СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Под редакцией проф. П.С. ГЕВОРКЯНА

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям

Р е ц е н з е н т ы:

доктор физ.-мат. наук, профессор В.Л. Клюшин
доктор физ.-мат. наук, профессор В.В. Лебедев

УДК
ББК

Сборник задач по высшей математике для экономистов /Геворкян П.С. и др.; Под ред. П.С. Геворкяна. — М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2010. — 384 с.—(Высшее образование).

ISBN

В сборник включены задачи по следующим разделам высшей математики: матрицы и определители, системы линейных уравнений, аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, ряды.

Приведены многочисленные задачи экономического содержания, которые показывают возможности применения математического аппарата в экономических исследованиях.

Во всех разделах приведены краткие теоретические сведения, которые снабжены большим количеством разобранных примеров.

Книга адресована в первую очередь студентам экономических специальностей вузов. Однако она, безусловно, может быть полезна также для экономистов и лиц, занимающихся самообразованием.

К о л л е к т и в а в т о р о в:

Павел Самвелович Геворкян, Светлана Ивановна Богатая, Елена Алексеевна Борисова, Александр Дмитриевич Козлов, Ольга Юрьевна Ланцова, Олег Иванович Павлов, Александр Владимирович Потемкин, Елена Николаевна Сахарова, Андрей Марсович Сунчалин.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный сборник задач непосредственно связан с учебником «Высшая математика для экономистов» под редакцией проф. П.С. Геворкяна, вышедшим в свет в издательстве «Экономика» в 2010 г., и отражает содержание программы по математике для экономических специальностей вузов.

В сборник включены задачи и примеры из следующих разделов высшей математики: матрицы и определители, системы линейных уравнений, аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, ряды. Специально выделены параграфы и приведены многочисленные задачи экономического содержания, которые показывают возможности применения математического аппарата в экономических исследованиях.

Все разделы сборника задач снабжены краткими теоретическими сведениями с большим количеством подробно разобранных примеров. Конец решения примеров и задач отмечено знаком □. К задачам, номера которых помечены одной звездочкой, даны указания в разделе «Ответы».

Книга адресована в первую очередь студентам экономических специальностей вузов. Однако она, безусловно, может быть полезна также для экономистов и лиц, занимающихся самообразованием.

Авторы выражают благодарность ректору Академии труда и социальных отношений профессору В.А. Каменецкому за внимание и доброжелательное отношение к данному учебнику.

Москва, май 2010 г. *Авторы*

Глава 1

Матрицы и определители

§ 1.1. Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенно матрица A записывается также в виде $A = \|a_{ij}\|$ либо $A = (a_{ij})$ где i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ указывает ***номер строки***, а j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ ***номер столбца***.

Матрица A, у которой число строк равно числу столбцов: $m = n$, называется ***квадратной матрицей*** порядка n.

Суммой $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности $m \times n$, элементы которой определяются равенством:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Произведением λA матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ на число λ называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности $m \times n$, элементы которой определяются равенством:

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Произведением AB матрицы $A = (a_{is})$ размерности $m \times k$ на матрицу $B = (b_{sj})$ размерности $k \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размерности $m \times n$, элементы которой определяются равенством:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}, \tag{1.1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, а $j = 1, 2, \ldots, n$. Иными словами, ***элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы произведения, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.***

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой местами строк и столбцов с сохранением порядка их следования, называется ***транспонированной*** к матрице A и обозначается через A' или A^T. Итак, если $A = (a_{ij})$ — матрица размерности $m \times n$, то $A^T = (a_{ji})$ — транспонированная матрица размерности $n \times m$.

Пример 1.1. Найти матрицу $C = -5A + 2B^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу $-5A$, умножая каждый элемент матрицы на число -5:

$$-5A = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -30 \\ -25 & -40 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу B:

$$B^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $2B^T$, перемножив каждый элемент матрицы B^T на число 2:

$$2B^T = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 18 & 8 \\ 22 & 20 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем искомую матрицу C:

$$C = -5A + 2B^T = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -15 & -30 \\ -25 & -40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 18 & 8 \\ 22 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5+14 & -10+6 \\ -15+18 & -30+8 \\ -25+22 & -40+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 3 & -22 \\ -3 & -20 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Пример 1.2. Найти произведения AB и BA (если они существуют):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение AB не существует, так как число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B.

Произведение матриц BA существует, так как матрица B имеет размерность 3×2, а матрица A — 2×2, и число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A.

Найдем матрицу $C = BA$. Размерность матрицы C будет 3×2.

$$C = BA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix},$$

где элементы первой строки определяются следующим образом:

$$c_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} = 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 15,$$
$$c_{12} = b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} = 4 \cdot 5 + 7 \cdot 0 = 20.$$

Аналогично находим элементы второй и третьей строк:

$$c_{21} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} = 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 10,$$
$$c_{22} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} = 1 \cdot 5 + 8 \cdot 0 = 5,$$

$$c_{31} = b_{31} \cdot a_{11} + b_{32} \cdot a_{21} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 7,$$
$$c_{32} = b_{31} \cdot a_{12} + b_{32} \cdot a_{22} = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 15.$$

Итак,

$$C = BA = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 5 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Найти матрицу $C = A + B$.

1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти матрицу $C = A - B$.

1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

1.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.8. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти матрицу $C = A + B^T$.

1.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

1.10. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти матрицу $C = A^T - B$.

1.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

1.12. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти матрицу $C = -4A^T + 3B$.

1.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

1.14. $A = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

1.15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.16. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 2A + 3B^T$.

1.17. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 6A - 3B^T$.

1.18. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 4A^T + 5B$.

1.19. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 5A^T - 3B$.

1.20. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 6A^T + 2B$.

1.21. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 3A^T - 5B$.

1.22. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 2A + 6B^T$.

1.23. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 2A - 3B^T$.

1.24. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 6A^T + 2B$.

1.25. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 3A^T - 2B$.

Найти матрицу $C = A \cdot B$.

1.26. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.27. $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.30. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.31. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.32. $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.33. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

1.34. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 8 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = B \cdot A$.

1.35. $A = \begin{pmatrix} -10 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \end{pmatrix}$.

1.36. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A \cdot B^T$.

1.37. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.38. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.39. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

1.40. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 9 \\ -5 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Заданы матрицы A и B. Найти произведения AB и BA.

1.41. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.42. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.43. $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -5 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.44. $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.45. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -1 \\ 3 & -8 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 0 & -2 \\ 8 & -6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Заданы матрицы A, B и C. Найти матрицу $D = A \cdot B \cdot C$.

1.46. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.47. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 2 & -7 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 1.2. Применение матриц при решении экономических задач

Пусть предприятие выпускает продукцию m видов, используя при этом n видов сырья. Предположим, что для производства одной единицы продукции i-го вида ($i = 1, 2, \ldots, m$) расходуется сырье

j-го типа ($j = 1, 2, \ldots, n$) в количестве a_{ij} единиц, т. е. нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Предположим также, что стоимость единицы сырья j-го типа равна p_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), т. е. стоимость единицы каждого типа сырья задается матрицей-столбцом

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Тогда затраты $S = (s_1 \ \ldots \ s_n)$ и общая стоимость Q сырья, необходимые для планового выпуска продукции, заданного матрицей-строкой

$$B = (b_1 \ b_2 \ \ldots \ b_m),$$

соответственно вычисляются по формулам:

$$S = BA, \tag{1.2}$$

$$Q = SP = (BA)P. \tag{1.3}$$

Пример 1.3. Предприятие выпускает продукцию двух видов, используя при этом три вида сырья. Пусть нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

стоимость единицы каждого типа сырья задается матрицей-столбцом $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, а план выпуска продукции — матрицей-строкой $B = (100 \ 200 \ 300)$.

Определить затраты и общую стоимость сырья, необходимые для данного планового выпуска продукции.

Решение. Согласно формуле (1.2) затраты сырья составляют

$$S = BA = (100\cdot 1+200\cdot 4+300\cdot 5 \quad 100\cdot 3+200\cdot 2+300\cdot 1) = (2400 \quad 1000).$$

Общую стоимость сырья вычислим по формуле (1.3):

$$Q = SP = 2400\cdot 2 + 1000\cdot 4 = 8800. \quad \square$$

1.48. Предприятие выпускает продукцию трех видов, используя при этом два вида сырья. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

стоимость единицы каждого типа сырья задается матрицей-столбцом $P = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$, а план выпуска продукции — матрицей-строкой $B = \begin{pmatrix} 90 & 60 & 90 \end{pmatrix}$.

Определить затраты и общую стоимость сырья, необходимые для данного планового выпуска продукции.

1.49. Завод изготавливает продукцию четырех типов, используя при этом два вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \\ 5 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix},$$

стоимость единицы каждого типа ресурса задается матрицей-столбцом $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, а план выпуска продукции — матрицей-строкой $B = \begin{pmatrix} 110 & 70 & 250 & 140 \end{pmatrix}$. Определить затраты и общую стоимость ресурсов, необходимые для данного планового выпуска продукции.

1.50. Фабрика производит мебель четырех видов, используя при этом три вида материала. Нормы расхода материала характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 10 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стоимость каждого вида материала задается матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix},$$

а план выпуска продукции — матрицей $B = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 & 9 \end{pmatrix}$.

Определить затраты и общую стоимость материала, необходимые для данного планового выпуска продукции.

1.51. Предприятие выпускает четыре вида изделий из трех видов сырья. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Стоимость единицы каждого типа сырья задается матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а план выпуска продукции — матрицей $B = \begin{pmatrix} 200 & 50 & 100 & 300 \end{pmatrix}$.

Определить затраты и общую стоимость сырья, необходимые для данного планового выпуска продукции.

§ 1.3. Определители второго и третьего порядков

Определителем второго порядка, соответствующим квадратной матрице второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

называется число

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.5}$$

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

квадратная матрица третьего порядка, то соответствующим ей *определителем третьего порядка* называется число

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}. \tag{1.7}$$

Формулу (1.7) легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется *правилом треугольников*, или *правилом Сарруса* (рис. 1.1).

Рис. 1.1

П р и м е р 1.4. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. По формуле (1.5) получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) = 14. \quad \square$$

Пример 1.5. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. По формуле (1.7) получим

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3{\cdot}3{\cdot}2 + 2{\cdot}1{\cdot}1 + 5{\cdot}3{\cdot}4 - 4{\cdot}3{\cdot}1 - 1{\cdot}3{\cdot}3 - 5{\cdot}2{\cdot}2 = 39. \quad \square$$

Вычислить определитель матрицы A.

1.52. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.53. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.54. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.55. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.56. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.57. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 11 & 2 & 15 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.58. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.59. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

1.60. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.61. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решить уравнение.

1.62. $\begin{vmatrix} 4 - x & 4 \\ 2 & -4 - x \end{vmatrix} = -15.$

1.63. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$ **1.64.** $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

1.65. $\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 25 \\ x & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ **1.66.** $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Решить неравенство.

1.67. $\begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -3 & -2-x \end{vmatrix} \geqslant -6.$

1.68. $\begin{vmatrix} 5-x & -3 \\ 3 & -5-x \end{vmatrix} \geqslant -15.$

1.69. $\begin{vmatrix} x+4 & -2 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix} \leqslant -22.$

1.70. $\begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ 2 & -4-x \end{vmatrix} \geqslant -30.$

1.71. $\begin{vmatrix} 2-x & -3 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} \leqslant 24.$

§ 1.4. Определители n-го порядка

1°. **Понятие определителя n-го порядка.** Понятие определителя произвольной квадратной матрицы n-го порядка введем индуктивным методом.

Предположим, что уже введено понятие определителя порядка $n-1$, соответствующего произвольной квадратной матрице $(n-1)$-го порядка. Для введения определителя n-го порядка дадим понятие ***минора*** и ***алгебраического дополнения*** элемента матрицы.

Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

называется определитель $(n-1)$-го порядка, соответствующий матрице, которая получается из исходной матрицы A в результате вычеркивания той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, т. е. i-й строки и j-го столбца. Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Сумма

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.9}$$

не зависит от номера строки i и называется ***Определителем n-го порядка*** квадратной матрицы A.

Итак, по определению

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{1.10}$$

Эта формула называется ***разложением определителя n-го порядка по i-й строке***.

Справедлива также следующая формула:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}. \tag{1.11}$$

Формула (1.11) называется ***разложением определителя n-го порядка по j-му столбцу***.

2°. Основные свойства определителей. Перечислим основные свойства определителей.

1) При транспонировании матрицы определитель не меняется, т. е.

$$|A| = |A^T|. \tag{1.12}$$

2) Если в матрице поменять местами две строки (столбцы), то ее определитель сменит знак.

3) Если матрица имеет две одинаковые строки (столбцы), то ее определитель равен нулю.

4) Если некоторую строку (столбец) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число. Иными словами,

общий множитель элементов некоторой строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.

5) Если все элементы некоторой строки (столбца) матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.

6) Если две строки (столбца) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

7) Если к элементам некоторой строки (столбца) матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольное число λ, то определитель этой матрицы не изменится.

8) Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей, т. е.

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

При вычислении определителей по формулам (1.10) и (1.11) полезно, используя основные свойства определителей, обратить в нуль все, кроме одного, элементы его некоторой строки (столбца).

Пример 1.6. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение. Из первой строки вычтем удвоенную вторую. Полученный определитель разложим по элементам первой строки:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix}.$$

Далее опять обращаем в нуль все элементы первой строки, кроме элемента в правом верхнем углу. Для этого вычтем из первой строки вторую. Полученный определитель разложим по элементам первой строки:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (3 \cdot 7 - 1 \cdot 0) = 42. \quad \square$$

Вычислить определители, разложив их по элементам первого столбца.

1.72. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **1.73.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$.

Вычислить определители, используя подходящее разложение по строке или столбцу.

1.74. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. **1.75.** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$.

Упростить и вычислить определители.

1.76. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$. **1.77.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -7 & 12 & -15 \end{vmatrix}$.

1.78. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

Вычислить определитель матрицы A.

1.79. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.80.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.81. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.82. $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 11 \\ 15 & 15 & 19 & -19 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}.$

1.83. $A = \begin{pmatrix} 27 & 20 & 13 & 46 \\ 44 & 64 & -20 & 45 \\ 40 & 21 & -13 & -55 \\ 55 & 40 & 24 & 84 \end{pmatrix}.$

1.84. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

1.85. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & -9 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

1.86. $A = \begin{pmatrix} -35 & -1 & 0 & -8 & -4 \\ -4 & -6 & -4 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$

1.87. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & -7 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

1.88. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 37 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & -5 & 14 \\ 11 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 18 \end{pmatrix}.$

§ 1.5. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{1.13}$$

где E — единичная матрица (т. е. матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю).

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* в противном случае.

Если матрица A имеет обратную, то эта матрица невырожденная: $|A| \neq 0$.

Верно и обратное утверждение. Всякая невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

имеет обратную матрицу A^{-1}, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$) матрицы A.

Пример 1.7. Найти матрицу, обратную данной матрице

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $|A| = -1 \neq 0$. Следовательно матрица A — невырожденная и имеет обратную. Находим алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь вычислим обратную матрицу по формуле (1.15)

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки правильности вычисления обратной матрицы необходимо убедиться в выполнении равенств $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. □

Пример 1.8. Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -8 & 7 & -6 \\ 5 & -4 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как обратную матрицу имеет только невырожденная матрица, следовательно, нужно найти определитель данной матрицы A.

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на 8, а из третьей вычтем первую, умноженную на 5. Полученный определитель разложим по элементам первого столбца:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 6 & \lambda - 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & 18 \\ 6 & \lambda - 15 \end{vmatrix} =$$

$$= -9 \cdot (\lambda - 15) - 6 \cdot 18 = -9\lambda + 27.$$

Итак, обратная матрица существует при $|A| = -9\lambda + 27 \neq 0$, т. е. при $\lambda \neq 3$. □

Обратную матрицу можно вычислить также *методом элементарных преобразований.*

Элементарными преобразованиями матриц называются следующие действия над ними:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на произвольное число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на произвольное число.

В случае, когда одна из матриц A и B получается из другой с помощью элементарных преобразований, пишут $A \sim B$.

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} построим прямоугольную матрицу $(A|E)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу E размера $n \times n$. Далее, с помощью элементарных преобразований над строками матрицу $(A|E)$ приводим к виду $(E|B)$, что всегда возможно, если A невырождена. Тогда $B = A^{-1}$.

Пример 1.9. Методом элементарных преобразований найти A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу $(A|E)$:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Первую строку этой матрицы умножим на $\frac{1}{3}$, из второй строки вычтем первую, умноженную на $\frac{2}{3}$, и из третьей строки вычтем первую. Получим:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4/3 & 5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & -7/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далее из первой строки вычтем вторую строку, умноженную на 4, вторую строку умножим на -3, из третьей строки вычтем вторую, умноженную на 3. В результате получим:

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4/3 & 5/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & -7/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 11 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Наконец, из первой строки вычитая третью, умноженную на 11, а из второй строки вычитая третью, умноженную на 7, получим:

$$(A|E) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 11 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) = (E|B).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Пример 1.10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$.

Решение. Если $|A| \neq 0$, то решение уравнения $X \cdot A = B$ определяется равенством $X = B \cdot A^{-1}$.

Найдем A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Найти матрицу, обратную к данной матрице A.

1.89. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **1.90.** $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.91. $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 3 \end{pmatrix}$. **1.92.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.93. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.94.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Методом элементарных образований найти обратные для следующих матриц.

1.95. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.96. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

1.97. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 5 \\ -3 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.98. $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 13 & 2 \\ 11 & 8 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 20 & 17 & 21 & 14 \end{pmatrix}$.

Определить, при каких значениях λ существует обратная матрица для матрицы A.

1.99. $A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & \lambda & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.100. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.101. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 9/4 & 3 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

1.102. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & \lambda \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

1.103. $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.104. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & \lambda & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.105. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения.

1.106. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.107. $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.108. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.109. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.110. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 1.6. Ранг матрицы

1°. **Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы**. Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Через α_i обозначим i-ю строку матрицы (1.16):

$$\alpha_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}),$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$.

Строки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n = O, \tag{1.17}$$

где $O = (0\ 0\ \ldots\ 0)$ — нулевая строка.

Строки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются ***линейно независимыми***, если они не являются линейно зависимыми, иными словами, если равенство (1.17) возможно лишь в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Точно также определяются понятия линейной зависимости и линейной независимости столбцов матрицы.

1.111. Доказать, что строки (столбцы) матрицы A являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда одна из этих строк (столбцов) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов).

Пусть α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3, β_4, соответственно, строки и столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти следующие линейные комбинации.

1.112. $3\alpha_1 + 2\alpha_2$.

1.113. $2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

1.114. $2\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_4$.

1.115. $-\beta_2 - 2\beta_3 + \beta_4$.

1.116. $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3$.

1.117. $\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 + 3\beta_4$.

Заданы те же, что и выше. Найти строку (столбец) x из уравнения.

1.118. $x + \beta_1 - 2\beta_2 = 0$.

1.119. $2x - \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

1.120. $2\alpha_1 + 2x + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$.

1.121. $\beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3 - x = 0$.

1.122. Доказать, что столбцы β_1, β_2 и β_3 линейно независимы.

1.123. Доказать, что столбцы β_2, β_3 и β_4 линейно зависимы.

2°. **Понятие ранга матрицы**. Пусть в матрице A размера $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m, n)$). Определитель квадратной матрицы k-го порядка, составленной из элементов, стоящих на пересечении выбранных k строк и k столбцов, называется ***минором k-го порядка*** матрицы A.

Рангом матрицы A называется максимальный порядок r отличных от нуля миноров. Ранг матрицы A обозначается через $\mathrm{rang}A$.

Итак, если $\mathrm{rang}A = r$, то это означает, что: 1) существует минор r-го порядка матрицы A, который отличен от нуля, и 2) все миноры $(r+1)$-го и более высокого порядка матрицы A (если таковые существуют) равны нулю.

Если $\operatorname{rang} A = r$, то любой отличный от нуля минор порядка r называется *базисным минором*. Строки и столбцы, определяющие базисный минор, называются *базисными строками* и *базисными столбцами* соответственно.

Теорема 1.1 (Теорема о базисном миноре). *Базисные строки (базисные столбцы) матрицы линейно независимы, при этом любая строка (любой столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (базисных столбцов).*

Из последней теоремы, в частности, следует, что *ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов)*.

Приведем основные методы вычисления ранга матрицы.

а) *Метод окаймляющих миноров.* Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M. Если все эти окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен k. А если среди этих окаймляющих миноров есть ненулевой $(k+1)$-го порядка), то весь этот процесс повторяется.

Пример 1.11. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Минор второго порядка, расположенный в левом верхнем углу матрицы A, отличен от нуля:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Существуют два минора, окаймляющие минор M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Оба эти минора равны нулю, следовательно $\operatorname{rang} A = 2$. □

б) *Метод элементарных преобразований.* Будем говорить, что матрица A размера $m \times n$ имеет *верхний (нижний) треугольный* вид, если все ее элементы, расположенные ниже (выше) элементов a_{11}, $a_{22}, \ldots, a_{rr}$, $r = \min\{m, n\}$, равны нулю.

Говорят, что матрица A имеет *ступенчатый вид*, если она имеет либо верхний, либо нижний треугольный вид.

Метод элементарных преобразований вычисления ранга матрицы основан на следующих двух фактах: 1) при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется (см. задачу **1.137**) и 2) ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} ($r = \min\{m, n\}$) (см. задачу **1.138**).

Пример 1.12. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если ко второй строке данной матрицы добавим первую строку, умноженную на -2, к третьей строке добавим первую, умноженную на -1, и к четвертой строке добавим первую, умноженную на -2, то получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Далее, к четвертой строке полученной матрицы прибавим вторую строку, умноженную на -1. Получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, к четвертой строке полученной матрицы, добавив третью строку, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\operatorname{rang} A = 3$. □

Вычислить ранг матрицы A методом окаймляющих миноров.

1.124. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & -7 & 12 \end{pmatrix}$

1.125. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 14 & 28 & -42 & 70 \end{pmatrix}$.

1.126. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

1.127. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}$.

1.128. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **1.129.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Привести матрицу к ступенчатому виду.

1.130. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1.131. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.132. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.133. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **1.134.** $A = \begin{pmatrix} 26 & 30 & 18 \\ 78 & 91 & 56 \\ 78 & 91 & 57 \\ 26 & 31 & 21 \end{pmatrix}$.

1.135. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. **1.136.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.137. Доказать, что элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

1.138. Доказать, что ранг ступенчатой матрицы A размера $m \times n$ равен числу ненулевых элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} $(r = \min\{m, n\})$.

1.139. Доказать, что при транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

Вычислить ранг матрицы A методом элементарных преобразований.

1.140. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 6 & 1 \\ 7 & -6 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

1.141. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

1.142. $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 34 & 47 \\ 2 & 1 & 8 & 11 \\ -13 & -5 & -46 & -46 \\ 11 & 6 & -46 & 63 \end{pmatrix}$.

$$\textbf{1.143. } A = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & 11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

§ 1.7. Комплексные числа

1°. Понятие комплексного числа. Алгебраические операции над комплексными числами. Упорядоченная пара $z = (a, b)$ действительных чисел называется *комплексным числом*. Число a называется *действительной частью* (обозначается $\operatorname{Re} z$), а число b — *мнимой частью* (обозначается $\operatorname{Im} z$) этого комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называются *равными*, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Комплексное число $z = (a, b)$ считается *равным нулю*, если $a = 0$ и $b = 0$.

Операции сложения и умножения комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определяются следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2), \tag{1.18}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{1.19}$$

Для суммы и произведения комплексных чисел вида $(a, 0)$ справедливы формулы

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2,\ 0), \quad (a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1 a_2,\ 0).$$

Это позволяет комплексное число вида $(a, 0)$ отождествить с действительным числом a.

В операциях с комплексными числами особую роль играет комплексное число $i = (0, 1)$, которое называется *мнимой единицей*. Пользуясь формулой (1.19), имеем:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Из формул (1.18) и (1.19) следует, что произвольное комплексное число $z = (a, b)$ можно представить в виде

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib,$$

которое называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Алгебраическая форма записи комплексного числа позволяет производить операции с комплексными числами так же, как с алгебраическими многочленами.

Пример 1.13. Вычислить: $(1+i)^2(3-4i)+3i$.

Решение. $(1+i)^2(3-4i)+3i = (1+2i+i^2)(3-4i)+3i = 2i(3-4i)+3i = 6i-8i^2+3i = 8+9i$. □

Комплексное число $\overline{z} = a - ib$ называется *сопряженным* к комплексному числу $z = a + ib$. Справедливо равенство

$$z\overline{z} = a^2 + b^2. \tag{1.20}$$

Частное двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ вычисляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\, z_1\overline{z_2}. \tag{1.21}$$

Пример 1.14. Вычислить: $\dfrac{1-2i}{2-i}$.

Решение. Применяя формулы (1.20) и (1.21), получим:

$$\frac{1-2i}{2-i} = \frac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4-3i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i. \quad \square$$

Выполнить указанные операции.

1.144. $(4+2i)+(1-i)$.

1.145. $(4+2i)(1-i)$.

1.146. i^3.

1.147. $\dfrac{1}{i}$.

1.148. $\dfrac{1}{2i}$.

1.149. $\dfrac{1}{1+i}$.

1.150. $\dfrac{1}{1-i}$.

1.151. $\dfrac{2i}{1-i}$.

1.152. $\dfrac{1+2i}{1-i}$.

1.153. $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}$.

Пусть $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + 4i$. Выполнить следующие действия.

1.154. $10z_1 - 3z_2$.

1.155. $z_1 z_2$.

1.156. $z_2\overline{z_2}$.

1.157. $z_1\overline{z_2}$.

1.158. $\dfrac{1}{z_2}$.

1.159. $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 5 + 4i$. Выполнить следующие действия.

1.160. $10z_1 - 3z_2$.

1.161. $z_1 z_2$.

1.162. $z_2\overline{z_2}$.

1.163. $z_1\overline{z_2}$.

1.164. $\dfrac{1}{z_2}$.

1.165. $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решить уравнение.

1.166. $z^2 + 4z + 7 = 0$.

1.167. $z^2 - 5z + 9 = 0$.

1.168. $z^2 + z + 1 = 0$.

1.169. $z^2 - z + 1 = 0$.

2°. **Тригонометрическая форма комплексного числа**. Если на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy, то каждому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить точку M с координатами (a, b) и, наоборот, каждой точке M с координатами (a, b) можно сопоставить комплексное число $z = a + ib$ (рис. 1.2).

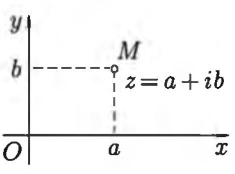

Рис. 1.2

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbb{C}$. Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*.

Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем комплексного числа* $z = (a, b)$. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, называется *аргументом числа* $z = (a, b)$ и обозначается $\arg z$.

Аргумент φ комплексного числа $z = a + ib$ определяется по формулам

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1.22}$$

Аргумент числа $z \neq 0$ определяется не однозначно, а с точностью числа, кратного 2π. Однако обычно $\arg z$ указывают в промежутке $[0, 2\pi)$ или в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Для всякого комплексного числа $z = a+ib$ справедливо равенство

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.23}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ (рис. 1.3), называемое ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

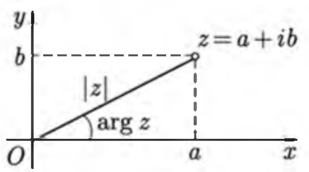

Рис. 1.3

Пример 1.15. Комплексное число

$$z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

представить в алгебраической форме.

Решение.

$$z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right) == \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i. \quad \square$$

Пример 1.16. Комплексные числа $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 5$ представить в тригонометрической форме.

Решение. Сначала следует найти модуль и аргумент комплексного числа, а после этого воспользоваться формулой (1.23):

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$|z_2| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{2},$$

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$|z_3| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5, \quad \arg z_3 = 0, \quad z_3 = 5(\cos 0 + i\sin 0). \quad \square$$

В тригонометрической форме удобно производить операции умножения и деления комплексных чисел. Для произвольных комплексных чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

справедливы равенства

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{1.24}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \tag{1.25}$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.26}$$

Формула (1.26) называется ***формулой Муавра***.

Символом $e^{i\varphi}$ обозначим комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.27}$$

С помощью этого обозначения произвольное комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ может быть записано в ***показательной форме***

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.28}$$

Пример 1.17. Комплексное число $z = -1 + i$ представить в показательной форме.

Решение. Находим модуль и аргумент данного комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$z = \sqrt{2}e^{(3\pi/4)i}. \quad \square$$

Пример 1.18. Комплексное число записано в показательной форме $z = 2e^{(\pi/6)i}$. Найти его алгебраическую форму.

Решение. По формуле (1.27) получим:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i. \quad \square$$

Пример 1.19. Вычислить $(2+2i)^{12}$, используя формулу Муавра.

Решение. Комплексное число $2 + 2i$ представим в тригонометрической форме и применим формулу Муавра.

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$(2+2i)^{12} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{18}\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right) = 2^{18}\left(-1 + i\cdot 0\right) = -2^{18}. \quad \square$$

Представить комплексное число в показательной и алгебраической форме.

1.170. $-2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. **1.171.** $5\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1.172. $4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

1.173. $3\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)$.

1.174. $-6(\cos\pi + i\sin\pi)$. **1.175.** $1{,}5(\cos 0 + i\sin 0)$.

Представить комплексное число в тригонометрической и показательной форме.

1.176. $3 + 3i$.

1.177. $-1 + \sqrt{3}i$.

1.178. $-5\sqrt{3} - 5i$.

1.179. $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$.

1.180. 18.

1.181. $2i$.

Представить комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме.

1.182. $7e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

1.183. $\sqrt{5}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

1.184. $-e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

1.185. $4e^{i\frac{\pi}{2}}$.

1.186. Доказать *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Вычислить, используя формулу Муавра.

1.187. i^{11}.

1.188. i^{111}.

1.189. i^{1111}.

1.190. i^{-1111}.

1.191. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)^{103}$

1.192. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)^{888}$

1.193. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)^{-100}$

1.194. $(5 + 5i)^7$.

1.195. $(4 - 4\sqrt{3}\,i)^{12}$.

1.196. $(1 + \sqrt{3}\,i)^{10}$.

3°. Извлечение корней из комплексных чисел. *Корнем n-й степени* из комплексного числа w называется комплексное число z, удовлетворяющее равенству

$$z^n = w. \tag{1.29}$$

Если $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ — фиксированное комплексное число, то уравнение (1.29) имеет в точности n различных решений, которые вычисляются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right), \tag{1.30}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. На комплексной плоскости эти корни соответствуют вершинам правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат.

Пример 1.20. Найти корни уравнения $z^4 = -1$.

Решение. Представим число -1 в тригонометрической форме:

$$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi),$$

т. е. $\rho = 1$, $\psi = \pi$. Тогда

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right).$$

где $k = 0, 1, 2, 3$.

При $k = 0$: $z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При $k = 1$: $z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При $k = 2$: $z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При $k = 3$: $z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Найти все значения корней.

1.197. $\sqrt{3+3i}$. **1.198.** $\sqrt[3]{-1+\sqrt{3}i}$.

1.199. $\sqrt[4]{-5\sqrt{3}-5i}$. **1.200.** $\sqrt[5]{-5}$.

Найти и изобразить на комплексной плоскости все решения уравнения.

1.201. $z^3 = 1$. **1.202.** $z^4 = 1$.

1.203. $z^5 = 1$. **1.204.** $z^6 = 1$.

Записать решения уравнения в тригонометрической форме и изобразить их на комплексной плоскости.

1.205. $z^2 = -1$. **1.206.** $z^3 = -1$.

1.207. $z^4 = -1$. **1.208.** $z^5 = -1$.

1.209. $z^6 = -1$. **1.210.** $z^7 = -1$.

Найти все корни уравнения $z^n = u$.

1.211. $n = 3$, $u = 1 + i$. **1.212.** $n = 2$, $u = i$.

1.213. $n = 4$, $u = 3 + 4i$. **1.214.** $n = 6$, $u = 1 + \sqrt{3}\,i$.

Решить уравнение.

1.215. $z^2 + 6z + 11 = 0$. **1.216.** $z^2 - z + 2 = 0$.

1.217. $z^2 + 3z + 4 = 0$. **1.218.** $z^2 - 4z + 9 = 0$.

1.219. $z^4 + 6z^2 + 11 = 0$. **1.220.** $z^4 + 3z^2 + 4 = 0$.

1.221. $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$. **1.222.** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$.

Глава 2

Системы линейных уравнений

§ 2.1. Квадратные неоднородные системы линейных уравнений. Правило Крамера

Система n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

называется квадратной неоднородной системой линейных уравнений.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

называется *матрицей* системы (2.1), а матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

называются *столбцами неизвестных* и *свободных* членов соответственно.

Учитывая обозначения (2.2) и (2.3), систему (2.1) можно представить в следующей матричной форме:

$$AX = B. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1 (Правило Крамера). *Если* $|A| \neq 0$, *то квадратная неоднородная система* (2.1) *имеет единственное решение*

$$X = A^{-1}B,$$

или, в покомпонентной записи,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}, \tag{2.5}$$

где A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *матрицы, полученные из матрицы* A *заменой* i*-го столбца на столбец* B *свободных членов:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ b_n & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n \end{pmatrix}.$$

Пример 2.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

невырождена, так как $|A| = 1 \neq 0$. Следовательно, данная система имеет единственное решение.

Вычислим определители $|A_1|$, $|A_2|$ и $|A_3|$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

По формулам (2.5) получим:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{1} = -3, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{1}{1} = 1. \quad \square$$

Решить систему уравнений по правилу Крамера.

2.1. $\begin{cases} 3x_2 - 4x_1 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7, \\ -5x_1 + 2x_2 = -22. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ 2x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ 5x_1 - 7x_2 = 13. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 4. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 11, \\ 6x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha = \cos 2\alpha, \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = \sin 2\alpha. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} ax_1 - bx_2 = a^2 + b^2, \\ bx_1 + ax_2 = a^2 + b^2. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -3. \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5, \\ x_1 + 3x_3 = -2, \\ x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -2, \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11, \\ 5x_2 + 6x_3 = 28, \\ x_1 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -7. \end{cases}$

§ 2.2. Решение общей системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.6}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей системы (2.6), а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

отличающаяся от матрицы A наличием дополнительного столбца свободных членов, называется ***расширенной матрицей*** системы (2.6).

Система (2.6) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если не имеет ни одного решения.

Теорема 2.2 (Кронекера-Капелли). *Система линейных уравнений* (2.6) *совместна тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{rang\,A} = \mathrm{rang\,A^*}.$$

Пусть $\mathrm{rang\,A} = \mathrm{rang\,A^*} = \mathrm{r}$, т. е. система (2.6) совместна. Не теряя общности, предположим, что базисный минор основной матрицы находится в ее левом верхнем углу (такого расположения базисного минора можно добиться посредством перестановки в системе (2.6) уравнений и неизвестных). Тогда первые r строк как основной, так и расширенной матриц являются базисными строками, и по теореме о базисном миноре (см. теорему 1.1) все строки расширенной матрицы, начиная с $(r+1)$-й строки, линейно выражаются через первые r строк этой матрицы. Иными словами, *всякое решение первых r уравнений системы* (2.6) *будет решением и для всех последующих уравнений* *этой системы*. Отбросив последние $m - r$ уравнений системы (2.6), получим следующую систему относительно базисных неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_m - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Теперь заметим, что последняя система имеет единственное решение для произвольного набора неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, поскольку определитель матрицы этой системы совпадает с отличным от нуля базисным минором матрицы системы (2.6). И это решение находится по правилу Крамера.

П р и м е р 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Р е ш е н и е. Ранг основной и расширенной матрицы данной системы равен двум (проверьте!). Минор, расположенный в левом верхнем углу основной матрицы, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

Отбросим последнее уравнение данной системы и полученную систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 = 2 - 3x_3 - x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ и решая эту систему по правилу Крамера, получаем:

$$x_1 = 1 - C_1, \quad x_2 = -1 + 2C_1 + C_2.$$

Итак, решение системы (2.8) имеет вид:

$$x_1 = 1 - C_1, \quad x_2 = -1 + 2C_1 + C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2. \quad \square$$

Исследовать совместность и решить системы уравнений.

2.26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = \dfrac{1}{5}, \\ 4x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{6}, \\ 9x_1 + 6x_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x_1 - x_2\sqrt{3} = 1, \\ x_1\sqrt{3} - 3x_2 = \sqrt{3}. \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ 9x_1 + 6x_2 = 3. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

2.31. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$

2.32. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

2.33. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

2.34. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 3, \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

2.35. $\begin{cases} x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

2.36. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 4. \end{cases}$

2.37. Определить, при каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - ax_2 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 = b \end{cases}$$

1) имеет единственное решение, 2) не имеет решений, 3) имеет бесконечно много решений.

2.38. Решить систему при всех параметрах t

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + tx_2 + tx_3 = 2, \\ (1+t)x_1 + 2tx_2 - tx_3 = 3 + 2t. \end{cases}$$

§ 2.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса позволяет найти решения системы (2.6), если она совместна, или установить ее несовместность.

Алгоритм решения системы (2.6) по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) путем исключения неизвестных систему приводят к *ступенчатому* виду. На втором этапе (обратный ход) последовательно определяют неизвестные из полученной ступенчатой системы.

Если система (2.6) совместна, то она приводится к виду

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \cdots + \bar{a}_{1r}x_r + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \qquad\qquad \bar{a}_{22}x_2 + \cdots + \bar{a}_{2r}x_r + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \bar{a}_{rr}x_r + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $r \leqslant n$, $\bar{a}_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если же в процессе исключения переменных появляются уравнения вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то следует прекратить выполнение алгоритма и делать вывод о несовместности системы (2.6).

Метод Гаусса называется также ***методом последовательных исключений неизвестных.***

Пример 2.3. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Исключим сначала x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого умножим первое уравнение на (-3) и сложим со вторым, затем умножим первое уравнение на (-4) и сложим с третьим. Получим

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ \quad\ - \ \ x_2 + 4x_3 = 5, \\ \quad\ - 5x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Теперь исключим переменную x_2 из последнего уравнения. Умножим второе уравнение на (-5) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \quad x_3 = \quad 0, \\ \quad\ - x_2 + \ 4x_3 = \quad 5, \\ \qquad\quad\ - 11x_3 = -22. \end{cases}$$

Полученная система равносильна исходной и из нее легко находится решение системы: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. □

Пример 2.4. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = \ \ 4, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = \ \ 3, \\ \ \ x_1 - 3x_2 - \ \ x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Исключив из второго и третьего уравнений неизвестную x_1, получим

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = 4, \\ \qquad\ 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5, \\ \qquad\ 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

Отбросим последнее уравнение и перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \ \ 4 - 3x_3 + \ \ x_4, \\ \qquad\ 5x_2 = \ \ 5 - 4x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход метода Гаусса, находим все решения исходной системы:

$$x_1 = 2 - \frac{7}{5}C_3 - \frac{1}{5}C_4, \quad x_2 = 1 - \frac{4}{5}C_3 + \frac{3}{5}C_4, \quad x_3 = C_3, \quad x_4 = C_4,$$

где C_3 и C_4 произвольные постоянные. □

Метод Гаусса основан на приведении расширенной матрицы системы (2.6) к ступенчатому виду. Следовательно, *если расширенную* *матрицу A^* системы* (2.6) *с помощью элементарных преобразований со строками привести к ступенчатому виду $\bar{A}^*$ и по этой матрице восстановить систему уравнений, то полученная система будет равносильна исходной.*

Пример 2.5. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_3 = -1, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной. Эта система имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. □

Методом Гаусса исследовать совместность и найти решения следующих систем.

2.39. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

2.40. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8. \end{cases}$

2.41. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

2.42. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

2.43. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$

2.44. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

2.45. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

2.46. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

2.47. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

2.48. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

2.49. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$

2.50. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -1, \\ -x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8. \end{cases}$

2.51. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$

2.52. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

2.53. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

2.54. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_2 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

2.55. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + \quad = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

2.56. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

2.57. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -11, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 11x_4 = 6. \end{cases}$$

2.58. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

2.59. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

2.60. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

§ 2.4. Однородные системы линейных уравнений

Пусть задана *однородная система* линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Однородная система (2.10) всегда совместна, поскольку она всегда обладает так называемым *тривиальным* или *нулевым* решением $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Если однородная система (2.10), кроме указанного тривиального решения, имеет и другие решения, то говорят, что эта однородная система *нетривиально совместна*.

Теорема 2.3. *Однородная система* (2.10) *имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы A меньше числа n ее столбцов:* $\mathrm{rang} A < n$ *(при $m = n$ это условие означает* $\det A = 0$*).*

Решения нетривиально совместной однородной системы (2.10) обладают *линейными свойствами*

Решения однородной системы (2.10)

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \\ X^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{(k)} &= (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

называются *фундаментальной системой решений*, если они (строки (2.11)) линейно независимы и любое решение системы (2.10) является линейной комбинацией этих решений.

Если $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ..., $X^{(k)}$ фундаментальная система решений однородной системы (2.10), то

$$X = C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} + \ldots + C_kX^{(k)}, \tag{2.12}$$

где C_1, C_2, ..., C_k — произвольные числа, называется *общим решением* этой системы.

Пусть ранг основной матрицы системы (2.10) равен $r < n$, причем минор r-го порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, является базисным. Тогда, согласно алгоритму нахождения решений общей системы линейных уравнений, неизвестные x_1, x_2, ..., x_r линейно выражаются через оставшиеся неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, количество которых равно $n - r = k$, и каждому набору чисел (x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) соответствует некоторое решение системы (2.10).

Решения, соответствующие наборам чисел $e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, \ldots, 0)$, $e^{(k)} = (0, 0, \ldots, 1)$, составляют фундаментальную систему решений однородной системы (2.10).

Пример 2.6. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решение. Ранг матрицы системы (2.13) равен двум (проверьте!), и минор, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, является базисным.

Отбросим последнее уравнение данной системы и полученную систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 = -3x_3 - x_4. \end{cases}$$

Из последней системы находим бесконечное множество решений системы (2.13):

$$x_1 = -C_3, \quad x_2 = 2C_3 + C_4, \quad x_3 = C_3, \quad x_4 = C_4, \tag{2.14}$$

где C_3 и C_4 принимают произвольные значения.

В формулах (2.14) полагая сначала $C_3 = 1$, $C_4 = 0$, а затем $C_3 = 0$, $C_4 = 1$, получим фундаментальную систему решений системы (2.13):

$$X^{(1)} = (-1, 2, 1, 0), \quad X^{(2)} = (0, 1, 0, 1).$$

Общее решение системы (2.13) имеет вид

$$X = C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} = C_1(-1, 2, 1, 0) + C_2(0, 1, 0, 1). \quad \square$$

Найти решения системы.

2.61. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.62. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.63. $$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

2.64. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.65. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

2.66. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.67. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

2.68. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_2 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

2.69. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

2.70. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

2.71. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

2.72. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.73. Опрсдслить, при каком значснии a система уравнсний имеет только нулевое решение.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2.74. При каких λ система имеет ненулевые решения?

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

Найти фундаментальную систему решений и общее решение данных систем линейных уравнений.

2.75. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

2.76. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

2.77. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

2.78. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$

2.79. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.80. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

2.81. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

§ 2.5. Модель многоотраслевой экономики Леонтьева

Математическая модель межотраслевого баланса в статистической форме впервые была сформулирована в 1936 г. американским экономистом В.В. Леонтьевым.

Рассматривается экономическая система, состоящая из n взаимосвязанных отраслей производства. Продукция каждой отрасли частично идет на внешнее потребление (*конечный продукт*), а частично используется в качестве сырья в других отраслях, в том числе и в данной. Эту часть продукции называют *производственным потреблением*.

Обозначим через x_i *валовой выпуск продукции* i-й отрасли за планируемый период, а через y_i — *конечный продукт* i-й отрасли ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Пусть x_{ij} — часть продукции i-й отрасли, которая потребляется j-й отраслью для обеспечения выпуска ее продукции в размере x_j ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Тогда имеем систему балансовых соотношений:

$$\begin{cases} x_1 - (x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}) = y_1, \\ x_2 - (x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - (x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}) = y_n. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Вектор-столбец $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ называется ***ассортиментным вектором***, а $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — ***вектор-планом***.

Величины

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \tag{2.16}$$

называются ***коэффициентами прямых затрат***, они определяют затраты i-й отрасли, используемые j-й отраслью для производства ее единицы продукции.

Если ввести ***матрицу прямых затрат*** (*технологическую* или *структурную*) $A = \|a_{ij}\|$, то балансовые соотношения можно переписать в компактной матричной форме:

$$(E - A)X = Y, \tag{2.17}$$

где E — единичная матрица.

Основная задача межотраслевого баланса: ***найти вектор валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.***

Неотрицательная квадратная матрица n-го порядка $A \geqslant 0$ (все $a_{ij} \geqslant 0$) называется ***продуктивной***, если для любого вектора $Y \geqslant 0$ существует решение $X \geqslant 0$ уравнения (2.17).

На практике часто используется следующее условие продуктивности матрицы. ***Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицу, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы.***

Если A — продуктивная матрица, то решение балансового уравнения (2.17) можно записать в виде

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY, \tag{2.18}$$

где $S = (E - A)^{-1}$ называется ***матрицей полных затрат***.

Пример 2.7. В следующей таблице представлен балансовый отчет для двухотраслевой модели экономики:

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	Энергетика	Машиностр.	
Энергетика	100	160	500
Машиностроение	275	40	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, обеспечивающий вектор выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Решение. По формуле (2.16) находим матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица продуктивна.

Найдем матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,55 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix}.$$

Итак, для вектора конечной продукции Y можно найти необходимый объем валового выпуска X по формуле (2.18):

$$X = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 380 \end{pmatrix}. \quad \square$$

В следующих таблицах приведен балансовый отчет для многоотраслевых экономических систем. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, обеспечивающий вектор выпуска конечной продукции Y.

2.82.

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	I	II	
I	180	60	1200
II	240	180	600

$$Y = \begin{pmatrix} 420 \\ 240 \end{pmatrix}.$$

2.83.

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	I	II	
I	80	106	800
II	240	106	530

$$Y = \begin{pmatrix} 320 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

2.84.

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	I	II	
I	143,75	231,25	575
II	25,30	37	370

$$Y = \begin{pmatrix} 250 \\ 92 \end{pmatrix}.$$

2.85.

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	I	II	
I	12	18	120
II	12	6	60

$$Y = \begin{pmatrix} 360 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

2.86.

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	I	II	
I	88,6	34,4	443
II	12	6	191

$$Y = \begin{pmatrix} 390 \\ 99 \end{pmatrix}.$$

2.87.

Отрасль	Потребление продукции			Валовой выпуск
	I	II	III	
I	79	106	300	790
II	237	212	75	530
III	158	53	150	750

$$Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

2.88.

Отрасль	Потребление продукции			Валовой выпуск
	I	II	III	
I	16	42	42	200
II	12	21	21	300
III	46	27	27	500

$$Y = \begin{pmatrix} 164 \\ 394 \\ 794 \end{pmatrix}.$$

2.89. Для задачи **2.83** найти необходимый объем валового выпуска отрасли, если конечное потребление продукции I-й отрасли увеличится на 22%, а II-й отрасли уменьшится на 10%.

2.90. Для задачи **2.88** найти необходимый объем валового выпуска отрасли, если конечное потребление продукции I-й отрасли увеличится на 20%, II-й отрасли уменьшится на 18%, а III-й отрасли увеличится на 15%.

Глава 3

Векторы на плоскости и в пространстве

§ 3.1. Векторы. Линейные операции над векторами

Вектор (в пространстве, на плоскости, на прямой) это направленный отрезок, т. е. отрезок AB, взятый с одним из двух возможных направлений: от A к B или от B к A. Итак, с отрезком AB связаны два вектора: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Длина отрезка AB называется *длиной*, или *модулем*, вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overrightarrow{0}$. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*, или *ортом*.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два произвольных вектора. Не теряя общности, предположим, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 3.1).

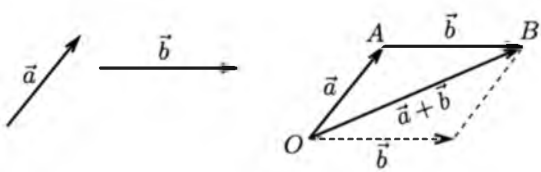

Рис. 3.1

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна числу $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и имеет противоположное направление (т. е. направлением вектора $-\vec{a}$), если $\lambda < 0$.

Вектор $(-1)\cdot\vec{b}$ называется противоположным по отношению к вектору $\vec{b}$ и обозначается $-\vec{b}$, а *разность* $\vec{a}-\vec{b}$ определяется как $\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 3.2).

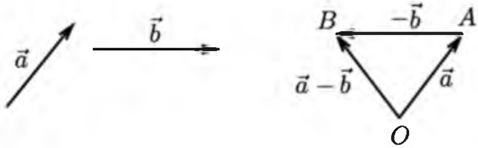

Рис. 3.2

Выражение $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, где λ, μ — произвольные постоянные, называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.1. Доказать, что операция сложения векторов имеет следующие основные свойства:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство *коммутативности*),

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (свойство *ассоциативности*),

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (свойство существования *нулевого* вектора),

4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (свойство существования *противоположного* вектора).

3.2. Даны ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить векторы $2\vec{a}$, $-\dfrac{3}{2}\,\vec{a}$, $\vec{a}-\dfrac{1}{2}\,\vec{b}$, $\dfrac{1}{3}\,\vec{a}+3\vec{b}$.

3.3. Доказать, что операция произведения вектора на число имеет следующие основные свойства:

1. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ (свойство *ассоциативности*),

2. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (свойство *дистрибутивности* относительно суммы векторов),

3. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ (свойство *дистрибутивности* относительно суммы чисел).

3.4. Доказать равенства:

а) $\vec{a} + \dfrac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$,

б) $\vec{a} - \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \dfrac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

Объяснить их геометрический смысл.

3.5. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ отложены векторы $\vec{a} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$,

б) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

3.6. Векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ построены на сторонах треугольника ABC. Представить векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.7. Векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ построены на сторонах параллелограмма $ABCD$, O является точкой пересечения диагоналей. Представить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BO}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.8. В параллелограмме $ABCD$ даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, где O — точка пересечения диагоналей. Представить векторы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.9. Точки D_1, D_2 и D_3 делят сторону AC треугольника ABC на четыре равные части. Представить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AD_1}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BD_2}$.

3.10. Точка O — пересечение диагоналей параллелограмма $ABCD$.

а) Представить $\overrightarrow{BC}$ в виде линейной комбинации $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

б) Представить $\overrightarrow{CD}$ в виде линейной комбинации $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

в) Представить $\overrightarrow{BC}$ в виде линейной комбинации $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$.

3.11. $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ и $\overrightarrow{CM}$ — медианы треугольника. Доказать равенство $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

§ 3.2. Коллинеарные и компланарные векторы

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 3.3). В противном случае они называются ***неколлинеарными*** (рис. 3.4).

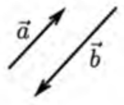

Рис. 3.3. Коллинеарные векторы

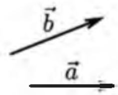

Рис. 3.4. Неколлинеарные векторы

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат на одной плоскости или на параллельных плоскостях (рис. 3.5). В противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***некомпланарными*** (рис. 3.6).

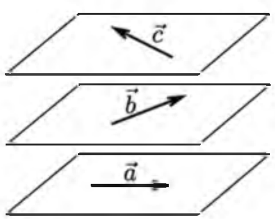

Рис. 3.5. Компланарные векторы

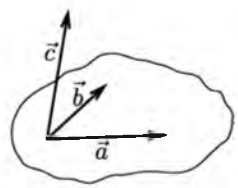

Рис. 3.6. Некомпланарные векторы

3.12. Доказать, что ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где λ — однозначно определенное число.

3.13. Доказать, что ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие.

3.14. Доказать, что любой вектор $\vec{a}$ плоскости представляется, причем единственным образом, в виде линейной комбинации любых двух наперед заданных неколлинеарных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$

3.15. Доказать, что любой вектор $\vec{a}$ пространства представляется, причем единственным образом, в виде линейной комбинации любых трех наперед заданных некомпланарных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

3.16*. Точка O лежит в плоскости треугольника ABC и обладает следующим свойством: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Выразить вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

3.17. В условиях предыдущей задачи выразить вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

3.18. Выразить вектор $\overrightarrow{OA}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$,

3.19. Известны разложения векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c},$$

$$\vec{q} = y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}.$$

Какая зависимость должна существовать между коэффициентами этих разложений, если

а) $\vec{p} = \vec{q}$, б) $2\vec{p} + 3\vec{q} = \vec{0}$, в) векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны?

3.20. Разложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по неколлинеарным векторам $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$.

3.21. Разложить вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ и $\vec{p} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$.

3.22. Разложить вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{p} = \vec{c} + \vec{a}$.

§ 3.3. Прямоугольная система координат

1°. **Прямоугольные координаты вектора и точки**. Рассмотрим произвольную точку O и единичные взаимно-перпендикулярные векторы (*орты*) $\vec{i}$, $\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) плоскости (пространства). Предположим, что в случае плоскости кратчайший поворот от орта $\vec{i}$ к орту $\vec{j}$ совершается против часовой стрелки (рис. 3.7), а в случае пространства с конца орта $\vec{k}$ кратчайший поворот от орта $\vec{i}$ к орту $\vec{j}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 3.8). Тогда говорят, что на плоскости (в пространстве) задана ***прямоугольная (или декартова) система координат*** Oxy ($Oxyz$).

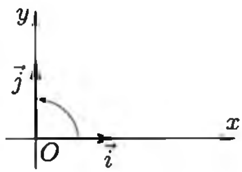

Рис. 3.7

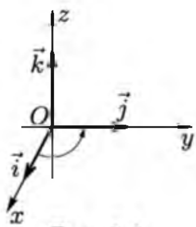

Рис. 3.8

Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ — произвольный вектор плоскости (пространства). Вектор $\vec{a}$ единственным способом представляется в виде

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \quad (\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \tag{3.1}$$

(см. задачи **3.14** и **3.15**).

Однозначно определенные коэффициенты a_1, a_2 (a_1, a_2, a_3) разложения (3.1) называются ***прямоугольными координатами вектора*** $\vec{a}$ (рис. 3.9). Вектор $\vec{a}$ с координатами a_1, a_2, a_3 обозначается так: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

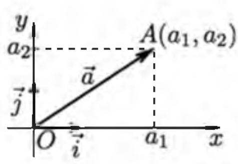

Рис. 3.9

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — два произвольных вектора пространства. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A. Координаты радиус-вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ называются ***координатами точки*** A.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ произвольные точки пространства. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Пример 3.1. Найти координаты вектора $\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$, если $\vec{a} = (5, 1)$, $\vec{b} = (3, -4)$ и $\vec{c} = (1, -9)$.

Решение. $\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c} = (5,1) + 3(3,-4) - 5(1,-9) = (5,1) + (9,-12) - (5,-45) = (5 + 9 - 5, 1 - 12 + 45) = (9, 34)$. □

Пример 3.2. Представить вектор $\vec{a} = (2, -1)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{b} = (1, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1)$.

Решение. Нужно найти такие числа λ и μ, что $(2, -1) = \lambda(1, 1) + \mu(-1, 1)$. Учитывая равенство $\lambda(1, 1) + \mu(-1, 1) = (\lambda, \lambda) + (-\mu, \mu) = (\lambda - \mu, \lambda + \mu)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 2, \\ \lambda + \mu = 1. \end{cases}$$

Откуда находим: $\lambda = 1{,}5$ и $\mu = -0{,}5$.

Итак, $\vec{a} = 1{,}5\,\vec{b} - 0{,}5\,\vec{c}$. □

3.23. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ и их сумму, если $A = (5, -3, 1)$, $B = (6, 2, -4)$ и $C = (4, 0, 7)$.

3.24. Найти вектор $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, если

а) $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1)$, $\vec{c} = (0, -3)$,

б) $\vec{a} = (-1, -2)$, $\vec{b} = (0, 3)$, $\vec{c} = (4, -2)$.

3.25. Найти вектор $4\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, если

а) $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, 2, 4)$, $\vec{c} = (6, -6, 0)$,

б) $\vec{a} = (-3, 4, 2)$, $\vec{b} = (6, 0, 8)$, $\vec{c} = (3, 1, -7)$.

3.26. Представить вектор $\vec{a} = (1, 2)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{b} = (1, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1)$.

3.27. Представить вектор $\vec{a} = (3, 1)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{b} = (1, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1)$.

3.28. Представить вектор $\vec{a} = (1, 1, 1)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1} = (1, 1, -1)$, $\vec{e_2} = (1, -1, 1)$ и $\vec{e_3} = (-1, 1, 1)$.

3.29. Представить вектор $\vec{a} = (1, 1, 1)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{e_1} = (1, 0, 1)$, $\vec{e_2} = 1, 1, 0)$ и $\vec{e_3} = (0, 1, 1)$.

2°. Расстояние между двумя точками. Длина вектора. Расстояние d между двумя произвольными точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ пространства вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{3.2}$$

а между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости — по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3.3}$$

Длина вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ в пространстве вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \tag{3.4}$$

а вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ в плоскости — по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \tag{3.5}$$

3.30. Даны точки $A(0, 0)$, $B(3, -4)$, $C(-3, 4)$, $D(-2, 2)$ и $E(10, -3)$. Определить расстояние d между точками:

1) A и B, 2) B и C, 3) A и C, 4) C и D, 5) A и D, 6) D и E.

3.31. Построить треугольник ABC и определить его периметр, если координаты вершин имеют следующие значения:

а) $A(-4, 2)$, $B(0, -1)$, $C(3, 3)$,

б) $A(-2, 3)$, $B(2, 0)$, $C(0, 4)$,

в) $A(-4, 3)$, $B(-1, -1)$, $C(2, -1)$.

3.32. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(1, 3)$ на 5 единиц.

3.33. На оси ординат найти точку, удаленную от точки $A(4, -1)$ на 5 единиц.

3.34. Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки $A(2, 1)$, так и от оси Oy.

3.35. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(-2,5)$.

3.36. На оси абсцисс найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(8,4)$.

3°. Деление отрезка в данном отношении. Пусть A и B – произвольные точки пространства. Говорят, что точка M, лежащая на прямой AB, делит отрезок AB в *отношении* λ, если

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

Пример 3.3. По координатам точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ найти координаты точки $M(x, y, z)$, которая делит отрезок AB в отношении λ.

Решение. По условию справедливо равенство

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}. \tag{3.6}$$

Так как $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, а $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$, то в координатной записи равенство (3.6) эквивалентно следующим трем равенствам:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Решая эти равенства относительно x, y, и z соответственно, получим искомые координаты точки M:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из последних формул при $\lambda = 1$ получаются координаты середины отрезка AB:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}. \quad \square \end{cases} \tag{3.8}$$

4°. **Условие коллинеарности векторов.** Векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в пространстве коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \tag{3.9}$$

В случае векторов $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ в плоскости условие коллинеарности принимает вид:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}. \tag{3.10}$$

3.37. Точка M является серединой отрезка OA, соединяющего начало координат O с точкой $A(-5, 2)$. Найти координаты точки M.

3.38. Найти длину медиан в треугольнике с вершинами

а) $A(11, 3)$, $B(15, 23)$ и $C(31, 15)$,

б) $A(0, -3)$, $B(2, 4)$ и $C(10, 5)$,

в) $A(1, 5)$, $B(4, 0)$ и $C(0, 10)$.

3.39. Построить точки A и B, найти точку $M(x, y)$, делящую отрезок AB в отношении $AM : MB = 3 : 2$. Координаты точек A и B следующие:

а) $A(-2, 1)$, $B(2, 1)$,

б) $A(-2, 1)$, $B(3, 6)$,

в) $A(-3, 2)$, $B(2, 4)$.

3.40. Отрезок, ограниченный точками $A(1, -3)$ и $B(4, 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

3.41. Точки $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$ и $C(4, -1)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.

3.42. Найти сумму ординат середин сторон треугольника ABC с вершинами в точках $A(3, 4)$, $B(7, 12)$ и $C(15, 8)$.

3.43. Даны точки $A(1,0)$, $B(5,1)$ и $C(2,3)$. Найти вектор $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$, где A', B' и C' — середины сторон BC, AC и AB соответственно.

3.44. Точки $A(1,0)$, $B(5,1)$ и $C(2,3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D и точки пересечения диагоналей параллелограмма.

3.45. Точки $A(0,0,0)$, $B(2,3,0)$, $C(6,3,0)$ и $A'(1,1,4)$ являются вершинами параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Найти координаты вершин D, B', C' и D' и центра параллелепипеда.

3.46. Являются ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарными?

а) $\vec{a} = (5,2)$, $\quad \vec{b} = (10,4)$,

б) $\vec{a} = (3,6)$, $\quad \vec{b} = (-1,2)$,

в) $\vec{a} = (3,6)$, $\quad \vec{b} = (-1,-2)$,

г) $\vec{a} = (5,2)$, $\quad \vec{b} = (0,0)$.

3.47. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(3,1)$ и $D(0,1)$ является параллелограммом. Вычислить длину диагоналей этого параллелограмма.

3.48. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках $A(2,1)$, $B(6,-3)$, $C(5,6)$ и $D(3,8)$ является трапецией и вычислить длину оснований этой трапеции.

3.49. Отрезок с концами в точках $A(1,5)$ и $B(8,-2)$ разделен на три равные части точками C и D. Найти координаты точек C и D.

3.50. Доказать, что треугольник с вершинами $A(0,0)$, $B(4,0)$ и $C(2,-2\sqrt{3})$ — равносторонний. Найти высоту этого треугольника.

3.51. Даны вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(4,2)$ и $C(6,0)$. Вычислить длину медиан этого треугольника.

3.52. Определить координаты вершин треугольника, если известны середины его сторон: $K(1,1)$, $L(2,-2)$ и $M(4,3)$.

3.53. Даны вершины треугольника: $A(3,-2,1)$, $B(3,1,5)$ и $C(4,0,3)$. Найти координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

§ 3.4. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (3.11)$$

где $\varphi = \angle(\vec{a},\vec{b})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение двух векторов имеет следующие основные свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$,

3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

В прямоугольных координатах скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (3.12)$$

Косинус угла между двумя векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (3.13)$$

Два ненулевых вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$, что равносильно равенству

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

(*условие взаимной перпендикулярности векторов*).

3.54. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = 60°$, б) $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = 30°$,

в) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = 135°$, г) $|\vec{a}| = \pi$, $|\vec{b}| = e$, $\varphi = 90°$.

3.55. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (3,1)$, $\vec{b} = (1,2)$, б) $\vec{a} = (4,4)$, $\vec{b} = (-1,1)$,

в) $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,0,1)$, г) $\vec{a} = (4,0,2)$, $\vec{b} = (3,1,0)$.

3.56. Для данных векторов указать пары коллинеарных и перпендикулярных векторов:

$\vec{a} = (8,6,12)$, $\vec{b} = (-3,4,0)$, $\vec{c} = (20,15,30)$, $\vec{d} = (0,-10,5)$, $\vec{e} = (5,-7,3)$.

3.57. Найти косинус угла $\angle AOB$ и определить, является этот угол острым, прямым или тупым.

а) $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(6,2)$, б) $O(0,0)$, $A(-1,2)$, $B(6,3)$,

в) $O(0,0)$, $A(-1,2)$, $B(6,-3)$.

3.58. Найти векторы единичной длины, перпендикулярные вектору $\vec{a}$:

а) $\vec{a} = (4,-3)$, б) $\vec{a} = (-5,5)$, в) $\vec{a} = (\sqrt{3},1)$.

3.59. Найти векторы единичной длины, перпендикулярные вектору $\vec{a}$ и лежащие в плоскости $z = 0$:

а) $\vec{a} = (4,-3,0)$, б) $\vec{a} = (-5,5,0)$, в) $\vec{a} = (\sqrt{3},1,0)$.

3.60. Найти векторы единичной длины, перпендикулярные вектору $\vec{a}$ и лежащие в плоскости $x = 0$:

а) $\vec{a} = (0,4,-3)$, б) $\vec{a} = (0,-5,5)$, в) $\vec{a} = (0,\sqrt{3},1)$.

3.61. Найти косинусы углов между вектором $\vec{a}$ и координатными осями, если

а) $\vec{a} = (3,2)$, б) $\vec{a} = (1,2,3)$.

3.62. Вывести формулы для косинусов углов[1] между вектором (x, y, z) и ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3.63. Найти угол между медианами, проведенными из острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

3.64. Найти угол между медианами в равностороннем треугольнике.

3.65. Раскрыть скобки в выражении $\vec{a}\cdot\vec{b}$, используя свойства скалярного произведения, если $\vec{a} = -4\vec{p} + 7\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, где $\vec{p}\cdot\vec{p} = 4$, $\vec{p}\cdot\vec{q} = 5$ и $\vec{q}\cdot\vec{q} = 1$.

3.66. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные векторы, угол между которыми равен $45°$.

3.67. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q} - 2\vec{r}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{r}$, где $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ — векторы длины 2, попарные углы между которыми равны $60°$.

3.68. Найти значение коэффициента k, при котором векторы $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} + k\vec{q}$ ортогональны, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны.

3.69. Пусть $\vec{a} = (-1, 2, 4)$ и $\vec{b} = (1, 1, 1)$. Найти:

а) $\vec{a}\cdot\vec{a}$, б) $|\vec{a}|$, в) единичный вектор в направлении $\vec{a}$,

г) вектор длины 3 в направлении, противоположном $\vec{a}$,

д) $|\vec{b}|$, е) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ж) угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.70. Пусть $\vec{a} = (3, 2, -1)$ и $\vec{b} = (3, 4, 0)$. Найти:

а) $\vec{a}\cdot\vec{a}$, б) $|\vec{a}|$, в) единичный вектор в направлении $\vec{a}$,

г) вектор длины 3 в направлении, противоположном $\vec{a}$,

д) $|\vec{b}|$, е) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, ж) угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3.71. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-1, -2)$, $B(-4, 3)$, $C(1, 6)$ и $D(4, 1)$ — квадрат.

---

[1] Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами* вектора (x, y, z).

3.72. Найти косинус угла между диагоналями AC и BD параллелограмма, если заданы три его вершины $A(0,0)$, $B(-3,4)$ и $C(2,4)$.

§ 3.5. Векторное и смешанное произведение векторов

1°. **Векторное произведение векторов**. Говорят, что три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *правую тройку* (*левую тройку*) или *положительно ориентированы* (*отрицательно ориентированы*), если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (по часовой стрелке) (рис. 3.10).

Рис. 3.10. (a) правая тройка, (b) левая тройка

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi; \tag{3.14}$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 3.11).

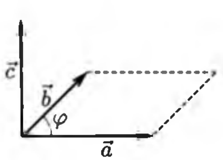

Рис. 3.11

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Согласно первому условию последнего определения, длина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из определения векторного произведения следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Векторное произведение имеет следующие свойства:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,

2) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$,

3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ произвольные векторы, заданные своими прямоугольными координатами. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{3.15}$$

или, в символической записи,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3.16}$$

3.73. Найти векторные произведения:

а) $\vec{i} \times \vec{j}$, б) $\vec{i} \times \vec{k}$, в) $\vec{i} \times \left(-\vec{k}\right)$, г) $\vec{j} \times \vec{k}$.

3.74. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$ и синус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (4, -2, 3)$, $\vec{b} = (-3, 3, -6)$,

б) $\vec{a} = (-2, 1, 4)$, $\vec{b} = (3, 0, -1)$,

в) $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (4, 2, 5)$.

3.75. Найти векторы единичной длины, ортогональные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (3, 0, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 4)$, б) $\vec{a} = (3, 1, 4)$, $\vec{b} = (0, 2, 5)$.

3.76. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2, 3, 1)$ и $\vec{b} = (-1, 1, 4)$.

3.77. Найти площадь параллелограмма $ABCD$ с вершинами $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 3, 4)$, $C = (2, 2, 4)$.

3.78. Найти площадь треугольника ABC, если $A = (1, 0)$, $B = (5, 1)$, $C = (2, 3)$.

3.79. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$, используя свойства векторного произведения, если $\vec{a} = 3\vec{p} + 7\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{p} \times \vec{q} = (1, 0, -2)$.

3.80. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 4\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$, а $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные векторы, угол между которыми равен $45°$.

3.81. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + 6\vec{q}$, а $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — векторы длины 2, угол между которыми равен $60°$.

3.82. Найти значение коэффициента k, при котором векторы $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} + k\vec{q}$ коллинеарны (векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны).

3.83. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$, если

а) $\vec{a} = (-1, 5, 2)$, $\vec{b} = (6, 4, 3)$, б) $\vec{a} = (9, 7, -5)$, $\vec{b} = (8, -2, 0)$.

3.84. Найти угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью, параллельной векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, предварительно найдя угол между $\vec{c}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = (4, 0, -5)$, $\vec{b} = (-4, 3, 1)$ и $\vec{c} = (1, -5, 5)$.

2°. **Смешанное произведение векторов.** Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы пространства. Число $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ называется *смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и обозначается через $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Для того, чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнение условия $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «−», если они образуют левую тройку.

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ не меняется при циклической перестановке его сомножителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}. \tag{3.17}$$

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — произвольные векторы, заданные своими прямоугольными координатами. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.18}$$

3.85. Даны векторы $\vec{a} = (1,-7,7)$, $\vec{b} = (-2,1,7)$ и $\vec{c} = (-3,6,1)$. Найти смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$. Какова ориентация тройки $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$?

3.86. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = (3,2,2)$, $\vec{b} = (4,-1,5)$ и $\vec{c} = (0,-7,5)$. Какова ориентация тройки $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$?

3.87. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (3,2,2)$, $\vec{b} = (4,-1,5)$ и $\vec{c} = (2,5,-1)$.

3.88. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и $|\vec{c}| = 3$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3.89. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ и $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 30°$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3.90.* Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,2,0)$, $D = (0,0,3)$.

3.91. Проверить, компланарны ли следующие векторы:

а) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$,

б) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 8\vec{i} - 7\vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

3.92. При каком λ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны?

а) $\vec{a} = (\lambda,3,1)$, $\vec{b} = (1,-5,4)$, $\vec{c} = (-1,7,8)$,

б) $\vec{a} = (0,\lambda,2)$, $\vec{b} = (1,2\lambda,0)$, $\vec{c} = (3,4,1)$.

Глава 4

Линейные пространства и линейные операторы

§ 4.1. Линейное пространство

1°. **Понятие линейного пространства**. Говорят, что на множестве L задана операция *сложения* элементов, обозначаемая знаком «+», и операция *умножения элемента на число*, если:

1) имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ множества L ставится в соответствие некоторый элемент $\mathbf{z}$ этого множества, называемый *суммой* элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и обозначаемый символом $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$,

2) имеется правило, посредством которого любому элементу $\mathbf{x}$ множества L и любому числу λ ставится в соответствие некоторый элемент $\mathbf{z}$ этого множества, называемый произведением числа λ на элемент $\mathbf{x}$ и обозначаемый символом $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}$.

Множество L называется *линейным* или *векторным* пространством, если на нем определены операции сложения элементов и умножения элемента на число, удовлетворяющие следующим восьми аксиомам:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3. существует *нулевой* элемент $\mathbf{0}$, такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
4. для каждого элемента $\mathbf{x}$ существует *противоположный* элемент $\mathbf{x}'$, такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}$;
5. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;
7. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;
8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*.

Проверить, что следующие множества являются линейными пространствами.

4.1. Множество всех векторов плоскости или трехмерного пространства относительно операций сложения двух векторов и умножения вектора на число.

4.2. Множество $\mathbf{R}^n$ всех арифметических n-компонентных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно естественных операций сложения двух векторов и умножения вектора на число.

4.3. Множество $C[a, b]$ всех непрерывных на отрезке функций $f(x)$ относительно естественных операций сложения функций и умножения их на число.

4.4. Множество всех матриц размера $m \times n$ относительно операций сложения матриц и умножения их на число.

2°. **Линейная зависимость и линейная независимость. Базис линейного пространства**. Векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ... , $\mathbf{x}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, не все одновременно равные нулю, что

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Если равенство (4.1) выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ называются *линейно независимыми*.

Теорема 4.1. *Элементы* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных элементов.*

Линейно независимая система элементов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ пространства L называется *базисом* этого пространства, если любой элемент $\mathbf{x}$ пространства L является линейной комбинацией этих элементов, т. е.

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n, \tag{4.2}$$

где x_1, x_2, ..., x_n — некоторые числа, называемые *координатами* элемента $\mathbf{x}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Равенство (4.2) называется *разложением элемента* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

В линейном пространстве L любые два базиса содержат одинаковое число элементов. Это число называется *размерностью* линейного пространства L, а само пространство L называется ***n*-мерным линейным** или ***векторным пространством***.

Отображение $\varphi : X \to Y$ между двумя множествами X и Y называется ***взаимно-однозначным***, если каждому элементу $x \in X$ сопоставляется один и только один элемент $y = \varphi(x) \in Y$, причем каждый элемент $y \in Y$ соответствует единственному элементу $x \in X$.

Линейные пространства L и L' называются ***изоморфными***, если существует такое взаимно-однозначное отображение $\varphi : L \to L'$, которое удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$,

2) $\varphi(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \varphi(\mathbf{x})$,

для любых элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства L и любого числа λ. В этом случае отображение $\varphi : L \to L'$ называется ***изоморфизмом*** линейных пространств L и L'.

4.5. Пусть $\vec{e}_1 = (3, 1)$ и $\vec{e}_2 = (2, 5)$.

а) Найти $2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

б) Найти такие числа α и β, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = (2, -4)$.

4.6. Пусть $\vec{e}_1 = (-2, 5)$ и $\vec{e}_2 = (4, 6)$.

а) Найти $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

б) Найти такие числа α и β, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = (3, 2)$.

4.7. Пусть $\vec{e}_1 = (1, 7)$ и $\vec{e}_2 = (3, -5)$.

а) Найти $6\vec{e}_1$.

б) Найти такие числа α и β, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 = (6, 0)$.

4.8. Пусть $\vec{e}_1 = (2, 6, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 4, 4)$ и $\vec{e}_3 = (1, 0, 5)$.

а) Найти $\vec{e}_1 - 16\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$.

б) Найти такие числа α, β и γ, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (1, -16, 9)$.

4.9. Пусть $\vec{e}_1 = (7, 0, 4)$, $\vec{e}_2 = (-7, -4, 4)$ и $\vec{e}_3 = (6, 5, 1)$.

а) Найти $-2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

б) Найти такие числа α, β и γ, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (-2, 6, 2)$.

4.10. Пусть $\vec{e}_1 = (4, -2, 6)$, $\vec{e}_2 = (-2, 1, -6)$ и $\vec{e}_3 = (2, -2, 7)$.

а) Найти $10\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 14\vec{e}_3$.

б) Найти такие числа α, β и γ, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (10, -1, 14)$.

4.11. Пусть $\vec{e}_1 = (3, 2, -1)$, $\vec{e}_2 = (3, 2, 3)$ и $\vec{e}_3 = (6, -7, 2)$.

а) Найти $9\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$.

б) Найти такие числа α, β и γ, что $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = (9, 6, 5)$.

4.12. Доказать, что в линейном пространстве всех векторов плоскости любые два неколлинеарных вектора являются базисом этого пространства.

4.13. Доказать, что в линейном пространстве всех векторов пространства любые три некомпланарных вектора являются базисом этого пространства.

4.14. Доказать, что размерность линейного пространства $\mathbf{R}^n$ равна n.

4.15. Доказать, что в линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ векторы $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn})$ линейно независимы (следовательно, образуют базис) тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

4.16. Являются ли данные векторы линейно независимыми?

а) $\vec{x}_1 = (2, 2)$, $\vec{x}_2 = (5, 5)$.

б) $\vec{x}_1 = (2, 2)$, $\vec{x}_2 = (5, 4)$.

в) $\vec{x}_1 = (0, 0)$, $\vec{x}_2 = (5, 4)$.

г) $\vec{x}_1 = (4, 3)$, $\vec{x}_2 = (5, 2)$, $\vec{x}_3 = (7, 11)$.

4.17. Образуют ли векторы из задачи **4.16** базис $\mathbf{R}^2$?

4.18. Являются ли данные векторы линейно независимыми?

а) $\mathbf{x}_1 = (2, 0, -4)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 1)$.

б) $\mathbf{x}_1 = (2, 0, -4)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (-1, 3, 11)$.

в) $\mathbf{x}_1 = (2, 0, -4)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (3, 6, -2)$.

г) $\vec{x}_1 = (2, 0, -4)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{x}_3 = (3, 6, -2)$, $\vec{x}_4 = (-7, 8, 5)$.

4.19. Образуют ли векторы из задачи **4.18** базис $\mathbf{R}^3$?

4.20. Являются ли данные векторы линейно независимыми?

а) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (4, 5, 6)$.

б) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{x}_3 = (7, 8, 9)$.

в) $\vec{x}_1 = (8, -4, 5)$, $\vec{x}_2 = (3, 2, 6)$, $\vec{x}_3 = (0, 7, 1)$.

г) $\vec{x}_1 = (8, -4, 5)$, $\vec{x}_2 = (3, 2, 6)$, $\vec{x}_3 = (0, 7, 1)$, $\vec{x}_4 = (-2, -8, 3)$.

4.21. Образуют ли векторы из задачи **4.20** базис $\mathbf{R}^3$?

4.22. Доказать, что векторы $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ образуют базис $\mathbf{R}^2$:

а) $\vec{x}_1 = (1, 1)$, $\vec{x}_2 = (-1, 1)$.

б) $\vec{x}_1 = (4, 3)$, $\vec{x}_2 = (2, 2)$.

в) $\vec{x}_1 = (2, -1)$, $\vec{x}_2 = (-5, 0)$.

4.23. Доказать, что векторы $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_3$ образуют базис $\mathbf{R}^3$:

а) $\vec{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 1, 1)$.

б) $\vec{x}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{x}_3 = (-1, 1, 1)$.

в) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (2, 3, 1)$, $\vec{x}_3 = (3, 1, 2)$.

4.24. Проверить выполнение свойств $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ и $\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})$ для следующих отображений $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$:

а) $\varphi(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$.

б) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

в) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, 1)$.

г) $\varphi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

д) $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.

4.25. Какие из отображений в задаче **4.24** являются изоморфизмами?

§ 4.2. Линейные операторы

Пусть L — n-мерное линейное пространство. Отображение $\mathcal{A} : L \to L$ называется ***линейным оператором***, если выполняются условия:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — произвольные элементы пространства L, а λ — любое действительное число.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — некоторый базис n-мерного линейного пространства L. Разложим векторы $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_n$ по базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}\mathbf{e}_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n. \end{array} \tag{4.3}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

называется ***матрицей оператора*** $\mathcal{A}$ ***в базисе*** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

В данном базисе действие линейного оператора $\mathcal{A}$ ***сводится к умножению соответствующей матрицы*** A ***на координатный столбец элемента, т. е.***

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{x} \in L$ — произвольный элемент.

Пример 4.1. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти образ $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$.

Решение. По формуле (4.5) имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = 5\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$. □

Пример 4.2. Доказать, что отображение $\mathcal{A}$, заданное формулой

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (4x_2 - x_3, x_1, 2x_2),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, является линейным оператором и найти его матрицу.

Решение. Рассмотрим произвольные элементы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и проверим линейность оператора $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= \\ (4(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), x_1 + y_1, 2(x_2 + y_2)) &= \\ (4x_2 + 4y_2 - x_3 - y_3, x_1 + y_1, 2x_2 + 2y_2) &= \\ ((4x_2 - x_3) + (4y_2 - y_3), x_1 + y_1, 2x_2 + 2y_2) &= \\ (4x_2 - x_3, x_1, 2x_2) + (4y_2 - y_3, y_1, 2y_2) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (4\lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1, 2\lambda x_2) &= \\ \lambda(4x_2 - x_3, x_1, 2x_2) &= \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Так как $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathcal{A}(1,0,0) = (4,1,0)$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathcal{A}(0,1,0) = (0,0,2)$ и $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = \mathcal{A}(0,0,1) = (-1,0,0)$, следовательно, матрица данного оператора имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Пример 4.3. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, если

а) $\mathcal{A}$ — осевая симметрия относительно прямой $y = x$,

б) $\mathcal{A}$ — вращение против часовой стрелки на $90°$ относительно начала координат.

Решение. а) Так как $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_1$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Так как $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 = -1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_1$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Пример 4.4. Найти $\mathbf{x}$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (4, -2)$.

Решение. Поскольку $\mathcal{A}(x_1, x_2) = (4x_1 + 2x_2, 8x_1 + 9x_2)$, следовательно, x_1 и x_2 будут решениями системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 4, \\ 8x_1 + 9x_2 = -2, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Итак, $\mathbf{x} = (2, -2)$. □

Вычислить $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ для оператора с заданной матрицей A.

4.26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (-6, 4)$.

4.27. $A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (-7, 1)$.

4.28. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (3, 9)$.

4.29. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (0, 6)$.

4.30. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (5, -1)$.

4.31. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (2, 5)$.

4.32. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{x} = (-5, 2, 5)$.

4.33. $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (2, -3, 1)$.

4.34. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (6, 2, -3)$.

4.35. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (0, 3, 1)$.

4.36. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = (5, 2, 0)$.

Проверить, является ли отображение $\mathcal{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ линейным оператором и, если является, найти его матрицу.

4.37. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)$. **4.38.** $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (0, x_1 + 3x_2)$.

4.39. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\sin(x_1), \cos(x_2))$. **4.40.** $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2 + 1)$.

Проверить, является ли отображение $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ линейным оператором и, если является, найти его матрицу.

4.41. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, 0)$.

4.42. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3)$.

4.43. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (0, 5x_2 - 7, 6x_3)$.

4.44. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1, 4, x_3)$.

Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

4.45. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (-5x_2, 2x_1 + 3x_2)$.

4.46. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + 3x_2, 0)$. **4.47.** $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (-x_2, 0)$.

Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.

4.48. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (0{,}5x_1, -x_2, 0)$. **4.49.** $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1, 0, x_2)$.

4.50. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2 - x_3, x_2 + x_3)$.

4.51. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (ex_1, \pi x_2, \sqrt{3}x_3)$.

4.52. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \left(2x_1, \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3, -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)$.

4.53. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, если

а) $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$,

б) $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ и $\mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

4.54. Найти матрицу линейного оператора $\mathcal{A}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, если:

а) $\mathcal{A}$ — осевая симметрия относительно оси Ox,

б) $\mathcal{A}$ — осевая симметрия относительно прямой $y = -x$,

в) $\mathcal{A}$ — вращение по часовой стрелке на 90° относительно начала координат,

г) $\mathcal{A}$ — вращение против часовой стрелке на 45° относительно начала координат.

4.55. Найти формулу для $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))$ для каждого оператора из предыдущей задачи.

4.56. Найти $\mathbf{x}$, если известны A и $\mathcal{A}(\mathbf{x})$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (-6, 4)$.

б) $A = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (-7, 1)$.

в) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (3, 9)$.

§ 4.3. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть L — n-мерное линейное пространство, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Ненулевой вектор $\mathbf{x} \in L$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$, если существует такое число λ, что

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{4.6}$$

При этом число λ называется *собственным значением* оператора $\mathcal{A}$.

Если выполняется равенство (4.6), то говорят также, что $\mathbf{x} \in L$ есть собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующий собственному значению λ.

Равенство (4.6) эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{4.7}$$

где E — единичная матрица.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейного пространства L.

Теорема 4.2. *Число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда это число является корнем уравнения*

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

Определитель $|A - \lambda E|$ представляет собой многочлен степени n относительно λ. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом*, а уравнение (4.8) — *характеристическим уравнением* матрицы A (оператора $\mathcal{A}$).

Пример 4.5. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение данной матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда получаем уравнение $(1-\lambda)^2 = 16$, решая которое, находим собственные значения $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$.

Теперь найдем собственный вектор $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -3$. Для этого составим матричное уравнение (4.7):

$$(A + 3E)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения находим $x_2 = -2x_1$. Положив $x_1 = c$, получим, что векторы $\mathbf{x}^{(1)} = (c, -2c)$ при любом $c \neq 0$ являются собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = -3$.

Точно так же можно убедиться, что векторы $\mathbf{x}^{(2)} = (c, 2c)$ при любом $c \neq 0$ являются собственными векторами, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = 5$. □

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей A.

4.57. $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$. **4.58.** $A = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$.

4.59. $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ -30 & -20 \end{pmatrix}$. **4.60.** $A = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$.

4.61. $A = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$. **4.62.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

4.63. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -18 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. **4.64.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

4.65. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. **4.66.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4.67. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. **4.68.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4.69. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **4.70.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.71. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. **4.72.** $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.73. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **4.74.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

§ 4.4. Модель международной торговли

Пусть страны $S_1, S_2, \ldots, S_n$ имеют национальные доходы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Обозначим через a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i. Предположим, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т. е. для каждой страны S_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из долей a_{ij}, называется *структурной матрицей торговли*.

Международная торговля будет сбалансированной только тогда, когда для каждой страны S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выручка $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ от внешней и внутренней торговли совпадает с национальным доходом x_i этой страны, т. е. когда выполняется равенство

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x}. \tag{4.9}$$

Таким образом, *для сбалансированной торговли стран S_1, S_2, ..., S_n необходимо, чтобы их национальные доходы были пропорциональны координатам собственного вектора структурной матрицы A, соответствующего собственному значению 1.*

Пример 4.6. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2 и S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы стран для сбалансированной торговли.

Решение. Найдем собственный вектор данной структурной матрицы, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Для этого следует решить матричное уравнение $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, или $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Из этого матричного уравнения получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \qquad\qquad = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{cases}$$

Решив ее методом Гаусса, получим: $x_1 = 8c$, $x_2 = 3c$, $x_3 = 10c$, т. е. $\mathbf{x} = (8c, 3c, 10c)$, где $c \neq 0$ — произвольное число.

Из полученного результата можно сделать вывод, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\mathbf{x} = (8c, 3c, 10c)$, то есть при соотношении национальных доходов стран $8 : 3 : 10$. □

Дана структурная матрица торговли A. Каким должно быть соотношение национальных доходов двух стран для сбалансированной торговли?

4.75. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

4.76. $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4.77. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

4.78. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

4.79. $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

4.80. $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

4.81. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

4.82. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.83. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

4.84. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

4.85. $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

4.86. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

Дана структурная матрица торговли A. Как должны соотноситься национальные доходы трех стран, чтобы торговля была сбалансированной?

4.87. $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4.88. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

4.89. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.90. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$.

4.91. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{9} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{9} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

4.92. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

4.93. $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

4.94. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{9} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

4.95. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{7} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

4.96. $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{3}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{13} & \frac{2}{7} & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{13} & \frac{2}{7} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Глава 5

Прямые линии на плоскости

§ 5.1. Уравнения прямой на плоскости

Прямая на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов.

1°. ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***:

$$y = kx + b, \tag{5.1}$$

где k равен тангенсу угла α $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\right)$ наклона прямой к оси x ($k = \operatorname{tg}\alpha$) и называется ***угловым коэффициентом***, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси y.

2°. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом k***:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5.2}$$

3°. ***Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельной направляющему вектору $\vec{a}(l, m)$***:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) называется ***каноническим уравнением прямой***.

4°. ***Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$***:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{5.4}$$

5°. ***Общее уравнение прямой на плоскости***:

$$Ax + By + C = 0, \tag{5.5}$$

где A, B, C — произвольные коэффициенты (A и B не равны нулю одновременно).

Вектор $\vec{a} = (-B, A)$ является направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением (5.5).

Если ни один из коэффициентов уравнения (5.5) не равен нулю, то это уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{5.6}$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$ и $b = -\dfrac{C}{B}$ — величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Уравнение (5.6) называется ***уравнением прямой «в отрезках»***.

Пример 5.1. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = 30°$.

Решение. Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя k и b в уравнение (5.1), получаем искомое уравнение прямой:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3. \quad \square$$

Пример 5.2. Составить уравнение прямой, проходящей через $A(2, 1)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = 45°$.

Решение. Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Подставляя данные координаты и значение k в уравнение (5.2), получаем:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 2),$$

или

$$x - y - 1 = 0. \quad \square$$

Пример 5.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3, 1)$ и $B(5, 4)$.

Решение. Подставляя данные координаты точек A и B в уравнение (5.4), получаем:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3},$$

или

$$3x - 2y - 7 = 0. \quad \square$$

Пример 5.4. Прямая задана уравнением $3x - 5y - 45 = 0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках».

Решение. Перенесем свободный член в правую часть и разделим полученное уравнение на 45. В результате получим:

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{-9} = 1. \quad \square$$

5.1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол: а) 45°, б) 60°, в) 120°, г) 135°.

5.2. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляющую с осью Ox угол а) 45°, б) 135°. Написать уравнения этих прямых.

5.3. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = -3$ и составляющую с осью Ox угол а) 60°, б) 120°. Написать уравнения этих прямых.

5.4. Определить параметры k и b (см. (5.1)) и построить прямые:

а) $2x - 3y = 6$, б) $2x + 3y = 0$, в) $3x + 4y = 12$,

г) $2x - 5 = 0$, д) $2y + 5 = 0$, е) $y = -3$.

5.5. Написать уравнение прямой, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Ox отрезок, равный: а) 4, б) −5 и в) 0.

5.6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A и составляющей с осью Ox угол φ:

а) $A(2,3)$, $\varphi = 45°$,

б) $A(1,-2)$, $\varphi = 135°$,

в) $A(-2,1)$, $\varphi = 45°$.

5.7. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(2,3)$. Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью Ox углы а) 45°, б) 60°, в) 135°, г) 0°. Построить прямые.

5.8. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку с координатами $(-2,3)$, и построить ее.

5.9. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,3)$ и $B(4,-2)$.

5.10. Найти, какие три из точек $A(1,3)$, $B(-2,1)$, $C(-1,7)$, $D(3,1)$ лежат на одной прямой.

5.11. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A и B, и найти длину отрезка AB. Координаты точек взять следующие:

а) $A(-2,0)$, $\quad B(2,4)$,

б) $A(14,-1)$, $\quad B(6,5)$,

в) $A(12,2)$, $\quad B(6,-6)$.

5.12. Дан треугольник ABC с вершинами $A(4,2)$, $B(-2,4)$, $C(-1,1)$. Написать уравнение медианы CM.

5.13. В треугольнике с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,6)$, $C(4,2)$ написать уравнение стороны AC. Найти длину и написать уравнение медианы BE.

5.14. Дан треугольник ABC с вершинами $A(2,3)$, $B(6,7)$, $C(8,1)$. Найти длину и написать уравнение средней линии, параллельной стороне AC.

5.15. Дан треугольник ABC с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,4)$, $C(4,0)$. Написать уравнение медианы BD.

5.16. Дан треугольник ABC с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,4)$, $C(4,0)$. Написать уравнение стороны AB и найти длину медианы AE.

5.17. Следующие уравнения прямых привести к виду «в отрезках»:

а) $2x - 3y = 6$,

б) $3x - 2y + 4 = 0$,

в) $5x - 2y = 0$,

г) $-3x + y = 1$.

§ 5.2. Нормальный вектор прямой. Расстояние от точки до прямой

Вектор, перпендикулярный данной прямой, называется ее *нормальным вектором.*

$\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой, заданной общим уравнением

$$Ax + By + C = 0. \tag{5.7}$$

1°. *Уравнение прямой, проходящей через точку* $M_0\,(x_0, y_0)$ *перпендикулярной вектору* $\vec{n} = (A, B)$, имеет вид:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0. \tag{5.8}$$

2°. *Расстояние* d *от точки* $M_0(x_0, y_0)$ *до прямой* l (рис. 5.1), заданной общим уравнением (5.7), вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5.9}$$

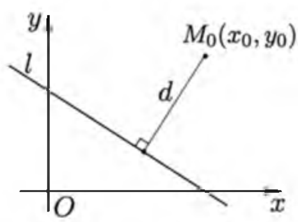

Рис. 5.1

Пример 5.5. Дан треугольник с вершинами $A(2, 0)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$. Написать уравнение высоты AD и найти длину этой высоты.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки B и C (см. формулу (5.4)):

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-4}{0-4},$$

или

$$2x + y - 8 = 0.$$

$\vec{a} = (-1, 2)$ является направляющим вектором этой прямой. Напишем уравнение прямой, проходящей через вершину $A(2, 0)$ и перпендикулярной стороне BC (см. формулу (5.8)):

$$-1\,(x - 2) + 2\,(y - 0) = 0,$$

или

$$x - 2y - 2 = 0.$$

Теперь для определения расстояния от вершины $A(2, 0)$ до стороны BC воспользуемся формулой (5.9):

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}. \quad \square$$

5.18. Найти длину высоты AM в треугольнике ABC с вершинами:

а) $A(-6, 0)$, $B(2, 7)$ и $C(13, 2)$,

б) $A(-2, 1)$, $B(3, 2)$ и $C(2, -3)$,

в) $A(-3, 0)$, $B(2, 5)$ и $C(3, 2)$.

5.19. Найти расстояние от начала координат до прямой $x + y - 2 = 0$.

5.20. Найти расстояние от точки $A(2, 5)$ до прямой $6x + 8y - 5 = 0$.

5.21. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $3x + 4y - 12 = 0$ и $3x + 4y + 13 = 0$.

5.22. Найти длину и уравнение высоты BH в треугольнике ABC с вершинами $A(-3, 0)$, $B(2, 5)$ и $C(3, 2)$.

5.23. По данным уравнениям сторон треугольника $2x - y + 3 = 0$, $x + 6y - 7 = 0$, $3x + 2y - 9 = 0$ составить уравнение высоты, опущенной на первую сторону.

5.24. Написать уравнение прямой, удаленной от точки $A(4, -2)$ на четыре единицы и параллельной прямой $8x - 15y = 0$.

5.25. Написать уравнение прямой, если точка $A(2,3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

5.26. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4,3)$ и удаленной от начала координат на расстояние 5.

5.27. Через точку $A(1,2)$ провести прямую, расстояния до которой от точек $M(2,3)$ и $N(4,-5)$ были бы равны.

§ 5.3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1°. **Угол между двумя прямыми**.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$y = k_1 x + b_1 \tag{5.10}$$

и

$$y = k_2 x + b_2. \tag{5.11}$$

Тогда угол φ (наименьший из углов, отсчитываемый против часовой стрелки) (рис. 5.2) между этими прямыми определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{5.12}$$

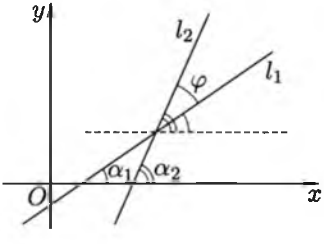

Рис. 5.2

Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{5.13}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{5.14}$$

то угол φ между ними вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{5.15}$$

2°. **Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых**. Прямые, заданные уравнениями (5.10) и (5.11), параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$k_1 = k_2, \tag{5.16}$$

и перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{5.17}$$

Прямые, заданные уравнениями (5.13) и (5.14), параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{5.18}$$

и перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{5.19}$$

Пример 5.6. Две прямые заданы уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Имеем $k_1 = 2$, $k_2 = -3$. Поэтому по формуле (5.12) находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-2}{1 + (-3)\cdot 2} = 1.$$

Таким образом, угол φ между данными прямыми равен $\pi/4$. □

Пример 5.7. Показать, что прямые $4x - 6y + 7 = 0$ и $12x - 18y - 4 = 0$ параллельны.

Решение. Проверим условие параллельности двух прямых (см. (5.18)): $\dfrac{4}{12} = \dfrac{-6}{-18}$. Следовательно, прямые параллельны. □

Пример 5.8. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

Решение. Проверим условие перпендикулярности двух прямых (см. (5.19)): $3\cdot 10+(-5)\cdot 6=0$. Следовательно, прямые перпендикулярны. □

5.28. Опрсдслить угол мсжду прямыми:

а) $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$,

б) $2x+y=0$ и $y=3x-4$,

в) $3x+2y=0$ и $6x+4y+9=0$.

5.29. Дан треугольник с вершинами $A(2,-1)$, $B(1,1)$ и $C(-2,-3)$. Определить угол $\hat{A}$.

5.30. Дан треугольник с вершинами $A(-2,1)$, $B(3,2)$ и $C(2,-3)$. Определить угол $\hat{A}$.

5.31. Построить треугольник, стороны которого заданы уравнениями: $x+y=4$, $8x-y=0$, $x-3y-8=0$. Найти углы треугольника.

5.32. Среди прямых указать параллельные и взаимно перпендикулярные:

а) $3x+2y+6=0$, $3x+2y=0$, $2x-3y+6=0$, $y=-\dfrac{3}{2}x+8$, $5x+15y+3=0$.

б) $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$.

5.33. Написать уравнение прямой, отсекающей от оси Oy отрезок $b=-3$ и перпендикулярной прямой $3x-5y=7$.

5.34. Написать уравнение прямой, отсекающей от оси Oy отрезок $b=5$ и параллельной прямой $\dfrac{x}{2}+y=8$.

5.35. Написать уравнение прямой, отсекающей от оси Oy отрезок $b=1$ и перпендикулярной прямой $2x+3y=7$.

5.36. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,1)$

а) параллельно прямой $3x - 2y + 6 = 0$,

б) перпендикулярно к прямой $3x - 2y = 1$.

5.37. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6,2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.

5.38. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4,3)$ и параллельной прямой $x + 2y + 3 = 0$.

5.39. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,1)$ и перпендикулярной другой прямой $2x + 3y = 6$.

5.40. Найти уравнение прямой, содержащей точку $A(6,-1)$ и параллельной прямой $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y}{1}$.

5.41. Даны точки $A(1,2)$ и $B(4,0)$. Через середину отрезка AB провести перпендикуляр к прямой AB.

5.42. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,1)$ и параллельной прямой, проходящей через точки $M_0(-2,6)$ и $M_1(2,1)$.

5.43. В треугольнике с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,6)$ и $C(4,2)$ проведена высота CD. Написать ее уравнение.

5.44. В точках пересечения прямой $2x - 5y - 10 = 0$ с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.

5.45. Найти координаты точки пересечения прямых $2x + 3y + 1 = 0$ и $6x - y = 15$.

5.46. Найти координаты точки пересечения прямых $2x + 3y - 5 = 0$ и $3x - y + 6 = 0$ и написать уравнение прямой, проходящей через эту точку:

а) параллельно прямой $2x + 4y - 8 = 0$,

б) перпендикулярно прямой $2x + 4y - 8 = 0$.

5.47. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + 3y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$:

а) параллельно прямой $2x + 3y - 6 = 0$,

б) перпендикулярно прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

5.48. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$:

а) параллельно прямой $y = 2x$,

б) перпендикулярно прямой $y = 2x$.

5.49. Дан треугольник с вершинами $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$ и $C(4, 0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

5.50. В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB: $3x + 2y = 12$, уравнение высоты BM: $x + 2y = 4$, уравнение высоты AM: $4x + y = 6$, где M — точка пересечения высот. Написать уравнения сторон AC, BC и высоты CM.

5.51. Написать уравнения сторон треугольника ABC, зная координаты его вершины $A(0, 2)$ и уравнения высот BM: $x + y = 4$ и CM: $y = 2x$, где M — точка пересечения высот.

Глава 6

Плоскости в пространстве

§ 6.1. Уравнения плоскости в пространстве

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка, а $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — исходящие из этой точки произвольные неколлинеарные векторы плоскости П (рис. 6.1).

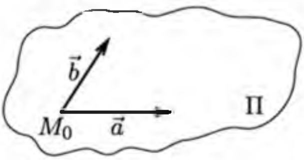

Рис. 6.1

Тогда уравнение плоскости П имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.1}$$

Пример 6.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через не лежащие на одной прямой три точки

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \quad M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2).$$

Решение. Нетрудно заметить, что искомая плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и неколлинеарные векторы $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. Значит, ее уравнение, согласно (6.1), имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad \square \qquad (6.2)$$

Уравнение плоскости П, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (рис. 6.2), имеет следующий вид:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \qquad (6.3)$$

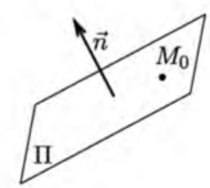

Рис. 6.2

Общее уравнение плоскости, получаемое из (6.3), имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (6.4)$$

Вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ называется ***нормальным вектором*** этой плоскости.

Пример 6.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2,2,3)$.

Решение. По формуле (6.3) искомое уравнение плоскости имеет вид: $2(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$, или $2x + 2y + 3z - 7 = 0$. $\square$

6.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, если

а) $M_0(2,0,-1)$, $\vec{a}_1 = (1,1,0)$ и $\vec{a}_2 = (-2,0,1)$,

б) $M_0(2,-1,-4)$, $\vec{a}_1 = (0,-1,-1)$ и $\vec{a}_2 = (1,2,0)$,

в) $M_0(4,2,0)$, $\vec{a}_1 = (3,1,0)$ и $\vec{a}_2 = (0,0,1)$.

6.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через заданные точки M_1, M_2 и M_3, если

а) $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,1,-1)$ и $M_3(0,0,2)$,

б) $M_1(1,1,0)$, $M_2(2,0,-3)$ и $M_3(-1,0,0)$,

в) $M_1(3,1,0)$, $M_2(-2,0,-2)$ и $M_3(1,2,2)$.

6.3. Точка $P(2,-1,-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

6.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $C(4,0,3)$.

6.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $A(1,0,1)$ и $B(0,1,5)$.

6.6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,3,4)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(3,4,1)$.

6.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $E(2,2,-2)$ и параллельной плоскости $x-2y-3z=0$.

6.8. Даны точки $A(0,-1,3)$ и $B(1,3,5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$.

6.9. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2,3,-1)$ и $B(-1,2,4)$.

6.10. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxy и проходящей через точку $A(1,2,-4)$.

6.11. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3,7,-1)$.

6.12. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2,1,3)$.

§ 6.2. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости, заданной общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

вычисляется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{6.5}$$

Пример 6.3. Даны плоскость $x + 2y + 2z - 8 = 0$ и точка $M_0(1,1,1)$. Найти расстояние d от точки M_0 до данной плоскости.

Решение. Воспользуемся формулой (6.5):

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1. \quad \square$$

6.13. Найти расстояние от плоскости $x - 2y - 2z + 6 = 0$ до начала координат.

6.14. Найти расстояние от точки $(2, 3, -1)$ до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

6.15. Найти расстояние между параллельными плоскостями $5x + 3y - 4z + 15 = 0$ и $15x + 9y - 12z - 5 = 0$.

6.16. Найти сумму координат точки пересечения оси Oy с плоскостью $2x + 3y + z - 3 = 0$.

6.17. Найти общее уравнение плоскости, содержащей точку $A(1, -5, 2)$ и параллельной плоскости $3x - 10y + z - 2 = 0$.

6.18. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1, -2, 0)$ и $B(1, 1, 2)$ и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

6.19. Найти расстояние от точки $E(4, 3, 0)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1, 3, 0)$, $B(4, -1, 2)$ и $C(3, 0, 1)$.

6.20. Найти расстояние от точки $M(-2, 3, 1)$ до плоскости $3x - 2y + 3z + 42 = 0$.

6.21. Найти расстояние от точки $M(4, 3, 1)$ до параллельных плоскостей $5x + 3y - 4z + 15 = 0$ и $15x + 9y - 12z - 15 = 0$.

6.22. На оси Oy найти точку, отстоящую от плоскости $x + 2y - 2z - 2 = 0$ на расстоянии $d = 4$.

6.23. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1, -2, 0)$ и плоскости $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

6.24. На оси Ox найти точку, равноудаленную от двух плоскостей $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ и $2x + 2y - z - 1 = 0$.

§ 6.3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть плоскости Π_1 и Π_2 соответственно заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{6.6}$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{6.7}$$

Углом между двумя плоскостями Π_1 и Π_2 (рис. 6.3) называется угол φ между их нормальными векторами

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

и вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{6.8}$$

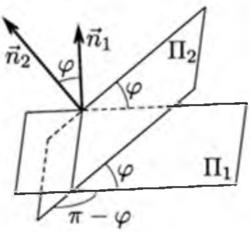

Рис. 6.3

П р и м е р 6.4. Определить угол α между плоскостями $4x - 5y + 7z - 4 = 0$ и $x + 5y + 8z + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (6.8):

$$\cos\alpha = \frac{4 \cdot 1 - 5 \cdot 5 + 7 \cdot 8}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 7^2}\sqrt{1^2 + 5^2 + 8^2}} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}.$$

Значит, $\alpha = \arccos\dfrac{7}{18} \approx 70°$. □

Условие параллельности плоскостей, заданных общими уравнениями (6.6) и (6.7):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями (6.6) и (6.7):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

6.25. Найти угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 12 = 0$.

6.26. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $2x - 3y + 5z - 4 = 0$ и $2x - 3y + 5z + 4 = 0$,

б) $4x + 2y - 4z - 5 = 0$ и $2x + y + 2z - 5 = 0$.

6.27. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $3x - y - 2z - 4 = 0$ и $x + 9y - 3z + 4 = 0$,

б) $2x + 3y - z - 5 = 0$ и $x - y - z - 5 = 0$,

в) $2x - 5y + z - 4 = 0$ и $x + 2z + 4 = 0$.

6.28. Написать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - 2y - z - 3 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 5$.

6.29. Через точку $A(2, 3, -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

6.30. Через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-2, -1, 3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$.

6.31. Найти острый угол между двумя плоскостями $5x - 3y + 4z - 4 = 0$ и $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

Глава 7

Кривые второго порядка

§ 7.1. Эллипс

Геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.1}$$

где $a \geqslant b > 0$, называется *эллипсом*.

Система координат Oxy, в которой уравнение эллипса имеет вид (7.1), называется ***канонической*** (для этого эллипса), а само уравнение (7.1) — ***каноническим уравнением*** эллипса.

Эллипс имеет форму, изображенную на рис. 7.1.

Число a называется ***большой полуосью***, а число b — ***малой полуосью*** эллипса. Точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ называются ***вершинами*** эллипса. Точка $O(0,0)$ называется ***центром*** эллипса. Число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ называется ***линейным эксцентриситетом*** эллипса. Точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$ называются ***фокусами*** эллипса (рис. 7.1).

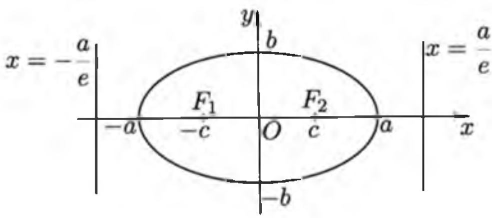

Рис. 7.1

Число $2c$ называется ***фокусным расстоянием*** эллипса. Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом*** эллипса. Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называвается *фокальным параметром* эллипса. Прямые $x = \pm\frac{a}{e}$ называются *директрисами* эллипса.

Эллипс (7.1) *является геометрическим местом точек, сумма расстояний которых до фокусов равна* $2a$. Это свойство эллипса называется его *фокальным свойством.*

При $a = b$ уравнение эллипса (7.1) принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{7.2}$$

являющееся, очевидно, *уравнением окружности* радиуса a с центром в начале координат $O(0, 0)$. Итак, окружность является частным случаем эллипса.

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{7.3}$$

Пример 7.1. Построить эллипс $x^2+4y^2 = 16$. Найти его фокусы и эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (для этого разделим обе части уравнения на 16):

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Следовательно, полуоси $a = 4$, $b = 2$. Тогда $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ и, следовательно, фокусами данного элипса будут: $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ и $F_2(2\sqrt{3}, 0)$.

Найдем эксцентриситет: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Пример 7.2. Построить окружность $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Решение. Чтобы построить окружность, необходимо знать ее центр и радиус.

Приведем наше уравнение к виду (7.3), выделив полные квадраты: $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 - 4 = 0$, или

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2.$$

Итак, имеем окружность с центром в точке $M_0(2, -1)$ и радиусом $R = 3$. □

7.1. Построить эллипс $3x^2 + 16y^2 = 192$. Найти:

1) его полуоси, 2) координаты его фокусов, 3) эксцентриситет.

7.2. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что

а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$, б) большая полуось $a = 6$, $e = 0,5$.

7.3. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки A и B с координатами:

а) $A(2,3)$ и $B\left(1, \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$, б) $A\left(4, \dfrac{9}{5}\right)$ и $B\left(\dfrac{5\sqrt{5}}{3}, 2\right)$,

в) $A(2,0)$ и $B(1,2)$.

7.4. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки M и A. Написать его уравнение и найти расстояние от точки M до фокусов. Координаты точек следующие:

а) $M(2, \sqrt{3})$, $A(0,2)$,

б) $M(2\sqrt{3}, \sqrt{6})$, $A(6,0)$.

7.5. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку M, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния до левого фокуса.

7.6. Эллипс проходит через точку $M(-4, \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $e = \dfrac{3}{4}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы точки M.

7.7. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $F(-1,0)$, чем к прямой $x = -4$.

7.8. На прямой $x = -5$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и от верхней вершины эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$.

7.9. Написать уравнение окружности с центром $C(3,4)$ и радиусом R=5. Лежат ли на этой окружности точки: $A(-1,1)$, $B(2,3)$, $O(0,0)$, $D(4,1)$?

7.10. Написать уравнение окружности с центром $C(2,1)$ и радиусом $R = 3$ и построить ее. Лежат ли на этой окружности точки: $A(-1,2)$, $B(2,4)$, $O(0,0)$? Найти точки пересечения окружности с осями координат.

7.11. Определить траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1,1)$, чем к точке $B(-4,4)$.

7.12. Дана точка $A(-4,6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA.

7.13. Даны точки $A(4,0)$ и $B(1,4)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB.

7.14. Построить окружности:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$,

в) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

7.15. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 = 5$ и $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 31$. Найти отношение радиусов этих окружностей.

§ 7.2. Гипербола

Геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.4}$$

где $a > 0$, $b > 0$, называется *гиперболой*.

Система координат Oxy, в которой уравнение гиперболы имеет вид (7.4), называется *канонической* (для этой гиперболы), а само уравнение (7.4) — *каноническим уравнением* гиперболы.

Гипербола имеет вид, изображенный на рис. 7.2.

Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы. Число a называется *действительной полуосью*, а число b — *мнимой полуосью* гиперболы. Точки $(\pm a, 0)$ называются *вершинами* гиперболы. Точка

$O(0,0)$ называется *центром* гиперболы. Число $c = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *линейным эксцентриситетом* гиперболы. Точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$ называются *фокусами* гиперболы. Число $2c$ называется *фокусным расстоянием* гиперболы. Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* гиперболы. Прямые $x = \pm\dfrac{a}{e}$ называются *директрисами* гиперболы (см. рис. 7.2).

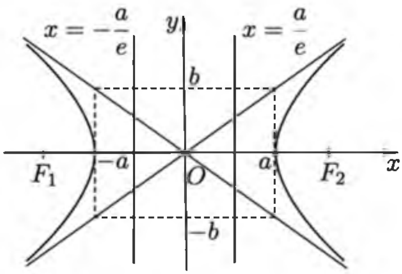

Рис. 7.2

Гипербола (7.4) *является геометрическим местом точек, абсолютная величина разности расстояний которых до фокусов равна* $2a$.

Это свойство гиперболы называется ее *фокальным свойством*.

Пример 7.3. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и ее асимптоты. Найти фокусы и эксцентриситет гиперболы.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду (5.18), разделив его на 16:

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Итак, для нашей гиперболы $a = 4$, $b = 2$. Значит, прямые $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ являются ее асимптотами.

Найдем линейный эксцентриситет гиперболы:

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Значит, фокусами данной гиперболы будут: $F_1\left(-2\sqrt{5},0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{5},0\right)$.

Эксцентриситет гиперболы равен $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. □

7.16. На гиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$ взята точка A с ординатой, равной 1. Найти расстояние от точки A до фокусов.

7.17. Найти расстояние от фокуса гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ до ее асимптот.

7.18. Найти координаты центра, вершин и уравнения асимптот гиперболы $y = \dfrac{4-5x}{x-1}$.

7.19. Написать уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, проведенных из точки $A(0,-2)$.

7.20. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы — в вершинах эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

7.21. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между ее вершинами равно 20, а расстояние между ее фокусами равно 30.

7.22. Найти уравнение гиперболы, если ее действительная полуось равна 5, а эксцентриситет $e = 1,4$.

7.23. Гипербола проходит через точки $\left(3, \dfrac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ и $(-2\sqrt{5}, 3)$. Найти уравнение гиперболы.

7.24. Найти уравнения асимптот гиперболы $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2} = 1$.

7.25. Уравнения асимптот гиперболы $y = \pm\dfrac{x}{2}$, а расстояние между фокусами $2c = 10$. Найти уравнение гиперболы.

§ 7.3. Парабола

Геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \tag{7.5}$$

где $p > 0$, называется ***параболой***.

Система координат Oxy, в которой уравнение параболы имеет вид (7.5), называется ***канонической*** (для этой параболы), а само уравнение (7.5) — ***каноническим уравнением*** параболы.

Ось абсцисс Ox является осью симметрии параболы (7.5).

Вид параболы (7.5) приведен на рис. 7.3.

Точка $O(0,0)$ называется ***вершиной*** параболы. Ось Ox называется ***осью*** параболы. Число p называется ***фокальным параметром*** параболы. Точка $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ называется ***фокусом*** параболы. Число $\frac{p}{2}$ называется ***фокусным расстоянием*** параболы. Прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется ***директрисой*** параболы (см. рис. 7.3).

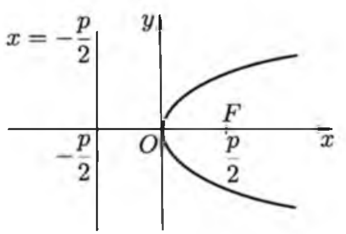

Рис. 7.3

Точка $M(x,y)$ принадлежит параболе (7.5) ***тогда и только тогда, когда она равноудалена от фокуса и директрисы.***

Это свойство параболы называется ее ***директориальным*** свойством.

7.26. Построить параболу $y^2 = 6x$, найти координаты ее фокуса и написать уравнение директрисы.

7.27. Написать уравнение параболы:

а) проходящей через начало координат и точку $A(1,-3)$, б) проходящей через начало координат и точку $B(2,-4)$ и симметричной относительно оси Oy.

7.28. На параболе $y^2 = 6x$ найти точку, расстояние от которой до фокуса равно $\frac{9}{2}$.

7.29. Какой кривой 2-го порядка соответствует уравнение:

а) $x^2 - 4x + y^2 = 0$,

б) $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

в) $x^2 - 2x - y + 1 = 0$.

7.30. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \dfrac{4x-4}{2x+1}$ и вершину параболы $y = -x^2 + 2x - \dfrac{1}{3}$.

7.31. Найти уравнения параболы и ее директрисы, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox, а точка пересечения прямых $y = x$ и $x + y = 2$ лежит на параболе.

7.32. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ и вершину параболы $y = -2x^2 + 5x - 2$.

Глава 8

Предел последовательности

§ 8.1. Понятие множества. Операции над множествами

Множество — это совокупность (собрание, семейство, класс и т. д.) каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, из которых состоит данное множество, называются ***элементами*** этого множества.

$x \in X$ означает, что элемент x принадлежит множеству X. Запись $x \notin X$ или $x \overline{\in} X$ означает, что элемент x ***не принадлежит*** множеству X. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается $\varnothing$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если любой элемент множества A также принадлежит множеству B. Если A является подмножеством B, то пишут $A \subset B$.

$A = B$ — множества A и B совпадают (состоят из одних и тех же элементов).

$A \cup B$ — ***объединение*** множеств A и B.

$A \cap B$ — ***пересечение*** множеств A и B.

$A \backslash B$ — ***разность*** множеств A и B.

$\overline{A}$ — ***дополнение*** множества A.

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество ***натуральных*** чисел.

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — множество всех ***целых*** чисел.

$\mathbf{R}$ — множество всех ***действительных*** чисел.

$\{a \in A : \gamma(a)\}$ — совокупность элементов a множества A, для которых выполнено $\gamma(a)$.

Пример 8.1. Даны множества $A = \{1, 3, 6, 8\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$.

Решение. Очевидно, что $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{6, 8\}$ и $A \backslash B = \{1, 3\}$. □

8.1. $A = \{a \in \mathbf{N} : a = 2^n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Выяснить, являются ли числа $4, 6, 8, 10, 14, 16$ элементами A (записать ответ с использованием символов $\in, \notin$).

8.2. Верно ли равенство:

а) $\{x \in R : \sin \pi x = 0\} = \mathbf{Z}$,

б) $\left\{x \in R : \sin \dfrac{\pi x}{2} = 0\right\} = \mathbf{Z}$?

8.3. Как соотносятся множества:

а) $A = \{x \in R : x^3 - x = 0\}$ и $B = \{x \in R : x^2 - x = 0\}$,

б) $A = \{x \in R : x^2 - x = 0\}$ и $B = \{x \in R : x - 1 = 0\}$?

8.4. Построить $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \backslash B$, если:

а) $A = \{1, 3, 4\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$,

б) $A = \{2, 4, 7\}$ и $B = \{2, 7, 10, 12\}$,

в) $A = \{2, 4, 5\}$ и $B = \{4, 5, 8, 10\}$.

8.5. Пусть A множество корней уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$ и $B = \{2, 5\}$. Найти $A \cup B$ и $A \cap B$.

8.6. Доказать, что, если A есть множество корней уравнения $x^2 - 7x + 6 = 0$ и $B = \{1, 6\}$, то $A = B$.

8.7. Пусть A — множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Проверить справедливость равенства $A = B$, если:

а) $B = \{1, 2\}$, б) $B = \{2, 3\}$, в) $B = \{1, 2, 3\}$.

8.8. Пусть A — множество четных чисел, B — множество простых чисел. Найти $A \cap B$.

8.9. Пусть A — множество чисел, кратных 2, B — множество чисел, кратных 5. Найти $A \cap B$.

8.10. Пусть A — множество чисел, оканчивающихся на 0, B — множество чисел, оканчивающихся на 5. Найти $A \cup B$.

8.11. Пусть A — множество чисел, кратных 3, B — множество чисел, кратных 5. Найти $A \cap B$.

8.12. Пусть A — множество чисел, кратных 2, B — множество чисел, кратных 3, C — множество чисел, кратных 5. Найти $A \cap B \cap C$.

8.13. Из 100 студентов английский язык изучают k студентов, немецкий — n студентов, французский— m студентов, английский и немецкий — p студентов, английский и французский — l студентов, немецкий и французский — r студентов, английский, немецкий и французский — q студентов. Найти, сколько студентов не изучают ни одного языка, сколько студентов изучают только один английский (немецкий, французский) язык, если:

а) $k = 42$, $n = 30$, $m = 28$, $p = 10$, $l = 8$, $r = 5$, $q = 3$,

б) $k = 41$, $n = 29$, $m = 32$, $p = 14$, $l = 10$, $r = 8$, $q = 5$,

в) $k = 37$, $n = 31$, $m = 29$, $p = 15$, $l = 10$, $r = 7$, $q = 5$?

8.14. Определить, в каких из пар множеств одно множество является подмножеством другого:

а) A и $A \cap B$,

б) A и $A \cup B$,

в) $A \cap \overline{B}$ и $B \cap \overline{A}$,

г) $\overline{A} \cap \overline{B}$ и $A \cup B$.

8.15. Какие из следующих множеств совпадают:

а) $A \cup \overline{\overline{B}}$, б) $\overline{A \cap B}$, в) $\overline{B \cap \overline{A}}$, г) $\overline{A} \cup \overline{B}$?

§ 8.2. Предел последовательности

1°. **Понятие последовательности.** Если каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* или просто *последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{8.1}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots$ называются *элементами* или *членами* последовательности, а число x_n — *общим членом* или n-м членом последовательности (8.1). Последовательность (8.1) кратко обозначается через $\{x_n\}$. Чаще всего последовательность задается *формулой его общего члена*.

2°. **Понятие предела последовательности.** Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существует такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{8.3}$$

или

$$x_n \to a$$

и говорят, что *последовательность* x_n *стремится* (или *сходится*) к a.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то такая последовательность называется *сходящейся*. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

3°. **Геометрический смысл предела последовательности.** Справедливо следующее *геометрическое определение* предела последовательности.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a (т. е. интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$) существует такое натуральное число N, что все члены x_n, для которых $n > N$, лежат в этой ε-окрестности точки a (рис. 8.1). Другими словами: вне ε-окрестности точки a лежит конечное число членов последовательности.

Рис. 8.1

Пример 8.2. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1$.

Решение. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Найдем такой номер N, что

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

для всех $n>N$. Последнее неравенство равносильно неравенству $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Поэтому можно взять $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, где $[x]$ — целая часть числа x. Это и означает что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=1$. □

Пример 8.3. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}=\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Решение. Для данной последовательности имеем: $x_{4n}=0$, $x_{4n+1}=1$, $x_{4n+3}=-1$. Следовательно, эта последовательность расходится, так как для произвольного числа a и $0<\varepsilon<1$ вне ε-окрестности точки a лежит бесконечное число членов рассматриваемой последовательности. □

4°. Арифметические действия над последовательностями.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — сходящиеся последовательности. Тогда сумма, разность, произведение и частное этих последовательностей также являются сходящимися, причем справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n, \tag{8.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n, \tag{8.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}, \tag{8.6}$$

где в случае частного $y_n\neq 0$ для всех $n=1,2,\ldots$

Пример 8.4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-10n+1}{2n^2+3n}$.

Решение. Применяя формулы (8.4) и (8.6), получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-10n+1}{2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\dfrac{n^3}{n^2}-\dfrac{10n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{2n^2}{n^2}+\dfrac{3n}{n^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\dfrac{10}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{10}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}=\frac{\infty}{2}=\infty. \quad \square$$

8.16. Доказать, используя определение предела, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=1.$$

Начиная с какого n, величина $|1-x_n|$ не превосходит $\varepsilon=10^{-4}$?

8.17. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$. Начиная с какого n, величина $|x_n|$ не превосходит $\varepsilon=10^{-4}$?

8.18. Доказать, используя определение предела, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+2}{3n^2+1}\right)=\frac{5}{3}.$$

Начиная с какого n, величина $\left|x_n-\dfrac{5}{3}\right|$ не превосходит $\varepsilon=10^{-4}$?

8.19. Доказать, используя определение предела, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n}{n+1}\right)=-2.$$

Начиная с какого n, величина $|-2-x_n|$ не превосходит $\varepsilon=10^{-2}$?

8.20. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$.

8.21. Доказать, что последовательность $x_n=5+(-1)^n$ не имеет предела при неограниченном возрастании n.

8.22. Написать шесть первых членов последовательности x_n и исследовать ее сходимость:

а) $x_n=5+\dfrac{(-1)^n}{n}$, б) $x_n=\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$, в) $x_n=n^{(-1)^n}$,

г) $x_n=\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$, д) $x_n=\dfrac{5\cos\frac{n\pi}{2}}{n+2}$, е) $x_n=\dfrac{3n+(-1)^n n}{n}$.

8.23. Имеет ли предел последовательность x_n:

а) $x_n=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, б) $x_n=(-1)^n+\dfrac{1}{2^n}$, в) $x_n=\dfrac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$,

г) $x_n=n\sin\dfrac{n\pi}{2}$, д) $x_n=\dfrac{2^n+(-2)^n}{2^n}$, е) $x_n=\dfrac{2^n+(-2)^n}{4^n}$?

§ 8.3. Монотонные и ограниченные последовательности. Число e

1°. Монотонные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для любого $n=1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$x_n\leqslant x_{n+1}\quad (x_n\geqslant x_{n+1}).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого $n=1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$x_n<x_{n+1}\quad (x_n>x_{n+1}).$$

Убывающие и возрастающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

Пример 8.5. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n=\dfrac{n+1}{n}$, является убывающей.

Решение. Достаточно заметить, что $x_n = 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1} = x_{n+1}$. □

2°. **Ограниченные последовательности.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (соответственно снизу)*, если существует такое действительное число M (соответственно число m), что для любого $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$x_n \leqslant M \quad (\text{соответственно } x_n \geqslant m).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. если существуют такие действительные числа m и M, что для любого $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$

Теорема 8.1 (Вейерштрасса). *Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она сходится.*

3°. **Число** e. Последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{8.7}$$

является возрастающей и ограниченной сверху, следовательно, на основании теоремы 8.1 она сходится. Ее предел обозначается буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{8.8}$$

Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2,718281\dots$).

Предел (8.8) называется *вторым замечательным пределом.*

Пример 8.6. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{6n}$$

Решение. Сделаем замену $n = 5k$ и используем второй замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{6n} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{6\cdot 5k} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{30} = e^{30}. \quad \square$$

Пример 8.7. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n+1}\right)^{6n}$$

Решение. Представим дробь, стоящую в скобках, в следующем виде:

$$\frac{3n+4}{3n+1}=\frac{3n+1+3}{3n+1}=1+\frac{3}{3n+1}$$

и сделаем замену: $\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{3n+1}$. Тогда, используя второй замечательный предел, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{3n+1}\right)^{6n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n+1}\right)^{6n}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2(3k-1)}=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{6}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{6}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-2}=e^{6}\cdot 1=e^{6}.\quad\square$$

8.24. Доказать, что последовательность $x_n=\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+3}\right)$ монотонно возрастает. Найти ее предел при $n\to\infty$.

8.25. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ монотонно убывает. Найти ее предел при $n\to\infty$.

8.26. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{2^n+1}{2^n}$ монотонно убывает. Найти ее предел при $n\to\infty$.

8.27. Доказать, что последовательность $x_n=\left(\dfrac{6n^2+1}{4n^2+2}\right)$ монотонно возрастает. Найти ее предел при $n\to\infty$.

8.28. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$ монотонно возрастает. Найти ее предел при $n\to\infty$.

8.29. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$ монотонно возрастает. Найти ее предел при $n \to \infty$.

Найти пределы.

8.30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{n}$

8.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+2}$

8.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{n}$

8.33. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$

8.34. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$

8.35. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$

8.36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n}$

8.37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+3}\right)^{3n-1}$

8.38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^{n+5}$

8.39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

8.40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

8.41. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{6n}$

8.42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

8.43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2}$

§ 8.4. Задача о непрерывном начислении процентов

Пусть P — величина первоначального вклада в банке, i процентная ставка, выраженная десятичной дробью. Требуется найти наращенную сумму S через n лет, если процентная ставка *сложная*, т. е. начисления процентов в конце каждого года производятся на наращенные суммы (происходит *капитализация* процентов).

Справедлива формула:

$$S = P(1+i)^n. \tag{8.9}$$

Итак, наращенные суммы по сложной процентной ставке растут по геометрической прогрессии со знаменателем $(1+i)$.

Если проценты начислять не один раз в году, а m раз, то формула (8.9) примет вид

$$S = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm} \tag{8.10}$$

Если количество начислений процентов в году стремится к бесконечности: $m \to \infty$, то такое начисление процентов называется ***непрерывным***. Процентная ставка при непрерывном начислении процентов называется *силой роста* и часто обозначается через δ.

Наращенная сумма вклада за n лет, при непрерывном начислении процентов по ставке δ, вычисляется по формуле

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{8.11}$$

Пример 8.8. Пусть $P = 1$ млн.руб. — величина первоначального вклада в банке, годовые сложные проценты — 10%. Найти наращенную сумму S за пять лет, если начисление процентов происходит а) ежегодно ($m = 1$), б) ежеквартально ($m = 4$), в) непрерывно ($m = \infty$). Вычислить, на сколько процентов наращенная сумма S в случае б) больше, чем в случае а).

Решение.

а) По формуле (8.9) имеем: $S = 1 \cdot (1+0,1)^5 = 1,61051$ млн.руб.

б) По формуле (8.10) имеем: $S = 1 \cdot \left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{4\cdot 5} \approx 1,63862$ млн.руб.

в) По формуле (8.11) имеем: $S = 1 \cdot e^{0,1\cdot 5} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,64872$ млн.руб.

Величина вклада через пять лет при ежеквартальном начислении процентов будет больше соответствующей величины при ежегодном начислении процентов на:

$$\frac{1,63862 - 1,61051}{1,61051} \cdot 100\% \approx 1,745\%. \quad \square$$

8.44. Банк выдал кредит на пять лет в размере 10 000 у.е. под 13% годовых (сложные проценты, начисления один раз в год). Какую сумму следует выплатить банку через пять лет? На сколько процентов увеличится эта сумма при непрерывном начислении процентов?

8.45. Решить предыдущую задачу в предположении, что банк снизил на $0,5\%$ годовой процент.

8.46. На первоначальный вклад в банк, составляющий 100 000 руб., начисляются проценты по сложной годовой ставке 15%. Определить размер вклада S через десять лет, если начисления производятся m раз в год. Составить таблицу значений S, если m принимает значения 1, 2, 4, 12, 365, ∞.

8.47. Решить предыдущую задачу в предположении, что банк увеличил на 1% годовой процент.

8.48. Банк предлагает два вида вкладов. В первом проценты начисляются один раз в год по сложной годовой ставке 6%, во втором — проценты начисляются непрерывно по сложной годовой ставке 5%. Определить размер вклада через четыре года в каждом случае, если первоначальный вклад $P = 1000$ у.е.

8.49. Какой ежегодной процентной ставке при однократном начислении процентов эквивалентна 10%-я сложная ставка при двукратном начислении процентов?

Глава 9

Функции

§ 9.1. Понятие функции

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$ или $f\colon X \to Y$. Говорят также, что функция f ***отображает*** множество X в множество Y. Множество X называется ***областью определения функции*** f и обозначается $D(f)$. Множество $E(f) = \{f(x)\colon x \in X\}$ называется ***множеством значений функции*** f.

Пусть задана функция $f\colon X \to Y$. Если X и Y являются подмножествами множества всех действительных чисел: $X \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset \mathbf{R}$, то функция f называется ***числовой функцией***, или ***функцией одной действительной переменной***, или просто ***функцией*** и обозначается $y = f(x)$. Переменная x называется ***аргументом*** или ***независимой переменной*** функции $y = f(x)$, а y — ***функцией*** или ***зависимой переменной***.

Наиболее часто встречается ***аналитический способ*** задания функции, т. е. когда функция задана посредством одной или нескольких формул.

Пример 9.1. Найти область определения и множество значений функции $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

Решение. Выделим под корнем полный квадрат:

$$y = \sqrt{2 - \left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Эта функция имеет смысл, если $\dfrac{9}{4} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Отсюда

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$, т. е. $\left|x-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{3}{2}$. Следовательно, областью определения функции будет отрезок: $\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right]=[-1,2]$.

Наибольшее значение y достигается при $x=\frac{1}{2}$ и равно $\frac{3}{2}$. Во всех остальных точках отрезка $[-1,2]$ значения $y \geqslant 0$. Поэтому множество значений функции $y=\sqrt{2+x-x^2}$ есть отрезок $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. □

Пример 9.2. Найти квадратичную функцию $f(x)=ax^2+bx+c$, если $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$. Чему равно $f(-1)$?

Решение. Для определения коэффициентов a, b, c имеем систему:

$$\begin{cases} f(0)=c=1, \\ f(1)=a+b+c=0, \\ f(0)=4a+2b+c=3. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $c=1$, $a=2$, $b=-3$, т. е. $f(x)=2x^2-3x+1$, а $f(-1)=2+3+1=6$. □

9.1. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x)=\lg x^2$.

9.2. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, если $f(x)= \frac{1-x}{1+x}$.

Найти область определения функции.

9.3. $y=\sqrt{9-2x}$.

9.4. $y=\frac{1}{x^2-1}$.

9.5. $y=\sqrt{9-x^2}$.

9.6. $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}$.

9.7. $y=\sqrt{5+4x-x^2}$.

9.8. $y=\sqrt{\sin x}$.

9.9. $y=\sqrt{1-|x|}$.

9.10. $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

9.11. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

9.12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$.

9.13. $y = \sqrt{3x - x^3}$.

9.14. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

9.15. $y = 1 - \cos x$.

9.16. $y = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x^2 - 9}}$.

9.17. $y = x - 1 + |x - 3|$.

9.18. $y = 1 - \sqrt{\cos 2x}$.

9.19. $y = \ln(x^2 - 4)$.

9.20. $y = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$.

9.21. Найти множество значений функции $y = 1 - \dfrac{1}{x}$, если $x \geqslant 1$.

9.22. Найти множество значений функции:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, б) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$,

в) $y = |x| - x$, г) $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$.

9.23. Переменная x пробегает интервал $0, 1$. Какое множество пробегает переменная y, если

а) $y = a + (b - a)x$, б) $y = \dfrac{1}{1 - x}$,

в) $y = \sqrt{x - x^2}$, г) $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

9.24. Найти линейную функцию $f(x) = ax + b$, если $f(0) = -2$ и $f(3) = 5$. Чему равны $f(1)$ и $f(2)$?

9.25. Найти квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$, если $f(0) = -3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 5$. Чему равны $f(-1)$ и $f(3)$?

9.26. Найти квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$, если $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 5$. Чему равны $f(-1)$ и $f(0,5)$?

9.27. Результаты измерения величин x и y приведены в таблице:

x	10	15	25
y	10	20	40

Найти зависимость между x и y, зная, что она линейная.

9.28. Результаты измерения величин x и y приведены в таблице:

x	0	1	2
y	5	4	7

Найти зависимость между x и y, зная, что она квадратичная: $y = ax^2 + bx + c$.

§ 9.2. Элементарные функции и их графики

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ называется множество

$$\Gamma = \{(x, y)\colon x \in D(f),\ y = f(x)\}, \tag{9.1}$$

где $D(f)$ — область определения данной функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции.

1. ***Степенная функция***: $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным целым показателям степени, приведены на рис. 9.1.

2. ***Показательная функция***: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 9.2).

3. ***Логарифмическая функция***: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 9.3).

4. ***Тригонометрические функции***: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 9.4).

5. ***Обратные тригонометрические функции***: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 9.5).

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$, а функция $x = \varphi(t)$ — на множестве $D_1 \in \mathbf{R}$, причем предполагаем, что для произвольного $t \in D_1$ соответствующее значение

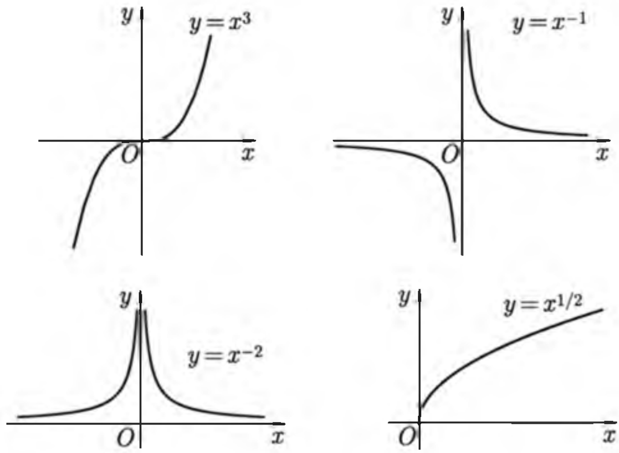

Рис. 9.1

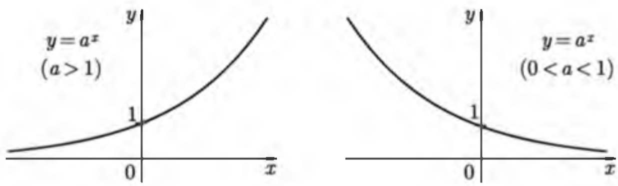

Рис. 9.2

$x = \varphi(t)$ принадлежит D. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(t))$, которая называется *сложной функцией*, или *суперпозицией двух функций*, или *функцией от функции*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$. Множество значений функции $f(x)$ обозначим через $E \subset \mathbf{R}$. Предположим, что каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, для которого $f(x) = y$. Тогда можно определить функцию $x = f^{-1}(y)$ с областью определения E и множеством значений D такую, что

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Эта функция $f^{-1}(y)$ называется *обратной* для функции $f(x)$. Если $x = f^{-1}(y)$ — обратная функция для $y = f(x)$, то функция

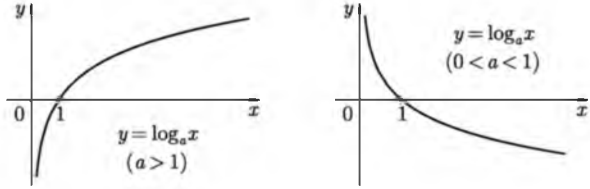

Рис. 9.3

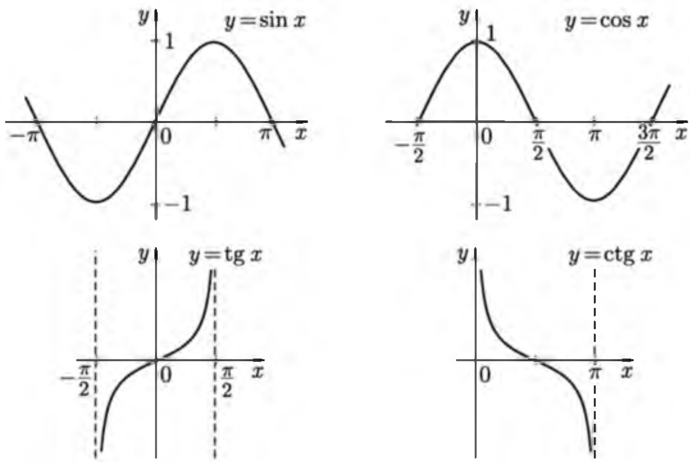

Рис. 9.4

$y = f(x)$ является обратной для функции $x = f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются также *взаимно-обратными*. Графики взаимно-обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Всякая функция, составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и операций взятия функции от функции, называется *элементарной функцией*.

При построении графиков функции часто применяются следующие простые геометрические рассуждения. Если Γ — график функции $y = f(x)$, то:

1) график функции $y = -f(x)$ — зеркальное отображение Γ от-

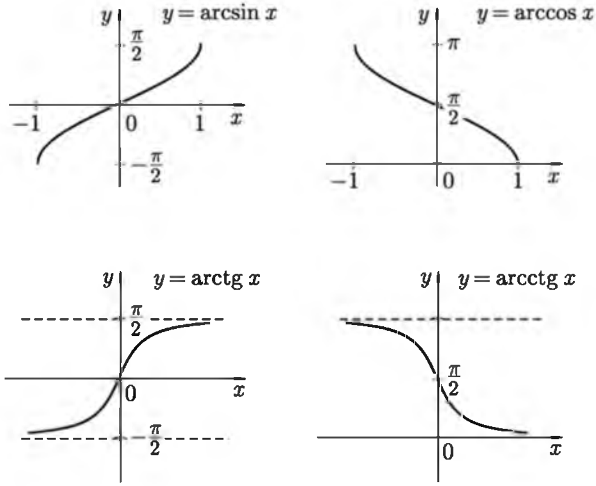

Рис. 9.5

носительно оси Ox,

2) график функции $y = f(-x)$ — зеркальное отображение Γ относительно оси Oy,

3) график функции $y = f(x - a)$ — смещение Γ вдоль оси Ox на величину a,

4) график функции $y = f(x) + b$ — смещение Γ вдоль оси Oy на величину b,

5) график функции $y = f(kx)$ сжатие в k раз (при $k > 1$) или растяжение в $\frac{1}{k}$ раз (при $0 < k < 1$) вдоль оси Ox,

6) график функции $y = kf(x)$ — растяжение в k раз (при $k > 1$) или сжатие в $\frac{1}{k}$ раз (при $0 < k < 1$) вдоль оси Oy.

9.29. Построить график линейной однородной функции $y = ax$ при $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$.

9.30. Построить график линейной функции $y = x + b$ при $b = 0, 1, 2, -1$.

9.31. Построить графики парабол:

а) $y = ax^2$ при $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$,

б) $y = (x - x_0)^2$ при $x_0 = 0, 1, 2, -1$,

в) $y = x^2 + c$ при $c = 0, 1, 2, -1$.

Построить по точкам на отрезке $|x| \leqslant 3$ графики указанных функций.

9.32. а) $y = x^3$, б) $y = x^3 + 1$, в) $y = (x - 1)^3$.

9.33. а) $y = \frac{1}{x}$, б) $y = 1 + \frac{1}{x}$, в) $y = \frac{1}{x+1}$.

9.34. Функция $S(x)$ равна площади треугольника ABC, в котором сторона AB равна 3 см, сторона AC равна 4 см и угол BAC равен x. Написать S как функцию переменной x и построить ее график.

9.35. Найти корни функции $y = 4x - x^2$ и построить ее график на отрезке между корнями.

9.36. Построить графики функций:

а) $y = |x|$, б) $y = -|x - 3|$, в) $y = |x| - x$.

9.37. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, приведя ее к виду: $y = y_0 + a(x - x_0)^2$.

9.38. Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{1+x}{1-x}$, приведя ее к виду: $y = y_0 + \frac{c}{x - x_0}$.

9.39. Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{3x+2}{2x-3}$, приведя ее к виду: $y = y_0 + \frac{c}{x - x_0}$.

9.40. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции:

а) $y = |f(x)|$, б) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$.

9.41. Построить график степенной функции $y = x^a$ при $a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4, -2$.

9.42. Построить график показательной функции $y = a^x$ при $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$.

9.43. Используя график функции $y = 2^x$, построить график функции:

а) $y = 2^{x-1}$, б) $y = 2^{\frac{x}{2}}$.

9.44. Построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$.

9.45. Используя график функции $y = \lg x$, построить график функции:

а) $y = 2\lg(x+1)$, б) $y = \lg\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

9.46. Построить график функции:

а) $y = -\log_2 x$, б) $y = \log_2 |x|$, в) $y = 2 + \lg(x+3)$.

9.47. Построить графики элементарных функций:

а) $y = |\operatorname{tg} x|$, б) $y = \cos^2 x$, в) $y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

г) $y = \log_{\frac{1}{2}} 2x$, д) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, е) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$,

ж) $y = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, з) $y = \frac{\pi}{2} - \arccos 2x$, и) $y = \arcsin\frac{x+1}{2}$.

9.48. Даны функции $y = z^2 + 1$, $z = x + 1$. Выразить y как функцию от x.

9.49. Даны функции $y = \sqrt{z+1}$, $z = \sin^2 x$. Выразить y как функцию от x.

9.50. Даны функции $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \cos \pi x$. Найти:

а) $g(f(0))$, б) $f(g(0))$, в) $f(g(x))$, г) $g(f(x))$, д) $f(g(1))$, е) $g(f(2))$,

ж) $g(g(x))$, з) $f(f(x))$, и) $f(g(1/4))$.

9.51. Найти обратные функции для следующих функций:

а) $y = x$, б) $y = 2x$, в) $y = 3x - 2$,

г) $y = \dfrac{1}{x}$, д) $y = \dfrac{1}{x-1}$, е) $y = x^2 + 1$,

ж) $y = 10^{x+1}$, з) $y = 3\sin 2x$, и) $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

9.52. Доказать, что функция, обратная к дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $(ad - bc \neq 0)$, также дробно-линейная.

Функция $f(x)$, определенная на симметричном интервале $(-a, a)$, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для любого значения $x \in (-a, a)$.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с *периодом* $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции справедливо равенство: $f(x+T) = f(x)$. *Основным периодом* функции называется наименьшее положительное число, обладающее указанным свойством.

9.53. Доказать, что $f(x) + f(-x)$ — четная функция.

9.54. Указать, какие из следующих функций четные и какие нечетные:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, б) $y = 3x - x^3$, в) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$,

г) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$, д) $y = \sin x - \cos x$, е) $y = 2^{-x^2}$,

ж) $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$, з) $y = x\sin^2 x - x^3$, и) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

9.55. Каждую из следующих функций представить в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $y = x^2 + 5x + 3$, б) $y = 3 - x^3 - x^4 - 5x^7$.

9.56. Какие из следующих функций периодические?

а) $y = \sin^2 x$, б) $y = \sin x^2$, в) $y = x \sin x$,

г) $y = 1 + tgx$, д) $y = \sin \dfrac{1}{x}$, е) $y = 3$.

§ 9.3. Применение функций в экономике

В экономической теории широко применяются разного рода функции. Перечислим наиболее часто применяемые функции.

1. ***Производственная функция*** задает зависимость объема производства от величины затраченных ресурсов.

2. ***Функция спроса*** $q = q(p)$ задает зависимость объема спроса на товар q от его цены p. Очевидно, что чем меньше цена на товар, тем больше спрос на этот товар, конечно, при постоянной покупательной способности населения. График функции спроса $q = q(p)$ называется ***кривой спроса*** (рис. 9.6).

Рис. 9.6

Рис. 9.7

3. ***Функция предложения*** $s = s(p)$ задает зависимость объема предложения товара s от его цены p. График функции предложения $s = s(p)$ называется ***кривой предложения*** (рис. 9.7).

Точка пересечения кривых спроса и предложения называется ***точкой равновесия*** (***равновесной ценой***) и определяется уравнением $q(p) = s(p)$.

Пример 9.3. На основе опытных данных установлены зависимости спроса q (количество покупаемого товара) и предложения s (количество предлагаемого на продажу товара) от цены товара p:

$$q = 1 + \frac{4}{2^p}, \quad s = 2^{p-1}.$$

Найти:

а) равновесную цену,

б) изменение спроса (в %) при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение.

а) Равновесная цена определяется из условия:

$$1 + \frac{4}{2^p} = 2^{p-1}.$$

Обозначая $x = 2^{p-1} > 0$, получим уравнение $1 + \frac{2}{x} = x$. Отсюда $x = -1$ и $x = 2$. Так как $x > 0$, то $x = 2^{p-1} = 2$, т.е. $p = 2$.

б) Новая цена $\bar{p} = 1,05 \cdot 2 = 2,1$. Спрос при равновесной цене равен: $q(2) = 2$, а при новой цене — $q(2,1) \approx 1,93$. Следовательно, при увеличении цены на 5% от равновесной спрос уменьшится на: $\frac{2 - 1,93}{2} \cdot 100\% = 3,35\%$. □

9.57. Приведите примеры линейных функций, описывающих зависимость спроса и предложения от цены товара. Постройте их графики.

9.58. Приведите примеры показательных функций, описывающих зависимость спроса и предложения от цены товара. Постройте их графики.

9.59. На основе опытных данных установлены зависимости спроса q (количество покупаемого товара) и предложения s (количество предлагаемого на продажу товара) от цены товара p: $q = \frac{p+7}{p+1}$, $s = p + 1$. Найти:

а) равновесную цену,

б) изменение дохода при увеличении цены на 1% от равновесной.

9.60. На основе опытных данных установлены зависимости спроса q (количество покупаемого товара) и предложения s (количество предлагаемого на продажу товара) от цены товара p: $q = \dfrac{p+7}{p+2}$, $s = p - 1$. Найти:

а) равновесную цену,

б) изменение дохода при уменьшении цены на 5% от равновесной.

9.61. На основе опытных данных установлены зависимости спроса q (количество покупаемого товара) и предложения s (количество предлагаемого на продажу товара) от цены товара p: $q = \dfrac{p+10}{p+1}$, $s = p^2$. Найти:

а) равновесную цену,

б) изменение спроса при увеличении цены на 5% от равновесной.

Глава 10

Предел и непрерывность функции

§ 10.1. Предел функции

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что A есть предел функции $f(x)$ в точке x_0, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$ и обозначается

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

если функция $f(x)$ определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$, при некотором $K > 0$ и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > K$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в точке x_0, то справедливы равенства

$$\lim_{x \to x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim_{x \to x_0} f(x), \tag{10.1}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{10.2}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{10.3}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \tag{10.4}$$

где $a \in \mathbf{R}$ — постоянное число и, в случае частного, предполагается, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

В дальнейшем используются следующие *замечательные пределы*:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{10.5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{10.6}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \tag{10.7}$$

где $e = 2,71828\ldots$ основание натурального логарифма. Равенство (10.5) называется первым замечательным пределом, а равенства (10.6) и (10.7) — *вторым замечательным пределом*.

Пример 10.1. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как неравенство $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ равносильно неравенству $3|x - 2| < \varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3} = \delta$, выполняется неравенство $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$. □

Пример 10.2. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x + 3}{x} = 4$.

Решение. Неравенство $\left|\dfrac{4x + 3}{x} - 4\right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\dfrac{3}{|x|} < \varepsilon$. Последнее неравенство выполняется при $\dfrac{|x|}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, если $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \dfrac{3}{\varepsilon} = M$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{4x + 3}{x} - 4\right| < \varepsilon$. □

Пример 10.3. Найти предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители и вычислим предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x}=2. \quad \square$$

Пример 10.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. Так как $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, то с помощью первого замечательного предела получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}. \quad \square$$

10.1. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{x\to 5}(5-2x)=-5$.

10.2. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{x\to -1}\left(3-2x-x^2\right)=4$.

10.3. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-7}{x+1}=2$. При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше, чем на $0,01$?

10.4. Доказать, используя определение предела, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2}{x^2+1}=-2$. При каких x значения функции будут отличаться от своего предела меньше, чем на $0,01$?

10.5. Найти пределы и сравнить результаты:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$, б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$.

10.6. Найти пределы и сравнить результаты:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

10.7. Найти пределы и сравнить результаты:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$, б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$.

10.8. Найти пределы и сравнить результаты:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, г) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

10.9. Даны многочлены

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_n}, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n > m, \\ \infty, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

Найти пределы.

10.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x}{1+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x^2}{3x}$.

10.11. а) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{3(x^2-8x+15)}$.

10.12. а) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$.

10.13. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

10.14. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

10.15. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

10.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

10.17. $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

10.18. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

10.19. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 6x}{3x}$.

10.20. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

10.21. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}\right)$.

10.22. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{x\operatorname{tg} x}{1-\cos x}\right)$.

10.23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$.

10.24. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

10.25. $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

10.26. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

10.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

10.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

10.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

10.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

10.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

10.32. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

10.33. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{x}-1}$.

10.34. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2-7x}{x}}$.

10.35. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{2-x}{3x}}$.

10.36. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{2x}}$.

10.37. $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{1}{x-2}}$.

10.38. $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{\frac{x-3}{x-4}}$.

10.39. $\lim\limits_{x\to 7}(x-6)^{\frac{x+1}{x-7}}$.

10.40. $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)^{\frac{1}{x+1}}$.

10.41. $\lim\limits_{x\to -2}(x+3)^{\frac{-2}{x+2}}$.

§ 10.2. Бесконечно малые функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1, \tag{10.8}$$

то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *эквивалентной бесконечно малой* $\beta(x)$ (при $x\to x_0$).

Предел отношения двух функций при $x\to x_0$ ***не изменится, если каждую функцию (или только одну из них) заменить на эквивалентную при*** $x\to x_0$. Это утверждение широко применяется при вычислении пределов.

Приведем таблицу бесконечно малых функций, эквивалентных при $x\to 0$.

1°. $\sin x\sim x$.

2°. $\operatorname{tg} x\sim x$.

3°. $\arcsin x\sim x$.

4°. $\operatorname{arctg} x \sim x$.

5°. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

6°. $e^x - 1 \sim x$.

7°. $a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

8°. $\ln(1 + x) \sim x$.

9°. $\log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

10°. $(1 + x)^m - 1 \sim mx \quad (m > 0)$.

Пример 10.5. Используя эквивалентные бесконечно малые функции, вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 4x}$.

Решение. Так как $\arcsin 6x \sim 6x$, $\operatorname{arctg} 4x \sim 4x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 6x}{\operatorname{arctg} 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}. \quad \square$$

Пример 10.6. Используя эквивалентные бесконечно малые функции, вычислить предел $I = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x^2}$.

Решение. Так как $\ln(1 + x) \sim x$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то

$$I = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{2 \ln \cos x}{\sin x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

10.42. Найти значение параметра a, при котором бесконечно малые функции $(1 - \cos x)$ и $a \sin^2 x$ будут эквивалентными при $x \to 0$.

10.43. Найти значение параметра a, при котором бесконечно малые функции $(e^x - e)$ и $a(x - 1)$ будут эквивалентными при $x \to 1$.

10.44. Найти значение параметра a, при котором бесконечно малые функции $a(e^{2x} - 1)$ и $ln(1 - 4x)$ будут эквивалентными при $x \to 0$.

10.45. Найти значение параметра a, при котором бесконечно малые функции $(\sqrt{x+1}-1)$ и $a\sin 2x$ будут эквивалентными при $x \to 0$.

10.46. Найти значение параметра a, при котором бесконечно малые функции $(\sqrt{2x+1}-1)$ и $a\operatorname{tg} 3x$ будут эквивалентными при $x \to 0$.

10.47. Доказать, что при $x \to \frac{\pi}{2}$ бесконечно малые функции $4\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)$ и $(\pi - 2x)$ будут эквивалентными.

Вычислить пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

10.48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$.

10.49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{5x}$.

10.50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$.

10.51. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

10.52. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x}-e}{x-1}$.

10.53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$.

10.54. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

10.55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.

10.56. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

10.57. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

10.58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

10.59. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

10.60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$.

10.61. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+x}-2}$.

10.62. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

10.63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3^x-1)(4^x-1)}{(5^x-1)(6^x-1)}$.

10.64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

§ 10.3. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел этой функции в точке x_0, равный $f(x_0)$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{10.9}$$

Равенство (10.9) означает, что *для вычисления предела непрерывной функции можно перейти к пределу под знаком функции.*

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, а C — постоянное число, то функции $Cf(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (в случае частного $g(x_0) \neq 0$).

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если в этой точке существует предел функции, однако в точке x_0 функция $y = f(x)$ либо не определена, либо ее частное значение $f(x_0)$ не равно пределу функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции *слева* $(x < x_0)$ и *справа* $(x > x_0)$, но они не равны друг другу:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из *односторонних* пределов (слева или справа) функции не существует или равен бесконечности.

П р и м е р 10.7. Найти предел

$$I = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right).$$

Решение. Умножим и разделим данное выражение на сопряженное: $(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})$. Получим

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}.$$

Далее, числитель и знаменатель разделим на x и, учитывая непрерывность функции $y=\sqrt{x}$, перейдем к пределу под знаком корня:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{5}{2}.\quad\square$$

Пример 10.8. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

Решение. В точке $x=5$ функция не определена. Если $x-5\neq 0$, то $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}=\dfrac{(x-5)(x+5)}{x-5}=x+5$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}(x+5)=10$.

Таким образом, при $x=5$ функция имеет устранимый разрыв: его можно устранить, если принять $y(5)=10$. В этом случае график функции есть прямая $y=x+5$. График исходной функции отличается от графика этой прямой тем, что точка $(5,10)$ «выколота». $\square$

10.65. Доказать, что при $x\to0$ бесконечно малые функции $f(x)=e^{2x}-e^x$ и $g(x)=\sin2x\sin x$ будут эквивалентными.

10.66. Доказать, что при $x\to1$ бесконечно малые функции $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ и $g(x)=1-\sqrt{x}$ будут эквивалентными.

Вычислить пределы, пользуясь непрерывностью элементарных функций и свойствами предела.

10.67. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{2x}$.

10.68. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10.69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$.

10.70. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg}^3 x}$.

10.71. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

10.72. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

10.73. $\lim\limits_{x\to2} \left(x^2 + \dfrac{1}{x+2}\right)$.

10.74. $\lim\limits_{x\to-1} \left(2^x + \dfrac{1}{x+2}\right)$.

10.75. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$.

10.76. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}\right)$.

10.77. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

10.78. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

10.79. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

10.80. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+5}}$.

10.81. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+5x}}{x+1}$.

10.82. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+5}}{4x+1}$.

10.83. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1+x)^2\sqrt{9x^2+2}}{2x^3+1}$.

10.84. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^6+5x-1}}{(x+1)^2(x-2)}$.

10.85. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x-1}}{x+1}$.

10.86. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$.

10.87. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

10.88. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}\right)$.

10.89. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2-x} - \sqrt{2x^2+x}\right)$.

10.90. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{7x^3+5x} - \sqrt{7x^3-5x}\right)$.

10.91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3-x}-\sqrt{x^3+x+1}\right)$.

10.92. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4-5x^2}-\sqrt{x^4+5x^2}\right)$.

10.93. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,[\ln(x+5)-\ln x]$.

10.94. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,[\ln x-\ln(x+2)]$.

10.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

10.96. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$.

10.97. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

10.98. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{4-3x}}{\sin 7\pi x}$.

10.99. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

10.100. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{20-x}}{x-4}$.

10.101. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$.

10.102. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+2}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$.

10.103. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{2x-12}$.

10.104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$.

10.105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

10.106. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

10.107. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

10.108. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}+\dfrac{5x^4}{1-2x^4}\right)$.

Найти постоянные a и b, удовлетворяющие следующему равенству.

10.109. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b = 0.$

10.110. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1} - ax - b = 0.$

10.111. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} - ax - b = 0.$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности».

10.112. $y = -\dfrac{2}{x}$.

10.113. $y = \operatorname{tg} x$.

10.114. $y = \dfrac{1}{9-x^2}$.

10.115. $y = \dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$.

10.116. $y = 3 - \dfrac{|x|}{x}$.

10.117. $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}$.

10.118. $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$.

10.119. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$.

10.120. $y = \dfrac{x^3+x}{2|x|}$.

10.121. $y = \dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$.

10.122. $y = \dfrac{x-1}{x^3-1}$.

10.123. $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

10.124. $y = \dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

10.125. $y = \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

10.126. Функцию $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$ исследовать на непрерывность на отрезках: а) $[2,4]$; б) $[4,10]$; в) $[0,7]$; г) $[6,10]$.

10.127. Функцию $y = \dfrac{1}{x^4-26x^2+25}$ исследовать на непрерывность на отрезках: а) $[-2,2]$; б) $[-6,6]$; в) $[0,7]$; г) $[6,10]$.

Глава 11

Производная функции

§ 11.1. Понятие производной

1°. **Определение производной**. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x обозначают одним из символов $f'(x)$, y' или $\dfrac{dy}{dx}$.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (11.1)$$

Операцию вычисления производной принято называть *дифференцированием*.

Пример 11.1. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = \sin x$.

Решение. По формуле (11.1) находим:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos x = \cos x. \qquad \square$$

2°. **Основные правила вычисления производной**. Если C — постоянная величина и функции $u = u(x)$ и $v = v(x) \neq 0$ имеют производные, то

1. $(C)' = 0$,
2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$,
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

3° **Таблица производных**.

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad \alpha \in R$.
2. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1)$.
3. $(e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (x > 0,\ 0 < a \neq 1)$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$.
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right)$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi n,\text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Пример 11.2. Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производную функции $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{e^x}{1+x}\right)' = \frac{(e^x)'(1+x) - e^x(1+x)'}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{e^x(1+x) - e^x(0+1)}{(1+x)^2} = \frac{e^x + xe^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}. \quad \square$$

Найти производные, пользуясь определением производной.

11.1. $y = x^3$.

11.2. $y = 2x^2 + 1$.

11.3. $y = \frac{1}{x}$.

11.4. $y = 2 - x^2 - x^3$.

11.5. $y = \frac{1}{2x-1}$.

11.6. $y = \frac{1}{(x+1)^2}$.

11.7. $y = 3\sqrt{x-1}$.

11.8. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

11.9. $y = \ln x$.

11.10. $y = \sin 2x$.

11.11. $y = \cos 3x$.

11.12. $y = \ln(x-3)$.

11.13. $y = \frac{1}{\cos x}$.

11.14. $y = \frac{1}{\sin x}$.

Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производные функций.

11.15. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$.

11.16. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$.

11.17. $y = x + 2\sqrt{x}$.

11.18. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

11.19. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

11.20. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

11.21. $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$.

11.22. $y = x^{\sqrt{2}}$.

11.23. $y = x - \sin x$.

11.24. $y = \sqrt{x} \cdot (1 - 2x)$.

11.25. $y = \ln x - \sin x + e^x$.

11.26. $y = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\sin x}$.

11.27. $y = (x-1)(x^2+1)$.

11.28. $y = x^2 \cdot \cos x$.

11.29. $y = \sqrt{x} \cdot (1 - 2x)$.

11.30. $y = x^3 \cdot \sin x$.

11.31. $y = (x+2) \cdot (3x^2+1)$.

11.32. $y = x \cdot \ln x$.

11.33. $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$.

11.34. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

11.35. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$.

11.36. $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

11.37. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

11.38. $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$.

11.39. $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

11.40. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

11.41. $y = \dfrac{1}{3^x}$.

11.42. $y = \dfrac{x}{e^x}$.

11.43. $y = x^2 \cdot 2^x$.

11.44. $y = x^3 \cdot e^x$.

11.45. $y = \dfrac{x^2+1}{2\sin x}$.

11.46. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

11.47. $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$.

11.48. $y = \dfrac{x^3+2x}{e^x}$.

11.49. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

11.50. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2^x}$.

11.51. $y = \dfrac{4^x}{x^2}$.

11.52. $y = \dfrac{e^{x^5}}{x^3}$.

11.53. $y = e^x \cdot \dfrac{1+x}{x^2}$.

11.54. $y = \dfrac{\log_2 x}{x^3}$.

11.55. $y = \arcsin x \cdot \sqrt{x}$.

§ 11.2. Производная сложной и обратной функций

Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ — в соответствующей точке u ($u = \varphi(x)$). Тогда ***сложная функция*** $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x, которая вычисляется по формуле

$$(f[\varphi(x)])' = f'(u)\varphi'(x). \tag{11.2}$$

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную не равную нулю производную $f'(x)$ в некоторой точке $x \in (a, b)$. Тогда ***обратная функция*** $x = f^{-1}(y) = g(y)$ также имеет производную в соответствующей точке y, определяемую равенством

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{11.3}$$

Пример 11.3. Найти производную функции $y = (\sqrt{x} + 5)^3$.

Решение. Функцию можно представить в виде $y = u^3$, где $u = \sqrt{x} + 5$, поэтому

$$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3\left(\sqrt{x}+5\right)^2 \cdot \left(\sqrt{x}+5\right)' =$$
$$= 3\left(\sqrt{x}+5\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0\right) = \frac{3\left(\sqrt{x}+5\right)^2}{2\sqrt{x}}. \quad \square$$

Найти производные сложных функций.

11.56. $y = (x^2 - 1)^3$.

11.57. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

11.58. $y = \sin 5x$.

11.59. $y = 6\cos\dfrac{x}{3}$.

11.60. $y = 3\sin(3x + 5)$.

11.61. $y = (1 - 5x)^{10}$.

11.62. $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$.

11.63. $y = \sqrt{\cos 4x}$.

11.64. $y = \sin^4 x$.

11.65. $y = \sin\sqrt[3]{x}$.

11.66. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$.

11.67. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x + 1}{2}$.

11.68. $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

11.69. $y = \sin^2(x^3)$.

11.70. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} 3x + 3x^2$.

11.71. $y = \dfrac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$.

11.72. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

11.73. $y = e^{x^2 - 1}$.

11.74. $y = 2e^{1-x}$.

11.75. $y = e^{-x^2}$.

11.76. $y = 2^{4x}$.

11.77. $y = 3^x - 3x^3 + 3e^{4x^3}$.

11.78. $y = \sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x}$.

11.79. $y = \ln(x - 1)$.

11.80. $y = \ln\dfrac{x + 1}{x - 1}$.

11.81. $y = \sqrt{\ln x}$.

11.82. $y = 10^{2x-2}$.

11.83. $y = e^{\sqrt{x+1}}$.

11.84. $y = \cos^3 3x$.

11.85. $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$.

11.86. $y = \ln^4 x$.

11.87. $y = (1 + \sin^2 x)^2$.

11.88. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

11.89. $y = \ln(1 + \cos x)$.

11.90. $y = \ln \dfrac{x^2}{1 - x^2}$.

11.91. $y = \ln \sin x - \dfrac{1}{2} \sin^2 x$.

11.92. $y = 7^{\cos^2 x}$.

11.93. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$.

11.94. $y = \sqrt[3]{\sin(x^2 - x)}$.

11.95. $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

11.96. $y = 10^{\cos^2 \frac{x}{3}}$.

11.97. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x + 1})$.

11.98. $y = x^2 \cdot 3^{\sin 3x}$.

11.99. $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

11.100. $y = 7^x \cdot \ln x^2$.

11.101. $y = x^{10} \cdot \ln(\sin 5x)$.

11.102. $y = (\ln \cos \sqrt{3x})^2$.

11.103. $y = x^3 \cdot \ln \sin x$.

11.104. $y = (x^2 + 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

11.105. $y = e^{-x} \cdot (\sin 3x + \cos 3x)$.

11.106. $y = \arcsin \sqrt{x + 1}$.

11.107. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.

11.108. $y = \ln \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

11.109. $y = \ln(e^{-x} + x \cdot e^{-x})$.

11.110. $y = (e^{3x} - e^{-3x})^2$.

11.111. $y = \ln\cos x + \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x.$

11.112. $y = \arccos(1-2x).$

11.113. $y = 5e^{-\frac{x}{5}} + x\cdot e^{-\frac{x}{5}}.$ **11.114.** $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}.$

11.115. $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}\right).$

11.116. $y = \arcsin(e^{3x}).$

11.117. $y = x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2}.$

11.118. $y = e^x\cdot\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x.$

11.119. $y = (\operatorname{arctg}4x+1)^2.$

11.120. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x.$

11.121. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}.$

11.122. $y = \dfrac{1}{4(1+x^4)} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}.$

11.123. $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}.$ **11.124.** $y = e^x + e^{ex}.$

11.125. $y = \ln(\ln x).$

11.126. $y = \sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x).$

11.127. $y = x\cdot[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$

11.128. $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) - \cos x\cdot\ln(\operatorname{tg} x).$

11.129. $y = \arccos\dfrac{1-x}{2}.$

11.130. $y = \arccos(\cos^2 x).$

11.131. $y = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

11.132. $y = \operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{3} \operatorname{arcctg} x^3$.

11.133. $y = \ln\left(1+\sin^2 x\right) - 2\sin x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)$.

11.134. $y = \dfrac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arcctg} x^6$.

11.135. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$.

§ 11.3. Производные высших порядков

Если функция $f'(x)$ имеет производную в точке $x \in (a, b)$, то эта производная называется ***второй производной*** или ***производной второго порядка*** функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ и обозначается через $f''(x)$ или $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Если производная $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$ имеет производную в точке $x \in (a, b)$, то эта производная называется ***n-й производной*** или ***производной n-го порядка*** функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ и обозначается через $f^{(n)}(x)$ или $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Итак,

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]', \quad n = 2, 3, \ldots$$

Производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков***.

Пример 11.4. Вычислить производную n-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение. Первую производную этой функции можно записать в виде

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, *при дифференцировании функции $y = \sin x$ аргумент этой функции увеличивается на $\dfrac{\pi}{2}$*. Следовательно, справедлива формула

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right). \quad \square$$

Пример 11.5. Найти производную n-го порядка функции $y = \ln x$.

Решение. $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$ и т.д.

Теперь нетрудно заметить, что для производной n-го порядка справедлива формула

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}. \quad \square$$

11.136. Найти производные второго порядка функций:

а) $y = \sin^2 x$, б) $y = \operatorname{tg} x$, в) $y = \sqrt{1+x^2}$,

г) $y = e^{-\frac{x}{3}}$, д) $y = 2^{\cos x}$, е) $y = \ln\frac{1}{x}$.

11.137. Найти производные третьего порядка функций:

а) $y = \cos^3 x$, б) $y = x\sin x$, в) $y = \frac{1}{x^4}$,

г) $y = x^2\ln x$, д) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, е) $y = x^2e^{-x^2}$.

11.138. Доказать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ удовлетворяет уравнению $y^3y'' + 1 = 0$.

11.139. Доказать, что функция $y = e^x\cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} + 4y = 0$.

11.140. Найти $y^{(n)}$ для следующих функций:

а) $y = e^{-\frac{x}{a}}$, б) $y = x^n$, в) $y = \cos^2 x$.

§ 11.4. Геометрический смысл производной

Пусть существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ ($y_0 = f(x_0)$) (рис. 11.1). Тогда существует производная функции $y = f(x)$ в точке x_0, которая равна угловому коэффициенту этой касательной: $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$. Верно и обратное: если существует производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0, то существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, угловой коэффициент которой равен этой производной (***геометрический смысл производной***).

Геометрическая интерпретация производной позволяет записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \tag{11.4}$$

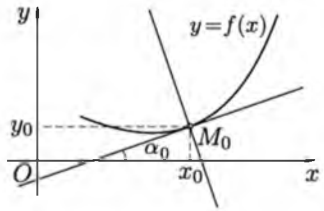

Рис. 11.1

Прямая, проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется ***нормалью*** к графику функции в этой точке. Уравнение нормали:

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0. \tag{11.5}$$

Пример 11.6. Составить уравнение касательной к кривой $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. По заданному значению $x_0 = 2$ находим $f(x_0) = \dfrac{1}{4}$. Значит, касательная проходит через точку $M_0\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$. Найдем угловой коэффициент касательной:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(2) = -\frac{1}{4}.$$

Теперь составим уравнение касательной, согласно формуле (11.4):

$$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(x - 2)$$

или $x + 4y - 3 = 0$. □

Пример 11.7. На кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x$.

Решение. Пусть искомая точка касания есть $M_0(x_0, y_0)$. Тогда угловой коэффициент k касательной равен значению производной в точке касания:

$$k = y'(x_0) = 8x_0 - 6.$$

Чтобы касательная была параллельна прямой $y = 2x$, их угловые коэффициенты должны совпадать, то есть $8x_0 - 6 = 2$, откуда $x_0 = 1$.

Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, найдем значение ее ординаты y_0: $y_0 = 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = 1$. Итак, искомая точка $M_0(1, 1)$. □

Составить уравнения касательной и нормали к заданным кривым в заданной точке.

11.141. $y = x^2$ в точке $M_0(2, 4)$.

11.142. $y = 1 - x^2$ в точке с абсциссой $x = -1$.

11.143. $y = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x = 0$.

11.144. $y = x^2 - 4x + 5$ в точке с абсциссой $x = 3$.

11.145. $y = 1 - 5x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 0$.

11.146. $y = \dfrac{4}{x^2 + 3}$ в точке с абсциссой $x = 1$.

11.147. $y = \sqrt{3x}$ в точке с абсциссой $x = 3$.

11.148. $y = -e^x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

11.149. $y = e^{-x^2}$ в точке с абсциссой $x = 0$.

11.150. $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

11.151. $y = \ln(x - 2)$ в точке с абсциссой $x = 3$.

11.152. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ в точке с абсциссой $x = 1$.

11.153. $y\left(2 + x^2\right) - 4x = 0$ в точке с абсциссой $x = 2$.

11.154. $xy - 6 = 0$ в точке с абсциссой $x = 2$.

11.155. $y^3 - 3x^2 - 15 = 0$ в точке $M_0(2, 3)$.

11.156. В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней параллельна оси Ox?

11.157. При каком значении x касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

11.158. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ а) параллельна прямой $y = 4x - 5$, б) перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$?

11.159. Составить уравнение касательной к кривой $y = \ln x$. В какой точке эта касательная а) параллельна прямой $y = x - 1$, б) перпендикулярна прямой $2x + 3y = 1$?

11.160. При каком соотношении коэффициентов a, b и c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox?

11.161. Написать уравнения касательных к кривой $y = 4x - x^2$ в точках пересечения кривой с осью абсцисс. Построить график.

11.162. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - x + 1$ в точке пересечения кривой с осью ординат. Построить график.

§ 11.5. Экономическая интерпретация производной

Одним из примеров применения понятия производной в экономическом анализе служит расчет производительности труда в заданный момент времени. Рассмотрим количество произведенной продукции u как функцию от времени t, т. е. $u = u(t)$. Тогда приращение $\Delta u = u(t + \Delta t) - u(t)$ показывает количество произведенной продукции за период от t до $t + \Delta t$, а отношение $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ показывает *среднюю производительность* труда за этот период. Следовательно, производная $u'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ показывает *производительность* труда в момент времени t, то есть *производительность труда — это скорость изменения количества произведенной продукции за единицу времени.*

Аналогично определяются *предельная выручка*, *предельный доход*, *предельные издержки* производства и т.д. Например, предельные издержки производства определяются как производная функции издержек производства $y = y(x)$ по количеству выпускаемой продукции x.

Пример 11.8. Объем продукции, произведенной группой работников за восьмичасовую смену, описывается уравнением

$$u = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{13}{2}t^2 + 150t + 50 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах ($1 \leqslant t \leqslant 8$). Вычислить производительность труда в начале и в конце рабочего дня.

Решение. Производительность труда вычисляется по формуле

$$u'(t) = -2t^2 + 13t + 150 \text{ ед./ч}.$$

В начале рабочего дня производительность труда ($t = 1$ ч) данной группы работников будет $u'(1) = -2 \cdot 1^2 + 13 \cdot 1 + 150 = 161$ ед./ч. В конце рабочего дня ($t = 8$ ч) производительность труда данной группы работников будет равна $u'(8) = -2 \cdot 8^2 + 13 \cdot 8 + 150 = 126$ ед./ч.

Итак, мы наблюдаем спад производительности труда к концу рабочего дня. □

11.163. Объем производства продукции цеха за восьмичасовую смену описывается уравнением

$$u = -\frac{4}{5}t^3 + 10t^2 + 90t + 200 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах ($1 \leqslant t \leqslant 8$). Найти производительность труда в начале и в конце рабочего дня.

11.164. Объем производства u некоторой продукции можно описать уравнением

$$u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100 \text{ ед.},$$

где t — календарный месяц года. Найти производительность труда: а) в начале года ($t = 0$), б) в середине года ($t = 6$), в) в конце года ($t = 12$).

11.165. Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, описан уравнением

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах ($1 \leqslant t \leqslant 8$). Вычислить производительность труда через час после начала работы и за час до ее окончания.

11.166. Объем продукции u цеха в течение рабочего дня задан функцией

$$u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах ($1 \leqslant t \leqslant 8$). Найти производительность труда через два часа после начала работы.

11.167. Объем продукции, произведенной группой работников за восьмичасовую смену, описывается уравнением

$$u = -\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + 60t + 45 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах ($1 \leqslant t \leqslant 8$). Вычислить производительность труда через четыре часа после начала работы.

11.168. Объем продукции, произведенной бригадой рабочих за восьмичасовую смену, описывается уравнением

$$u = -100e^{-0,15t} + 100 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах. Вычислить производительность труда в начале рабочего дня.

11.169. Объем продукции цеха за восьмичасовую смену описывается уравнением

$$u = -t^3 + 8t^2 + 120t + 10 \text{ ед.},$$

где t — рабочее время в часах ($1 \leqslant t \leqslant 8$). Найти, когда после начала работы будет наблюдаться спад производительности труда.

Глава 12

Дифференциал функции

§ 12.1. Понятие дифференциала функции

1°. **Дифференциал функции.** Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в данной точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, соответствующее приращению Δx, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{12.1}$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а α — функция от Δx, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке, при этом справедливо равенство $A = f'(x)$.

Это утверждение позволяет отождествлять понятие дифференцируемости функции с понятием существования ее производной.

Первое слагаемое или *главная линейная часть* $A\Delta x$ представления (12.1) называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается символом dy.

Выражение для дифференциала имеет вид

$$dy = f'(x)dx, \tag{12.2}$$

где принято обозначение $dx = \Delta x$.

2°. **Свойства дифференциала.**

1. $dC = 0$, где C — постоянная.
2. $d(C\,u) = C\,du$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u\,v) = v\,du + u\,dv$.

5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

3°. Оценка малых приращений функции.

Для подсчета малых приращений дифференцируемой функции $f(x)$ можно пользоваться формулой

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x \tag{12.3}$$

(ср. с формулой (12.1)). При этом *абсолютная погрешность* вычислений равна $|\Delta y - dy|$, а *относительная погрешность*: $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$.

Пример 12.1. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^3 + 2x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0,1$. Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left[(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)\right] - \left(x^3 + 2x\right) =$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x =$$
$$= \left(3x^2 + 2\right)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

$$dy = y' \cdot \Delta x = \left(3x^2 + 2\right)\Delta x.$$

При $x = 2$ и $\Delta x = 0,1$ имеем:

$$\Delta y = \left(3 \cdot 2^2 + 2\right) \cdot 0,1 + 3 \cdot 2 \cdot 0,1^2 + 0,1^3 = 1,461,$$

$$dy = \left(3 \cdot 2^2 + 2\right) \cdot 0,1 = 1,4.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y - dy| = 1,461 - 1,4 = 0,061$, а относительная погрешность $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0,061}{1,461} \approx 0,042$, то есть относительная погрешность будет около 4%. □

Пример 12.2. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16,32}$.

Решение. Полагая $f(x) = \sqrt[4]{x}$, найдем $f'(x) = \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{4x}$. Следовательно, в соответствии с (12.3) имеем:

$$\sqrt[4]{x+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x} + \frac{\sqrt[4]{x}}{4x} \cdot \Delta x = \sqrt[4]{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{4x}\right).$$

В качестве x возьмем число, наиболее близкое к 16,32, но чтобы был известен $\sqrt[4]{x}$, при этом Δx должно быть по возможности малым. В нашем примере очевидно, что следует взять $x = 16$, $\Delta x = 0,32$.

Тогда $\sqrt[4]{16,32} \approx \sqrt[4]{16} \cdot \left(1 + \dfrac{0,32}{4 \cdot 16}\right) = 2,01$. □

Пример 12.3. Пользуясь понятием дифференциала, найти приближенное значение функции $y = \sqrt[5]{1-x}$ при $x = 0,15$.

Решение. При $x = 0$ значение функции равно $y(0) = 1$. Вычислим производную данной функции:

$$y' = -\frac{1}{5\sqrt[5]{(1-x)^4}} = -\frac{1}{5y^4}.$$

Теперь найдем приращение Δy по формуле (12.3):

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = -\frac{1}{5y^4} \cdot \Delta x.$$

Подставляя в это выражение $y = 1$ и $\Delta x = 0,15$, получим

$$\Delta y \approx -\frac{1 \cdot 0,15}{5 \cdot 1} = -0,03.$$

Следовательно, $y\,(0,15) = y\,(0) + \Delta y \approx 1 + (-0,03) = 0,97$. □

Найти дифференциалы функций.

12.1. $y = x \cdot e^{-2x}$.

12.2. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

12.3. $y = \operatorname{tg}^2 \dfrac{1}{x}$.

12.4. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

12.5. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

12.6. $y = x^2 \cdot 2^x$.

12.7. $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}$.

12.8. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

12.9. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

12.10. $y = \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

12.11. $y = 2^{x^3}$.

12.12. $y = 3^x - 2^{-x}$.

12.13. $y = e^{-4x} + x$.

12.14. $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

12.15. $y = \ln\sqrt{x-1}$.

12.16. $y = \ln^2 x$.

12.17. $y = \ln\left(x^2\right)$.

12.18. $y = 4\sin^2 x$.

12.19. $y = 2\sin\left(x^3\right)$.

12.20. $y = \operatorname{tg} x + x^2$.

12.21. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$.

12.22. $y = \sqrt{\sin x}$.

Найти дифференциалы, приращения, абсолютную и относительную погрешности для функций.

12.23. $y = x^2 - x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

12.24. $y = x^3 + \sqrt{x}$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}2$.

12.25. $y = (x-3)^4$ при $x = 0$ и $\Delta x = 0{,}01$.

12.26. $y = \sqrt{x}$ при $x = 1$ и $\Delta x = -0{,}1$.

12.27. $y = x^3 - x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Найти приближенные значения с помощью дифференциала.

12.28. $\sqrt[5]{31{,}1}$.

12.29. $\lg 11$.

12.30. $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

12.31. $e^{0{,}01}$.

12.32. $\ln 1{,}01$.

12.33. $\sqrt[6]{726}$.

12.34. $\sqrt[4]{15}$.

12.35. $\sqrt[3]{1{,}006}$.

12.36. $\sqrt{0{,}998}$.

12.37. $\sqrt{101}$.

12.38. $\sqrt[4]{80}$.

Пользуясь понятием дифференциала, найти приближенные значения функций.

12.39. $y = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6$ при $x = 1,001$.

12.40. $y = (x-3)^2(x-4)$ при $x = 4,001$.

12.41. $y = \sqrt[7]{3x^3 + 2x - 4}$ при $x = 1,001$.

12.42. $y = x\ln(x-2)$ при $x = 3,001$.

12.43. Найти приращение и дифференциал площади квадрата $S = x^2$ при некотором приращении аргумента x.

12.44. Сторона куба $x = 5\,\text{м} \pm 0,01\,\text{м}$. Определить абсолютную и относительную погрешности при вычислении объема куба.

12.45. Цветочная клумба имеет круглую форму. При измерении ее радиуса с точностью до $0,05\,\text{м}$ получили $R = 1,2\,\text{м}$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисленной площади клумбы, воспользовавшись понятием дифференциала функции.

12.46. Медный кубик, ребро которого равно 5 см, подвергся равномерной шлифовке со всех сторон. Зная, что вес его уменьшился на $0,96$ г и считая удельный вес меди равным $8\,\text{г/см}^3$, определить, на сколько уменьшилось ребро куба.

12.47. С какой точностью нужно измерить абсциссу кривой $y = x^2\sqrt{x}$ при $x \leqslant 4$, чтобы при вычислении ее ординаты допустить погрешность не более $0,1$?

§ 12.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ (если, конечно, он существует) называется ***вторым дифференциалом*** или ***дифференциалом второго порядка*** этой функции (в точке $x \in (a, b)$) и обозначается символом d^2y или $d^2f(x)$:

$$d^2y = d(dy).$$

Дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции

$y = f(x)$ (если, конечно, он существует) называется *n-м дифференциалом* или *дифференциалом n-го порядка* этой функции (в точке $x \in (a, b)$) и обозначается символом $d^n y$ или $d^n f(x)$:

$$d^n y = d(d^{n-1} y), \quad n = 2, 3, \ldots$$

Дифференциалы порядка выше первого называются *дифференциалами высших порядков.*

Если x является *независимой переменной*, то дифференциал n-го порядка функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n \quad n = 2, 3, \ldots \tag{12.4}$$

Если $x = \varphi(t)$ является функцией некоторой новой переменной t, то дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают *свойством инвариантности формы*, т. е. вычисляются по формуле, отличной от формулы (12.4).

Найти дифференциалы второго порядка указанных функций.

12.48. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

12.49. $y = \ln^2 x - 4$.

12.50. $y = e^{-x^2}$.

12.51. $y = 2x^3 - x^2 + 3$.

12.52. $y = \dfrac{1}{2}\sin(x^2 - 1)$.

12.53. $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

12.54. Доказать, что второй дифференциал сложной функции $y = f(x)$, если x — зависимая переменная, вычисляется по формуле $d^2 y = f''(x)\, dx^2 + f'(x)\, d^2 x$.

Глава 13

Основные теоремы дифференциального исчисления

§ 13.1. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа

1°. **Теорема Ролля**. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и на концах отрезка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка c, в которой

$$f'(c) = 0. \tag{13.1}$$

Из этой теоремы в случае $f(a) = f(b) = 0$ следует, что между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.

2°. **Теорема Коши**. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{13.2}$$

3°. **Теорема Лагранжа**. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{13.3}$$

Пример 13.1. Проверить, что между корнями функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ находится корень ее производной.

Решение. Решив квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, находим корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Теперь вычислим производную данной функции и найдем ее корни: $f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4$, $2x - 4 = 0$, $x = 2$.

Итак, $2 \in (1, 3)$, т. е. корень производной находится между корнями функции. □

Пример 13.2. Показать, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет только один действительный корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Она непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и имеет производную $f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$. Очевидно, что $f'(x) \neq 0$ при любых действительных значениях x. Но тогда наше уравнение может иметь не более одного действительного корня, так как если бы оно имело, например, два корня c_1 и c_2, то $f(c_1) = f(c_2) = 0$, и по теореме Ролля между c_1 и c_2 нашлась бы такая точка c, что $f'(c) = 0$, что невозможно.

Существование одного действительного корня следует из того, что многочлен $f(x)$ нечетной степени ($f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, следовательно, для данной непрерывной функции должно существовать действительное значение, при котором $f(x) = 0$). □

Пример 13.3. Можно ли на отрезке $[-1, 1]$ применить к функции $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ теорему Ролля или теорему Лагранжа?

Решение. Проверим, удовлетворяет ли данная функция условиям указанных теорем. Легко видеть, что $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна в каждой точке числовой оси, следовательно, и на отрезке $[-1, 1]$. На концах этого отрезка значения функции совпадают: $f(-1) = f(1) = 1$.

Что же касается производной $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, то она не существует в точке $x = 0$. Но эта точка внутренняя для рассматриваемого отрезка $[-1, 1]$. Следовательно, условие существования производной на $(-1, 1)$, требуемое в теоремах Ролля и Лагранжа, не выполняется. Итак, указанные теоремы к данной функции на отрезке $[-1, 1]$ неприменимы. □

13.1. Проверить, что между корнями функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$ находится корень ее производной.

13.2. Проверить, что между корнями функции $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ находится корень ее производной.

13.3. Доказать с помощью теоремы Ролля, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ не может иметь более двух действительных корней.

13.4. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $x \in (-1, 1)$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

13.5. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, 1)$ и $B(3, 9)$?

13.6. На кривой $y = x^2 + 3x + 1$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(1, 5)$.

13.7. На кривой $y = x^3$ найти точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

13.8. В какой точке касательная к кривой $y = 4 - x^2$ параллельна хорде, соединяющей точки $A(-2, 0)$ и $B(1, 3)$? Пояснить графически.

13.9. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[a, b]$ и найти c.

13.10. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$ и найти c.

13.11. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6$ на отрезке $[1, 2]$ и найти c.

13.12. Написать формулу Лагранжа и найти c для функций:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[0, 1]$,

б) $f(x) = \arcsin x$ на отрезке $[0, 1]$,

в) $f(x) = \ln x$ на отрезке $[1, 2]$.

13.13. Используя теорему Лагранжа, доказать справедливость неравенства $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

13.14. Написать формулу Коши для функций $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^2$ на отрезке $[a, b]$ и найти c.

13.15. Объяснить, почему не верна теорема Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на отрезке $[-1, 1]$.

13.16. Написать формулу Коши и найти c для функций:

а) $\sin x$ и $\cos x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

б) x^2 и $\sqrt{x}$ на отрезке $[1, 4]$.

§ 13.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

1°. **Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.** Говорят, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to x_0$ ***неопределенность вида*** $\frac{0}{0}$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Точно так же отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to x_0$ ***неопределенность вида*** $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Раскрыть эти неопределенности — значит вычислить предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, если, конечно, этот предел существует.

Теорема 13.1 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $g'(x) \neq 0$. Если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{или} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

и существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует также предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем справедлива формула*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.4}$$

2°. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ и 0^0 сводятся к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований.

Все изложенное справедливо и при $x_0 = \infty$.

Пример 13.4. Применяя правило Лопиталя, найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0. \quad \square$$

Пример 13.5. Применяя правило Лопиталя, найти

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad \square$$

Пример 13.6. Применяя правило Лопиталя, найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}.$$

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}.$$

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ по-прежнему сохраняется. Применим правило Лопиталя еще раз:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1+1}{2}=1. \quad \square$$

Пример 13.7. Применяя правило Лопиталя, найти

$$\lim_{x\to1}\left[(x-1)\ln(x-1)^2\right].$$

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Переписывая данное выражение в виде

$$(x-1)\ln(x-1)^2=\frac{\ln(x-1)^2}{\dfrac{1}{x-1}},$$

получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x-1)^2}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2}}{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}=-\lim_{x\to1}2(x-1)=0. \quad \square$$

Найти пределы.

13.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

13.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$.

13.19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$.

13.20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

13.21. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

13.22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{\ln x}$.

13.23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

13.24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

13.25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.

13.26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$.

13.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$.

13.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$.

13.29. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^{10}}$.

13.30. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$.

13.31. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

13.32. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$.

13.33. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

§ 13.3. Предельный анализ в экономике. Эластичность функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, для которой существует производная $f'(x)$. Рассмотрим приращение функции Δy, которое соответствует приращению аргумента Δx.

Отношение $\dfrac{\Delta x}{x}$ называется *относительным приращением аргумента*, а $\dfrac{\Delta y}{y}$ — *относительным приращением функции*.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\dfrac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению аргумента $\dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$. Эластичность функции обозначают $E_x(y)$. Итак, по определению:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right),$$

откуда, согласно определению производной функции, получается формула эластичности:

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'. \tag{13.5}$$

Эластичность функции $y = f(x)$ относительно независимой переменной x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Эластичность функции имеет следующие свойства:

1. $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$,
2. $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$,
3. $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$.

Экономисты измеряют степень чувствительности потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности.

Рассмотрим эластичность функции спроса на товар $q = q(p)$, которая задает зависимость объема спроса на товар q от его цены p.

Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чувствительность потребителей к изменению цен, т. е. небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть *относительно эластичным* или просто *эластичным*. В этом случае эластичность функции спроса $q = q(p)$ удовлетворяет условию

$$|E_p(q)| > 1.$$

Если потребители относительно нечувствительны к изменению цен на определенного рода продукты, т. е. существенное изменение цены ведет лишь к небольшому изменению количества покупок, то говорят, что спрос *относительно неэластичен* или просто *неэластичен*. В этом случае имеет место неравенство:

$$|E_p(q)| < 1.$$

Совершенно неэластичный спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества запрашиваемой продукции. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей, то говорят, что спрос *совершенно эластичный*. В этих случаях справедливо равенство

$$|E_p(q)| = \infty.$$

В случае

$$|E_p(q)| = 1$$

говорят о *нейтральном спросе* или о спросе с *единичной эластичностью*.

Аналогично определяется эластичность функции предложения $s = s(p)$.

Пример 13.8. Пусть функции спроса и предложения соответственно имеют вид: $q = \dfrac{1}{(p-1)^3}$ и $s = (p-1)^3$, где q — количество покупаемого товара, s — количество предлагаемого на продажу товара, а p — цена товара ($p > 0$). Требуется определить эластичность спроса и предложения по равновесной цене.

Решение. Равновесная цена определяется из условия равенства спроса и предложения:

$$\frac{1}{(p-1)^3} = (p-1)^3.$$

Решая это уравнение, находим равновесную цену $p_0 = 2$.

Эластичность функций спроса и предложения находим по формуле (13.5):

$$E_p(q) = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{(p-1)^3}\right)' = -\frac{3p(p-1)^3}{(p-1)^4} = -\frac{3p}{p-1},$$

$$E_p(s) = \frac{p}{s}\left[(p-1)^3\right]' = \frac{3p(p-1)^2}{(p-1)^3} = \frac{3p}{p-1}.$$

Теперь вычислим значения полученных функций в точке $p = 2$: $E_{p=2}(q) = -6$, $E_{p=2}(s) = 6$ (это значит, что при увеличении цены на 1% произойдет уменьшение спроса на 6% и увеличение предложения на 6%).

Так как $|E_{p=2}(q)| > 1$ и $|E_{p=2}(s)| > 1$, то спрос и предложение товара при равновесной цене $p_0 = 2$ эластичны относительно цены p. □

13.34. Функции спроса и предложения имеют вид: $q = \dfrac{2p+15}{p+2}$, $s = p + 3$, где q — количество покупаемого товара, s — количество предлагаемого на продажу товара, p — цена товара ($p > 0$). Определить эластичность спроса и предложения по равновесной цене, изменение спроса при увеличении цены на 19% от равновесной.

13.35. Найти эластичность функции спроса $q(p) = 20 - \dfrac{p}{3}$ в точке $p_1 = 30$.

13.36. Найти эластичность функции спроса $q(p) = 30 - \dfrac{3p}{4}$ в точках $p_1 = 15$ и $p_2 = 20$.

13.37. Найти эластичность функции спроса $q(p) = 10 - \dfrac{p^2 + p}{4}$ в точках $p_1 = 2$ и $p_2 = 4$.

13.38. Функция долговременного спроса на нефтяном рынке имеет вид $q(p) = 25 - 1{,}5p$, а функция долговременного предложения — $s(p) = 15 + 0{,}5p$. Найти эластичность спроса в точке рыночного равновесия.

13.39. Функция кратковременного спроса имеет вид $q(p) = 25 - 0{,}625p$, а кратковременного предложения — $s(p) = 23{,}4 + 0{,}425p$. Найти эластичность кратковременного спроса в точке рыночного равновесия.

Глава 14

Исследование функций

§ 14.1. Условия возрастания и убывания функций. Экстремумы функций

1°. **Возрастание и убывание функций**. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $D \in \mathbf{R}$, если из $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$, следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Если из $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), то функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей) на множестве* D.

Неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными*. Убывающие и возрастающие функции часто называются также *строго монотонными*.

Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$.

Для строгой монотонности функций справедливо следующее достаточное условие. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b) *и* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *для всех* $x \in (a, b)$, *то эта функция возрастает* (*убывает*) *на интервале* (a, b).

2°. **Экстремумы функций**. Точка x_0 называется *точкой локального максимума (локального минимума)* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ (рис. 14.1). В этом случае говорят также, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум (локальный минимум) в точке x_0.

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками экстремума* или *экстремумами* данной функции.

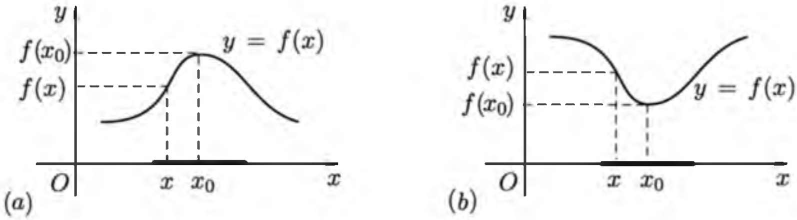

Рис. 14.1. Локальный максимум (*a*) и локальный минимум (*b*)

Теорема 14.1 (необходимое условие экстремума). *Пусть x_0 — точка локального экстремума функции $f(x)$. Если существует производная этой функции в точке x_0, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.*

Точки, которые удовлетворяют равенству $f'(x_0) = 0$, называются *стационарными точками* функции $f(x)$. Стационарные точки и точки, в которых не существует производная функции $f(x)$, называются *точками возможного экстремума* или *критическими точками* функции $f(x)$.

Теорема 14.2 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть точка x_0 является точкой возможного экстремума функции $f(x)$, которая дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Тогда если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки x_0 и отрицательна (положительна) справа от точки x_0, то функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке x_0. Если производная $f'(x)$ справа и слева от точки x_0 имеет одинаковый знак, то экстремума в точке x_0 нет.*

Последнюю теорему можно кратко сформулировать следующим образом. Если при переходе через точку возможного экстремума x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (локальный минимум). А если $f'(x)$ не меняет свой знак при переходе через данную точку x_0, то экстремума в точке x_0 нет.

Теорема 14.3 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производные $f'(x_0)$ и $f''(x_0)$. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 является точкой экстремума, причем точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точкой локального минимума, если $f''(x_0) > 0$.*

Пример 14.1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. Имеем $y' = 2x - 4 = 2(x-2)$. Очевидно, что $y' > 0$ при $x > 2$ и $y' < 0$ при $x < 2$. Следовательно, функция убывает на интервале $(-\infty, 2)$ и возрастает на интервале $(2, +\infty)$. □

Пример 14.2. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x(x-1)^3$.

Решение. Находим производную: $f'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$. Приравнивая производную к нулю, находим критические точки функции: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 1$ (точек, в которых производная не существует, у заданной функции нет).

Найденные критические точки $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = 1$ разбивают числовую прямую на три интервала монотонности: $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ и $(1, \infty)$. Заметим, что $f'(x) > 0$ при $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$. Следовательно, функция убывает на интервале $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ и возрастает на интервале $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, т. е. при $x_1 = \frac{1}{4}$ функция имеет минимум $y = -\frac{27}{256}$, а при $x_2 = 1$ экстремума нет. □

Пример 14.3. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Находим производную: $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. В точке $x = 0$ производная не существует, следовательно, эта точка критическая. Согласно первому достаточному условию экстремума (теорема 14.2), нужно исследовать знаки производной слева и справа от точки $x = 0$. Так как $y' < 0$ при $x < 0$ и $y' > 0$ при $x > 0$, то при $x = 0$ функция имеет минимум $y_{\min} = 0$. □

3°. **Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.** Наибольшее (наименьшее) значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках, или на концах этого отрезка.

Пример 14.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-3, 4]$.

Решение. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Решая уравнение $3(x^2 - 1) = 0$, находим критические точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, которые лежат на отрезке $[-3, 4]$. Теперь определим значения функции в найденных точках и на концах отрезка: $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(-3) = -18$, $f(4) = 52$.

Итак,

$$\max_{x\in[-3,4]} f(x) = f(4) = 52, \qquad \min_{x\in[-3,4]} f(x) = f(-3) = -18. \quad \square$$

Исследовать возрастание и убывание функций.

14.1. а) $y = x^2$, б) $y = x^3$, в) $y = \dfrac{1}{x}$, г) $y = \ln x$.

14.2. а) $y = \operatorname{tg} x$, б) $y = e^x$, в) $y = 4x - x^2$.

Найти интервалы монотонности функций.

14.3. $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2$.

14.4. $y = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

14.5. $y = x^2(1 - x)$.

14.6. $y = \dfrac{1}{3}(x^3 - 16x^2 + 69x - 54)$.

Найти экстремумы функций.

14.7. $y = x^2 + 4x + 5$.

14.8. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

14.9. $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

14.10. $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.

14.11. $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$.

14.12. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

14.13. $y = x^2 e^{-x}$.

14.14. $y = x^2(x-1)$.

14.15. $y = \sqrt[5]{x^4}$.

14.16. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

14.17. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

14.18. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14.19. $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.

14.20. $y = e^{2x} - x^2$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций

14.21. $f(x) = 3x^2 - 6x$ на отрезке $[0,3]$.

14.22. $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ на отрезке $[1,4]$.

14.23. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-4,1]$.

14.24. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3,10]$.

14.25. $f(x) = 2^x$ на отрезке $[-1,5]$.

14.26. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[0{,}01, 100]$.

14.27. $f(x) = \sqrt{5-4x}$ на отрезке $[-1,1]$.

14.28. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ на отрезке $[0,3]$.

14.29. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0,1]$.

§ 14.2. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции

1°. **Направление выпуклости графика функции.** Говорят, что график дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале (a,b) имеет *выпуклость, направленную вверх (вниз)*, если график этой функции расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале (рис. 14.2).

График функции, имеющий выпуклость, направленную вверх (вниз), называется также *выпуклым* (*вогнутым*).

Теорема 14.4. *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для всех $x \in (a, b)$, то график этой функции имеет выпуклость, направленную вверх (вниз) на интервале (a, b).*

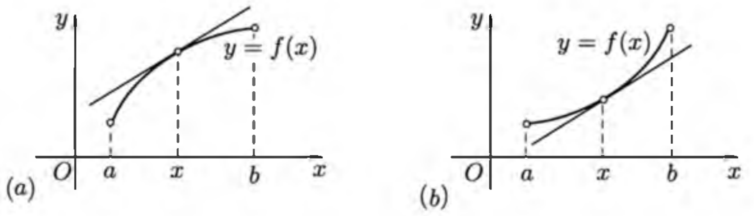

Рис. 14.2. Выпуклость, направленная вверх (a); выпуклость, направленная вниз (b)

2°. **Точки перегиба графика функции**. Точка $M(x_0, f(x_0))$ ($x_0 \in (a, b)$) графика функции $f(x)$ называется *точкой перегиба* этого графика, если существует окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $f(x)$ слева и справа от x_0 имеет разную направленность выпуклостей (рис. 14.3).

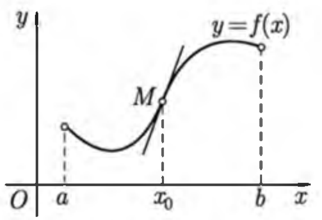

Рис. 14.3

Теорема 14.5 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$. Тогда если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет непрерывную вторую производную, то она равна нулю: $f''(x_0) = 0$.*

Теорема 14.6 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f''(x_0) = 0$. Если в пределах этой окрестности вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от*

точки x_0, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Пример 14.5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = x(x-1)^3$.

Решение. Находим вторую производную:

$$f'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1),$$

$$f''(x) = 2(x-1)(4x-1) + (x-1)^2 \cdot 4 = 6(x-1)(2x-1).$$

При $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$ имеем: $f''(x) = 0$. Следовательно, получаем три интервала выпуклости: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $(1, +\infty)$. Заметим, что $f''(x) > 0$ на интервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, +\infty)$, значит, на этих интервалах функция вогнута, и $f''(x) < 0$ на интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, следовательно, на нем функция выпукла. Точки $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ и $(1, 0)$ являются точками перегиба. □

14.30. Показать, что кривая $y = x^2 + x^4$ всюду вогнута.

14.31. Показать, что кривая $y = 2x^2 + 3x - 1$ всюду вогнута.

14.32. Показать, что кривая $y = \ln(x^2 - 1)$ всюду выпукла.

14.33. Показать, что кривая $y = (x+1)^4 + e^x$ всюду вогнута.

Исследовать направление выпуклости и найти точки перегиба следующих функций.

14.34. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$.

14.35. $y = x^3 - 6x^2$.

14.36. $y = \frac{x^3}{6} - x^2$.

14.37. $y = 3x^5 - 5x^4 + 2x$.

14.38. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

14.39. $y = x^4(12\ln x - 7)$.

14.40. $y = \ln(1 + x^3)$. **14.41.** $y = xe^x$.

14.42. $y = e^{-x^2}$.

§ 14.3. Асимптоты графика функции

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если эту функцию можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0 \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0\right).$$

Теорема 14.7. *Для того чтобы график функции $f(x)$ имел наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b, \tag{14.1}$$

причем тогда прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой.

Эта теорема справедлива и в случае $x \to -\infty$.

Пример 14.6. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}.$$

Решение. Имеем:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = \infty,$$

и, следовательно, прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Для нахождения наклонной асимптоты вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+5}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x+5}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Значит, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой графика функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. □

Найти асимптоты графиков функций.

14.43. $y = \dfrac{3-4x}{2+5x}$.

14.44. $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

14.45. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

14.46. $y = \dfrac{3x^5}{2+x^4}$.

14.47. $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

14.48. $y = \dfrac{1}{2x^2+x-1}$.

14.49. $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-1} + 2x$.

14.50. $y = \dfrac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1}$.

14.51. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^2}$.

14.52. $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

§ 14.4. Общая схема исследования функций и построение графиков

Для исследования и построения графика функции $y = f(x)$ следует:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность-нечетность и периодичность;

3) найти точки пересечения графика функции с осями координат;

4) найти асимптоты графика функции;

5) найти интервалы монотонности функции и точки экстремума;

6) найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример 14.7. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2+3}{2x-2}$ и построить ее график.

1. Области определения функции не принадлежит только точка $x = 1$, то есть $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Функция не является ни четной ни нечетной и не имеет периода.

3. Точка пересечения с осью Oy: $f(0) = -\dfrac{3}{2}$, т.е. имеем точку $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Так как уравнение $\dfrac{x^2+3}{2x-2} = 0$ не имеет решения, следовательно, график функции не имеет точек пересечения с осью Ox.

4. Так как $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3}{2x-2} = \infty$, то прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Для нахождения наклонной асимптоты вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x(2x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{2}{x}} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3}{2x-2} - \frac{1}{2}\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{2x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{2}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Значит, прямая $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ является наклонной асимптотой графика функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

5. Для нахождения интервалов монотонности вычислим первую производную функции:

$$y' = f'(x) = \frac{2x(2x-2) - (x^2+3)\cdot 2}{4(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2}.$$

Производная $y' = 0$ при $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ и y' не существует при $x = 1$. Однако критическими являются только x_1 и x_2, так как значение $x = 1$ не входит в область определения функции.

Заметим, что $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$, а значит, на этих интервалах функция возрастает, и $f'(x) < 0$ на интервалах $(-1, 1)$ и $(1, 3)$, следовательно, на этих интервалах функция убывает.

Функция имеет максимум при $x = -1$, причем $f(-1) = -1$, и минимум при $x = 3$, причем $f(3) = 3$.

6. Для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости вычислим вторую производную:

$$y'' = f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot 2(x-1)^2 - (x^2-2x-3)\cdot 4(x-1)}{4(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Заметим, что уравнение $f''(x) = 0$ не имеет решения, следовательно, функция не имеет точек перегиба. Очевидно, что $f''(x) < 0$ на интервале $(-\infty, 1)$, значит, график функции выпуклый на этом интервале, и $f''(x) > 0$ на интервале $(1, +\infty)$, значит, график функции вогнутый на этом интервале.

Результаты проведенных исследований сведем в таблицу.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	$+$	$-$	$-$	$+$
Монотонность	Возрастает	Убывает	Убывает	Возрастает
y''	$-$	$-$	$+$	$+$
Направление выпуклости	Выпуклый	Выпуклый	Вогнутый	Вогнутый

С учетом полученных данных строим график рассматриваемой функции (рис. 14.4). □

Исследовать функции и построить их графики.

14.53. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

14.54. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

14.55. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$.

14.56. $y = x + \dfrac{27}{x^3}$.

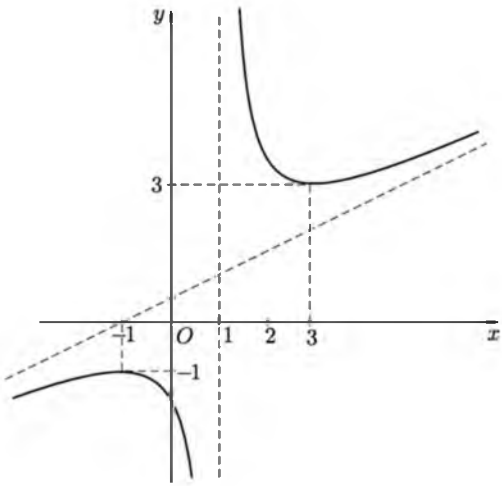

Рис. 14.4

14.57. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$.

14.58. $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$.

14.59. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$.

14.60. $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$.

14.61. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$.

14.62. $y = (2 + x)e^{-x}$.

14.63. $y = x^2 e^{-x}$.

14.64. $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$.

14.65. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

14.66. $y = \sqrt[3]{x^2}(x - 5)$.

14.67. $y = \dfrac{(4 - x)^3}{9(2 - x)}$.

§ 14.5. Приложения производной в экономике

1°. **Задача максимизации прибыли**. Пусть $R(x)$ — функция дохода, а $C(x)$ — функция затрат на производство товара, где x — количество реализованного товара. Тогда прибыль $P(x)$ от реализации товара выражается формулой

$$P(x) = R(x) - C(x). \tag{14.2}$$

Для того, чтобы прибыль $P(x)$ была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны:

$$R'(x) = C'(x).$$

Это один из базовых законов теории производства.

2°. Оптимальный объем выпуска и издержки производства. Пусть $C(x)$ — функция издержек на производство данного товара. Тогда $M_C(x) = C'(x)$ — предельные издержки. Рассмотрим функцию средних издержек $A_C(x)$, которая определяется как частное функции издержек $C(x)$ и количества произведенного товара x, т. е. $A_C(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Для определения оптимального объема выпуска и издержек производства необходимо минимизировать средние издержки.

Имеет место следующий экономический закон оптимального объема выпуска и издержек производства: *уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек*:

$$M_C(x) = A_C(x), \tag{14.3}$$

3°. Закон убывающей доходности. Это один из наиболее знаменитых экономических законов, который отражает связь между затратами производства и выпуском продукции. Суть этого закона заключается в следующем: *при увеличении одного и неизменности всех других видов затрат наступает момент, после которого новые дополнительные затраты дают все меньший объем дополнительной продукции*.

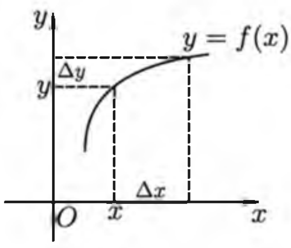

Рис. 14.5

Из закона убывающей доходности следует, что *график функции $y = f(x)$, выражающий зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, имеет выпуклость, направленную вверх* (отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ уменьшается при увеличении x) (рис. 14.5).

Пример 14.8. Цена реализуемой производителем продукции составляет 4000 руб. за единицу продукции. Известно, что издержки производителя определяются зависимостью $C(x) = 1000x + 0,1x^3$, где x — количество изготовленной и реализованной продукции. Каковы оптимальный объем выпуска продукции и получаемый при этом доход?

Решение. Доход определяется разностью между выручкой за реализованную продукцию $4000x$ и себестоимостью этой продукции, т. е. $R(x) = 4000x - (1000x + 0,1x^3) = 3000x - 0,1x^3$.

При определении оптимального объема выпуска продукции следует найти производную функции $R(x)$, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение: $R'(x) = 3000 - 0,3x^2 = 0$, $x_1 = 100$ и $x_2 = -100$. Так как $x_2 < 0$ и не имеет экономического смысла, то рассматриваем только $x_1 = 100$. Нетрудно заметить, что x_1 — точка максимума. Следовательно, можно заключить, что оптимальный объем выпуска равен 100 единицам продукции.

Доход при оптимальном выпуске: $R(100) = 3000 \cdot 100 - 0,1 \cdot 100^3 = 200\,000$ руб. □

Пример 14.9. Зависимость объема выпущенной продукции q от вложенного ресурса x определена функцией $q(x) = \ln(27 + x^4)$. Указать интервал изменения x, на котором выполняется закон убывающей доходности.

Решение. Дифференцируем дважды данную функцию:

$$q'(x) = \left(\ln(27 + x^4)\right)' = \frac{4x^3}{27 + x^4},$$

$$q''(x) = \left(\frac{4x^3}{27 + x^4}\right)' = \frac{324x^2 - 4x^6}{(27 + x^4)^2}.$$

Решая уравнение $q''(x) = 0$, находим $x = 3$ (корни $x = 0$ и $x = -3$ не рассматриваем, так как $x > 0$). Заметим, что $x = 3$ — точка перегиба, справа от этой точки функция является выпуклой вверх, следовательно, дополнительные затраты приводят к снижению объема выпуска продукции. Итак, закон убывающей доходности выполняется, когда $x \in (3, +\infty)$. □

14.68. Зависимость объема выпущенной продукции q от вложенного ресурса x задана функцией $q(x) = \dfrac{100}{1 + e^{100-x}}$. Указать интервал изменения x, на котором выполняется закон убывающей доходности.

14.69. Пусть $q(x) = \dfrac{10e^x}{100 + e^x} - 0,1$ — функция, выражающая зависимость объема произведенной продукции от вложенного ресурса x. Указать интервал изменения x, на котором выполняется закон убывающей доходности.

14.70. Пусть $q(x) = \ln\left(500 + x^3\right)$ — функция, выражающая зависимость объема произведенной продукции от вложенного ресурса x. Указать интервал изменения x, на котором выполняется закон убывающей доходности.

14.71. Производитель реализует свою продукцию по цене 60 ден.ед. за единицу продукции. Издержки производителя определяются зависимостью $C(x) = 30x + 0,001x^3$, где x — количество изготовленной и реализованной продукции. Каковы оптимальный объем выпуска продукции и получаемый при этом доход?

14.72. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0,01x^2 + 2x + 20$. Цена одной единицы равна 10. Найти оптимальный объем выпуска и соответствующий ему доход.

14.73. Пусть даны функция дохода $R(x) = 1000x - x^2$ и функция издержек $C(x) = 5000 + 5248x - 196x^2 + x^3$, зависящие от количества товара x. Найти максимальную прибыль.

14.74. Пусть даны функция дохода $R(x) = 1200x - x^2$ от продажи товара x и функция издержек $C(x) = 5000 + 8400x - 211x^2 + x^3$ (x — количество товара). Найти максимальную прибыль.

14.75. Известна функция издержек $C(x) = 1400 - 2x + 0,0028x^3$, кроме того, известно, что весь товар реализуется по цене 100 ден.ед. за единицу. Найти максимальную прибыль, которую может получить фирма-производитель.

Глава 15

Неопределенный интеграл

§ 15.1. Первообразная и неопределенный интеграла

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** или просто ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для любого $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Понятие первообразной для функции $f(x)$ на бесконечных интервалах определяется аналогично.

Теорема 15.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две произвольные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале (a, b), то всюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C — некоторая постоянная.*

Иными словами, две произвольные первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга постоянным числом.

Семейство всех первообразных функций $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

В последнем обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, а сама функция $f(x)$ — ***подынтегральной функцией***.

Итак, если $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a = \mathrm{const}$.

5. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов.

1. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$.

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right)$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n, \text{ где } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1)$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C, \quad (|x| < |a|)$.

11. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C.$

12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0).$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C \quad (|x| > 1).$

15. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1).$

Отыскание неопределенного интеграла с помощью таблицы основных неопределенных интегралов и тождественных преобразований называют непосредственным интегрированием.

Пример 15.1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$

Решение. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1 \cdot dx}{x^2+1} =$
$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$ □

Используя таблицу интегралов, найти следующие интегралы.

15.1. $\int \left(3x^2 + 2x + \frac{1}{x}\right) dx.$

15.2. $\int \frac{x^3+4x+2}{2x} dx.$

15.3. $\int \frac{x\,dx}{x+1}.$

15.4. $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$

15.5. $\int \frac{x^2-9}{x^2-8} dx.$

15.6. $\int (5^x - 7^x) dx.$

15.7. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

15.8. $\int \frac{dx}{3-x^2}.$

15.9. $\int (1 + \sin x + \cos x)\, dx.$

15.10. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3} dx.$

15.11. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx.$

15.12. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

15.13. $\int 5^x\cdot 3^x dx.$

15.14. $\int 2^x e^x dx.$

15.15. $\int 3^x\left(1+3x^2\cdot 3^{-x}\right)dx.$

15.16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

15.17. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5x}}.$

15.18. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

15.19. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$

15.20. $\int \frac{-2\,dx}{\cos^2 x}.$

15.21. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$

15.22. $\int \frac{3-2\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx.$

15.23. $\int \frac{2\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

15.24. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx.$

15.25. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right)dx.$

§ 15.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

1°. **Метод подведения под знак дифференциала**. Если подынтегральное выражение имеет вид $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то для вычисления интеграла $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ удобно записать его в виде

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

и обозначить $u=\varphi(x)$. Тогда вычисление первоначального интеграла сведется к вычислению интеграла $\int f(u)du$ (который может оказаться проще исходного). Этот способ вычисления интегралов называется *методом подведения под знак интеграла*.

Пример 15.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$.

Решение. Имеем:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{du}{u}\,dx =$$
$$= \ln|u| + C = \ln|x^2-x+1| + C. \quad \square$$

Пример 15.3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. Имеем:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d\sin x = \int u^2 du =$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C. \quad \square$$

2°. **Метод подстановки**. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема 15.2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на интервале (a, b), где $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая на интервале (α, β) функция, множество значений которой совпадает с интервалом (a, b). Предположим, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), т. е.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Тогда на интервале (α, β) для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ существует первообразная, равная функции $F[\varphi(t)]$, т. е.

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Пример 15.4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение. Произведем подстановку $t = \sqrt{x}$. Тогда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Теперь вычислим:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{t^2+t} = 2\int \frac{tdt}{t(t+1)} = 2\int \frac{d\,(t+1)}{t+1} =$$
$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C. \quad \square$$

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы.

15.26. $\int \sqrt{3+x}\, dx.$

15.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+7}}.$

15.28. $\int \frac{dx}{1-2x}.$

15.29. $\int \cos 4x\, dx.$

15.30. $\int \sin(3-2x)\, dx.$

15.31. $\int e^{-5x} dx.$

15.32. $\int (5-2x)^4 dx.$

15.33. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}\, dx.$

15.34. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx.$

15.35. $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+3}\, dx.$

15.36. $\int x^4\sqrt{1-6x^5}\, dx.$

15.37. $\int \frac{x^3}{5-x^4}\, dx.$

15.38. $\int \frac{5^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx.$

15.39. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\, dx.$

15.40. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}.$

15.41. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1-16\cos^2 x}}\, dx.$

15.42. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}\, dx.$

15.43. $\int 2x \sin\left(x^2+1\right) dx.$

15.44. $\int e^{x^3} x^2 dx.$

15.45. $\int \frac{2^x}{4^x+1}\, dx.$

15.46. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\, dx.$

15.47. $\int \frac{3x^2}{1-x^6}\, dx.$

15.48. $\int x\sqrt{2-5x}\, dx.$

15.49. $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x}}\, dx.$

15.50. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$

§ 15.3. Метод интегрирования по частям

Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема 15.3. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, а функция $v(x)u'(x)$ интегрируема на интервале (a, b).*

Тогда на этом интервале интегрируема и функция $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

или в краткой записи

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{15.1}$$

Формула (15.1) называется ***формулой интегрирования по частям***. Она сводит вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$. В ряде конкретных случаев вычисление последнего интеграла оказывается существенно более простым, чем вычисление исходного интеграла.

Формула (15.1) может применяться неоднократно.

Пример 15.5. Вычислить интеграл

$$\int x \sin 2x\,dx.$$

Решение. Обозначим $u = x$, а $dv = \sin 2x\,dx$. Тогда $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$, а $du = dx$. Теперь применим формулу (15.1) интегрирования по частям:

$$\int x\sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\,x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\,x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \quad \square$$

Пример 15.6. Вычислить интеграл

$$\int x \ln x\,dx.$$

Решение. Применим формулу (15.1) интегрирования по частям:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2 = \frac{1}{2}\,x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}\,(2\ln x - 1) + C. \quad \square$$

Пример 15.7. Вычислить интеграл

$$\int x^2 e^{2x}\, dx.$$

Решение. Для вычисления этого интеграла дважды применим формулу (15.1) интегрирования по частям:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int x^2\, de^{2x} = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\int x\, de^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + C. \quad \square$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы.

15.51. $\int x e^{3x}\, dx.$

15.52. $\int x \cdot 3^x dx.$

15.53. $\int \frac{x}{2^x}\, dx.$

15.54. $\int x^2 \ln x\, dx.$

15.55. $\int 3x^2 \ln\left(x^3 + 1\right) dx.$

15.56. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$

15.57. $\int \left(x^2 - x + 1\right) \ln x\, dx.$

15.58. $\int \ln 5x dx.$

15.59. $\int \ln\left(x^2 + 1\right) dx.$

15.60. $\int (x + 1) \cos 3x\, dx.$

15.61. $\int (x - 3) \sin 2x\, dx.$

15.62. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

15.63. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx.$

15.64. $\int x \arccos x\, dx.$

15.65. $\int \arcsin 3x\,dx$.

15.66. $\int x\,\mathrm{tg}^2\,x dx$.

15.67. $\int x^2 \cos x\,dx$.

15.68. $\int x^2 e^x dx$.

15.69. $\int x^3 e^{-x}\,dx$.

15.70. $\int e^x \sin x\,dx$.

15.71. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$.

§ 15.4. Интегрирование рациональных функций

Функция вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{15.2}$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — алгебраические многочлены соответственно степени m и n, называется ***рациональной функцией*** или ***рациональной дробью***.

Рациональная дробь (15.2) называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя: $m < n$. В противном случае рациональная дробь (15.2) называется ***неправильной***.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m \geqslant n)$ можно представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S(x) + \frac{T_r(x)}{Q_n(x)}. \tag{15.3}$$

Многочлен $S(x)$ называется ***целой частью***, а $T_r(x)$ $(r < n)$ — ***остатком рациональной дроби*** $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Выделение целой части неправильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ или ее представление в виде (15.3) производится делением числителя на знаменатель «столбиком».

Пример 15.8. Рациональную дробь

$$R(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 1}$$

представить в виде (15.3).

Решение. Для нахождения частного и остатка применим алгоритм деления многочленов «столбиком»:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \quad - x + 3 & x^2 + x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^3 + x^2 - x & x - 1 \\
\cline{1-1}
- x^2 + 3 & \\
- x^2 - x + 1 & \\
\cline{1-1}
x + 2 &
\end{array}
$$

Итак,

$$R(x) = \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 1} = x - 1 + \frac{x + 2}{x^2 + x - 1}. \quad \square$$

Чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, следует предварительно разложить ее в сумму так называемых *простейших дробей*. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 15.4. *Пусть $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — правильная рациональная дробь. Предположим, что знаменатель $Q_n(x)$ разложен на линейные и неприводимые квадратные множители:*

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_l)^{k_l} \times$$

$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \dots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m} =$$

$$= a_n \prod_{i=1}^{l}(x - x_i)^{k_i} \prod_{i=1}^{m}(x^2 + p_i x + q_i)^{s_i}.$$

Тогда правильную рациональную дробь $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить, и притом единственным образом, в виде следующей *суммы простейших рациональных дробей:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{A_{l1}}{x-x_l} + \frac{A_{l2}}{(x-x_l)^2} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(x-x_l)^{k_l}} +$$

$$+ \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{M_{1s_1}x+N_{1s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{M_{m1}x+N_{m1}}{x^2+p_mx+q_m} + \dots + \frac{M_{ms_m}x+N_{ms_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{M_{ij}x+N_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}, \qquad (15.4)$$

где A_{ij}, M_{ij} и N_{ij} — некоторые действительные числа.

Для отыскания неизвестных постоянных A_{ij}, M_{ij} и N_{ij} в разложении (15.4) используется *метод неопределенных коэффициентов*.

Пример 15.9. Разложить рациональную дробь

$$\frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}$$

в сумму простейших дробей.

Решение. Искомое разложение имеет вид

$$\frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

где A, B и C — неизвестные постоянные.

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем тождество

$$3x^2 - 7x + 2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \qquad (15.5)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ -2A - B + C = -7, \\ A = 2, \end{cases}$$

откуда получаем $A = 2$, $B = 1$, $C = -2$. Итак, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{x(x-1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}.$$

В этом примере коэффициенты A, B, C можно определить другим способом, полагая последовательно в тождестве (15.5) значения $x = 0$, $x = 1$ и, например, $x = 2$. При $x = 0$ находим $A = 2$, при $x = 1$ получаем $C = -2$, а при $x = 2$ имеем $A + 2B + 2C = 0$, т. е. $B = 1$. □

В силу теоремы 15.4 интегрирование правильных рациональных дробей сводится к интегрированию *простейших рациональных дробей* следующих четырех типов:

$$\text{(I)}\quad \frac{A}{x-a}; \qquad \text{(II)}\quad \frac{A}{(x-a)^k};$$

$$\text{(III)}\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \qquad \text{(IV)}\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l},$$

где $k > 1$, $l > 1$, а A и B — некоторые постоянные.

Проиллюстрируем метод интегрирования рациональных дробей на примерах.

Пример 15.10. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция является простейшей дробью типа (III). Данный интеграл вычисляется выделением полного квадрата в неприводимом квадратном трехчлене $x^2 + x + 1$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \quad \square$$

Пример 15.11. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$.

Решение. Дробь $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 4}$ правильная, ее разложение в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 4} = \frac{1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем тождество

$$1 = A(x-4) + B(x-1),$$

откуда при $x = 1$ получаем $A = -\frac{1}{3}$, а при $x = 4$ имеем $B = \frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 4} = \int \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-4} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-4} = -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \ln|x-4| + C =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C. \quad \square$$

Разложить в сумму простейших дробей.

15.72. $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}$.

15.73. $\dfrac{1}{x^3+1}$.

15.74. $\dfrac{x}{(x-3)(x^2+3x+6)^2}$.

15.75. $\dfrac{x+1}{(x^3-1)^2}$.

Найти интегралы.

15.76. $\displaystyle\int \frac{(1-x)\,dx}{(x+1)\,x}$.

15.77. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx$.

15.78. $\displaystyle\int \frac{\left(3x^2-4x+1\right)dx}{(x-2)(x^2+1)}$.

15.79. $\displaystyle\int \frac{2x+x^2}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$.

15.80. $\displaystyle\int \frac{3x-2x^2-10}{(x^2+2)(x-2)}\,dx$.

15.81. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

15.82. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

15.83. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

15.84. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-2}{x^3+1}\,dx$.

15.85. $\displaystyle\int \frac{3+x}{(x^2+1)(x-2)}\,dx$.

15.86. $\displaystyle\int \frac{(x+10)\,dx}{(x^2+x+5)\,x}$.

15.87. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x-1)^2}$.

15.88. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x-3)(x+4)}$. **15.89.** $\int \frac{(5x+2)\,dx}{x^2+2x+10}$.

15.90. $\int \frac{3x^2-x+2}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$. **15.91.** $\int \frac{(11x+6)\,dx}{(x-2)^2(x-1)}$.

15.92. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}$. **15.93.** $\int \frac{(3x+2)\,dx}{x(x^2-1)}$.

15.94. $\int \frac{2x^2+x+32}{x(x^2+16)}\,dx$. **15.95.** $\int \frac{4x^2+7x+10}{x^2(x+5)}\,dx$.

15.96. $\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2+3)(x+1)}$. **15.97.** $\int \frac{x^4+2x^2+1}{x^5+x}\,dx$.

15.98. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)(x-1)^2}$.

15.99. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x^2+3)(x+4)}$.

§ 15.5. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx, \tag{15.6}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)\,dx, \tag{15.7}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx, \tag{15.8}$$

где a — некоторое постоянное число, рационализируются с помощью подстановок

$$x = a\sin t \quad \text{(для интеграла (15.6))},$$

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t \quad \text{(для интеграла (15.7))},$$

$$x = \frac{a}{\sin t} \quad \text{(для интеграла (15.8))}.$$

Пример 15.12. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx.$$

Решение. Положим $x = 3\sin t$. Тогда $dx = 3\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{3}$. Итак,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + C.$$

Выше было применено преобразование

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}. \quad \square$$

Функция вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, где a, b и c некоторые постоянные, называется ***квадратичной иррациональностью***.

Вычисление интеграла

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{15.9}$$

сводится к одному из интегралов (15.6)–(15.8) посредством выделения полного квадрата под радикалом и подходящего обозначения.

Пример 15.13. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}}$.

Решение. Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((x+2)^2+9)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+9)^3}},$$

где $u = x + 2$. Производя теперь подстановку $u = 3\operatorname{tg} t$, $du = \dfrac{3dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{(u^2+9)^3} = \dfrac{27}{\cos^3 t}$, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+13)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+9)^3}} = \frac{1}{9}\int \cos t\,dt = \frac{1}{9}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{9}\frac{u}{\sqrt{u^2+9}} + C = \frac{1}{9}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+13}} + C. \quad \square$$

Вычислить интегралы.

15.100. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{8-x^2}}$.

15.101. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

15.102. $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

15.103. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

15.104. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

15.105. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$.

15.106. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-2}}$.

15.107. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-1}}$.

15.108. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

15.109. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^4}}$.

15.110. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

15.111. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

15.112. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$.

15.113. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

15.114. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[7]{x})\sqrt{x}}$.

15.115. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x-1}}$.

15.116. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

15.117. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

15.118. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{\sqrt{-x^2+4x+3}}\,dx$.

15.119. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-2}}$.

Глава 16

Определенный интеграл

§ 16.1. Понятие определенного интеграла

1°. **Определенный интеграл как предел интегральной суммы.** Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных *частичных отрезков* точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (рис. 16.1).

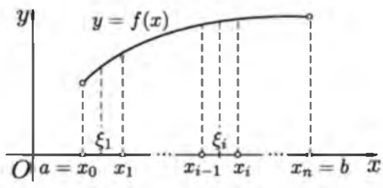

Рис. 16.1

Точки $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ назовем *точками разбиения* отрезка $[a, b]$. Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (16.1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Сумма (16.1) называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через λ длину максимального частичного отрезка данного разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{16.2}$$

независимо от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек $\xi_i \in \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$, то он называется *определенным интегралом функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Итак, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{16.3}$$

Если определенный интеграл (16.3) существует, то функция называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

Фигура, ограниченная графиком функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, называется *криволинейной трапецией*.

Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади S *криволинейной трапеции*:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

В этом и заключается *геометрический смысл* определенного интеграла.

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

2°. Основные свойства определенного интеграла.

1. Если функция $f(x)$ определена в точке $x = a$, то $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

3. Если C — постоянное число, а функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a<c<b$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{16.4}$$

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\geqslant 0$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$

7. Пусть $f(x)\leqslant g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда $|f(x)|$ также интегрируем на $[a,b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Теорема 16.1 (Лагранжа о среднем). *Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует такая точка $c\in[a,b]$ что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{16.5}$$

Равенство (16.5) называется *формулой среднего значения*.

3°. **Формула Ньютона–Лейбница**. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $F(x)$ — некоторая первообразная этой функции.

Тогда справедлива следующая *формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{16.6}$$

Пример 16.1. Вычислить интеграл $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница (16.6) получим

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2. \quad \square$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы.

16.1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$.

16.2. $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) x dx$.

16.3. $\int_0^1 \left(4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x^2} + e^x\right) dx$.

16.4. $\int_0^2 \left(4 - x - \sqrt{2x}\right) dx$.

16.5. $\int_{-1}^{1} \left(2x - xe^2\right) dx$.

16.6. $\int_0^4 (x - 1 - \ln 2)\, dx$.

16.7. $\int_1^2 \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$.

16.8. $\int_0^1 \left(2x + 3x^2 + 5\right) dx$.

16.9. $\int\limits_0^6 e^x dx.$

16.10. $\int\limits_{-\ln 2}^{0} (2 + e^{-x})\, dx.$

16.11. $\int\limits_1^2 (2x + e^x)\, dx.$

16.12. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

16.13. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}.$

16.14. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x}.$

16.15. $\int\limits_0^1 \frac{4dx}{1 + x^2}.$

16.16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{9 - x^2}.$

16.17. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{x - 2} dx.$

16.18. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\sin^2 x}.$

16.19. $\int\limits_1^2 x\,(3x + 6)dx.$

16.20. $\int\limits_0^1 x\,(x - 2)\,(1 - x)\, dx.$

16.21. $\int\limits_0^2 2^x dx.$

16.22. $\int\limits_0^2 (2^x + x)\, dx.$

16.23. $\int\limits_0^3 (3^x - \ln 3 \cdot x)\, dx.$

16.24. $\int\limits_{-3}^{1} \left(3 - x^2 - 2x\right) dx.$

16.25. $\int\limits_0^1 (e^x - ex)dx.$

§ 16.2. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем множество значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ совпадает с отрезком $[a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда справедлива следующая формула *замены переменной* в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{16.7}$$

Пример 16.2. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Решение. Сделаем замену переменной $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$. При изменении аргумента от 1 до $\sqrt{3}$ переменная t изменяется от $\dfrac{\pi}{4}$ до $\dfrac{\pi}{3}$. Так как $\cos t > 0$ при $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, то

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{tg^2 t + 1} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}.$$

Теперь вычислим:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t dt = \sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

Вычислить интегралы путем замены переменной.

16.26. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx.$

16.27. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\frac{45}{4}x}\,dx.$

16.28. $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

16.29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}\,dx.$

16.30. $\displaystyle\int_0^{\pi^3} \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

16.31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2^{-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

16.32. $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt[3]{2}}^{0} \frac{x^2}{1-x^6}\,dx.$

16.33. $\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

16.34. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx.$

16.35. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

16.36. $\displaystyle\int\limits_{1}^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

16.37. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx.$

16.38. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

16.39. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

16.40. $\displaystyle\int\limits_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

16.41. $\displaystyle\int\limits_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx.$

16.42. $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

16.43. $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}.$

§ 16.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Так как $v'(x)\,dx = dv$ и $u'(x)\,dx = du$, то эту формулу обычно записывают следующим образом:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \qquad (16.8)$$

Формула (16.8) называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.***

Пример 16.3. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 xe^x\,dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = e^x dx = de^x$. Значит, $v = e^x$. Используя формулу (16.8), получим

$$\int\limits_1^2 xe^x\,dx = \int\limits_1^2 x\,de^x = xe^x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 e^x\,dx =$$

$$= xe^x\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = e^x(x-1)\Big|_1^2 = e^2. \quad \square$$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

16.44. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

16.45. $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

16.46. $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$.

16.47. $\int\limits_0^\pi x\cos x\,dx$.

16.48. $\int\limits_{-1}^1 3xe^{-x^2}\,dx$.

16.49. $\int\limits_1^{2\frac{3}{4}} \sqrt[3]{x}\ln x\,dx$.

16.50. $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

16.51. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

16.52. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2x\,dx$.

16.53. $\int\limits_0^\pi x^2\cos 2x dx$.

16.54. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+x+1)\cos x\,dx$.

16.55. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2x^2+1)\cos 3x\,dx$.

16.56. $\int\limits_0^1 x^3 e^{-x}\,dx.$

16.57. $\int\limits_{-1}^0 x^2 e^{-x}\,dx.$

16.58. $\int\limits_0^1 x^2 e^{2x}\,dx.$

16.59. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} e^{2x}\sin 3x\,dx.$

16.60. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$

16.61. $\int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

16.62. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx.$

16.63. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos 2x\,dx.$

§ 16.4. Несобственные интегралы

1°. **Несобственный интеграл первого рода**. Предположим, что функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, где $b\in[a,+\infty)$. Предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{16.9}$$

называется *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* или *несобственным интегралом первого рода* функции $f(x)$ на $[a,+\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Итак, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{16.10}$$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется ***сходящимся***, если существует предел (16.9). Если же предел (16.9) не существует или ранен бесконечности, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся*.

Если функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $a \in (-\infty, b]$, то аналогичным образом определяется ***несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом***:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{16.11}$$

Несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним пределами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{16.12}$$

Несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называются *сходящимися*, если существуют пределы (16.11) и (16.12). Если же эти пределы не существуют или равны бесконечности, указанные несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Пример 16.4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} e^{-x}\,dx = -\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-b}) = 1. \quad \square$$

Пример 16.5. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Решение. Так как

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x\Big|_a^b & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. □

Вычислить несобственные интегралы.

16.64. $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$.

16.65. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

16.66. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x}\, dx$.

16.67. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx$.

16.68. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{11+6x+x^2}$.

16.69. $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{x \ln x}$.

16.70. $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$.

16.71. $\int\limits_{-\infty}^{3} \dfrac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$.

16.72. $\int\limits_0^{\infty} 8e^{-8x}\, dx$.

16.73. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{x^2+4}\, dx$.

16.74. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{3x^2}{(x^3+4)^2}\, dx$.

16.75. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+6x+10}$.

16.76. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx.$ **16.77.** $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

2°. **Несобственный интеграл второго рода.** Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ (т. е. точка $x = b$ является *особой точкой* для функции $f(x)$), то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{16.13}$$

Этот интеграл называется *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$ или *несобственным интегралом второго рода*.

Несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если существует предел в правой части формулы (16.13). Если же этот предел не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$ внутри отрезка $[a,b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева называется *сходящимся*, если оба интеграла справа сходятся.

Пример 16.6. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ неограниченна в окрестности точки $x = 1$, на любом же отрезке $[0, 1-\varepsilon]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

3°. Признаки сходимости несобственных интегралов. Абсолютная сходимость. Для установления сходимости или расходимости несобственных интегралов первого рода от неотрицательных функций важную роль играют так называемые теоремы сравнения.

Теорема 16.2 (первая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на бесконечном интервале $[a,+\infty)$, причем для всех $x \in [a,+\infty)$ выполняются неравенства*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x). \tag{16.14}$$

Тогда:

а) *из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

б) *из расходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Пример 16.7. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ и $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$. Очевидно, что

$$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = g(x).$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ сходится (см. пример 16.5), значит, сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (см. теорему 16.2). □

Теорема 16.3 (вторая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны на бесконечном интервале $[a, +\infty)$, и пусть существует конечный положительный предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (0 < A < +\infty). \tag{16.15}$$

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов второго рода аналогичны вышеизложенным признакам.

Пример 16.8. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ на отрезке $[0, 1]$ имеет единственную особую точку $x = 0$. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{x}$ и заметим, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\varepsilon = +\infty$$

расходится. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ также расходится. □

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Вычислить несобственные интегралы.

16.78. $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

16.79. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$.

16.80. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

16.81. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

16.82. $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{8 - x^3}}$.

16.83. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

16.84. $\int\limits_{-5}^0 \frac{dx}{(x+5)^3}$.

16.85. $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{\sqrt[3]{16 - x^2}}$.

16.86. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

16.87. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

16.88. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ расходится.

16.89. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 7}\,dx$ сходится абсолютно.

16.90. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$ расходится.

16.91. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{\infty} x\cos x\,dx$ расходится.

16.92. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1+2x}{x^2\,(1+x)}\,dx$ сходится.

§ 16.5. Геометрические приложения определенного интеграла

1°. **Вычисление площади плоской фигуры.** Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, или площадь ***криволинейной трапеции*** (рис. 16.2) определяется по формуле

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{16.16}$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, $g(x)\leqslant f(x)$, и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 16.3), определяется по формуле

$$S=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,dx. \tag{16.17}$$

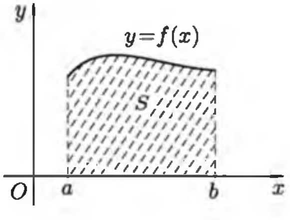

Рис. 16.2

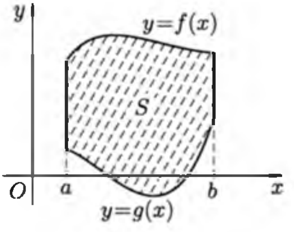

Рис. 16.3

Пример 16.9. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=e^x-e$ и осями Ox и Oy.

Решение. Нижним пределом интегрирования является точка $x_1 = 0$. Из условия $f(x) = e^x - e = 0$ находим второй предел интегрирования: $x_2 = 1$ (рис. 16.4). Поскольку $f(x) \leqslant 0$ при всех $x \in [0, 1]$, получаем

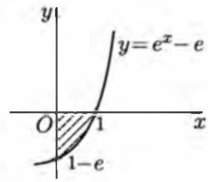

Рис. 16.4

$$S = -\int_0^1 (e^x - e)\,dx = \int_0^1 (e - e^x)\,dx =$$

$$= (ex - e^x)\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1. \quad \square$$

Пример 16.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, задаваемыми уравнениями $y = x^2$, $y = 2x$.

Решение. Пределы интегрирования определяем из уравнения $x^2 = 2x$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Вычислим искомую площадь (рис. 16.5) по формуле (16.17):

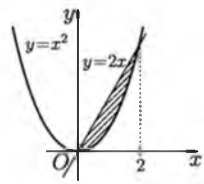

Рис. 16.5

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}. \quad \square$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, и осью Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,dx(t). \tag{16.18}$$

Пример 16.11. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t, \end{cases}$$

где $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Заметим, что искомая площадь $S = 4S_1$, где S_1 — площадь, находящаяся в первой четверти (рис. 16.6). Поскольку $x = 0$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\text{значит, нижний предел интегрирования } t_1 = \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $x = a$ при $t = 0$ (значит, верхний предел интегрирования $t_2 = 0$), то согласно формуле (16.18) получим:

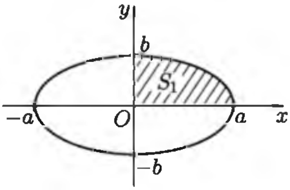

Рис. 16.6

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\, d(a\cos t) =$$

$$= -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\, dt =$$

$$= 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Итак, *площадь, ограниченная эллипсом с полуосями a и b, равна* $S = \pi ab$. Положив в этой формуле $a = b = R$, получим площадь $S = \pi R^2$ круга с радиусом R: $x^2 + y^2 = R^2$. □

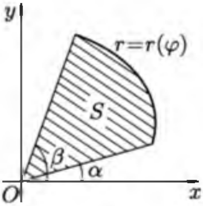

Рис. 16.7

Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, где φ и r — *полярные координаты*, или площадь *криволинейного сектора* (рис. 16.7) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{16.19}$$

Пример 16.12. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной спиралью Архимеда $r = a\varphi$, где a некоторое положительное число, и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ (рис. 16.8).

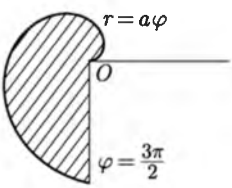

Рис. 16.8

Решение. По формуле (16.19) имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} (a\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \varphi^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{9a^2\pi^3}{16}. \quad □$$

16.93. Вычислить площадь S плоской фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6$ и осью Ox.

16.94. Вычислить площадь S плоской фигуры, заключенной между параболой $f(x) = -x^2 - 2x + 5$, касательной к ней в точке $P(2, -3)$ и осью Oy.

Вычислить площадь S плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями.

16.95. $y = 2\sqrt{x} - 1, \quad y = x - 1.$

16.96. $y = \sqrt{x+4}, \quad y = 2 - \sqrt{x}, \quad y = 0.$

16.97. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arctg}(2x - 4), \quad y = 0.$

16.98. $y = \ln(x+4), \quad y = \ln(-x), \quad y = \ln 6.$

16.99. $y = \ln(x+1), \quad y = 2\ln(1-x), \quad y = 0.$

16.100. $y = 1 - \dfrac{x}{3}, \quad y = 1 - \sqrt{x}.$

16.101. $y = e^x - 1, \quad y = e^{2x} - 3, \quad x = 0.$

16.102. $y = 3 - x^2, \quad y = 2x.$

16.103. $y = 2\ln x, \quad y = -\ln x, \quad x = e.$

16.104. $y = \arcsin x, \quad y = \dfrac{\pi}{2}x.$

16.105. $y^2 = \dfrac{x}{4}, \quad y^2 = x - 3.$

16.106. $y^2 = x + 2, \quad y^2 = 4(3 - x).$

16.107. Определить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

16.108. Определить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = 4\cos^3 t, y = 4\sin^3 t$.

16.109. Найти площадь петли кривой $x = 10(t^2 + 1)$, $y = 5(t^2 - 3t)$.

16.110. Вычислить площадь петли кривой $x = 3t^2, y = t - t^3$.

16.111. Вычислить площадь петли кривой $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

16.112. Вычислить площадь фигуры внутри кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$ и окружности $r = 1$.

16.113. Вычислить площадь фигуры внутри кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$ и вне кардиоиды $r = 3(1 - \cos\varphi)$.

16.114. Вычислить площадь фигуры между двумя лемнискатами $r^2 = 4\cos 2\varphi$ и $r^2 = \cos 2\varphi$.

16.115. Вычислить площадь фигуры внутри лемнискаты $r^2 = 2\cos 2\varphi$ и окружности $r = 1$.

16.116. Вычислить площадь фигуры внутри кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$ и вне кардиоиды $r = 1 + \sin\varphi$.

2°. **Вычисление длины дуги кривой**. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то длина l этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{16.20}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{16.21}$$

Если кривая задана полярным уравнением $r = r(\varphi)$, $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \tag{16.22}$$

П р и м е р 16.13. Вычислить длину l окружности радиуса R: $x^2 + y^2 = R^2$.

Р е ш е н и е. Найдем $\frac{1}{4}$ часть длины окружности, расположенную в первой четверти координатной плоскости (рис. 16.9).

Так как эта часть окружности задается уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, где $x \in [0, R]$, то в силу формулы (16.20) имеем

$$\frac{l}{4} = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = \frac{\pi R}{2}.$$

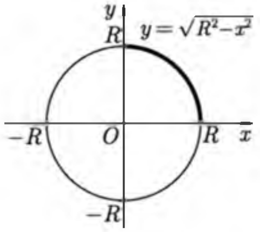

Рис. 16.9

Следовательно, $l = 2\pi R$. □

Пример 16.14. Вычислить длину l дуги *циклоиды*, заданной параметрическими уравнениями (рис. 16.10)

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Решение. Поскольку

$$x'(t) = R(1 - \cos t), \quad y'(t) = R \sin t,$$

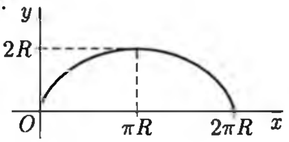

Рис. 16.10

то по формуле (16.21) получим:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t}\, dt = R \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt =$$

$$= 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4R \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R. \quad \square$$

Пример 16.15. Вычислить длину l *кардиоиды* $r = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 16.11).

Решение. Поскольку кардиоида симметрична относительно полярной оси, найдем половину длины кардиоиды по формуле (16.22):

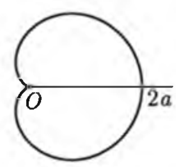

Рис. 16.11

$$\frac{l}{2} = \int_0^{\pi} \sqrt{[a(1 + \cos\varphi)]^2 + [a(-\sin\varphi)]^2}\, d\varphi =$$

$$= a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Итак, длина кардиоиды $l = 8a$. □

Вычислить длину дуги плоской кривой.

16.117. $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/8$.

16.118. $y = \dfrac{x^2}{8} - \ln x$, $\quad 1 \leqslant x \leqslant 2$.

16.119. $y = 2\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$, $\quad \dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}$.

16.120. $y = \sqrt{2}\ln\left(2 - x^2\right)$, $\quad -1 \leqslant x \leqslant 1$.

16.121. $y = \dfrac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 3$.

16.122. $y = \dfrac{6}{\sin\dfrac{x}{3}}$, $\quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$.

16.123. $y = \dfrac{6}{\cos\dfrac{x}{3}}$, $\quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

16.124. $y = \dfrac{(x-12)\sqrt{x}}{6}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 12$.

16.125. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$.

16.126. $r = 3(1 + \sin\varphi)$.

16.127. $x = t - \sin t$, $\quad y = 1 + \cos t$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

16.128. Вычислить длину дуги плоской кривой $x = t^2$, $y = t - \dfrac{t^3}{3}$ между точками пересечения с осью Ox

16.129. Вычислить длину дуги кривой $r = 2(1 + \cos\varphi)$ вне окружности $r = 1$.

3°. **Вычисление объема тела**. Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{16.23}$$

Пример 16.16. Найти объем V эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x, $a \leqslant x \leqslant b$. Очевидно, что это сечение является эллипсом (рис. 16.12), определяемым уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad (x = \mathrm{const}),$$

или

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \quad (x = \mathrm{const}).$$

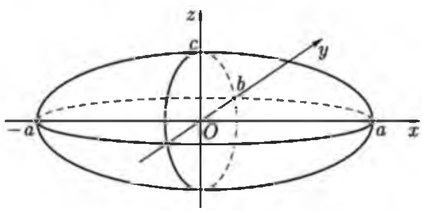

Рис. 16.12

Площадь, ограниченная этим эллипсом, равна:

$$S(x) = \pi\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\sqrt{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Следовательно, по формуле (16.23) получим

$$V = \int\limits_{-a}^{a} S(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Таким образом, *объем эллипсоида с полуосями a, b, c равен*

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, при $a = b = c = R$ получаем объем шара радиуса R:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad \square$$

Объем V тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, двумя прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{16.24}$$

Объем V тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной осью Oy, двумя прямыми $y = c$, $y = d$ и кривой, задаваемой уравнением $x = g(y)$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy. \tag{16.25}$$

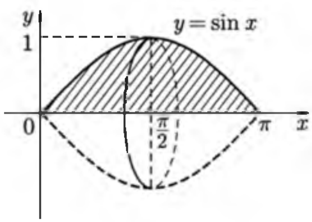

Рис. 16.13

Пример 16.17. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции $y = \sin x$ и прямыми $x = 0$, $x = \pi$ (рис. 16.13).

Решение. По формуле (16.24) получаем

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}. \quad \square$$

Вычислить объем тела V, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями.

16.130. $y = (x-2)^2, \quad y = 4 - x^2.$

16.131. $y = e^x - 1, \quad y = 2, \quad x = 0.$

16.132. $y = 0, \quad y = \sin x + 1$ (между двумя точками касания этой линии с осью Ox).

16.133. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

16.134. $y = 1 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0.$

16.135. $y = \sqrt{x+4}, \quad y = 2 - \sqrt{x}.$

Вычислить объем тела V, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями.

16.136. $y = 2 - \sqrt{x}, \quad y = \dfrac{1}{4}x^2 - 4, \quad x = 0.$

16.137. $y = \ln x, \quad y = 2 - \ln x, \quad y = 0.$

16.138. $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 8.$

16.139. $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = x^3.$

Глава 17

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§ 17.1. Функции многих переменных. Предел и непрерывность

1°. Понятие функции многих переменных. Пусть D — некоторое непустое множество упорядоченных пар действительных чисел (x, y).

Если в силу определенного закона каждой паре $(x, y) \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число z, то говорят, что дана ***функция*** $z = f(x, y)$ ***от двух переменных*** x ***и*** y, определенная на множестве D со значениями в множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. При этом x и y называются *независимыми переменными (аргументами)*, а z — *зависимой переменной (функцией)*.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции двух переменных $z = f(x, y)$. Множество значений, принимаемых функцией z, называется *областью изменения* этой функции и обозначается $E(f)$ или E.

Аналогично можно определить и ***функцию от*** n ***переменных*** $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где n — некоторое натуральное число. Областью определения этой функции является некоторое подмножество *n-мерного векторного пространства* $\mathbf{R}^n$.

Множество $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$ называется ***графиком функции двух переменных*** $z = f(x, y)$.

Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, таких, что во всех этих точках значение функции одинаковое и равно C: $f(x, y) = C$.

Пример 17.1. Найти область определения функции $y = \sqrt{(x-1)(y+2)}$.

Решение. Чтобы квадратный корень имел действительные значения, его подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Решая неравенство $(x-1)(y+2) \geqslant 0$, находим, что:

$$1) \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ y+2 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad 2) \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ y+2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением первой системы неравенств будет $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant -2, \end{cases}$ а второй — $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \leqslant -2. \end{cases}$

Чтобы получить изображение искомой области на координатной плоскости, достаточно провести две прямые $x = 1$ и $y = -2$. Полученные решения показывают, что область состоит из двух квадрантов с общей вершиной в точке $(1, -2)$ (рис. 17.1). □

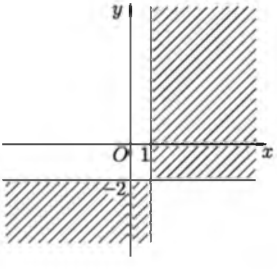

Рис. 17.1

Пример 17.2. Построить семейство линий уровня для функции $z = x^2 + y^2 - 2y$.

Решение. Линия уровня $z = C$ — это кривая на плоскости Oxy, задаваемая уравнением $x^2 + y^2 - 2y = C$ или $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $(0, 1)$ и радиусом $\sqrt{C+1}$. Точка $(0, 1)$ — это вырожденная линия уровня, соответствующая $z = -1$.

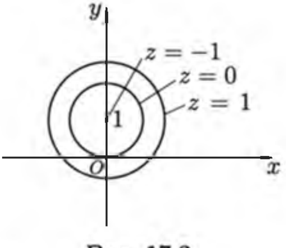

Рис. 17.2

Итак, линии уровня данной функции — концентрические окружности, радиус которых увеличивается с ростом C (рис. 17.2). □

Найти область определения функций. Сделать соответствующие чертежи.

17.1. $z = x^2 + y^2$.

17.2. $z = \dfrac{1}{x+y}$.

17.3. $z = \dfrac{y}{x}$.

17.4. $z = \dfrac{4}{x^2+y^2}$.

17.5. $z = x + \sqrt{y}$.

17.6. $z = \sqrt{x+y}$.

17.7. $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.

17.8. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

17.9. $z = \sqrt{x^2+y^2-4}$.

17.10. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

17.11. $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

17.12. $z = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}$.

17.13. $z = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$.

Построить линии уровня следующих функций.

17.14. $z = x + y$.

17.15. $z = x^2 + y^2$.

17.16. $z = x^2 - y^2$.

17.17. $z = \dfrac{y}{x}$.

17.18. $z = (x+y)^2$.

17.19. $z = xy$.

17.20. $z = x^2 - y$.

2°. **Предел и непрерывность.** Число A называется *пределом функции* двух переменных $f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$, или при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

следует

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{M \to M_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A. \tag{17.1}$$

Теорема 17.1. *Пусть функции двух переменных $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ имеют конечные пределы в точке $M_0(x_0, y_0)$.*

Тогда справедливы равенства

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x,y) \pm \varphi(x,y)] = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \pm \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \varphi(x,y), \tag{17.2}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x,y) \cdot \varphi(x,y)] = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \varphi(x,y), \tag{17.3}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \varphi(x,y)} \qquad \Big(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \varphi(x,y) \neq 0 \Big). \tag{17.4}$$

Функция $z = f(x,y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$, если предел этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует и равен значению $f(x_0, y_0)$, т. е. если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0). \tag{17.5}$$

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются ***точками разрыва*** этой функции.

Функция $z = f(x,y)$ называется ***непрерывной***, если она непрерывна в каждой точке своей области определения.

Пример 17.3. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x^2 + y^2} = t$ и заметим, что условие $x \to 0$, $y \to 0$ равносильно условию $t \to 0$. Теперь вычислим:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 - t^2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left[\ln(1 - t^2)\right]'}{t'} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{1 - t^2} \cdot (-2t)}{1} = \lim_{t \to 0} \frac{-2t}{1 - t^2} = 0. \quad \square$$

Пример 17.4. Доказать, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ не существует.

Решение. Если приближаться к точке $(0,0)$ по прямой $y = kx$, то получим:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Следовательно, значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Но так как предел функции не должен зависеть от способа приближения точки (x,y) к точке $(0,0)$, то рассматриваемый предел не существует. □

Найти пределы.

17.21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

17.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy}$.

17.23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

17.24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3-\sqrt{x+y+9}}{x+y}$.

17.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\cos xy}{y}$.

17.26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x+y)+1}{x+y}$.

17.27. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{(x+y)^2-4}{x+y-2}$.

17.28. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{xy-1}{x^2y^2-1}$.

17.29*. Показать, что при $x \to 0$, $y \to 0$ функция $z = \frac{y}{x-y}$ может стремиться к любому пределу.

Исследовать функции на непрерывность и определить точки разрыва, если они имеются.

17.30. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

17.31. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

17.32. $z = \dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$.

17.33. $z = \dfrac{x-y^2}{x+y^2}$.

17.34. $z = \dfrac{3}{x^2+y^2}$.

17.35. $z = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

17.36. $z = \dfrac{1}{xy}$.

§ 17.2. Частные производные

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Разности

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

называются ***частными приращениями*** функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ соответственно по x и y.

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то он называется ***частной производной*** (*первого порядка*) по x функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и обозначается через z'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$ или $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Аналогично определяется понятие ***частной производной*** (*первого порядка*) по y.

Итак, по определению

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования функций одной переменной, поскольку при фиксированном аргументе y (соответственно, x) функция $z = f(x, y)$ превращается в функцию одной переменной x (соответственно, y).

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Тогда частные производные от этих производных называются частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго.

Если *смешанные производные* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ непрерывны, то они равны между собой. Иными словами, результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования, если возникающие при этом смешанные частные производные непрерывны.

Пример 17.5. Дана функция $z = x\ln y + \dfrac{y}{x}$. Найти следующие частные производные: z'_x, z'_y, z''_{xy}.

Решение. Чтобы найти частную производную по x, считаем y постоянной величиной. Таким образом,

$$z'_x = \ln y \cdot (x)' + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \ln y \cdot 1 + y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln y - \frac{y}{x^2}.$$

Аналогично, дифференцируя по y, считаем x постоянной величиной:

$$z'_y = x(\ln y)'_y + \frac{1}{x}(y)'_y = x \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(\ln y - \frac{y}{x^2}\right)'_y = (\ln y)'_y - \frac{1}{x^2}(y)'_y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\cdot 1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}. \quad \square$$

Градиентом $\operatorname{grad} f$ функции $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами (z'_x, z'_y). Этот вектор характеризует направление максимальной скорости изменения функции в данной точке.

Пусть задана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ и пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент перпендикулярен линии уровня $f(x, y) = f(x_0, y_0)$, проходящей через данную точку.

Пример 17.6. Дана функция $z = 4 - x^2 - y^2$. Найти $\operatorname{grad} z$ в точке $A(1,2)$.

Решение. Найдем частные производные:

$$z'_x = (4 - x^2 - y^2)'_x = -2x, \quad z'_y = (4 - x^2 - y^2)'_y = -2y;$$

$$z'_x(1,2) = -2, \quad z'_y(1,2) = -4.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} z(1,2) = (-2,-4)$. $\square$

Найти частные производные первого порядка функций.

17.37. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$.

17.38. $z = x^2y - xy^2 + 3$.

17.39. $z = \dfrac{y}{x}$.

17.40. $z = \dfrac{x^2}{2y^3}$.

17.41. $z = xy - \dfrac{y}{x}$.

17.42. $z = \dfrac{xy}{x-y}$.

17.43. $z = \dfrac{2x+3y}{x-y}$.

17.44. $z = \dfrac{x}{y}e^{xy}$.

17.45. $z = y^3 + x \cdot e^{-y}$.

17.46. $z = (x^2 + y^2)^3$.

17.47. $z = \ln(x^2 + y)$.

17.48. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

17.49. $z = e^{-3x^2y^3}$.

17.50. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

17.51. $z = \cos(ax + by)$.

17.52. $z = \ln\sin(x - 2y)$.

17.53. $z = \sin^2(x + y) - \sin^2 x - \sin^2 y$.

17.54. $z = e^{\frac{x}{y}}\ln y$.

17.55. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$.

Найти частные производные второго порядка функций.

17.56. $z = x^3 + x^2y + y^3$.

17.57. $z = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$.

17.58. $z = \dfrac{x^3}{y^2}$.

17.59. $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$.

17.60. $z = e^{\frac{x}{y}}$.

17.61. $z = \ln\left(\dfrac{x}{y} - 1\right)$.

17.62. $z = e^{x^2y^3}$.

17.63. $z = \ln(x + y^2)$.

17.64. $z = \cos^2(x - y)$.

Проверить равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функций.

17.65. $z = 3y\ln x$.

17.66. $z = ax\sin(by + c)$.

17.67. $z = ae^{xy}$.

17.68. $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$.

17.69. $z = y\ln(5 + x)$.

17.70. $z = a^{ax+by}$.

17.71. $z = \ln(x^2 - 2y)$.

17.72. $z = \cos(ax^2 - by)$.

17.73. Доказать, что для функции $z = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$ выполняется равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$.

17.74. Доказать, что для функции $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$ выполняется равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

17.75. Доказать, что для функции $z = \dfrac{xy}{x-y}$ выполняется равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}$.

17.76. Найти градиент функции $z = xy$ в точках $(1, 1)$ и $(1, 5)$.

17.77. Найти градиент функции $z = x^2 + y^2$ в точках $(1, 2)$ и $(2, 3)$.

17.78. Найти градиент функции $z = xy^2$ в точках $(1, 1)$ и $(2, 2)$.

17.79. Построить линии уровней и градиент функции $z = 4 - x^2 - y^2$ в точке $A(1, 2)$.

17.80. Построить линии уровней функции $z = x^2 + y^2$. Найти и изобразить графически $\operatorname{grad} z$ в точках $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, 0)$.

17.81. Построить линии уровней функции $z = x^2 - y$. Найти и изобразить графически $\operatorname{grad} z$ в точках $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-1, 1)$, $(-2, 3)$.

17.82. Построить линии уровней функции $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2}$ $(z = 1,\ z = 2,\ z = 4)$ и $\operatorname{grad} z$ в точке $(-1, 2)$.

17.83. Горизонтали возвышенности определяются уравнением $h = 20 - \dfrac{x^2}{4} - y^2$. Построить горизонтали, соответствующие отметкам $h = 19$ м и $h = 16$ м. Построить $\operatorname{grad} h$ в точке $(2, 1)$.

§ 17.3. Дифференциал функции

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x, y)$, если ее полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{17.6}$$

где A и B — постоянные числа, а ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, когда Δx, $\Delta y \to 0$.

Главная линейная часть $A\Delta x + B\Delta y$ приращения Δz называется *дифференциалом функции* и обозначается через df или dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Из (17.6) и определения дифференциала следует, что

$$\Delta z \approx dz. \tag{17.7}$$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M(x, y)$, то в этой точке она дифференцируема, причем справедлива формула

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{17.8}$$

Дифференциал функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражается аналогичной формулой:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Теорема 17.2. *Пусть функции двух переменных $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в точке (x, y). Тогда справедливы следующие формулы*:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Пример 17.7. Найти дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Решение. Найдем частные производные данной функции:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, $dz = \dfrac{y}{x^2 + y^2}dx - \dfrac{x}{x^2 + y^2}dy$, согласно формуле (17.8). □

Пример 17.8. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = 5x^2 - xy + x - 1$ в точке $(1,2)$ при $\Delta x = 0,1$ и $\Delta y = 0,2$. Оценить абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение. Вычислим полное приращение данной функции:

$$\Delta z = 5(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)(y+\Delta y)+(x+\Delta x)-1-(5x^2-xy+x-1) =$$
$$= 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - y\Delta x - x\Delta y - \Delta x\Delta y + \Delta x.$$

По формуле (17.8) найдем дифференциал функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (10x - y + 1)dx - xdy.$$

Подставляя в выражения для Δz и dz значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = dx = 0,1$, $\Delta y = dy = 0,2$, получим $\Delta z = 0,73$, $dz = 0,7$. Следовательно, абсолютная погрешность равна $|\Delta z - dz| = |0,73 - 0,7| = 0,03$, а относительная погрешность — $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \dfrac{0,03}{0,73} \approx 0,04$ (4%). □

Найти дифференциалы функций.

17.84. $z = x^2y$.

17.85. $z = \dfrac{xy}{x-y}$.

17.86. $z = e^{\frac{x}{y}}$.

17.87. $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

17.88. $z = xy^3 - 2x^3y + 2^x x^4$.

17.89. $z = 4x^5 - 3x^2y^3 - 6y^5$.

17.90. $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

17.91. $z = x\ln y$.

17.92. $z = e^{xy}$.

Найти значение дифференциала функции.

17.93. $z = \dfrac{y}{x}$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0,1$, $dy = 0,2$.

17.94. $z = e^{\frac{y}{x}}$ при $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0,1$, $dy = 0,1$.

17.95. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = 0,1$, $dy = -0,1$.

17.96. Вычислить Δz и dz функции и оценить абсолютную и относительную погрешности вычислений:

а) $z = xy$ в точке $(5,4)$ при $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$,

б) $z = \dfrac{x}{y}$ в точке $(2,1)$ при $\Delta x = 0,2$, $\Delta y = 0,01$.

17.97. Заменяя полное приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}$, б) $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$, в) $0,97^{1,05}$,

г) $\sin 29^0 \cdot \operatorname{tg} 46^0$, д) $\sin 59^0 \cdot \operatorname{tg} 44^0$.

17.98. При деформации цилиндра его радиус R увеличился с 2 см до 2,05 см, а высота H уменьшилась с 10 до 9,8 см. Найти приближенно изменение объема V по формуле $\Delta V \approx dV$.

17.99. На сколько изменится объем V металлического цилиндра, высота которого $H = 30$ см после сварки увеличилась на 3 мм, а радиус основания $R = 10$ см уменьшился на 1 мм?

17.100. Квадратный метр жести стоит a рублей. Как изменится стоимость открытого прямоугольного жестяного ящика со сторонами основания 1 м и 3,5 м и высотой 1,5 м, если высоту увеличить на 20 см, а большую сторону основания уменьшить на 10 см?

§ 17.4. Экстремумы функций двух переменных

Точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ называется ***точкой локального максимума (минимума)*** функции $z = f(x,y)$ (рис. 17.3), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $M(x,y)$ этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0) \quad (f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)). \tag{17.9}$$

Локальные максимумы и локальные минимумы вместе называются ***точками экстремума*** данной функции.

Теорема 17.3 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$. Если существуют частные производные первого порядка этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, то они равны нулю:*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \tag{17.10}$$

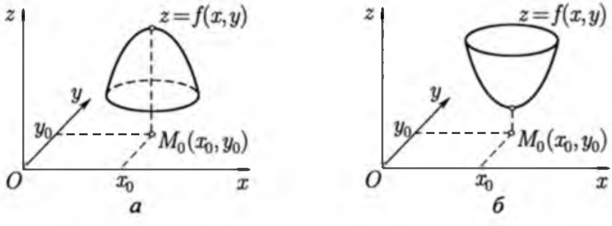

Рис. 17.3. Локальный максимум (*а*) и локальный минимум (*б*)

Точки, в которых существуют непрерывные частные производные функции $f(x, y)$ и они равны нулю, называются *критическими* или *стационарными точками*, или *точками возможного экстремума* данной функции.

Теорема 17.4 (достаточное условие экстремума). *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, и пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка, т. е. $df(x_0, y_0) = 0$. Обозначим*

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Тогда:

1) *если* $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, *то точка* $M_0(x_0, y_0)$ *локальный экстремум, причем*:

а) *локальный максимум при* $A < 0$,

б) *локальный минимум при* $A > 0$;

2) *если* $AC - B^2 < 0$, *то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *нет экстремума*;

3) *если* $AC - B^2 = 0$, *то вопрос о наличии экстремума в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *остается открытым*.

Пример 17.9. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Решение. Найдем стационарные точки данной функции. Для этого вычислим частные производные, приравняем их к нулю и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 2 = 0, \\ z'_y = x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решением будет $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Следовательно, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ — искомая стационарная точка.

Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

$$A = z''_{xx} = 2, \quad B = z''_{xy} = 1, \quad C = z''_{yy} = 2.$$

Так как $AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ и $A > 0$, то в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ данная функция имеет минимум $z_{\min}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$. □

Найти экстремум функции.

17.101. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

17.102. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

17.103. $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 1$.

17.104. $z = 2xy - 4x - 2y$.

17.105. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

17.106. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

17.107. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$.

17.108. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

17.109. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

17.110. $z = x - e^x y$.

17.111. $z = x^3y^2(6 - x - y)$.

17.112. $z = xy(1 - x - y)$.

17.113. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

17.114. Определить размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность при условии, что его объем равен V.

17.115. Из всех прямоугольников, имеющих периметр d, найти тот, площадь которого максимальна.

17.116. При каком условии сумма двух положительных чисел будет наименьшей, если их произведение есть величина постоянная $c > 0$?

§ 17.5. Экономическое приложение частных производных

Обозначим через x и y — количество товаров I и II видов. Пусть p_1 и p_2 — цены этих товаров, а затраты на производство этих товаров задаются дифференцируемой функцией издержек $C = C(x, y)$. Тогда функция прибыли имеет вид

$$\Pi(x, y) = p_1 x + p_2 y - C(x, y).$$

Максимальная прибыль будет достигаться в точке локального максимума функции $\Pi(x, y)$, найденной при условии $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Эту точку определяют из системы

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial C}{\partial x}, \\ p_2 = \dfrac{\partial C}{\partial y}, \end{cases} \tag{17.11}$$

где $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ предельные издержки на производство x единиц продукции I вида, а $\dfrac{\partial C}{\partial y}$ предельные издержки на производство y единиц продукции II вида. Равенства (17.11) демонстрируют одно из известных правил экономики: *предельная стоимость (цена) товара равна предельным затратам на производство этого товара.*

Пример 17.10. Пусть производится два вида товаров по цене $p_1 = 28$ за I вид и $p_2 = 10$ за II вид товара. Определить при продаже какого количества товара I вида (x) и количества товара II вида (y) прибыль будет максимальной, если затраты на производство этих товаров задаются функцией $C(x, y) = 8x^2 + 4xy + y^2$.

Решение. Функция прибыли будет иметь вид $\Pi(x, y) = 28x + 10y - 8x^2 - 4xy - y^2$.

Чтобы определить локальный максимум функции $\Pi(x, y)$, следует найти предельные издержки на производство данных товаров:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 16x + 4y, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 4x + 2y.$$

Применяя формулу (17.11) и решая систему

$$\begin{cases} 16x + 4y = 28, \\ 4x + 2y = 10, \end{cases}$$

получим $x = 1$, $y = 3$.

Достаточные условия локального экстремума приводят к расчету вторых частных производных функции $\Pi(x, y)$:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -16, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -2.$$

Так как $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 32 > 0$ и $A < 0$, то (см. теорему 17.4), можно утверждать, что в точке с координатами $x = 1$ и $y = 3$ функция прибыли достигает своего максимума, и этот максимум равен $\Pi_{\max} = 28 \cdot 1 + 10 \cdot 3 - 8 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 3^2 = 29$.

Итак, при продаже 1 единицы товара I вида и 3 единиц товара II вида будет достигнута максимальная прибыль. □

Найти максимальную прибыль Π от продажи товара I вида по цене p_1 и товара II вида по цене p_2, учитывая, что функция издержек равна $C(x, y)$ и $x > 0$, $y > 0$.

17.117. $C(x, y) = x + x^2 - xy + y + y^2$, $p_1 = 10$ ден.ед., $p_2 = 4$ ден.ед.

17.118. $C(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2$, $p_1 = 32$ ден.ед., $p_2 = 24$ ден.ед.

17.119. $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $p_1 = 8$ ден.ед., $p_2 = 10$ ден.ед.

17.120. $C(x, y) = x + x^2 - xy + y + y^2 - 5$, $p_1 = 9$ ден.ед., $p_2 = 42$ ден.ед.

17.121. $C(x, y) = 7x + x^2 - y\sqrt{x} - 5y + y^2$, $p_1 = 4$ ден.ед., $p_2 = 6$ ден.ед.

17.122. $C(x, y) = 24x - 3x^2 + x^3 + 4y + 3y^2$, $p_1 = 24$ ден.ед., $p_2 = 16$ ден.ед.

§ 17.6. Метод наименьших квадратов

Одной из наиболее важных задач, с которыми сталкиваются в своей деятельности экономисты, является задача поиска аналитического приближения опытных данных.

Пусть зависимость между двумя величинами x и y, полученная опытным путем, представлена в следующей таблице:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Необходимо подобрать функцию $y = f(x)$ так, чтобы она наиболее точно отражала основные тенденции зависимости между величинами x и y.

Пусть табличные данные (x_i, y_i) приближены функцией $y = f(x)$. Тогда для каждого значения x_i можно найти теоретическое значение $f(x_i)$. Таким образом, в каждой точке x_i можно рассмотреть отклонение теоретических значений от опытных: $f(x_i) - y_i$.

Один из общепринятых методов оценки погрешности приближенного вычисления состоит в рассмотрении суммы квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2. \tag{17.12}$$

Метод наименьших квадратов утверждает, что *у наилучшей эмпирической функции сумма квадратов отклонений эмпирических данных от вычисленных наименьшая*.

Предположим, что в качестве эмпирической функции $y = f(x)$ взята линейная функция $y = kx + b$. В этом случае задача поиска наилучшего приближения сводится к нахождению таких значений параметров k и b, при которых функция (см. (17.12))

$$S(k,b) = \sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)^2 \tag{17.13}$$

принимает наименьшее значение.

Параметры k и b, при которых функция (17.13) принимает наименьшее значение, определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) k + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) k + \qquad nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{17.14}$$

Эта система называется ***системой нормальных уравнений*** метода наименьших квадратов.

Пример 17.11. Результаты измерения величин x и y сведены в таблицу:

x_i	4,21	6,31	7,33	8,54	9,28	10,65
y_i	108	124	145	154	160	168

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = kx + b$, определить методом наименьших квадратов параметры k и b.

Решение. Для нахождения параметров k и b составим соответствующую систему уравнений согласно (17.14). Для этого вычислим необходимые величины и результаты оформим в виде таблицы:

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
4,21	108	454,68	17,72
6,31	124	782,44	39,82
7,33	145	1062,85	53,73
8,54	154	1315,16	72,93
9,28	160	1484,8	86,12
10,65	168	1789,2	113,42
$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i = 46,32$	$\sum\limits_{i=1}^{6} y_i = 859$	$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i y_i = 6889,13$	$\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^2 = 383,74$

Итак, получим следующую систему уравнений (см. (17.14)):

$$\begin{cases} 383,74k + 46,32b = 6889,13, \\ 46,32k + 6b = 859. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $k = 9,85$, $b = 67,10$. Следовательно, $y = 9,85x + 67,10$ — искомая линейная зависимость. □

17.123. Результаты измерения величин x и y сведены в таблицу:

x	-2	0	1	2	4
y	$0,5$	1	$1,5$	2	3

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = kx + b$, определить методом наименьших квадратов параметры k и b. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

17.124. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу $y = kx + b$ для функции, заданной следующей таблицей:

x	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$
y	$0,7$	$1,7$	$1,6$	$3,1$	$3,6$	$4,6$

Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

17.125. Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу $y = kx + b$ для функции, заданной следующей таблицей:

x	$-0,2$	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	$1,0$
y	$3,2$	$2,9$	$1,8$	$1,6$	$1,2$	$0,7$

Изобразить на графике эмпирические значения и прямую. По формуле $y = kx + b$ вычислить значение переменной y при $x = 0,1$.

17.126. Эксплуатационные расходы на содержание автоматической телефонной станции (АТС) приведены в таблице:

Емкость АТС (тыс. абонентов) (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Эксплуатационные расходы за один год (тыс. руб.) (y)	330	340	350	359	364	371	378	383

Предполагая, что между емкостью АТС и эксплуатационными расходами существует линейная зависимость $y = kx+b$, определить методом наименьших квадратов коэффициенты k и b.

Глава 18

Дифференциальные уравнения

§ 18.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1°. **Основные понятия**. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*, если же независимых переменных две или более, то такое уравнение называется дифференциальным уравнением *в частных производных*.

Так как в дальнейшем рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения, то договоримся опускать слово «обыкновенное».

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается так:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{18.1}$$

или

$$y' = f(x, y). \tag{18.2}$$

Решением (*частным решением*) дифференциального уравнения (18.1) или (18.2) называется функция $y = \phi(x)$, обращающая это уравнение в тождество относительно $x \in (a, b)$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее это решение как неявную функцию, называется *интегралом* дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения принято называть *интегральной кривой* этого уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Пример 18.1. Проверить подстановкой, что функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y' - 2y = 0$.

Решение. Подставив функции $y = e^{2x}$ и $y' = 2e^{2x}$ в данное уравнение, получим: $y' - 2y = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$. Это значит, что функция $y = e^{2x}$ является решением уравнения $y' - 2y = 0$. □

2°. Задача Коши. Интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений. Чтобы из этого множества выделить вполне конкретное решение, следует накладывать на это решение дополнительное условие, скажем, потребовать, чтобы интегральная кривая прошла через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Обобщая сказанное, приходим к следующей *задаче Коши* для дифференциального уравнения первого порядка: решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{18.3}$$

при *начальном условии*

$$y(x_0) = y_0. \tag{18.4}$$

Точка (x_0, y_0) называется *начальной точкой* задачи Коши.

Общим решением уравнения (18.3) называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную C и удовлетворяющая следующим условиям:

1) при любом допустимом C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (18.3),

2) какова бы ни была задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{18.5}$$

существует постоянная $C = C_0$ такая, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением этой задачи Коши. Другими словами, уравнение

$$\varphi(x_0, C) = y_0 \tag{18.6}$$

имеет хотя бы одно решение $C = C_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения (18.3) найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом*.

Пример 18.2. Показать, что функция $y = Cx$ является решением дифференциального уравнения $y' \cdot x - y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 2$.

Решение. Прямой подстановкой нетрудно проверить, что $y = Cx$ является решением дифференциального уравнения $y' \cdot x - y = 0$: $y' \cdot x - y = (Cx)'x - Cx = Cx - Cx = 0$. Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 2$: $y(2) = C \cdot 2 = 2$, откуда находим: $C = 1$. Итак, искомое частное решение — $y = x$. □

Показать, что данные функции являются решениями соответствующих уравнений.

18.1. $y = \cos 3x, \quad y' + 3\sin 3x = 0.$

18.2. $y = x^2 + x, \quad y' - 2x = 1.$

18.3. $y = 3^x + x^2, \quad xy' - 2y = 3^x(x\ln 3 - 2).$

Показать, что данные функции являются решениями соответствующих уравнений и найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

18.4. $y = e^x + C, \quad y' - e^x = 0, \quad y(0) = 2.$

18.5. $y = Cx^2 - x, \quad y' = 1 + \dfrac{2y}{x}, \quad y(1) = 1.$

18.6. $y = \ln Cx, \quad y' - \dfrac{1}{x} = 0, \quad y(1) = \ln 2.$

§ 18.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, заданное в виде

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{18.7}$$

Если функция $M(x,y)$ зависит только от переменной x, а $N(x,y)$ — только от переменной y: $M(x,y) = f(x)$, а $N(x,y) = g(y)$, то полученное уравнение

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{18.8}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделенными переменными*. Переписав это уравнение в виде $f(x)dx = -g(y)dy$ и интегрируя левую часть по x, а правую по y, приходим к общему интегралу исходного дифференциального уравнения.

Пример 18.3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{1+y^2} = C$$

или

$$\ln|x| - \operatorname{arctg} y = C. \quad \square$$

Если в уравнении (18.7) функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ допускают разложение

$$M(x,y) = M_1(x)M_2(y), \quad N(x,y) = N_1(x)N_2(y),$$

то полученное уравнение

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 \tag{18.9}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Предположим, что $N_1(x)M_2(y) \neq 0$. Уравнение (18.9) разделим на это произведение. Получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0,$$

общий интеграл которого находится описанным выше способом.

Заметим, что при проведении почленного деления уравнения (18.9) на $N_1(x)M_2(y)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $N_1(x)M_2(y) = 0$ и найти решения, которые не могут быть получены из общего решения.

Пример 18.4. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(xy^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - x^2y\right)dy = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$y^2(x+1)\,dx + x^2(1-y)\,dy = 0.$$

Предположим, что $xy \neq 0$. Разделив обе части последнего уравнения на x^2y^2, придем к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{1-y}{y^2}\,dy = -\frac{x+1}{x^2}\,dx.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим общий интеграл в виде

$$\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C$$

или

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C.$$

Теперь отдельно рассмотрим случай $xy = 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $x = 0$ и $y = 0$ также являются решениями данного дифференциального уравнения, однако они не получаются из общего интеграла ни при каком значении C. □

Решить дифференциальные уравнения.

18.7. $\left(1+e^{3x}\right)y'\ln y = ye^{3x}$.

18.8. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$.

18.9. $\left(1+y^2\right)dx - xy\left(1+x^2\right)dy = 0$.

18.10. $(y+xy)\,dx + (x-xy)\,dy = 0$.

18.11. $(xy-x)\,dx + (xy+x-y-1)\,dy = 0$.

18.12. $y' = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 2$.

18.13. $y' = \sqrt{x}, \quad y(0) = -1$.

18.14. $xy' - y = 0, \quad y(-2) = 4$.

18.15. $y' = y, \quad y(0) = 4$.

18.16. $x^2y' + y = 0, \quad y(1) = -e$.

18.17. $2y'\sqrt{x} = y, \quad y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

18.18. $x^3y' - 2y = 0, \quad y(1) = e^{-1}.$

18.19. $y' = -\dfrac{y}{x}, \quad y(4) = 1.$

18.20. $y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

18.21. $xdx + (y+1)\,dy = 0, \quad y(0) = 0.$

18.22. $yy' + x = 0, \quad y(1) = 1.$

18.23. $x^2y' + y^2 = 0, \quad y(2) = 2.$

18.24. $x\left(y^2 - 2\right)dx + y\left(x^2 - 2\right)dy = 0, \quad y(0) = 0.$

18.25. $3x^2\sqrt{1-y^2}dx - \left(1 + x^3\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

18.26. $e^{y-2x}dy = 4xdx, \quad y(0) = \ln 4.$

§ 18.3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией степени* m, если для произвольного $t > 0$ справедливо равенство

$$f(tx, ty) = t^m f(x,y). \tag{18.10}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{18.11}$$

называется *однородным*, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени m.

Однородные дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки $\dfrac{y}{x} = z$.

Пример 18.5. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Решение. Это уравнение однородное, так как

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

однородная функция нулевого порядка.

Введем новую переменную $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда $y = xz$, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$. Подставив y и $\dfrac{dy}{dx}$ в исходное уравнение, получим

$$z + x\frac{dz}{dx} = z + z^2, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{x}.$$

Заметим, что $z = 0$ является решением полученного уравнения и, следовательно, $y = 0$ будет решением исходного уравнения.

Предположим, что $z \neq 0$. Разделив переменные в последнем уравнении, найдем

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Непосредственным интегрированием получаем $-\dfrac{1}{z} = \ln|x| + C$.

Возвращаясь к функции заменой $z = \dfrac{y}{x}$, приходим к общему решению $-\dfrac{x}{y} = \ln|x| + C$, или $y = -\dfrac{x}{\ln|x| + C}$. □

Решить дифференциальные уравнения.

18.27. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$.

18.28. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

18.29. $(y'x - y)\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\ln\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

18.30. $\left(y^2 - x^2\right)dy = 2xydx$.

18.31. $(x + 2y + 1)\,dx - (2x + y - 1)\,dy = 0$.

18.32. $(2x + 2y - 1)\,dx + (x + y + 1)\,dy = 0$.

18.33. $(y'x - y)\sin\left(\dfrac{2y}{x}\right) + x\cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{3}$.

18.34. $xy' - y = x\ \mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

18.35. $\left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(y^2 + 2xy - x^2\right)dy = 0, \quad y(0) = 1$.

18.36. $2x^2dy = \left(x^2 + y^2\right)dx, \quad y(1) = 0$.

§ 18.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{18.12}$$
называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ является ***полным дифференциалом*** некоторой функции $u(x,y)$, т. е.
$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$
или
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{18.13}$$

Для того, чтобы уравнение (18.12) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{18.14}$$

Очевидно, что если (18.12) — уравнение в полных дифференциалах, то его можно переписать в виде
$$du(x,y) = 0,$$
откуда следует, что функция
$$u(x,y) = C$$
есть общий интеграл этого уравнения.

Итак, если (18.12) — уравнение в полных дифференциалах, то его интегрирование сводится к восстановлению функции по ее полному дифференциалу.

Функцию $u(x,y)$ можно найти следующим образом. Интегрируя первую формулу (18.13) по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, находим:
$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y). \tag{18.15}$$
Продифференцировав найденную функцию по y и учитывая второе равенство (18.13), получим
$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \varphi'(y) = N(x,y).$$
Из этого равенства находим функцию $\varphi(y)$, подставляем в (18.15) и получаем функцию $u(x,y)$.

Пример 18.6. Решить уравнение

$$e^{-y}dx + \left(1 - xe^{-y}\right)dy = 0.$$

Решение. Для функций $M(x,y) = e^{-y}$ и $N(x,y) = 1 - xe^{-y}$ проверим условие (18.14):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}) = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1 - xe^{-y}) = -e^{-y}.$$

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то это уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $u(x,y)$ по ее частным производным:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = e^{-y},$$

следовательно

$$u(x,y) = \int e^{-y}dx + \varphi(y) = xe^{-y} + \varphi(y).$$

Для определения $\varphi(y)$ продифференцируем найденную функцию $u(x,y)$ по y и приравняем к функции $N(x,y) = 1 - xe^{-y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} + \varphi'(y) = 1 - xe^{-y}.$$

Откуда $\varphi'(y) = 1$, или $\varphi(y) = y + C_1$. Тогда $u(x,y) = xe^{-y} + y + C_1$. Общим интегралом заданного уравнения будет $xe^{-y} + y + C_1 = C_2$, или

$$xe^{-y} + y = C,$$

где $C = C_2 - C_1$. □

Решить дифференциальные уравнения.

18.37. $3x^2e^ydx + \left(x^3e^y - 1\right)dy = 0.$

18.38. $(1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}dy = 0.$

18.39. $(2x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$

18.40. $(2xy - 5)\,dx + \left(3y^2 + x^2\right)dy = 0.$

18.41. $\left(1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0.$

18.42. $\left(y+\dfrac{2}{x^2}\right)dx+\left(x-\dfrac{3}{y^2}\right)dy=0.$

18.43. $5x^4y\,dx+\left(x^5-y\right)dy=0.$

18.44. $\left(3x^2y-2x^3+y^3\right)dx-\left(2y^3-3xy^2-x^3\right)dy=0.$

18.45. $(\ln y-2x)\,dx+\left(\dfrac{x}{y}-2y\right)dy=0.$

18.46. $xdy-ydx=xdx.$

§ 18.5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{18.16}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением* первого порядка.

Если правая часть $q(x)$ уравнения (18.16) равна нулю: $q(x)=0$, то это уравнение называется линейным *однородным* дифференциальным уравнением. В противном случае ($q(x)\neq 0$) уравнение (18.16) называется линейным *неоднородным* дифференциальным уравнением.

Однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \tag{18.17}$$

всегда имеет нулевое решение $y(x)=0$. Кроме того, это уравнение с разделяющимися переменными и его общий интеграл найти просто:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx\quad(y\neq 0),\quad \ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int p(x)\,dx\quad(C\neq 0),$$

$$y=Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{18.18}$$

Если же уравнение (18.16) неоднородное, то его решение можно найти двумя методами.

1. *Метод вариации произвольной постоянной* (*метод Лагранжа*). Суть этого метода заключается в том, что постоянную C

в общем решении (18.18) соответствующего однородного уравнения (18.17) заменяют функцией $C(x)$ и ищут общее решение неоднородного уравнения (18.16) в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{18.19}$$

Пример 18.7. Методом вариации произвольной постоянной решить уравнение

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 2xy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, общее решение которого имеет вид $y = Ce^{-x^2}$.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C\,(x)\,e^{-x^2},$$

где $C(x)$ — неизвестная функция от x. Имеем:

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}.$$

Подставляя значения y и y' в наше уравнение, получим

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC\,(x)\,e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}.$$

Откуда имеем: $C'\,(x) = 2x$, $C(x) = x^2 + C$.

Таким образом, общим решением данного неоднородного уравнения будет:

$$y = \left(x^2 + C\right)e^{-x^2},$$

где C — произвольная постоянная. □

2. *Метод подстановки* (*метод Бернулли*). Суть этого метода заключается в том, что искомое решение неоднородного уравнения (18.16) представляется в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x),$$

где одна из функций $u(x)$ и $v(x)$ ненулевая и может быть выбрана произвольным образом.

Подставляя функцию $y = uv$ в уравнение (18.16), получим

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \tag{18.20}$$

Теперь функцию $v = v(x)$ выберем так, чтобы выражение в скобках было равно нулю, т. е.

$$v' + p(x)v = 0$$

(в качестве $v(x)$ можно взять любое частное решение этого уравнения). После этого подставим полученную функцию $v(x)$ в уравнение (18.20) и найдем из уравнения $u'v = q(x)$ функцию $u(x)$.

Пример 18.8. Методом Бернулли решить уравнение

$$y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}.$$

Решение. Применяя подстановку $y = uv$, получим

$$u'v + uv' + 2xuv = 2x^2e^{-x^2}$$

или

$$u'v + u\,(v' + 2xv) = 2x^2e^{-x^2}.$$

Уравнение $(v' + 2xv) = 0$ имеет частное решение $v = e^{-x^2}$. Подставив эту функцию в предыдущее уравнение, найдем $u = \dfrac{2}{3}x^3 + C$.

Итак,

$$y = uv = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)$$

есть общее решение исходного уравнения. □

Решить линейные дифференциальные уравнения.

18.47. $y' - \dfrac{5y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.

18.48. $y' - y\cos x = 3\sin 2x$.

18.49. $y' + 2xy = 2x$.

18.50. $(x+1)\,y' - 2y = e^{3x}\,(x+1)^3$.

18.51. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$.

18.52. $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$.

18.53. $xy' = x + 2y, \quad y\,(2) = 2$.

18.54. $x(y' - y) = e^x, \quad y(1) = e.$

18.55. $y' + y\cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 0.$

18.56. $y' = x\left(e^{-x^2} - 2y\right), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

§ 18.6. Дифференциальные уравнения высших порядков

1°. **Основные понятия. Задача Коши**. Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются *дифференциальными уравнениями высших порядков*.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{18.21}$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{18.22}$$

Задача Коши для дифференциального уравнения (18.22) состоит в поиске решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1^0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0. \tag{18.23}$$

Общим решением уравнения (18.22) называется функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ является решением уравнения (18.22),

2) какова бы ни была задача Коши с начальными условиями (18.23), существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ является решением этой задачи Коши.

2°. **Уравнения, допускающие понижение порядка**. Одним из методов интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является метод понижения порядка. Суть этого метода заключается в сведении дифференциального уравнения n-го порядка к дифференциальному уравнению более низкого порядка путем введения новой неизвестной функции.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений, к которым можно применить указанный метод.

а) *Дифференциальное уравнение вида* $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение этого уравнения находится последовательным интегрированием:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2,$$

....

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$$

П р и м е р 18.9. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = 2x + e^x.$$

Р е ш е н и е. Последовательно интегрируя два раза, получим

$$y' = \int (2x + e^x)dx = x^2 + e^x + C_1,$$

$$y = \int (x^2 + e^x + C_1)dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C_1x + C_2. \quad \square$$

б) *Уравнения вида* $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, т.е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. Порядок этого дифференциального уравнения понижается на k единиц с помощью замены $y^{(k)}(x) = z(x)$: $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$. Если найдено общее решение $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ полученного уравнения, то искомая функция $y = y(x)$ получается путем k-кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

П р и м е р 18.10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' - y' - x^2 \sin x = 0.$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение не содержит явно функцию y, поэтому замена $y' = z(x)$ приводит его к виду $xz' - z - x^2 \sin x = 0$ или $z' - \dfrac{z}{x} = x \sin x$. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Используя подстановку $z(x) = u(x)v(x)$, приводим полученное дифференциальное уравнение к виду

$$v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + uv' = x \sin x.$$

Так как функция $u = x$ частное решение уравнения с разделяющимися переменными $u' - \frac{u}{x} = 0$, то для функции v получаем уравнение $v' = \sin x$. Интегрируя, находим общее решение: $v = -\cos x + C_1$. Следовательно, $z = x\,(-\cos x + C_1)$, т.е. $y' = x\,(-\cos x + C_1)$. Интегрируя еще раз, получаем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y\,(x) = \int x\,(-\cos x + C_1)\,dx = -x\sin x - \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2. \quad \square$$

в) ***Уравнения вида*** $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, т.е. уравнения, не содержащие явно независимой переменной. Порядок этого уравнения понижается на единицу при замене $y' = z(y)$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$ и т.д.

Пример 18.11. Найти решение задачи Коши

$$y'' - y'^{\,2} + y'(y-1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \tag{18.24}$$

Решение. Положим $z = z(y) = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(z(y))}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

и, следовательно, данное уравнение примет вид

$$z\frac{dz}{dy} - z^2 + z(y-1) = 0$$

или

$$\frac{dz}{dy} - z + y - 1 = 0,$$

поскольку $z \neq 0$ (ведь $y' \neq 0$ согласно начальному условию). Последнее уравнение является линейным уравнением первого порядка. Решая его (скажем, методом Бернулли), получим общее решение $z = Ce^y + y$. Произведя обратную подстановку, имеем

$$y' = Ce^y + y. \tag{18.25}$$

Подставляя начальные условия в это равенство, получим: $2 = Ce^2 + 2$. Откуда находим: $C = 0$.

Итак, уравнение (18.25) принимает вид $y' = y$. Общим решением этого уравнения будет $y = Ce^x$. Но так как $y(0) = 2$, то $C = 2$.

Таким образом, функция $y = 2e^x$ является решением задачи Коши (18.24). $\square$

Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка.

18.57. $y'' = x + \sin x$.

18.58. $y^{(4)} = \dfrac{1}{x}$.

18.59. $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

18.60. $y''y' - y'^2 = 2e^{3x}$.

18.61. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$.

18.62. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.

18.63. $xy'' + y'^2 = y', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

18.64. $(1 + e^x)\, y''' - e^x y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

18.65. $yy'' = y'^2 \ln y'$.

18.66. $yy'' + y'^2 = y^2 \ln y$.

18.67. $yy'' - y'^2 = 0$.

18.68. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

18.69. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$.

18.70. $yy'' + y'^2 + \dfrac{y'^3}{y} = 0, \quad y\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1$.

§ 18.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

1°. **Линейная зависимость и независимость системы функций**. Система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется *линейно зависимой* на отрезке $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю одновременно, такие, что справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad (x \in [a, b]). \tag{18.26}$$

Если же тождество (18.26) выполняется лишь в случае, когда все числа α_i, $i = 1, \ldots, n$ равны нулю, то система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется *линейно независимой* на отрезке $[a, b]$.

Пример 18.12. Доказать линейную зависимость функций

$$\sin^2 x, \quad \cos^2 x, \quad 1 \tag{18.27}$$

на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Заметим, что если взять $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = -1$, то

$$\alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \cdot 1 = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$$

для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. А это значит, что система функций (18.27) линейно зависима на интервале $(-\infty, +\infty)$. □

Пример 18.13. Доказать линейную независимость функций

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^n \tag{18.28}$$

на любом отрезке $[a, b]$.

Решение. Составим линейную комбинацию функций (18.28) с произвольными коэффициентами α_0, α_1, ... , α_n, из которых хотя бы один не равен нулю, и рассмотрим равенство:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_1 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0. \tag{18.29}$$

Это равенство не может выполняться для всех $x \in [a, b]$, поскольку слева стоит многочлен, который не может иметь бесчисленное множество корней. Следовательно, равенство (18.29) для всех $x \in [a, b]$ выполняется лишь в случае, когда все числа α_i, $i = 0, \ldots, n$ равны нулю. А это значит, что функции (18.28) линейно независимы на отрезке $[a, b]$. □

Теорема 18.1. *Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные числа, то функции*

$$e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n x} \tag{18.30}$$

линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$.

Пример 18.14. Доказать, что если λ — действительное число, а $r \geqslant 1$ — натуральное число, то функции

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{r-1} e^{\lambda x} \tag{18.31}$$

линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$.

Решение. Составим линейную комбинацию данных функций с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$:

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \ldots + \alpha_r x^{r-1} e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_r x^{r-1}).$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, а выражение в скобках является многочленом, то

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \ldots + \alpha_r x^{r-1} e^{\lambda x} \equiv 0$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. А это значит, что функции (18.31) линейно независимы на любом отрезке $[a, b]$. □

Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций.

18.71. x, $\ln x$.

18.72. e^{-x}, xe^{-x}.

18.73. x, $2x$, x^2.

18.74. $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

18.75. 1, $\sin x$, $\cos 2x$.

2°. **Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка**. Дифференциальное уравнение вида

$$Ly = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{18.32}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — произвольные постоянные, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Система из n линейно независимых решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (18.32) называется ее *фундаментальной системой решений*.

Алгебраическое уравнение n-го порядка

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0, \tag{18.33}$$

называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (18.32).

Теорема 18.2. *Пусть λ_i, $i = 1, \ldots, k$ — корень кратности $r_i \geqslant 1$ характеристического уравнения* (18.33) $(r_1 + \ldots + r_k = n)$. *Тогда функции*

$$e^{\lambda_1 x}, \quad x e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x},$$

$$e^{\lambda_2 x}, \quad xe^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{\lambda_k x}, \quad xe^{\lambda_k x}, \quad \ldots, \quad x^{r_k-1}e^{\lambda_k x}$$

являются фундаментальной системой решений дифференциального уравнения (18.32), *а их линейная комбинация*

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n x^{r_k-1} e^{\lambda_k x},$$

где C_1, C_2, $\ldots$, C_n *произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.*

Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности r характеристического уравнения (18.33) соответствуют r пар линейно независимых действительных решений

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

уравнения (18.32). Следовательно, общее решение уравнения (18.32) можно записать в действительной форме и в случае комплексных корней характеристического уравнения (18.33).

Пример 18.15. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, функция

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

является общим решением данного уравнения. □

Пример 18.16. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - 3y' + 2y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

имеет простой корень $\lambda_1 = -2$ и двукратный корень $\lambda_2 = 1$. Следовательно, функция

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

является общим решением данного уравнения. □

Пример 18.17. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Следовательно, общим решением данного дифференциального уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x. \quad \square$$

Пример 18.18. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня $\pm i$ кратности 2. Следовательно, фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$, а значит, функция

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x = \\ = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x$$

является общим решением данного уравнения. $\square$

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

18.76. $y'' + 10y' + 25y = 0.$

18.77. $y'' + y' - 6y = 0.$

18.78. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

18.79. $y'' + 4y' = 0.$

18.80. $y'' + 11y' + 28y = 0.$

18.81. $y'' - 64y = 0.$

18.82. $y'' + 4y' - 21y = 0.$

18.83. $y'' - 10y' - 11y = 0.$

18.84. $y'' - y = 0.$

18.85. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

18.86. $y'' - 12y' + 36y = 0.$

18.87. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

18.88. $y'' + 9y = 0.$

18.89. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

18.90. $y'' - 6y' + 13y = 0.$

18.91. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

18.92. $y'' - 2y' + 5y = 0.$

18.93. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

18.94. $y^{(4)} - y^{(3)} - 3y^{(2)} + 5y' - 2y = 0.$

18.95. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' + y = 0.$

§ 18.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$Ly \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x), \tag{18.34}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — произвольные постоянные, а $f(x) \not\equiv 0$, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами***.

Общее решение неоднородного уравнения (18.34) определяется по формуле

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x), \tag{18.35}$$

где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$, а $y_*(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (18.34).

В общем случае частное решение $y_*(x)$ можно найти ***методом Лагранжа вариации произвольных постоянных***, суть которого заключается в следующем: если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $Ly = 0$, то частное решение неоднородного уравнения (18.34) имеет вид

$$y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x), \tag{18.36}$$

где функции $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{18.37}$$

Пример 18.19. Методом вариации произвольных постоянных решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$. Поскольку $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, то $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ — общее решение однородного уравнения.

Ищем частное решение исходного неоднородного уравнения в виде $y_*(x) = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-x}$. Для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему (18.37):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $C_1'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$ и $C_2'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Интегрируя, находим:

$$C_1(x) = -e^x + \ln(e^x + 1), \quad C_2(x) = \ln(e^x + 1).$$

Следовательно, общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + (-e^x + \ln(e^x + 1))e^{-2x} + \ln(e^x + 1) \cdot e^{-x} =$$

$$= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - e^{-x} + (e^{-2x} + e^{-x}) \ln(e^x + 1). \quad \square$$

В некоторых частных случаях, когда правая часть $f(x)$ неоднородного дифференциального уравнения (18.34) имеет специальный вид, частное решение $y_*(x)$ находится *методом подбора*. Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть правая часть уравнения (18.34) имеет вид

$$f(x) = a e^{\lambda_0 x}. \tag{18.38}$$

Если λ_0 не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0, \tag{18.39}$$

то частное решение $y_*(x)$ следует искать в виде

$$y_*(x) = Ae^{\lambda_0 x}, \tag{18.40}$$

а если λ_0 — корень кратности r характеристического уравнения (18.39), то частное решение следует искать в виде

$$y_*(x) = Ax^r e^{\lambda_0 x}. \tag{18.41}$$

где A — постоянная.

Пример 18.20. Решить уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, $y_0(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Так как число $\lambda_0 = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения имеет вид $y_*(x) = Ae^x$. Подставив эту функцию в данное неоднородное уравнение, находим $A = 1$, т. е. $y_*(x) = e^x$.

Итак,

$$y = y_0(x) + y_*(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + e^x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть общее решение исходного уравнения. □

Пример 18.21. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 2. Следовательно, $y_0(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Частное решение данного неоднородного уравнения следует искать в виде $y_*(x) = Ax^2e^{2x}$. Имеем

$$y_*'(x) = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}, \quad y_*''(x) = 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение и упрощая его, получим $2Ae^{2x} = e^{2x}$. Откуда имеем $A = \frac{1}{2}$, т. е. $y_*(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$ — искомое частное решение.

Итак,

$$y = y_0(x) + y_*(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть общее решение исходного уравнения. □

б) Пусть правая часть уравнения (18.34) имеет вид

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_0 x}, \tag{18.42}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, а λ_0 — некоторое число. Тогда частное решение неоднородного уравнения (18.34) имеет вид

$$y_*(x) = x^r Q_n(x)e^{\lambda_0 x}, \tag{18.43}$$

где $Q_n(x)$ — некоторый многочлен степени n, а r — число, равное кратности λ_0 как корня характеристического уравнения (18.39) (если λ_0 не является корнем характеристического уравнения, то принимается $r = 0$).

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена $Q_n(x)$ следует функцию (18.43) подставить в уравнение (18.34) и в полученном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества.

Пример 18.22. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, а значит, $y_0(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Так как правая часть имеет вид $2x + 3 = (2x + 3)e^{0 \cdot x}$, причем $\lambda_0 = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение исходного неоднородного уравнения следует искать в виде $y_* = Ax + B$. Подставляя эту функцию в данное уравнение, получим $2Ax + 2B - 3A = 2x + 3$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 3A = 3. \end{cases}$$

Откуда имеем $A = 1$, $B = 3$. Следовательно, $y_* = 2x + 3$ есть частное решение, а

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x + 3$$

общее решение исходного неоднородного уравнения. □

в) Пусть правая часть уравнения (18.34) имеет вид

$$f(x) = (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}, \tag{18.44}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – некоторые многочлены, а α и β – некоторые числа. Тогда частное решение неоднородного уравнения (18.34) имеет вид

$$y_*(x) = x^r (M_l(x) \cos \beta x + N_l(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}, \tag{18.45}$$

где $M_l(x)$ и $N_l(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени $l = \max(n, m)$, а r – число, равное кратности $\alpha + i\beta$ как корня характеристического уравнения (18.39) (если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то принимается $r = 0$).

Пример 18.23. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 4 \sin 2x.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$. Следовательно, функции $\cos 2x$ и $\sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения.

Так как правая часть данного уравнения имеет вид

$$f(x) = (0 \cdot \cos 2x + 4 \sin 2x) e^{0 \cdot x}$$

и $\alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$ является корнем кратности 1 характеристического уравнения, то частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$y_* = x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Вычислим производные y'_* и y''_*:

$$y'_* = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$y''_* = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \\ + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) = \\ = 4B\cos 2x - 4A\sin 2x - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x - \\ - 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4x(A\cos 2x + B\sin 2x) = \sin 2x,$$

или

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = \sin 2x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} 4B = 0 \\ -4A = 4, \end{cases}$$

т. е. $A = -1$, $B = 0$. Следовательно, $y_* = -x\cos 2x$ частное решение, а $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x\cos 2x$ — общее решение исходного неоднородного уравнения. □

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

18.96. $y'' - 2y' + y = x - 4$. **18.97.** $4y'' - y = x^3 - 24x$.

18.98. $y'' - 2y' = 6x^2 + 2x - 6$.

18.99. $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$.

18.100. $y'' + 2y' + 5y = \cos x$.

18.101. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)\,e^{4x}$.

18.102. $y'' - 4y = \left(1 - x^2\right)e^{2x}$.

18.103. $y'' - 4y' + 8y = e^x\,(2\sin x - \cos x)$.

18.104. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}\sin x$.

18.105. $y'' + 4y' = \sin x$, $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = 1$.

18.106. $y^{(4)} - y' = 2x$.

18.107. $y^{(4)} - y = 8xe^{-x}$.

18.108. $y''' + y'' = 12x^2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 25$.

18.109. $y''' + 4y' = 16x^3 + 4, \; y(0) = -1, y'(0) = 1, y''(0) = -2$.

18.110. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$.

18.111. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

18.112. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

18.113. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

18.114. $y'' - 2y' + y = 3e^x\sqrt{x+1}$.

Глава 19

Числовые ряды

§ 19.1. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ бесконечная числовая последовательность. Формальное выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{19.1}$$

называется ***числовым рядом*** или просто ***рядом***. Числа a_1, a_2, a_3, ... называются ***членами данного ряда***, а a_n — ***общим членом*** или ***n-м членом*** ряда.

Сумма первых n членов ряда (19.1) называется ***n-й частичной суммой*** данного ряда и обозначается символом S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ряд (19.1) называется ***сходящимся***, если существует конечный предел последовательности частичных сумм S_n этого ряда. При этом число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называется ***суммой*** данного ряда и записывается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ряд (19.1) называется ***расходящимся***, если расходится последовательность частичных сумм S_n этого ряда, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

Теорема 19.1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ *сходятся и имеют суммы, соответственно равные* A *и* B, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$ *также сходится и его сумма равна* $A + B$, *т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{19.2}$$

Теорема 19.2. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *сходится и имеет сумму* S. *Тогда для произвольного числа* λ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots$ *также сходится и его сумма равна* λS, *т. е.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{19.3}$$

Теорема 19.3. *Если ряд сходится (расходится), то сходится (расходится) и ряд, полученный из данного путем отбрасывания (или приписывания) конечного числа членов.*

Пример 19.1. Найти общий член ряда

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \frac{7}{10} + \frac{10}{13} + \ldots$$

Решение. Нетрудно убедиться, что общий член ряда $a_n = \frac{3n-2}{3n+1}$. Действительно, при $n = 1$ получим $a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}$, при $n = 2$ имеем $a_2 = \frac{3 \cdot 2 - 2}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{7}$ и т. д. □

Пример 19.2. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Запишем n-ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)}.$$

Поскольку n-й член ряда можно представить в виде $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$, то n-ю частичную сумму данного ряда можно преобразовать следующим образом:

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{n+1+n+2}{(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Значит,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{3}{4},$$

т. е. данный ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{3}{4}$. □

Найти частичную сумму S_n данного ряда. В случае сходимости ряда найти его сумму S.

19.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

19.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$.

19.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

19.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$.

19.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.

19.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

19.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.

19.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5n-1} - \dfrac{1}{5n+4}\right)$

19.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{9n^2+12n-5}$.

19.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{24}{9n^2-12n-5}$.

19.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2+4n-3}$.

19.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{16n^2-8n-3}$.

19.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$.

19.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)$.

19.15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5}{2^n}$.

19.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

19.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n+3^n}{15^n}$.

19.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n+3^n}{6^n}$.

19.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n-3^n}{15^n}$.

19.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{7^n-3^n}{21^n}$.

§ 19.2. Необходимое условие сходимости ряда

Теорема 19.4 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{19.4}$$

Из этой теоремы следует, что *если предел общего члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ при $n \to \infty$ не равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.*

Пример 19.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

Решение. Найдем предел общего члена ряда при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n-1}{2n+1} = \ln 1 = 0,$$

т. е. необходимый признак выполняется. Покажем, что данный ряд расходится.

Представим общий член ряда в виде

$$a_n = \ln \frac{2n-1}{2n+1} = \ln(2n-1) - \ln(2n+1).$$

Тогда n-ю частичную сумму данного ряда можно преобразовать следующим образом:

$$S_n = \ln 1 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 5 + \ln 5 - \ln 7 + \ldots + \ln(2n-1) - \ln(2n+1) = \\ = -\ln(2n+1).$$

Теперь заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-\ln(2n+1)) = -\infty$. Следовательно, ряд расходится. □

Пример 19.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n+1}$.

Решение. Предел общего члена ряда при $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5} \neq 0$, т.е. необходимый признак не выполняется, следовательно, ряд расходится. □

Проверить выполнение необходимого признака сходимости и, где это возможно, сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

19.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n+1}$.

19.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$.

19.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$.

19.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$.

19.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+1}$.

19.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n}$.

19.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{9n^2+1}}{6n^2-1}$.

19.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

19.29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$.

19.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$.

19.31. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$.

19.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln\frac{2n}{2n-1}$.

19.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

19.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{2n}{2n+3}$.

19.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{3n+1}{2n+1}$.

19.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n+1}{2n+1}$.

19.37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{n^2+1}$.

19.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{n^2}{3n-1}$.

19.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{\pi n^2-1}{n^2+3}$.

19.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{\pi n+1}{2n-3}$.

§ 19.3. Положительные ряды. Теоремы сравнения рядов

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *положительным*, если все его члены положительны: $a_n > 0$, для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

Теорема 19.5 (признак сравнения). *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{19.5}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{19.6}$$

Если для всех номеров n справедливо неравенство $a_n \leqslant b_n$, то:

а) из сходимости ряда (19.6) *следует сходимость ряда* (19.5),

б) из расходимости ряда (19.5) *следует расходимость ряда* (19.6).

Теорема 19.6 (предельный признак сравнения). *Пусть* (19.5) *и* (19.6) — *положительные ряды, и пусть существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \tag{19.7}$$

Тогда:

а) если $L \neq 0$, то оба ряда (19.5) *и* (19.6) *или сходятся или расходятся одновременно,* *б) если $L = 0$, то из сходимости ряда* (19.6) *следует сходимость ряда* (19.5), *а из расходимости ряда* (19.5) *следует расходимость ряда* (19.6).

«Эталонные ряды» — ряды, часто используемые в качестве рядов сравнения:

1) *геометрический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$,

2) *гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится,

3) *обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Пример 19.5. Исследовать сходимость *геометрического ряда*, т. е. ряда, составленного из членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad (a \neq 0).$$

Решение. Из курса элементарной математики известно, что сумма n первых членов геометрической прогрессии, т.е. n-я частичная сумма ряда при $q \neq 1$ определяется соотношением:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1}.$$

Возможны несколько случаев:

1) если $|q| < 1$, т. е. ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{-a}{q-1} = \frac{a}{1-q}$, т. е. предел n-й частичной суммы ряда существует и конечен. Следовательно, ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$;

2) если $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится;

3) если $q \leqslant -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ не существует и ряд расходится;

4) если $q = 1$, то ряд примет вид $a + a + \ldots + a + \ldots$, его n-я частичная сумма $S_n = a + a + \ldots + a = na$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, т. е. ряд расходится.

Таким образом, *геометрический ряд сходится к сумме* $S = \dfrac{a}{1-q}$ *при* $|q| < 1$ *и расходится при* $|q| \geqslant 1$. □

Пример 19.6. Исследовать сходимость ряда

$$0,2 + 0,02 + 0,002 + \ldots$$

Решение. Общий член ряда можно представить в виде $a_n = 0,2 \cdot 0,1^{n-1}$, т. е. исследуемый ряд представляет собой геометрический ряд с $q = 0,1$. Так как $|q| = 0,1 < 1$, то ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q} = \dfrac{0,2}{1-0,1} = \dfrac{2}{9}$. □

Пример 19.7. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} + \ldots$$

Решение. Воспользуемся признаком сравнения (теорема 19.5). Сравним данный ряд со сходящимся геометрическим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots,$$

знаменатель которого $q = \dfrac{1}{2} < 1$.

Так как члены исследуемого ряда не превосходят членов сходящегося геометрического ряда:

$$1 \leqslant 1, \quad \frac{1}{2 \cdot 2} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{2^2}, \quad \ldots, \frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n},$$

то на основании признака сравнения ряд сходится. □

Пример 19.8. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n-1)}} + \ldots$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

отбросив в нем первый член, что не повлияет на его сходимость или расходимость (теорема 19.3).

Так как $\sqrt{2 \cdot 1} < \sqrt{2^2} = 2$, то $\dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} > \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{3 \cdot 2} < \sqrt{3^2} = 3$, то

$\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} > \dfrac{1}{3}, \ldots, \sqrt{n\cdot(n-1)} < \sqrt{n^2} = n$, то $\dfrac{1}{\sqrt{n\cdot(n-1)}} > \dfrac{1}{n}$ и т. д.

Таким образом, члены исследуемого ряда больше членов расходящегося гармонического ряда, следовательно, на основании признака сравнения ряд расходится. □

Пример 19.9. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2-3n+5}$.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-3n+5} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)}{n^2-3n+5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} = 2 \neq 0,$$

то на основании предельного признака сравнения (теорема 19.6) данный ряд (как и гармонический ряд) расходится. □

С помощью признаков сравнения исследовать на сходимость ряды с положительными членами.

19.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{n^2+1}$.

19.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{3n^3+2}$.

19.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{n^3-2n+5}$.

19.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

19.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3-n+1}}$.

19.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{2^n}$.

19.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi n}{\sqrt{n^2+1}}$.

19.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3n+1}$.

19.49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+3}}$.

19.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

19.51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(1+n)}$.

19.52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(3+n)}{n}$.

19.53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(3+n)}{n^2}$.

19.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3}\,\ln(1+n)}$.

19.55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^5}\,\ln(1+n)}$.

19.56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,2^n}{3^n-1}$.

19.57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$.

19.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,3^n}$.

19.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}$.

19.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{n+2^n}{5^n}$.

19.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\dfrac{3^n}{4^n+1}$.

19.62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{\pi n}{2n-1}$.

§ 19.4. Признаки сходимости положительных рядов

1°. **Признак Даламбера.**

Теорема 19.7 (признак Даламбера). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L. \tag{19.8}$$

Тогда:

а) если $L < 1$, то ряд сходится,

б) если $L > 1$, то ряд расходится,

в) если $L = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 19.10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

Решение. Запишем n-й и $(n+1)$-й члены ряда:

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2\cdot 2^n}{(n+1)\cdot n!}.$$

Найдем предел их отношения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} : \frac{2^n}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, на основании признака Даламбера ряд сходится. □

Пример 19.11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Решение. Запишем n-й и $(n+1)$-й члены ряда:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3 \cdot 3^n (n+1) n!}{(n+1)(n+1)^n}.$$

Предел их отношения при $n \to \infty$ равен:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3 \cdot 3^n (n+1) n!}{(n+1)(n+1)^n} : \frac{3^n n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Значит, на основании признака Даламбера ряд расходится. □

С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов.

19.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

19.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\,3^n}{(n+1)!}$.

19.65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

19.66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{n+1}{2n-1}$.

19.67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n + n^2}$.

19.68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n + n^n}$.

19.69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)n}{(n+1)!}$.

19.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

19.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)!}$. **19.72.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^2}{(2n)!}$.

19.73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}$.

19.74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (2n+3)}$.

19.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$.

19.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$.

19.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi \cdot 2^n}{5^n}$. **19.78.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \cos \dfrac{2\pi}{5^n}\right)$.

19.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n}$. **19.80.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg} \dfrac{2\pi}{5^n}$.

19.81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n-1) \sin \dfrac{\pi}{5^n}$.

19.82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n-1) \left(1 - \cos \dfrac{2\pi}{e^n}\right)$.

2°. Признак Коши.

Теорема 19.8 (признак Коши). *Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Тогда:

а) если $L < 1$, то ряд сходится,

б) если $L > 1$, то ряд расходится,

в) если $L = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 19.12. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^n$.

Решение. Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Следовательно, на основании признака Коши ряд сходится. □

С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов.

19.83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

19.84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+1}\right)^n$.

19.85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$.

19.86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.

19.87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n-1}{2n^2-n+2}\right)^n$.

19.88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}+1}\right)^n$.

19.89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n^2}$

19.90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n^2}$

19.91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^{n^2}$

19.92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

19.93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$.

19.94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (3n-1)}$.

19.95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n (n+1)}$.

19.96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{\ln^n (2n+1)}$.

19.97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$.

19.98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^n$.

19.99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

19.100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2\pi} \sin \frac{\pi}{n}\right)^n$.

19.101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \arcsin \frac{n+1}{2n^2-1}\right)^n$.

19.102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n}\right)^n$.

3°. Интегральный признак Коши.

Теорема 19.9 (интегральный признак Коши). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает на полупрямой $x \geqslant 1$. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \,, \tag{19.9}$$

где $a_n = f(n)$, и несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx \tag{19.10}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример 19.13. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Решение. Заметим, что функция $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} \frac{d\ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\ln(x+1)\right)\Big|_1^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\ln\ln(t+1) - \ln\ln(1+1)\right) = \infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд. □

С помощью интегрального признака Коши исследовать сходимость рядов.

19.103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

19.104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\,\ln^2(2n+1)}$.

19.105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln(3n+1)}}$.

19.106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{3n^2+1}}$.

19.107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(2n+1)^2}}$.

19.108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

19.109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} n}}{n^2+1}$.

19.110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(2n-1)}{2n^2-2n+1}$.

§ 19.5. Знакопеременные ряды

1°. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Ряд с членами произвольных знаков называется *знакопеременным рядом*. Ряд называется *знакочередующимся*, если любые его два соседних члена имеют разные знаки.

Знакочередующийся ряд удобно записать в следующей форме:

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{n-1}p_n + \ldots, \tag{19.11}$$

где все $p_n > 0$.

Теорема 19.10 (признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда* (19.11) *не возрастают по абсолютной величине:*

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant \ldots$$

и стремятся к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0,$$

то этот ряд сходится, а его сумма не превосходит первого члена: $S \leqslant p_1$.

Погрешностью приближенного вычисления суммы S ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется величина

$$\Delta_n = \left| S - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right|.$$

Следствие 19.1. *Погрешность Δ_n при приближенном вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена, т. е. $\Delta_n \leqslant p_{n+1}$.*

Пример 19.14. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}.$$

Решение. Покажем, что члены ряда, взятые по абсолютной величине, представляют собой убывающую числовую последовательность. Для этого запишем общий член ряда в виде:

$$p_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n+\dfrac{1}{n}}.$$

Тогда

$$p_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n+1+\dfrac{1}{n+1}}.$$

Сравним знаменатели последних дробей. Очевидно, что $n+\dfrac{1}{n} < n+$ $+1+\dfrac{1}{n+1}$ или $\dfrac{1}{n} < 1+\dfrac{1}{n+1}$ справедливо для любого натурального n и, следовательно, первое условие признака Лейбница выполнено, т. е. $p_n > p_{n+1}$.

Теперь вычислим предел общего члена p_n при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0,$$

то есть второе условие признака Лейбница также выполнено и, следовательно, ряд сходится и его сумма не превосходит $p_1 = \dfrac{1}{2}$. □

Пример 19.15. Вычислить с точностью до $0,001$ сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$.

Решение. Прежде всего заметим, что согласно признаку Лейбница ряд сходится. Определим, какое число членов ряда надо взять, чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью. По условию $\Delta_n < 0,001$. Учитывая следствие теоремы Лейбница, запишем более сильное неравенство $p_{n+1} \leqslant 0,001$ или $\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \leqslant 0,001$, откуда $(n+1)\cdot 2^{n+1} \geqslant 1000$. Это неравенство выполняется при $n \geqslant 7$, т. е. для достижения заданной точности вычисления суммы ряда достаточно взять семь членов.

Вычислим эту сумму

$$S \approx S_7 = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{6\cdot 2^6} + \frac{1}{7\cdot 2^7} \approx$$

$$\approx 0,5-0,125+0,0417-0,0156+0,0063-0,0026+0,0011 = 0,4059. \quad \square$$

Определить, сколько членов ряда надо взять, чтобы найти его сумму S с точностью Δ. Вычислить S.

19.111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^4}$, $\quad \Delta = 0,01$.

19.112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$, $\quad \Delta = 0,001$.

19.113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\quad \Delta = 0,01$.

19.114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{5^n n!}$, $\quad \Delta = 0,001$.

19.115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n n!}$, $\quad \Delta = 0,00001$.

2°. **Абсолютно сходящиеся ряды. Теорема Дирихле.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится как сам ряд, так и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, составленный из абсолютных величин его членов.

Теорема 19.11 (Коши). *Из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *или из абсолютной сходимости ряда вытекает его сходимость.*

Теорема 19.12 (Дирихле). *Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него произвольной перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

3°. Условно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Теорема 19.13 (Риман). *Если ряд сходится условно, то каким бы ни было наперед заданное число L, конечное или равное $\pm\infty$, можно так переместить члены этого ряда, чтобы полученный ряд имел сумму L.*

Пример 19.16. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}n}{5^n}$.

Решение. Так как члены ряда, взятые по абсолютной величине, образуют убывающую числовую последовательность:

$$\frac{1}{5} > \frac{2}{25} > \frac{3}{125} > \ldots > \frac{n}{5^n} > \ldots,$$

предел общего члена которой равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5^n} = 0,$$

то согласно признаку Лейбница ряд сходится.

Рассмотрим ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}n}{5^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{5^n}$. Для исследования его сходимости применим признак Даламбера. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{5^{n+1}} : \dfrac{n}{5^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{5\cdot n} = \dfrac{1}{5} < 1$, то ряд сходится.

Следовательно, исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно. □

Пример 19.17. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ удовлетворяет признаку Лейбница, поэтому сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как это расходящийся гармонический ряд, то исследуемый ряд является условно сходящимся.

Пример 19.18. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Решение. Исследуем на сходимость ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$. Так как $a_n = \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} = b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ также сходится.

Итак, исходный ряд сходится абсолютно. □

Исследовать сходимость ряда (для сходящегося ряда с членами произвольного знака установить, сходится он абсолютно или условно).

19.116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$.

19.117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$.

19.118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$.

19.119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^3+4}$.

19.120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{3n+5}$.

19.121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$.

19.122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^3-1}$.

19.123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{2^n+1}$.

19.124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{3^n+5}$.

19.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{5^n+n}$.

19.126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^n+1}$.

19.127. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n}{2^n+1}$.

19.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{2\cdot 5^n+7n}$.

19.129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 3^n}{n^n+1}$.

19.130. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n$.

19.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-n)^n}{2^n}$.

Глава 20

Функциональные ряды

§ 20.1. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости

1°. Понятие функционального ряда. Область сходимости. Формально записанная сумма бесконечного числа функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, определенных на одном и том же множестве $D \in \mathbf{R}$, называется ***функциональным рядом***:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x).$$

Будем говорить, что функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ *сходится в точке* $x_0 \in D$, если после подстановки x_0 во все функции полученный числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x_0)$ сходится.

Областью сходимости функционального ряда называется множество точек из D, в которых функциональный ряд сходится.

2°. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (20.1)$$

где a_n — постоянные числа, называется *степенным рядом*. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Теорема 20.1 (Абеля). *Если степенной ряд* (20.1) *сходится в точке $x = x_0 \neq 0$, то он сходится, притом абсолютно, для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.*

Если степенной ряд (20.1) *расходится в точке* $x = x_0$, *то он расходится для всех* x, *удовлетворяющих неравенству* $|x| > |x_0|$.

Теорема 20.2. *Если область сходимости степенного ряда* (20.1) *не совпадает со всей осью* $-\infty < x < +\infty$ *и не вырождается в точку* $x = 0$, *то существует такое число* R, $0 < R < +\infty$, *что степенной ряд* (20.1) *сходится абсолютно для всех* $|x| < R$ *и расходится для всех* $|x| > R$.

Число R *называется радиусом, а* $(-R, R)$ *— интервалом сходимости степенного ряда* (20.1).

Теорема 20.3. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l, \quad (a_n \neq 0), \tag{20.2}$$

то радиус сходимости R *степенного ряда* (20.1) *равен* $\dfrac{1}{l}$:

$$R = \frac{1}{l}, \quad 0 < l < +\infty. \tag{20.3}$$

При этом полагают $R = +\infty$ *при* $l = 0$ *и* $R = 0$ *при* $l = +\infty$.

Теорема 20.4. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l, \tag{20.4}$$

то радиус сходимости R *степенного ряда* (20.1) *равен* $\dfrac{1}{l}$, *т. е. вычисляется по формуле* 20.3. *При этом полагают* $R = +\infty$ *при* $l = 0$ *и* $R = 0$ *при* $l = +\infty$.

Пример 20.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда согласно теореме 20.3:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = 1.$$

Следовательно, при $x \in (-1, 1)$ степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ряд расходится. Неисследованными остались две точки $x = -1$ и $x = 1$. Рассмотрим числовые ряды, которые возникают при подстановке этих точек:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \quad \text{и} \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n.$$

Полученные ряды расходятся, поскольку для них не выполнено необходимое условие сходимости.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$ будет интервал $(-1,\ 1)$. □

Пример 20.2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot x^n}{5^n \cdot (n^2+2)}$.

Решение. Находим радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{5^n \cdot (n^2+2)} : \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+1} \cdot \left((n+1)^2+2\right)} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot n^2 \cdot \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{2}{n^2}\right)}{5^n \cdot n^2 \cdot \left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = 5.$$

Следовательно, при $x \in (-5,\ 5)$ данный степенной ряд сходится абсолютно, а при $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ ряд расходится. Неисследованными остались две точки $x = -5$ и $x = 5$. Рассмотрим числовые ряды, возникающие при подстановке этих точек в данный степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{5^n \cdot (n^2+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}, \tag{20.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-5)^n}{5^n \cdot (n^2+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot 5^n}{5^n \cdot (n^2+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}. \tag{20.6}$$

Ряд (20.6) сравним со сходящимся обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Так как для произвольного $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2},$$

то ряд (20.6) также сходящийся согласно признаку сравнения (теорема 19.5).

Теперь заметим, что ряд (20.5) сходится абсолютно, поскольку ряд, составленный из абсолютных величин его членов, совпадает со сходящимся рядом (20.6).

Таким образом, областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot x^n}{5^n \cdot (n^2+2)}$ будет отрезок $[-5,\, 5]$. $\square$

Пример 20.3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot x^n}{n+3}$.

Решение. Находим радиус сходимости данного степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n}{n+3} : \frac{3^{n+1}}{n+4} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot n \cdot \left(1 + \dfrac{4}{n}\right)}{3^{n+1} \cdot n \cdot \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, ряд сходится абсолютно при $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ и расходится при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$. Неисследованными остались две точки $x = -\dfrac{1}{3}$ и $x = \dfrac{1}{3}$. Рассмотрим числовые ряды, возникающие при подстановке этих точек в данный степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}, \tag{20.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}. \tag{20.8}$$

Ряд (20.8) сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(n+3)} : \frac{1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 1,$$

то, согласно предельному признаку сравнения (теорема 19.6), ряды ведут себя одинаково. Гармонический ряд расходится, следовательно, ряд (20.8) тоже расходится.

По признаку Лейбница знакочередующийся ряд (20.7) сходится. Эта сходимость условная, поскольку ряд, составленный из абсолютных величин его членов, совпадает с расходящимся рядом (20.8).

Итак, областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot x^n}{(n+3)}$ будет полуинтервал $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. □

Если дан ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то его радиус сходимости R также определяется по формуле 20.3 (см. теоремы 20.3 и 20.4), а интервалом сходимости будет интервал с центром в точке $x = x_0$: $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Пример 20.4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{4^n \sqrt{n+1}}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости данного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{4^n\sqrt{n+1}} : \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot \sqrt{n+2}}{4^n \cdot \sqrt{n+1}} = 4.$$

т. е. ряд сходится абсолютно в интервале $(5-4, 5+4)$ или $(1, 9)$.

При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, который расходится, так как его члены больше членов расходящегося гармонического ряда, а при $x = 9$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, сходящийся по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости исходного ряда $(1,\ 9]$. □

3°. **Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.** Говорят, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ сходится к функции $f(x)$ на интервале $(-R,\ R)$, или $f(x)$ является суммой этого ряда, и пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n = f(x)$, если для любой точки $x_0 \in (-R,\ R)$ выполнено равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_0^n = f(x_0)$.

Степенные ряды по своим свойствам напоминают конечные суммы (многочлены). В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 20.5. *Сумма $f(x)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ непрерывна в каждой точке его интервала сходимости.*

Теорема 20.6. *Сумма $f(x)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ имеет производную в любой точке интервала сходимости $(-R, R)$. Причем справедливо равенство*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{20.9}$$

Иначе говоря, степенной ряд на интервале сходимости можно дифференцировать почленно, причем получающийся степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Теорема 20.7. *Сумма $f(x)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ интегрируема на отрезке $[0, x]$, где $|x| < R$, а R — радиус сходимости ряда. Причем справедливо равенство*

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{20.10}$$

Иными словами, степенной ряд можно интегрировать почленно на отрезке $[0, x]$ ($|x| < R$), причем получающийся степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Следствие 20.1. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз.*

Пример 20.5. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение. Выше было показано (см. пример 19.5), что область сходимости этого ряда $(-1,\ 1)$ и при каждом x из области сходимости возникает геометрический ряд, сумма которого равна $\dfrac{1}{1-x}$. Итак, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. □

Пример 20.6. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$.

Решение. Выше было показано, что область сходимости этого ряда интервал $(-1,\ 1)$ (см. пример 20.1). Для вычисления суммы ряда воспользуемся равенством $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (пример 20.5) и теоремой 20.6 о почленном дифференцировании степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)' = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}. \quad \square$$

Найти область сходимости степенного ряда.

20.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

20.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^n$.

20.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2n+1}$.

20.4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n+1}$.

20.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2+1}$.

20.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n (n+1)}$.

20.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n\, x^n}{2n+1}$.

20.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{n^2+1}$.

20.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n^2-n+1}}$.

20.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4x)^n}{\sqrt{n+1}}$.

20.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \ln n}$.

20.12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n \ln n}$.

20.13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n n \ln n}$.

20.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n \ln^2 n}$.

20.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, 2^n x^n$.

20.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

20.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n x^n}{n}$.

20.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^n x^n$.

20.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{n!}$.

20.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$.

20.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{5^n n}$.

20.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n} x^n}{3^n n}$.

20.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \left(\dfrac{x}{e}\right)^n$.

20.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^2 \dfrac{1}{n} x^n$.

20.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n} x^n$.

§ 20.2. Ряд Тейлора

Представление функции в виде суммы степенного ряда или, иными словами, разложение функции в степенной ряд имеет важное теоретическое и практическое значение.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Степенной ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \tag{20.11}$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0. Если ряд Тейлора (20.11) сходится к $f(x)$ для произвольного $x \in (-R, R)$, т. е.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

то говорят, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

Теорема 20.8. *Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая в некоторой окрестности точки x_0 функция. Для того чтобы в этой окрестности $f(x)$ можно было разложить в ряд Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \tag{20.12}$$

стремился к нулю для всех точек указанной окрестности при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

В случае, когда $x_0 = 0$, функция $f(x)$ разлагается в ряд непосредственно по степеням x:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (20.13)$$

Этот ряд называется *рядом Маклорена функции* $f(x)$.

Ряды Маклорена для некоторых основных функций:

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$,

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, x \in (-\infty, +\infty)$,

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$,

4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots, \quad x \in (-1, 1]$,

5) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots, \quad x \in [-1, 1]$ (см. пример 20.8),

6) $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Пример 20.7. Разложить функцию $y = \ln(1+x^2)$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся готовым разложением для функции $y = \ln(1+x)$, заменяя в нем переменную x на x^2. Таким образом, получим:

$$\ln\left(1+x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots .$$

Очевидно, что область сходимости этого ряда $(-1,\ 1)$. □

Пример 20.8. Разложить функцию $y = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена.

Решение. Разложение для этой функции можно получить не вычисляя непосредственно коэффициенты ряда с помощью производных. Для этого рассмотрим геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

со знаменателем $q = -x$, который сходится при $|q| = |-x| = |x| < 1$, т.е. при $-1 < x < 1$ к функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Заменив в ряде переменную x на x^2, получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots.$$

Интегрируя в пределах от 0 до x, получим

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots) dt =$$

$$= \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Область сходимости ряда $[-1,\ 1]$. В сходимости на концах интервала ($x = \pm 1$) можно убедиться отдельно, используя признак Лейбница (теорема 19.10). □

Пример 20.9. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 2$.

Решение. Представим функцию $y = \ln x$ в виде:

$$y = \ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln 2 \left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right).$$

Это позволяет использовать готовое разложение для функции $y =$

$= \ln(1+x)$, в котором x заменяем на $\dfrac{x-2}{2}$:

$$\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+\ldots$$

Итак,

$$\ln x=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=$$
$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x-2)^n.$$

Область сходимости ряда находим из условия $-1<\dfrac{x-2}{2}\leqslant 1$. Решая двойное неравенство, получим, что $0<x\leqslant 4$. □

Пример 20.10. Найти разложение по степеням x решения задачи Коши, записав три первых отличных от нуля члена этого разложения:

$$y'=xy+e^y\ ,\quad y(0)=0.$$

Решение. Используя дифференциальное уравнение и начальное условие, вычислим значение y' в точке $x=0$: $y'(0)=0\cdot 0+e^0=1$.

Продифференцировав данное уравнение, найдем вторую производную y'' и ее значение в точке $x=0$:

$$y''=(xy+e^y)'=y+xy'+e^y y';\quad y''(0)=0+0\cdot 1+e^0\cdot 1=1.$$

Аналогично находим третью производную и ее значение в точке $x=0$:

$$y'''=(y+xy'+e^y y')'=y'+y'+xy''+e^y y'\cdot y'+e^y y''=$$
$$=2y'+xy''+e^y(y')^2+e^y y'';$$

$$y'''(0)=2\cdot 1+0\cdot 1+e^0\cdot 1^2+e^0\cdot 1=4.$$

Таким образом, разложение в ряд Маклорена решения данной задачи Коши будет иметь вид:

$$y=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\ldots\quad □$$

Пример 20.11. Вычислить с точностью до $0,01$ значение $\ln 1,5$.

Решение. Представим $\ln 1,5$ в виде $\ln(1+0,5)$ и напишем ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$ при $x = 0,5 \in (-1,\ 1]$:

$$\ln(1+0,5) = 0,5 - \frac{(0,5)^2}{2} + \frac{(0,5)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(0,5)^n}{n} + \ldots =$$
$$= 0,5 - 0,125 + 0,041(6) - 0,015625 + 0,003125 - \ldots$$

Полученный ряд — знакочередующийся, и пятое слагаемое оказалось меньше заданной погрешности:

$$0,003125 < 0,01,$$

следовательно, согласно следствию 19.1, если в качестве приближенного значения рассмотреть сумму первых четырех слагаемых, то требуемая точность будет достигнута.

Итак, $\ln(1+0,5) \approx 0,5 - 0,125 + 0,041(6) - 0,015625 \approx 0,4$ с точностью до $0,01$. □

Пример 20.12. Вычислить $\int\limits_0^{0,7} e^{-0,5x^2}dx$, взяв первые три члена разложения подынтегральной функции в ряд Маклорена, оценить погрешность.

Решение. Рассмотрим ряд Маклорена функции

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

Чтобы получить разложение подынтегральной функции, выполним замену переменной $t = -0,5x^2$.

$$e^{-0,5x^2} = 1 - 0,5x^2 + \frac{0,25x^4}{2} - \frac{0,125x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-0,5x^2)^n}{n!} + \ldots$$

Теперь вычислим:

$$\int\limits_0^{0,7} e^{-0,5x^2}dx \approx \int\limits_0^{0,7}\left(1 - 0,5x^2 + \frac{0,25x^4}{2}\right)dx =$$
$$= \left(x - \frac{0,5x^3}{3} + \frac{0,25x^5}{10}\right)\Bigg|_0^{0,7} = 0,7 - \frac{0,5\cdot(0,7)^3}{3} + \frac{0,25\cdot(0,7)^5}{10} =$$
$$= 0,7 - 0,057 + 0,004 = 0,647.$$

Поскольку ряд оказался знакочередующимся, то для оценки погрешности применим следствие 19.1:

$$\Delta_3 \leqslant p_4 = \left| \int\limits_0^{0,7} \frac{0,125x^6}{6}\,dx \right| = \frac{0,125 \cdot (0,7)^7}{42} \approx 0,000245 \leqslant 0,001. \quad \square$$

Разложить в ряд Маклорена функцию $y = f(x)$. Указать область сходимости полученного ряда.

20.26. $y = e^{2x}$.

20.27. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

20.28. $y = e^{-x}$.

20.29. $y = e^{x^2}$.

20.30. $y = \ln(1 + 2x)$.

20.31. $y = \ln(1 + x^2)$.

20.32. $y = \dfrac{1}{1 - 2x}$.

20.33. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

20.34. $y = \sqrt{1 - 2x}$.

20.35. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$.

20.36. $y = \sqrt[5]{32 + x}$.

20.37. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

20.38. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

20.39. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

20.40. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

20.41. $y = \dfrac{x}{4x^2 - 1}$.

20.42. $y = \cos 5x$.

20.43. $y = \sin 2x$.

20.44. $y = \cos x^2$.

20.45. $y = \operatorname{arctg} x$.

20.46. $y = x \operatorname{arctg} x$.

20.47. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

20.48. $y = \arcsin x$.

20.49. $y = \arcsin x^2$.

20.50. $y = \ln(6 + x - x^2)$. **20.51.** $y = \cos^2 x$.

20.52. $y = \sin^2 x$.

Разложить в ряд Тейлора функцию $y = f(x)$ в окрестности указанной точки x_0. Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

20.53. $y = x^3 - x + 1, \quad x_0 = 2.$

20.54. $y = x^4 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$

20.55. $y = e^x, \quad x_0 = 3.$

20.56. $y = e^{2x}, \quad x_0 = 1.$

20.57. $y = \ln x, \quad x_0 = 5.$

20.58. $y = \cos x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

20.59. $y = \sin x, \quad x_0 = \pi.$

20.60. $y = \dfrac{1}{x-4}, \quad x_0 = -2.$

20.61. $y = \dfrac{1}{x+2}, \quad x_0 = -1$

20.62. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 4}, \quad x_0 = -1.$

Используя разложснис функций в ряд Маклорсна, приближенно вычислить с заданной точностью Δ.

20.63. $\dfrac{1}{e}, \quad \Delta = 0,001.$

20.64. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e^3}}, \quad \Delta = 0,0001.$

20.65. $\ln 1,4, \quad \Delta = 0,001.$

20.66. $\ln 0,6, \quad \Delta = 0,001.$

20.67. $\sqrt[5]{34}, \quad \Delta = 0,001.$

20.68. $\sqrt[3]{7}, \quad \Delta = 0,001.$

20.69. $\sin 18^\circ$, $\Delta = 0,0001$.

20.70. $\operatorname{arctg} 0,2$, $\Delta = 0,0001$.

20.71. $\arcsin 0,4$, $\Delta = 0,0001$.

20.72. $\cos 0,2$, $\Delta = 0,0001$.

20.73. π, $\Delta = 0,0001$.

20.74. $\sqrt[10]{1080}$, $\Delta = 0,0001$.

Используя разложение подынтегральной функций в ряд Маклорена, приближенно вычислить указанный определенный интеграл с заданной точностью Δ.

20.75. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}dx$, $\Delta = 0,0001$.

20.76. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}dx$, $\Delta = 0,001$.

20.77. $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx$, $\Delta = 0,001$.

20.78. $\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $\Delta = 0,0001$.

20.79. $\int\limits_0^{1} x\,e^{-x^2} dx$, $\Delta = 0,0001$.

20.80. $\int\limits_0^{1} \cos\sqrt{x}dx$, $\Delta = 0,0001$.

20.81. $\int\limits_0^{1} \cos\frac{x^2}{4}dx$, $\Delta = 0,0001$.

20.82. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}dx$, $\Delta = 0,001$.

20.83. $\int\limits_0^1 x^2 \sin x dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

20.84. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

20.85. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

20.86. $\int\limits_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

20.87. $\int\limits_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

20.88. $\int\limits_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

20.89. $\int\limits_0^{0,5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx\,, \quad \Delta = 0,001.$

Используя разложение функций в ряд Маклорена, найти решение задачи Коши, записав три первых отличных от нуля члена разложсния.

20.90. $y' = x^2y^2 + 1, \quad y(0) = 1.$

20.91. $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

20.92. $y' = x + y^2, \quad y(0) = -1.$

20.93. $y' = e^x - y^2, \quad y(0) = 0.$

20.94. $y' = x + y + y^2, \quad y(0) = 1.$

20.95. $y' = x^2y^2 + y \sin x, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

20.96. $y' = y \cos x + 2 \cos y, \quad y(0) = 0.$

20.97. $y' = x + e^{\sin x}, \quad y(0) = 0.$

20.98. $y' = 2x + e^x + y^2, \quad y(0) = 1.$

20.99. $y' = ye^x, \quad y(0) = 1.$

20.100. $y' = x\sin x - y^2, \quad y(0) = 1.$

20.101. $y' = xe^x + 2y^2, \quad y(0) = 0.$

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. **1.2.** $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

1.3. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **1.4.** $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **1.5.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. **1.7.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.8.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.10.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **1.11.** $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

1.12. $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. **1.13.** $\begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 1 & 23 \end{pmatrix}$. **1.14.** $\begin{pmatrix} -32 & 1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$.

1.15. $\begin{pmatrix} -8 & -6 & 3 \\ 17 & -3 & -1 \\ -17 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. **1.16.** $\begin{pmatrix} 14 & 23 & 21 \\ 10 & 19 & 23 \end{pmatrix}$.

1.17. $\begin{pmatrix} 15 & 24 & -9 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. **1.18.** $\begin{pmatrix} 22 & 23 \\ 32 & 40 \\ 36 & 22 \end{pmatrix}$. **1.19.** $\begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 6 & -10 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$.

1.20. $\begin{pmatrix} 38 & 18 \\ 16 & 14 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}$. **1.21.** $\begin{pmatrix} 19 & 5 \\ -6 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. **1.22.** $\begin{pmatrix} 12 & 26 & 14 \\ 20 & 10 & 22 \end{pmatrix}$.

1.23. $\begin{pmatrix} -4 & -13 & -4 \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **1.24.** $\begin{pmatrix} 36 & 20 \\ 38 & 12 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}$. **1.25.** $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1.26. $\begin{pmatrix} 8 & 11 & 17 \\ 19 & 41 & 29 \end{pmatrix}$. **1.27.** $\begin{pmatrix} 40 & 95 \\ 45 & 21 \end{pmatrix}$. **1.28.** $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$.

1.29. $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. **1.30.** $\begin{pmatrix} 61 & 50 \\ 45 & 38 \end{pmatrix}$. **1.31.** $\begin{pmatrix} 35 & 20 & 31 \\ 32 & 31 & 47 \\ 29 & 22 & 29 \end{pmatrix}$.

1.32. $\begin{pmatrix} 45 & 13 & 6 & 31 & 29 \\ 12 & 8 & 5 & 6 & -7 \\ -12 & -4 & -2 & -8 & -6 \\ 21 & 13 & 8 & 11 & -9 \end{pmatrix}$. **1.33.** $\begin{pmatrix} 29 & 38 & 40 \\ 43 & 54 & 32 \end{pmatrix}$.

1.34. $\begin{pmatrix} 44 & 86 \\ 14 & 42 \\ 67 & 62 \end{pmatrix}$. **1.35.** $\begin{pmatrix} -34 & -25 \end{pmatrix}$. **1.36.** $\begin{pmatrix} 66 & -81 \end{pmatrix}$.

1.37. $\begin{pmatrix} 25 & 22 \\ 28 & 21 \end{pmatrix}$. **1.38.** $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$. **1.39.** $\begin{pmatrix} 14 & -4 & 4 \\ -19 & 4 & 21 \\ -69 & 14 & 86 \end{pmatrix}$.

1.40. $\begin{pmatrix} 18 & -29 \\ 78 & -16 \\ 32 & -8 \\ -50 & -22 \end{pmatrix}$. **1.41.** $AB = \begin{pmatrix} 16 & 17 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$.

1.42. $AB = \begin{pmatrix} 19 & 63 & 28 \\ 16 & 52 & 22 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 23 & 53 & -15 \\ 29 & 66 & -17 \\ -30 & 69 & -14 \end{pmatrix}$.

1.43. $AB = \begin{pmatrix} 36 & 43 & 11 \\ -4 & 54 & -8 \\ 17 & -36 & 2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -17 & 16 & 12 \\ -30 & 37 & 43 \\ -37 & -2 & 72 \end{pmatrix}$.

1.44. $AB = \begin{pmatrix} -42 & -3 & -1 \\ 7 & 6 & 9 \\ 14 & -21 & -35 \end{pmatrix}$. **1.45.** $BA = \begin{pmatrix} -45 & -3 \\ -36 & -20 \\ -27 & 12 \end{pmatrix}$.

1.46. $D = \begin{pmatrix} -17 & -26 \\ -39 & -2 \end{pmatrix}$. **1.47.** $D = \begin{pmatrix} -32 & -20 & 4 \\ 9 & 21 & 74 \\ -77 & -43 & 56 \end{pmatrix}$.

1.48. $S = \begin{pmatrix} 840 & 1050 \end{pmatrix}$, $Q = 26250$.

1.49. $S = \begin{pmatrix} 2170 & 3020 \end{pmatrix}$, $Q = 19910$.

1.50. $S = \begin{pmatrix} 323 & 167 & 479 \end{pmatrix}$, $Q = 7139$.

1.51. $S = \begin{pmatrix} 2200 & 1750 & 2250 \end{pmatrix}$, $Q = 19850$. **1.52.** 20. **1.53.** 5. **1.54.** -7. **1.55.** 2. **1.56.** 13. **1.57.** 44. **1.58.** -122. **1.59.** 158. **1.60.** 28. **1.61.** 36. **1.62.** $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. **1.63.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **1.64.** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. **1.65.** $x_1 = -4$, $x_2 = 5$. **1.66.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. **1.67.** $x \in [-2, 3]$. **1.68.** $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

1.69. $x \in (-\infty, -9] \cup [2, +\infty)$. **1.70.** $x \in [-8, 1]$. **1.71.** $x \in [-1, 7]$. **1.72.** -10. **1.73.** $4a$. **1.74.** $-2b^2$. **1.75.** $-2x$. **1.76.** $-4a^3$. **1.77.** 144. **1.78.** 72. **1.79.** 3. **1.80.** 48. **1.81.** -18. **1.82.** -228. **1.83.** 1. **1.84.** -72. **1.85.** 55. **1.86.** -3. **1.87.** 138. **1.88.** -172.

1.89. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0,5 & -4,5 \\ 3 & 1 & -13 \end{pmatrix}$.

1.90. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,4 & -1,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,8 & -0,2 \\ -1,7 & -4,2 & 1,8 \end{pmatrix}$.

1.91. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -2,5 & -10,25 & 3,5 \\ 10,5 & 43,25 & -14,5 \end{pmatrix}$.

1.92. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,25 & -0,25 \\ -0,5 & -0,25 & 0,25 \\ -0,5 & -3,75 & 0,75 \end{pmatrix}$.

1.93. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,1 & -2,8 & 1,4 \\ 0,4 & 12,2 & -5,6 \\ 0,1 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$.

1.94. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 7 \\ 5 & -1 & -2 \\ 47 & -8 & -19 \end{pmatrix}$.

1.95. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.96. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -2 & 7 \\ 3 & 7 & -2 & -5 \\ -2 & -7 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.97. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -46,5 & -54,5 & 20 \\ -10 & -35,5 & -41,5 & 15 \\ -2 & -7 & -8 & 3 \\ 21 & -74,5 & 87,5 & -32 \end{pmatrix}$.

1.98. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5,4 & -18,6 & -18,8 & 10 \\ -31,8 & 107,2 & 107,6 & -57 \\ 21,4 & -71,6 & -71,8 & 38 \\ -1,2 & 3,8 & 3,9 & -2 \end{pmatrix}$.

1.99. 5. **1.100.** 2. **1.101.** 1. **1.102.** 4. **1.103.** 2. **1.104.** 1.

1.105. 6. **1.106.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. **1.107.** $\begin{pmatrix} -3,2 & 4,6 \\ -1,8 & 1,4 \\ -1,6 & 1,8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.108. $\begin{pmatrix} -0,3 & -6,4 \\ 0,5 & 8 \end{pmatrix}$. **1.109.** $\begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.110. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. **1.112.** $\begin{pmatrix} 7 & 5 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.

1.113. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **1.114.** $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$. **1.115.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.116. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -8 & -21 \end{pmatrix}$. **1.117.** $\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$. **1.118.** $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.119. $\begin{pmatrix} -1,5 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.120.** $\begin{pmatrix} -3 & -0,5 & 3 & 5,5 \end{pmatrix}$.

1.121. $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. **1.124.** $\operatorname{rang} A = 3$. **1.125.** $\operatorname{rang} A = 2$.

1.126. $\operatorname{rang} A = 2$. **1.127.** $\operatorname{rang} A = 2$. **1.128.** $\operatorname{rang} A = 3$.

1.129. $\operatorname{rang} A = 3$. **1.130.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.131.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.132. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. **1.133.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1.134. $\begin{pmatrix} 26 & 30 & 18 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.135.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1.136. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1.140.** $\operatorname{rang} A = 3$. **1.141.** $\operatorname{rang} A = 3$.

1.142. $\operatorname{rang} A = 2$. **1.143.** $\operatorname{rang} A = 2$. **1.144.** $5+i$. **1.145.** $6-2i$.

1.146. $-i$. **1.147.** $-i$. **1.148.** $-0{,}5i$. **1.149.** $0{,}5 - 0{,}5i$.

1.150. $0{,}5+0{,}5i$. **1.151.** $-1+i$. **1.152.** $-0{,}5+1{,}5i$. **1.153.** -2.

1.154. $11-62i$. **1.155.** $26-7i$. **1.156.** 25. **1.157.** $-14-23i$.

1.158. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$. **1.159.** $-\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i$. **1.160.** $5 - 42i$.

1.161. $22-7i$. **1.162.** 41. **1.163.** $-2-23i$. **1.164.** $\frac{5}{41} - \frac{4}{41}i$.

1.165. $-\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$. **1.166.** $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}\,i$. **1.167.** $z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$.

1.168. $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **1.169.** $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **1.170.** $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$. **1.171.** $5e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$. **1.172.** $4e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $-2-2\sqrt{3}\,i$.

1.173. $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$, $-3i$. **1.174.** $6e^{0i}$, 6. **1.175.** $1{,}5\,e^{0i}$, $1{,}5$.

1.176. $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$. **1.177.** $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $2\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$. **1.178.** $10\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $10e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

1.179. $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $6e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

1.180. $18(\cos 0 + i\sin 0)$, $18e^{0i}$. **1.181.** $2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $2e^{\frac{\pi}{2}i}$.

1.182. $-\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i$, $7\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. **1.183.** $-\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$, $10\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. **1.184.** $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

1.185. $4i$, $4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **1.187.** $-i$. **1.188.** $-i$. **1.189.** $-i$.

1.190. i. **1.191.** $2^{103}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$. **1.192.** $2^{888}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

1.193. $2^{-100}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. **1.194.** $5^7 2^3 - 5^7 2^3 i$. **1.195.** 8^{12}.

1.196. $2^{10}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. **1.197.** $z_1 = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt[4]{18}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. **1.198.** $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

1.199. $z_1 = \sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{7\pi}{24}+i\sin\frac{7\pi}{24}\right)$, $z_2 = \sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{19\pi}{24}+i\sin\frac{19\pi}{24}\right)$, $z_3 = \sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{31\pi}{24}+i\sin\frac{31\pi}{24}\right)$, $z_4 = \sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{43\pi}{24}+i\sin\frac{43\pi}{24}\right)$.

1.200. $z_1 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $z_2 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$, $z_3 = \sqrt[5]{5}(\cos\pi+i\sin\pi) = -\sqrt[5]{5}$, $z_4 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$, $z_5 = \sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$. **1.201.** $z_0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **1.202.** $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$. **1.203.** $z_0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, $z_2 = \cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$, $z_3 = \cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$, $z_4 = \cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$.

1.204. $z_0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $z_3 = \cos\pi+i\sin\pi = -1$, $z_4 = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, $z_5 = \cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$.

1.205. $z_0 = i$, $z_1 = -i$. **1.206.** $z_0 = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_1 = \cos\pi+i\sin\pi = -1$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1.207. $z_0 = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \cos\frac{3\pi}{4}+$

$+i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. **1.208.** $z_0 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$, $z_1 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$, $z_2 = -1$, $z_3 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}$, $z_4 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}$. **1.209.** $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = i$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_4 = -i$, $z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. **1.210.** $z_0 = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$, $z_1 = \cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7}$, $z_3 = -1$, $z_4 = \cos\frac{9\pi}{7} + i\sin\frac{9\pi}{7}$, $z_5 = \cos\frac{11\pi}{7} + i\sin\frac{11\pi}{7}$, $z_6 = \cos\frac{13\pi}{7} + i\sin\frac{13\pi}{7}$.
1.211. $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$, $z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$. **1.212.** $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

1.213. $z_1 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{\varphi}{4} + i\sin\frac{\varphi}{4}\right)$,
$z_2 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$,
$z_3 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{4} + \pi\right)\right)$,
$z_4 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$.

1.214. $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$, $z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$, $z_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{18} + i\sin\frac{19\pi}{18}\right)$, $z_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$, $z_6 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{18} + i\sin\frac{31\pi}{18}\right)$.

1.215. $z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{2}i$. **1.216.** $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$.

1.217. $z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$. **1.218.** $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}i$.

1.219. $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-3 \pm \sqrt{2}i}$. **1.220.** $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i}$.

1.221. $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, $z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, $z_4 = -\sqrt[3]{3}$, $z_5 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. **1.222.** $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$, $z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_5 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_7 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_6 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

Глава 2

2.1. $x_1 = 2, x_2 = 3$. **2.2.** $x_1 = 4, x_2 = -1$. **2.3.** $x_1 = 3, x_2 = -1$. **2.4.** $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$. **2.5.** $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **2.6.** $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. **2.7.** $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. **2.8.** $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. **2.9.** $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \sin\alpha$. **2.10.** $x_1 = a+b, x_2 = a-b$. **2.11.** $x_1 = 2, x_2 = -5\, x_3 = 3$. **2.12.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. **2.13.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. **2.14.** $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. **2.15.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. **2.16.** $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. **2.17.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **2.18.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **2.19.** $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. **2.20.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **2.21.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **2.22.** $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$. **2.23.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. **2.24.** $x_1 = -2, x_2 = 5, x_3 = -3, x_4 = 1$. **2.25.** $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0$, $x_4 = -2$. **2.26.** Система несовместна. **2.27.** $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{12}$, $x_1 = C$. **2.28.** $x_1 = 1 + \sqrt{3}C$, $x_2 = C$. **2.29.** Система несовместна. **2.30.** Система несовместна. **2.31.** $x_1 = 1 - C$, $x_2 = C$, $x_3 = 0$. **2.32.** $x_1 = 2C-1, x_2 = C+1, x_3 = C$. **2.33.** $x_1 = -\frac{6}{11}C_1 - \frac{8}{11}C_2 - \frac{1}{11}$,

$x_2 = -\frac{6}{11}C_1 + \frac{7}{11}C_2 + \frac{2}{11}$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ **2.34.** Система несовместна. **2.35.** $x_1 = C$, $x_2 = C+1$, $x_3 = C+2$, $x_4 = C+3$. **2.36.** $x_1 = 30+71C$, $x_2 = -7-15C$, $x_3 = -14-32C$, $x_4 = C$. **2.37.** 1) $a \neq -2$, 2) $a = -2$, $b \neq 2$, 3) $a = -2$, $b = 2$. **2.38.** При $t \neq 0$ и $t \neq 1$ система имеет единственное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{t}$, $x_3 = \frac{1}{t}$. При $t = 0$ система несовместна. При $t = 1$ она имеет бесконечное множество решений: $x_1 = 3 - C$, $x_2 = C$, $x_3 = 1$. **2.39.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **2.40.** $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. **2.41.** Система несовместна. **2.42.** $x_1 = -84$, $x_2 = -\frac{93}{2}$, $x_3 = \frac{31}{2}$. **2.43.** Система несовместна. **2.44.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. **2.45.** Система несовместна. **2.46.** $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$. **2.47.** $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. **2.48.** $x_1 = 1$, $x_2 = C$, $x_3 = -C$. **2.49.** Система несовместна. **2.50.** $x_1 = -3$, $x_2 = 3C+1$, $x_3 = C$. **2.51.** $x_1 = 3 - C$, $x_2 = C$, $x_3 = 1$. **2.52.** Система несовместна. **2.53.** $x_1 = -17C_1 + 29C_2 + 5$, $x_2 = 10C_1 - 17C_2 - 2$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$. **2.54.** Система несовместна. **2.55.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. **2.56.** $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + C$, $x_3 = 6 + 2C$, $x_4 = C$. **2.57.** Система несовместна. **2.58.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = -3$. **2.59.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. **2.60.** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{43}{18}$, $x_3 = \frac{13}{9}$, $x_4 = -\frac{7}{18}$. **2.61.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **2.62.** $x_1 = 2C$, $x_2 = -3C$, $x_3 = 5C$. **2.63.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **2.64.** $x_1 = C$, $x_2 = 2C$, $x_3 = -3C$. **2.65.** $x_1 = x_2 = x_3 = C$. **2.66.** $x_1 = -11C$, $x_2 = 7C$, $x_3 = C$. **2.67.** $x_1 = -\frac{11}{7}C$, $x_2 = -\frac{1}{7}C$, $x_3 = C$. **2.68.** $x_1 = -3C_1 + 5C_2$, $x_2 = C_1 - 3C_2$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$. **2.69.** $x_1 = x_2 = x_3 = C$. **2.70.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. **2.71.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **2.72.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = C$. **2.73.** $a = 5$. **2.74.** $\lambda = \pm 1$. **2.75.** $X^{(1)} = (-3, -5, 1, 0)$, $X^{(2)} = (-1, 0, 0, 1)$, $X = C_1(-3,-5,1,0) + C_2(-1,0,0,1) = (3C_1 - C_2, -5C_1, C_1, C_2)$. **2.76.** $X^{(1)} = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$, $X^{(2)} = (-1, -2, 0, 1)$,

$$X = C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} = \left(-\frac{3}{2}C_1 - C_2, -\frac{1}{2}C_1 - 2C_2, C_1, C_2\right).$$

2.77. $X^{(1)} = \left(-\frac{5}{7}, \frac{2}{7}, 1, 0\right)$, $X^{(2)} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{5}{7}, 0, 1\right)$,

$$X = C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} = \left(-\frac{5}{7}C_1 + \frac{2}{7}C_2, \frac{2}{7}C_1 - \frac{5}{7}C_2, C_1, C_2\right).$$

2.78. $X^{(1)} = (1, 0, 1, 0)$, $X^{(2)} = (5, -4, 0, 1)$,
$X = C_1X^{(1)} + C_2X^{(2)} = (C_1 + 5C_2, -4C_2, C_1, C_2)$.
2.79. $X^{(1)} = (-1, 0, 1, 0, 0)$, $X^{(2)} = (-1, 0, 0, 1, 0)$,

$X^{(3)} = \left(0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1\right)$, $X = (-C_1 - C_2, -0{,}5C_3, C_1, C_2, C_3)$.

2.80. $X^{(1)} = (1, 1, 1)$, $X = (C, C, C)$.
2.81. $X^{(1)} = (-2, 1, 0, 0)$, $X^{(2)} = (-3, 0, 1, 0)$,
$X^{(3)} = (-4, 0, 0, 1)$, $X = (-2C_1 - 3C_2 - 4C_3, C_1, C_2, C_3)$.

2.82. $X = \begin{pmatrix} 553{,}04 \\ 500{,}87 \end{pmatrix}$. **2.83.** $X = \begin{pmatrix} 441{,}4 \\ 190{,}5 \end{pmatrix}$.

2.84. $X = \begin{pmatrix} 706{,}25 \\ 447{,}5 \end{pmatrix}$. **2.85.** $X = \begin{pmatrix} 48{,}46 \\ 25{,}38 \end{pmatrix}$.

2.86. $X = \begin{pmatrix} 590{,}33 \\ 190{,}38 \end{pmatrix}$. **2.87.** $X = \begin{pmatrix} 852{,}09 \\ 726{,}69 \\ 803{,}86 \end{pmatrix}$.

2.88. $X = \begin{pmatrix} 386{,}74 \\ 587{,}77 \\ 995{,}58 \end{pmatrix}$. **2.89.** $X = \begin{pmatrix} 529{,}36 \\ 191{,}93 \end{pmatrix}$.

2.90. $X = \begin{pmatrix} 429{,}79 \\ 532{,}74 \\ 1127{,}55 \end{pmatrix}$.

Глава 3

3.5. а) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = -4\vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = -3\vec{b}$, б) $\overrightarrow{AC} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -4\vec{a} - 3\vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$. **3.6.** $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$. **3.7.** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AO} = 0{,}5\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} = -0{,}5\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$. **3.8.** $\overrightarrow{OD} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$,

$\overrightarrow{DB} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$. **3.9.** $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = -4\vec{a}$. **3.10.** а) $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, б) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, в) $\overrightarrow{BC} = 0,5\overrightarrow{AC} - 0,5\overrightarrow{DB}$. **3.16.** $\vec{x} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. *Указание*: обозначьте $\overrightarrow{OA}$ через $\vec{x}$ и выразите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ через $\vec{x}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. **3.17.** $\vec{x} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$. **3.18.** $\vec{x} = -0,75\vec{a} - 0,5\vec{b} - 0,25\vec{b}$. **3.19.** а) $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, б) $2x_1 + 3y_1 = 0$, $2x_2 + 3y_2 = 0$, $2x_3 + 3y_3 = 0$, в) $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$. **3.20.** $\vec{a} = 0,5\vec{m} + 0,5\vec{n}$, $\vec{b} = 0,5\vec{m} - 0,5\vec{n}$. **3.21.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$. **3.22.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0,5\vec{m} + 0,5\vec{n} + 0,5\vec{p}$. **3.23.** $\overrightarrow{AB} = (1,5,-5)$, $\overrightarrow{BC} = (-2,-2,11)$, $\overrightarrow{CA} = (1,-3,-6)$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (0,0,0)$. **3.24.** а) $(5,-6)$, б) $(10,-13)$. **3.25.** а) $(20,-2,12)$, б) $(-3,15,31)$. **3.26.** $\vec{a} = 1,5\vec{b} + 0,5\vec{c}$. **3.27.** $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$. **3.28.** $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$. **3.29.** $\vec{a} = 0,5\vec{e_1} + 0,5\vec{e_2} + 0,5\vec{e_3}$. **3.30.** 1) 5, 2) 10, 3) 5, 4) $\sqrt{5}$, 5) $2\sqrt{2}$, 6) 13. **3.31.** а) $5(2 + \sqrt{2})$, б) $5 + 3\sqrt{5}$, в) $2(4 + \sqrt{13})$. **3.32.** $(-3,0)$ и $(5,0)$. **3.33.** $(0,2)$, $(0,-4)$. **3.34.** $(5,5)$ и $(5,-3)$. **3.35.** $(0,\ 2,9)$. **3.36.** $(5,0)$. **3.37.** $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$. **3.38.** а) 20, $2\sqrt{58}$, $2\sqrt{82}$, б) $\sqrt{92,25}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{101,25}$, в) 1, $\sqrt{68,5}$, $\sqrt{62,5}$. **3.39.** а) $\left(\frac{2}{5}, 1\right)$, б) $(1,4)$, в) $\left(0, \frac{16}{5}\right)$. **3.40.** $(2,-1)$ и $(3,1)$. **3.41.** $(0,-3)$, $(-4,5)$, $(8,1)$. **3.42.** 24. **3.43.** $\vec{0}$. **3.44.** $D = (6,4)$. Точка пересечения диагоналей — $(3,5,2)$. **3.45.** $D = (4,0,0)$, $B' = (3,4,4)$, $C = (7,4,4)$, $D' = (5,1,4)$, центр параллелограмма — $(3,5,2,2)$. **3.46.** а) коллинеарны, б) не коллинеарны, в) не коллинеарны, г) коллинеарны. **3.47.** $|AC| = \sqrt{7}$, $|BD| = \sqrt{5}$. **3.48.** $|AB| = 4\sqrt{2}$, $|CD| = 2\sqrt{2}$. **3.49.** $C = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$, $D = \left(\frac{17}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **3.50.** $2\sqrt{3}$. **3.51.** $|AA'| = 3\sqrt{2}$, $|BB'| = 3$, $|CC'| = 3$. **3.52.** $(-1,-4)$, $(5,0)$, $(3,6)$. **3.53.** $\left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, 3\right)$. **3.54.** а) 4, б) $30\sqrt{3}$, в) $-16\sqrt{2}$, г) 0. **3.55.** а) 5 и

45°, б) 0 и 90°, в) 2 и $\arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$, г) 12 и $\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$. **3.56.** $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{d}$, $\vec{c} \perp \vec{d}$. **3.57.** а) $\cos\angle AOB = \frac{9\sqrt{130}}{130}$, угол AOB — острый, б) $\cos\angle AOB = 0$, угол AOB — прямой, в) $\cos\angle AOB = -\frac{4}{5}$, угол AOB — тупой. **3.58.** а) $\pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, б) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, в) $\pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.59.** а) $\pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$, б) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, в) $\pm\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. **3.60.** а) $\pm\left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, б) $\pm\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, в) $\pm\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.61.** а) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\gamma = \frac{3\sqrt{14}}{14}$, где α, β, γ — углы между вектором $\vec{a}$ и координатными осями Ox, Oy, Oz, соответственно. **3.62.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **3.63.** $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. **3.64.** 120°. **3.65.** 1. **3.66.** $\arccos\left(\frac{15+16\sqrt{2}}{41}\right)$. **3.67.** $\arccos\left(-\frac{1}{14}\right)$. **3.68.** $k = \frac{5\vec{p}\cdot\vec{q} - 10\vec{p}\cdot\vec{p}}{2\vec{p}\cdot\vec{q} - \vec{q}\cdot\vec{q}}$. **3.69.** а) 21, б) $\sqrt{21}$, в) $\frac{\sqrt{21}}{21}(-1,2,4)$, г) $-3\frac{\sqrt{21}}{21}(-1,2,4)$, д) $\sqrt{3}$, е) 5, ж) $\arccos\left(\frac{5\sqrt{63}}{63}\right)$. **3.70.** а) 14, б) $\sqrt{14}$, в) $\frac{\sqrt{14}}{14}(3,2,-1)$, г) $-3\frac{\sqrt{14}}{14}(3,2,-1)$, д) 5, е) 17, ж) $\arccos\left(\frac{17\sqrt{14}}{70}\right)$. **3.72.** 1. **3.73.** а) $\vec{k}$, б) $-\vec{j}$, в) $\vec{j}$, г) $\vec{i}$.

3.74. а) $\vec{a}\times\vec{b} = (3,15,6)$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{145}}{29}$, б) $\vec{a}\times\vec{b} = (-1,10,-3)$, $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{11}{21}}$, в) $\vec{a}\times\vec{b} = (-2,-6,4)$, $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{14}}{15}$.
3.75. а) $\pm\dfrac{\sqrt{110}}{110}(1,10,-3)$, б) $\pm\dfrac{\sqrt{30}}{90}(3,15,-6)$. **3.76.** $\sqrt{227}$.
3.77. $2\sqrt{3}$. **3.78.** 5,5. **3.79.** $(-15,0,30)$. **3.80.** $9\sqrt{2}$. **3.81.** $40\sqrt{2}$.
3.82. $k=-7{,}5$. **3.83.** а) 0, б) 0. **3.84.** $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{51}}{255}\right)$. **3.85.** 29, положительная ориентация. **3.86.** -6, отрицательная ориентация. **3.87.** 6. **3.88.** 30. **3.89.** $3\sqrt{3}$. **3.90.** $V=1$. ***Указание***: объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен $\dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.
3.91. а) компланарны, б) не компланарны. **3.92.** а) $\lambda=2$, б) $\lambda=1$.

Глава 4

4.5. а) $(-2,-18)$, б) $\left(\dfrac{18}{13},-\dfrac{14}{13}\right)$. **4.6.** а) $(2,27)$, б) $\left(-\dfrac{5}{16},\dfrac{19}{32}\right)$.
4.7. а) $(6,42)$, б) $\left(\dfrac{15}{13},\dfrac{21}{13}\right)$. **4.8.** а) $(-5,-58,-18)$, б) $(0,-4,5)$.
4.9. а) $(-44,-14,18)$, б) $(-1,1,2)$. **4.10.** а) $(70,-49,164)$, б) $(2,-5,-4)$. **4.11.** а) $(75,-5,19)$, б) $(1,2,0)$. **4.16.** а) не являются, б) являются, в) не являются, г) не являются. **4.17.** а) не образуют базис, б) образуют базис, в) не образуют базис, г) не образуют базис. **4.18.** а) являются, б) не являются, в) являются, г) не являются. **4.19.** а) не образуют базис, б) не образуют базис, в) образуют базис, г) не образуют базис. **4.20.** а) являются, б) не являются, в) являются, г) не являются. **4.21.** а) не образуют базис, б) не образуют базис, в) образуют базис, г) не образуют базис. **4.25.** а) изоморфизм, б) изоморфизм, в) не изоморфизм, г) изоморфизм, д) не изоморфизм. **4.26.** $(30,-6)$. **4.27.** $(-58,-54)$. **4.28.** $(-9,30)$.
4.29. $(12,54)$. **4.30.** $(33,27)$. **4.31.** $(26,27)$. **4.32.** $(38,17,17)$.
4.33. $(-18,-5,-25)$. **4.34.** $(14,35,23)$.
4.35. $(-6,-20,10)$. **4.36.** $(30,25,11)$.

4.37. Является линейным оператором. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.38. Является линейным оператором. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.39. Не является линейным оператором.

4.40. Не является линейным оператором.

4.41. Является линейным оператором. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.42. Является линейным оператором, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.43. Не является линейным оператором.

4.44. Не является линейным оператором.

4.45. $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.46.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.47. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **4.48.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.49. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **4.50.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.51. $A = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. **4.52.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.53. а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.54. а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

4.55. а) (x_1, x_2), б) (x_1, x_2), в) $(-x_1, -x_2)$, г) $(-x_2, x_1)$.

4.56. а) $\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$, б) $\left(-\dfrac{5}{86}, \dfrac{63}{86}\right)$, в) $\left(-\dfrac{27}{8}, -3\right)$. **4.57.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 2)$, $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}^2 = (2, -3)$, $\lambda_2 = 1$. **4.58.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 2)$, $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{x}^2 = (2, -3)$, $\lambda_2 = -3$. **4.59.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 2)$, $\lambda_1 = -5$, $\mathbf{x}^2 = (2, -3)$, $\lambda_2 = 0$. **4.60.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 2)$, $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{x}^2 = (2, -3)$, $\lambda_2 = 1$. **4.61.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 2)$, $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^2 = (2, -3)$, $\lambda_2 = -2$. **4.62.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 2$. **4.63.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = -3$. **4.64.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 2$. **4.65.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 0$. **4.66.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 1$. **4.67.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 1$. **4.68.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = -1$. **4.69.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 2$. **4.70.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 3$. **4.71.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 0$. **4.72.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 3$. **4.73.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 1$. **4.74.** $\mathbf{x}^1 = (-1, 0, 0)$, $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{x}^2 = (0, -3, 2)$, $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{x}^3 = (0, 2, -1)$, $\lambda_3 = 0$. **4.75.** 4 : 3. **4.76.** 3 : 2. **4.77.** 2 : 1. **4.78.** 2 : 5. **4.79.** 5 : 6. **4.80.** 3 : 2. **4.81.** 1 : 2. **4.82.** 3 : 4. **4.83.** 2 : 3. **4.84.** 15 : 16. **4.85.** 15 : 14. **4.86.** 9 : 14. **4.87.** 9 : 14 : 8. **4.88.** 11 : 10 : 7. **4.89.** 12 : 15 : 20. **4.90.** 7 : 8 : 16. **4.91.** 7 : 9 : 8. **4.92.** 9 : 9 : 19. **4.93.** 17 : 7 : 10. **4.94.** 10 : 21 : 15. **4.95.** 5 : 22 : 14. **4.96.** 13 : 14 : 15.

Глава 5

5.1. а) $y = x$, б) $y = \sqrt{3}x$, в) $y = -\sqrt{3}x$, г) $y = -x$. **5.2.** а) $y = x + 3$, б) $y = -x + 3$. **5.3.** а) $y = \sqrt{3}x - 3$, б) $y = -\sqrt{3}x - 3$.

5.4. а) $k=\frac{2}{3}$, $b=-2$, б) $k=-\frac{2}{3}$, $b=0$, в) $k=-\frac{3}{4}$, $b=3$, г) тангенс прямого угла не существует, д) $k=0$, $b=-\frac{5}{2}$, е) $k=0$, $b=-3$. **5.5.** 1) $x=4$, 2) $x=-5$, 3) $x=0$. **5.6.** а) $y=x+1$, б) $y=-x-1$, в) $y=x+3$. **5.7.** а) $y=x+1$, б) $y=\sqrt{3}(x-2)$, в) $y=-x+5$, г) $y=3$. **5.8.** $y=-1,5x$. **5.9.** $x+y-2=0$. **5.10.** A, C, D. **5.11.** а) $y=x+2$, $4\sqrt{2}$, б) $3x+4y-38=0$, 10, в) $4x-3y-42=0$, 10. **5.12.** $y=x+2$. **5.13.** $x-3y+2=0$, $y=5x-4$, $\sqrt{26}$. **5.14.** $\sqrt{10}$, $x+3y-19=0$. **5.15.** $y=4x-4$. **5.16.** $y=x+2$, $\sqrt{29}$. **5.17.** а) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$, б) $\frac{x}{-4/3}+\frac{y}{2}=1$, в) проходит через начало координат, г) $\frac{x}{-1/3}+\frac{y}{1}=1$.

5.18. а) $\frac{97}{\sqrt{146}}$, б) $\frac{4\sqrt{234}}{13}$, в) $\sqrt{42,92}$. **5.19.** $\sqrt{2}$. **5.20.** 4,7.

5.21. 5. **5.22.** $\sqrt{10}$, $3x+y-11=0$. **5.23.** $y=-\frac{1}{2}x+2$. **5.24.** $8x-15y+6=0$, $8x-15y-130=0$. **5.25.** $2x+3y-13=0$. **5.26.** $4x-3y+25=0$. **5.27.** $4x+y-6=0$, $3x+2y-7=0$. **5.28.** а) 135°, б) 135°, в) прямые параллельны. **5.29.** 90°. **5.30.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. **5.31.** Тангенсы углов треугольника: $\frac{23}{11}$, 2, $\frac{9}{7}$. **5.32.** 1-я, 2-я, 4-я прямые параллельны, 3-я прямая им взаимно перпендикулярна. **5.33.** $y=-\frac{5}{3}x+3$. **5.34.** $y=-\frac{1}{2}x+5$.

5.35. $y=\frac{3}{2}x+1$. **5.36.** а) $3x-2y-1=0$, б) $2x+3y-5=0$. **5.37.** $4x+y-26=0$. **5.38.** $x+2y-2=0$. **5.39.** $3x-2y+5=0$. **5.40.** $x+5y-1=0$. **5.41.** $6x-4y-11=0$. **5.42.** $5x+4y+1=0$. **5.43.** $2x+3y-14=0$. **5.44.** $5x+2y+4=0$, $5x+2y-25=0$.

5.45. $\left(\frac{11}{5}, -\frac{9}{5}\right)$. **5.46.** а) $11x+22y-41=0$, б) $22x-11y+53=0$.

5.47. а) $2x+3y-22=0$, б) $3x-2y-7=0$. **5.48.** а) $22x-11y-3=0$, б) $11x+22y-74=0$. **5.49.** AB: $x-y+2=0$, AC: $y=0$, BC: $2x+y-8=0$, AE: $2x-5y+4=0$, AD: $x-2y+2=0$, $|AE|=\sqrt{29}$. **5.50.** $2x-y+6=0$, $x-4y-4=0$, $2x-3y+2=0$.

5.51. $x - y + 2 = 0$, $x + 2y = 4$, $2x + y = 8$.

Глава 6

6.1. а) $x - y + 2z = 0$, б) $2x - y + z - 1 = 0$, в) $x - 3y + 2 = 0$. **6.2.** а) $2x - y + z - 2 = 0$, б) $x - 2y + z + 1 = 0$, в) $2y - z - 2 = 0$. **6.3.** $2x - y - z - 6 = 0$. **6.4.** $3x - 4z = 0$. **6.5.** $-x - 5y + z = 0$. **6.6.** $3x + 4y + z - 22 = 0$. **6.7.** $x - 2y - 3z - 4 = 0$. **6.8.** $x + 4y + 2z - 2 = 0$. **6.9.** $x - 3y + 7 = 0$. **6.10.** $z + 4 = 0$. **6.11.** $x - 3 = 0$. **6.12.** $3y - z = 0$. **6.13.** 2. **6.14.** 4. **6.15.** $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **6.16.** 1. **6.17.** $3x - 10y + z - 55 = 0$. **6.18.** $2x - 2y + z - 2 = 0$. **6.19.** $\sqrt{6}$. **6.20.** $\frac{3}{2}\sqrt{22}$. **6.21.** $4\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. **6.22.** $(0, 7, 0)$ и $(0, -5, 0)$. **6.23.** $(0, 0, -2)$ и $\left(0, 0, -\frac{82}{13}\right)$. **6.24.** $\left(\frac{11}{43}, 0, 0\right)$. **6.25.** $45°$. **6.26.** а). **6.27.** а) и б). **6.28.** $2x - 2y - z - 18 = 0$, $2x - 2y - z + 12 = 0$. **6.29.** $2x - 3y + 5z + 10 = 0$. **6.30.** $2x - 2y - 3z + 11 = 0$. **6.31.** $\cos\varphi \approx 0{,}499$.

Глава 7

7.1. 1) $a = 8$, $b = 2\sqrt{3}$, 2) $F_1(2\sqrt{13}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{13}, 0)$, 3) $e = \frac{\sqrt{13}}{4}$. **7.2.** а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. **7.3.** а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, в) $\frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{16} = 1$. **7.4.** а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $r_1 = 4 + \sqrt{3}$, $r_2 = 4 - \sqrt{3}$, б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$, $r_1 = 9$, $r_2 = 3$. **7.5.** $M\left(-\frac{15}{4}, \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **7.6.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$, $r_1 = 5$, $r_2 = 11$. **7.8.** $(-5, 7)$. **7.9.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$, точки A и O лежат на этой окружности. **7.10.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, точка B лежит на этой окружности, $y = \pm\sqrt{5}+1$, $x = \pm 2\sqrt{2}+2$. **7.12.** $(x+2)^2+(y-3)^2 = 13$. **7.13.** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$. **7.15.** $y = 2x$, $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **7.16.** $r_1 = 9$, $r_2 = 1$. **7.17.** $d = b$. **7.18.** $(1,-5)$, $(0,-4)$ и $(2,-6)$, $x = 1$, $y = -5$. **7.19.** $y+2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$. **7.20.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **7.21.** $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$. **7.22.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$. **7.23.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$. **7.24.** $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$. **7.25.** $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$. **7.26.** $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{3}{2}$. **7.27.** а) $y^2 = 9x$, б) $y = -x^2$. **7.28.** $(3, \pm 3\sqrt{2})$. **7.29.** а) окружность, б) окружность, в) парабола. **7.30.** $\frac{9}{\sqrt{145}}$. **7.31.** $y^2 = x$, $x = -\frac{1}{4}$. **7.32.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Глава 8

8.1. $4 \in A$, $6 \notin A$, $8 \in A$, $10 \notin A$, $14 \notin A$, $16 \in A$. **8.2.** а) да, б) нет. **8.3.** а) $B \subset A$, б) $B \subset A$. **8.4.** а) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{3,4\}$, $A \backslash B = \{1\}$, б) $A \cup B = \{2,4,7,10,12\}$, $A \cap B = \{2,7\}$, $A \backslash B = \{4\}$, в) $A \cup B = \{2,4,5,8,10\}$, $A \cap B = \{4,5\}$, $A \backslash B = \{2\}$. **8.5.** $A = \{3,5\}$, $A \cup B = \{2,3,5\}$, $A \cap B = \{5\}$. **8.7.** $A = \{1,2\}$ а) $A = B$, б) $A \neq B$, в) $A \neq B$, $A \subset B$. **8.8.** $A \cap B = \{2\}$. **8.9.** $A \cap B$ — множество чисел, оканчивающихся на 0. **8.10.** $A \cup B$ — множество чисел, кратных 5. **8.11.** $A \cap B$ — множество чисел, кратных 15. **8.12.** $A \cap B \cap C$ множество чисел, кратных 30. **8.13.** а) ни одного языка — 20 студентов, только английский язык — 27 студентов, только немецкий язык — 18 студентов, только французский язык — 18 студентов, б) ни одного языка — 25 студентов, только английский язык — 22 студента, только немецкий язык — 12 студентов, только французский язык — 19 студентов, в) ни одного языка — 30 студентов, только английский язык — 17 студентов, только немецкий язык — 14 студентов, только французский язык — 17 студентов. **8.14.** а) $A \cap B \subset A$, б) $A \subset A \cup B$, в) нет связи, г) нет связи. **8.15.** $A \cup \overline{B} = \overline{\overline{B} \cap \overline{A}}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. **8.16.** $n = 19\,999$. **8.17.** $n = 100$. **8.18.** $n = 34$. **8.19.** $n = 299$. **8.22.** а) 4, $5\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{4}$, $4\frac{4}{5}$, $5\frac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$, б) 0, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{4}$, 0, $-\frac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, в) 1, 2, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 6, расходится, г) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, расходится, д) 0, $-\frac{5}{4}$, 0, $\frac{5}{6}$, 0, $-\frac{5}{8}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, е) 2, 4, 2, 4, 2, 4, расходится. **8.23.** а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. **8.24.** 1. **8.25.** 1. **8.26.** 1. **8.27.** 1.5. **8.28.** 1. **8.29.** $\frac{4}{3}$. **8.30.** e^{-5}. **8.31.** e^4. **8.32.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **8.33.** e^6. **8.34.** e^{-1}. **8.35.** e^4. **8.36.** e^{-2}. **8.37.** e^{-6}. **8.38.** e^2. **8.39.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **8.40.** e. **8.41.** e^{12}. **8.42.** e^{-1}. **8.43.** e^{-2}. **8.44.** $S \approx \approx 18\,424{,}35$ у.е. при $m = 1$, $S \approx 19\,155{,}41$ у.е. при $m \to \infty$, увеличилось на $3{,}97\%$. **8.45.** $S \approx 18\,020{,}32$ у.е. при $m = 1$, $S \approx 18\,682{,}46$ у.е. при $m \to \infty$, увеличилось на $3{,}67\%$. **8.46.**

m	1	2	4	12	365	∞
S	404 556	424 785	436 038	444 021	446 466	448 169

8.47.

m	1	2	4	12	365	∞
S	441 144	466 096	480 102	490 094	495 130	495 303

8.48. В первом случае $S \approx 1262{,}48$, во втором — $S \approx 1221{,}40$. **8.49.** $10{,}25\%$.

Глава 9

9.1. $f(-1) = 0$, $f(-0{,}001) = -6$, $f(100) = 4$. **9.2.** $f(0) = 1$, $f(-x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, $f(x+1) = \dfrac{-x}{2+x}$, $f(x)+1 = \dfrac{2}{1+x}$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x-1}{x+1}$. **9.3.** $x \leqslant 4{,}5$. **9.4.** Вся числовая ось, кроме точек $x = \pm 1$. **9.5.** $-3 \leqslant x \leqslant 3$. **9.6.** $-2 \leqslant x \leqslant 2$. **9.7.** $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

9.8. $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, где k — целое число. **9.9.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **9.10.** $-\infty < x < 0$. **9.11.** Вся числовая ось. **9.12.** $0 < x < 1$. **9.13.** $-\infty < x \leqslant -\sqrt{3}$ и $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. **9.14.** $-1 \leqslant x < 1$.

9.15. Вся числовая ось. **9.16.** $|x| \geqslant 3$. **9.17.** Вся числовая ось. **9.18.** $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi$, где k — целое число. **9.19.** $|x| > 2$. **9.20.** $x > 2$. **9.21.** $0 \leqslant y < 1$. **9.22.** а) $0 < y \leqslant 1$, б) $0 \leqslant y < 1$, в) $0 \leqslant y < +\infty$, г) $0 \leqslant y \leqslant 3$. **9.23.** а) если $a < b$, то $a < y < b$, если $a > b$, то $b < y < a$, б) $1 < y < +\infty$, в) $0 < y < \frac{1}{2}$, г) $-\infty < y < +\infty$.

9.24. $f(x) = \frac{7}{3}x - 2$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(2) = \frac{8}{3}$.

9.25. $y = x^2 + 2x - 3$, $f(-1) = -4$, $f(3) = 12$.
9.26. $y = \frac{7}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$, $f(-1) = -\frac{2}{3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{65}{24}$.
9.27. $y = 2x - 10$. **9.28.** $y = 2x^2 - 3x + 5$.
9.34. $S(x) = 6\sin x$. **9.35.** $x = 0$ и $x = 4$. **9.37.** $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$.
9.38. $y = -1 - \frac{2}{x-1}$. **9.39.** $y = \frac{3}{2} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{x - \frac{3}{2}}$. **9.48.** $y = x^2 + 2x + 2$. **9.49.** $y = \sqrt{\sin x^2 + 1}$. **9.50.** а) -1, б) 2, в) $\cos^2 \pi x + 1$, г) $\cos(\pi(x^2+1))$, д) 2, е) -1, ж) $\cos(\pi(\cos \pi x))$, з) $x^4 + 2x^2 + 2$, и) $\frac{3}{2}$.
9.51. а) $x = y$, б) $x = \frac{y}{2}$, в) $\frac{y}{3} + \frac{2}{3}$, г) $x = \frac{1}{y}$, д) $\frac{1}{y} + 1$, е) $x = \pm\sqrt{y-1}$, ж) $x = \lg y - 1$, з) $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{3}$, и) $x = \sqrt[3]{8 - y^3}$. **9.54.** а), г), е) четные, б), в), ж), з), и) — нечетные, д) — ни четная, ни нечетная.
9.55. а) $y = (x^2+3) + 5x$, б) $y = (3 - x^4) - (x^3 + 5x^7)$. **9.56.** а), г), е) периодические функции. **9.57.** $q = ap + b$, где $a < 0$, $s = ap + b$, где $a > 0$. **9.58.** $q = q_0 + ca^p$, где $0 < a < 1$, $s = s_0 + ca^p$, где $a > 1$. **9.59.** а) $p = 2$, б) увеличится на $0,55\%$. **9.60.** а) $p = 3$, б) уменьшится на $3,5\%$. **9.61.** а) $p = 2$, б) уменьшится на $2,5\%$.

Глава 10

10.3. $x > 899$. **10.4.** $x > \sqrt{499}$. **10.5.** а) 1, б) 0, в) 1, г) ∞. **10.6.** а) 1, б) $-\frac{1}{2}$, в) ∞, г) -2. **10.7.** а) 5, б) 0, в) -1, г) 1. **10.8.** а) 1, б) $\frac{2}{3}$, в) $\frac{1}{2}$, г) ∞. **10.10.** а) 0, б) ∞. **10.11.** а) $-\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{3}$. **10.12.** а) 1, б) 0. **10.13.** $\frac{1}{4}$. **10.14.** 3. **10.15.** 0. **10.16.** 0. **10.17.** $\frac{1}{12}$. **10.18.** 2. **10.19.** 2. **10.20.** $\frac{2}{5}$. **10.21.** 2. **10.22.** 2. **10.23.** $-\sqrt{2}$. **10.24.** -1. **10.25.** $-\frac{1}{4}$. **10.26.** ∞. **10.27.** 0. **10.28.** $\frac{1}{4}$. **10.29.** 0. **10.30.** e^{-2}. **10.31.** e. **10.32.** e^{15}. **10.33.** e^{10}. **10.34.** e^{-6}. **10.35.** $e^{-\frac{4}{3}}$. **10.36.** e^{-2}. **10.37.** e. **10.38.** e^4. **10.39.** e^8. **10.40.** e. **10.41.** e^{-2}. **10.42.** $a = \frac{1}{2}$. **10.43.** $a = e$. **10.44.** $a = -2$. **10.45.** $a = \frac{1}{4}$. **10.46.** $a = \frac{1}{3}$. **10.48.** $\frac{1}{3}$. **10.49.** $\frac{2}{5}$. **10.50.** 1. **10.51.** 2. **10.52.** e. **10.53.** 4. **10.54.** -2. **10.55.** $\frac{1}{12}$. **10.56.** $\frac{1}{2}$. **10.57.** 1. **10.58.** $\frac{9}{4}$. **10.59.** 2. **10.60.** $\frac{9}{10}$. **10.61.** 8. **10.62.** $\frac{3}{2}$. **10.63.** $\frac{\ln 3 \ln 4}{\ln 5 \ln 6}$. **10.64.** $-\frac{1}{2}$. **10.67.** $\frac{1}{\pi}$. **10.68.** 1. **10.69.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **10.70.** $\frac{17}{4}$. **10.71.** $\frac{3}{2}$. **10.72.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **10.73.** $-\frac{\sqrt{2}}{6}$. **10.74.** -2.. **10.75.** $\frac{3}{4}$. **10.76.** $\frac{1}{2}$. **10.77.** $\frac{1}{2}$. **10.78.** 0. **10.79.** $-\frac{3}{2}$. **10.80.** $\sqrt{3}$. **10.81.** 0. **10.82.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **10.83.** $\frac{3}{2}$. **10.84.** 0. **10.85.** 1. **10.86.** 4. **10.87.** $-\frac{5}{2}$. **10.88.** 1. **10.89.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.90.** 0. **10.91.** 0.

10.92. -5. **10.93.** 5. **10.94.** -2. **10.95.** -3. **10.96.** $\frac{1}{2}$. **10.97.** $\frac{1}{e}$. **10.98.** $-\frac{1}{2\pi}$. **10.99.** $-\frac{1}{56}$. **10.100.** $\frac{1}{4}$. **10.101.** 2. **10.102.** 4. **10.103.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **10.104.** $2\sqrt{3}$. **10.105.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. **10.106.** 1. **10.107.** $-\frac{1}{2}$. **10.108.** $-\frac{3}{2}$. **10.109.** $a = 1$, $b = -1$. **10.110.** $a = -1, b = \frac{1}{2}$. **10.111.** $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. **10.112.** $x = 0$ (2-го рода). **10.113.** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (2-го рода). **10.114.** $x = \pm 3$ (2-го рода). **10.115.** $x = -1$, $x = 3$ (2-го рода). **10.116.** $x = 0$ (1-го рода). **10.117.** $x = -1$ (1-го рода). **10.118.** $x = 0$ (2-го рода). **10.119.** $x = 2$ (2-го рода). **10.120.** $x = 0$ (1-го рода). **10.121.** $x = 1$ (1-го рода). **10.122.** $x = 1$ — точка устранимого разрыва, $y(1) = \frac{1}{3}$. **10.123.** Непрерывна. **10.124.** $x = -2$, $x = -3$ (2-го рода), $x = -1$ точка устранимого разрыва, $y(-1) = \frac{1}{2}$. **10.125.** $x = 1$, $x = 2$ — точка устранимого разрыва, $y(1) = -2$, $y(2) = -1$. **10.126.** а) непрерывна, б) $x = 5$ точка разрыва, в) $x = 1$, $x = 5$ точки разрыва, г) непрерывна. **10.127.** а) $x = \pm 1$ — точки разрыва, б) $x = \pm 1$, $x = \pm 5$ — точки разрыва, в) $x = 1$, $x = 5$ — точки разрыва, г) непрерывна.

Глава 11

11.1. $3x^2$. **11.2.** $4x$. **11.3.** $-\frac{1}{x^2}$. **11.4.** $-x(2+3x)$. **11.5.** $-\frac{2}{(2x-1)^2}$. **11.6.** $-\frac{2}{(x+1)^3}$. **11.7.** $\frac{3}{2\sqrt{x-1}}$. **11.8.** $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. **11.9.** $\frac{1}{x}$. **11.10.** $2\cos 2x$. **11.11.** $-3\sin 3x$. **11.12.** $\frac{1}{x-3}$. **11.13.** $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. **11.14.** $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. **11.15.** $(x-2)^2$.

11.16. $(x^2-1)^2$. **11.17.** $1+\frac{1}{\sqrt{x}}$. **11.18.** $-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$.

11.19. $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. **11.20.** $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$. **11.21.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$.

11.22. $\sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$. **11.23.** $1-\cos x$. **11.24.** $\frac{1-6x}{2\sqrt{x}}$.

11.25. $\frac{1}{x}-\cos x+e^x$. **11.26.** $\frac{\cos^3 x-\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

11.27. $3x^2-2x+1$. **11.28.** $x\left[2\cos x-x\sin x\right]$. **11.29.** $\frac{1-6x}{2\sqrt{x}}$.

11.30. $x^2(3\sin x+x\cos x)$. **11.31.** $9x^2+12x+1$.

11.32. $\ln x+1$. **11.33.** $\frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}$. **11.34.** $\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.

11.35. $-\frac{2}{(1+x)^2}$. **11.36.** $-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$. **11.37.** $\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$.

11.38. $-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3}$. **11.39.** $\frac{-\ln x}{x^2}$. **11.40.** $\frac{2x-\sin x\cos x}{2x\sqrt{x}\cos^2 x}$.

11.41. $-\frac{\ln 3}{3^x}$. **11.42.** $\frac{1-x}{e^x}$. **11.43.** $x2^x(2+x\ln 2)$.

11.44. $x^2e^x(3+x)$. **11.45.** $\frac{2x\sin x-\left(x^2+1\right)\cos x}{2\sin^2 x}$.

11.46. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **11.47.** $\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$. **11.48.** $\frac{2-2x+3x^2-x^3}{e^x}$.

11.49. $\frac{x-2\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}{x^3\left(1+x^2\right)}$. **11.50.** $\frac{1-2x\ln 2}{2\sqrt{x}2^x}$.

11.51. $\frac{4^x(x\ln 4-2)}{x^3}$. **11.52.** $\frac{e^{x^5}\left(5x^5-3\right)}{x^4}$. **11.53.** $\frac{e^x(x^2-2)}{x^3}$.

11.54. $\frac{1-3\ln x}{x^4\ln 2}$. **11.55.** $\frac{2x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{2\sqrt{x-x^3}}$.

11.56. $6x\left(x^2-1\right)^2$. **11.57.** $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. **11.58.** $5\cos 5x$.

11.59. $-2\sin\frac{x}{3}$. **11.60.** $9\cos(3x+5)$. **11.61.** $-50(1-5x)^9$.

11.62. $\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$. **11.63.** $-2\frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}}$. **11.64.** $4\sin^3 x\cos x$.

11.65. $\dfrac{\cos\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **11.66.** $\dfrac{\sin x\left(1+\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}$. **11.67.** $\dfrac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)}$.

11.68. $-\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. **11.69.** $3x^2\sin 2x^3$. **11.70.** $\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}-$ $-\dfrac{9}{\cos^2 3x}+6x$. **11.71.** $\dfrac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$. **11.72.** $\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

11.73. $2xe^{x^2-1}$. **11.74.** $-2e^{1-x}$. **11.75.** $-2xe^{-x^2}$.

11.76. $\ln 2\cdot 2^{4x+2}$. **11.77.** $\ln 3\cdot 3^x-9x^2+36x^2\cdot e^{4x^3}$.

11.78. $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}}$. **11.79.** $\dfrac{1}{x-1}$. **11.80.** $\dfrac{2}{1-x^2}$.

11.81. $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. **11.82.** $2\ln 10\cdot 10^{2x-2}$. **11.83.** $\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$.

11.84. $-9\cos^2 3x\cdot\sin 3x$. **11.85.** $\dfrac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. **11.86.** $\dfrac{4\ln^3 x}{x}$.

11.87. $2\sin 2x\left(1+\sin^2 x\right)$. **11.88.** $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$. **11.89.** $-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

11.90. $\dfrac{2}{x\left(1-x^2\right)}$. **11.91.** $\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}$. **11.92.** $-\sin 2x\cdot\ln 7\cdot 7^{\cos^2 x}$.

11.93. $\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$. **11.94.** $\dfrac{(2x-1)\cos\left(x^2-x\right)}{3\sqrt[3]{\sin^2\left(x^2-x\right)}}$. **11.95.** $-\dfrac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

11.96. $-\dfrac{1}{3}\ln 10\cdot\sin\dfrac{2x}{3}\cdot 10^{\cos^2\frac{x}{3}}$. **11.97.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

11.98. $x\cdot 3^{\sin 3x}(2+3x\cdot\ln 3\cdot\cos 3x)$. **11.99.** $\dfrac{2-x^2}{x\left(1-x^2\right)}$.

11.100. $7^x\left(\ln 7\cdot\ln x^2+\dfrac{2}{x}\right)$. **11.101.** $5x^9\left(2\ln(\sin 5x)+x\operatorname{ctg}5x\right)$.

11.102. $-\dfrac{3\ln\cos\sqrt{3x}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}$. **11.103.** $x^2\left(3\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x\right)$.

11.104. $e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x-x^3\right)$. **11.105.** $2e^{-x}(\cos 3x-2\sin 3x)$.

11.106. $\dfrac{1}{2\sqrt{-x}\cdot\sqrt{x+1}}$. **11.107.** $\dfrac{\operatorname{tg}x\left(1+2\operatorname{tg}^2 x\right)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$.

11.108. $\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. **11.109.** $-\dfrac{x}{1+x}$. **11.110.** $6\left(e^{6x}-e^{-6x}\right)$.
11.111. $-\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\sin 2x}$. **11.112.** $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **11.113.** $-\dfrac{1}{5}x\cdot e^{-\frac{x}{5}}$.
11.114. $\dfrac{1}{1+x^2}$. **11.115.** $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. **11.116.** $\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$.
11.117. $\arccos x$. **11.118.** $2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$. **11.119.** $\dfrac{8(\operatorname{arctg} 4x+1)}{1+16x^2}$.
11.120. $\operatorname{tg}^3 x$. **11.121.** $\dfrac{x}{x^4-1}$. **11.122.** $\dfrac{1}{x\left(1+x^4\right)^2}$.
11.123. $-\dfrac{\ln 2\cdot 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}{x^2\cdot\cos^2\frac{1}{x}}$. **11.124.** $e^x+e^{e^x+1}$. **11.125.** $\dfrac{1}{x\ln x}$.
11.126. $-\sin 2x\left[\cos\left(\cos^2 x\right)+\sin\left(\sin^2 x\right)\right]$. **11.127.** $2\sin(\ln x)$.
11.128. $\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)$. **11.129.** $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. **11.130.** $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$.
11.131. $-\dfrac{2}{1+x^2}$. **11.132.** $\dfrac{\left(1-x^2\right)^2}{1+x^6}$. **11.133.** $-2\cos x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.
11.134. $\dfrac{12x^5}{\left(1+x^{12}\right)^2}$. **11.135.** $\dfrac{x^2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$. **11.136.** а) $2\cos 2x$, б) $2\operatorname{tg} x\cdot\sec^2 x$, в) $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, г) $\dfrac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}$, д) $2^{\cos x}\ln 2\left(\ln 2\cdot\sin^2 x-\cos x\right)$, е) $\dfrac{1}{x^2}$. **11.137.** а) $3\sin x\left(7\cos^2 x-2\sin^2 x\right)$, б) $-(x\cos x+3\sin x)$, в) $-\dfrac{120}{x^7}$, г) $\dfrac{2}{x}$, д) $\dfrac{4\left(3x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$, е) $4x e^{-x^2}\left(-6+9x^2-2x^4\right)$.
11.140. а) $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^n e^{-\frac{x}{a}}$, б) $n!$, в) $2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
11.141. $4x-y-4=0$, $x+4y-18=0$. **11.142.** $2x-y+2=0$, $x+2y+1=0$. **11.143.** $y+1=0$, $x=0$. **11.144.** $2x-y-4=0$, $x+2y-7=0$. **11.145.** $5x+y-1=0$, $x-5y+5=0$. **11.146.** $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. **11.147.** $x-2y+3=0$, $2x+y-9=0$. **11.148.** $ex+y=0$, $x-ey-e^2-1=0$. **11.149.** $y-1=0$, $x=0$. **11.150.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$.

11.151. $x-y-3=0$, $x+y-3=0$. **11.152.** $2y-1=0$, $x-1=0$. **11.153.** $2x+9y-16=0$, $9x-2y-\dfrac{46}{3}=0$. **11.154.** $3x+2y-12=0$, $2x-3y+5=0$. **11.155.** $4x-9y+19=0$, $9x+4y-30=0$. **11.156.** $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}\right)$. **11.157.** $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{3}$. **11.158.** а) $x=2$, б) $x=-\dfrac{3}{2}$. **11.159.** $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$ а) $x_0=1$, б) $x_0=\dfrac{2}{3}$. **11.160.** $b^2-4ac=0$. **11.161.** В точке $(0,0)$: $4x-y=0$, в точке $(4,0)$: $4x+y-16=0$. **11.162.** В точке $(0,1)$: $x+y-1=0$. **11.163.** 107,6 ед./ч. и 96,4 ед./ч. **11.164.** а) 6 ед./мес., б) 0 ед./мес., в) 66 ед./мес. **11.165.** 112,5 ед./ч. и 82,5 ед./ч. **11.166.** 43 ед./ч. **11.167.** 52 ед./ч. **11.168.** 12,91 ед./ч. **11.169.** После третьего часа работы $\left(t=\dfrac{8}{3}\right)$.

Глава 12

12.1. $e^{-2x}(1-2x)\,dx$. **12.2.** $\left(\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx$.

12.3. $-\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{x^2\cdot\cos^2\frac{1}{x}}dx$. **12.4.** $-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. **12.5.** $\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$.

12.6. $2^x x(2+x\ln 2)\,dx$. **12.7.** $\left(-x^{-2}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$.

12.8. $\dfrac{x^2-1}{x^2}dx$. **12.9.** $-\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. **12.10.** $\dfrac{2dx}{3\sqrt[3]{x-4}}$.

12.11. $3\ln 2 \quad x^2 2^{x^3}dx$. **12.12.** $(\ln 3\cdot 3^x+\ln 2\cdot 2^{-x})\,dx$.

12.13. $(1-4e^{-4x})\,dx$. **12.14.** $\dfrac{2xdx}{x^2+1}$. **12.15.** $\dfrac{dx}{2(x-1)}$.

12.16. $\dfrac{2\ln x}{x}dx$. **12.17.** $\dfrac{2dx}{x}$. **12.18.** $4\sin 2xdx$.

12.19. $6x^2\cos x^3dx$. **12.20.** $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+2x\right)dx$. **12.21.** $2\sin 2xdx$.

12.22. $\dfrac{\cos xdx}{2\sqrt{\sin x}}$ **12.23.** $\Delta y=0,0301$, $dy=0,03$,

$\delta \approx 0,0033$. **12.24.** $\Delta y = 0,823$, $dy = 0,7$, $\delta \approx 0,15$. **12.25.** $\Delta y = -1,0746$, $dy = -1,08$, $\delta \approx 0,005$. **12.26.** $\Delta y = -0,0513$, $dy = -0,05$, $\delta \approx 0,0253$. **12.27.** $\Delta y = 1,161$, $dy = 1,1$, $\delta \approx 0,0525$. **12.28.** $1,98875$. **12.29.** $1,043$. **12.30.** $0,8104$. **12.31.** $1,01$. **12.32.** $0,01$. **12.33.** $2,9979$. **12.34.** $\frac{63}{32}$. **12.35.** $1,002$. **12.36.** $0,999$. **12.37.** $10,05$. **12.38.** $2,9907$. **12.39.** $3,998$. **12.40.** $0,001$. **12.41.** $1,00157$. **12.42.** $0,003$. **12.43.** $\Delta S = 2x\Delta x + \Delta x^2$, $dS = 2x\Delta x$. **12.44.** $dV = 3x^2dx = 0,75$, $\frac{dV}{x^3} = 0,006$ или $0,6\%$. **12.45.** $dS = 0,12\pi$, $\frac{dS}{\pi R^2} = 0,083$ или $8,3\%$. **12.46.** $dx = 0,0016$. **12.47.** $dx \leqslant \frac{0,1 \cdot 2}{5x\sqrt{x}} < 0,005$.

12.48. $-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}\,dx^2$. **12.49.** $\frac{2\,(1-\ln x)}{x^2}\,dx^2$.

12.50. $2e^{-x^2}(2x^2-1)\,dx^2$. **12.51.** $(12x-2)\,dx^2$.

12.52. $(\cos(x^2-1) - 2x^2\sin(x^2-1))\,dx^2$. **12.53.** $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx^2$.

Глава 13

13.5. В точке $C(1,1)$. **13.6.** $C(0,1)$. **13.7.** $(-1,-1)$ и $D(1,1)$. **13.8.** В точке $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$. **13.9.** $\frac{b^2-a^2}{b-a} = 2c$, $c = \frac{b+a}{2}$. **13.10.** $c = \frac{9}{4}$. **13.11.** $c = -1 + \frac{\sqrt{57}}{3}$. **13.12.** а) $\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$, б) $\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$, в) $\frac{1}{\ln 2}$. **13.14.** $\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2} = \frac{3c^2}{2c}$, $c = \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **13.16.** а) $\frac{\pi}{4}$, б) $\sqrt[3]{\left(\frac{15}{4}\right)^2} \approx 2,4$. **13.17.** 3. **13.18.** $\frac{1}{2}$. **13.19.** -1. **13.20.** 1. **13.21.** $-\frac{1}{3}$. **13.22.** 1. **13.23.** $\frac{1}{6}$. **13.24.** $\frac{1}{2}$. **13.25.** 3. **13.26.** $\frac{3}{2}$. **13.27.** $\frac{3}{7}$. **13.28.** $\frac{1}{2}$. **13.29.** 0. **13.30.** ∞. **13.31.** $\frac{1}{2}$. **13.32.** $\frac{1}{2}$.

13.33. 0. **13.34.** $E_{p_0=2}(q) = -\frac{9}{38}$, $E_{p_0=2}(s) = 0,4$, спрос уменьшится на 4,5%. **13.35.** $E_{p_1}(q) = -1$. **13.36.** $E_{p_1}(q) = -0,6$, $E_{p_2}(q) = -1$. **13.37.** $E_{p_1}(q) = -\frac{5}{17}$, $E_{p_2}(q) = -1,8$. **13.38.** $E_{p=5}(q) = -\frac{3}{7}$. **13.39.** $E_{p=8}(q) = -0,25$.

Глава 14

14.1. а) функция убывает на интервале $(-\infty, 0)$ и возрастает на интервале $(0, +\infty)$, б) функция возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$, в) функция убывает на интервале $(-\infty, +\infty)$, г) функция возрастает на интервале $(0, +\infty)$. **14.2.** а) функция возрастает везде при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, б) функция возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$, в) функция возрастает на интервале $(-\infty, 2)$ и убывает на интервале $(2, +\infty)$. **14.3.** Функция убывает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$, возрастает на интервалах $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$. **14.4.** Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 3)$ и $\left(\frac{23}{3}, +\infty\right)$, убывает на интервале $\left(3, \frac{23}{3}\right)$. **14.5.** Функция убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, возрастает на интервале $\left(0, \frac{2}{3}\right)$. **14.6.** Функция возрастает на интервале $(-\infty, 2)$ и убывает на интервале $(2, +\infty)$. **14.7.** $y_{\min} = y(-2) = 1$. **14.8.** $y_{\max} = y(-1) = \frac{5}{3}$, $y_{\min} = y(3) = -9$. **14.9.** $y_{\min} = y(-2) = -\frac{16}{3}$, $y_{\max} = y(2) = \frac{16}{3}$. **14.10.** $y_{\max} = y(-2) = y(2) = 5$, $y_{\min} = y(0) = 1$. **14.11.** $y_{\min} = y(3) = -\frac{27}{4}$. **14.12.** $y_{\max} = y(-2) = -2$, $y_{\min} = y(2) = 2$. **14.13.** $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2}$, $y_{\min} = y(0) = 0$. **14.14.** $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$. **14.15.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **14.16.** $y_{\min} = y(0) = -1$. **14.17.** $y_{\max} = y(4) = 1$.

14.18. $y_{\max} = y(0) = 1$. **14.19.** $y_{\min} = y(-2) = -1$, $y_{\max} = y(2) = 1$. **14.20.** $y_{\max} = y(1) = e$. **14.21.** $y_{\text{наиб.}} = y(3) = 9$, $y_{\text{наим.}} = y(1) = -3$. **14.22.** $y_{\text{наиб.}} = y(4) = 8$, $y_{\text{наим.}} = y(1) = 3$. **14.23.** $y_{\text{наиб.}} = y(1) = 6$, $y_{\text{наим.}} = y(-3) = -26$. **14.24.** $y_{\text{наиб.}} = y(10) = 66$, $y_{\text{наим.}} = y(2) = 2$. **14.25.** $y_{\text{наиб.}} = y(5) = 32$, $y_{\text{наим.}} = y(-1) = \frac{1}{2}$. **14.26.** $y_{\text{наиб.}} = y(0,01) = y(100) = 100,01$, $y_{\text{наим.}} = y(1) = 2$. **14.27.** $y_{\text{наиб.}} = y(-1) = 3$, $y_{\text{наим.}} = y(1) = 1$. **14.28.** $y_{\text{наиб.}} = y(3) = \sqrt[3]{9}$, $y_{\text{наим.}} = y(0) = y(2) = 0$. **14.29.** $y_{\text{наиб.}} = y(0) = \frac{\pi}{4}$, $y_{\text{наим.}} = y(1) = 0$. **14.34.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{29}{2}\right)$ — точка перегиба, выпукла на $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, вогнута на $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **14.35.** $(2, -16)$ — точка перегиба, выпукла на $(-\infty, 2)$, вогнута на $(2, +\infty)$. **14.36.** $\left(2, -\frac{8}{3}\right)$ — точка перегиба, функция выпукла на $(-\infty, 2)$, вогнута на $(2, +\infty)$. **14.37.** $(1, 0)$ — точка перегиба, функция выпукла на $(-\infty, 1)$, вогнута на $(1, +\infty)$. **14.38.** $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — точки перегиба, функция выпукла на $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, вогнута на $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. **14.39.** $(1, -7)$ — точка перегиба, функция выпукла на $(0, 1)$, вогнута на $(1, +\infty)$. **14.40.** $(0, 0)$, $(\sqrt[3]{2}, \ln 3)$ — точки перегиба, функция выпукла на $(-1, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$, вогнута на $(0, \sqrt[3]{2})$. **14.41.** $(-2, -2e^{-2})$ — точка перегиба, выпукла на $(-\infty, -2)$, вогнута на $(-2, +\infty)$. **14.42.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ — точки перегиба, выпукла на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, вогнута на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$. **14.43.** $x = -\frac{2}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$. **14.44.** $y = -1$. **14.45.** $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$. **14.46.** $y = 3x$. **14.47.** $x = 1$, $y = 2$. **14.48.** $x = \frac{1}{2}$, $x = -1$, $y = 0$. **14.49.** $x = 1$, $x = -1$, $y = 2x + 1$. **14.50.** $x = 1$,

$x = -\frac{1}{2}$, $y = x - 2$. **14.51.** $x = -1$. **14.52.** $x = 0$, $y = x + 1$. **14.53.** $x = 0$ — асимптота, $y_{\min} = y(-1) = y(1) = 2$, функция вогнута на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, точек перегиба нет. **14.54.** $x = -1$, $y = 1$ — асимптоты, $y_{\min} = y(1) = 0$, $\left(2, \frac{1}{9}\right)$ — точка перегиба, функция вогнута на $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$, выпукла на $(2, +\infty)$. **14.55.** Асимптот нет, $y_{\max} = y(2) = 32$, $y_{\min} = y(6) = 0$, $(4, 16)$ — точка перегиба, функция выпукла на $(-\infty, 4)$, вогнута на $(4, +\infty)$. **14.56.** $x = 0$, $y = x$ — асимптоты, $y_{\max} = y(-3) = -4$, $y_{\min} = y(3) = 4$, функция выпукла на $(-\infty, 0)$, вогнута на $(0, +\infty)$, точек перегиба нет. **14.57.** $x = 3$, $y = x - 3$ — асимптоты, $y_{\max} = y(1) = -4$, $y_{\min} = y(5) = 4$, функция выпукла на $(-\infty, 3)$, вогнута на $(3, +\infty)$, точек перегиба нет. **14.58.** Асимптот нет, $y_{\max} = y(-2) = \frac{4}{3}$, $y_{\min} = y(0) = 0$, $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ — точка перегиба, функция выпукла на $(-\infty, -1)$, вогнута на $(-1, +\infty)$. **14.59.** $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ — асимптоты, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -4$, функция вогнута на $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, выпукла на $(0, 1)$, точек перегиба нет. **14.60.** $x = 2$, $y = x + 2$ — асимптоты, $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(4) = 8$, функция выпукла на $(-\infty, 2)$, вогнута на $(2, +\infty)$, точек перегиба нет. **14.61.** $x = -2$, $y = 2 - x$ — асимптоты, $y_{\min} = y(-3) = 6$, $y_{\max} = y(-1) = 2$, функция вогнута на $(-\infty, -2)$, выпукла на $(-2, +\infty)$, точек перегиба нет. **14.62.** $y = 0$ — правосторонняя асимптота, $y_{\max} = y(-1) = e$, $(0, 2)$ — точка перегиба, функция выпукла на $(-\infty, 0)$, вогнута на $(0, +\infty)$. **14.63.** $y = 0$ — правосторонняя асимптота, $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2}$, $\left(2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2})\, e^{\sqrt{2}-2}\right)$, $\left(2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})\, e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ — точки перегиба, функция вогнута на $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, выпукла на $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. **14.64.** $y = 1$ — асимптота, $y_{\max} = y(-1) = 2$, $y_{\min} = y(1) = 0$, $(0, 1)$, $\left(-\sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ —

точки перегиба, функция вогнута на $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, выпукла на $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. **14.65.** $x = 0$, $y = x$ — асимптоты, $y_{\max} = y(-1) = -2$, $y_{\min} = y(1) = 2$, функция выпукла на $(-\infty, 0)$, вогнута на $(0, +\infty)$, точек перегиба нет. **14.66.** Асимптот нет, $y_{\max} = y(0) = 0$ (точка возврата), $y_{\min} = y(2) = -3\sqrt[3]{4}$, $(-1, -6)$ — точка перегиба, функция вогнута на $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, выпукла на $(-1, 0)$. **14.67.** $x = 2$ — асимптота, $y_{\min} = y(1) = 3$, $(4, 0)$ — точка перегиба, функция вогнута на $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, выпукла на $(2, 4)$. **14.68.** $x \in (100, +\infty)$. **14.69.** $x \in (2\ln 10, +\infty)$. **14.70.** $x \in (10, +\infty)$. **14.71.** 100 ед., 2000 ден.ед.
14.72. 30 ед., 70 ден.ед. **14.73.** 565 884 ден.ед.
14.74. 426 000 ден.ед. **14.75.** 198 600 ден.ед.

Глава 15

15.1. $x^3 + x^2 + \ln|x| + C$. **15.2.** $\frac{1}{6}x^3 + 2x + \ln|x| + C$. **15.3.** $x - \ln|x+1| + C$. **15.4.** $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$. **15.5.** $x - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right| + C$. **15.6.** $\frac{5^x}{\ln 5} - \frac{7^x}{\ln 7} + C$. **15.7.** $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$. **15.8.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C$. **15.9.** $x - \sin x + \cos x + C$. **15.10.** $\frac{x^4-1}{2x^2} - 2\ln|x| + C$. **15.11.** $-\frac{1}{2}\cos x + C$. **15.12.** $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$. **15.13.** $\frac{15^x}{\ln 15} + C$. **15.14.** $\frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$. **15.15.** $\frac{3^x}{\ln 3} + x^3 + C$. **15.16.** $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$. **15.17.** $-\frac{2}{3\sqrt{5x}\sqrt{x}} + C$. **15.18.** $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C$. **15.19.** $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C$. **15.20.** $-2\,\mathrm{tg}\,x + C$. **15.21.** $\cos x - \mathrm{ctg}\,x + C$. **15.22.** $2\cos x - 3\,\mathrm{ctg}\,x + C$. **15.23.** $3x - \mathrm{tg}\,x + C$. **15.24.** $\ln\left|x + \sqrt{x^2+3}\right| - \ln\left|x + \sqrt{x^2-3}\right| + C$. **15.25.** $\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$. **15.26.** $\frac{2}{3}\sqrt{(3+x)^3} +$

$+C$. **15.27.** $2\sqrt{x+7}+C$. **15.28.** $-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$. **15.29.** $\frac{1}{4}\sin 4x+C$. **15.30.** $\frac{1}{2}\cos(3-2x)+C$. **15.31.** $-\frac{1}{5}e^{-5x}+C$. **15.32.** $-\frac{(5-2x)^5}{10}+C$. **15.33.** $\ln|x^2+3x-1|+C$. **15.34.** $\frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2)+C$. **15.35.** $\frac{1}{3}(e^{2x}+3)\sqrt{e^{2x}+3}+C$. **15.36.** $-\frac{1}{45}(1-6x^5)^{3/2}+C$. **15.37.** $-\frac{1}{4}\ln\left|5-x^4\right|+C$. **15.38.** $\frac{5^{\operatorname{tg} x}}{\ln 5}+C$. **15.39.** $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$. **15.40.** $\frac{1}{2}\arcsin(2\ln x)+$ $+C$. **15.41.** $-\frac{1}{4}\arcsin(4\cos x)+C$. **15.42.** $\ln|\sin 2x|+C$. **15.43.** $-\cos\left(x^2+1\right)+C$. **15.44.** $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$. **15.45.** $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} 2^x+C$. **15.46.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+C$. **15.47.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$. **15.48.** $-\frac{30x+8}{375}(2-5x)^{3/2}+C$. **15.49.** $-\frac{5}{2}\sqrt{3-x}\,(24+4x+x^2)+C$. **15.50.** $2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$. **15.51.** $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$. **15.52.** $\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{\ln^2 3}+C$. **15.53.** $-\frac{x}{2^x\ln 2}-\frac{1}{2^x\ln^2 2}+C$. **15.54.** $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$. **15.55.** $\left(1+x^3\right)\cdot\left(\ln\left(x^3+1\right)-1\right)+C$. **15.56.** $-\frac{1}{x}(\ln x+1)+C$. **15.57.** $\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$. **15.58.** $x\ln 5x-x+C$. **15.59.** $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arctg} x+C$. **15.60.** $\frac{x+1}{3}\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}+C$. **15.61.** $-\frac{1}{2}(x-3)\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **15.62.** $\ln|\sin x|-x\operatorname{ctg} x+C$. **15.63.** $x\operatorname{tg} x+\ln(\cos x)+C$. **15.64.** $\frac{x^2}{2}\arccos x+\frac{1}{4}\arcsin x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$. **15.65.** $x\arcsin 3x+$ $+\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C$. **15.66.** $x(\operatorname{tg} x-x)+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}+C$. **15.67.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$. **15.68.** $e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$.

15.69. $-e^{-x}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)+C$. **15.70.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$.

15.71. $\frac{2}{7}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x+C$. **15.72.** $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

15.73. $\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2-x}{3(x^2-x+1)}$. **15.74.** $\frac{1}{192(x-3)}-$ $-\frac{x+6}{192(x^2+3x+6)}+\frac{2-x}{8(x^2+3x+6)^2}$. **15.75.** $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9(x-1)^2}-$ $-\frac{3x+4}{9(x^2+x+1)}+\frac{x}{3(x^2+x+1)^2}$. **15.76.** $\ln|x|-2\ln|x+1|+C$.

15.77. $\ln|x-1|+\ln|x+2|+C$. **15.78.** $\ln|x-2|+\ln\left|x^2+1\right|+C$.

15.79. $\ln|x-2|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **15.80.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-2\ln|x-2|+C$.

15.81. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **15.82.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$.

15.83. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **15.84.** $\ln\left|x^2-x+1\right|-$ $-\ln|x+1|+C$. **15.85.** $-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x+\ln|x-2|+C$.

15.86. $-\ln\left(x^2+x+5\right)+2\ln|x|+C$. **15.87.** $-\frac{1}{3(x-1)}+$ $+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. **15.88.** $\frac{1}{12}\ln|x+1|+\frac{3}{28}\ln|x-2|-\frac{4}{21}\ln|x+4|+C$.

15.89. $\frac{5}{2}\ln\left(x^2+2x+10\right)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C$. **15.90.** $\ln|x-1|-$ $-\frac{1}{x-1}+2\ln|x+3|+C$. **15.91.** $27\ln|x-1|-27\ln|x-2|-\frac{38}{x-2}+C$.

15.92. $\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C$. **15.93.** $-2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{2}|x-1|+C$.

15.94. $2\ln|x|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$. **15.95.** $\ln|x|-\frac{2}{x}+3\ln|x+5|+C$.

15.96. $\frac{3}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln\left(x^2+3\right)+\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

15.97. $\ln|x|+\operatorname{arctg}x^2+C$. **15.98.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+x+1)}{(x-1)^2}-$

$-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{3(x-1)} + C.$ **15.99.** $\dfrac{1}{10}\ln|x+1| + \dfrac{15}{162}\ln|x^2+3| - \dfrac{16}{37}\ln|x+4| - \dfrac{41}{228\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} + C.$

15.100. $\arcsin\dfrac{8+3x}{2\sqrt{2}(x+3)} + C.$ **15.101.** $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

15.102. $\dfrac{9}{2}\arcsin\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.$

15.103. $-\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\dfrac{x+2}{3} + C.$

15.104. $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2}{x} + \sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}\right| + C.$

15.105. $-\ln\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{1-x-x^2}}{x}\right| + C.$

15.106. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3}\right) + C.$ **15.107.** $-\arcsin\dfrac{\frac{1}{x}-2}{\sqrt{5}} + C.$

15.108. $-\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

15.109. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{2}x^2\right) + C.$ **15.110.** $-\arcsin\left(\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$

15.111. $2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$

15.112. $2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln(\sqrt[6]{x+2}+1) + C.$

15.113. $\dfrac{3}{2}\ln\left|x^{\frac{2}{3}}+1\right| + C.$ **15.114.** $\dfrac{14}{5}\ln\left|x^{\frac{5}{14}}+1\right| + C.$

15.115. $\dfrac{4}{7}(x-1)^{\frac{7}{4}} + \dfrac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{4}} + C.$ **15.116.** $\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{3}{2}\ln\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right) + C.$

15.117. $\sqrt{x^2+2x+3} + \dfrac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$

15.118. $-4\sqrt{-x^2+4x+3} + 11\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{7}} + C.$

15.119. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3}\right) + C.$

Глава 16

16.1. 0. **16.2.** $\frac{1}{5}$. **16.3.** $5+e$. **16.4.** $\frac{10}{3}$. **16.5.** 0. **16.6.** $4-4\ln 2$. **16.7.** $\frac{17}{6}$. **16.8.** 7. **16.9.** e^6-1. **16.10.** $1+2\ln 2$. **16.11.** $3+e^2-e$. **16.12.** $\frac{\pi}{6}$. **16.13.** $\ln\left(2+\sqrt{7}\right)-\ln\sqrt{3}$. **16.14.** $\ln 2$. **16.15.** π. **16.16.** $\frac{\ln 2}{6}$. **16.17.** $2-2\ln 3$. **16.18.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **16.19.** 16. **16.20.** $-\frac{1}{4}$. **16.21.** $\frac{3}{\ln 2}$. **16.22.** $\frac{3}{\ln 2}+2$. **16.23.** $\frac{26}{\ln 3}-\frac{3\ln 3}{2}$. **16.24.** $10\frac{2}{3}$. **16.25.** $\frac{1}{2}e-1$. **16.26.** $\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$. **16.27.** $\frac{67}{27}$. **16.28.** $1-\frac{\pi}{4}$. **16.29.** $\frac{1}{8}\left(\sqrt[3]{35}-3\right)$. **16.30.** 6. **16.31.** $\frac{2}{\ln 2}$. **16.32.** $\frac{1}{6}\ln 3$. **16.33.** $\ln\frac{3}{2}$. **16.34.** $\frac{1}{2}$. **16.35.** 4. **16.36.** $11-6\ln\frac{3}{2}$. **16.37.** $\frac{2}{3}$. **16.38.** $\frac{\pi}{4}$. **16.39.** $\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{64}$. **16.40.** $10\frac{2}{3}$. **16.41.** 4π. **16.42.** $\frac{\pi}{6}$. **16.43.** $\frac{\pi}{4}$. **16.44.** $\frac{e^2+1}{4}$. **16.45.** 1. **16.46.** 1. **16.47.** 0. **16.48.** 0. **16.49.** $\frac{9}{16}(2\ln 2-1)$. **16.50.** $\frac{1}{16}(3-2\ln 2)$. **16.51.** $2\left(2-\sqrt{e}\right)$. **16.52.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$. **16.53.** -2π. **16.54.** $\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-2$. **16.55.** $\frac{\pi^2}{54}+\frac{5}{27}$. **16.56.** $6-\frac{16}{e}$. **16.57.** $-2+e$. **16.58.** $\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$. **16.59.** $\frac{2e^{\frac{\pi}{3}}-3}{13}$. **16.60.** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$. **16.61.** 2. **16.62.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$. **16.63.** $\frac{2e^{\frac{\pi}{4}}-1}{5}$. **16.64.** $\frac{\pi}{2}$. **16.65.** 1. **16.66.** ∞. **16.67.** $\frac{1}{2}$. **16.68.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **16.69.** Расходится. **16.70.** $\frac{1}{2}$. **16.71.** $\frac{1}{20}$. **16.72.** 1. **16.73.** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

16.74. $\frac{1}{5}$. **16.75.** $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 4$. **16.76.** $-\frac{1}{16}$. **16.77.** $\frac{1}{8}$. **16.78.** $2\sqrt{2}$. **16.79.** π. **16.80.** $3\sqrt[3]{4}$. **16.81.** Расходится. **16.82.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **16.83.** $\ln\left(3+\sqrt{8}\right)$. **16.84.** Расходится. **16.85.** $3\sqrt[3]{4}$. **16.86.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}$. **16.87.** 2. **16.93.** $\frac{37}{12}$. **16.94.** $\frac{8}{3}$. **16.95.** $\frac{8}{3}$. **16.96.** 8. **16.97.** $2\operatorname{arctg} 4 - \frac{1}{4}\ln 17$. **16.98.** $8 - 4\ln 3$. **16.99.** $4\ln 2 - 1$. **16.100.** $\frac{9}{2}$. **16.101.** $2\ln 2 - \frac{1}{2}$. **16.102.** $10\frac{2}{3}$. **16.103.** 3. **16.104.** $2 - \frac{\pi}{2}$. **16.105.** 4. **16.106.** $\frac{40}{3}$. **16.107.** $3\pi a^2$. **16.108.** 6π. **16.109.** 240. **16.110.** $\frac{8}{5}$. **16.111.** $\frac{8}{15}$. **16.112.** $\frac{5\pi}{4} - 2$. **16.113.** $9\sqrt{3} - 4\pi$. **16.114.** 3. **16.115.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **16.116.** $2\sqrt{2}$. **16.117.** $1 - \frac{\pi}{8}$. **16.118.** $\frac{3}{8} + \ln 2$. **16.119.** $2\ln 3$. **16.120.** $2\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - 2$. **16.121.** $2\sqrt{3}$. **16.122.** $8\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2}$. **16.123.** $12\sqrt{3} - 2\pi$. **16.124.** $8\sqrt{3}$. **16.125.** 2. **16.126.** 24. **16.127.** 4. **16.128.** $4\sqrt{3}$. **16.129.** $l = 8\sqrt{3}$. **16.130.** $\frac{32\pi}{3}$. **16.131.** $3\pi\ln 3$. **16.132.** $3\pi^2$. **16.133.** $\frac{3\pi}{10}$. **16.134.** $\frac{8\pi}{15}$. **16.135.** $\frac{32\pi}{3}$. **16.136.** $\frac{192\pi}{5}$. **16.137.** $\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)^2$. **16.138.** $\frac{768\pi}{7}$. **16.139.** $\frac{32\pi}{35}$.

Глава 17

17.1. Вся плоскость. **17.2.** Вся плоскость, кроме точек прямой $y = -x$. **17.3.** Вся плоскость, кроме точек оси ординат. **17.4.** Вся плоскость, кроме точки $(0,0)$. **17.5.** Полуплоскость $y \geqslant 0$. **17.6.** Верхняя полуплоскость относительно прямой $y = -x$, включая точки самой прямой. **17.7.** $|x| \leqslant 1$, $|y| \geqslant 1$. **17.8.** Круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$. **17.9.** Внешность круга $x^2 + y^2 \geqslant 4$ (включая окружность). **17.10.** Внешность круга $x^2 + y^2 > 1$. **17.11.** Кольцо $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. **17.12.** Эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ и его внутренние точки. **17.13.** Вторая четверть с примыкающими полуосями $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$. **17.14.** Параллельные прямые. **17.15.** Концентрические окружности. **17.16.** Семейство равносторонних гипербол с общими асимптотами $y = \pm x$. **17.17.** Пучок прямых с вершиной в начале координат, кроме вершины и оси Oy. **17.18.** Параллельные прямые. **17.19.** Семейство гипербол. **17.20.** Семейство парабол. **17.21.** $-\frac{1}{4}$. **17.22.** 1. **17.23.** 0. **17.24.** $-\frac{1}{6}$. **17.25.** $\frac{1}{2}$. **17.26.** ∞. **17.27.** 4. **17.28.** $\frac{1}{2}$. **17.29.** *Указание*: рассмотреть изменения x и y вдоль прямых $y = kx$. **17.30.** $y = -x$. **17.31.** $(0,0)$. **17.32.** $x^2+y^2 = 4$. **17.33.** $y^2 = -x$. **17.34.** $(0,0)$. **17.35.** $y = x$ и $y = -x$. **17.36.** Разрыв вдоль осей координат. **17.37.** $z'_x = 3x^2 + 6xy$, $z'_y = 3x^2 - 3y^2$. **17.38.** $z'_x = 2xy - y^2$, $z'_y = x^2 - 2xy$. **17.39.** $z'_x = -\frac{y}{x^2}$, $z'_y = \frac{1}{x}$. **17.40.** $z'_x = \frac{x}{y^3}$, $z'_y = -\frac{3x^2}{2y^4}$. **17.41.** $z'_x = y + \frac{y}{x^2}$, $z'_y = x - \frac{1}{x}$. **17.42.** $z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$, $z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$. **17.43.** $z'_x = \frac{-5y}{(x-y)^2}$, $z'_y = \frac{5x}{(x-y)^2}$. **17.44.** $z'_x = e^{xy}\left(\frac{1}{y} + x\right)$, $z'_y = e^{xy} \cdot \frac{x}{y}\left(x - \frac{1}{y}\right)$. **17.45.** $z'_x = e^{-y}$, $z'_y = 3y^2 - x\,e^{-y}$. **17.46.** $z'_x = 6x(x^2 + y^2)^2$, $z'_y = 6y(x^2 + y^2)^2$. **17.47.** $z'_x = \frac{2x}{x^2 + y}$, $z'_y = \frac{1}{x^2 + y}$. **17.48.** $z'_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$. **17.49.** $z'_x = -6xy^3e^{-3x^2y^3}$, $z'_y = -9x^2y^2e^{-3x^2y^3}$. **17.50.** $z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$. **17.51.** $z'_x = -a\sin(ax + by)$, $z'_y = -b\sin(ax + by)$.

17.52. $z'_x = \operatorname{ctg}(x-2y)$, $z'_y = -2\operatorname{ctg}(x-2y)$.

17.53. $z'_x = \sin 2(x+y) - \sin 2x$, $z'_y = \sin 2(x+y) - \sin 2y$.

17.54. $z'_x = \dfrac{\ln y}{y}\, e^{\frac{x}{y}}$, $z'_y = \dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{x\ln y}{y}\right) e^{\frac{x}{y}}$.

17.55. $z'_x = \dfrac{1}{y^2}\, e^{\frac{x}{y^2}}$, $z'_y = -\dfrac{2x}{y^3}\, e^{\frac{x}{y^2}}$.

17.56. $z''_{xx} = 6x + 2y$, $z''_{yy} = 6y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2x$.

17.57. $z''_{xx} = 12x^2 + 6y^2$, $z''_{yy} = 6x^2 - 24y^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 12xy$.

17.58. $z''_{xx} = \dfrac{6x}{y^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{6x^3}{y^4}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{6x^2}{y^3}$.

17.59. $z''_{xx} = \dfrac{2}{1-2y}$, $z''_{yy} = \dfrac{8x^2}{(1-2y)^3}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{4x}{(1-2y)^2}$.

17.60. $z''_{xx} = \dfrac{1}{y^2}\, e^{\frac{x}{y}}$, $z''_{yy} = \dfrac{x}{y^4}\,(x+2y)\, e^{\frac{x}{y}}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{1}{y^3}\,(x+y)\, e^{\frac{x}{y}}$.

17.61. $z''_{xx} = -\dfrac{1}{(x-y)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{x(x-2y)}{y^2(x-y)^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{1}{(x-y)^2}$.

17.62. $z''_{xx} = 2y^3\left(1 + 2x^2y^3\right) e^{x^2y^3}$, $z''_{yy} = 3x^2y\left(2 + 3x^2y^3\right) e^{x^2y^3}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 6xy^2\left(1 + x^2y^3\right) e^{x^2y^3}$. **17.63.** $z''_{xx} = -\dfrac{1}{(x+y^2)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{2\left(x - y^2\right)}{(x+y^2)^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{2y}{(x+y^2)^2}$.

17.64. $z''_{xx} = -2\cos 2(x-y)$, $z''_{yy} = -2\cos 2(x-y)$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 2\cos 2(x-y)$.

17.76. $\operatorname{grad} z(1,1) = (1,1)$, $\operatorname{grad} z(1,5) = (5,1)$.

17.77. $\operatorname{grad} z(1,2) = (2,4)$, $\operatorname{grad} z(2,3) = (4,6)$.

17.78. $\operatorname{grad} z(1,1) = (1,2)$, $\operatorname{grad} z(2,2) = (4,8)$.

17.79. $x^2 + y^2 = 5$, $\operatorname{grad} z(1,2) = (-2,-4)$.

17.80. $\operatorname{grad} z(0,1) = (0,2)$, $\operatorname{grad} z(1,1) = (2,2)$, $\operatorname{grad} z(-1,1) = (-2,2)$, $\operatorname{grad} z(1,0) = (1,0)$.

17.81. $\operatorname{grad} z(1,1) = (2,-1)$, $\operatorname{grad} z(2,2) = (4,-1)$, $\operatorname{grad} z(-1,1) = (-2,-1)$, $\operatorname{grad} z(-2,3) = (-4,-1)$.

17.82. $\operatorname{grad} z(-1,2) = (0{,}32, -0{,}64)$.

17.83. $\operatorname{grad} z(2,1) = (-1,-2)$. **17.84.** $dz = 2xy\,dx + x^2\,dy$.

17.85. $dz = -\dfrac{y^2}{(x-y)^2}\,dx + \dfrac{x^2}{(x-y)^2}dy$. **17.86.** $dz = \dfrac{1}{y}\,e^{\frac{x}{y}}dy$.

17.87. $dz = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$.

17.88. $dz = \left(y^3 - 6x^2y + x^4 2^x \ln 2 + 4x^3 2^x\right) dx + \left(3xy^2 - 2x^3\right) dy$.

17.89. $dz = \left(20x^4 - 6xy^3\right) dx - \left(9x^2y^2 + 30y^4\right) dy$.

17.90. $dz = -\left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{y}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2}\right) dy$.

17.91. $dz = \ln y\,dx + \dfrac{x}{y}dy$. **17.92.** $dz = e^{xy}(ydx + xdy)$. **17.93.** $0{,}075$. **17.94.** $0{,}3\,e^2$. **17.95.** $0{,}04$. **17.96.** а) $\Delta z = -0{,}62$, $dz = -0{,}6$, $|\Delta z - dz| = 0{,}02$, $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| \approx 0{,}032, (3{,}2\%)$, б) $\Delta z = \dfrac{18}{101}$, $dz = \dfrac{18}{100}$, $|\Delta z - dz| \approx 0{,}0018$, $\left|\dfrac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| \approx 0{,}01, (1\%)$. **17.97.** а) $2{,}22$, б) $2{,}95$, в) $0{,}97$, г) $0{,}502$, д) $0{,}848$. **17.98.** $1{,}2\pi$ см^3. **17.99.** -30π см^3. **17.100.** Увеличится на $1{,}4a$. **17.101.** $z_{\min} = 1$ при $x = -4$, $y = 1$. **17.102.** $z_{\max} = 12$ при $x = 4$, $y = 4$. **17.103.** $z_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y = -\dfrac{1}{2}$. **17.104.** Нет экстремума. **17.105.** $z_{\min} = -\dfrac{2}{e}$ при $x = -2$, $y = 0$. **17.106.** $z_{\min} = 9$ при $x = 0$, $y = 3$. **17.107.** $z_{\min} = 0$ при $x = 2$, $y = 2$. **17.108.** $z_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y = 0$. **17.109.** $z_{\min} = 0$ при $x = 2$, $y = 4$. **17.110.** Критических точек нет. **17.111.** $z_{\max} = 108$ при $x = 3$, $y = 2$. **17.112.** $z_{\max} = \dfrac{1}{27}$ при $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$. **17.113.** $z_{\min} = 0$ при $x = 3$, $y = 3$. **17.114.** $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z_{\min} = \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. **17.115.** $x = y = \dfrac{d}{4}$. **17.116.** $x = y = \sqrt{c}$. **17.117.** $\Pi_{\max} = 39$ при $x = 7$, $y = 3$. **17.118.** $\Pi_{\max} = 176$ при $x = 8$, $y = 4$. **17.119.** $\Pi_{\max} = 28$ при $x = 2$, $y = 4$. **17.120.** $\Pi_{\max} = 39$ при $x = 7$, $y = 3$. **17.121.** $\Pi_{\max} = 69$ при $x = 1$, $y = 6$. **17.122.** $\Pi_{\max} = 16$ при $x = 2$, $y = 2$. **17.123.** $y = 1{,}525x - 0{,}12$. **17.124.** $y = -2{,}186x + 2{,}92$, $y(0{,}1) = 2{,}7014$. **17.125.** $y = -2{,}186x + 2{,}92$. **17.126.** $y = 7{,}5x + 325{,}68$.

Глава 18

18.4. $y = e^x + 1$. **18.5.** $y = 2x^2 - x$. **18.6.** $y = \ln 2x$. **18.7.** $\frac{1}{2}\ln^2|y| = \frac{1}{3}\ln\left(1+e^{3x}\right) + C$. **18.8.** $y = 2 + C\cos x$. **18.9.** $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = C$. **18.10.** $x + \ln|x| + \ln|y| - y = C$, $x = 0$, $y = 0$. **18.11.** $x + \ln|x-1| + y + 2\ln|y-1| = C$, $x = 1$, $y = 1$. **18.12.** $y = \ln x + 2$. **18.13.** $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$. **18.14.** $y = -2x$. **18.15.** $y = 4e^x$. **18.16.** $y = -e^{\frac{1}{x}}$. **18.17.** $y = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$. **18.18.** $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. **18.19.** $y = \frac{4}{x}$. **18.20.** $y = 1$. **18.21.** $x^2 + (y+1)^2 = 1$. **18.22.** $x^2 + y^2 = 2$. **18.23.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. **18.24.** $\left(x^2 - 2\right)\left(y^2 - 2\right) = 4$. **18.25.** $\ln\left(1 + x^3\right) = \arcsin y - \frac{\pi}{2}$. **18.26.** $e^y = 2xe^{2x} - e^{2x} + 5$. **18.27.** $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$. **18.28.** $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$. **18.29.** $\ln\sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$. **18.30.** $y^3 - 3yx^2 = C$. **18.31.** $(y - x + 2)^3 = c\,(x + y)$. **18.32.** $\frac{C}{(2 - x - y)} = e^{\frac{(2x+y)}{3}}$. **18.33.** $4\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) = x$. **18.34.** $\sin\frac{y}{x} = x$. **18.35.** $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 1$. **18.36.** $y = x - \frac{2x}{\ln|x| + 2}$. **18.37.** $x^3e^y - y = C$. **18.38.** $x + ye^{-x} = C$. **18.39.** $x^2 + xy + y^2 = C$. **18.40.** $x^2y - 5x + y^3 = C$. **18.41.** $x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C$. **18.42.** $xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = C$. **18.43.** $x^5y - \frac{y^2}{2} = C$. **18.44.** $x^3y - \frac{x^4}{2} + y^3x - \frac{y^4}{2} = C$. **18.45.** $x\ln y - x^2 - y^2 = C$. **18.46.** $\frac{y}{x} = \ln x + C$. **18.47.** $y = -\frac{1}{6x} + Cx^5$. **18.48.** $y = -6\,(\sin x + 1) + Ce^{\sin x}$. **18.49.** $y = 1 + Ce^{-x^2}$. **18.50.** $y = (x+1)^2\left(\frac{1}{3}e^{3x} + C\right)$.

18.51. $y = (x^3 + C)\ln|x|$. **18.52.** $y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}$. **18.53.** $y = x^2 - x$. **18.54.** $y = e^x(\ln|x| + 1)$. **18.55.** $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$. **18.56.** $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$. **18.57.** $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2$. **18.58.** $y = \frac{x^3}{6}\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. **18.59.** $y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$. **18.60.** $y = \pm\frac{1}{6}(4e^x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2$. **18.61.** $y = \left(x^2 + \frac{1}{C_1^2}\right) \cdot \operatorname{arctg} C_1x - \frac{1}{C_1}x + C_2$. **18.62.** $y = \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_1^3x^3}{2} + C_2x + C_3$. **18.63.** $y = x - \ln|x+1| + \ln 2$. **18.64.** $y = \frac{x^2}{2} + e^x - 1$. **18.65.** $x = C_2 - \frac{1}{C_1}e^{-C_1y}$. **18.66.** $\ln|y| = C_1e^x + C_2e^{-x}$. **18.67.** $y = C_1e^{C_2x}$. **18.68.** $y = \frac{1}{2\cos^2 x}$. **18.69.** $y = 2e^x$. **18.70.** $2\ln|y| + y^2 = -4x$. **18.71.** Линейно независима. **18.72.** Линейно независима. **18.73.** Линейно зависима. **18.74.** Линейно независима. **18.75.** Линейно независима. **18.76.** $y = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$. **18.77.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$. **18.78.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **18.79.** $y = C_1 + C_2e^{-4x}$. **18.80.** $y = C_1e^{-7x} + C_2e^{-4x}$. **18.81.** $y = C_1e^{8x} + C_2e^{-8x}$. **18.82.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-7x}$. **18.83.** $y = C_1e^{11x} + C_2e^{-x}$. **18.84.** $C_1e^x + C_2e^{-x}$. **18.85.** $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$. **18.86.** $C_1e^{6x} + C_2xe^{6x}$. **18.87.** $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. **18.88.** $y = C_1 cos3x + C_2\sin 3x$. **18.89.** $y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$. **18.90.** $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **18.91.** $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. **18.92.** $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **18.93.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$. **18.94.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x$. **18.95.** $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + C_4x\cos x + C_5x\sin x$. **18.96.** $y = C_1e^x + C_2xe^x + x - 2$. **18.97.** $y = C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-\frac{1}{2}x} - x^3$. **18.98.** $y = C_1 + C_2e^{2x} - x^3 - 2x^2 + x$.

18.99. $y = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + \cos 3x - 3\sin 3x.$

18.100. $y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x + \dfrac{2}{10}\cos x + \dfrac{1}{10}\sin x.$

18.101. $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + x^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}x\right)e^{4x}.$

18.102. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + x e^{2x}\left(-\dfrac{1}{12}x^2 + \dfrac{1}{16}x + \dfrac{7}{32}\right).$

18.103. $y = e^{2x}\left(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x\right) + \dfrac{1}{2}e^{x}\sin x.$

18.104. $y = e^{-2x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + \dfrac{19}{345}\sin x - \dfrac{8}{345}\cos x.$

18.105. $y = \cos 2x - \dfrac{1}{3}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin x.$

18.106. $y = C_1 + C_2 e^{x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^2.$

18.107. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - \left(x^2 + 3x\right)e^{-x}.$

18.108. $y = 1 + 2x + e^{-x} + x^4 - 4x^3 + 12x^2.$

18.109. $y = -\cos 2x + x^4 - 3x^2 + x.$

18.110. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - e^{-x}\ln|x|.$

18.111. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - e^{-x}\left(-\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right).$

18.112. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2\cos x}.$

18.113. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\cdot\ln|\cos x| + x\sin x.$

18.114. $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + \dfrac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}.$

Глава 19

19.1. $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, $S = 1$. **19.2.** $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right)$, $S = 0{,}75$. **19.3.** $S_n = \dfrac{n-2}{3(n+1)}$, $S = \dfrac{1}{3}$. **19.4.** $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right)$, $S = 0{,}75$. **19.5.** $S_n = \dfrac{n-2}{3(n+1)}$, $S = \dfrac{1}{3}$. **19.6.** $S_n = \dfrac{3n}{3(3n+1)}$,

$S = \frac{1}{3}$. **19.7.** $S_n = \frac{2n}{2n+1}$, $S = 1$. **19.8.** $S_n = \frac{5n}{4(5n+4)}$, $S = \frac{1}{4}$.

19.9. $S_n = \frac{7}{10} - \frac{6n+7}{(3n+2)(3n+5)}$, $S = \frac{7}{10}$.

19.10. $S_n = 2 - \frac{4(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}$, $S = 2$.

19.11. $S_n = \frac{4}{3} - \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$, $S = \frac{7}{10}$.

19.12. $S_n = \frac{4n}{4n+1}$, $S = 1$. **19.13.** $S_n = -\ln(2n+1)$, расходится.

19.14. $S_n = -\ln(3n+1)$, расходится.

19.15. $S_n = 10 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $S = 10$.

19.16. $S_n = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$, $S = 3$.

19.17. $S_n = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{5}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$, $S = \frac{11}{4}$.

19.18. $S_n = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $S = \frac{7}{2}$.

19.19. $S_n = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - \frac{5}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$, $S = \frac{1}{4}$.

19.20. $S_n = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - \frac{7}{6} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n\right)$, $S = \frac{1}{3}$.

19.21. Расходится. **19.22.** Расходится. **19.23.** Расходится. **19.24.** Расходится. **19.25.** Расходится. **19.26.** Расходится. **19.27.** Расходится. **19.28.** Расходится. **19.29.** Расходится. **19.30.** Расходится. **19.31.** Расходится. **19.32.** Расходится. **19.33.** Необходимый признак выполнен. **19.34.** Необходимый признак выполнен. **19.35.** Расходится. **19.36.** Расходится. **19.37.** Необходимый признак выполнен. **19.38.** Расходится. **19.39.** Расходится. **19.40.** Необходимый признак выполнен. **19.41.** Расходится. **19.42.** Сходится. **19.43.** Расходится. **19.44.** Расходится. **19.45.** Расходится. **19.46.** Сходится. **19.47.** Сходится. **19.48.** Расходится. **19.49.** Расходится. **19.50.** Сходится. **19.51.** Расходится. **19.52.** Расходится. **19.53.** Сходится. **19.54.** Сходится. **19.55.** Сходится. **19.56.** Сходится. **19.57.** Сходится. **19.58.** Сходится. **19.59.** Сходится. **19.60.** Сходится. **19.61.** Сходится. **19.62.** Расходится. **19.63.** Сходится. **19.64.** Сходится. **19.65.** Сходится. **19.66.** Сходится. **19.67.** Расходится. **19.68.** Сходится. **19.69.** Сходится. **19.70.** Сходится. **19.71.** Расходится. **19.72.** Сходится. **19.73.** Расходится. **19.74.** Сходится. **19.75.** Расходится. **19.76.** Сходится. **19.77.** Сходится. **19.78.** Сходится. **19.79.** Сходится. **19.80.** Сходится. **19.81.** Сходится. **19.82.** Сходится. **19.83.** Сходится. **19.84.** Сходится. **19.85.** Расходится. **19.86.** Расходится. **19.87.** Сходится. **19.88.** Сходится. **19.89.** Расходится. **19.90.** Сходится. **19.91.** Сходится. **19.92.** Расходится. **19.93.** Сходится. **19.94.** Сходится. **19.95.** Сходится. **19.96.** Расходится. **19.97.** Расходится. **19.98.** Сходится. **19.99.** Расходится. **19.100.** Сходится. **19.101.** Сходится. **19.102.** Расходится. **19.103.** Расходится. **19.104.** Сходится. **19.105.** Расходится. **19.106.** Расходится. **19.107.** Расходится. **19.108.** Сходится. **19.109.** Сходится. **19.110.** Сходится. **19.111.** $n = 3$, $S \approx 0,9498$. **19.112.** $n = 2$, $S \approx -0,0662$. **19.113.** $n = 4$, $S \approx 0,4010$. **19.114.** $n = 4$, $S \approx -0,1309$. **19.115.** $n = 4$, $S \approx 0,18127$. **19.116.** Сходится условно. **19.117.** Сходится условно. **19.118.** Сходится условно. **19.119.** Сходится абсолютно. **19.120.** Расходится. **19.121.** Расходится. **19.122.** Сходится условно. **19.123.** Расходится. **19.124.** Сходится абсолютно. **19.125.** Сходится абсолютно. **19.126.** Сходится абсолютно. **19.127.** Расходится. **19.128.** Сходится абсолютно. **19.129.** Сходится абсолютно. **19.130.** Расходится. **19.131.** Расходится.

Глава 20

20.1. $[-1,1)$. **20.2.** $(-1,1)$. **20.3.** $[-1,1)$. **20.4.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

20.5. $[-1,1]$. **20.6.** $[-2,2)$. **20.7.** $(-1,1)$. **20.8.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

20.9. $[-1,1)$. **20.10.** $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. **20.11.** $[-1,1)$. **20.12.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

20.13. $[-2,2)$. **20.14.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. **20.15.** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. **20.16.** $x=0$.

20.17. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. **20.18.** $(-1,1)$. **20.19.** $(-\infty,+\infty)$.

20.20. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. **20.21.** $(-5,5]$. **20.22.** $[-3,3]$. **20.23.** $(-e,e)$.

20.24. $[-1,1]$. **20.25.** $(-1,1]$. **20.26.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$, $(-\infty,+\infty)$.

20.27. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$, $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

20.28. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$, $(-\infty,+\infty)$.

20.29. $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, $(-\infty,+\infty)$.

20.30. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n x^n}{n}$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

20.31. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n}$, $[-1,1]$.

20.32. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n x^n$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

20.33. $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $(-1,1)$.

20.34. $y=1-x-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}x^n$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

20.35. $y=1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}x^n$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

20.36. $y=1+\frac{x}{160}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{4\cdot 9\cdot\ldots\cdot(5n-6)}{160^n n!}x^n$, $(-32,32)$.

20.37. $y=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}$, $(-1,1)$.

20.38. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1 - \frac{1}{2^{n+1}})x^n, \quad (-1, 1).$

20.39. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}})x^n, \quad (-1, 1).$

20.40. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}, \quad (-1, 1).$

20.41. $y = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n} x^{2n+1}, \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$

20.42. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, (-\infty, +\infty).$

20.43. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad (-\infty, +\infty)$

20.44. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.45. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, \quad [-1, 1].$

20.46. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1}, \quad [-1, 1].$

20.47. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2(2n-1)}}{2n-1}, \quad [-1, 1].$

20.48. $y = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{2^n (2n+1) n!}, \quad [-1, 1].$

20.49. $y = x^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) x^{2(2n+1)}}{2^n (2n+1) n!}, \quad [-1, 1].$

20.50. $y = \ln 6 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) \frac{x^n}{n}, \quad [-2, 2].$

20.51. $y = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.52. $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.53. $y = 7 + 11(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3, \quad (-\infty, +\infty).$

20.54. $y = -1 + (x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4, \quad (-\infty, +\infty).$

20.55. $y = e^3 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.56. $y = e^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n(x-1)^n}{n!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.57. $y = \ln 6 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{6^n n}(x-5)^n, \quad (-1, 11].$

20.58. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.59. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (-\infty, +\infty).$

20.60. $y = -\dfrac{1}{6} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{6^n}, \quad (-8, 4).$

20.61. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n, \quad (-2, 0).$

20.62. $y = -\dfrac{1}{5} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)(x+1)^n, \quad (-3, 1).$

20.63. $0,3679.$ **20.64.** $0,4724.$ **20.65.** $0,336.$ **20.66.** $-0,5108.$
20.67. $2,025.$ **20.68.** $1,920.$ **20.69.** $0,3090.$ **20.70.** $0,1974.$
20.71. $0,4115.$ **20.72.** $0,9759.$ **20.73.** $3,1416.$ **20.74.** $2,031.$
20.75. $0,201.$ **20.76.** $0,480.$ **20.77.** $0,072.$ **20.78.** $0,855.$
20.79. $0,3160.$ **20.80.** $0,7635.$ **20.81.** $0,994.$ **20.82.** $0,946.$
20.83. $0,223.$ **20.84.** $0,487.$ **20.85.** $0,120.$ **20.86.** $0,156.$
20.87. $0,103.$ **20.88.** $0,018.$ **20.89.** $0,039.$

20.90. $y = 1 - x + \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots$ **20.91.** $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \ldots$

20.92. $y = -1 + x + 3x^2 + \ldots$ **20.93.** $y = x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \ldots$

20.94. $y = 1 + 2x + \dfrac{7}{2}x^2 + \ldots$ **20.95.** $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + \ldots$

20.96. $y = 2x + x^2 - x^3 + \ldots$ **20.97.** $y = x + x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \ldots$

20.98. $y = 1 + 2x + \dfrac{7}{2}x^2 + \ldots$ **20.99.** $y = 1 + x + x^2 + \ldots$

20.100. $y = 1 - x + x^2 + \ldots$ **20.101.** $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{8}x^4 + \ldots$