет место при фазовой и частотной методике), и случай, когда такой характеристикой будет групповая скорость (временная методика). В общем случае скорость сигнала v будем записывать как

$$v = hc, \quad (9.3.2)$$

имея в виду, что для фазовой и групповой скоростей соответственно получается

$$h_{\phi} = n^{-1} \quad \text{и} \quad h_{\Gamma} = n, \quad (9.3.3)$$

где n — показатель преломления.

Рассматриваемое навигационное пространство E_N вмести́м в трехмерное евклидово E_3 , в котором задана прямоугольная система координат (рис. 9.3.1) $\xi O \eta \zeta$. Система $\xi O \eta \zeta$ — геоцентрическая, неэкваториальная. Она получена из соответствующей топоцентри-

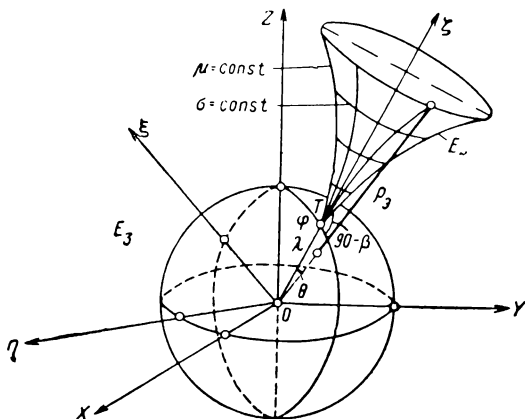


Рис. 9.3.1. Искривленное навигационное пространство E_N во вмещающем трехмерном пространстве E_3 .

ческой системы путем переноса начала последней из наземной точки T с координатами ϕ и λ по направлению вертикали на величину радиус-вектора этой точки $\rho_3(\phi)$, зависящего от широты ϕ . Если ϕ и λ есть координаты навигационной точки, то можно сказать, что ось $O\xi$ будет ориентирована по вертикали в этой точке, а ось $O\eta$ будет лежать в плоскости ее меридиана.

В пространстве E_N введем ортогональные координаты σ и μ . Координатные линии μ ($\sigma = \text{const}$) представляют собой замкнутые линии постоянной кривизны, а координатные линии σ ($\mu = \text{const}$) — расходящиеся линии переменной кривизны. Координата μ отсчитывается от плоскости меридиана навигационной точки, координата σ — от самой точки.

Зная $g_{\alpha\beta}$ пространства E_N , можно по результатам навигационных измерений определить координаты σ и μ . Располагая системой зависимостей

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(\sigma, \mu, \rho), \\ \eta &= \eta(\sigma, \mu, \rho), \\ \zeta &= \zeta(\sigma, \mu, \rho), \end{aligned} \right\} \quad (9.3.4)$$

можно далее перейти к прямоугольным неэкваториальным координатам вмещающего пространства E_3 . Переход же от системы $\xi O \eta \zeta$ к геоцентрической экваториальной системе $X O Y Z$ осуществляется с помощью аффинора $\mathcal{B}$, матрица которого получается при учете (2.2.18):

$$\mathcal{B} = \begin{vmatrix} \cos \lambda \sin \varphi & -\sin \lambda & \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \sin \varphi & \cos \lambda & \sin \lambda \cos \varphi \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{vmatrix}. \quad (9.3.5)$$

Компоненты $g_{\alpha\beta}$ будем вычислять по формулам:

$$\left. \begin{aligned} g_{\sigma\sigma} &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \sigma} \right)^2, \\ g_{\sigma\mu} &= g_{\mu\sigma} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_j}{\partial \sigma} \frac{\partial \xi_j}{\partial \mu}, \\ g_{\mu\mu} &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \mu} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.6)$$

Для этого установим связь между координатами ξ_j и σ_j .

Следует иметь в виду, что E_3 — реальное пространство, а E_N — пространство эффективное. В связи с этим приращения координат

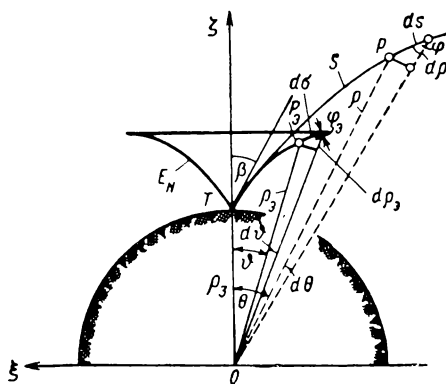


Рис. 9.3.2. К дифференциальным соотношениям при исчислении длины траектории в пространстве E_N .

$d\sigma_j$ не имеют того реального геометрического смысла, каким обладают приращения координат $d\xi_j$. Но чтобы координаты σ_j можно было связать с координатами ξ_j , требуется приращения $d\sigma_j$ сопоставить с их геометрическими эквивалентами dS_j .

Рассматривая рис. 9.3.2., отмечаем, что в пространстве E_3 углу Θ , который определяет положение некоторой точки P , удаленной от начала координат на ρ , соответствует дуга длиной S . Равным

образом дифференциалу $d\Theta$ соответствует дифференциал dS . Однако взятая в пространстве E_N эффективная длина бесконечно малой дуги $d\Sigma$ связана с dS соотношением

$$d\Sigma = \frac{dS}{h(\sigma)}. \quad (9.3.7)$$

И, следовательно, эффективная длина траектории Σ , заданной в пространстве E_N , равна:

$$\Sigma = \int_S \frac{dS}{h(\sigma)}. \quad (9.3.8)$$

Координаты ξ , η и ζ можно выразить через ρ , Θ и μ в виде:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \sin \Theta \cos \mu, \\ \eta &= \rho \sin \Theta \sin \mu, \\ \zeta &= \rho \cos \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.9)$$

Дифференцируя выражения (9.3.9) соответственно по σ и μ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} &= \sin \Theta \cos \mu \frac{d\rho}{d\sigma} + \rho \cos \mu \cos \Theta \frac{d\Theta}{d\sigma}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} &= \sin \Theta \sin \mu \frac{d\rho}{d\sigma} + \rho \sin \mu \cos \Theta \frac{d\Theta}{d\sigma}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} &= \cos \Theta \frac{d\rho}{d\sigma} - \rho \sin \Theta \frac{d\Theta}{d\sigma}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mu} &= -\rho \sin \Theta \sin \mu, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mu} &= \rho \sin \Theta \cos \mu, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.10)$$

Составляя в соответствии с равенствами (9.3.6) выражения для $g_{\alpha\beta}$ и пользуясь значениями производных $\frac{\partial \xi_j}{\partial \sigma_i}$ из системы (9.3.10), после необходимых преобразований найдем

$$\left. \begin{aligned} g_{\sigma\sigma} &= \left(\frac{d\rho}{d\sigma} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\Theta}{d\sigma} \right)^2, \\ g_{\sigma\mu} &= g_{\mu\sigma} = 0, \\ g_{\mu\mu} &= \rho^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.11)$$

Выражение для $g_{\sigma\sigma}$ (9.3.11) приобретает большую наглядность, если $d\sigma$, заменить согласно соотношению (9.3.7). Тогда получим:

$$g_{\sigma\sigma} = h^2 \left[\left(\frac{d\rho}{dS} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\Theta}{dS} \right)^2 \right]. \quad (9.3.12)$$

Но из рис. 9.3.2 видно, что

$$\frac{d\rho}{dS} = \cos \varphi \quad \text{и} \quad \rho \frac{d\Theta}{dS} = \sin \varphi, \quad (9.3.13)$$

где φ — угол, который траектория сигнала составляет с местной вертикалью. Подставляя зависимости (9.3.13) в (9.3.12), получаем

$$g_{\sigma\sigma} = h^2. \quad (9.3.14)$$

Таким образом, компонента $g_{\sigma\sigma}$ полностью определяется показателем преломления среды и будет переменной, зависящей от координат.

Заметим, что $g_{\sigma\sigma}$ имеет различные значения для случаев, обусловленных выражениями (9.3.3). Так, если значение имеет фазовая скорость, то

$$(g_{\sigma\sigma})_{\Phi} = n^{-2}. \quad (9.3.15)$$

Если же учету подлежит групповая скорость, тогда

$$(g_{\sigma\sigma})_{\Gamma} = n^2. \quad (9.3.15')$$

Добавим, что при отсутствии зарядов во вмещающем пространстве E_3 $n = 1$, и тогда метрика навигационного пространства E_N определится компонентами:

$$\left. \begin{aligned} g_{\sigma\sigma} &= 1, \\ g_{\sigma\mu} &= g_{\mu\sigma} = 0, \\ g_{\mu\mu} &= \rho^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.16)$$

Располагая значениями компонент $g_{\sigma\sigma}$ и $g_{\mu\mu}$ метрического тензора, можно решать задачи двоякого рода: исчислять длины геодезических линий S в пространстве E_3 , соответствующие определенным изменениям координат (или параметра, через который координаты выражаются), и, наоборот, находить изменения координат (или параметра), если известны длины геодезических линий. При этом координатами являются лонгальные величины σ и μ . В ряде случаев может оказаться, что удобнее пользоваться не лонгальной координатой σ , а угловой координатой Φ , соответствующей значению σ (см. рис. 9.3.2). И тогда интерес представляют величины $g_{\Phi\Phi}$, $g_{\Phi\mu}$ и $g_{\mu\Phi}$ ($g_{\mu\mu}$ останется без изменений).

Можно считать, что приращению эффективного угла $d\Phi$ следует сопоставить его геометрический эквивалент $d\Theta$, некоторому конечному углу Φ — углу Θ , а некоторому радиус-вектору ρ_Φ — величину ρ .

Пользуясь уравнением связи координат (9.3.9) и выполнив дифференцирование по Φ и по μ , заметим, что производные $\frac{\partial \xi_j}{\partial \eta}$ могут быть получены из соответствующих производных выраже-

ния (9.3.10) заменой $\frac{d\rho}{d\sigma}$ и $\frac{d\Theta}{d\sigma}$ соответственно на $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ и $\frac{d\Theta}{d\vartheta}$, а производные $\frac{\partial \xi_j}{\partial \mu}$ имеют тот же вид, что и в выражении (9.3.10).

Поэтому компоненты $g_{\alpha\beta}$ будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} g_{\vartheta\vartheta} &= \left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^2, \\ g_{\vartheta\mu} &= g_{\mu\sigma} = 0; \\ g_{\mu\mu} &= \rho^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.17)$$

Приведем выражение $g_{\vartheta\vartheta}$ к более простому виду. Для этого производные $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ и $\frac{d\Theta}{d\vartheta}$ выразим через другие параметры.

Будем исходить из того, что некоторая точка P в реальном пространстве и точка P_ϑ в эффективном пространстве лежат на уровнях с одинаковой электронной концентрацией, а следовательно, будут характеризоваться одинаковым значением показателя преломления ($n = n_\vartheta$).

Из сопоставления уравнений траектории для этих пространств

$$\rho \sin \varphi \, n = \rho_\vartheta \sin \beta = C \quad (9.3.18)$$

и

$$\rho_\vartheta \sin \varphi_\vartheta \, n_\vartheta = C \quad (9.3.19)$$

видно, что

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_\vartheta} = \frac{\rho_\vartheta}{\rho}. \quad (9.3.20)$$

Из рис. 9.3.2 далее можно видеть, что

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_\vartheta} = \frac{\rho d\Theta d\sigma}{dS \rho_\vartheta d\vartheta}. \quad (9.3.21)$$

Подставляя соотношение в (9.3.20), а также учитывая выражение (9.3.7), получаем

$$\frac{d\Theta}{d\vartheta} = h \left(\frac{\rho_\vartheta}{\rho} \right)^2. \quad (9.3.22)$$

Чтобы найти выражение для $\frac{d\rho}{d\vartheta}$, умножаем числитель и знаменатель левой части равенства (9.3.22) на $\rho d\rho$ и далее, пользуясь дифференциальным соотношением,

$$\frac{\rho d\Theta}{d\rho} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (9.3.23)$$

ясным из рис. 9.3.2, приходим к виду

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = h \frac{\rho_\vartheta^2}{\rho} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (9.3.24)$$

Но из уравнения траектории (9.3.19) следует, что

$$\operatorname{ctg} \varphi = \left(\frac{\rho^2 n^2}{C^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (9.3.25)$$

поэтому, произведя подстановку соотношения (9.3.25) в (9.3.24), получим

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = h\rho_3^2 \left(\frac{n^2}{C^2} - \frac{1}{\rho^2} \right)^{1/2} \quad (9.3.26)$$

Если затем в выражении для $g_{\sigma\sigma}$ (9.3.17) заменить $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ и $\frac{d\Theta}{d\vartheta}$ их значениями в соответствии с уравнениями (9.3.26) и (9.3.22), придем к более простому и наглядному выражению

$$g_{\vartheta\vartheta} = h^2 \rho_3^4 n^2 C^{-2}. \quad (9.3.27)$$

Однако надлежит сделать различие между h_Φ по фазовой скорости и h_Γ по групповой скорости. Поэтому используем обозначения (9.3.3) для замены h и получим

$$\left. \begin{aligned} (g_{\vartheta\vartheta})_\Phi &= \rho_3^4 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}, \\ \text{и} \\ (g_{\vartheta\vartheta})_\Gamma &= \rho_3^4 n^4 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.28)$$

Выражения (9.3.28) показывают, что $g_{\sigma\sigma}$ являются функциями координат, так как зависят от ρ_θ . Наряду с этим величины $g_{\sigma\sigma}$ определяются также и распределением зарядов в пространстве E_3 , поскольку угол β является показателем интегрального влияния ионизированной среды. Кроме этого $(g_{\sigma\sigma})_\Gamma$ выражается через показатель преломления n , являющийся локальной характеристикой ионизированной среды.

Будем иметь в виду, что при определении геометрического эквивалента dS дуги $d\Sigma$ пространства E_N первая квадратичная форма будет выражаться через метрические компоненты $g_{\vartheta\vartheta}$ (или $g_{\sigma\sigma}$) и $g_{\mu\mu}$:

$$dS^2 = g_{\sigma\sigma} d\sigma^2 + g_{\mu\mu} d\mu^2 = g_{\vartheta\vartheta} d\vartheta^2 + g_{\mu\mu} d\mu^2. \quad (9.3.29)$$

Но для определения самой дуги $d\Sigma$ в пространстве E_N требуется располагать метрическими компонентами g_{SS} (или $g_{\theta\theta}$). Их нетрудно получить, если в имеющихся выражениях произвести замену символов.

Так, если в выражениях (9.3.6), (9.3.9) и (9.3.10) везде заменить σ на S , ρ на ρ_θ и Θ на ϑ , то получим

$$g_{SS} = \left(\frac{d\rho_\theta}{dS} \right)^2 + \rho_\theta^2 \left(\frac{d\vartheta}{dS} \right)^2. \quad (9.3.30)$$

Учитывая далее зависимость (9.3.7), заменяем dS на $d\sigma$ и получаем

$$g_{SS} = h^{-2} \left[\left(\frac{d\rho_\theta}{d\sigma} \right)^2 + \rho_\theta^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\sigma} \right)^2 \right]. \quad (9.3.31)$$

Рассмотрение дифференциального треугольника на рис. 9.3.2 убеждает в том, что члены в квадратных скобках выражения (9.3.31) равны соответственно $\cos^2 \varphi_\theta$ и $\sin^2 \varphi_\theta$. Поэтому

$$g_{SS} = h^{-2} \quad (9.3.32)$$

И тогда следует, что

$$(g_{SS})_\Phi = n^2, \quad (9.3.33)$$

$$(g_{SS})_\Gamma = n^{-2} \quad (9.3.34)$$

Если далее в выражениях (9.3.6), (9.3.9) и (9.3.10) заменить σ на Θ , ρ на ρ_3 и θ на ϑ , то будем иметь

$$g_{\Theta\Theta} = \left(\frac{d\rho_3}{d\Theta} \right)^2 + \rho_3^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\Theta} \right)^2. \quad (9.3.35)$$

Подставляя теперь в выражение (9.3.35) вместо производной $\frac{d\vartheta}{d\Theta}$ ее значение в соответствии с (9.3.22), а вместо $\frac{d\rho_3}{d\Theta}$ выражение, получаемое аналогично выражению (9.3.24):

$$\frac{d\rho_3}{d\Theta} = h^{-1} \frac{\rho^2}{\rho_3} \operatorname{ctg} \varphi_3, \quad (9.3.36)$$

можем прийти к соотношению

$$g_{\Theta\Theta} = h^{-2} \frac{\rho^4}{\rho_3^2} \operatorname{cosec}^2 \varphi_3. \quad (9.3.37)$$

Наконец, подставив в (9.3.37) вместо $\operatorname{cosec} \varphi_3$ его значение, вытекающее из уравнения траектории (9.3.19), получаем искомое выражение

$$g_{\Theta\Theta} = h^{-2} \rho^4 n^2 C^{-2}, \quad (9.3.38)$$

из которого следует, что

$$(g_{\Theta\Theta})_\phi = \rho^4 n^4 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}, \quad (9.3.39)$$

$$(g_{\Theta\Theta})_r = \rho^4 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}. \quad (9.3.40)$$

Заметим при этом, что коэффициент преломления n может быть выражен через рабочую частоту f_0 и плазменную частоту f_N (являющуюся функцией высоты ρ) в виде

$$n^2 = 1 - \left[\frac{f_N(\rho)}{f_0} \right]^2. \quad (9.3.41)$$

Результаты определения $g_{\alpha\alpha}$ удобно представить в виде табл. 9.3.1.

ТАБЛИЦА 9.3.1

Компонента метрического тензора	Определение применительно к скорости	
	фазовой	групповой
$g_{\sigma\sigma}$	$\left[1 - \frac{f_N^2(\rho_3)}{f_0^2} \right]^{-1}$	$1 - \frac{f_N^2(\rho_3)}{f_0^2}$
$g_{\vartheta\vartheta}$	$\rho_3^4 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}$	$\rho_3^4 \left[1 - \frac{f_N^2(\rho_3)}{f_0^2} \right]^2 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}$
g_{SS}	$1 - \frac{f_N^2(\rho)}{f_0^2}$	$\left[1 - \frac{f_N^2(\rho)}{f_0^2} \right]^{-1}$
$g_{\Theta\Theta}$	$\rho^4 \left[1 - \frac{f_N^2(\rho)}{f_0^2} \right]^2 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}$	$\rho^4 (\rho_3 \sin \beta)^{-2}$

Метрические свойства пространства E_N , как это видно из вышесказанного, зависят от распределения в пространстве E_3 заряженных частиц, от рабочей частоты, а также от угла излучения (или приема). Несмотря на столь динамичную метрику E_N , использование модели такого пространства может оказаться полезным, так как позволяет устранить из навигационных расчетов методический дуализм, выражающийся в том, что наряду с навигационной методикой, содержанием которой являются геометрические решения в некотором метрическом пространстве, допускается существование методики учета навигационных ошибок, содержанием которой является анализ таких физических процессов, как рефракция радиоволн в ионосфере и их распространение с переменной скоростью. Для пространства E_N такой двойственности нет, поскольку характеристики указанных физических явлений из категорий физических переведены в категории метрические.

9.3.2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ НАВИГАЦИИ

Применительно к рассмотренному виду навигационного пространства основная формула записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} n^2 \rho (n^2 \rho^2 - \rho_3^2 \sin^2 \beta_i)^{-1/2} d\rho - ck \Delta N_i \right] = 0, \quad (9.3.42)$$

где n — показатель преломления, в свою очередь выражаемый:

$n^2 = 1 - \frac{f_N^2(\rho)}{f_0^2}$ (f_0 — рабочая частота, f_N — плазменная частота слоя); ρ — геоцентрическое расстояние; ρ_3 — радиус Земли; β — угол траектории у Земли.

Заметим, что в рассматриваемом случае в качестве скорости распространения в формуле (9.3.42) выступает c , так как изменение скорости в пределах ионосферы учитывается метрическими свойствами навигационного пространства.

9.3.3. ПРИЛОЖЕНИЕ К ФАЗОВЫМ РАДИОНАВИГАЦИОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Особенность использования модели E_N для радионавигационных расчетов состоит в том, что траектории радиосигналов совпадают с координатными линиями $\mu = \text{const}$. Ввиду этого на протяженность траекторий влияние оказывают лишь метрические компоненты $g_{\sigma\sigma}$ (соответственно g_{SS}) при лонгальной координации и $g_{\phi\phi}$ (соответственно $g_{\theta\theta}$) при угловой координации.

Пусть, к примеру, угломерно-дальномерная фазовая радионавигационная система, координаты навигационной точки которой φ и λ , измеряет на частоте f_0 углы β_1 , μ_1 и разность фаз $\Delta\Psi_1$. Тогда в пространстве E_N дальность находится так:

$$\Sigma_1 = \frac{c}{2\pi f_0} \Delta\Psi_1.$$

Чтобы по результатам измерений получить геоцентрические прямоугольные координаты x , y и z объекта, надлежит по Σ_1 и f_0 , а также по закону $f_N(\rho)$ определить ρ_1 и Θ_1 , затем по формулам (9.3.9) найти ξ , η и ζ , после чего с помощью оператора $\mathcal{R}$ (9.3.5) перейти к координатам x , y и z .

Записываем в общем виде

$$\Sigma_1 = \int_p \left[g_{SS} \left(\frac{dS}{d\rho} \right)^2 + g_{\mu\mu} \left(\frac{d\mu}{d\rho} \right)^2 \right]^{1/2} d\rho. \quad (9.3.43)$$

Полагаем параметром $p = \rho$ и учитываем, что $\Sigma_1 = \sigma_1$ и $\frac{d\mu}{d\rho} = 0$. Пользуясь выражениями (9.3.13) и (9.3.19), находим, что

$$\frac{dS}{d\rho} = \left(1 - \frac{C^2}{n^2 \rho^2} \right)^{-1/2}. \quad (9.3.44)$$

Подставляя в уравнение (9.3.43) выражения (9.3.31) и (9.3.44), получим

$$\sigma_1 = \int_{\rho_3}^{\rho_1} n^2 \rho (n^2 \rho^2 - C^2)^{-1/2} d\rho. \quad (9.3.45)$$

Дальнейшее решение сводится к нахождению верхнего предела интеграла (9.3.45). Для этого задается закон $n(\rho)$, описывающий изменение n в ионизированных слоях и учитывающий, что ниже и выше их $n = 1$.

Если интеграл (9.3.45) обозначить через $\Phi[\rho, f_0, \beta, N(\rho)]$, то искомое значение ρ_1 определяется в виде:

$$\rho_1 = \Phi^{-1} [\sigma_1 + \Phi(\rho_3, f_0, \beta_1)]. \quad (9.3.46)$$

Для нахождения Θ_1 можно воспользоваться дифференциальным соотношением (9.3.23), из которого при учете (9.3.19) следует, что

$$\Theta_1 = \int_{\rho_3}^{\rho_1} C \rho^{-1} (n^2 \rho^2 - C^2)^{-1/2} d\rho. \quad (9.3.47)$$

Интеграл (9.3.47) — определенный, и при задании $n(\rho)$ он может быть вычислен. При этом верхний предел берется из решения (9.3.46).

Разумеется, к тем же результатам можно прийти, если длину траектории Σ_1 выразить через метрическую компоненту $g_{\Theta\Theta}$, а затем подынтегральное выражение выразить в функции переменной ρ .

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 10.1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ НАВИГАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Определение параметров движения (или соответственно координат) подвижных объектов представляет собой основное содержание навигационных задач. Между тем в результате навигационных измерений находятся не эти искомые величины, а навигационные параметры — величины, функционально связанные с первыми. Информация, полученная в результате измерений, должна поэтому подвергаться существенным, неизоморфным преобразованиям. Аналитическое или пространственно-геометрическое решение задач — неизбежный этап навигационной работы.

Возможно решать задачи при использовании минимально необходимого объема измерений. Принципиальные навигационные алгоритмы, рассмотренные в предшествующих главах, относятся именно к таким решениям. Может применяться также и статистическая методика решений, основанная на использовании избыточного количества измерений. В этом случае избыток информации обращается на повышение точности навигационных определений, поскольку статистическая обработка позволяет сгладить случайные ошибки измерений.

Статистическая обработка требует достаточного запаса измерений и выполнения значительного количества арифметических операций. Поэтому статистические методы приобрели широкое распространение лишь в течение последнего десятилетия в связи с развитием автоматических измерителей и цифровых вычислительных машин.

Задачи определения параметров движения могут ставиться в двух планах: в плане первоначального определения параметров и в плане уточнения их значений путем отыскания поправок к ним. Статистический характер решения допускается в обоих случаях, хотя преимущественно используется во втором случае.

Будем рассматривать статистические решения применительно к нахождению поправок к ранее определенным значениям.

В основе статистического подхода к решению навигационных задач лежит следующее. Считается, что основным источником информации являются измерения (апостериорная информация), причем какая-то часть полученных измерений охвачена корреляционными связями. Наряду с этим имеется и априорная информация (добытая до данной серии навигационных измерений) в виде совокупности ожидаемых значений параметров движения или координат. Известны соответствующие вероятностные характеристики возможных ошибок.

В процессе статистической обработки разыскивается такая совокупность величин, которая наилучшим образом согласуется с результатами измерений. Возможно проводить оптимизацию по различным критериям, однако наибольшее распространение получил критерий минимума дисперсии определяемых параметров.

При определении поправок к приближенным значениям параметров движения космических аппаратов или координат приземных объектов находят применение несколько методов, оптимальных по этому критерию.

Метод максимального правдоподобия представляет собой один из самых эффективных в смысле обеспечения минимума дисперсии. Применение его оправдано тогда, когда среди всей информации, вовлекаемой в обработку, имеются как некоррелированные, так и коррелированные измерения. Обработка по способу наименьших квадратов является частным случаем метода максимального правдоподобия, когда измерения можно считать независимыми и нормально распределенными. Способ наименьших квадратов, разработанный еще в начале XIX века К. Ф. Гауссом, получил к настоящему времени весьма широкое распространение [10, 37].

При обработке измерительной информации по способу наименьших квадратов для определения оценок требуется предварительно накопить всю выборку измерений и лишь затем вовлечь ее в обработку. При этом, очевидно, темп выдачи оценок будет ниже, чем темп поступления измерений. Кроме того, при выполнении каждого последующего цикла оценок не вся априорная информация используется, так как учитываются только приближения параметров движения, относящиеся к предшествующим циклам.

Указанных недостатков лишены развиваемые в последние годы [34, 66, 94] способы обработки по нарастающему объему измерений. Важной особенностью их является возможность добавлять измерительную информацию любыми порциями, вплоть до каждого отдельного измерения, причем для перехода от k -го этапа к $(k + 1)$ -му применяются рекуррентные соотношения. Это, в свою очередь, допускает выдачу новых уточненных оценок в любой момент времени с учетом фактически накопившейся к этому моменту совокупности измерений. Данное обстоятельство предопределяет эффектив-

ное применение обработки в тех случаях, когда измерения рассредоточены по времени, поступают в равномерном темпе, а решения требуется принимать, не дожидаясь накопления большого количества информации.

В результате статистической обработки находится совокупность поправок к приближенным значениям параметров движения КА (координат). В ряде случаев в число неизвестных включают некоторые физические постоянные, влияющие на условия полета космического аппарата или работу навигационной аппаратуры, и тогда число определяемых поправок возрастает.

Для решения задач определения параметров движения КА используются обычно не все измерения, которые навигационная система способна выдать на мерном участке орбиты, а некоторая дискретная выборка, получаемая путем усреднения по отдельным интервалам этого участка. При дискретизации применяют как простое арифметическое усреднение, так и более сложную обработку, например по способу наименьших квадратов. С целью упрощения алгоритмов и средств обработки в последние годы развиваются методы [69], основанные на аппроксимации функции $R_i(t)$ степенным многочленом и на несложном приеме вычисления его коэффициентов и дающие при этом как бы оптимальные оценки (квазиоптимальные методы).

§ 10.2. УТОЧНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ПО ПОЛНОЙ ВЫБОРКЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим методику статистической обработки результатов навигационных измерений с целью повышения точности определения параметров орбиты КА.

Пусть траектория КА определяется независимыми параметрами q_j ($j = 1, 2, \dots, m$), причем для случая, когда все постоянные, характеризующие движение, известны с достаточной точностью, $m = 6$, и траектория фиксируется либо шестью элементами кеплеровой орбиты: $q_1 = i$, $q_2 = \Omega$, $q_3 = \omega$, $q_4 = a$, $q_5 = e$, $q_6 = M_0$, либо прямоугольными геоцентрическими координатами $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ и слагающими скорости $q_4 = \dot{x}$, $q_5 = \dot{y}$, $q_6 = \dot{z}$.

Навигационные параметры, измеряемые с применением технических средств, обозначим через R_i ($i = 1, 2, \dots, n$), их расчетные значения — R_{0i} , а общее количество измерений — через n .

Параметры R_i измеряются относительно навигационных точек, положение которых в общем случае (поскольку могут применяться навигационные ИСЗ) может задаваться также шестью параметрами Q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$), причем для наземных НТ, геоцентрические

и отметим, что эти невязки являются случайными величинами. Метод наименьших квадратов позволяет найти такие наивероятнейшие значения поправок δ_j , при которых сумма квадратов невязок ε_i была бы наименьшей:

$$V = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min. \quad (10.2.11)$$

Условие (10.2.11) распадается на шесть условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \delta_1} &= 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial V}{\partial \delta_6} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.12)$$

Вычислим в соответствии с условиями (10.2.12) значения частных производных функционала V по поправкам δ_j .

Дифференцирование V по первой поправке δ_1 дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial}{\partial \delta_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left(p_i \sum_{j=1}^6 \alpha_{ij} \delta_j \right) - p_i r_i \right]^2 \right\} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left[\left(p_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} \delta_j \right) - p_i^2 r_i \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \delta_1 + \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \frac{\partial R_i}{\partial q_{02}} \delta_2 + \dots \\ \dots + \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \frac{\partial R_i}{\partial q_{06}} \delta_6 = \sum_{i=1}^n p_i^2 r_i \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}}. \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_{1j} &= \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}} \frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}, \\ b_1 &= \sum_{i=1}^n p_i^2 r_i \frac{\partial R_i}{\partial q_{01}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.14)$$

Тогда вместо (10.2.13) запишем:

$$a_{11} \delta_1 + a_{12} \delta_2 + \dots + a_{16} \delta_6 = b_1. \quad (10.2.15)$$

раметров q_{0j} движения, которые были приняты в качестве первого приближения. Поэтому добавление к значениям q_{0j} найденных поправок δ_j еще не дает наилучших по точности результатов. Потребуется принять исправленные значения параметров в качестве новых начальных условий (второго приближения) и затем повторить всю процедуру обработки заново: вычислить расчетные значения навигационных параметров по (10.2.3), найти разности параметров по (10.2.8), рассчитать частные производные от навигационных параметров по начальным условиям второго приближения, вычислить коэффициенты системы нормальных уравнений по (10.2.14) и, наконец, решить систему нормальных уравнений. Полученные уточненные поправки добавляются к начальным условиям второго приближения. Такие циклы последовательного приближения (итерационные циклы) могут повторяться несколько раз до тех пор, пока отличие последующих уточненных значений параметров движения по сравнению с предшествующими не окажется менее заданных погрешностей навигационных определений.

Количество итерационных циклов будет зависеть от того, насколько близкими к действительным были значения первого приближения. Более того, весь итерационный процесс оказывается сходящимся лишь при определенных уклонениях априорных величин параметров от действительных. Поэтому на стадии отработки методики наименьших квадратов выявляют, при каких предельных ошибках в начальных условиях процесс еще остается сходящимся, и требуют, чтобы при решении навигационной задачи погрешности априорной информации не выходили за допустимые пределы. При определении параметров орбит ИСЗ результаты обработки информации должны выдаваться быстро, а начальное приближение может быть весьма грубым, ввиду этого в таких задачах надежное обеспечение сходимости имеет большое значение.

Укажем, что в современной литературе широко используется матричная запись системы нормальных уравнений, а также ее решение по правилам матричного исчисления.

Систему (10.2.16) представляют в виде матричного уравнения, применяя следующие обозначения:

$$\mathbf{A}\Delta = \mathbf{B}, \quad (10.2.16')$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, составленная из коэффициентов

$$\mathbf{A} = \|\| [p^2 \alpha_k \alpha_j] \|\|;$$

Δ — столбцовая матрица поправок к параметрам орбиты:

$$\Delta = \|\| \delta_j \|\|;$$

$\mathbf{B}$ — столбцовая матрица из правых частей нормальных уравнений:

$$\mathbf{B} = \|\| [p^2 r \alpha_k] \|\|.$$

В матричном анализе доказывается, что если $\mathbf{A}$ — неособенная матрица, т. е. матрица, определитель которой не равен нулю, то решение уравнения (10.2.16') находится в виде:

$$\Delta = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{B}, \quad (10.2.17)$$

где $\mathbf{A}^{(-1)}$ — так называемая обращенная матрица.

Решение уравнения (10.2.16') сводится поэтому к обращению матрицы, составленной из коэффициентов вида a_{kj} . Элементы обращенной матрицы $\mathbf{A}^{(-1)}$ вычисляются по правилу

$$a_{ig}^* = \frac{A_{ig}}{\det \mathbf{A}}, \quad (10.2.18)$$

где $\det \mathbf{A}$ — определитель матрицы $\mathbf{A}$, а A_{ig} — минор элемента a_{ig} , вычисляемый как определитель матрицы 5-го порядка, полученной из исходной матрицы $\mathbf{A}$ зачеркиванием i -ой строки и g -го столбца.

В ряде случаев может ставиться задача нахождения лишь трех координат пространственного объекта. Вычисления при этом, естественно, упрощаются и появляется возможность более наглядного геометрического истолкования коэффициентов матрицы системы нормальных уравнений.

Рассмотрим случай уточнения координат пространственного объекта по полной выборке измерений, используя более компактную запись уравнений и их систем с помощью знаков суммирования, гауссовых символов, заменяющих эти знаки, и соответствующих индексов.

Ставится задача определения геоцентрических координат x , y и z пространственного объекта. При этом считается, что измерения не коррелированы, ошибки их распределены нормально, соответствующие дисперсии заданы.

Местоопределение проводится в трехмерном пространстве, причем связь навигационных параметров и координат задается в виде некоторой функции:

$$R_i = R_i(x^1, x^2, x^3, t_i).$$

Индексы, обозначающие порядковые номера координат, далее будем записывать вверху в отличие от индексов, соответствующих порядковым номерам навигационных измерений, которые ставятся внизу.

Если выполнено n измерений: $R_1, R_2, \dots, R_n$, то может быть составлена система уравнений:

$$R_i = R_i(x^1, x^2, x^3, t_i)_{(i=1, 2, \dots, n)}. \quad (10.2.19)$$

Из системы (10.2.19) для пространственного местоопределения в пределах рабочей области в принципе достаточно взять три уравнения; остальные $(n-3)$ могут быть использованы для повышения точности.

Пусть решение системы каких-то трех уравнений дает координаты x_0^j ($j = 1, 2, 3$). Эти координаты x_0^j могут быть также априорно взяты от какой-то иной, более грубой навигационной системы (например, от счислителя координат, работающего с накоплением ошибок).

Разность навигационных параметров ($R_i - R_{0i}$) можно выразить через поправки δ^j ($j = 1, 2, 3$) к приближенным координатам, значения которых находятся с привлечением всей наличной информации. На основании выражений (10.2.19) можно записать:

$$R_i - R_{0i} = R_i(x_0^1 + \delta^1; x_0^2 + \delta^2; x_0^3 + \delta^3; t_i) - R_i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t_i). \quad (10.2.20)$$

Разлагая (10.2.20) в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами, получим:

$$R_i - R_{0i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_i}{\partial x_0^j} \delta^j. \quad (10.2.21)$$

Входящие в систему (10.2.21) частные производные функции R_i по координатам, отвечающим приближенному месту, являются постоянными для сеанса измерений и выражаются через градиенты поверхностей положения G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и коэффициенты γ_{ij} ($j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, n$):

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_0^j} = G_i \gamma_{ij}.$$

В ортогональной декартовой системе координат γ_{ij} выражаются через направляющие косинусы нормалей к поверхностям положения.

После приведения измерений к общему масштабу с помощью весов p_i невязки расчетных и измеренных значений будут иметь вид:

$$e_i = \left(p_i \sum_{j=1}^3 G_i \gamma_{ij} \delta^j \right) - p_i r_i. \quad (10.2.22)$$

Минимизация, примененная к (10.2.22) в соответствии с критерием минимума суммы квадратов невязок, приведет к системе нормальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 a_{kj} \delta^j - b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (10.2.23)$$

коэффициенты которой a_{kj} и b_k вычисляются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_{kj} &= \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{\partial R_i}{\partial x_0^k} \frac{\partial R_i}{\partial x_0^j} = [p^2 G^2 \gamma_k \gamma_j], \\ b_k &= \sum_{i=1}^n p_i^2 r_i \frac{\partial R_i}{\partial x_0^k} = [p^2 r G \gamma_k]. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.24)$$

Как видно из выражений (10.2.23), (10.2.24), для нахождения поправок δ^j требуется предварительно вычислить шесть сумм $[p^2 G^2 \gamma_k \gamma_j]$ ($k, j = 11, 12, 13, 22, 23, 33$), составленных из известных параметров навигационной системы, и три суммы $[p^2 r G \gamma_k]$ ($k = 1, 2, 3$), составленные как из известных параметров системы, так и из данных навигационных измерений.

Поскольку система (10.2.23) содержит всего три линейных уравнения с тремя неизвестными, обращение матрицы оказывается менее громоздкой операцией, чем в случае нахождения шести поправок, что существенно упрощает всю процедуру решения. Более оправданным в этом случае может явиться применение метода исключения Гаусса.

В качестве иллюстрации объема и последовательности вычислений при обработке навигационной информации по методу наименьших квадратов приведем схему алгоритма для вычисления поправок к пространственным координатам, который основан на решении системы нормальных уравнений методом исключения Гаусса.

Последовательность расчетов следующая:

- 1) в память (ЦВМ) вводятся априорные значения координат x_0^1, x_0^2, x_0^3 ;
- 2) в память вводятся также рассчитанные заранее градиенты поверхностей положения — $G_1, G_2, \dots, G_n$;
- 3) вычисляются (по направляющим косинусам градиентов поверхностей положения) и вводятся в память коэффициенты $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \dots, \gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}$;
- 4) рассчитываются и вводятся в память значения навигационных параметров $R_{01}, R_{02}, \dots, R_{0n}$, отвечающих априорным координатам;
- 5) по известным дисперсиям навигационных станций и в соответствии с видом измерений рассчитываются и вводятся в память значения весов $p_1, p_2, \dots, p_n$;
- 6) вводятся значения измеренных навигационных параметров $R_1, R_2, \dots, R_n$;
- 7) вычисляются разности $(R_1 - R_{01}), \dots, (R_n - R_{0n})$;
- 8) вычисляются элементы матрицы A , составленные из известных параметров навигационных станций, вида $[p^2 G^2 \gamma_k \gamma_j]$ ($k, j = 11, 12, 13, 22, 23, 33$);

9) вычисляются элементы матрицы **B** в виде сумм $[p^2 r G \gamma_k]$ ($k = 1, 2, 3$), составленных из параметров станций и найденных разностей.

Этим заканчивается цикл подготовительных операций. Для дальнейшего система нормальных уравнений * сводится к рекуррентной системе типа

$$\left. \begin{aligned} a^{11} \delta^1 + a^{12} \delta^2 + a^{13} \delta^3 &= b^1, \\ a_{(1)}^{22} \delta^2 + a_{(1)}^{23} \delta^3 &= b_{(1)}^2, \\ a_{(2)}^{32} \delta^3 &= a_{(2)}^3, \end{aligned} \right\} \quad (10.2.25)$$

где ради простоты элементы матрицы **A** записаны в виде:

$$A = \| a^{kj} \|,$$

а элементы матрицы **B** — в виде:

$$B = \| b^k \|,$$

причем элементы матрицы **A** с нижними индексами $a_{(l)}^{kj}$ определяются через миноры этой матрицы [62]:

$$a_{(l)}^{kj} = \frac{A \begin{pmatrix} 1 \dots lk \\ 1 \dots lj \end{pmatrix}}{a^{11} a_{(1)}^{22} \dots a_{(l-1)}^{ll}}, \quad (10.2.26)$$

а элементы матрицы **B** с нижними индексами $b_{(l)}^k$ определяются через миноры матрицы **A**, дополненной столбцом матрицы **B**:

$$b_{(l)}^k = \frac{A \begin{pmatrix} 1 \dots lk \\ 1 \dots lj+1 \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 \dots l \\ 1 \dots l \end{pmatrix}}. \quad (10.2.27)$$

Система рекуррентных уравнений (10.2.25) позволяет последовательно находить поправки к координатам δ^3 , δ^2 и δ^1 .

Последующий цикл операций состоит в решении этой системы, при котором выполняются следующие действия:

10) вычисляется минор матрицы $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и через него — элемент $a_{(1)}^{22}$;

11) вычисляется минор матрицы $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и через него — элемент $a_{(1)}^{23}$;

12) вычисляется минор матрицы $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и через него, а также через ранее вычисленный минор $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ — элемент $a_{(2)}^{33}$;

* Здесь верхние буквенные и цифровые индексы не являются показателями степени.

13) вычисляется минор дополненной матрицы $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3+1 \end{pmatrix}$ и через него — элемент $b_{(1)}^2$;

14) вычисляется минор дополненной матрицы $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3+1 \end{pmatrix}$ и через него, а также через минор $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ — элемент $b_{(2)}^3$;

15) определяется искомая поправка к координате δ^3 ;

16) определяется поправка к координате δ^2 ;

17) вычисляется поправка к координате δ^1 .

Если первый цикл уточнения координат не обеспечит требуемой точности, то потребуется провести последующие циклы приближений.

В процессе навигационных определений, проводящихся в интересах движущегося объекта, будут меняться значения измеренных навигационных параметров R_i , изменятся также и приближенные координаты (их априорное значение). В соответствии с этим приобретут новые значения коэффициенты γ_{ij} и в ряде случаев — градиенты поверхностей положения G_i . Если изменяется набор навигационных станций, то обновляется и серия значений весов p_i . Поэтому в общем случае при повторяющихся навигационных определениях потребуется проводить вычисления в объеме всего алгоритма.

§ 10.3. ОСНОВЫ МЕТОДИКИ УТОЧНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КА ПО ВЫБОРКЕ ИЗМЕРЕНИЙ НАРАСТАЮЩЕГО ОБЪЕМА

Если обработка полной выборки из n измерений обеспечивает некоторую дисперсию σ_{qi}^2 определяемых параметров, то, применяя обработку по выборке нарастающего объема, нельзя уменьшить дисперсию. Более того, последовательные оценки, находимые с использованием тех или иных долей от общего числа n измерений, будут менее точными, чем последняя оценка, найденная на основе всех измерений. И только эта последняя оценка сравнится по точности с той, которую дает обработка полной выборки, например, методом наименьших квадратов. Несмотря на это, последовательное нахождение оценок привлекает оперативностью получения результатов и удобствами вычислительного характера.

Рассмотрим два основных варианта обработки по выборке нарастающего объема. Вначале обратимся к более общему варианту, который основан на использовании производных высших порядков от навигационных функций по начальным условиям движения [94].

Применение метода наименьших квадратов основано на минимизации функционала (10.2.11) типа

$$V = \sum_{i=1}^n \left(p_i \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} \delta_j - p_i r_i \right), \quad (10.3.1)$$

который соответствует системе условных уравнений (10.2.9). Последняя была получена из системы (10.2.4), выражающей разности $R_i - R_{0i}$ измеренного и расчетного значений навигационных функций, путем ее линеаризации. В процессе линеаризации отбрасывались все старшие члены ряда, начиная со второй степени.

Следует обратить внимание на то, что пренебрежение этими членами оправдывается не обязательно их малостью. Возможны условия, когда производные высших порядков не будут значительно меньше производных первого порядка. Линеаризация позволяет ограничиться первой степенью поправок δ_j , что и приводит к линейности системы нормальных уравнений (10.2.16), облегчающей ее решение. При этом линеаризация не приводит к дополнительным ошибкам ввиду итерационности процесса решения системы нормальных уравнений, сходящегося с заданной точностью.

Выключение высших членов разложения упрощает вычисления, однако возможны ситуации, когда присутствие производных высших порядков способно повысить надежность решения. Так, указывалось, что решение зависит от свойств матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов вида (10.2.14'). Равенство нулю первых производных $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$ придает этой матрице особенные свойства и лишает возможности определить поправки δ_j . Но в отсутствие производных первого порядка высшие производные могут присутствовать, и целесообразное их использование помогает сохранить неособенность матрицы $\mathbf{A}$.

Задача состоит в том, чтобы, сохранив линейный характер системы нормальных уравнений, удержать при разложении в ряд Тейлора производные хотя бы второго порядка. Достичь это возможно, если процесс минимизации предпослать процедуре линеаризации.

Обратимся к системе (10.2.4) и применим к ней оптимизацию по критерию минимума суммы квадратов расхождений измеренных R_i и оцениваемых (т. е. вычисленных при введенной системе поправок) R_{0i}^* значений навигационной функции

$$V = \sum_{i=1}^n (R_i - R_{0i}^*)^2 = \min. \quad (10.3.2)$$

После минимизации функционала (10.3.2) по уточненным начальным условиям движения q_{0j}^* , получается система шести нелинейных

уравнений

$$\sum_{i=1}^n (R_i - R_{0i}^*) \frac{\partial R_{0i}^*}{\partial q_{0j}} = 0, \quad (10.3.3)$$

причем $j = 1, 2, \dots, 6$.

Учитывая, что $\frac{\partial R_{0i}^*}{\partial q_{0j}} \approx \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}}$ и обозначив $R_i - R_{0i} = r_i^*$, можно преобразовать (10.3.3) и получить:

$$\sum_{i=1}^n [r_i - (R_{0i}^* - R_{0i})] \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}} = 0. \quad (10.3.4)$$

Чтобы избавиться от нелинейности, следует разложить произведения $(R_{0i}^* - R_{0i}) \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}}$, стоящие под знаками сумм, в ряд по степеням поправок δ_j и далее ограничиться первыми двумя членами разложения. Соответствующие вычисления приведут к виду

$$\sum_{i=1}^n \left[r_i \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}} + \left(- \sum_{k=1}^6 \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}} \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0k}} \delta_k + \sum_{k=1}^6 r_i \frac{\partial^2 R_{0i}}{\partial q_{0j} \partial q_{0k}} \delta_k \right) \right] = 0. \quad (10.3.5)$$

Последнюю систему можно переписать в виде, обычном для системы нормальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^6 \mathbf{a}_{jk} \delta_k = \mathbf{b}_j \quad (j = 1, 2, \dots, 6), \quad (10.3.6)$$

где коэффициенты выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{jk} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}} \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0k}} - \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial^2 R_{0i}}{\partial q_{0j} \partial q_{0k}} = a_{jk} - m_{jk}, \\ \mathbf{b}_j &= \sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}} \end{aligned} \right\} \quad (10.3.6')$$

Полученная матрица коэффициентов $\mathbf{A}_{jk}$ примечательна тем, что ее элементы содержат вторые частные производные от навигационной функции по начальным условиям движения, при этом каждый элемент представляется в виде разности, где уменьшаемым является сумма по всем измерениям от произведения первых частных

*) Ради простоты все измерения берем с одинаковым весом.

производных (это — элементы a_{jh} матрицы $\mathbf{A}$ системы нормальных уравнений), а вычитаемое m_{jh} представляется суммой выражений, включающих вторые частные производные.

Для анализа полученных результатов удобно перейти к матричной записи.

Обозначим матрицу частных производных навигационной функции по начальным условиям движения размером $n \times 6$ через

$$\mathbf{C} = \left\| \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{0j}} \right\|, \quad (10.3.7)$$

матрицу-столбец разностей измеренного и расчетного значений навигационной функции через

$$\mathbf{R} = \|r_i\|, \quad (10.3.8)$$

а также введем матрицу $\mathbf{M}$ в виде

$$\mathbf{M} = \|m_{jh}\|. \quad (10.3.9)$$

Тогда будут иметь место очевидные соотношения

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}, \quad (10.3.7')$$

где t — знак транспонирования, и система уравнений (10.3.6) в матричной записи приобретет выражение

$$\Delta = (\mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{M})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{R}. \quad (10.3.10)$$

Сопоставление (10.3.10) с аналогичным выражением (10.2.17), относящимся к обработке по полной выборке, заостряет внимание на том, что под знаком обращения матрицы стоит двучлен $(\mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{M})$. В отсутствие первого члена второй член может иметь конечную величину, поэтому особенность матрицы $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ не обязательно приводит к особенности составной матрицы, что сохраняет возможность решения задачи и в этом случае.

С целью получения развернутого выражения для матрицы $\mathbf{M}$ воспользуемся рассмотренными в § 4.7 понятиями градиентной матрицы первого и второго рода [выражения (4.7.5) и (4.7.7)], фундаментальной матрицы первого и второго рода [выражения (4.7.3) и (4.7.4)], а также введем в рассмотрение изохронную смешанную градиентно-фундаментальную матрицу $\mathbf{U}_i$, которая образуется по правилу суммирования матриц

$$\mathbf{U}_i = \sum_{j=1}^6 \mathbf{U}_{ji}, \quad (10.3.11)$$

причем частные квадратные матрицы $\mathbf{U}_{ji}$ имеют выражения:

$$\mathbf{U}_{ji} = \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{ji}} \left\| \frac{\partial^2 Q_{ji}}{\partial q_{0k} \partial q_{0l}} \right\| = \frac{\partial R_{0i}}{\partial q_{ji}} \Psi_j \quad (10.3.12)$$

$$(k, l = 1, 2, \dots, 6).$$

Тогда в результате соответствующих преобразований матричный двучлен $(C^T C - M)$ будет представлен в виде

$$(C^T C - M) = \sum_{i=1}^n \Phi_i^T \Gamma_i^T \Gamma_i \Phi_i - \sum_{i=1}^n r_i \Phi_i^T \Pi_i \Phi_i - \sum_{i=1}^n r_i U_i, \quad (10.3.13)$$

откуда можно получить

$$(C^T C - M) = \sum_{i=1}^n [\Phi_i^T (\Gamma_i^T \Gamma_i - r_i \Pi_i) \Phi_i - r_i U_i]. \quad (10.3.14)$$

Поскольку представляется возможным использовать для матрицы A запись в виде

$$A = C^T C = \Phi^T \Gamma^T \Gamma \Phi, \quad \text{то} \quad (10.3.15)$$

из рассмотрения (10.3.14) следует, что искомая матрица M должна определяться как

$$M_i = \sum_{i=1}^n r_i (\Phi_i^T \Pi_i \Phi_i + U_i). \quad (10.3.16)$$

Последнее выражение показывает, что для нахождения матрицы M , кроме расчетного R_{0i} и измеренного R_i значений навигационной функции, требуется располагать фундаментальной матрицей первого рода Φ , градиентной матрицей второго рода Π и смешанной градиентно-фундаментальной матрицей U . Все эти матрицы могут вычисляться для условий, относящихся к расчетным значениям положения космического аппарата.

Анализ уравнения поправок (10.3.10) позволяет выявить, что при двучленном виде матрицы $(C^T C - M)$ появляется возможность производить обработку по нарастающему объему измерений. При этом наличие матрицы M допускает вычисления поправок, начиная с $n = 1$.

В самом деле, для одного измерения одночленная матрица $(C^T C)$ является особенной из-за линейной зависимости элементов ее строк (столбцов), вследствие чего основное уравнение поправок (10.2.16') оказывается неразрешимым. Это обстоятельство препятствует обработке отдельных измерений по мере их поступления. В данном же случае наличие в обрабатываемой матрице (10.3.10) второго члена (M) превращает эту матрицу в неособенную и открывает путь к включению в обработку каждого единичного измерения.

Матрица M , как это можно усмотреть в зависимости (10.3.16), будет иметь тем больший вес, чем больше разность r_i измеренного и расчетного значений навигационной функции в той группе измерений, которая обрабатывается. Поэтому последовательное приближение к истинным значениям параметров движения может оказаться не монотонным.

Выявленные выше полезные свойства матрицы $\mathbf{M}$ (10.3.16) связаны с тем, что входящие в нее матрицы Π и $\mathbf{U}$ выражаются через частные производные второго рода, которые могут сохраняться при пропадании первых частных производных, из которых формируется матрица $\mathbf{C}$. Однако необходимость формирования матриц Π и $\mathbf{U}$ усложняет всю процедуру обработки и требует более емкой памяти вычислительных средств. Представляется, поэтому, заманчивым располагать алгоритмом, позволяющим улучшить решаемость навигационных задач по сравнению с основным алгоритмом наименьших квадратов, но не требующим вычисления вторых частных производных. Такими возможностями обладает процедура динамической фильтрации, являющаяся вторым вариантом метода.

Алгоритм динамической фильтрации позволяет вести обработку измерительной информации, начиная с $n = 1$, так как матрица коэффициентов решаемой системы уравнений всегда оказывается неособенной. Достигается это тем, что данная матрица формируется в виде суммы двух матриц типа $(\mathbf{C}^T \mathbf{C} + \mathbf{D})$, причем вторая матрица $\mathbf{D}$, подобно матрице $\mathbf{M}$, остается неособенной даже в тех случаях, когда первая $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$ приобретает особенные свойства. В качестве матрицы $\mathbf{D}$ берут корреляционную матрицу ошибок определения параметров движения, найденную из результатов предшествующего цикла вычислений.

Мерный участок траектории КА как бы разбивается на ряд последовательных интервалов, каждый из которых соответствует отдельно обрабатываемым измерениям. При обработке i -го измерения матрица $\mathbf{D}$ формируется в результате оценки точности нахождения поправок к параметрам движения на $(i - 1)$ -м интервале. На первом же цикле обработки эту матрицу образуют с использованием априорных оценок точности прогноза движения, а при отсутствии таких оценок — назначают произвольно, исходя из предполагаемых оценок.

Для первого цикла расчетов по обычным правилам формируют матрицу $\mathbf{A}$ из частных производных от навигационных функций по начальным условиям и матрицу $\mathbf{B}$, выражаемую через разности измеренных и расчетных величин. Если измерения не равноточные, то вводится весовая матрица измерений $\mathbf{P}$ (при коррелированных ошибках измерений — соответствующая корреляционная матрица $\mathbf{K}_R$), так что

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{C}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_1. \quad (10.3.17)$$

За матрицу $\mathbf{D}_0$ принимается обращенная корреляционная матрица $\mathbf{K}_{q_0}$ априорных ошибок параметров движения:

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{K}_{q_0}^{-1}. \quad (10.3.18)$$

Таким образом уравнение для вектора поправок Δ составляется по правилу:

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_0) \Delta_1 = \mathbf{B}_1 \quad (10.3.19)$$

и его решение ищется в виде

$$\Delta_1 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{B}_1. \quad (10.3.20)$$

Последующие итерации выполняются по рекуррентному соотношению

$$\Delta_i = (\mathbf{A}_i + \mathbf{D}_{i-1})^{-1} \mathbf{B}_i, \quad (10.3.21)$$

где матрица $\mathbf{D}_{i-1}$ образуется путем обращения матрицы, составленной из $\mathbf{A}_{i-1}$ и $\mathbf{D}_{i-2}$:

$$\mathbf{D}_{i-1} = (\mathbf{A}_{i-1} + \mathbf{D}_{i-2})^{-1} \quad (10.3.22)$$

и, по существу, представляет собой корреляционную матрицу $K_{q(i-1)}$ ошибок уточнения параметров на предшествующей итерации.

Число последовательных приближений будет зависеть от заданных требований к апостериорной дисперсии параметров движения.

Изложенное выше показывает, что алгоритм динамической фильтрации отличается от процедуры обработки по полной выборке более эффективным использованием предшествующих вычислительных циклов. В самом деле, при каждой последующей итерации способа наименьших квадратов учитываются лишь поправки, полученные на предшествующем приближении, а корреляционная матрица оценок остается без внимания. Здесь же, как было показано выше, учитываются и предшествующие поправки и статистические характеристики предшествующего уточнения параметров движения.

Сопоставляя этот способ со способом, учитывающим производные второго порядка, можно заметить, что матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{M}$ играют одинаковую роль в улучшении решаемости навигационных задач, однако для формирования матрицы $\mathbf{M}$ не требуется на каждой итерации учитывать статистические свойства ошибок уточняемых значений параметров движения КА, тогда как для образования матрицы $\mathbf{D}$ не требуется рассчитывать производные второго порядка.

При использовании методики самоопределения измерения на борту КА накапливаются постепенно, причем такие измерения, как высота полета, могут собираться на мерных участках, приближающихся по длине к полной орбите. В этих условиях способы обработки по нарастающему объему измерений позволяют начать уточнение параметров движения, не дожидаясь накопления всей выборки возможных измерений.

Естественно, что при обработке по нарастающему объему нельзя достичь большей точности, чем при обработке по полной выборке такого же объема. Только последняя оценка сравнивается по точности

с той, которая получается при обработке по полной выборке. Несмотря на это, способ обработки по нарастающему объему в силу указанных выше его достоинств считается перспективным для космической навигации.

§ 10.4. О ВЫЧИСЛЕНИИ РАСЧЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ И УСРЕДНЕНИИ ИЗМЕРЕНИЙ, ВОВЛЕКАЕМЫХ В ОБРАБОТКУ

Поясним, как находятся расчетные значения навигационных параметров R_{0i} ($i = 1, 2, \dots, n$) и в соответствии с ними произведения $r_i r_i$ разности расчетных и измеренных параметров и весового коэффициента.

Положим, что совокупность R_i образуют измерения дальности r , азимута A и угла места γ , причем ошибки имеют нормальное распределение и характеризуются соответствующими дисперсиями σ_{ri}^2 , σ_{Ai}^2 и $\sigma_{\gamma i}^2$.

Отметим, что измерения выполняются в топоцентрических координатных системах, тогда как координаты космических аппаратов выражаются обычно в системах геоцентрических. Для вычисления разностей r_i необходим переход к единой системе отсчета. Удобнее координаты объектов навигации приводить к топоцентрическим системам, поскольку располагая прогнозом движения, эту операцию удастся выполнить до сеанса измерений.

Последовательность вычислений для случая навигации ИСЗ по измерениям с Земли будет следующей.

По известным элементам орбиты i , Ω , ω , a , e и τ_0 находятся текущие, на момент t_i , геоцентрические прямоугольные координаты x_i , y_i и z_i , для чего используются зависимости (2.4.7).

Полученные значения геоцентрических координат x_i , y_i и z_i преобразовывают затем с использованием матрицы перехода (2.2.16), (2.2.17) в координаты топоцентрические, соответствующие началу отсчета в точке с географическими координатами φ_i и λ_i . Это будут координаты ξ_i , η_i и ζ_i .

Тогда расчетные значения дальности, азимута и угла места исчисляются через ξ_i , η_i и ζ_i по очевидным соотношениям:

$$r_{0i} = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2}, \quad (10.4.1)$$

$$A_{0i} = \arctg \left(\frac{\eta_i}{\xi_i} \right), \quad (10.4.2)$$

$$\gamma_{0i} = \arctg \frac{\zeta_i}{\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}}. \quad (10.4.3)$$

Для нахождения левых частей системы условных уравнений в соответствии с выражением (10.2.8) используются весовые коэффициенты, не одинаковые для различных навигационных параметров:

$$Pr_i = \frac{1}{\sigma_{ri}^2}, \quad PA_i = \frac{\cos \gamma_i}{\sigma_{Ai}^2} \quad \text{и} \quad P\gamma_i = \frac{1}{\sigma_{\gamma i}^2}. \quad (10.4.4)$$

Поэтому левые части будут для дальномерных, азимутальных и угломестных измерений иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_{ri}} (r_i - r_{0i}), \\ & \frac{\cos \gamma_i}{\sigma_{Ai}} (A_i - A_{0i}), \\ & \frac{1}{\sigma_{\gamma_i}} (\gamma_i - \gamma_{0i}). \end{aligned} \right\} \quad (10.4.5)$$

Для случая навигационных измерений на борту КА и обработки навигационной информации с помощью бортовых вычислительных средств может оказаться удобным использовать в качестве преимущественной системы отсчета, к которой приводятся все координаты, систему геоцентрическую или связанную с КА.

Результаты измерений навигационных параметров N_i перед включением в решение статистической задачи усредняются. Применяется как простое арифметическое усреднение, так и сложное усреднение с учетом закона изменения измеряемой величины.

Простое арифметическое усреднение оказывается достаточным в условиях, когда измеряемая величина на участке дискретизации или не меняется или меняется по линейному закону. Учет нелинейностей требует более сложной обработки.

При арифметическом усреднении из серии m значений навигационного параметра N_i , соответствующей некоторому ограниченному временному интервалу T , получают среднюю арифметическую величину

$$\bar{N}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_i. \quad (10.4.6)$$

Если на интервале усреднения параметр N_i не меняется, то усредненное значение можно отнести к любому моменту времени внутри этого интервала. В случае линейного изменения N_i усредненная величина будет оценивать значение измеряемой величины для середины интервала T . Поэтому обычно среднее арифметическое значение привязывают к середине этого интервала.

При достаточно большом m дисперсия полученной оценки $\sigma_{\bar{N}_T}^2$ будет связана с дисперсией одиночных измерений σ_N^2 соотношением

$$\sigma_{\bar{N}_T}^2 = \frac{1}{m} \sigma_N^2, \quad (10.4.7)$$

которое свидетельствует о существенном выигрыше в точности при сглаживании большого числа измерений.

Зачастую среди N_i встречаются параметры, значительно отличающиеся от своих истинных значений («выбросы»). Такие грубые измерения могут привести к снижению точности решения навигационной задачи. Поэтому при предварительной обработке проводится отсеивание недоброкачественных измерений. Подобный отбор основывается на использовании априорных данных о параметрах, причем критерием для отбора принимается обычно превышение измеренной величины N_i над ожидаемой N_{0i} не более чем на три среднеквадратических ошибки:

$$N_i - N_{0i} < 3\sigma_N. \quad (10.4.8)$$

Если применить арифметическое усреднение при нелинейном законе изменения $N(t)$, то случайные ошибки измерений будут по-прежнему сглаживаться, но при этом появятся систематические ошибки, связанные с нелинейностью. Уменьшить последние можно, сокращая интервал T , однако это связано с уменьшением m , а при этом в соответствии с (10.4.7) сглаживание окажется менее эффективным.

В целях снижения систематической ошибки обращаются к методу наименьших квадратов. Аппроксимируют закон изменения $N(t)$ некоторым полиномом, например, третьей степени:

$$N(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (10.4.9)$$

и так подбирают его коэффициенты, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных величин от ожидаемых при избранном законе изменения $N(t)$ была наименьшей

$$\sum_{i=1}^m (N_i - N_{0i})^2 = \min. \quad (10.4.10)$$

Постоянный член полинома (10.4.9), найденный из условий (10.4.10), явится оценкой $\bar{N}_T$ для середины усредняемого интервала. При такой процедуре усреднения дисперсия оценки составит [69]:

$$\sigma_{\bar{N}_T}^2 = 2,25 \frac{\sigma_N^2}{m}. \quad (10.4.11)$$

Стало быть, исключение систематической ошибки достигается ценой увеличения дисперсии оценки по сравнению с арифметическим осреднением в 2,25 раза.

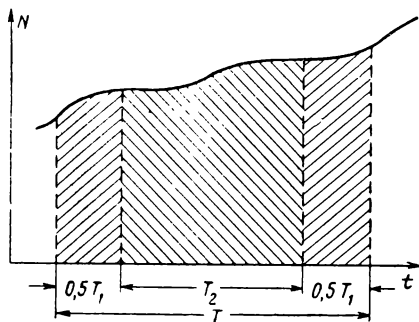


Рис. 10.4.1. К оценке дискретизируемого параметра по способу интегрального уравнивания коэффициентов.

Процедура усреднения упрощается, если применить способ интегрального уравнивания коэффициентов, который дает результаты, близкие к оптимальным оценкам.

Идея способа состоит в том, что внутри усредняемого интервала T выделяют интервал T_2 ; для обоих интервалов находят оценки по простому способу арифметического усреднения, представляя функцию $N(t)$ полиномом (10.4.9), и затем найденные по оценкам коэффициенты a_0 уравнивают. В окончательную формулу при этом войдет суммирование по интервалу T_2 и окаймляющему его интервалу $0,5 T_1 + 0,5 T_1$ (рис. 10.4.1). Как показано в [69],

усредненное значение параметра, отнесенное к середине интервала, $\bar{N}_T$, можно вычислить по соотношению:

$$\bar{N}_T = a_0 = \frac{1}{1 + \kappa} \left[\sum_{j=1}^{m_2} \frac{1}{m_2} N_j (1 + \kappa + \kappa^2) - \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{m_1} N_i \kappa^2 \right], \quad (10.4.12)$$

где m_2 и m_1 — количества измерений соответственно на интервалах T_2 и T_1 , а

$$\kappa = \frac{T_2}{T} = \frac{m_2}{m}.$$

Дисперсия оценки составит при этом

$$\sigma_{\bar{N}_T}^2 = 2,61 \frac{\sigma_N^2}{m}. \quad (10.4.13)$$

По выражениям (10.2.12) и (10.4.13) можно заключить, что алгоритм усреднения получается сравнительно несложным, тогда как проигрыш в ошибке оценки по сравнению со способом наименьших квадратов оказывается менее 10%. К достоинству способа относится также и то, что процесс усреднения поддается автоматизации с помощью несложного вычислительного устройства.

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ МЕТОДОВ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

§ 11.1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НАВИГАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Для решения основных задач космической навигации необходимо располагать информацией об относительных пространственно-временных координатах КА. Она приобретает только в результате навигационных измерений.

Большая часть траектории КА представляет собой движение в известном гравитационном поле под действием ранее приложенного импульса силы. Такое движение — детерминированно. Достаточно с требуемой точностью знать начальные условия движения, чтобы на любой наперед заданный момент определять текущие координаты КА в течение всего срока действия этих начальных условий. Поэтому совокупность начальных условий движения может явиться удачной формой представления навигационной информации применительно к КА.

Первоначальная информация приобретается в результате контроля режима полета носителя, выводящего КА на орбиту. В дальнейшем начальные условия уточняются за счет последующих измерений.

Каждый цикл измерений направлен на уменьшение неопределенности пространственно-временного состояния объекта, на уменьшение его энтропии. Поэтому в принципе для характеристики количества информации, приносимого измерениями, можно использовать [22] разность энтропий доопытного (априорного) H_1 и послеопытного (апостериорного) H_2 состояний

$$I = H_1 - H_2. \quad (11.1.1)$$

При этом возможно, рассматривая состояние объекта как многомерную величину, задаться вероятностными характеристиками соответствующих параметров и вычислить количество информации как разность энтропий многомерных случайных функций.

Подобный подход позволит прийти к выражению информации в виде, удобном для описания процессов в системах передачи информации. Такая характеристика, однако, не является универсальной для описания свойств методов космической навигации, так как не раскрывает их видовые и индивидуальные особенности.

Для сравнения методов важно располагать данными не только о том, насколько в результате измерений будет уменьшена дисперсия параметров движения, но и о том, сколь быстро и надежно может быть получено решение. Именно совокупность точностных возможностей и свойств решаемости может составить характеристику информационной производительности метода.

Решаемость связана с методом обработки измерительной информации, поэтому необходимо учитывать особенности способов статистической обработки. Наиболее распространенный из них — способ наименьших квадратов — предполагает для каждого навигационного метода наличие вполне определенных априорных сведений, при которых итерационный процесс решения задачи по уточнению начальных условий движения будет быстро и надежно сходиться. Можно поэтому, каждый метод характеризовать некоторой точностью априорно известных начальных условий движения, при которых решение навигационной задачи становится возможным. Следовательно, требуется, чтобы энтропия априорно известных параметров движения не превышала вполне определенной для каждого метода величины.

Таким образом, можно считать, что информационной производительностью метода является его способность уменьшать в результате измерений дисперсию параметров движения при условии быстрого и надежного решения навигационной задачи.

Обозначим допустимые из этих соображений априорные значения ошибок начальных условий движения δq_{0j} . Очевидно, величины δq_{0j} должны входить в количественную характеристику информационных свойств.

Далее, при заданной ошибке измерений σ_R ошибка нахождения начальных условий $\sigma_{q_{0j}}$ определяется количеством измерений, взаимным расположением КА и НТ, а также выбранным методом измерений [39]. При фиксированном взаимном расположении орбиты и НТ и определенном числе измерений точность определения начальных условий движения также будет характеризовать информационные свойства метода измерений. Это значит, что энтропия апостериорно известных параметров не может быть меньше определенной для данного метода величины.

Таким образом, если необходимые априорные ошибки, с которыми известны параметры движения КА, не должны превышать величин δq_{0j} ($j = 1, 2, \dots, 6$), а апостериорные ошибки определения параметров движения не могут быть меньше $\sigma_{q_{0j}}$, то количественной оценкой информационной производительности метода может

явиться соотношение:

$$I = \sum_{j=1}^6 \log \frac{\delta q_{0j}}{\sigma_{q_{0j}}}, \quad (11.1.2)$$

где суммирование проводится по всем параметрам движения.

В дальнейшем основная характеристика (11.1.2) будет дополнена некоторыми специфическими количественными оценками, позволяющими более тонко выявить индивидуальные свойства отдельных навигационных методов.

§ 11.2. ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ДИСПЕРСИЮ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ КА

Было показано, что обработка измерений по методу наименьших квадратов приводит к решению системы нормальных уравнений (10.2.16). Для дальнейшего удобно воспользоваться матричной записью этой системы, однако не в виде (10.2.16'), где элементы матрицы $\mathbf{A}$ выражаются суммами по всем измерениям от произведения весовой функции на комбинации частных производных измеряемого параметра по начальным условиям [зависимости (10.2.14)], а в более развернутой форме.

Запишем систему нормальных уравнений в виде (10.3.7'):

$$\mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{C} \Delta = \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{R}, \quad (11.2.1)$$

где

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial R_1}{\partial q_{01}} & \dots \frac{\partial R_1}{\partial q_{06}} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial R_n}{\partial q_{01}} & \dots \frac{\partial R_n}{\partial q_{06}} \end{array} \right\| \quad (11.2.2)$$

есть матрица коэффициентов условных уравнений (n — число измерений);

$\mathbf{P}$ — весовая матрица измерений,

$$\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_6)^T, \\ \mathbf{R} = (r_1, r_2, \dots, r_n),$$

причем

$$r_i = R_i - R_{0i}.$$

Решение этой системы возможно, если определитель, составленный из коэффициентов левой части уравнений, не равен нулю, т. е.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (11.2.3)$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{P} \mathbf{C}.$$

Известно, что максимально возможное значение определителя, составленного из коэффициентов, симметричных относительно главной диагонали, не может превышать произведения диагональных элементов этого определителя

$$(\det \mathbf{A})_{\max} \leq \prod_{j=1}^6 a_{jj}.$$

Решение системы (11.2.1) производится методом последовательных приближений (итераций), и процесс решения содержит тем меньшее число циклов итераций, чем ближе определитель системы к своему максимальному значению. Наоборот, чем меньше определитель системы (11.2.1), тем медленнее сходится итерационный процесс и тем точнее требуются начальные приближения, чтобы процесс решения был сходящимся. Особенно затруднительным становится решение, когда $\det \mathbf{A} \rightarrow 0$. В этом случае говорят, что матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов, соответствующих определителю (11.2.3), является плохо обусловленной.

Из теории определителей известно, что равенство $\det \mathbf{A} = 0$ возможно в двух случаях: когда коэффициенты какого-либо из столбцов (строк) определителя равны нулю или когда между коэффициентами двух столбцов (строк) имеется линейная зависимость.

Свойства определителя системы нормальных уравнений также влияют и на свойства дисперсий ошибок вычисления параметров движения. Последние, как известно, определяются формулой

$$\sigma_{q_{0j}}^2 = \frac{\mathbf{A}_{jj}}{\det \mathbf{A}} \sigma_R^2, \quad (11.2.4)$$

где $\mathbf{A}_{jj}$ — минор матрицы $\mathbf{A}$ при элементе a_{jj} .

Коэффициенты вида $a_{kj}^* = \frac{\mathbf{A}_{kj}}{\det \mathbf{A}}$ образуют обратную матрицу, обозначаемую $\mathbf{A}^{(-1)}$. Если при небольших изменениях коэффициентов основной матрицы $\mathbf{A}$ коэффициенты ее обратной матрицы $\mathbf{A}^{(-1)}$ изменяются в значительных пределах, то говорят, что такая обратная матрица является неустойчивой.

При малых значениях определителя основной матрицы ее обратная матрица, как правило, оказывается неустойчивой, что приводит к большим дисперсиям ошибок определения параметров движения.

Таким образом, если навигационный метод дает плохо обусловленную матрицу коэффициентов $\|a_{kj}\|$, то можно сказать, что информационные свойства такого метода будут неудовлетворительными.

Аналитическое рассмотрение информационных свойств различных навигационных методов возможно на основе анализа свойств коэффициентов соответствующих матриц. При этом заранее необходимо установить определенные условия, при которых будут анализироваться эти коэффициенты.

За время полета КА проводится много сеансов измерений, внесенных как в пространстве, так и во времени. Окончательные результаты получаются на основании обработки всего имеющегося измерительного материала. Однако данные измерений по одной навигационной точке в течение одного прохода над ней являются как бы первичными, из которых состоит весь ряд опытных данных. Поэтому при анализе информационных свойств навигационных методов естественно использовать анализ свойств коэффициентов матриц систем нормальных уравнений, соответствующих одному проходу КА над одной навигационной точкой.

§ 11.3. ОТКЛИКИ НАВИГАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ НА ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ, ИХ ВАРИАЦИИ НА ОДНОМ ПРОХОДЕ КА

При определении параметров движения используются функциональные связи измеряемых навигационных параметров R_i и искоемых начальных условий движения q_{0j}^* . Эти функциональные зависимости для различных навигационных методов не одинаковы, вследствие чего различные методы доставляют не равноценную информацию о параметрах движения КА. Больше сведений о каком-либо параметре движения можно получить, используя такой навигационный параметр, который вполне определенно и явно реагирует на изменение данного параметра движения.

Способность навигационной функции реагировать на изменение начальных значений параметров движения уместно называть *откликом* функции на изменение параметров движения. Количественно отклик выражается частной производной типа

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}. \quad (11.3.1)$$

По существу, эта характеристика уже использовалась ранее [выражение (10.2.7)] при рассмотрении систем условных и нормальных уравнений.

Совокупность откликов, относящихся к некоторому сеансу измерений, представляется матрицей C (11.2.2). Отклик зависит от типа навигационной функции R_i , от взаимного положения навигационной точки и орбиты и от выбранной системы q_j . Величина отклика меняется с движением КА относительно навигационной точки.

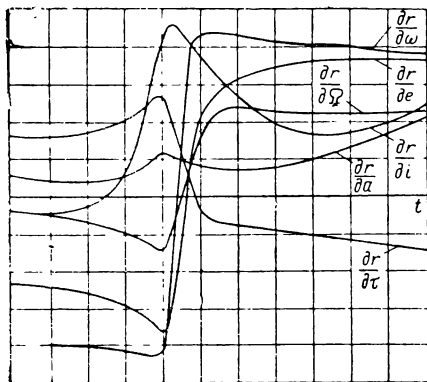


Рис. 11.3.1. Изменение частных производных по параметрам движения в зоне видимости НТ для дальнометрического метода.

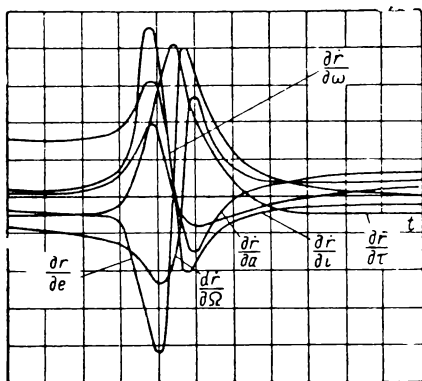


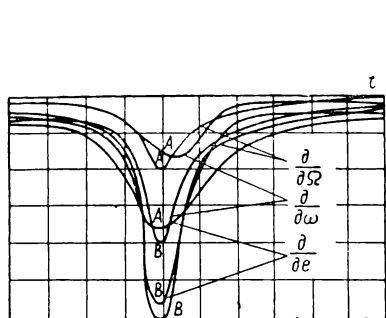
Рис. 11.3.2. Изменение частных производных по параметрам движения в зоне видимости НТ для радиально-скоростного метода.

Для быстрого и надежного измерения некоторого параметра движения было бы желательно, чтобы измеряемый параметр откликался лишь на его изменения. К сожалению, доступные в настоящее время для измерений навигационные параметры — дальность r , радиальная скорость $\dot{r}$, угловые величины A и B и их производные $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — откликаются на изменение всех кеплеровых элементов орбиты, причем в некоторых условиях пропадание откликов или появление линейной зависимости двух из них затрудняет решение навигационных задач.

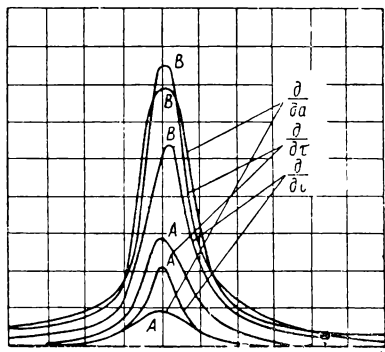
Показательным в этом смысле является рассмотрение вариаций откликов на одном проходе КА в зоне навигационной точки. На рис. 11.3.1 представлены графики откликов дальности на изменение кеплеровых элементов, на рис. 11.3.2 — отклики радиальной скорости, на рис. 11.3.3 — отклики угловых координат и на рис. 11.3.4 — отклики угловых скоростей.

Из графиков видно, что для дальнометрического метода отклики существуют практически на всем интервале времени, соответствующем одному проходу, что свидетельствует примерно об одинаковой ве-

сомости всех измерений. Для скоростных методов, и еще в большей степени для угломерных, по мере удаления от траверзного положения отклики слабеют, следовательно, наибольший вес имеют измерения, выполненные посередине зоны видимости.

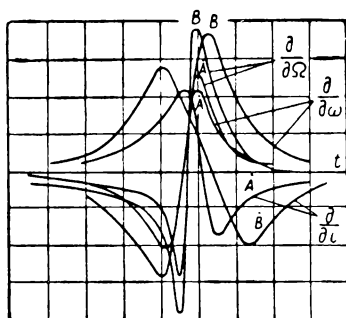


а)

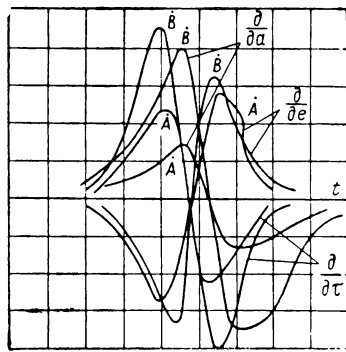


б)

Рис. 11.3.3. Изменение частных производных по параметрам движения в зоне видимости НТ для угломерного метода.



а)



б)

Рис. 11.3.4. Изменение частных производных по параметрам движения в зоне видимости НТ для метода угловых скоростей.

По графикам можно найти точки, где какой-либо из откликов пропадает, а также участки, на которых отклики оказываются парно зависимыми.

Особенности временных зависимостей откликов проявляются в формировании коэффициентов a_{kj} системы нормальных уравнений.

§ 11.4. ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОПОЛОЖЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ТОЧЕК И ОРБИТЫ НА ПОВЕДЕНИЕ ИЗОХРОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩЕЕ ОТСУТСТВИЕ ОТКЛИКА ИЛИ ЛИНЕЙНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ ОТКЛИКОВ

Рассмотрим подробнее, при каких условиях навигационные функции утрачивают отклики или отклики попарно оказываются линейными, что соответствует плохой обусловленности матрицы системы нормальных уравнений.

Примем в качестве начальных условий движения кеплеровы элементы орбиты $i, \Omega, \omega, a, e, M_0$ и рассмотрим случай прохода КА над одной навигационной точкой. Для одного прохода можно считать движение КА в зоне видимости НТ невозмущенным. Выберем прямоугольную геоцентрическую систему координат $OXYZ$ так, чтобы ось OX проходила через восходящий узел орбиты ($\Omega = 0$).

Формулы изохронных производных будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \Omega} &= -r \sin u \cos i, \\
 \frac{\partial x}{\partial \omega} &= -r \sin u, \\
 \frac{\partial x}{\partial i} &= 0, \\
 \frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{r}{a} \cos u, \\
 \frac{\partial x}{\partial e} &= r (C_1 \cos u - C_2 \sin u), \\
 \frac{\partial x}{\partial M_0} &= r C_3 (C_4 \cos u - \sin u), \\
 \frac{\partial y}{\partial \Omega} &= r \cos u, \\
 \frac{\partial y}{\partial \omega} &= r \cos u \cos i, \\
 \frac{\partial y}{\partial i} &= r \sin u \sin i, \\
 \frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{r}{a} \sin u \cos i, \\
 \frac{\partial y}{\partial e} &= r \cos i (C_1 \sin u + C_2 \cos u), \\
 \frac{\partial y}{\partial M_0} &= r C_3 \cos i (C_4 \sin u + \cos u), \\
 \frac{\partial z}{\partial \Omega} &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (11.4.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \omega} &= r \cos u \sin i, \\
\frac{\partial z}{\partial i} &= r \sin u \cos i, \\
\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{r}{a} \sin u \sin i, \\
\frac{\partial z}{\partial e} &= r \sin i (C_1 \sin u + C_2 \cos u), \\
\frac{\partial z}{\partial M_0} &= r C_3 \sin i (C_4 \sin u + \cos u),
\end{aligned}$$

где

$$C_1 = C_2 C_4 - \frac{\cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} - \frac{2e}{1 - e^2},$$

$$C_2 = 2 \sin M + \frac{5}{2} e \sin 2M,$$

$$C_3 = 1 + 2e \cos M,$$

$$C_4 = \frac{e \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta},$$

$$u = \omega + \vartheta,$$

ϑ — истинная аномалия.

Изохронные производные являются тригонометрическими функциями времени. Наибольшая по амплитуде их гармоника имеет период, равный периоду обращения КА. Если время прохождения КА в зоне видимости НТ составляет небольшую долю периода, то изохронные производные можно считать для всего измерительного интервала постоянными:

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_{0j}} = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_{0j}} \right)_{k=k_{cp}},$$

где k_{cp} — одно из фиксированных значений измерительного интервала, например $k_{cp} = 0,5 n$ (n — общее количество измерений).

Представим частные производные $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$ в виде

$$\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} = \sum_{p=1}^6 \frac{\partial R_i}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial q_{0j}}. \quad (11.4.2)$$

Тогда система уравнений (11.2.1) может быть представлена в следующей записи:

$$\Phi^T \Gamma^T \mathbf{P} \Gamma \Phi \Delta = \Phi^T \Gamma^T \mathbf{P} \mathbf{R}, \quad (11.4.3)$$

где $\Gamma = \left\| \frac{\partial R_i}{\partial Q_p} \right\|$ — матрица составляющих градиента навигационного поля.

Матрица изохронных производных является общей для всех навигационных методов и ее свойства определяют общие свойства методов. В отличие от этого свойства градиентной матрицы зависят от вида навигационного параметра, поэтому данная матрица характеризует видовые, индивидуальные свойства методов.

Обратим далее внимание на координатные и скоростные методы. У первых навигационный параметр является функцией только координат $R = R(x, y, z)$, у вторых — также и скорости — $R = R(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Заметим, что свойства разностно-координатных и разностно-скоростных методов во многом определяются свойствами координатных и скоростных. Что же касается остальных методов, то здесь мы не будем их рассматривать.

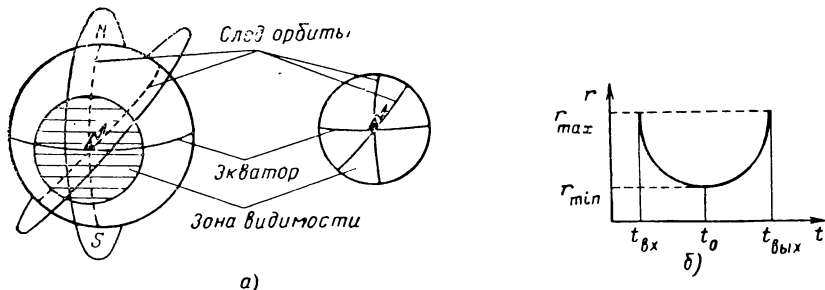


Рис. 11.4.1. Прохождение КА над экваториальной НТ.

Координатная навигационная функция зависит только от текущих координат КА и НТ, поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial q_{0j}} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_{0j}} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_{0j}} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_{0j}}. \quad (11.4.4)$$

Рассмотрим несколько характерных случаев взаимного расположения орбиты КА и НТ.

а) НТ расположена на экваторе, $u = 0$. Тогда

$$\frac{\partial x}{\partial i} = \frac{\partial y}{\partial i} = \frac{\partial z}{\partial i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial R}{\partial i} = 0. \quad (11.4.5)$$

Координатная навигационная функция практически не изменяется при изменении наклонения орбиты, поэтому в матрице $\mathbf{A}$ будут близкими к нулю коэффициенты столбца, содержащего частные производные по i , и матрица $\mathbf{A}$ будет плохо обусловленной. Отсутствие отклика координатной навигационной функции на изменение такого параметра движения, как наклонение орбиты, объясняется тем, что при данном расположении НТ и небольшой протяженности измерительного участка по сравнению с длиной всей орбиты текущие координаты КА изменяются незначительно. На рис. 11.4.1, а показаны случаи прохождения КА над экваториальной НТ при различных углах наклонения орбиты и изображены проекции орбиты на земную поверхность в зоне видимости НТ. На рис. 11.4.1, б представлены соответствующие графики изменения дальности между КА и НТ (без учета вращения Земли). Из рисунков видно, что различным наклонениям соответствует один и тот же график изменения дальности.

Следовательно, имея только экспериментальную кривую дальности, судить по ней о наклонении орбиты при экваториальном расположении НТ не представляется возможным.

б) НТ расположена в точке вертекса, $u = \frac{\pi}{2}$.

Для случая расположения НТ в районе, соответствующем максимальной широте подспутниковой точки (точка вертекса), будем иметь

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -r \cos i, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0.$$

Если $i \rightarrow \frac{\pi}{2}$, то $\cos i \rightarrow 0$ и $\frac{\partial R}{\partial \Omega} \rightarrow 0$.

Это значит, что при высокоширотном расположении НТ навигационная величина практически мало изменяется при изменении долготы восходящего узла Ω . Особенно наглядно это можно представить для случая полярного ИСЗ и расположения НТ на полюсе.

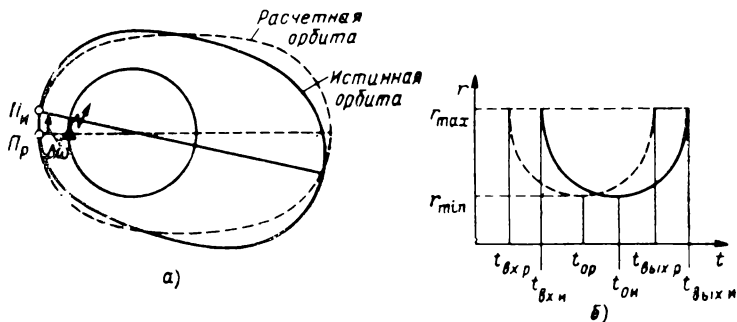


Рис. 11.4.2. К зависимости между параметрами ω и M_0 .

При измерении дальности мы будем иметь картину, совершенно аналогичную рис. 11.4.1, б, только теперь одна и та же кривая изменения дальности будет соответствовать различным значениям долготы восходящего узла.

в) НТ расположена в районе подспутниковой точки, соответствующей перигею орбиты, $\phi = M = 0$.

Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = (1 + 2e) \frac{\partial R}{\partial \omega} \quad (11.4.6)$$

и столбцы матрицы A , содержащие производные по средней аномалии и угловому положению перигея, будут пропорциональными, а $\det A = 0$.

На рис. 11.4.2, а плоскость орбиты изображена в плоскости рисунка, а НТ находится в подспутниковой точке, соответствующей перигею.

Пунктиром показана расчетная орбита и соответственно ей на рис. 11.4.2, б показана расчетная кривая изменения дальности. Допустим, что у истинной орбиты изменилось положение перигея на величину $\Delta\omega$ (сплошная кривая). Тогда истинной орбите будет соответствовать кривая изменения дальности, минимум которой будет смещен по оси времени в сторону опережения, так как теперь спутник в расчетную точку перигея придет раньше. Но точно такая же кривая будет наблюдаться, если истинное время прохождения через перигей изменилось относительно расчетного на величину

$$\Delta\tau = - \frac{\Delta\omega T_0}{2\pi(1+2e)}.$$

В самом деле, из (11.4.6) имеем $\Delta M_0 = \frac{\Delta \omega}{1+2e}$. Но, с другой стороны, по определению $\Delta M_0 = -\frac{2\pi}{T_0} \Delta \tau$, где $\Delta \tau = \tau_{\text{ист}} - \tau_{\text{расч}}$, откуда непосредственно следует

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta \omega} = -\frac{T_0}{2\pi(1+2e)}.$$

Это значит, что в перигее КА окажется ранее расчетного времени, и опытная кривая $r(t)$ сместится влево относительно расчетной. Таким образом, по данным измерений можно установить, что истинные параметры движения ω и M_0 отличаются от расчетных, однако определить поправку в отдельности к каждому из этих параметров не представляется возможным.

Пропорциональность между этими же столбцами наблюдается и при расположении НТ в точке, соответствующей апогею орбиты.

Анализ формул изохронных производных координатных методов показывает, что для случая почти круговых орбит ($e < 0,01$) наблюдается пропорциональность между столбцами матрицы, содержащими частные производные по эксцентриситету e и большой полуоси a , если НТ расположена в перигее или апогее. Для полярных ИСЗ при расположении НТ на 45 параллели равными оказываются столбцы, содержащие производные по наклонению i и долоте восходящего узла Ω .

Рассмотренные примеры поясняют то обстоятельство, что при измерениях на одном проходе имеются особые ситуации во взаимном положении НТ и орбиты, когда матрица **A** оказывается плохо обусловленной.

Переходя к скоростным методам, отметим, что формулы изохронных производных для них могут быть получены дифференцированием (11.4.1) по времени:

$$\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q_{0j}} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x^k}{\partial q_{0j}} \right), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (11.4.7)$$

Так как функции $\frac{\partial x^k}{\partial q_{0j}}$ близки к периодическим, то нули функций $\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q_{0j}}$ и $\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q_{0j}}$ не будут совпадать. Следовательно, матрица изохронных производных скоростных методов не будет особенной в тех же точках, в которых оказывается особенной матрица координатных методов. Это указывает на целесообразность объединения координатных и соответствующих им скоростных методов, если измерения производятся одновременно из одной точки.

Проведенный анализ позволяет выявить следующие общие свойства навигационных методов.

При использовании измерений одной навигационной величины за один проход КА в зоне видимости НТ определитель системы нормальных уравнений значительно меньше своего максимально возможного значения. Причиной этого может быть или одинаковое изменение навигационной величины при изменении различных начальных условий движения, или отсутствие ее изменения при изменении какого-либо отдельного параметра движения.

Сходимость итерационного процесса и точность определения параметров движения при использовании результатов измерений одной навигационной величины на одном проходе будут зависеть от географического расположения НТ. Имеются точки, вблизи которых решение навигационной задачи практически становится невозможным. Так как таких точек несколько, то следует сделать вывод о практической нецелесообразности использования однопараметрических методов на одном проходе.

В зависимости от взаимного расположения НТ и орбиты различные столбцы матриц оказываются нулевыми и различные их пары — пропорциональными. Поэтому эффективным способом улучшения свойств матриц системы нормальных уравнений является объединение матриц измерений одной и той же навигационной величины, если эти измерения проведены в разнесенных точках.

§ 11.5. ВЛИЯНИЕ ВИДА НАВИГАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ НА ГРАДИЕНТНУЮ МАТРИЦУ И НА СТЕПЕНЬ ВЗАИМОСВЯЗИ ОТКЛИКОВ ФУНКЦИИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПАРАМЕТРАМ ДВИЖЕНИЯ

Ранее было показано, что поверхности положения можно рассматривать как уровенные поверхности скалярного поля навигационной функции R и характеризовать его изменение градиентами $\text{grad } R$ (см. § 4.6).

Производные $\frac{\partial R_i}{\partial Q_j}$ выражаются через модуль градиента G_i и коэффициенты γ_{ij} , которые при $j = 3$ в прямоугольной декартовой системе координат являются направляющими косинусами нормали к поверхности положения:

$$\frac{\partial R_i}{\partial Q_j} = G_i \gamma_{ij}.$$

В навигационной практике стараются использовать измерения, характеризующиеся малым изменением градиентов. В соответствии с этим в теории навигации вводится понятие рабочей области системы как области, в пределах которой модуль градиента может изменяться в небольших, заранее обусловленных пределах. Более того, модули градиентов некоторых навигационных методов (например, при использовании дальномеров или высотомеров) вообще не изменяют своей величины (см. § 4.6).

Полагая, что на малом мерном участке модуль градиента не меняется ($|G_i| = \text{const}$), получим следующее выражение для градиентной матрицы:

$$\Gamma = G \begin{vmatrix} P_1 \gamma_{x1} & P_1 \gamma_{y1} & P_1 \gamma_{z1} \\ P_2 \gamma_{x2} & P_2 \gamma_{y2} & P_2 \gamma_{z2} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_n \gamma_{xn} & P_n \gamma_{yn} & P_n \gamma_{zn} \end{vmatrix} \quad (11.5.1)$$

Для координатных методов, считая измерения равноточными и используя (11.4.3), можно найти выражение для члена матрицы системы нормальных уравнений a_{kj} в виде

$$a_{kj} = pG^2 \left[\varphi_{xk} \varphi_{xj} \sum_{i=1}^n \gamma_{xi}^2 + \varphi_{yh} \varphi_{yi} \sum_{i=1}^n \gamma_{yi}^2 + \varphi_{zk} \varphi_{zj} \sum_{i=1}^n \gamma_{zi}^2 + \right. \\ \left. + (\varphi_{xh} \varphi_{yj} + \varphi_{yh} \varphi_{xj}) \sum_{i=1}^n \gamma_{xi} \gamma_{yi} + (\varphi_{xh} \varphi_{zj} + \varphi_{zh} \varphi_{xj}) \sum_{i=1}^n \gamma_{xi} \gamma_{zi} + \right. \\ \left. + (\varphi_{yh} \varphi_{zj} + \varphi_{zh} \varphi_{yj}) \sum_{i=1}^n \gamma_{yi} \gamma_{zi} \right], \quad (11.5.2)$$

где $\varphi_{pj} = \frac{\partial Q_p}{\partial q_{oj}}$, $p = 1, 2, 3$.

Анализ последнего выражения показывает, что для всех членов матрицы данной группы методов измерений множитель перед скобкой будет одинаковым pG^2 .

Если допустить, что градиент на мерном участке орбиты не сохраняет преимущественной ориентации, а навигационный метод не имеет преимущественного отклика на какой-либо параметр орбиты, то коэффициенты γ_{pi} для различных методов будут с равной вероятностью принимать все свои возможные значения (в интервале от $+1$ до -1) и суммы вида $\sum_{i=1}^n \gamma_{pi} \gamma_{qi}$ будут иметь приблизительно равные численные значения. Это значит, что при выборе для различных методов произведения $p_m G_m^2$ в соответствии с условием

$$p_m G_m^2 = 1 \quad (11.5.3)$$

получим матрицы A_m , имеющие одинаковыми по крайней мере соответствующие диагональные элементы $a_{rjj} = a_{sjj}$.

Выражение (11.5.3) показывает, что соотношения между точностями измерений при использовании различных методов определяются модулями градиентов соответствующих поверхностей положения.

Индивидуальность свойств методов определения параметров движения КА определяется выбором измеряемой навигационной величины, т. е. свойствами поверхностей положения, соответствующих этой навигационной величине.

Большинство современных измерительных систем используют измерения дальности r , радиальной скорости $\dot{r}$, угловых координат A, B (азимут и угол места или направляющие косинусы линии наклонной дальности), а также угловых скоростей $\dot{A}$ и $\dot{B}$.

Указанные методы не имеют преимущественного отклика на какой-либо из параметров движения КА, т. е. нельзя сказать, что дальномерный метод лучше реагирует, например, на изменение большой полуоси, чем угломерный, а угломерный в свою очередь лучше реагирует на изменение положения плоскости орбиты и т. д. Каждый из методов примерно в равной степени реагирует на изме-

нение любого из параметров движения. При этом оказывается, что чувствительность методов довольно высокая.

В табл. 11.5.1 приведены значения частных производных различных навигационных величин по параметрам движения Ω , ω , i , a , e , M_0 для орбиты с большой полуосью $a = 6680$ км. В этой таблице угловые параметры выражены в угловых секундах, линейные — в метрах, скорости — в см/сек, угловые скорости — в угловых секундах в секунду.

ТАБЛИЦА 11.5.1

Параметры движения	Методы			
	r [м]	$\dot{r}$ $\left[\frac{\text{см}}{\text{сек}} \right]$	$A+B$ [угл. сек.]	$\dot{A}+\dot{B}$ $\left[\frac{\text{угл. сек}}{\text{сек}} \right]$
Ω''	13	10	9	0,12
ω''	26	19	8	0,22
i''	4,5	9,4	6	0,06
a [м]	0,5	0,1	0,14	5
e	$6,5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^4$
M_0''	27	19	8	0,23

Из таблицы видно, что измерения, например, дальности с ошибкой $\sigma_r = 30$ м, позволяют заметить отклонения в угловых параметрах 2—5 угл/сек, а в большой полуоси — $\sigma_a = 60$ м. Однако реализации высокой чувствительности методов препятствует неоднозначная зависимость изменения навигационной величины от изменения параметров движения, выражающаяся в одинаковости откликов этой величины на изменение различных параметров движения. Это свойство проявляется по-разному у различных методов. Здесь сказываются индивидуальные, видовые свойства навигационных методов.

Для анализа видовых свойств, для их количественной оценки удобно определить степень зависимости изменения навигационной величины при изменении различных пар параметров движения КА. Для такой количественной оценки может использоваться неравенство Буняковского-Коши

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} \right)^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_{0h}} \right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} \frac{\partial R_i}{\partial q_{0h}} \right)^2. \quad (11.5.4)$$

Обозначим

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} \right)^2 = a_{jj}, \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_{0h}} \right)^2 = a_{hh}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}} \frac{\partial R_i}{\partial q_{0k}} = a_{jk}.$$

Тогда коэффициент δ_{jk} , определяемый соотношением

$$\delta_{jk} = \frac{a_{ji} a_{kk} - a_{jk}^2}{a_{jj} a_{kk}}, \quad (11.5.5)$$

будет характеризовать степень пропорциональности между частными производными $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0j}}$ и $\frac{\partial R_i}{\partial q_{0k}}$.

В самом деле, неравенство (11.5.4) превращается в равенство и $\delta_{jk} = 0$, если

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_{0j}} : \frac{\partial R_1}{\partial q_{0k}} = \dots = \frac{\partial R_n}{\partial q_{0j}} : \frac{\partial R_n}{\partial q_{0k}},$$

т. е. если параметры q_{0j} и q_{0k} линейно зависимы через изменения навигационной величины.

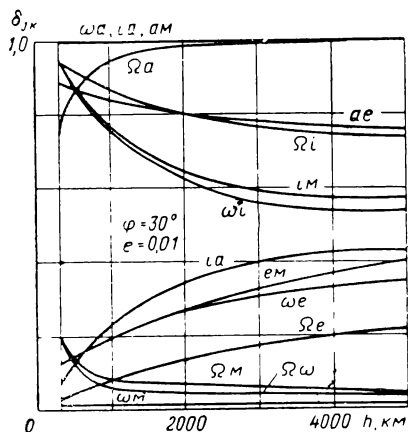


Рис. 11.5.1. Изменение взаимных связей между параметрами движения КА для дальнометрического метода.

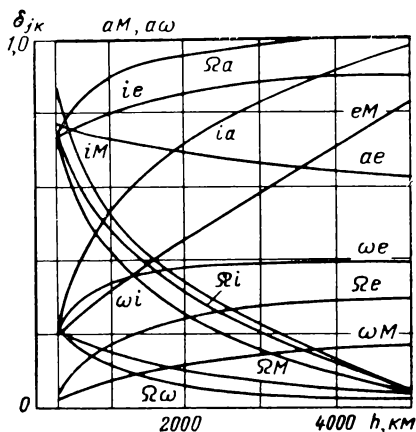


Рис. 11.5.2. Изменение взаимных связей между параметрами движения КА для радиально-скоростного метода.

С другой стороны, $\delta_{jk} = 1$, если $a_{jk} = 0$, т. е. если параметры q_{0j} и q_{0k} независимы.

На рис. 11.5.1 — 11.5.4 показаны графики изменения коэффициентов δ_{jk} от высоты полета КА для различных сочетаний параметров движения дальнометрического, радиально-скоростного, угломерного методов и метода угловых скоростей.

Анализ графиков показывает, что для всех методов практически отсутствует пропорциональность в изменении навигационной величины при изменении параметров ω и a , а также M_0 и a . Наряду с этим слабая связь наблюдается между элементами, характеризующими положение плоскости орбиты Ω и i , и параметрами эллипса a и e .

Значительная пропорциональность для большинства методов наблюдается в параметрах, характеризующих положение начальной точки движения КА (ω) и момента прохождения его через

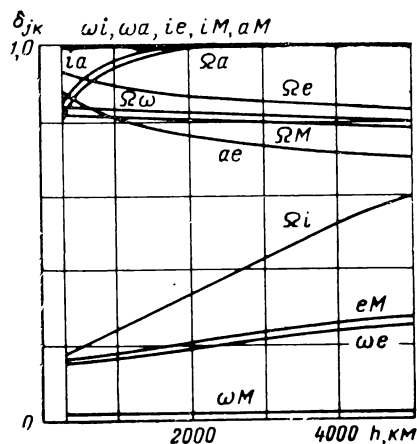


Рис. 11.5.3. Изменение взаимных связей между параметрами движения КА для угломерного метода.

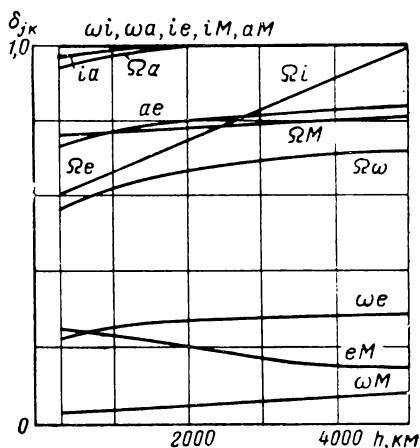


Рис. 11.5.4. Изменение взаимных связей между параметрами движения КА для метода угловых скоростей.

эту точку (M_0). Исключением являются скоростные методы, для которых на больших высотах эта пропорциональность заметно падает. Для дальномерного и радиально-скоростного методов с увеличением высоты полета КА увеличивается пропорциональность между параметрами, характеризующими положение плоскости орбиты.

Наибольшее число комбинаций независимых изменений навигационной величины при изменении параметров движения наблюдается для метода угловых скоростей. Угломерный метод также имеет значительное число комбинаций независимых изменений навигационной величины. С увеличением высоты коэффициенты δ_{jk} практически не изменяются.

§ 11.6. КОМПОЗИЦИЯ СОСТАВА НАВИГАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ УСЛОВИЙ МИНИМИЗАЦИИ ДИСПЕРСИИ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Проведенное выше рассмотрение показало, что при использовании только одной навигационной функции трудно определить все параметры движения с малыми дисперсиями. В случае привлечения нескольких различных функций возникает вопрос о выборе их наилучшей комбинации. Задача выбора оптимального состава измеряемых параметров должна решаться на основе какого-либо критерия. Поскольку информационные свойства навигационных методов связаны со свойствами матриц систем нормальных уравнений, удобно воспользоваться критерием, обеспечивающим такой подбор коэффициентов матриц, при котором ошибки определения параметров движения сводились бы к минимуму.

Пусть мы имеем h функций одних и тех же параметров $q_{01}, \dots, q_{06}$:

$$R_m = R_m(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{06}, t),$$

а также h рядов измеренных значений каждой из этих функций в n точках. Тогда для каждой из функций R_m может быть составлена система нормальных уравнений для определения поправок к параметрам $q_{01}, \dots, q_{06}$, а ошибки определения поправок будут вычисляться по формуле

$$\sigma_{mq_j}^2 = \frac{A_{mjj}}{\det A_m} \sigma_{R_m}^2,$$

где A_{mjj} — минор матрицы A_m , соответствующий элементу a_{mjj} .

Заметим, что матрицы систем нормальных уравнений положительно-определенны, так как определители их всегда больше нуля.

Рассмотрим среди h матриц l таких, у которых соответственно равны диагональные элементы

$$a_{jjr} = a_{jjs}, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad r, s = 1, 2, \dots, l,$$

и не равны недиагональные элементы

$$a_{jkr} \neq a_{jks}.$$

Такие матрицы соответствуют методам, не имеющим преимущественного отклика на какой-либо из параметров движения. К ним относятся все методы, связанные с использованием НТ. В отличие от этих методов есть группа методов, имеющих преимущественный отклик на некоторые параметры движения (измерение высоты, измерение угла на небесное тело и др.).

Матрицы навигационных функций, не имеющих преимущественного отклика на какой-либо из параметров движения, обладают следующим свойством. Диагональная матрица среди матриц с равными соответственно диагональными элементами обеспечивает мини-

мум дисперсий определения параметров движения КА в их совокупности. Обозначив такую матрицу A_0 , можно это свойство выразить аналитически:

$$\frac{A_{jjo}}{\det A_0} \leq \frac{A_{jjs}}{\det A_s}, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad s = 1, 2, \dots, (l-1). \quad (11.6.1)$$

Назовем навигационную функцию R_0 , для которой выполняются условия теоремы, оптимальной. Можно сформулировать следующие интегральные критерии, которым должна удовлетворять оптимальная навигационная функция

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T p^2 \frac{\partial R_0}{\partial q_{0j}} \frac{\partial R_0}{\partial q_{0k}} dt &= 0, \\ \int_0^T p^2 \left(\frac{\partial R_0}{\partial q_{0j}} \right)^2 dt &= \frac{T}{n\sigma_{q_{0j}}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6.2)$$

Для практических целей целесообразно искать решение в виде совокупности известных нам навигационных функций, дающих связь параметров движения с определенными физическими величинами. Тогда условия (11.6.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^n p_{mi}^2 \frac{\partial R_{mi}}{\partial q_{0j}} \frac{\partial R_{mi}}{\partial q_{0k}} &= 0, \\ \sum_{m=1}^l \sum_{i=1}^n p_{mi}^2 \left(\frac{\partial R_{mi}}{\partial q_{0j}} \right)^2 &= \frac{1}{\sigma_{q_{0j}}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.3)$$

где

$$p_{mi} = \frac{1}{\sigma_{R_{mi}}}.$$

Критерии (11.6.3) показывают, что для определения оптимального состава навигационных функций необходимо провести суммирование матриц системы нормальных уравнений отдельных методов с преимущественно отличными по знаку недиагональными элементами.

Задача эта имеет композиционный характер, так как не существует универсальных выражений для матриц, относящихся к отдельным методам. Поэтому объединение матриц следует проводить для вполне определенных условий работы навигационных средств, на основе конкретного анализа величин и знаков недиагональных элементов частных матриц. При суммировании выбранных матриц объединенную матрицу следует максимально приближать к диагональному виду.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинский алфавит

- A — истинный азимут.
 A, A^{-1} — матрица (обращенная матрица) коэффициентов системы нормальных уравнений.
 $\bar{A}$ — вектор переноса начала исходной системы координат.
 $\mathcal{A}$ — оператор преобразования исходной системы координат.
 A_x, A_y, A_z — направляющие косинусы векторов, характеризующих движение КА.
 a — большая полуось эллиптической орбиты КА.
 a — большая полуось трехосного эллипсоида (эллипсоида вращения).
 a^j — компоненты вектора переноса начала исходной системы координат.
 a_{kj}, a_{kj}^* — элемент матрицы (элемент обращенной матрицы) коэффициентов системы нормальных уравнений.
 a_{kj} — элемент матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений при учете частных производных второго порядка от навигационных функций по начальным условиям.
 $\bar{B}$ — вектор переноса начала отсчета к исходной системе координат.
 B — матрица — столбец правых частей нормальных уравнений.
 B_x, B_y, B_z — направляющие косинусы касательных к линиям на поверхности планеты.
 $\mathcal{B}$ — оператор обратного преобразования к исходной системе координат.
 b — малая полуось эллиптической орбиты КА.
 b — вторая полуось трехосного эллипсоида.
 b^j — компоненты вектора переноса начала отсчета к исходной системе координат.
 b_k — элемент матрицы-столбца правых частей нормальных уравнений.
 C — матрица частных производных от навигационных функций по начальным условиям движения.
 c — скорость света.
 c — малая полуось.
 c — малая полуось трехосного эллипсоида (эллипсоида вращения).
 D — диаметр зоны видимости с ОРНТ.
 D — матрица в рекуррентной формуле динамической фильтрации, связанная с предшествующими оценками параметров движения.
 d — длина базовой линии разностно-дальномерной РНС.
 E — эксцентрическая аномалия.

- E_N — навигационное пространство.
- e — эксцентриситет орбиты КА.
- F — сила, приложенная к КА.
- F — частота (низкая) колебаний.
- F_D — доплеровское смещение частоты сигнала.
- f — частота (высокая) колебаний.
- f — межфокусное расстояние.
- f — гравитационная постоянная.
- f_1, f_2, f_3 — коэффициенты разложения в основных формулах тригонометрии на эллипсоиде вращения.
- G — проекция радиуса эллипсоида вращения на экваториальную плоскость.
- $\bar{G}_R$ — градиент поверхности положения для R -го навигационного параметра.
- g — ускорение силы тяжести.
- g_{ih} — компоненты ковариантного фундаментального метрического тензора.
- g^{ik} — компоненты контравариантного фундаментального метрического тензора.
- H — высота над поверхностью планеты.
- H_1, H_2 — энтропия априорного (энтропия апостериорного) состояния объекта.
- h — топоцентрическая угловая высота (угол места).
- h_T — геоцентрическая угловая высота.
- h_i — масштабирующий коэффициент при вычислении весов.
- h_1, h_2, h_3 — коэффициенты разложения в основных формулах тригонометрии на эллипсоиде вращения.
- I — количество информации.
- i — наклонение плоскости орбиты КА.
- k — коэффициент моделирования времени.
- k — модуль эллиптического интеграла.
- k — отношение высоты КА к высоте ОРНТ.
- k^{oj} — единичные векторы.
- l_o — удаленность КА от траверза в момент начала наблюдений.
- M — аномалия средняя.
- M — число Маха.
- m — масса тела.
- m — число параметров, характеризующих состояние КА.
- m — число НТ, образующих сети поверхностей (линий) положения.
- m_{hj} — составляющая элемента матрицы коэффициентов системы нормальных уравнений, учитывающая частные производные второго порядка.
- N — навигационный параметр, непосредственно измеряемый с помощью технических средств.
- N_c — суточное число оборотов орбитальных объектов.
- n — число навигационных измерений.
- n — показатель преломления среды.
- n — число НТ в их системе.
- n — среднее число оборотов за фиксируемый временной интервал.
- $\bar{n}$ — нормаль к поверхности положения.
- $P = \sqrt{e} \sin i$ — параметр геодезической линии.
- $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр орбиты.
- p — параллакс.

- p — параметр (обобщенный), через который выражается уравнение геодезической линии.
 p_i — весовые коэффициенты измерений.
 Q — площадь обзора с КА, отнесенная ко всей площади планеты.
 Q_j — параметры движения навигационной точки.
 Q_j — система промежуточных координат при разворачивании выражений $\frac{\partial R_i}{\partial q_{oj}}$
 q_α — прямолинейные координаты вмещающего пространства.
 q_j — параметры движения КА.
 q_{oj} — начальное значение параметров движения (начальные условия движения) КА.
 R — вектор-столбец разностей измеренного и расчетного значений навигационной функции.
 R_i, R_{oi} — навигационный параметр или навигационная функция (их расчетное значение), относящиеся к i -му измерению.
 R_{oi}^* — оцениваемое значение навигационного параметра или навигационной функции.
 R_o — длина движущегося предмета в системе отсчета, с которой он связан.
 R_o — радиус кривизны орбиты в точке траверза.
 R_Π — радиус планеты.
 R_* — длина движущегося предмета в покоящейся системе отсчета.
 $R_s, R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}$ — параметрические коэффициенты в основных формулах тригонометрии на эллипсоиде вращения.
 r — расстояние между объектом навигации и навигационной точкой.
 $\dot{r}$ — скорость изменения расстояния r .
 $\ddot{r}$ — вторая производная от расстояния r по времени.
 r_i — разность измеренного и расчетного значений навигационного параметра (навигационной функции).
 r_o — расстояние до навигационной точки в траверзе.
 S — длина геодезической линии.
 s — интервал между точками метрического пространства или пространства событий.
 T — период принимаемых колебаний.
 T — продолжительность интервала измерений.
 T — период обращения искусственного спутника.
 T_o, t_o — интервал по движущимся часам и отсчет времени.
 T_*, t_* — интервал по часам системы, относительно которой движется тело, и отсчет времени.
 t — текущее время, временная координата.
 t — часовой угол (в экваториальной системе координат).
 t_o — момент траверза.
 t_θ — момент начала витка (на экваторе).
 U — гравитационный потенциал.
 U_i — изохронная смешанная градиентно-фундаментальная матрица.
 u — аргумент широты.
 u — аргумент эллиптической функции.
 u, v — криволинейные координаты в двумерном пространстве.
 v_r — радиальная составляющая скорости.
 v_t — тангенциальная составляющая скорости.
 v_I, v_{II}, v_{III} — первая, вторая и третья космические скорости.

v_n — начальная скорость выведения на орбиту искусственного спутника.
 v_z — скорость Земли в гелиоцентрической системе координат.
 v_c — скорость навигационного сигнала.
 v_{ci} — скорость i -й спутниковой НТ.
 v_T — тормозной импульс скорости.
 v_n — характеристическая скорость орбитального перехода.
 $\bar{X}$ — радиус-вектор точки в исходной системе координат.
 $x, y, z;$ — геоцентрические прямоугольные координаты.
 x^1, x^2, x^3
 x^j — компоненты радиус-вектора точки в исходной системе координат.
 x^j — криволинейные координаты.
 x_o^j — начальные (априорные) значения геоцентрических прямоугольных координат объекта.
 z — зенитный угол.
 z_r — зенитное расстояние.

Греческий алфавит

α — прямое восхождение.
 α — угол абберации.
 α — угловое расстояние наблюдателя от плоскости орбиты ИСЗ.
 α — угол между плоскостями орбит КА и НТ.
 $\alpha_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial q_{oj}}$ — частная производная от навигационной функции по начальным значениям параметров движения.
 α, β, γ — направляющие углы линии визирования НТ относительно осей прямоугольной системы координат.
 α, β, γ — величины, обратные полуосям a, b, c трехосного эллипсоида.
 α_i^j — элементы матрицы оператора $\mathcal{A}$ преобразования исходной системы координат.
 $\beta = \frac{v}{c}$ — коэффициент относительной скорости.
 β_o — угол возвышения трассы радиосигнала над горизонтом.
 β_i^j — элемент матрицы оператора $\mathcal{B}$ обратного преобразования к исходной системе координат.
 Γ_i — градиентная матрица первого рода.
 $\Gamma_k, ij, \Gamma_{ij}^k$ — символы Кристоффеля первого и второго рода.
 γ — угол места (то же, что и h).
 γ — курс летательного аппарата.
 γ — угол между вектором скорости КА и местной вертикалью (его радиусом-вектором).
 γ — угол между центрами двух планет (планеты и Солнца).
 γ_{ij} — направляющие косинусы нормали к поверхности положения, заданной в декартовой системе координат.
 γ — точка весны (Овен).
 Δ — матрица-столбец поправок к параметрам движения.
 ΔF_o — рефракционная составляющая доплеровского смещения частоты.
 Δr — разность расстояний.
 (Δr) — скорость изменения разности расстояний.

- Δs — разность интервалов между точками метрического пространства или пространства событий.
 Δt — разность временных интервалов.
 ΔU — разность гравитационных потенциалов.
 $\Delta \lambda$ — полоса долгот, обеспечиваемых ОРНТ.
 δ — склонение.
 δ_j, δ^j — поправки к начальным значениям параметров движения (координат).
 δ_{jk} — коэффициент зависимости между парами частных производных от навигационной функции по параметрам движения.
 $\delta \lambda$ — долготная поправка на вращение Земли.
 δq_{oj} — допустимые априорные ошибки начальных условий (параметров движения).
 δt — погрешность в фиксации момента траверза.
 ϵ — сжатие планеты (для Земли $\epsilon = 0,0066934216$).
 e — эксцентриситет эллипсоида вращения.
 E — угол, дополняющий эксцентрическую аномалию E до $\frac{\pi}{2}$.
 ε_i — невязки левых и правых частей условных уравнений.
 $\bar{r}$ — радиус-вектор точки в новой системе координат.
 ξ, η, ζ — относительное гравитационное смещение частоты.
 ξ, η, ζ — прямоугольные геоэксцентрисические координаты.
 ξ^j — компоненты радиус-вектора точки в новой системе координат.
 Θ — угол (обобщенный) между направлением от объекта навигации на НТ и опорным направлением.
 Θ — центральный угол между направлениями на НТ и на объект навигации.
 Θ — угловая дальность траектории спуска с орбиты.
 ϑ — истинная аномалия.
 ϑ — угол между центральной плоскостью траектории сигнала и плоскостью орбиты.
 θ — истинный азимут (то же, что и A).
 K_R — корреляционная матрица ошибок измерений.
 K_q — корреляционная матрица ошибок определения параметров движения.
 Λ — разность долгот.
 λ — долгота.
 λ — длина волны.
 λ_a — долгота подспутниковой точки в начале витка (на экваторе).
 M — матрица составляющих коэффициентов системы нормальных уравнений, учитывающих частные производные второго порядка.
 $\mu = f \cdot m_{\text{п}}$ — произведение гравитационной постоянной на массу планеты (для Земли $\mu = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2$).
 $\mu = \text{tg}^2 i$ — параметр геодезической линии.
 Π_i — градиентная матрица второго рода.
 P — весовая матрица измерений.
 ρ — расстояние, исчисляемое от начала координат.
 ρ_3 — радиус-вектор земного эллипсоида.
 Σr — сумма расстояний от объекта навигации до двух НТ.
 $(\Sigma \dot{r})$ — скорость изменения суммы расстояний.
 σ — угол относительно оси мира.
 σ — уклонение местной вертикали по широте.
 σ, μ — ортогональные координаты в искривленном пространстве.

- $\sigma_{R_i}^2$ — дисперсия измерения навигационного параметра.
- $\sigma_{q_{oj}}^2$ — апостериорная дисперсия параметров движения (начальных условий движения) КА.
- τ — интервал собственного времени.
- τ — уклонение местной вертикали по долготе.
- τ_0 — момент прохождения искусственным спутником узла орбиты (или перицентра).
- Φ — фундаментальная матрица первого рода.
- φ — широта.
- ρ, φ, λ — геоцентрические сферические координаты.
- φ_n, λ_n — географические координаты проекции объекта навигации.
- φ_c, λ_c — географические координаты подспутниковой точки.
- φ_{pj} — элемент фундаментальной матрицы первого рода.
- Ψ_p — фундаментальная матрица второго рода.
- ψ — путевой угол летательного аппарата.
- ψ — амплитуда от u при модуле k эллиптического интеграла.
- ψ — угол между вектором скорости КА и направлением на НТ.
- ψ — угол между местной вертикалью и направлением оси мира.
- Ω — долгота восходящего узла орбиты.
- Ω — угловой размер планеты (Солнца).
- Ω_3 — угловая скорость вращения Земли.
- ω — угловое расстояние перицентра от узла.
- ω — угол между направлением на звезду и на центр планеты (Солнца).
- ω_i — круговые частоты вращения орбитальных НТ и КА.
- $\omega_{\odot}$ — скорость годового обращения Земли вокруг Солнца.

I. Выражения для g^{ik} и Γ_{ij}^k

Контравариантные компоненты g^{ik} определяются через фундаментальный определитель g и алгебраические дополнения его элементов G_{ik} [см. (3.4.2)]:

$$g^{ik} = \frac{1}{g} G_{ik}. \quad (I.1)$$

Фундаментальный определитель при этом равен:

$$g = \begin{vmatrix} g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\lambda} \\ g_{\lambda\varphi} & g_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = g_{\varphi\varphi} g_{\lambda\lambda} - (g_{\varphi\lambda})^2, \quad (I.2)$$

а адъюнкты G_{ik} даются следующей матрицей:

$$G_{ik} = \begin{vmatrix} g_{\lambda\lambda} & -g_{\lambda\varphi} \\ -g_{\varphi\lambda} & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}. \quad (I.3)$$

Для нахождения символов Γ_{ij}^k используется общее выражение их через g^{ik} и $\Gamma_{k,ij}$ [см. (3.4.5)]:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{t=1}^n g^{kt} \Gamma_{t,ij}, \quad (I.4)$$

из которого следует, что:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} &= g^{\varphi\varphi} \Gamma_{\varphi, \varphi\varphi} + g^{\varphi\lambda} \Gamma_{\lambda, \varphi\varphi}, \\ \Gamma_{\varphi\lambda}^{\varphi} &= g^{\varphi\varphi} \Gamma_{\varphi, \varphi\lambda} + g^{\varphi\lambda} \Gamma_{\lambda, \varphi\lambda}, \\ \Gamma_{\lambda\lambda}^{\varphi} &= g^{\varphi\varphi} \Gamma_{\varphi, \lambda\lambda} + g^{\varphi\lambda} \Gamma_{\lambda, \lambda\lambda}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\lambda} &= g^{\lambda\varphi} \Gamma_{\varphi, \varphi\varphi} + g^{\lambda\lambda} \Gamma_{\lambda, \varphi\varphi}, \\ \Gamma_{\varphi\lambda}^{\lambda} &= g^{\lambda\varphi} \Gamma_{\varphi, \varphi\lambda} + g^{\lambda\lambda} \Gamma_{\lambda, \varphi\lambda}, \\ \Gamma_{\lambda\lambda}^{\lambda} &= g^{\lambda\varphi} \Gamma_{\varphi, \lambda\lambda} + g^{\lambda\lambda} \Gamma_{\lambda, \lambda\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

II. Выражения для S и Λ с учетом высших членов разложения

В гл. 6 были найдены выражения для S и Λ в виде степенных рядов [см. формулы (6.3.34) и (6.3.61)], из которых далее были получены зависимости (6.3.38) и (6.3.62), содержащие члены по k^4 . При табулировании функций $\Phi_1 = R_s E(\psi, i)$ и $\Phi_2 = R_{\lambda_1} \Pi(\psi, \mu, i) - R_{\lambda_2} F(\psi, i)$, выполненном на ЦВМ, потребовалось использовать более высокие члены разложения. Ниже приводятся выражения для S и Λ с учетом высших членов разложения.

Длина геодезической линии S имеет выражение:

$$S = R_s \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (f_1 \psi_i + f_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + f_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i + f_4 \sin^5 \psi_i \cos \psi_i), \quad (\text{II.1})$$

где

$$f_1 = 1 - f_2;$$

$$f_2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{3}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6;$$

$$f_3 = \frac{1}{32} k^4 + \frac{5}{284} k^6.$$

$$f_4 = \frac{1}{96} k^6;$$

Разность долгот Λ выражается в виде:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} [h_1 \psi_i + h_2 \sin \psi_i \cos \psi_i + h_3 \sin^3 \psi_i \cos \psi_i + h_4 \arctg(\sec i \operatorname{tg} \psi_i) + h_5 \sin^5 \psi_i \cos \psi_i], \quad (\text{II.2})$$

где

$$\begin{aligned} h_1 = R_{\lambda_1} & \left[\frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{16} k^4 (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 i) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{128} k^6 \left(1 - \frac{4}{3} \operatorname{ctg}^2 i + \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^4 i \right) \right] \operatorname{ctg}^2 i - \\ & - R_{\lambda_2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{5}{256} k^6 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= R_{\lambda_2} \left(\frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 \right) - R_{\lambda_1} \times \\
&\quad \times \left[\frac{3}{16} k^4 + \frac{15}{128} k^6 \left(1 - \frac{4}{3} \operatorname{ctg}^2 i \right) \right] \operatorname{ctg}^2 i; \\
h_3 &= R_{\lambda_2} \left(\frac{3}{32} k^4 + \frac{25}{384} k^6 \right) - R_{\lambda_1} \frac{5}{64} k^6 \operatorname{ctg}^2 i; \\
h_4 &= R_{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \operatorname{ctg}^2 i + \frac{3}{8} k^4 \operatorname{ctg}^4 i - \frac{5}{16} k^6 \operatorname{ctg}^6 i \right) \cos i; \\
h_5 &= R_{\lambda_2} \frac{5}{96} k^6.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел, 1905, Собрание научных трудов, «Наука», 1965, т. I, стр. 7.
2. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности, 1916, Собрание научных трудов. «Наука», 1965, т. I, стр. 452.
3. Рынин Н. А. Теория космического полета. АН СССР, 1932.
4. Штернфельд А. А. Введение в космонавтику, ОНТИ, 1937.
5. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим интегралам. Изд-во АН СССР, 1941.
6. Витман А. И. Решение геодезических задач на большие расстояния. Сборник научно-технических и производственных статей, вып. 12. Геодезиздат, 1945.
7. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Гостехиздат, 1947—1948.
8. Ратц Б. Г., Кривоносов Н. К. Радионавигация, ч. III «Курс самолетовождения». Воениздат, 1947.
9. Ющенко А. П. Сетки сферических окружностей и гипербол для радиодальномерных определений. «Записки по гидрографии», 1947.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
11. Оберт Г. Пути осуществления космических полетов. Оборонгиз, 1948.
12. Белобров А. П., Сакеллари Н. А. Навигация, ч. I, «Курс навигации и лонин». Воениздат, 1951.
13. Рашевский К. П. Курс дифференциальной геометрии. Гостехиздат, 1956.
14. Lowrence L. «ASTRO — an artificial celestial Navigation system», «Jour. of the Franklin Institute», monographs, 1956, mon. № 2.
15. Колмогоров А. Н. Теория передачи информации. Сборник сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства. Изд-во АН СССР, 1957.
16. Котельников В. А., Дубровин В. М., Морозов В. А., Ржигга О. Н., Шаховской А. М. Использование эффекта Допплера для определения параметров орбиты искусственных спутников Земли. «Радиотехника и электроника», 1958, № 7.
17. Морозов В. П. Методы решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида, ВИА им. В. В. Куйбышева, 1958.
18. Попов П. И., Баев К. Л., Воронцов-Вельяминов Б. А., Куницкий Р. В. Астрономия. Учпедгиз, 1958.
19. Шкловский И. С. Оптические методы наблюдения искусственных спутников Земли. В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. I, изд-во АН СССР, 1958.
20. Альперт Я. Л. Распространение радиоволн и ионосфера. Изд-во АН СССР, 1960.
21. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1960.
22. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. Физматгиз, 1960.

23. Guier W. H., Weiffenbach G. C. A satellite doppler navigation system, Proc. IRE, 1960, № 4.
24. Железнов Н. А. Некоторые вопросы информационных электрических систем, ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1960.
25. Красавцев Б. И., Хлюстин Б. П. Мореходная астрономия. «Морской транспорт», 1960.
26. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Некоторые вопросы управления в межпланетном пространстве. В сб. «Искусственные спутники земли», вып. 5, изд-во АН СССР, 1960.
27. Spies O. R. A satellite doppler navigation methods, Ballistic Missiles and Technology, N.-Y.-Lnd, 1960, p. 73.
28. Энеев Т. М., Платонов А. К., Казакова Р. К. Определение параметров орбиты искусственного спутника Земли по данным наземных измерений, в сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, Изд-во АН СССР, 1960.
29. Погорелов Д. А. Теория кеплеровых движений летательных аппаратов, Физматгиз, 1961.
30. Рытов С. М. О некоторых релятивистских явлениях в астронавигации, в сб. «Новые проблемы физики», «Знание», 1961.
31. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
32. Астафьев Г. П., Шебшаевич В. С., Юрков Ю. А. Радиотехнические средства навигации летательных аппаратов. Изд-во «Советское радио», 1962.
33. Вахнин В. М. Влияние орбитального движения Земли на измерения радиометодами дальности и скорости в космическом пространстве, в сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13. Изд-во АН СССР, 1962.
34. Бэттин Р. Х. Статистический метод оптимальной навигации для космических полетов. «Журнал американского ракетного общества» (пер.), 1962, т. 32, № 11.
35. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. Изд-во иностранной литературы, 1962.
36. Вершинский А. В. К вопросу использования ИСЗ для навигации. Труды ВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, вып. 962, 1962.
37. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1962.
38. Типугин В. Н., Вейцель В. А. Радиоуправление. Изд-во «Советское радио», 1962.
39. Аким Э. Л., Энеев Т. М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений, «Космические исследования». Изд-во АН СССР, т. I, вып. I, 1963.
40. Беррот А., Хофман В. Космическая геодезия. Изд-во иностранной литературы, 1963.
41. Брыков А. В. Оценка влияния корреляции между измерениями на точность результатов обработки. В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, Изд-во АН СССР, 1963.
42. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений, Физматгиз, 1963.
43. Дубошин Г. Н., Охотимский Д. Е. Некоторые проблемы астродинамики и небесной механики. «Космические исследования», т. I, вып. 2, АН СССР, 1963.
44. Жуков-Верижников Н. Н. и др. Биологический аспект теории относительности. «Авиация и космонавтика», 1963, № 2.

45. Котельников В. А., Дубинский Б. А., Кислик М. Д., Цветков Д. М. Уточнение астрономической единицы по результатам радиолокации планеты Венера в 1961 г. В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 17, изд-во АН СССР, 1963.
46. Самойлович Г. В. Система параметров для описания орбит космических аппаратов. В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, изд-во АН СССР, 1963.
47. Управление полетом космических аппаратов. Сб. статей под ред. Крисса П. Ж. и Кузнецова Л. И. Изд-во иностранной литературы, 1963.
48. Чарный В. И. Об изохронных производных. В сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, вып. 16, 1963.
49. Шебшаевич В. С. Некоторые вопросы теории навигации. ДАН СССР, 1963, т. 151, № 6.
50. Эрик К. Космический полет т. I. Физматгиз, 1963.
51. Воробьев Л. М. Навигация космических кораблей. Воениздат, 1964.
52. Гордеев Л. И., Заколюдажный В. П., Суворов Е. Ф., Фуфаев В. А., Чуров Е. П. Космические маяки в навигации. Воениздат, 1964.
53. Вебер Дж. Гравитационные волны. В сб. «Гравитация и относительность», изд-во «Мир», 1965.
54. Пономарев В. М., Теория управления движением космических аппаратов. Изд-во «Наука», 1965.
55. Селезнев В. П., Кирст М. А. Системы навигации космических летательных аппаратов. 1965.
56. Хорошавцев В. Г. Расчет частных производных от характеристик движения по начальным условиям. «Космические исследования», АН СССР, т. III, вып. 3. 1965.
57. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Физматгиз, 1965.
58. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Изд-во «Наука», 1966—1967.
59. Беттин Р. Наведение в космосе. Изд-во «Машиностроение», 1966.
60. Врескман J. A public Navsat system, «Space/Aeronaut», 1966, № 6.
61. Бычков С. И., Лукьянов Д. П., Назимок Е. Н., Олянюк П. В., Сергеев Н. К., Шебшаевич В. С., Юрков Ю. А. Космические радиотехнические комплексы. Изд-во «Советское радио», 1966.
62. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд-во «Наука», 1966.
63. Gausler J. S. Radar altimeter for orbital applications, Proc. 6-th Internat. Sympos. Space Technol. & Sci., Tokyo, 1966.
64. Каверзнев К. М. Определение положения космического корабля. «Космические исследования», АН СССР, 1966, т. IV, вып. 2.
65. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Изд-во «Наука», 1966.
66. Резников Б. А. О применении метода динамической фильтрации к задачам определения траекторий космических аппаратов. «Космические исследования», АН СССР, 1966, т. IV, вып. 4.
67. Перевезенцев Е. Н. Об активном варианте угломерно-дальномерной навигационной спутниковой системы. Труды ЦНИИМФ, 1966, вып. 69.
68. Рукман Г. П., Юхвидин Я. А. О возможности экспериментальной проверки релятивистского эффекта «путешествующих часов» с по-

- мощью квантовых стандартов частоты и времени. «Космические исследования», 1966, т. IV, вып. 4.
69. Сильвестров С. Д., Корниенко А. И., Лазарев В. М., Паншин М. И. Радиотехнические методы и системы измерения параметров движения объектов. ВИА им. Ф. Э. Дзержинского, 1966.
 70. Скобелъцын Д. В. Парадокс близнецов теории относительности. Изд-во «Наука», 1966.
 71. Стирнс Э. Космическая навигация. Воениздат, 1966.
 72. Ястребов В. Д. Определение орбиты искусственного спутника Земли по данным измерений на больших интервалах времени, «Космические исследования». АН СССР, 1966, т. IV, вып. 2.
 73. Алешин В. И., Бажинов И. К., Мельбард В. Н. Исследование траекторий полета к Луне и возвращения на Землю. «Космические исследования». АН СССР, 1967, т. V, вып. 6.
 74. Басов Н. Г., Борисенко М. И., Власов В. П., Дубонос С. П., Иванов Н. Е., Страховский Г. М., Федоренко Г. М., Чихачев Б. М. Опыт работы молекулярного генератора на искусственном спутнике Земли. «Космические исследования», 1967, т. V, вып. 4.
 75. Белавин О. В. Основы радионавигации. Изд-во «Советское радио», 1967.
 76. Васильев В. А. Об автономном определении параметров движения космических аппаратов. «Космические исследования», 1967, т. V, вып. 6.
 77. Литвин-Седой М. З. Управление космическими кораблями. Изд. МГУ, 1967.
 78. Смирновский А. Ф. Радионавигационные средства, т. V, «Курс кораблевождения», Гидрографическое управление МО СССР, Л. 1967.
 79. Тихонравов М. М., Раушенбах Б. В., Скуридин Г. А., Вайсберг О. А. 10 лет исследования космоса в СССР. «Космические исследования», 1967, т. V, № 5. Изд-во «Мир».
 80. «Фундаментальные постоянные астрономии», пер. под ред. Подобеда В. В. Изд-во «Мир», 1967.
 81. Шебшаевич В. С. Основы теории пространственной навигации. Изд. МО, 1967.
 82. Шебшаевич В. С., Клим В. Е. Кинематические соотношения при кеплеровском движении двух материальных точек. В сб. «Вопросы теории радионавигационных систем». Изд. МО, 1967.
 83. Альтман С. Анализ орбитальных движений методом годографа. Изд-во «Мир». 1968.
 84. Воробьев Л. М. Астрономическая навигация летательных аппаратов. Изд-во «Машиностроение», 1968.
 85. Гуткин Л. С., Борисов Ю. П., Валуев А. А., Зиновьев А. Л., Лебедев В. Л., Первачев С. В., Полищук Е. П., Пономарев Д. А. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами. Изд-во «Советское радио», 1968.
 86. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами, некоторые теоретические вопросы. Изд-во «Наука», 1968.
 87. «Космонавтика» (маленькая энциклопедия). Изд-во «Советская энциклопедия», 1968.
 88. Крассовский Н. Н. Теория управления движением. Изд-во «Наука», 1968.
 89. Одинцов В. А. Радионавигация летательных аппаратов. Изд-во «Машиностроение», 1968.
 90. «Пилотируемые космические корабли», пер. с англ. Изд-во «Машиностроение», 1968.
 91. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. Изд-во «Наука», 1968.

92. Ч а р н ы й В. И. О вторых производных параметров движения по начальным условиям. «Космические исследования». Изд-во АН СССР, 1968, т. VI, вып. 2.
93. А г а д ж а н о в П. А., Д у л е в и ч В. Е., К о р о с т е л е в А. А. (ред.) Космические траекторные измерения. Изд-во «Советское радио», 1969.
94. Ш е б ш а е в и ч В. С., Р о м а н о в Л. М., Н е в о л ь к о М. П. Методы определения параметров движения космических аппаратов по выборке полного и нарастающего объемов с использованием производных **второго** порядка от навигационных функций по начальным условиям. «Космические исследования». Изд-во АН СССР, 1969, т. VII, вып. 4.
95. Б о г у с л а в с к и й И. А. Методы навигации и управления по неполной статистической информации. Изд-во «Машиностроение», 1970.
96. М и л л е р Дж. Э. (ред.) Навигация, наведение и стабилизация в космосе, пер. с англ. Изд-во «Машиностроение», 1970.
97. С и л ь в е с т р о в С. Д., Л а з а р е в В. М., К о р н и е н к о А. И., П а н ш и н М. И. Точность измерения параметров движения космических аппаратов радиотехническими методами. Изд-во «Советское радио», 1970.
98. Э с к о б а л П. Методы определения орбит. Изд-во «Мир», 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация 119
Автономность методов навигации 14
Азимут истинный 24
Акселерометр 14
Алгоритм обработки измерений 233
— — — по полной выборке 241, 243
— — — по выборке нарастающего объема 251
— — — с учетом производных второго порядка 248
Аномалия истинная 22, 7
— средняя 37
— эксцентрическая 23, 27, 38
Аппарат космический 4
Апсид линия 19, 21
Аффинор (оператор преобразования) 20

База разностно-дальномерной системы 90, 98, 176

Вектор переноса начала координат 20
Взаимосвязь между парами частных производных от навигационной функции по параметрам движения 271
Восхождение прямое 22, 24
Время 42
— собственное 55
Выборка измерений 233
Высота угловая 24
Высотометр 13

Геометризация 6
— динамических связей 29
— процессов, вызывающих искривление траектории сигналов 214
Годограф орбитальный 28
Градиент поля навигационного параметра 88

Дальномеры 13
Дальность 67
Движение относительное звеньев РНС 6
Детерминированность траектории навигационного сигнала 46
Дисперсия апостериорная параметров движения 257
— измерений навигационного параметра 236
Допплера частота 105

Задачи навигации космических аппаратов 9
Звено навигационной системы 6

Избыточность навигационной информации 232
Измерение навигационное абсолютное 52
— — относительное 52
— —, метод геометрический дальномерный 12, 170
— —, — — разностно-дальномерный 12, 175
— —, — — радиально-скоростной 12, 179
— —, — — угломерный 12, 181
— —, — — угломерно-дальномерный (траверзный) 184
— —, — — разностно-дальномерно-скоростной 12
— —, — — угломерно-скоростной 12
— —, — — линейного ускорения 14
— —, метод технический, акустический 13
— —, — —, гравитационный 13, 205
— —, — —, магнитный 13
— —, — —, оптический 13, 201

- — — — —, радиационный 13
- — — — —, радиотехнический 13, 56, 159
- Импульс тормозной 197
- Иноопределение 64, 159
- Интервал пространственно-временной 44
- Информация навигационная 4, 43
 - — — апостериорная 233, 257
 - — — априорная 233, 252
- ИСЗ навигационный 11, 162
- Искривленность навигационного пространства 48, 124, 215, 222
- Квадратичная форма первая 129
- Квадратов наименьших метод 95, 233, 238, 254
- Кеплера уравнение 23
- Классификация методов измерений 12
- Компаратор навигационный 44, 58
- Композиция состава навигационных функций 273
- Координаты точки мерного пространства 16
- Координация разномасштабных сетей поверхностей положения 100
- Коррекция траектории 9, 210
- Косинусы направляющие 73
- Коэффициент масштабный моделирования времени 51
- Коэффициенты весовые 236, 268
 - системы нормальных уравнений 239, 258
- Критерий минимума дисперсии определяемых параметров 233
 - — — — —, оптимизация состава измерений 274
- Линеаризация навигационных функций 236, 247
 - сетей поверхностей положения 97
- Линия геодезическая 15, 123
 - мировая 44
 - положения 48, 66, 73
 - прямая 15
- Маневрирование КА 10, 210
- Масштаб, релятивистское изменение длины 113
 - — — — — времени 113
- Матрица весовая 250
 - градиентная первого рода 93, 268
 - второго рода 94, 249
 - градиентно-фундаментальная 248
 - корреляционная ошибок измерения 250
 - — — — — ошибок определения параметров движения 251
- коэффициентов системы нормальных уравнений 239
- — — — —, связанная с предшествующими оценками 251
- фундаментальная первого рода 93
- — — — — второго рода 93
- частных производных навигационных функций по начальным условиям 248, 258
- Местоопределение КА 241
- Метод измерений радионавигационных, временной 52, 178
 - — — — —, доплеровский дифференциальный 179
 - — — — —, — интегральный 178
 - — — — —, — траверзный 184
 - — — — —, фазовый 52, 100, 230
 - — — — —, частотный 52
 - — — — —, исключения Гаусса 243
 - — — — — максимального правдоподобия 233
 - — — — — наименьших квадратов 238
 - — — — — орбитальных годографов 28
- Модели геометрических фигур планет 123
- Моделирование времени 51
- Наблюдаемость навигационной точки 81, 163
- Навигация космическая 4, 6
 - — — межпланетная 199
 - — — околопланетная 159
 - — — припланетная 123
 - — — — —, методы 12
 - — — — —, технические средства 13
- Неоднозначность навигационных определений 68, 100
- Неравенство Буняковского — Коши 270
- Неустойчивость матрицы системы нормальных уравнений 259
- Нормаль к поверхности положения 88
- Область рабочая навигационной системы 268
- Обусловленность матрицы системы нормальных уравнений 259
- Операторы преобразования координат 20
- Определение навигационное 4
 - навигационно-пространственное 50
 - навигационно-временное 51
 - координат КА 159
 - параметров движения КА, статистические методы 232
- Определитель фундаментальный 49

Определяемость КА 265
 Оптимизация поверхностей положения 96
 Орбита НИСЗ 162
 Ориентация осей КА 10
 Отклик навигационной функции на изменение начальных значений параметров движения 260
 Ошибка навигационных измерений динамическая 254
 — — — из-за нестабильности эталонов времени 175
 — — — рефракционная 110

 Параллакс 166, 182
 Параметр геодезической линии 131
 — навигационный 5, 65
 — — вторичный 53, 66, 96
 — — первичный 53, 66
 — — , оцениваемое значение 246
 — — , расчетное значение 252
 — орбиты фокальный 37
 — траектории навигационного сигнала обобщенный 50
 Параметры движения 36
 — — , определение 232
 Пеленг 71, 181
 Переходы межорбитальные 212
 Пилотирование автоматическое 4
 Планирование полета навигационное 9
 Поверхность положения 66
 Плоскость орбиты 22, 185
 Подлет к планете 194
 Поле гравитационное 6, 50
 — навигационных параметров 88
 Полюсы аппроксимации 254
 Полуось эллипса большая 23, 40, 215
 — эллипсоида вращения большая 124
 — — — малая 124
 Поправки к начальным значениям параметров движения 236
 Посадка на планету 10, 194
 Постоянная гравитационная 37
 Построение местной вертикали 13, 220
 Потенциал гравитационный 50
 Преобразования метрических пространств 16
 — Галилея 34, 103
 — Лоренца 35, 103
 Производительность информационная навигационного метода 256
 Производные от навигационных функций 6, 92, 236, 247, 258

Пропорциональность между частными производными от навигационных функций по начальным условиям 271
 Пространство вмещающее 49, 124, 215, 222
 — евклидово 7
 — инерциальное 19
 — искривленное 123, 214, 222
 — мерное 15
 — навигационное 47
 — положения 66
 — скоростей 29
 — событий 33
 — ускорений 31
 — фазовое 36

 Радиальная скорость 70, 179
 Радиовысотомер 161
 Размер угловой планеты 201
 Разность дальностей 68, 175
 Разность радиальных скоростей 13
 Расчеты вручную, таблицы функций 156
 Ретрансляция сигналов 13, 60, 161
 Решаемость навигационной задачи 240, 257

 Самоопределение по орбитальным РНТ 79, 159
 — по планетным РНТ 191
 Сближение КА 10
 Свойства навигационных методов общие 95, 263
 — — — видовые 95, 265
 — основных навигационных функций 74, 79
 Связанность системы координат 18
 Сеанс измерений 13
 Сети поверхностей положения 96
 — линий положения 223
 Сигнал навигационный 6, 12, 45
 Символы Кристоффеля второго рода 49
 — — первого рода 17, 49
 Синхронизация часов, разнесенных в пространстве 11, 51
 Система единого времени 51
 — координат геоцентрическая экваториальная 21, 23, 25, 27
 — — — орбитальная, 21, 27
 — — геоэктоцентрическая 25, 27
 — — топоцентрическая 23, 24
 — — инерциальная 33
 — — , классификация 17
 — навигационная 44
 — орбитальных навигационных точек 162

— уравнений нормальных 239
— — — — — условных 237
Склонение 22, 24, 203
Скорость космическая первая, вторая, третья 109
— радиальная 77, 79, 179
— тангенциальная 77
— сигнала групповая 46, 223, 229
— — фазовая 223, 229
— характеристическая орбитального перехода 212
Смещение перицентра орбиты спутника 122
— частоты гравитационное 111
— — доплеровское 104
— — — , поперечная составляющая 105
Согласование начал отсчета пространственных координат и времени 168
— разномасштабных сетей поверхностей положения 101
Состав измерений 208, 273
Спуск с орбиты 10, 197
Стабилизация на орбите 10
Стабильность эталонов времени 175
Сумма дальностей 69

Тензор фундаментальный метрический 17, 49
Теория навигации общая 8, 41
Теория пространства, времени, тяготения 41
Течение времени в космическом полете 116
Точка навигационная 5, 44
— — орбитальная 74, 79, 168
— мировая (точка — событие) 16, 33, 44
Траверз 77, 106
— , момент прохождения 107
— , расстояние кратчайшее 106
Траектория сигнала 8, 44
Тригонометрия на эллипсоиде вращения 129

Угловая скорость 14
Угол зенитный 182
— между направлениями на центры планет 202

— — — — — планеты и звезды 203
— места 24
— часовой 25
Угломер 14
Удаленность от траверза в момент начала наблюдений 106
Уклонение местной вертикали 24, 26, 27
Уравнения дифференциальные геодезических линий 49, 129
— навигации обобщенные 54, 144, 217, 230
Условия начальные движения КА 37
Усреднение дискретизируемых навигационных параметров 253
Устройство сравнивающее 44
Уточнение параметров движения КА 234, 245

Фильтрация динамическая, 233, 250
Функционал 238, 246
Функции навигационные 8, 65
— — как инварианты координатных преобразований 84
— — при самоопределении в межпланетном пространстве 201

Характеристики метрических свойств пространства 17, 124

Циклы итерационные, приближение 240

Частота Допплера 105

Эксцентриситет орбиты эллиптической 23, 215
— эллипсоида вращения 124
Элемент матрицы системы нормальных уравнений 239
Элементы орбиты КА 37, 40
Энтропия пространственно-временного состояния КА 256
Эталон времени 6, 114
— длины 114
Эфемеридная информация 168
Эффекты теории относительности 102

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	4
ГЛАВА 1.	
ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ	
§ 1.1. Задачи и особенности навигации космических аппаратов . .	9
§ 1.2. Классификация методов измерений, используемых в навигации космических аппаратов	12
§ 1.3. Технические средства космической навигации	13
ГЛАВА 2.	
МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	
§ 2.1. Пространства разной мерности и их использование в космической навигации	15
§ 2.2. Метрические пространства	16
§ 2.3. Пространство событий	33
§ 2.4. Фазовые пространства	36
ГЛАВА 3.	
ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НАВИГАЦИИ	
§ 3.1. Об основах общей теории навигации	41
§ 3.2. Навигационная информация	43
§ 3.3. Навигационный сигнал	45
§ 3.4. Навигационное пространство	47
§ 3.5. Навигационно-пространственные и навигационно-временные определения	50
§ 3.6. Обобщенное уравнение навигации	54
§ 3.7. Обобщенные блок-схемы радионавигационных систем пространственного и временного типа	56
ГЛАВА 4.	
НАВИГАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА	
§ 4.1. Навигационные параметры, пространства положения и навигационные функции	65
§ 4.2. Основные поверхности положения	67
§ 4.3. Свойства основных навигационных функций при измерениях на поверхности планеты по орбитальным навигационным точкам . .	74
§ 4.4. Свойства основных навигационных функций при измерениях на космическом аппарате по орбитальным навигационным точкам . .	79
§ 4.5. Основные навигационные функции как инварианты координатных преобразований	84
§ 4.6. Градиенты полей навигационных параметров	88
§ 4.7. Фундаментальные и градиентные матрицы	92

§ 4.8. Общие и видовые свойства навигационных методов . . .	95
§ 4.9. Некоторые возможности оптимизации поверхностей положения	96

ГЛАВА 5.

РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

§ 5.1. Проявление эффектов теории относительности в космической навигации	102
§ 5.2. Допплеровское смещение частоты	104
§ 5.3. Гравитационное смещение частоты	111
§ 5.4. Изменение масштабов длины и времени	113
§ 5.5. Течение времени в космическом полете	116
§ 5.6. Аберрация	119
§ 5.7. Некоторые дополнительные явления	121

ГЛАВА 6.

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ПРИПЛАНЕТНОЙ ДВУМЕРНОЙ НАВИГАЦИИ

§ 6.1. Геометрические модели планетных фигур как навигационные пространства	123
§ 6.2. Метрические характеристики основных моделей планет	124
§ 6.3. Элементы тригонометрии на эллипсоиде вращения. Обобщенная формула навигации	129
§ 6.4. Алгоритмы основных навигационных задач	147
§ 6.5. О таблицах функций Φ_1 и Φ_2 для расчетов вручную	156

ГЛАВА 7.

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ОКОЛОПЛАНЕТНОЙ НАВИГАЦИИ

§ 7.1. Самоопределение и иноопределение при околопланетной навигации	159
§ 7.2. Общая характеристика системы радионавигационных точек и условий измерений	162
§ 7.3. Согласование начал отсчета пространственных координат и времени при использовании орбитальных РНТ	168
§ 7.4. Дальномерный метод определения по орбитальным РНТ	170
§ 7.5. Разностно-дальномерный метод определения по орбитальным РНТ	175
§ 7.6. Радиально-скоростной метод определения по орбитальным РНТ	179
§ 7.7. Угломерный метод определения по орбитальным РНТ	181
§ 7.8. Угломерно-дальномерный (траверзный) метод определения по орбитальным РНТ	184
§ 7.9. Методы самоопределения космических аппаратов по планетным навигационным точкам	191
§ 7.10. Особенности навигации при подлете к планете и посадке	194

ГЛАВА 8.

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ МЕЖПЛАНЕТНОЙ НАВИГАЦИИ

§ 8.1. Особенности навигации на межпланетных трассах	199
§ 8.2. Навигационные функции при самоопределении в межпланетном пространстве	201
§ 8.3. Основные методы определения параметров движения межпланетных космических аппаратов	206
§ 8.4. Некоторые вопросы коррекции траектории и маневрирования	210

ГЛАВА 9.

ОСОБЕННОСТИ НАВИГАЦИОННОЙ МЕТОДИКИ В НЕКОТОРЫХ ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 9.1. О геометрии процессов, вызывающих искривление траектории сигналов	214
§ 9.2. Некоторые навигационные задачи, связанные с заданием одномерного пространства орбитального типа	215
§ 9.3. Особенности навигационной методики в пространстве, искривленном в результате рефракции радиоволн в ионосфере	222

ГЛАВА 10.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НАВИГАЦИОННЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 10.1. Использование статистических методов при решении навигационных задач	232
§ 10.2. Уточнение элементов орбиты и пространственных координат по полной выборке измерений	234
§ 10.3. Основы методики уточнения параметров движения КА по выборке измерений нарастающего объема	245
§ 10.4. О вычислении расчетных значений навигационных параметров и усреднении измерений, вовлекаемых в обработку	252

ГЛАВА 11.

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ МЕТОДОВ КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ

§ 11.1. Количественный подход к оценке информационной производимости навигационных методов	256
§ 11.2. Влияние свойств коэффициентов нормальных уравнений на дисперсию определяемых параметров движения КА	258
§ 11.3. Отклики навигационных функций на изменение параметров движения, их вариации на одном проходе КА	260
§ 11.4. Влияние взаимоположения навигационных точек и орбиты на поведение изохронных производных, обуславливающее отсутствие отклика или линейную зависимость откликов	263
§ 11.5. Влияние вида навигационной функции на градиентную матрицу и на степень взаимосвязи откликов функции по различным параметрам движения	268
§ 11.6. Композиция состава навигационных функций из условий минимизации дисперсии определяемых параметров движения	273
Список основных обозначений	275

Приложения:

I. Выражения для g^{ik} и Γ_{ij}^k	281
II. Выражение для S и Λ с учетом высших членов разложения	282
Литература	284
Предметный указатель	289

Валентин Семенович Шебшаевич

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
КОСМИЧЕСКОЙ НАВИГАЦИИ**

Редактор Н. Г. Заболоцкий

Художественный редактор В. Т. Сидоренко

Обложка художника Б. К. Шаповалова

Технический редактор Г. З. Шалимова

Корректоры Е. П. Озерецкая, О. П. Трушкова

Сдано в набор 8.X.1970 г.

Подписано в печать 1.IV. 1971 г. Т-05839

Формат 60×90/16. Бумага типографская № 3

Объем 18,5 усл. п. л.; 18,696 уч.-изд. л.

Тираж 3900 экз. Зак. 1436

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, п/я 693

Цена 1 р. 28 к.

Московская типография № 4 Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров СССР

Москва, Большая Переяславская ул., 46

