высшее образование

Н.С. Уртенов

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

КВ

Серия «Высшее образование»

Н. С. Уртенов

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано уполномоченным учреждением
«Московский педагогический государственный университет»
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по специальности 050708
«Педагогика и методика начального образования»
(Регистрационный № 073 от 13.05.2008 г.)

Ростов-на-Дону
Феникс
2009

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
КТК 11
У72

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор
(КубГУ) *Пуляев В. Ф.*;
доктор педагогических наук, профессор
(ДГПУ) *Везиров Т. Г.*

Уртенов Н. С.
У72 Основные понятия математики: учебное пособие / Н. С. Уртенов. — Ростов н/Д : Феникс, 2009. — 204, [2] с. : ил. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-222-14751-1

Рекомендовано уполномоченным учреждением «Московский педагогический государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений. Регистрационный № 073 от 13.05.08 г. базового учреждения «Московский государственный университет печати».

Пособие адресовано студентам педагогических вузов, обучающимся по специальности 050708 «Педагогика и методика начального образования». Оно полностью охватывает вводную часть программы дисциплины «Математика» Государственного образовательного стандарта по данной специальности. Пособие содержит элементы математической логики, теории множеств, комбинаторики, понятия о соответствиях, отношениях и на теоретико-множественной основе излагается элементарное введение в теорию натуральных чисел. В нем учтены основные принципы организации самостоятельной деятельности студентов. Оно является переизданием учебного пособия автора «Введение в основания математики».

ISBN 978-5-222-14751-1

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Введение

Современный этап развития нашей страны характеризуется возникновением принципиально новой социально-экономической системы и идеологии общества. Идет коренная перестройка в психологии людей, происходит коррекция привычных установок, проявляющихся в повседневной жизни, в работе, в отношениях. В этих условиях приходится смотреть на образование с позиции востребованности в обществе, с позиции его направленности в будущее. По этому поводу известный российский аналитик, педагог и ученый Л. М. Фридман писал: «Школа является одним из основных социальных институтов общества. Ее принципиальное отличие от всех других социальных институтов состоит в том, что если другие обеспечивают настоящую, сегодняшнюю жизнь общества, то школа должна быть нацелена на будущее и служить прогрессу общества. Ведь школа готовит созидателей будущего общества. Это они — нынешние школьники — через 10–15 лет должны обеспечить продвижение нашей страны» [17]. Это высказывание Л. М. Фридмана, адресованное средней общеобразовательной школе, в полной мере применимо к системе профессионального образования страны, так как именно в учреждениях профессионального образования готовятся специалисты, которые должны обеспечить сегодняшний и завтрашний день экономики и социальной сферы нашего общества.

Содержание, объем, квалификационные требования к будущему специалисту с высшим профессиональным образованием регламентируются Государственными образовательными стандартами. Качество его подготовки во многом зависит от обеспеченности учебного процесса учебно-методическими материалами. Учебно-методическое обеспечение специальности — это не только создание учебно-методического комплекса по каждой дисциплине учебного плана, это еще и различные учебные пособия для организации внеаудиторной деятельности студентов, в частности, учебно-методическое сопровождение самостоятельной деятельности обучающихся.

Самостоятельная деятельность студентов не относится к числу аккредитационных показателей вуза, тем не менее, от ее успешной организации во многом зависит качество образования в учебном заведении. Данный вопрос в последние годы приобретает все большую актуальность, обусловленную рядом причин:

- существенным ростом объема учебной информации при прежнем пятилетнем сроке обучения в вузе;
- тенденцией к уменьшению аудиторной нагрузки студентов;
- тенденцией к сокращению часов, выделяемых на изучение дисциплин естественно-научного и математического блоков в Государственных образовательных стандартах, вызванной процессом гуманизации и гуманитаризации Российского образования [7];
- повышением уровня квалификационных требований к выпускникам вузов, предъявляемых Государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования последнего поколения;
- усилением требований к выпускникам вузов со стороны работодателя.

Эффективность организации самостоятельной деятельности студентов, в числе прочих условий, зависит от качества учебно-методических материалов, на основе которых такая работа ведется. При их подготовке необходимо учесть основные тенденции в организации самостоятельной деятельности студентов:

- увеличение ее доли в общем объеме трудоемкости образовательной программы;
- использование новых дидактических приемов и подходов для глубокого самостоятельного освоения учебного материала;
- совершенствование системы текущего контроля работы студентов с учетом роста доли самостоятельной работы;
- совершенствование методики научно-исследовательской работы и практики студентов как основы их подготовки к самостоятельному выполнению профессиональных задач;
- модернизация системы курсового и дипломного проектирования.

Отсутствие такого рода учебно-методических материалов значительно затрудняет процесс обучения. Поэтому реальную помощь студентам, самостоятельно или под руководством преподавателя осваивающим математику, можно оказать путем создания соответствующих учебно-методических пособий. Они существенно облегчат традиционно трудоемкую и достаточно сложную самостоятельную деятельность студентов по математике.

Настоящая работа является попыткой создания учебно-методического пособия по математике, способствующей организации самостоятельной деятельности студентов при изучении основ математики. Оно адресовано будущим учителям начальных классов, обучающимся по специальности 050708 «Педагогика и методика начального образования», и ориентирует студентов на более глубокое самостоятельное усвоение учебно-методического материала по данному разделу математики. Теоретический материал, излагаемый в пособии, согласуется с примерной программой по математике, разработанной авторским коллективом в составе А. С. Добротворского, Л. П. Ковригиной, А. Е. Мерзон, А. Л. Чекиным [4], и сопровождается практическим материалом, учитывающим репродуктивный и продуктивный характер самостоятельной деятельности студентов. Материал в пособии излагается таким образом, что теоретический материал сначала подкрепляется выполнением практических заданий репродуктивного характера, и лишь затем читателю для решения предлагаются задачи с творческим и исследовательским содержанием.

Уровень усвоения всего курса можно определить, выполнив прилагаемый тестовый материал.

При написании данного пособия автор использовал традиционные и вариативные учебники для начальной школы по математике, учебники и учебные пособия Л. П. Стойловой, написанные лично или в соавторстве, материалы учебного пособия автора в соавторстве с Х. Ш. Шихалиевым «Математика», работы А. В. Гусева, А. Г. Мордковича, Л. М. Фридмана. Кроме того, использовались материалы по математической логике из различных работ А. А. Столяра.

1. Законы логики

Слово «*logos*» по-гречески означает мысль, речь, разум. **Логика** — наука или совокупность наук, изучающих законы и формы мышления. Законы логики — суть отражения объективного в субъективном сознании человека [3]. Реальность существует в природе независимо от сознания человека, и эта реальность отражается в нашем сознании, а кто и как воспринимает эту реальность — это уже субъективный фактор, зависящий от способа отражения действительности в нашем сознании.

Обычно под логикой понимают анализ методов рассуждений. При рассмотрении этих методов логика интересуется формой рассуждений, а не содержанием посылок и заключений в них. Логика не интересуется истинностью или ложностью отдельных посылок и заключений. Для нее важно, вытекает ли истинность заключения данного рассуждения из истинности его посылок.

Многие рассуждения совершенно различного конкретного содержания, применяемые в разных областях повседневной жизни, могут иметь одну и ту же структуру, одну и ту же логическую форму.

Рассмотрим рассуждения:

1. Всякое натуральное число можно изобразить на числовой прямой. Число пять — натуральное. Следовательно, число пять можно изобразить на числовой прямой;

2. Любое число вида $2n$, где $n \in N$ — четное. $16 = 2 \cdot 8$, $8 \in N$. Следовательно, 16 есть четное число;

3. Для всех целых чисел выполняется закон коммутативности операции сложения. x и y — целые числа. Следовательно, $x + y = y + x$;

4. Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен.

Столь различные по содержанию высказывания имеют одну и ту же логическую форму: «все A — суть B; C — суть A; следовательно, C — суть B».

В каждом из этих рассуждений правильность вывода заключения из посылок определяется не конкретным содержанием рассуждения, а логической формой, связывающей посылки и заключения, которая одинакова во всех четырех суждениях. Таким образом, **формальная (математическая) логика** изучает формы человеческих рассуждений, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Основоположником формальной логики является древнегреческий философ Аристотель (384–322 гг. до нашей эры). Считается, что он впервые разработал теорию формального логического вывода. Логика Аристотеля дополнялась и совершенствовалась в последующие века, но значительный прогресс получила лишь в XIX веке, когда в логике стали применять математические методы. С тех пор ее стали называть математической. Весомый вклад в математизацию логики внесли немецкий математик Годфрид Лейбниц (1646–1716), английские математики Джордж Буль (1815–1864) и Август де Морган (1806–1878).

Новый этап в истории математической логики связан с именем немецкого логика Готлоба Фреге (1848–1925). Он построил первую в истории науки формальную логико-математическую систему, включающую в себя значительную часть арифметики [15].

По-настоящему символической формальная логика стала в результате применения в ней развитого математического символического языка. Недвусмысленный язык символов, прежде всего, необходим для выявления логической структуры рассуждений, так как обычный, естественный, язык для этого слабо приспособлен. Его отличительной чертой является то, что он следует за логической формой и воспроизводит ее, если это необходимо. В этом состоит особенность языка формальной логики, хотя многие, упрощая ситуацию, в качестве его основного преимущества считают возможность замены отдельными буквами целых слов и словосочетаний.

С развитием математической логики в ней возникали свои специфические задачи, и в результате появились различные виды логик: классическая, комбинаторная, конструктивная, модельная и другие. В качестве основной задачи математической логики считается задача объяснения математической строгости и природы самой математики. В последнем столетии математическая логика оказала существенное влияние на развитие самой математики. Работы К. Генделя, С. Клини, А. Колмогорова, А. Маркова, П. Новикова, Э. Поста, А. Тарского, А. Черча и многих других определили математической логике ведущую роль в математике [10]. Из идей математической логики появилось точное определение понятия алгоритма. Теперь аппарат математической логики находит приложение в конструировании электронно-вычислительной техники и сложных автоматических устройств.

Глубокое и всестороннее учение о развитии базируется на законах и формах правильного мышления, которое изучается многими науками: кибернетикой, логикой, педагогикой, психологией и т. д. При этом каждая из них рассматривает свой специфический аспект данного понятия, формулируя и используя законы, применимые в отдельных областях познания. В математической логике к основным формально-логическим законам можно отнести следующие: тождества, противоречия, исключенного третьего и достаточного основания. Они являются основными в математической логике потому, что играют особо важную роль в определении логических операций, в получении истинных умозаключений, в проведении доказательств и суждений. Заметим, что, кроме этих, математическая логика оперирует и множеством других, важных для различных областей познания законами. Посредством законов формальной математической логики устанавливаются необходимые связи между суждениями, означающими повествовательные предложения, которые являются ложными или истинными: F (*Falsitas* — ложность, *Veritas* — истинность). Такие суждения в математической логике имеют специальное название — высказывания. Таким образом, **высказыванием** называется повествовательное предложение, которое имеет истинное или ложное значение. Не всякое повествовательное предложение является высказыванием. Например, предложение «Дерево высокое» повествовательное, но оно не является высказыванием, поскольку одним людям это дерево может показаться высоким, а другим — низким. В данном случае нельзя однозначно утверждать, что это предложение имеет истинный или ложный смысл, так как он зависит от субъективности отражения в сознании человека некоторой объективной действительности.

В математической логике высказывания обозначаются через заглавные буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д. Кроме этих обозначений, в ходе изложения материала будем пользоваться и другими специальными обозначениями.

Приступим к изложению основных законов логики.

1. Закон тождества гласит: каждая мысль в процессе данного рассуждения сохраняет одно и то же определенное содержание, в какой бы форме она не выражалась. Другими словами, мысль должна быть сохранена, хотя форма выражения мысли может быть изменена. Например, «Ромб с прямым углом — это

квадрат; прямоугольник с равными сторонами — это квадрат». Как первая форма выражения мысли, так и вторая форма имеют одно и то же содержание, хотя они и различны. В первом и во втором предложениях речь идет только о квадрате, а ни о каком другом объекте. Следовательно, эти предложения являются одинаковыми по смыслу. Логика требует раскрытия одинаковой мысли в высказывании, если речь идет об одном и том же объекте в одно и то же время. Слова в предложениях могут быть различными, но содержание высказываний должно быть одинаковыми. Например, «Моя мать — Фатима» и «Женщину, родившую меня, зовут Фатима».

В мышлении нарушение закона тождества проявляется тогда, когда человек выступает не по обсуждаемой теме, когда подменяет один предмет обсуждения другим, употребляет термины и понятия не в том смысле, в каком это принято, не предупреждая об этом [3].

Закон тождества широко используется в исследовательской работе, искусстве, в вопросах программирования, в вопросах школьного обучения, в быту. Так, например, в следственной практике закон тождества применяется для опознания людей, предметов, сличения документов, почерков, отпечатков пальцев.

В разных науках существуют различные виды и модификации понятия «тождество». В математике — равенство, равномощность, равночисленность, конгруентность, тождественная подстановка; в теории алгоритмов — одинаковость символов, равенство алфавитов и т. д.

В формальной логике закон тождества можно записать с помощью следующего равенства: $A \equiv A$. Знак «$\equiv$» указывает на тождественность левой и правой частей.

2. Закон противоречия. Если имеется какое-нибудь высказывание, то его можно изменить так, чтобы образовавшееся высказывание имело противоположный смысл. Для этого достаточно ставить перед данным высказыванием слова «Неверно, что», или же добавить (убрать) частицу «не» перед сказуемым. Например, имеется высказывание: «Город Москва является столицей России». Это истинное высказывание. Оно будет ложным высказыванием, если добавить слова «Неверно, что»: «Неверно, что город Москва является столицей России» или добавить частицу «не» перед сказуемым: «Город Москва не является столицей России». Оба эти высказывания ложные, они отрицают смысл ранее приведенного высказывания «Город Москва является столицей России». Из двух отрицающих друг друга высказываний истинно только одно. Это — суть **закона противоречия,** который гласит, что или истинно данное высказывание, или истинно его отрицание, если речь идет о них в одно и то же время. Некоторые авторы данный закон называют **законом непротиворечия.** Такое название тоже обоснованное, так как закон противоречия отрицает противоречие, говоря о невозможности одновременной истинности высказывания и его отрицания, тем самым создает условие для непротиворечивости суждений.

Закон противоречия устраняет возможность возникновения логических противоречий, которые, как правило, возникают как следствие следующих основных причин: когда считают истинными два не совместимых между собой высказываний. Два высказывания называются **несовместимыми** (противоречивыми), если они не могут быть истинными одновременно. Второе основное условие для создания логического противоречия — одновременное отрицание и утверждение одного и того же высказывания.

Если дано высказывание A, то под его **отрицанием** понимается высказывание, которое ложно, если A истинно, и истинно, если A ложно. Обозначается отрицание высказывания одним из следующих символов: $\rceil A$, или $\overline{A}$, или $\forall$. Обычно

автор сообщает, какой из этих вариантов отрицания он использует. Например, при рассмотрении отношения «параллельность», отрицание его мы будем обозначать символом $\nparallel$. Высказывания A и $\rceil A$ называются **отрицающими** друг друга.

Для высказывания и его отрицания имеет место следующая таблица истинности:

Таблица 1

A — высказывание	Истинно	Ложно
$\rceil A$ — отрицание A	Ложно	Истинно

Если в обычном языке одно и то же содержание можно передавать несколькими речевыми вариантами, то в математической логике одно и то же содержание передается одним и только одним обозначением. Например, в обычном языке отрицание заданного высказывания можно выразить несколькими словесными формами, а в математической логике — только одной формой: если A — высказывание, то его отрицание — $\rceil A$.

В логике можно говорить и об отрицании отрицания некоторого высказывания. Пусть A — истинное высказывание, его отрицание $\rceil A$ — ложное высказывание, а отрицание отрицания $\rceil(\rceil A)$ снова будет истинным высказыванием. Следовательно, имеется связь между A и $\rceil(\rceil A)$. Явный вид данной связи непосредственно вытекает из таблицы истинности для высказываний, которая заполняется на основе закона противоречия:

Таблица 2

A — высказывание	Истинно	Ложно
$\rceil A$ — отрицание A	Ложно	Истинно
$\rceil(\rceil A)$ — отрицание отрицания A	Истинно	Ложно

Из этой таблицы следует, что заданное высказывание A и высказывание, составляющее отрицание его отрицания $\rceil(\rceil A)$, истинны или ложны одновременно, то есть, имеет место равенство

$$A \equiv \rceil(\rceil A). \quad (1.1)$$

Данное равенство носит название **закона двойного отрицания**.

Существуют высказывания, означающие истину вечно, независимо от времени. Например: одна из десятимиллионных частей четверти земного меридиана принята за единичный отрезок длины и называется **метром**. Истинность данного высказывания не зависит времени. Высказывание «Сумма внутренних углов плоского треугольника равна 180°» — это вечная истина, от времени его справедливость также не зависит. С другой стороны, бывают высказывания, истинность которых зависит от времени. Например, «Германия и Россия — враги» — это высказывание, которое в различное время то истинно, то ложно. Поэтому в законе противоречия подчеркивается временной фактор: высказывание и его отрицание рассматриваются в одно и то же время, иначе закон противоречия будет нарушен.

3. **Закон исключенного третьего.** Закон исключенного третьего, как и закон противоречия, устанавливает связь между противоречащими друг другу высказываниями. Два высказывания называются **противоречащими**, если в одном что-либо утверждается о предмете, а в другом то же самое о данном предмете отрицается. Говоря о предмете, под ним мы понимает довольно широкий круг понятий: всевозможные тела, классы объектов, процессы, явления и т. д.

Используя понятие противоречащих высказываний, **закон исключенного третьего** можно сформулировать следующим образом: одно из двух противоречащих высказываний истинное, другое ложное, а третий вариант отсутствует. Другими словами, если имеется высказывание A, то оно или истинно, или

ложно, третий вариант не существует. Например, дано высказывание «Сумма внутренних углов плоского треугольника равна 180°». Оно истинно. Если рассматривать отрицание этого высказывания «Сумма внутренних углов плоского треугольника не равна 180°», то оно ложно. Оба эти высказывания не могут быть одновременно истинными или одновременно ложными, более того — отсутствует третий вариант ответа.

4. Закон достаточного основания гласит: судить об истинности или ложности данного высказывания в одно и то же время можно только тогда, когда для этого имеются достаточные основания, неопровержимые факты. Например, даны числа, которые делятся на 3: 3, 33, 63, 93, 123. Все они оканчиваются цифрой три, что не является достаточным основанием для того, чтобы сделать вывод о том, что все числа, которые оканчиваются цифрой 3, делятся на три. Такой вывод будет ложным, он сделан без достаточных оснований. А вывод в известном нам примере «Сократ — человек, следовательно, он смертен» сделан на достаточном основании: все люди смертны.

В качестве аргументов для подтверждения истинности мысли могут быть использованы истинные суждения, цифровой материал, статистические данные, законы науки, теоремы, аксиомы. Особую доказательную силу имеют аргументы в научных исследованиях и в процессе обучения, когда нельзя принимать на веру недоказанные утверждения.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

1.1. Выявите среди данных предложений высказывания:

Книга толстая. Толщина книги равна 3 см. Человек имеет рост 7 м. $7 + 5$. $7 + 5 < 14$. $7 + 5 < 11$. $15 + 13 < 4$. $15 - 13$. Большой ковер. Ковер большой. Ковер имеет площадь 3 кв. м.

1.2. Составьте пять истинных и пять ложных высказываний, используя выражения: 7; $7 + 5$; $15 - 3$; $17 - 10$; $3 \cdot 5$.

1.3. Составьте 4 истинных и два ложных высказывания на тему «Москва».

1.4. Запишите отрицания высказываний двумя способами:

1) Произведение чисел 5 и 8 равно 40;

2) Средний рост человека считается 1 м 70 см;

3) Масса волка равна 15 тоннам;

4) Число 15 делится на 12 без остатка.

1.5. Составьте 4 высказывания на тему «Огород» так, чтобы все они были ложными, а затем составьте отрицания ранее составленных высказываний.

1.6. Напишите отрицания высказываний:

A, $\urcorner B$, $\urcorner(\urcorner C)$, C, $\urcorner A$, M, $\urcorner(\urcorner M)$.

1.7. Составьте высказывания так, чтобы они были тождественно равными для данных: $40 = 17 + 23$; $6 \cdot 5 = 30$; у четырехугольника диагонали в точке пересечения делятся пополам; у данного многоугольника сумма внутренних углов равна 180°; Руслан окончил среднюю школу.

Образец: 1) $20 = 4 \cdot 5$; $20 = 2 \cdot 10$.

1.8. Сформулируйте четыре основных закона логики и приведите примеры к каждому закону.

1.9. Выберите высказывание и его отрицание:

1) Магомед учится на I курсе; Магомед учится не на первом курсе; Магомед не учится на I курсе; неверно, что Магомед учится на I курсе.

2) Книга не находится на полке; книга находится на полке; книга находится не на полке; неверно, что книга не находится на полке.

3) $7 = 10 - 3$; $7 \neq 10 - 3$; $7 =$ не $(10 - 3)$; $\urcorner(7 = 10 - 3)$; не $7 = 10 - 3$.

1.10. Напишите две формы отрицания для каждого из высказываний: $12 = 20 - 8$; $14 : 2 = 7$; $450 \cdot 2 = 900$

Образец: $10 = 4 + 6$; отрицания:

а) $10 \neq 4 + 6$;

б) $\urcorner(10 = 4 + 6)$.

1.11. Выявите признак делимости числа на 2 двумя способами: без достаточных оснований и с достаточными основаниями. Ответ разъясните конкретными примерами.

1.12. Можно ли написать отрицание для любого высказывания? Могли бы вы привести пример высказывания, для которого отрицание не существует? Ответ разъясните, ссылаясь на законы логики.

1.13. Даны высказывания:

а) четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм;

б) четырехугольник $ABCD$ — квадрат;

в) четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

Есть ли среди них высказывания, отрицающие друг друга?

Продуктивные

1.14. Даны высказывания:

а) четырехугольник с двумя прямыми углами — прямоугольник;

б) параллелограмм с прямым углом — прямоугольник;

в) ромб с равными диагоналями — прямоугольник;

г) четырехугольник, противоположные углы которого равны — прямоугольник.

Являются ли данные высказывания тождественными? Если нет, то измените их содержания так, чтобы все они имели одинаковый смысл.

1.15. Приведите по три примера числового содержания, которые подчиняются и не подчиняются закону достаточного основания.

1.16. Даны высказывания:

а) треугольник *ABC* — равносторонний;

б) треугольник *ABC* — равнобедренный;

в) треугольник *ABC* — прямоугольный;

с) треугольник *ABC* — разносторонний.

Есть ли среди них высказывание и его отрицание? Ответы пояснить на основании определений и законов логики.

1.17. Даны высказывания:

а) четырехугольник с двумя прямыми углами — прямоугольник;

б) параллелограмм с прямым углом — прямоугольник;

в) ромб с равными диагоналями — прямоугольник;

г) четырехугольник с параллельными противоположными сторонами — прямоугольник;

д) четырехугольник, противоположные углы которого равны — прямоугольник.

Подчиняются ли эти высказывания закону тождества? Если нет, то измените содержание некоторых так, чтобы все они имели одинаковый смысл.

1.17. Приведите по три примера высказываний числового характера, которые подчиняются закону достаточного основания и не подчиняются ему.

1.18. Постройте отрицание высказывания «Число 24 делится на 6 или на 9» несколькими способами.

1.19. Постройте двумя способами отрицания высказываний:

а) всякое свойство ромба присуще квадрату;

б) всякое свойство параллелограмма присуще прямоугольнику.

2. Простые и сложные высказывания, операции над ними

Высказывание считается **простым**, если его невозможно разделить на две части так, чтобы каждая из этих частей также была бы высказыванием. Например, «Руслан учится на отлично». Разобьем его на две части (как угодно): 1) Руслан учится; на отлично; 2) Руслан; учится на отлично. В обоих случаях части разбиения одновременно не являются высказываниями: «Руслан» — это не высказывание, «учится на отлично» — также не является высказыванием, а в первом варианте: «Руслан учится» — это высказывание, а «отлично» — не высказывание. Значит, высказывание «Руслан учится на отлично» является простым высказыванием.

Если мы возьмем другое высказывание: «Руслан учится на отлично, и он помогает брату учиться лучше», то его можно разбить на части, которые одновременно также являются высказываниями. Значит, оно не простое, а сложное (составное).

Сложные высказывания образуются из простых с помощью сочинительных союзов и средств связи сложноподчиненного предложения. Очевидно, и сложные высказывания, соединенные между собой с помощью союзов, также будут сложными высказываниями. В качестве основных сочинительных союзов используются «или» и «и», а в качестве средств связи сложноподчиненного предложения — «если…, то…», «если и только если…, то…», «…тогда и только тогда, когда…». В зависимости от того, с помощью какого из этих союзов или средств связи сложноподчиненного предложения образовано данное сложное высказывание, оно имеет определенный смысл и специальное название: дизъюнкция, конъюнкция, импликация и эквиваленция.

1. Дизъюнкцией высказываний называется сложное высказывание, если оно образовано из двух или нескольких высказываний с помощью союза «или». Дизъюнкция считается ложной тогда и только тогда, когда являются одновременно ложными все высказывания, входящие в нее. Союз «или» в математической логике имеет обозначение: «$\vee$». Например, $40 : 8 = 5$ или $15 : 3 = 5$ — это сложное высказывание вида дизъюнкции $40 : 8 = 5 \vee 15 : 3 = 5$, причем, оно истинное. Также истинной будет дизъюнкция $40 : 8 = 5$ или $15 : 3 \neq 5$ ($40 : 8 = 5 \vee 15: 3 \neq 5$), так как в ней содержится истинное высказывание. А сложное высказывание $40 : 8 \neq 5$ или $15 : 3 \neq 5$ ($40 : 8 \neq 5 \vee 15 : 3 \neq 5$) принимает ложное значение ввиду того, что оба высказывания, участвующие в его составлении, ложны. Дизъюнкция двух высказываний A и B обозначается следующим образом: $A \vee B$.

Из определения дизъюнкции высказываний вытекает следующая таблица истинности для дизъюнкции двух высказываний A и B **(**$A \vee B$**):**

Таблица 3

Высказывания		Дизъюнкция
A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

В ней показано, что дизъюнкция двух высказываний ложна только в одном случае, когда ложны оба входящие в нее высказывания, во всех остальных случаях она истинна.

Дизъюнкция высказываний обладает свойствами *ассоциативности и коммутативности*:

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \tag{2.1}$$

$$(A \vee B) \equiv (B \vee A) \tag{2.2}$$

Доказательство соотношений (2.1) и (2.2) легко проводится путем составления таблиц истинности.

2. Конъюнкцией высказываний называется сложное высказывание, образованное из двух или нескольких высказываний с помощью союза «и». Она является ложной, если в ней содержится хотя бы одно ложное высказывание. Например, высказывание «Москва — столица России, и Санкт-Петербург находится на берегу реки Волга» — является ложным, поскольку в нем одно высказывание ложное. Высказывание $40 : 8 = 5$ и $15 : 3 \neq 5$ — ложное, а $40 : 8 = 5$ и $15 : 3 = 5$ — истинное. Конъюнкции двух высказываний A и B в математической логике имеет следующее обозначение: $A \wedge B$.

Таблица истинности конъюнкции $A \wedge B$ двух высказываний A и B, составленная на основе определения, имеет следующий вид:

Таблица 4

Высказывания		Конъюнкция
A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Из нее следует, что конъюнкция истинна только в одном случае, когда оба высказывания, входящие в нее, истинны, а во всех остальных случаях она ложна.

Конъюнкция высказываний, как и дизъюнкция, также обладает свойствами *ассоциативности* и *коммутативности*, т. е. верны соотношения:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \tag{2.3}$$

$$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A) \tag{2.4}$$

Доказательство соотношений (2.3) и (2.4) легко проводится путем составления таблиц истинности.

Кроме свойств (2.1) – (2.4), характеризующих каждую из операций дизъюнкции и конъюнкции отдельно, для этих операций справедливы соотношения, связывающие их между собой и отрицанием высказываний:

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \wedge C), \tag{2.5}$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C), \tag{2.6}$$

$$\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B, \tag{2.7}$$

$$\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.5) и (2.6) называются дистрибутивным законом дизъюнкции относительно конъюнкции и конъюнкции относительно дизъюнкции. А соотношения (2.7) и (2.8) законами де Моргана.

Доказательство этих законов нетрудно провести с помощью таблиц истинности. В качестве примера покажем доказательство соотношения (2.8).

Значения истинности в последних двух столбцах таблицы 5 совпадают, следовательно, высказывания $\rceil(A \vee B)$ и $\rceil A \wedge \rceil B$ тождественно равные, что и доказывает справедливость соотношения (2.8).

Таблица 5

A	B	$\rceil A$	$\rceil B$	$A \vee B$	$\rceil(A \vee B)$	$\rceil A \wedge \rceil B$
И	И	Л	Л	И	Л	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	И	И

3. Импликацией высказываний называется сложное высказывание, которое образовано с помощью средства связи сложноподчиненного предложения союза «если…, то…». Импликация считается ложной тогда и только тогда, когда первое высказывание истинно, а второе ложно. Во всех остальных случаях она принимает истинное значение. Например, «Если Магомед учится в первом классе, то его возраст 100 лет». Данное высказывание будет ложным, если его первая часть «Магомед учится в первом классе» — истинная. Импликация «Если сорок, деленное на восемь, равняется пяти, то сорок, деленное на пять, равняется восьми» — истинное высказывание, а импликация «Если сорок, деленное на восемь, равняется пяти, то сорок, деленное на шесть, равняется семи» — ложное. Импликация двух высказываний A и B обозначается следующим образом: $A \Rightarrow B$. При этом первое высказывание A называется условием (посылкой), а второе высказывание B — заключением (следствием).

Импликация «Если A, то B» имеет многочисленные синонимы: из A следует B, A влечет B, A — достаточное условие для B, B имеет место при условии, что A имеет место и т. д. Независимо от вида формулировки, высказывание о следовании B из A характеризуется двумя условиями:

1. Оно ложно в том и только в том случае, когда A истинно, а B ложно;

2. A и B связаны по содержанию, по смыслу.

Так как в формальной логике мы отвлекаемся от содержания, от смысловой взаимосвязи высказывания, то второе условие не играет роли в определении импликации, и поэтому оно имеет приведенный выше вид.

Таблица истинности импликации $A \Rightarrow B$ двух высказываний A и B, составленная на основе определения, имеет следующий вид:

Таблица 6

Высказывания		Импликация
A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Из нее видно, что импликация двух высказываний принимает ложное значение только в одном случае, когда первое участвующее в данной импликации высказывание истинное, а второе ложное.

4. Эквиваленцией высказываний называется сложное высказывание, образованное из двух высказываний с помощью средства связи сложноподчиненного предложения «если и только если…, то…». Эквиваленция двух высказываний считается истинным высказыванием, если оба высказывания, из которых образованна эквиваленция, истинны или оба ложны. При этом, по аналогии с импликацией, первое участвующее в эквиваленции высказывание называется условием, а второе заключением. Приведем примеры:

1) «Если и только если Магомед учится на первом курсе, то его возраст составляет 70 лет» — это ложное высказывание.

2) «Если и только если возраст Руслана составляет 70 лет, то он является студентом» — тоже ложное высказывание.

3) «Если и только если возраст Руслана составляет 700 лет, то он проживает на Солнце» — это истинное высказывание (и условие, и заключение одновременно ложны).

4) «Если и только если сумма цифр числа делится на 3, то и это число делится на 3» — истинно (и условие, и заключение истины).

Часто вместо средства связи сложноподчиненного предложения «если и только если…, то…» употребляют другие средства связи сложноподчиненного предложения: «…тогда и только тогда, когда…» или «…те и только те, которые…». Во всех случаях смысл эквиваленции не меняется.

Если эквиваленция является истинным высказыванием, то условие и заключение могут быть тождественно равными высказываниями. Например, «Число делится на 3» и «Сумма цифр числа делится на 3» — эти высказывания эквивалентны, они тождественно равны, их смысл один и тот же. Эквиваленция двух высказываний A и B обозначается следующим образом: $A \Leftrightarrow B$.

Истинность сложного высказывания $A \Leftrightarrow B$ обычно устанавливается определением истинности двух импликаций: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$. То есть, эквиваленция $A \Leftrightarrow B$ равносильна конъюнкции $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$. Например, справедливость теоремы «Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам» устанавливается доказательством следующих взаимно обратных теорем:

1. Если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали в точке пересечения делятся пополам;

2. Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Таблица истинности эквиваленции $A \Leftrightarrow B$ двух высказываний A и B, составленная на основе определения, имеет следующий вид:

Таблица 7

Высказывания		Эквиваленция
A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Из таблицы 7 видно, что эквиваленция двух высказываний истинна тогда и только тогда, когда одновременно истинны или ложны оба высказывания. В других случаях эквиваленция двух высказываний принимает ложное значение.

5. Формулы и взаимосвязь основных логических законов. Основные логические законы в математической логике обозначаются специальными соотношениями, истинными при любых значениях входящих в них высказываний. Так для закона тождества такое соотношение записывается в виде равенства: $A \equiv A$.

Введенные в этом параграфе понятия дизъюнкции и конъюнкции высказываний позволяют выразить законы противоречия и исключенного третьего в виде формул: $\rceil(A \wedge \rceil A)$ — закон противоречия, $A \vee \rceil A$ — исключенного третьего. В формальной логике высказывания, выражающие эти законы, принимают исключительно истинные значения при любых значениях высказывания A.

В математической логике формулы для выражения законов противоречия и исключенного третьего связаны между собой соотношением:

$$\rceil(A \wedge \rceil A) \equiv A \vee \rceil A. \qquad (2.9)$$

Действительно, по первому закону де Моргана (2.7), имеем: $\rceil(A \wedge \rceil A) \equiv \rceil A \rceil \vee (\rceil A)$. Далее, используя тождество для двойного отрицания (1.1), получим: $\rceil A \vee \rceil(\rceil A) \equiv \rceil A \vee A$. И наконец, используя свойство перестановочности дизъюнкции двух высказываний (2.2) приходим к тождеству $\rceil A \vee A \equiv A \vee \rceil A$. Таким образом, окончательно получим соотношение (2.9): $\rceil(A \wedge \rceil A) \equiv A \vee \rceil A$. Проведенные рассуждения можно провести и в обратном порядке, тогда из правой части соотношения (2.9) мы получим левую.

Равенство (2.9) имеет место только в математической (формализованной) логике. Если законы противоречия и исключенного третьего рассматривать в содержательном смысле, то они друг из друга не выводятся, т. е. соотношение (2.9) не имеет места. Например, если рассматривать два противоречащих высказывания: «Все грибы съедобны» и «Ни один гриб не является съедобным», то здесь действует закон противоречия, но не действует закон исключенного третьего. В действительности, если рассматривать эти высказывания в содержательном смысле, истинным не будет ни один из этих двух противоречащих высказываний, а будет третий вариант — «Часть грибов съедобна, а часть — нет».

Для закона достаточного основания в математической логике запись в виде формулы отсутствует, так как он носит исключительно содержательный характер.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

2.1. Для следующих двух высказываний составьте дизъюнкцию и конъюнкцию: 18 делится на 3; 18 делится на 6.

2.2. Известно, что высказывание A истинно. Что можно сказать о высказываниях: $A \wedge B$ и $A \vee B$?

2.3. Известно, что высказывание A ложно. Что можно сказать о высказываниях: $A \wedge B$ и $A \vee B$?

2.4. Составьте пять высказываний вида импликации и эквиваленции на тему «Стадион» так, чтобы по 3 из них были истинными, а два — ложными.

2.5. Из каждой пары высказываний с помощью сочинительных союзов «или», «и» и средств связи сложноподчиненного предложения «если..., то...», «...если и только если, то...» составьте сложные высказывания и определите их истинность:

1. Земной экватор имеет длину 40076 км; Москва — столица России.

2. Длина русла реки Днепр равна 3300 км; город Ростов-на-Дону расположен на берегу реки Дон.

3.18 = 40 – 22; 40 = 30 + 30.

4. $(AB) \parallel (CD)$; $(AB) \perp (MP)$.

2.6. Прочтите высказывания и определите их истинность:
$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$; $18 : 2 \Rightarrow 100 + 30 = -50$;
$40 + 2 = 60 \Rightarrow 50 + 50 = 100$; $40 + 2 < 70 \Leftrightarrow 30 + 2 < 60$;
$40 + 2 < 70 \vee 18 + 2 = 20$; $50 \cdot 2 = 100 \wedge 18 \cdot 2 = 36$.

2.7. Заполните таблицу истинности дизъюнкции двух высказываний A и B, сделайте вывод о значениях ложности выражения $A \vee B$:

Таблица 8

A	B	$A \vee B$
И		
И		
Л		
Л		

2.8. Заполните таблицу истинности конъюнкции двух высказываний A и B, сделайте вывод о значениях истинности выражения $A \wedge B$:

Таблица 9

A	B	$A \wedge B$
И		
И		
Л		
Л		

2.9. Заполните таблицу для импликации двух высказываний и сделайте вывод об истинности выражения $A \Rightarrow B$:

Таблица 10

A	B	$A \Rightarrow B$
И		
Л		
И		
Л		

2.10. Заполните таблицу для эквиваленции двух высказываний и сделайте вывод о ложных значениях выражения $A \Leftrightarrow B$:

Таблица 11

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И		
Л		
И		
Л		

Продуктивные

2.11. Ответьте, можно ли союз «и» в сложном высказывании заменить другими союзами, например, на «а», «но», «однако» и т. д.? Если да, то сделайте это для сложного высказывания: «18 делится на 3 и на 8».

2.12. Для конъюнкции и дизъюнкции трех высказываний составьте таблицы истинности.

2.13. Что можно сказать об импликации трех и более высказываний?

2.14. Что можно сказать об эквиваленции трех и более высказываний?

2.15. Составьте отрицание для каждого высказывания из следующих пар высказываний и значения истинности импликаций, *составленных из отрицаний высказываний:*

а) сорока меньше коршуна; голубь больше чижа;

б) $49 + 1 = 50 \vee 45 + 5 = 50$;

в) $100 < 115 \wedge 80 > 42$.

2.16. Составить таблицу истинности для высказывания: $\rceil(A \wedge B)$.

2.17. Используя таблицы истинности, доказать законы Моргана:

1) $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$;

2) $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$.

2.18. Доказать дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции: $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \wedge C)$.

2.19. Доказать дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции: $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

2.20. Доказать, что следующие эквиваленции истинны при любых значениях A и B:

а) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$; б) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

2.21. Доказать, что для любого высказывания X выполняются соотношения:

а) $X \vee \rceil X$ — истинно;

б) $X \wedge \rceil X$ — ложно.

2.22. Доказать, что следующая эквиваленция истинна при любых значениях A и B: $\rceil(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \rceil B)$.

2.23. Определить значение сложного высказывания $((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$, если известно, что A имеет ложное значение, а B и C истинны.

2.24. Определить значение сложного высказывания $((X \vee Y) \wedge Z) \Leftrightarrow ((X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z))$, если известно, что высказывание X имеет истинное значение, а высказывания Y и Z — ложные значения.

3. Причинно-следственные высказывания

Как отмечалось в предыдущем параграфе, высказывания вида импликации или эквиваленции состоят из условия и заключения. Например, в предложении «Если в прямоугольном треугольнике один угол равен 30°, то катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы» высказывание «в прямоугольном треугольнике один угол равен 30°» является условием, а высказывание «катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы» есть заключение. Эти названия структурных компонентов импликации и эквиваленции сохраняются и в общем случае: например, для импликации $A \Rightarrow B$ предложение A считается условием, предложение B — заключением.

Среди высказываний вида импликации или эквиваленции имеются такие, у которых истинность условия становится причиной для истинности заключения. Поэтому такие высказывания носят название причинно-следственных высказываний. Например, в предложении «Если недавно прошел дождь, то на улице должно быть влажно»: «прошел дождь» — причина того, что «на улице влажно». В предложении «Если геометрическая фигура треугольник, то сумма внутренних углов равна 180°», «геометрическая фигура» — причина, а «сумма внутренних углов равна 180°» — следствие.

Так как причинно-следственные высказывания, как правило, представляют собой высказывания вида импликации или эквиваленции, то их истинность или ложность устанавливается по законам, присущими импликации или эквиваленции. Рассмотрим пример: «Если число делится на 2, то это число делится и на 4». Это высказывание ложное, так как при истинном условии заключение не всегда истинно: например, число 6 на 2 делится, но это же число 6 на 4 не делится, т. е. из истинности условия не вытекает истинность заключения, поэтому само высказывание — ложно.

Истинность многих причинно-следственных высказываний выясняется рассуждениями с опорой на ранее известные истины. Установление истинности того или иного высказывания путем рассуждения с опорой на ранее известные истины, называется **доказательством**. Те причинно-следственные высказывания, истинность которых доказывается рассуждениями, называются **теоремами**. Обозначения математической логики позволяют теоремы записать в виде следующих высказываний: $A \Rightarrow B$ и $A \Leftrightarrow B$.

При построении той или иной математической теории используются высказывания, истинность которых известна (или принята) без доказательства. Они называются **аксиомами**.

Среди математических предложений встречаются и такие, у которых истинность пока не установлена и не найден ход доказательства. Такие высказывания считаются **гипотезами**. Впоследствии многие гипотезы становятся теоремами после их доказательства или же опровергаются.

Итак, мы имеем такие разновидности высказываний:

- **аксиома** — высказывание, истинность которого принята без доказательства или очевидна из практики;
- **теорема** — истинное причинно-следственное высказывание, истинность которого доказывается;

- **лемма** — вспомогательная теорема. Теорема, которая используется для доказательства другой, более сложной теоремы;
- **гипотеза** — высказывание, истинность или ложность которого необходимо доказать.

Причинно-следственное высказывание, как уже отмечалось, обязательно состоит из условия и заключения, которые между собой взаимосвязаны.

Условие — это причина, а заключение — это следствие, которое вытекает из условия. При этом условие может быть:

1) необходимым для следствия;

2) достаточным для следствия;

3) необходимым и достаточным для следствия.

1. Виды условий. Условие считается **необходимым** (обязательным), если без этого условия не может быть выполнено заключение. Например, «Если у четырехугольника угол прямой, то он прямоугольник». Данное условие является обязательным (необходимым), так как без прямого угла четырехугольник не может быть прямоугольником.

Условие считается **достаточным**, если из него непременно вытекает данное заключение. Например: «Если на плоскости угол между двумя прямыми равен 40°, то эти прямые пересекаются в одной точке». В данном случае из условия непременно вытекает это заключение.

Итак, условие считается: 1) необходимым, если без него данное заключение не может иметь место; 2) достаточным, если из него непременно следует данное заключение.

Рассмотрим примеры.

1. Если какое-нибудь число делится на 3, то это число делится и на 9.

Для данного примера выясним необходимость и достаточность условия.

а) Для того чтобы определить, является ли данное условие **необходимым**, нужно рассмотреть его отрицание: если число не делится на 3, то такое число никогда не разделится на 9. Следовательно, условие является необходимым для того, чтобы число делилось на 9.

б) Проверим, является ли данное условие **достаточным**? Подберем числа, которые делятся на 3: 12, 15, 18, 21, 24, 27 и т. д. Не все эти числа делятся на 9.

Делаем вывод: из условия «число делится на три» непременно не вытекает заключение, так как не все числа, делящиеся на 3, делятся и на 9. Следовательно, условие не является достаточным.

2. Если десятичная запись числа заканчивается цифрами: 0, 2, 4, 6, 8, то это число делится на 2.

Выясним а) **необходимость:** пусть последняя цифра в записи числа не оканчивается цифрами: 0, 2, 4, 6, 8, т. е. оканчивается цифрами 1, 3, 5, 7, 9. Не одно такое число не делится на 2. Следовательно, условие: «Десятичная запись числа заканчивается цифрами: 0, 2, 4, 6, 8» является необходимым для делимости числа на 2; б) **достаточность:** из условия «Десятичная запись числа заканчивается цифрами: 0, 2, 4, 6, 8» непременно вытекает делимость данного числа на 2. Действительно, в десятичной записи числа: $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ (3.1) все слагаемые, за исключением последнего, делятся на 2, так как в них в качестве сомножителя присутствует степень 10. Следовательно, делимость числа (3.1) на 2 зависит от цифры a_0. Поэтому, число, заканчивающееся цифрами 0, 2, 4, 6, 8 всегда будет делиться на 2. Таким образом, этот пример показывает, что условие является как необходимым, так и достаточным для заключения. В таких случаях говорят, что данное условие является «**необходимым и достаточным**». Если условие является и необходимым, и достаточным, то заключение, в свою очередь, становится и необходимым, и достаточным для условия, то есть между условием и заключением возникает связь **«взаимного следования»**. Если для условия A и заключения B некоторого высказывания выполняются соотношения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то имеет место эквиваленция $A \Leftrightarrow B$.

Достаточность условия передается словами «следует, вытекает» и знаком «$\Rightarrow$», а «необходимость и достаточность» передается знаком взаимного следования «$\Leftrightarrow$». Например, в высказывании $(AB) \perp (CD) = 40° \Rightarrow (AB) \perp (CD)$ условие является достаточным для неперпендикулярности прямых, а в высказывании $(AB) \perp (CD) = 90° \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$ условие является и достаточным, и необходимым для перпендикулярности прямых (по определению).

2. Виды теорем. Любая теорема может быть сформулирована в виде: если выполняется условие A, то верно заключение B. Построенная таким образом теорема называется **прямой** и посредством математической символики записывается в виде: $A \Rightarrow B$. В качестве примера приведем следующую теорему: «Если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, то катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы». Условие теоремы A — «если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°», а утверждение теоремы B — «то катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы».

С каждой теоремой можно связать несколько других теорем. Если в теореме переставить условие и заключение местами, то получится другая теорема, которая называется **обратной к данной.** Например, имея теорему «Если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, то катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы» можно составить другую теорему, переставляя местами ее условие и заключение: «Если катет в прямоугольном треугольнике равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°». Математическими символами, теорема, обратная к данной, записывается в виде: $B \Rightarrow A$.

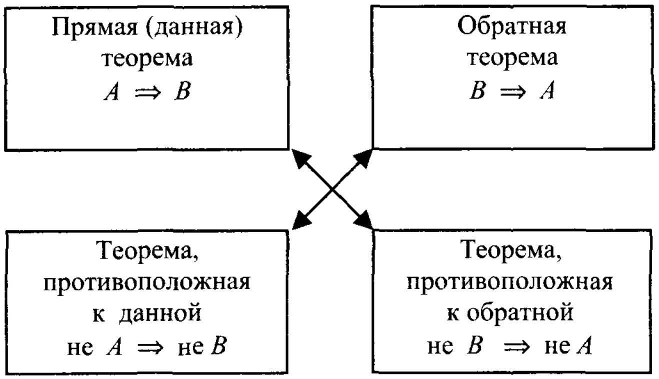
Отрицая условие и заключение прямой теоремы, можно получить другие, связанные с ней теоремы. Например, дана теорема: «Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3». Будем отрицать и условие, и заключение: «Если сумма цифр числа не делится на 3, то это число не разделится на 3». Полученная таким образом теорема называется **противоположной к прямой**. Ее схематическое обозначение в символике формальной логики имеет вид: $\neg A \Rightarrow \neg B$. Известно, что, если ложна противоположная теорема, то обязательно истинна прямая теорема.

Отрицая условие и заключение обратной теоремы, можно получить теорему, **противоположную к обратной**. Для теоремы «Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3» обратная теорема имеет вид: «Если число делится на 3, то сумма цифр этого числа делится на 3», а теорема, противоположная к обратной, записывается так: «Если число не делится на 3, то и сумма цифр, участвующих в записи этого числа, не делится на 3». Символически форма записи теоремы, противоположной к обратной, имеет вид: $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Между прямой теоремой ($A \Rightarrow B$) и теоремой, противоположной к обратной ($\neg B \Rightarrow \neg A$), всегда имеется взаимная связь: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ (если истинна данная теорема, то истинна и теорема, противоположная к обратной, и наоборот). Доказательство этого факта можно найти в учебном пособии [4]. Аналогичная связь существует между обратной и противоположной к прямой теоремами: $B \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow \neg B$ (если истинна теорема, обратная к прямой, то истинна и теорема, противоположная к прямой, и наоборот).

Схематично взаимосвязь теорем можно изобразить в следующем виде:

Схема 1



Такое изображение взаимосвязи теорем носит название *логического квадрата* [5].

Эти связи в практике научного исследования широко используются. Так, например, довольно часто, доказав справедливость теоремы, противоположной к обратной, судят об истинности прямой теоремы.

Говоря о доказательствах теорем или других математических утверждений, отметим, что это — логические рассуждения, в процессе которых истинность какой-либо мысли устанавливается посредством других положений. Математическое доказательство отличается от доказательств в других областях науки тем, что оно проводится по возможности исключительно *дедуктивным способом*, что означает выведение новой доказываемой мысли из ранее доказанных или используемой в данной теории системы аксиом. Если в других науках и в быту для доказательства можно прибегать к эксперименту, к жизненному опыту, к непосредственному словесному описанию некоторого явления или процесса, то в математике это недопустимо. Стро-

гое математическое доказательство представляет собой цепочку логических следствий из условия теоремы и ранее доказанных теорем до требуемого заключения теоремы.

Довольно часто для доказательства математических утверждений используется способ рассуждения, получивший название **метод доказательства от противного.** Суть данного метода в следующем. Чтобы доказать истинность теоремы $A \Rightarrow B$ допускают, что ее заключение B ложно. Тогда $\rceil B$ истинно. Присоединив его к истинным посылкам, в том числе и к условию A, строим цепочку умозаключений до тех пор, пока не возникнет противоречие с ранее известными истинами (аксиомами, теоремами и т. д.). Чаще всего противоречие возникает с самим условием A. Как только это противоречие возникло, процесс строительства цепочки умозаключений прерывается. Это означает, что наше допущение $\rceil B$ истинно — не верно. (В этом можно легко убедиться, рассуждая в обратной последовательности с того места, где возникло противоречие между «допущением» и исходными данными). Таким образом, получаем, что заключение B теоремы $A \Rightarrow B$ — истинное высказывание, и, следовательно, теорема $A \Rightarrow B$ верна.

В качестве примера использования метода доказательства от противного приведем доказательство теоремы о среднем арифметическом и геометрическом двух положительных чисел [18]: *среднее арифметическое двух положительных чисел больше или равно среднему геометрическому этих чисел.*

Доказательство. Эту теорему можно записать так:

$$(a + в)\,/2 \geq (aв)^{1/2},\ \text{где } a > 0,\ в > 0. \qquad (3.2)$$

Для доказательства данного факта посредством метода от противного допускается, что неравенство (3.2) не выполняется, т. е. среднее арифметическое двух положительных чисел меньше их среднего геометрического:

$$(a + в)/2 < (aв)^{1/2}. \qquad (3.3)$$

Умножив обе части неравенства (3.3) на 2 и возведя их в квадрат, получим:

$a^2 + 2ав + в^2 < 4ав$ или тоже самое $a^2 - 2ав + в^2 < 0$.

По формуле квадрата разности двух чисел получаем: $(a - в)^2 < 0$. Это неравенство не выполняется ни для каких a и $в$, так как квадрат числа $(a - в)$ не может быть отрицательным. Следовательно, допущение об истинности неравенства (3.3) не обосновано, а, значит, справедливо неравенство (3.2).

В заключение отметим, что если в результате рассуждений не возникает противоречие, то это еще не означает, что предположение верно: может случиться, что исходная теорема как раз неверна. На этом построены многие *софизмы* (умышленно ложно построенные умозаключения), и этим объясняются многие ошибки, допускаемые при решении задач.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

3.1. Даны причина и следствие. Составьте из них одно сложное высказывание, используя средство связи сложноподчиненного предложения «если…, то…»:

1) имеются две точки; имеется прямая;
2) имеется прямоугольник; имеется четырехугольник;
3) угол между прямыми равен 30°; эти прямые непараллельны;
4) число оканчивается цифрой 5; это число делится на 5;
5) имеется квадрат; имеется прямоугольник.

3.2. Выпишите только истинные высказывания:

1) если число оканчивается цифрой 5, то это число делится на 5;
2) если число делится на 5, то это число делится и на 10;
3) если прямые пересекаются, то эти прямые перпендикулярны;
4) если угол между двумя прямыми равен 90°, то эти прямые перпендикулярны;
5) если даны два вертикальных угла, то эти углы равны;
6) если два угла равны, то они являются вертикальными;
7) если имеется квадрат, то имеется прямоугольник;
8) если имеется четырехугольник, то имеется прямоугольник.

3.3. Составьте два истинных и одно ложное высказывания причинно-следственного характера.

3.4. Имеются утверждения:

1) дан квадрат;
2) число делится на 10;
3) $(AB) \parallel (CD)$.

Назовите следствия, вытекающие из них.

Образец. Причина: дан квадрат. Следствия: все стороны равны; диагонали в точке пересечения делятся пополам; диагональю этот четырехугольник делится на две равные части (треугольники).

3.5. Из каких условий могут вытекать следующие заключения (следствия):

1) число делится на 2;
2) число делится на 3;
3) число делится и на 2, и на 3;
4) *прямые параллельны;*
5) длина окружности равна 18,84 см;
6) расстояние от точки A до точки B равно 4 см?

3.6. Составьте пары предложений так, чтобы первое предложение было причиной порождения второго предложения, а затем составьте причинно-следственные высказывания.

3.7. Назовите хотя бы две причины для каждого из следствий:

1) учащийся переехал в другой район; 2) ученица не знает английского языка; 3) $3 \cdot x - 2 = 0$; 4) $(AB) \perp (CL)$.

Образец. Следствие: $5 \cdot x + 3 = 8$. Причина: $x = 1$.

3.8. Назовите следствие, вытекающее из причины:

1) $3 \cdot x - 6 = 0$;

2) в комнате не горит лампочка;

3) $(AB) \parallel (CD)$; 4) данное число простое;

5) у четырехугольника все углы прямые.

3.9. Приведите примеры причин, имеющие несколько следствий.

3.10. Напишите два предложения так, чтобы одно из них было следствием, а другое — причиной. Составьте три пары таких предложений.

3.11. Назовите следствия, вытекающие из следующих причин:

1) имеются вертикальные углы;

2) имеются смежные углы;

3) дана сумма длин двух сторон треугольника;

4) дана разность длин двух сторон треугольника;

5) число делится на 5;

6) число оканчивается четной цифрой;

7) сумма цифр числа делится на 3;

8) две прямые пересекаются;

9) даны две точки;

10) два треугольника равны;

11) два треугольника совпали при наложении друг на друга;

12) $(AB) \parallel (CD)$ и $(CD) \parallel (KE)$; 13) $7 < 10$ и $10 < 12$.

3.12. Какие из следующих высказываний являются аксиомами, а какие — теоремами:

1) через две точки проходит только одна прямая;

2) через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой;

3) длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон;

4) если число оканчивается четной цифрой, то это число делится на 2;

5) если даны три точки, не лежащие на одной прямой, то расстояние между двумя точками всегда меньше суммы расстояния между остальными точками;

6) если провести в квадрате две его диагонали, то он разделится на 4 равных треугольника;

7) если провести диагональ в прямоугольнике, то он разделится ею на два равных треугольника?

3.13. Может ли условие теоремы быть только необходимым? Только достаточным? Приведите примеры.

3.14. Проверьте, является ли условие необходимым или достаточным в следующей теореме: «Если два угла равны между собой, то они являются вертикальными».

3.15. Выпишите предложения, где условия являются а) необходимыми; б) достаточными; в) необходимыми и достаточными:

1) если число a делится на 40, то оно делится и на 4;

2) если две прямые имеют только одну общую точку, то они взаимно перпендикулярны;

3) если число a делится на 5, то оно делится и на 10;

4) если $(AB) \wedge (CD) = 40°$, то они пересекаются в точке K;

5) если имеется мука, то можно приготовить пищу;

6) если поехать в Москву, то можно посетить Кремль;

7) если $x - 3 = 0$, то $x = 3$;

8) если число a делится на 2 и на 5 одновременно, то это число делится и на 10;

9) если $(AB) \nparallel (CD)$, то они имеют одну общую точку;

10) если имеется прямоугольник, то это и есть четырехугольник;

11) если $(AB) \nparallel (CD)$, то эти прямые не имеют общих точек;

12) если $x = -2$, то $x + 2 = 0$.

3.16. Правильно ли употреблены слова «необходимо» и «достаточно» в предложениях:

1) чтобы провести прямую, необходимо и достаточно иметь две точки;

2) чтобы четырехугольник был прямоугольником, достаточно, чтобы этот четырехугольник имел один прямой угол;

3) чтобы $x = 5$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство: $7x - 35 = 0$;

4) чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы этот четырехугольник имел четыре прямых угла;

5) чтобы число a делилось на 14, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 4, и на 7?

3.17. Приведите четыре сложных высказывания, составленных с помощью подчинительного союза «если..., то...» так, чтобы в двух из них условие было необходимым, а в двух других — достаточным.

3.18. Приведите три сложных высказывания причинно-следственного характера, где условие было бы и необходимым, и достаточным.

3.19. Приведите три сложных высказывания причинно-следственного характера так, чтобы они были ложными. Выясните характер условия в таких высказываниях (достаточность или необходимость).

3.20. Составьте предложения, правильно употребляя слова:

а) достаточно;

б) необходимо;

в) необходимо и достаточно.

3.21. Прочтите предложения и назовите в каждом из них условие и заключение;

1) $(AB) \perp (CD) \Rightarrow (AB) \nparallel (CD)$;

2) $\dot{M} \in \Rightarrow |AM| + |MB| = |AB|$;

3) $(AB) \perp (CD) = 10° \Rightarrow (AB) \nparallel (CD)$;

4) $(AB) \perp (CD) = 40° \Rightarrow (AB) \nparallel (CD)$.

Выражением $\dot{M}$ означается точка M.

3.22. Высказывание, составленное с помощью подчинительного союза «если..., то...» ложно. Может ли быть его условие только достаточным? А только необходимым? Приведите примеры.

3.23. Напишите все виды теорем на основании следующей теоремы: «Если дан треугольник, то длина любой его стороны больше разности длин двух других его сторон». Проверьте, истинна ли обратная к ней теорема.

3.24. Что необходимо и достаточно знать для того, чтобы утверждать, что две прямые параллельны?

3.25. Приведите примеры теорем так, чтобы в одной из них условие было достаточным, в другой — и необходимым, и достаточным.

3.26. Выясните, является ли условие теоремы необходимым или достаточным:

а) если число делится на 15, то это число делится на 5;

б) если число делится на 15, то это число делится на 30;

в) если имеется четырехугольник, то эта фигура является прямоугольником;

г) если имеется квадрат, то эта фигура — прямоугольник;

д) если имеется треугольник, то сумма длин любых двух его сторон больше третьей стороны;

е) если даны три числа и разность любых двух из них меньше третьего, то эти числа являются длинами сторон треугольника.

3.27. Что необходимо и достаточно для того, чтобы построить треугольник? Окружность? Отрезок?

3.28. Высказывание, составленное с помощью подчинительного союза «если..., то...» истинно. Может ли быть его условие достаточным? А необходимым? Для обоснования ответов приведите примеры.

3.29. Выпишите группами только те высказывания, которые имеют одинаковый смысл:

1) число делится на 3;

2) сумма цифр числа делится на 3;

3) имеется квадрат;

4) имеется четырехугольник, у которого все углы прямые;

5) имеется прямоугольник с равными сторонами;

6) имеются две перпендикулярные прямые;

7) угол между прямыми равен 90°.

Продуктивные

3.30. Сформулируйте обратные и противоположные теоремы к следующим:

а) $(AB) \perp (CD) \Rightarrow (AB) \nparallel (CD)$;

б) $\dot{M} \in [AE] \Rightarrow |AM| + |ME| = |AE|$;

в) $(AB) \perp (CD) = 10° \Rightarrow (AB) \nparallel (CD)$;

г) $(AB) \perp (CD) = 40° \Rightarrow (AB) \nparallel (CD)$.

Какие из них являются истинными? Истинность обоснуйте на основе доказательства.

3.31. Дано высказывание $(AB) \nparallel (CD) \Rightarrow (AB) \perp (CD) = 50°$. Составьте к нему противоположное, обратное и противоположное к обратному высказывания. Выясните, какие из них являются истинными?

3.32. Докажите, что $(AB) \parallel (CD)$, если $(AB) \perp (MP)$ и $(MP) \perp \perp (CD)$;

3.33. Докажите, что $(AB) \parallel (CD)$, если $(AB) \parallel (MP)$ и $(MP) \parallel (CD)$.

3.34. Докажите, что если каждая из множества прямых линий параллельна одной и той же прямой, то эти прямые параллельны между собой.

3.35. Для данной теоремы: $A \Rightarrow B$ сформулируйте обратную, противоположную к прямой и противоположную к обратной теоремы. Для каких из них доказательство одной теоремы можно заменить доказательством другой? Приведите пример, подтверждающий равносильность теорем $A \Rightarrow B$ и $\rceil B \Rightarrow \rceil A$. Можно ли говорить о равносильности теорем $B \Rightarrow A$ и $\rceil A \Rightarrow \rceil B$? Приведите примеры, подтверждающие ваши рассуждения.

3.36. Доказать справедливость сложного высказывания: «Если ложна противоположная теорема, то обязательно истинна прямая».

3.37. Доказана теорема: «Если $a > в$, то $a + c > в + c$». Можно ли на основании этого утверждения считать доказанной теорему: «Если $a \leq в$, то $a + c \leq в + c$»?

3.38. Сформулируйте следующие теоремы в виде конъюнкций прямой и обратной и докажите их:

а) треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда один из углов прямой;

б) прямоугольник $ABCD$ является параллелограммом только в том случае, когда его противоположные стороны попарно равны;

в) треугольник ABC является равнобедренным тогда и только тогда, когда $AB = BC$, или $BC = AC$, или $AC = AB$.

3.39. Для следующих теорем постройте обратные и докажите их:

а) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были равны;

б) Для того чтобы $x^3 = y^3$, необходимо и достаточно, чтобы $x = y$.

в) Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9.

3.40. Для следующей теоремы сформулируйте обратную, противоположную и противоположную к обратной теоремы: «Если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее число, то в результате получится его квадрат». Являются ли все эти теоремы истинными? Докажите те из них, которые являются истинными.

3.41. Ответьте на вопрос: как изменится сумма двух последовательных нечетных натуральных чисел, если каждое слагаемое увеличить в два раза? На основании ответа сформулируйте прямую и обратную теоремы. Являются ли обе теоремы истинными?

3.42. Для следующего высказывания докажите, что условие является как необходимым, так и достаточным: «Если сумма цифр, участвующих в записи числа, делится на 9, то само число делится на 9».

3.43. Постройте схему применения метода доказательства от противного. Можно ли посредством этого метода доказать следующую теорему: «Если все слагаемые в сумме $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + t$, за исключением последнего, делятся на a, то вся сумма не делится на a, т. е. $\rceil(S : a)$? Если да, то докажите.

4. Математические понятия

Термин «понятие» применяется для обозначения образов предметов, явлений и их отношений в человеческом сознании. Среди множества всевозможных понятий важное место занимают математические. Математические понятия отражают в нашем мышлении определенные формы и отношения действительности, абстрагированные от реальных ситуаций. Так как всякий математический объект обладает определенными свойствами, то чтобы понять, что это за объект, необходимо перечислить все его основные (существенные) свойства. Существенные свойства — это те свойства, которые присущи данному математическому объекту и без которых он не может существовать. Например: «Квадрат — это прямоугольник с равными сторонами и одной вершиной, расположенной в начале координат». Здесь существенным свойством является выражение «Прямоугольник с равными сторонами», а несущественным свойством — «Одна вершина расположена в начале координат», так как место расположения вершин не влияет на формирование понятия о данном математическом объекте (существует множество квадратов, вершины которых расположены где угодно). Таким образом, необходимым условием формирования понятия о данном математическом объекте является наличие присущих ему существенных свойств.

1. Объем и содержание понятия. К любому математическому понятию предъявляются определенные требования с той целью, чтобы выделить его из множества других понятий. Это возможно, так как каждое понятие объединяет в себе класс объектов — **объем** этого понятия и обладает **содержанием** — характерными существенными свойствами, присущими всем объектам только этого класса. Под классом понимается множество всех объектов, к которым применим данный термин или название. Например, понятие «треугольник» соединяет в себе класс всевозможных треугольников (объем этого понятия) и характеристическое свойство — наличие трех сторон, трех вершин, трех углов (содержание понятия); понятие «уравнение» соединяет в себе класс всевозможных уравнений (объем понятия) и характеристическое свойство — равенство, содержащее одну или несколько переменных (содержание понятия) [19].

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот. Так, например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник», а в содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник» («все стороны равны», «диагонали взаимно перпендикулярны» и др.).

Любое понятие трудно усвоить, не осознав его взаимосвязи с другими понятиями. Поэтому важно знать, в каких отношениях могут находиться понятия, и уметь устанавливать эти связи. Отношения между понятиями тесно связаны с отношениями между их объемами. Чтобы пояснить сказанное, условимся понятия обозначать строчными буквами латинского алфавита: $a, в, c, \ldots$, а их объемы заглавными: $A, B, C, \ldots$. Пусть a и $в$ — два понятия с объемами A и B. Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие a — **видовое** по отношению к понятию $в$, а понятие $в$ — **родовое** по отношению к понятию a. Выражения $A \subset B$ и $A \neq B$ означают, что объем понятия a включается в объем понятия $в$ и они не равны между собой. Например, если понятие a — «прямоугольник», а понятие $в$ — «четырехугольник», то их объемы A и B находятся в отношении включения $A \subset B$, $A \neq B$, поскольку всякий прямоугольник является четырехугольником. Поэтому можно утверждать, что понятие «прямоугольник» является видовым понятием по отношению к понятию «четырехугольник», а понятие «четырехугольник» родовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник».

Отношения рода и вида между понятиями обладают определенными взаимосвязями:

- понятия рода и вида относительны: одно и то же понятие может быть родовым по отношению к одному понятию и видовым по отношению к другому. Например, понятие «прямоугольник» — родовое по отношению к понятию «квадрат» и видовое по отношению к понятию «четырехугольник»;
- для данного понятия можно указать несколько родовых понятий. Так, для понятия «прямоугольник» родовыми являются понятия «параллелограмм», «четырехугольник», «многоугольник». Среди них можно указать ближайшее. Для понятия «прямоугольник» ближайшим является понятие «параллелограмм»;
- видовое понятие обладает всеми свойствами родового понятия. Например, квадрат, являясь видовым понятием по отношению к понятию «прямоугольник», обладает всеми свойствами, присущими прямоугольнику[15].

Исходя из сказанного, можно ввести понятие высшего класса для данной совокупности объектов. Один класс является **высшим** по отношению к другому, если он включает все объекты этого класса в себя вместе с объектами других классов. Например, множество действительных чисел является высшим классом (родом) по отношению к множеству рациональных чисел (вида). Вместе с тем, множество действительных чисел является видом по отношению к множеству комплексных чисел (рода).

Объемы *А* и *В* двух произвольных понятий *а* и *в* могут находиться в одном из следующих отношений между собой:

1). Не имеют общих объектов, принадлежащих обоим объемам. В этом случае говорят, что понятия *а* и *в* несовместимы;

2). Имеют общие объекты, принадлежащие обоим объемам, но объемы *А* и *В* не состоят из одних и тех же объектов;

3). Все объекты одного объема *А* входят в число объектов объема *В*. В этом случае понятие *в* выступает как родовое по отношению к понятию *а*, а понятие *а* как видовое по отношению к понятию *в*.

В случаях, когда объемы понятий включают общие объекты (совпадают полностью или частично) можно говорить о *совместимости* этих понятий. При этом совместимость может быть тождественной («равносторонний прямоугольник» и «ромб с прямым углом»). Если объемы понятий частично совпадают, то понятия находятся в отношении *перекрещивания* («преподаватель» и «ученый»). Если же объем одного понятия полностью входит в объем другого, то понятия находятся в отношении *подчинения* («правильный многоугольник» и «квадрат»).

Все три случая взаимосвязи между понятиями наглядно можно продемонстрировать на диаграммах Эйлера-Венна. Под диаграммами Эйлера-Венна понимаем изображение данных взаимосвязей на плоскости с помощью кругов:

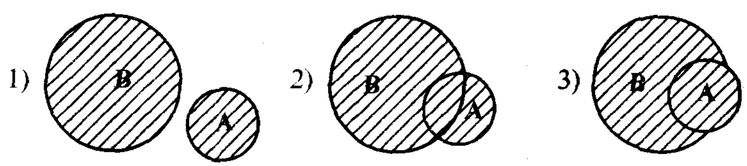


Рис. 1.

2. Определение понятия. Формирование понятий — сложный, длительный процесс, и он будет эффективным, если сориентирует человека на обобщение и абстрагирование существенных признаков (характеристического свойства) формируемого понятия. Содержание понятия раскрывается с помощью определения. Определение — это логическая операция, которая раскрывает содержание понятия или формирует значение термина. С помощью определения понятий фиксируется сущность отраженных в понятии объектов, раскрывается содержание понятия и тем самым формируется отличие определяемых объектов от других.

В математике и в процессе обучения математике применяются различные способы определения понятий. Наиболее часто встречающееся определение понятия — это «через ближайший род и видовое отличие». Приведем пример такого определения: «Прямоугольник есть параллелограмм с прямым углом». Как видно, это определение состоит из двух частей: «прямоугольник» — определяемое понятие и «параллелограмм с прямым углом» — определяющее понятие. Они связаны между собой с помощью связки «есть». Вместо предложения «прямоугольник есть...» можно использовать равносильное выражение «прямоугольником называется...». Вновь введенный термин «прямоугольник» обозначает то же понятие, что и выражение «параллелограмм с прямым углом», составленное на основе ранее определенных терминов «параллелограмм» и «прямой угол». Понятие — «параллелограмм» (ближайший род), а свойство — «наличие прямого угла» (видовое отличие). Название «ближайший род» оправдано тем, что в данном примере не рассматривается другое понятие, объем которого включается в множество параллелограммов и включает множество прямоугольников. Если бы мы определили прямоугольник как четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и имеется прямой угол, то мы получили бы более громоздкое определение именно потому, что понятие «четырехугольник» не является ближайшим родом для прямоугольника (имеется понятие «параллелограмм», объем которого включается в множество четырехугольников и включает множество прямоугольников), и поэтому усложнилось характеристическое свойство (видовое отличие).

Другой способ определения — генетический. Генетическим называется определение объекта путем указания на способ, которым образуется только этот объект и никакой другой. Например: шар — это геометрическое тело, образованное вращением круга вокруг диаметра.

Такие определения считаются явными, так как в них четко выделены определяемые и определяющие понятия. Такой способ определения понятия позволяет по мере необходимости при построении умозаключений одно понятие заменить другим. Очень часто такой заменой пользуются в доказательствах теорем [14, 16, 19].

Кроме явных определений, существуют и неявные. В неявных определениях место определяющего понятия занимает описание способа построения определяемого понятия или система аксиом. К неявным определениям можно отнести определения через абстракцию и противоположность, индуктивные и аксиоматические определения [9].

3. Первоначальные и производные понятия. Как правило, всякое определение математического понятия строится следующим образом: сначала указывается название математического объекта, затем перечисляются основные свойства, позволяющие установить, является ли данный предмет объектом данного понятия.

Такое определение математических понятий сводит каждое определяемое понятие к более общему родовому понятию (понятию, имеющему больший объем), а определение этого родового понятия сводит его к еще более широкому понятию. При таких последовательных действиях объем каждого последующего понятия расширяется, а содержание наоборот сужается. Следовательно, процесс сведения одних понятий к другим, с более широкими объемами, не может быть бесконечным. Наступит момент, когда определяющее понятие уже невозможно свести к другому понятию. Понятия, которые уже невозможно определить через другие, в математике играют базовую роль, они называются **первоначальными** (неопределяемыми, основными). Таковыми являются понятия: «точка», «прямая», «плоскость», «геометрическая фигура», «площадь геометрической фигуры», «натуральное число» и т. д. Они формируются в нашем сознании на основе нашего восприятия окружающего мира, наших представлений о данных математических объектах, нашего жизненного опыта.

Все математические понятия делятся на две группы: **определяемые** и **неопределяемые**. Процесс разбиения на группы зависит от того, поясняется ли их смысл на основе других понятий или нет. Понятия «отрезок», «луч», «круг» определяются на основе других понятий: круг — это окружность и вся часть плоскости внутри нее; луч — часть прямой, ограниченная с одной стороны; отрезок — это две точки прямой и вся ее часть между ними. Эти понятия сведены к другим, их смысл пояснен с помощью других понятий. Понятия, которые поясняются с помощью других понятий и сводятся к ним, называются **производными** (определяемыми).

Неопределяемые и определяемые понятия играют важную роль при построении той или иной математической теории. Покажем их взаимосвязь на основе построения геометрии.

Для изложения материала по геометрии нужно иметь первоначальные, неопределяемые понятия: «точка», «прямая», «плоскость». Затем установить основные отношения между ними, например, в качестве основного отношения можно рассмотреть «отношение принадлежности», а также сформулировать истинные высказывания относительно этих понятий (аксиомы). Неопределяемые понятия, отношения между ними и система аксиом образуют базовые понятия геометрии. На их основе формируются новые понятия, формулируются новые математические утверждения и доказываются теоремы, идет процесс расширения геометрических знаний, т. е. строится наука «Геометрия».

Схематически эту взаимосвязь можно изобразить следующим образом:

Схема 2

Первоначальные понятия и отношения между ними	Первоначальные высказывания (аксиомы)
⇓	⇓
Новые определяемые понятия	ТЕОРЕМЫ

В историческом плане процесс появления производных математических понятий связан с развитием самой математической науки. Сегодня математики оперируют такими сложными для восприятия производными понятиями, как многолистные функции, операторные уравнения, метрические и топологические пространства и т. д.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

4.1. Следующие понятия расположите в порядке увеличения их объемов: «четырехугольник», «квадрат», «ромб», «прямоугольник», «параллелограмм».

4.2. Можно ли из множества треугольников выбрать подмножества, включающие друг друга? Если можно, то приведите пример. Что можно сказать об объемах понятий в приведенном примере.

4.3. Назовите и начертите несколько геометрических фигур, принадлежащих объему понятия четырехугольник».

4.4. Каков объем понятия:

а) однозначное число;

б) двузначное число;

в) четное число;

с) целое число?

4.5. Назовите существенное свойство понятия «прямоугольник».

4.6. Назовите существенные свойства понятий: «треугольник», «квадрат», «параллелограмм», «трапеция», «четырехугольник».

4.7. Назовите по три существенных свойства понятий: «треугольник» и «прямоугольник».

4.8. Назовите несколько одинаковых существенных свойств для прямоугольника и квадрата.

4.9. Правильно ли указанны существенные свойства для следующих понятий:

1) отрезок — это часть прямой между двумя точками;

2) круг — это часть плоскости;

3) квадрат — это прямоугольник;

4) прямоугольник — это четырехугольник, у которого три угла прямые;

5) окружность — это множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от данной точки?

4.10. Являются ли понятия «уравнение» и «высказывание» определяемыми?

4.11. Из следующих понятий выделите производные и сформулируйте их определения: параллельные прямые, квадрат, точка, множество, перпендикулярные прямые, прямой угол, биссектриса угла, площадь, плоскость, смежные углы, вертикальные углы, натуральное число, отрезок.

4.12. Какое из следующих утверждений верное:

а) «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику»;

б) «Всякое свойство прямоугольника присуще квадрату»?

4.13. Находятся ли в отношении рода и вида следующие пары понятий:

а) «многоугольник» и «треугольник»;

б) «острый угол» и «угол»;

в) «луч» и «прямая»;

г) «ромб» и «квадрат»;

д) «четное число» и «натуральное число»;

е) «многозначное число» и «двузначное число»;

к) «действительные» и «натуральные» числа?

Если нет, то правильно расставьте понятия.

4.14. Какие из следующих понятий являются тождественно совместимыми: «круг» и «окружность»; «число» и «цифра»; «площадь» и «величина площади»; «отрезок» и «длина отрезка»; «выражение» и «значение выражения»; «окружность» и «граница круга»; «определяемые» и «производные» понятия; «угол» и «величина угла»; «руда» и «полезное ископаемое»?

4.15. На основе определения биссектрисы угла, указать в нем родовое понятие и видовое отличие, определить структуру видового отличия.

Продуктивные

4.16. Совместимы ли приводимые ниже пары понятий? Изобразите их объемы с помощью диаграмм Эйлера — Венна.

1). «Обесценивание денег» и «инфляция».

2). «Земля» и «спутники Солнечной системы».

3). «Квадрат» и «прямоугольник».

4). «Равносторонний треугольник» и «прямоугольный треугольник».

5). «Натуральные числа кратные 10» и «четные натуральные числа».

6). «Четные натуральные числа» и «нечетные натуральные числа».

Для случаев совместимости понятий в парах определите вид совместимости: тождественная совместимость, совместимость в форме перекрещивания или подчинения.

4.17. Что означает предложение: «Определение должно быть научно правильным». Приведите примеры, подтверждающие ваши доводы.

4.18. Что вы понимаете под термином «Порочный круг»? Приведите примеры, подтверждающие ваши доводы.

4.19. Почему при построении определения математического понятия требуется указание на ближайшее родовое понятие. Приведите примеры, подтверждающие ваши доводы.

4.20. Что означает выражение: «Определение математического понятия должно быть достаточным и не должно быть избыточным». Приведите примеры, подтверждающие ваши доводы.

4.21. Сформулируйте индуктивный способ определения объекта. Приведите пример.

4.22. Сформулируйте аксиоматический способ определения объекта. Приведите пример.

4.23. Опишите способы определения объекта через противоположность и абстракцию. Приведите примеры.

5. Множества и операции над ними

1. Понятие множества. Такие слова, как бригада, стадо, отара, караван, отряд, набор и ряд других слов, имеют почти такой же смысл, что и слово «множество». Например, можно говорить «множество овец» вместо «отара овец», «множество коров» вместо «стадо коров» или «множество ручек» вместо «набор ручек».

Понятие «множество» относится к неопределяемым, первичным понятиям математики. Общее представление о понятии «множество» формируется у человека на основе частных примеров, известных из жизненного опыта: игрушки в игровой комнате, ложки в столовой, дети в группе детского сада, дни недели, месяцы в году, школьные учебники для первого класса и т. д.

На занятиях по математике чаще, чем на занятиях по другим дисциплинам, употребляется слово «множество»: множество точек, множество прямых, множество отрезков, множество треугольников, множество многоугольников, множество натуральных или иных чисел; множество предметов и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами**. Элементы множества заключаются в фигурные скобки, если они заданы перечислением. Например, запись $\{a; в; c\}$ означает, что множество состоит из букв a; $в$; c.

В общем случае множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита. Например, $A = \{a; в; c\}$, $B = \{1; 2; 3\}$.

Эти записи читаются: множество A состоит из букв a, $в$, c; множество B содержит числа 1, 2, 3. Причем, порядок, в котором записываются элементы множества, значения не имеет.

Принадлежность того или иного элемента к данному множеству обозначается посредством знака: $\in$, а отсутствие ее знаком $\notin$. Например, предложение «1 принадлежит множеству B» записывается в виде: $1 \in B$, а предложение «Число 5 не принадлежит множеству B» в виде: $5 \notin B$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. К конечным множествам относятся, например, множество столов в аудитории, множество студентов в группе, множество букв в латинском алфавите и т. д. Примерами же бесконечных множеств могут служить множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество точек на числовой прямой и многие другие множества.

Одно и то же множество может быть задано несколькими способами. Наиболее распространенный способ для конечных множеств — это перечисление элементов. Он используется при задании множества, состоящего из небольшого числа элементов. Другой, также часто используемый способ для задания множества — *указание характеристического свойства элементов. Характеристическим свойством элементов данного множества* называется свойство, которым обладают все элементы данного множества и не обладает ни один элемент, не принадлежащий данному множеству. Он используется как для задания конечных, так и для задания бесконечных множеств. Например, запись $K = \{x : x = 2к, к \in N\}$ описывает множество всех натуральных чисел, которые являются четными.

При задании множества формулировкой характеристических свойств, входящих в него элементов, может случиться так, что в природе не окажется предметов, обладающих названным свойством, например, «множество космонавтов, побывавших на Марсе». Но на Земле нет человека, побывавшего на Марсе.

Значит, в названном множестве нет ни одного элемента. Такое множество при письме обозначается символом $\varnothing$ и называется **пустым** множеством. Например, множество решений уравнения $x + 1 = 0$, принадлежащих множеству натуральных чисел, есть пустое множество.

Множества чисел, которые часто используются, имеют стандартные названия и обозначения:

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел.

Два множества считаются **равными** (одинаковыми), если они состоят из одних и тех же элементов. Например, множества $\{1; 2; 3\}$ и $\{1; 3; 2\}$ равны, так как они состоят из одних и тех же элементов, как и множество людей, побывавших в космосе, и множество космонавтов.

2. Подмножества и операции над множествами. Рассмотрим два множества: множество студентов первого курса и множество отличников среди них. Очевидно, что второе множество есть часть первого. Точно так же, если рассматривать множества $A = \{a, в, c\}$ и $B = \{a, в, c, к\}$, то множество A есть часть множества B, т. е. все элементы множества A содержатся во множестве B. В приведенных примерах все элементы одних множеств входят в другие, большего объема. В математике вместо предложения «множество A есть часть множества B» чаще используются другие предложения — «множество A содержится во множестве B» или «множество A есть подмножество множества B». Эти предложения посредством математической символики записывается следующим образом: $A \subset B$. Знак $\subset$ читается: «является подмножеством», «входит в», «содержится во», «включено», а знак $\not\subset$ — «не является подмножеством», «не входит в» «не содержится во», «не включено».

Итак, множество A называется **подмножеством** множества B, если все элементы множества A содержатся и во множестве B. Примеров подмножеств очень много: множество пассажирских автобусов является подмножеством множества всех автомашин; множество мужчин является подмножеством множества людей; множество слонов является частью множества диких животных; множество треугольников есть подмножество множества многоугольников; множество многоугольников является подмножеством множества геометрических фигур и т. д.

Одно множество может иметь несколько подмножеств. Например, в качестве подмножеств множества многоугольников можно рассматривать множество треугольников, множество квадратов, множество прямоугольников, множество трапеций, множество четырехугольников и т. д. Пустое множество считается подмножеством любого множества, в том числе и пустого. С другой стороны, согласно определению подмножества, любое множество является подмножеством самого себя, так как любой элемент множества A содержится в самом множестве A. В число подмножеств произвольного множества A обязательно входят пустое множество и само множество A, они называются несобственными подмножествами. Например, множество $A = \{a, в, c\}$ имеет следующие подмножества: $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{в\}$, $A_3 = \{c\}$, $A_4 = \{a, в\}$, $A_5 = \{a, c\}$, $A_6 = \{в, c\}$, $A_7 = \{a, в, c\}$, $A_8 = \varnothing$. Других подмножеств оно не имеет, среди них несобственные подмножества: пустое множество и само множество (A_7, A_8). Остальные подмножества A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 называются собственными.

Общее число подмножеств *конечного множества* A равно $2^к$, где $к$ — число элементов данного конечного множества A.

Проиллюстрируем справедливость данного утверждения на примере следующих множеств: $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{a, в\}$, $A_3 = \{a, в, c\}$. В случае, когда $A_0 = \varnothing$, подмножеством пустого множества может быть только пустое множество и, следовательно,

$2^0 = 1$. При $A_1 = \{a\}$ множество имеет два подмножества: само множество и пустое. В этом случае количество подмножеств данного множества удовлетворяет равенству $2^1 = 2$. Если множество содержит два элемента $\{a, в\}$, то оно имеет четыре подмножества: само множество, пустое множество, подмножества $\{a\}$ и $\{в\}$. Таким образом, число элементов двухэлементного множества записывается в виде равенства: $2^2 = 4$. Если рассматривать случай трехэлементного множества $A_3 = \{a, в, c\}$, то число его подмножеств равно 8. Сами подмножества, как было показано выше, следующие: $\{a\}$, $\{в\}$, $\{c\}$, $\{a, в\}$, $\{a, c\}$, $\{в, c\}$, $\{a, в, c\}$, $\varnothing$. Следовательно, число подмножеств трехэлементного множества равно $2^3 = 8$. Во всех приведенных примерах выражения, определяющие общее число подмножеств заданного множества, являются частным случаем общей формулы: $2^к$, где $к$ — число элементов данного множества.

Из двух и более множеств можно образовать одно общее множество. Например, имея два различных студенческих отряда, можно создать один сводный отряд, куда войдут все студенты обоих отрядов. Имея множества $A = \{a, в, c\}$ и $B = \{a, к, e, c, p\}$, можно образовать новое множество C из элементов как множества A, так и множества B. Для этого нужно к элементам одного из этих множеств присоединить те элементы другого множества, которых нет в первом. В этом случае, полученное множество имеет вид: $C = \{a, в, c, к, e, p\}$. Знак объединения множеств записывается символом $\cup$, то есть $A \cup B = C$, и читается: объединение множеств A и B есть множество C. Сказанное можно сформулировать в виде определения: **объединением** двух множеств A и B называется такое множество C, которое состоит из всех элементов A и B и только из них. Если множества A и B содержат одинаковые элементы, то они входят в C только один раз.

С помощью математических символов определение объединения двух множеств можно записать следующим образом: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Пусть даны множества $A = \{a, в, c\}$ и $B = \{a, к, e, c, p\}$. Видно, что эти множества содержат одинаковые элементы, из которых можно образовать новое множество $D = \{a, c\}$, оно состоит из всех общих элементов и только из них, других элементов в нем нет. Такое множество D носит название пересечения множеств A и B и обозначается с помощью символа $\cap$: $A \cap B = D$. Таким образом, **пересечением** множеств A и B называется множество D, которое состоит из всех общих элементов множеств A и B и только из них. Посредством математической символики определение можно записать в виде: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Для множеств A и B можно определить разность. **Разностью** множеств A и B называется множество P, которое состоит из всех тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B. Обозначается разность множеств с помощью одной из следующих записей: $A–B$ или $A\backslash B$. В качестве примера определим разности $A\backslash B$ и $B\backslash A$ для множеств $A = \{a, в, c\}$ и $B = \{a, к, e, c, p\}$. Имеем: $A\backslash B = \{в\}$ и $B\backslash A = \{к, e, p\}$. С помощью математической символики определение разности можно записать в виде: $A\backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

В случае, когда множество B является собственным подмножеством множества A, то разность множеств A и B называется **дополнением** множества B до множества A. Например, пусть $A = \{a, в, c\}$ и $B = \{a, в\}$, тогда $A\backslash B = E$, где множество $E = \{c\}$ является дополнением множества B до множества A.

Любое множество A можно представить в виде объединения двух или нескольких его подмножеств, не содержащих общих элементов. Например, множество студентов можно представить в виде объединения двух его подмножеств, не имеющих общих элементов. A_1 — множество студентов-юношей и A_2 — множество студентов-девушек, то есть $A = A_1 \cup A_2$.

Представление данного непустого множества в виде объединения двух или нескольких его подмножеств, не содержащих общих элементов, называется **разбиением** данного множества на подмножества. Например, $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} = A_1 \cup A_2$, где $A_1 = \{0; 3; 2; 4\}$ и $A_2 = \{5; 6; 7; 8; 9\}$.

Разбиение одного и того же множества на подмножества можно произвести несколькими способами, при этом обязательно соблюдаются два условия: 1) подмножества — непустые, 2) элементы, содержащиеся в одном из них, не содержатся ни в каком другом подмножестве.

3. Декартово произведение множеств. Пусть даны два конечных множества $A = \{a; в; c\}$ и $B = \{р; н; к; е\}$. Составим всевозможные пары элементов этих множеств так, чтобы первый элемент пары был из множества A, а второй — из множества B. Элемент $a \in A$ может образовать пары с любым элементом множества B: $(a, р)$, $(a, н)$, $(a, к)$, $(a, е)$, больше таких пар нет. Аналогично и элемент $в \in A$ образует пары с элементами множества B: $(в, р)$, $(в, н)$, $(в, с)$, $(в, е)$. И, наконец, элемент $c \in A$ образует пары: $(c, р)$, $(c, н)$, $(c, к)$, $(c, е)$. Других пар нет, значит, всего пар получилось 12. Множество всех таких пар составляет **декартово произведение множеств** A и B, которое обозначается так: $A \times B$. Декартово произведение множеств A и B удобно составлять и иллюстрировать на таблице прямоугольной формы: по длине располагают элементы одного из них, по ширине — элементы другого, а сам прямоугольник заполняется парами.

Таблица 12

	р	*н*	*к*	*е*
а	(*а*, *р*)	(*а*, *н*)	(*а*, *к*)	(*а*, *е*)
в	(*в*, *р*)	(*в*, *н*)	(*в*, *к*)	(*в*, *е*)
с	(*с*, *р*)	(*с*, *н*)	(*с*, *к*)	(*с*, *е*)

Обозначая полученное декартово произведение через D, можно записать: $D = A \times B = \{(a, р), (a, н), (a, к), (a, е), (в, р), (в, н), (в, с), (в, е), (с, р), (с, н), (с, к), (с, е)\}$.

Таким образом, декартово произведение двух множеств A и B (или прямое произведение двух множеств) представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар $(x; y)$, образованных из элементов этих множеств так, чтобы первый элемент пары был взят из первого множества, а второй элемент — из второго множества. Следовательно $A \times B = \{(a, в) \colon a \in A \text{ и } в \in B\}$.

Декартово произведение множеств может не всегда обладать свойством перестановочности, то есть не всегда равенство $A \times B = B \times A$ может оказаться истинным. Оно имеет место, когда $A = B$. В общем случае от перестановки элементов в парах (x, y) и (y, x) содержание пары может измениться. Например, это имеет место, если эти пары означают координаты точек на плоскости (точка $A\,(3;\,4) \neq B\,(4;\,3)$) или же числа: $34 \neq 43$.

Иногда для решения практических задач приходится находить произведение трех, четырех и более множеств. В таких случаях элементы произведения представляют собой упорядоченные тройки $(x, y, к)$, четверки $(x, y, к, н)$ и т. д. Формируются они так: первая компонента элемента берется из первого множества, вторая — из второго множества, третья — из третьего множества и т. д. Например, если даны множества $A = \{a; в; c\}$, $B = \{р; н; к; е\}$ и $C = \{и; д\}$, то упорядоченные тройки будут иметь вид: $(a, р, и)$, $(a, р, д)$, $(a, н, и)$, ... При построении произведения этих множеств вначале строится декартово произведение $A \times B$, и лишь затем $(A \times B) \times C = E$. Множество E состоит из всевозможных упорядоченных троек элементов этих множеств, причем число таких троек равно произведению чисел, равных количеству элементов в каждом множестве: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

Декартово произведение множеств, в отличие от свойства коммутативности, обладает ассоциативным свойством, то есть верно равенство

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C). \qquad (5.0)$$

Справедливость данного свойства покажем на основе следующего несложного примера: пусть $A = \{a; в\}$, $B = \{c; e\}$ и $C = \{u\}$. Найдем элементы, из которых состоят левая и правая части (5.0). Для этого, сначала вычислим элементы декартовых произведений $A \times B$ и $B \times C$: $A \times B = \{(a, c); (a, e); (в, c); (в, e)\}$ и $B \times C = \{(c, u); (e, u)\}$. Далее перечислим элементы множеств $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$:

$$(A \times B) \times C = \{(a, c, u); (a, e, u); (в, c, u); (в, e, u)\},$$
$$A \times (B \times C) = \{(a, c, u); (a, e, u); (в, c, u); (в, e, u)\}.$$

Так как правые части последних двух равенств состоят из одних и тех же упорядоченных троек, то для данного примера равенство (5.0) имеет место. Равенство (5.0) имеет место и в общем случае. Строгое доказательство соотношения (5.0) включено в раздел продуктивных задач данного параграфа.

Декартово произведение двух, трех, четырех и т. д. множеств лежит в основе решения ряда практических задач. Например, идет групповое собрание студентов, нужно избирать председателя и секретаря. На эти должности может быть избран любой из студентов. Если в группе 20 студентов, то председателем может быть любой из 20, то есть имеется 20 вариантов выбора. Секретаря избирают из оставшихся 19 студентов, то есть пары $(x; y)$ образуются из элементов двух множеств A и B; число элементов множества A равно 20, а число элементов множества B — 19. Число элементов декартового произведения $A \times B$ равна произведению этих чисел: $20 \cdot 19 = 380$ (пар). Значит, число вариантов выбора председателя и секретаря собрания в группе, где 20 человек, равно 380.

4. Свойства операций над множествами. Основные операции над множествами обладают рядом свойств. Объединение и пересечение множеств обладают **переместительным (коммутативным) свойством.** Оно означает, что от перестановки местами объединяемых (пересекаемых) множеств результат их

объединения (пересечения) не изменится. Например, на линейку пришли учащиеся младших классов, а затем к ним присоединились учащиеся старших классов: множество учащихся младших классов объединилось с множеством учащихся старших классов и получилось множество учащихся школы. Если раньше пришли бы учащиеся старших классов, а затем к ним присоединились бы учащиеся младших классов, то все равно в итоге получилось бы множество учащихся школы.

То же самое на примере множеств $A = \{a, в, c, д, e\}$ и $B = \{к, в, e, з\}$ выглядит следующим образом: $A \cup B = \{a, в, c, д, e, к, з\}$ и $B \cup A = \{a, в, c, д, e, к, з\}$. Сравнивая результаты обоих объединений, видим, что множества состоят из одних и тех же элементов, то есть $A \cup B = B \cup A$. Значит, от перестановки объединяемых множеств их объединение не изменится.

Этим же свойством обладает и пересечение множеств. Действительно, в приведенном выше примере $A \cap B = \{в, e\}$ и $B \cap A = \{в, e\}$. Следовательно, $A \cap B = B \cap A$.

При объединении трех множеств, например $A = \{a, в, c\}$, $B = \{к, н\}$ и $C = \{e\}$, их объединение можно найти несколькими способами: сначала объединить первые два, а затем полученное множество объединить с третьим множеством, или же сначала объединить последние два множества, а затем первое множество объединить с полученным результатом, то есть $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \{a, в, c, e, к, н\}$. Читается это свойство следующим образом: объединение трех множеств не изменится, если объединение любых двух из них объединить с третьим множеством. Это свойство называется **сочетательным** (ассоциативным) свойством объединения множеств.

Этим же свойством обладает и пересечение трех множеств, то есть $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Объединение и пересечение множеств обладают связывающими их между собой свойствами:

1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ — распределительное свойство объединения множеств относительно их пересечения;

2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — распределительное свойство пересечения множеств относительно их объединения.

Смысл приведенных свойств легко поясняется на конкретных примерах. Например, $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{2;\ 5;\ 6;\ 7\}$, $C = \{6;\ 8;\ 9\}$. Вычислим левую и правую части равенства 1). Они равны: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $(A \cup B) \cup C = \{6\}$ и $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \{6\}$ и $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{6\}$. Следовательно, справедливо равенство: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Аналогично показывается справедливость равенства $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Действительно, $A \cap B = \{2\}$, $(A \cap B) \cup C = \{2; 6; 8; 9\}$ и $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9\}$, $B \cup C = \{2; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2; 6; 8; 9\}$. Видим, что левая и правая части равенства 2) равны одному и тому же множеству $\{2; 6; 8; 9\}$.

Имеют место свойства, связанные с понятием разности множеств:

$$(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B; \qquad (5.1)$$

$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C); \qquad (5.2)$$

$$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C); \qquad (5.3)$$

$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C); \qquad (5.4)$$

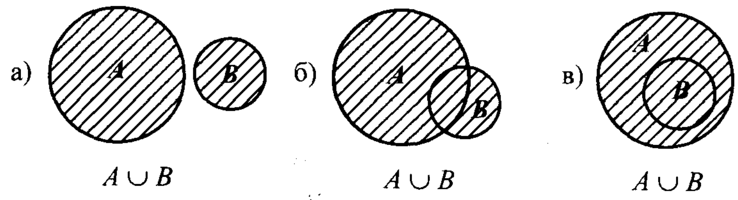
$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C). \qquad (5.5)$$

Справедливость равенств (5.1) – (5.5) можно пояснить на основе примеров. В качестве упражнения покажем справедливость последнего равенства (5.5) на основе следующего примера: пусть $A = \{а, в, с, г, д\}$, $B = \{в, с, г\}$, $C = \{а, в, с, к, л\}$. Тогда $B \cap C = \{в, с\}$, $(A \backslash B) = \{а, д\}$, $(A \backslash C) = \{г, д\}$. Левая часть равенства (5.5) равна $A \backslash (B \cap C) = \{а, г, д\}$. Этому же множеству равна и правая часть $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = \{а, г, д\}$. А в силу произвольности выбора множеств A, B и C можно утверждать, что равенство (5.5) имеет место и в общем случае.

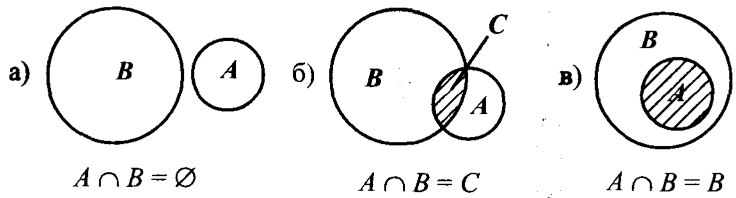
Все приведенные выше свойства операций над множествами могут быть строго доказаны на основе изложенного теоретического материала. Эти доказательства нами вынесены в раздел задач данного параграфа.

Операции над множествами можно иллюстрировать схематично, изображая множества кругами на плоскости. Круги часто называют кругами Леонарда Эйлера (1707–1783 гг.), по фамилии известного английского ученого, впервые использовавшего их для такого рода разъяснений. Как было отмечено в предыдущем параграфе, некоторые авторы их называют диаграммами Эйлера–Венна:

I. Объединение множеств A и B: $B \subset A$.



II. Пересечение множеств A и B: $B \subset A$.



III. Разность множеств A и B:

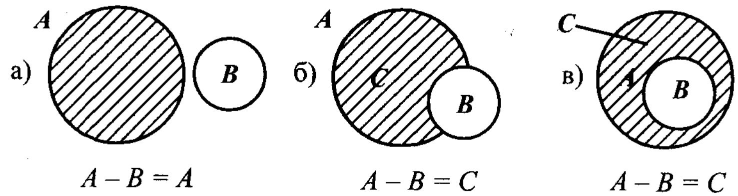


Рис. 2

Задачи и упражнения

Репродуктивные

5.1. Приведите примеры множеств и их подмножеств на темы: «Пляж», «Каток», «Кинотеатр».

5.2. В следующих примерах укажите, какое из множеств является подмножеством другого: множество учителей города, множество учителей математики в том же городе; множество точек луча, множество точек отрезка на том же луче; множество самолетов, множество самолетов-бомбардировщиков; $A = \{a, в, c, к, e\}$, $B = \{a, в, c, к, e, н, p\}$.

5.3. Напишите по три подмножества каждого из множеств: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; ...\}$, $B = \{a, в, c, к, e\}$, $К = \{10; 20; 30; 40; 50; ...\}$.

5.4. Составьте пять множеств так, чтобы каждое из них содержало множество $A = \{a, в, c\}$ как свое собственное подмножество. Может ли подмножество содержать больше элементов, чем само множество?

5.5. Укажите все подмножества множества $A = \{0; 2; 4\}$.

5.6. Найдите число собственных подмножеств для данных множеств: $A = \{a, в, c, к, e, н\}$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; $C = \{a, у, и, ы, е, е, я, э\}$; $K = \{$лиса, волк, заяц$\}$.

5.7. Укажите 3 множества, каждое из которых содержит 128 подмножеств.

5.8. Приведите примеры множеств, которые имеют заданное число подмножеств: 32; 256; 1024; 4096.

5.9. Составьте примеры множеств так, чтобы число их собственных подмножеств было равно 6; 14; 30; 62.

5.10. Объясните, в каких случаях употребляется каждый из следующих знаков: $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$.

5.11. С помощью знаков $\subset$, $\not\subset$ запишите соотношения между множествами: $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11, ...\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; ...\}$, $K = \{17; 3; 4; 205; 206; 207\}$, $M = \{0; 10; 20; 30; ...\}$, $P = \{e, н\}$, $H = \{e, в, р, к, н\}$.

5.12. Найдите объединение множеств:

а) множества учениц и множества учеников класса;

б) множества всех автомашин и множества грузовых автомашин;

в) множества квадратов и прямоугольников;

г) множества точек прямой и множества точек отрезка на той же прямой;

д) множества многоугольников и множества треугольников;

е) множества четных чисел и множества натуральных чисел;

к) множества чисел кратных 3 и множества чисел кратных 15.

5.13. В приведенных примерах множеств назовите свойство, характерное всем элементам: множество зверей кошачьей породы; множество членов Союза писателей России; множество воинов-интернационалистов; множество чисел, делящихся на 5 без остатка; множество нечетных чисел; множество геометрических понятий, формируемых у детей по программе начальной школы; множество многоугольников, сумма внутренних углов которых равна 360^0.

Образец: множество предметов, изучаемых в 5 классе; *характерное свойство:* предмет, изучаемый в 5 классе.

5.14. Задайте несколько числовых множеств от нуля до 9 путем формулировки их характеристических свойств.

Образец: множество однозначных чисел, делящихся на 4.

5.15. Приведите несколько примеров числовых подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 100\}$, задав их формулировкой характеристических свойств.

Образец: множество двузначных чисел, делящихся на 5.

5.16. Дано множество $A = \{2; 1; 4; 5; 3\}$ и составлены высказывания: $1 \in A$; $3 \notin A$; $40 \notin A$; $4 \in A$; $5 \in A$. Выпишите из них только истинные высказывания. Дополнительно составьте еще два истинных высказывания.

5.17. Запишите следующие предложения, используя знаки $\in$, $\notin$:

1) 12 принадлежит множеству A;

2) 7 не принадлежит множеству A;

3) буква «*а*» принадлежит множеству C;

4) буква «*к*» не принадлежит множеству C.

5.18. Составьте четыре истинных и три ложных высказываний о множестве $A = \{а, в, к, е, р\}$, используя знаки $\in$, $\notin$.

5.19. Что можно сказать о равенстве трех и большего числа множеств? Перепишите это множество $A = \{а, в, с, к\}$ 4 раза, переставляя его элементы. Будут ли все эти множества равны? Почему?

5.20. Запишите следующие множества с помощью фигурных скобок: множество городов вашей республики; множество однозначных натуральных чисел; множество двузначных чисел, делящихся на 10 без остатка; множество целых чисел; множество символов для обозначения арифметических операций; множество символов для обозначения операций над высказываниями.

5.21. Прочтите предложения, употребляя слово «множество» вместо близких к нему по смыслу слов: отряд мальчиков пятого класса; караван верблюдов в Туркмении; стая журавлей, летающих над городом; стадо коров в селе; табун лошадей пограничников; совокупность чисел, делящихся на 4.

5.22. Составьте 6 высказываний на тему «Село», употребляя слово «множество» так, чтобы три из них были ложными.

Образец: В нашем селе имеется множество школ, где учатся люди в возрасте более 150 лет — это ложное высказывание.

5.23. Прочтите следующие предложения и укажите примеры пустого множества: множество учащихся вашего класса, побывавших в городе Москве; множество однозначных

натуральных чисел, которые делятся на 12; множество студентов вашей группы, имеющих рост 20 см; множество студентов вашей группы, которые учатся на отлично; множество студентов вашей группы, которые пишут левой рукой (левша).

5.24. Приведите примеры пустого множества так, чтобы их содержание касалось тем: «Летом на пляже», «Гараж».

5.25. Можно ли привести примеры пустого множества другим способом, отличным от названия характеристического свойства его элементов? Ответ разъясните примерами.

5.26. Справедливость следующей теоремы проиллюстрируйте на примерах: если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.

5.27. Найдите объединения множеств:

1) $M = \{а, в, с, р\}$ и $B = \{а, н, к\}$;

2) $C = \{а, с, и, р\}$ и $Д = \{о, н, а, р\}$;

3) $M = \{а, в, е, н\}$ и $P = \{а, в\}$;

4) $E = \{н, к, о, е\}$ и $K = \{а, в, с\}$.

5.28. Каким будет множество, являющееся объединением $A \cup A$, если $A = \{а, в, с, к\}$.

5.29. Представьте множество $A = \{а, в, с, е\}$ в виде объединения двух его подмножеств тремя различными вариантами.

5.30. Верны ли следующие соотношения: $A \subset A$; $A \cup A = A$; $A \cap A = A$?

5.31. Прочтите следующие формулы: $A \cup B$; $A \cup \varnothing$; $в \in B$; $B \not\subset A$; $к \notin A$; $K \cup A$; $\varnothing \subset A$.

5.32. Найдите объединения множеств $A \cup B$ и $B \cup A$, если:

1) $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{5; 6; 7\}$;

2) $A = \{а, в, с, к\}$ и $B = \{е, р, н, и, м\}$;

3) $A = \{$волк, лиса, заяц$\}$ и $B = \{$медведь, слон$\}$;

4) $A = \{а, в, с\}$ и $B = \varnothing$.

5.33. Даны множества A и B, где $A = \{а, в, с, к, е\}$ и $B = \{н, р\}$. В каком случае проще найти их объединение: при $A \cup B$ или же $B \cup A$?

5.34. Найдите объединения следующих множеств:

1) $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$ и $A = \{2; 4; 6; 8; 10; ...\}$;
2) $Д = \{5; 10; 15; 20; 25; ...\}$ и $E = \{2; 4; 6; 8; 10; ...\}$;
3) $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $P = \{4; 5; 10; 20; 101\}$.

5.35. Разбейте множество $A = \{a, в, c, н, e\}$ на три подмножества. Сколько таких вариантов может быть? Можно ли множество A представить в виде объединения подмножеств с одним и тем же числом элементов?

5.36. Разбейте множество врачей на различные подмножества перечислением характеристических свойств.

5.37. Представьте множество чисел $\{10, 20, 30, \ldots, 90\}$ в виде объединения трех его подмножеств.

5.38. Даны множества $A = \{в, c, к, e\}$ и $B = \{a, к, e, н, p\}$. Найдите пересечения этих множеств и результат изобразите с помощью диаграмм Эйлера — Венна.

5.39. Можно ли пересечение множеств из предыдущей задачи изобразить с помощью других геометрических фигур, например, четырехугольников? Если это возможно, то сделайте это.

5.40. Найдите пересечение следующих числовых множеств:

1) $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...\}$ и $A = \{2; 4; 6; 8; 10; ...\}$;
2) $Д = \{5; 10; 15; 20; 25; ...\}$ и $E = \{2; 4; 6; 8; 10; ...\}$;
3) $M = \{x : x = 2к, к \in N\}$ и $P = \{x : x = 2к + 1, к \in N\}$.

5.41. Разбейте множество N на множество четных и нечетных чисел. Изобразите пересечение с помощью диаграмм Эйлера.

5.42. Пусть A — множество всех треугольников, B — множество всех равнобедренных треугольников, а C — множество всех прямоугольных треугольников. Найдите следующие множества: $A \cap B$, $A \cap C$. Что можно сказать о множествах: $B \cap C$, $A \cap B \cap C$?

5.43. Найдите дополнение множества $B = \{a, e, c\}$ до множества $A = \{a, в, c, к, e\}$.

5.44. Какое множество является дополнением множества нечетных натуральных чисел до множества натуральных чисел?

5.45. Какое из следующих включений верное: $N \subset Z$, $Z \subset N$? Какое множество является дополнением множества N до множества Z?

5.46. Даны множества A и B, найдите разности $A \backslash B$ и $B \backslash A$, если

1) $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{0; 4; 5\}$;
2) $A = \{2; 2; 3; 4\}$ и $B = \{1; 3; 5\}$;
3) $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{1; 4\}$.

5.47. Найдите произведения $A \times B$ и $B \times A$ и проверьте истинность равенства $A \times B = B \times A$, если

$A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $K = \{a; в; c\}$;
$A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $K = \{1; 2; 3; 4\}$.

5.48. Даны множества: $A = \{a; в; c\}$, $B = \{a; к\}$ и $C = \{в; e; к\}$. Найдите произведения:

1) $A \times B$;
2) $A \times C$;
3) $A \times B \times C$.

5.49. Дано множество однозначных чисел $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Сколько элементов содержит произведение:

1) $A \times A$?
2) $A \times A \times A$?
3) $A \times A \times A \times A$?

5.50. Произведение трех множеств содержит:

1) 15 упорядоченных троек;
2) 21 упорядоченную тройку;
3) 24 упорядоченной тройки.

Какими могут быть эти множества? Сколько элементов содержится в каждом из них?

5.51. Дано множество $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Что из себя представляет один элемент множества $A \times A \times A \times A$? Напишите четыре элемента этого произведения.

5.52. Дано множество $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Напишите семь элементов произведения $B \times B \times B$. Сколько таких троек содержится в этом произведении?

5.53. Составьте всевозможные трехзначные числа, используя элементы множества $A = \{1; 2\}$. Найдите произведение $A \times A \times A$.

5.54. Составьте 7 элементов множества $B \times B \times B \times B$, если $B = \{1; 3; 5\}$.

Продуктивные

5.55. Изучите предложения, назовите те, которые являются одновременно примерами пустого множества и представляют собой ложные высказывания: множество коров, имеющих по 8 ног; рост человека в среднем равен 2,5 м; множество людей, имеющих рост 5 м; множество автомашин, развивающих скорость до 1000 км/час; множество учащихся вашего класса, имеющих возраст 30 лет; в городе Москве проживает 100 миллионов человек; множество городов, население которых превышает 140 миллионов человек. Измените содержание данных высказываний таким образом, чтобы полученные множества не являлись бы примерами пустого множества.

5.56. Докажите теорему: если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.

5.57. Множество натуральных чисел N разбито на три непересекающихся подмножества:

1) A — множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке ноль;

2) B — множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке один;

3) C — множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке два. Найдите множества: $N\backslash A$, $N\backslash B$, $N\backslash C$.

5.58. Доказать следующие равенства:

$A \cup B = B \cup A$;

$A \cap B = B \cap A$;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

$(A\backslash B) \cap B = \varnothing$;

$(A\backslash B) \cap (A \cap B) = \varnothing$;

$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash B$;

$(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$;

$(A\backslash B) \cap C = (A \cap C)\backslash(B \cap C)$;

$A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$;

$A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$.

5.59. Доказать, что если $A\backslash B = B\backslash A$, то $A = B$.

5.60. Следующее соотношение доказать и изобразить с помощью диаграмм Эйлера — Венна: $(A \cup B)\backslash C \subset A \cup (B\backslash C)$.

5.61. Доказать, что $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$.

5.62. Что можно сказать о равенстве $A \times B = B \times A$ для произвольных конечных множеств A и B? Привести примеры множеств, для которых равенство верно. Привести примеры множеств, для которых равенство неверно.

5.63. Докажите, что для произвольных конечных множеств A, B и C выполняется равенство: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

5.64. Что можно сказать о равенствах $(A \times B) \cup C = (A \times C) \cup (B \times C)$ и $(A \times B) \cap C = (A \times C) \cap (B \times C)$? Если они истинны, то докажите!

5.65. Что можно сказать о равенстве $(A \times B)\backslash C = (A \times C)\backslash(B \times C)$? Если оно истинно, то докажите!

5.66. Пусть множество A состоит их точек $M(x; y)$ плоскости, для которых $|x| \leq 4$, $|y| \leq 4$, множество B — из точек плоскости, для которых $x^2 + y^2 \leq 25$ и множество C состоит из точек плоскости, для которых $x > 0$. Изобразить множество $(A \cap B)\backslash C$ на координатной плоскости.

6. Соответствия, отображения и отношения

1. Понятие соответствия. Понятие соответствия между элементами двух множеств можно ввести посредством декартового произведения.

Пусть даны множества $A = \{1; 2; 3\}$ и $B = \{3; 4\}$. Декартово произведение $A \times B$ состоит из множества всевозможных упорядоченных пар, где первый элемент пары взят из множества A, а второй элемент — из множества B, т. е. имеем: $A \times B = \{(1; 3); (1; 4); (2; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 3); (3; 4)\}$. Очевидно, что всякое подмножество этого произведения также состоит из упорядоченных пар, составленных из элементов этих множеств. Посредством таких подмножеств устанавливается соответствие между элементами множеств A и B, которое определяется следующим образом: любое множество пар, содержащих первым элемент из множества A, а вторым — элемент из множества B, называется **соответствием** между множествами A и B. Например, множества $\{(1; 3); (2; 3)\}$ и $\{(1; 3); (2; 3); (3; 4)\}$ — примеры соответствий из множества $A = \{1; 2; 3\}$ во множестве $B = \{3; 4\}$. *Множество A называется областью отправления соответствия, а множество B — областью прибытия.* Соответствия между элементами двух множеств принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: R, S, T и т. д.

Если соответствие R элементу x сопоставляет элемент y, то это можно записать одним из следующих вариантов: xRy или $R(x, y)$.

Области отправления и прибытия соответствия связаны с двумя близкими к ним понятиями: областью определения и множеством значений. Под *областью определения соответствия R* понимается множество тех элементов из области отправления данного соответствия, которым сопоставлены элементы из области прибытия. *Множеством значений соответствия R* называется множество тех элементов из области прибытия, которые поставлены в соответствие некоторым элементам из области отправления.

Понятие соответствия устанавливается не только между элементами множеств математического характера, но и множествами любой иной природы. Приведем примеры соответствий между элементами двух множеств, в том числе и нематематического содержания:

1) Имеется множество автомашин и множество людей. Составляются пары: человек и автомашина, которую он водит. При этом получается соответствие между множеством людей и множеством автомашин.

2) Рассмотрим множество детей и множество матерей. Можно составить пары следующим образом: на первом месте женщина, на втором — ее ребенок: {(Марина; Игорь); (Катя; Иван); (Катя; Ирина); (Наташа; Нюра)}.

3) Соответствие между множеством чисел, выражающих длины радиусов и множеством чисел, выражающих длины окружностей, можно привести в виде в таблице:

Таблица 13

R	$2\pi R$	$(R; 2\pi R)$
1,5	9,42	(1,5; 9,42)
1,2	7,54	(1,2; 7,54)

При вычислении длины окружности используется приблизительное значение числа π, равное 3,14.

4) Можно установить соответствие между значениями переменной x и значениями выражений, содержащих данную переменную, например, $3x^2$. Данную зависимость удобнее записать в виде таблицы.

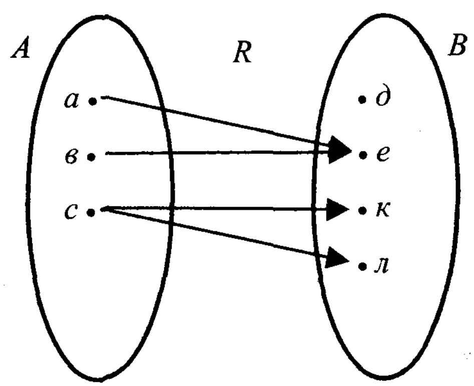
Таблица 14

x	0	1	–1	2	–2	3	–3
$3x^2$	0	3	3	12	12	27	27
$(x; 3x^2)$	(0;0)	(1; 3)	(–1; 3)	(2; 12)	(–2; 12)	(3; 27)	(–3; 27)

5) Различные множества точек координатной плоскости также образуют соответствие между множеством чисел на координатной прямой OX и множеством чисел на координатной прямой OY.

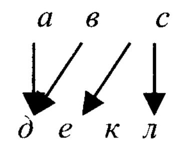
Соответствие между элементами двух множеств можно изобразить на плоскости с помощью графов. Графом соответствия называются рисунок, в котором элементы множеств изображены точками, а взаимосвязь между множествами — с помощью стрелок, соединяющих соответствующие элементы множеств. Например, пусть $A = \{а; в; с\}$, $B = \{д; е; к; л\}$ и $Г = \{(а; е); (в; е); (с; л); (с; к)\}$ подмножество декартового произведения $A \times B$.

Схема 3



Часто, чтобы не загромождать изображения, замкнутые кривые для обозначения множеств и точки для обозначения элементов множеств в рисунок не заносят. В этом случае предыдущий рисунок x_1 представляется в виде:

Схема 4



Существуют различные виды соответствий. Эти различия обусловлены взаимосвязью между областью отправления и областью определения соответствия, а также областью прибытия и множеством значений.

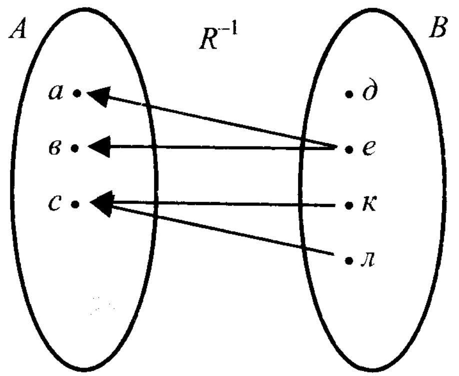
Соответствие R называется всюду определенным, если его область отправления совпадает с областью определения.

Соответствие R между множествами A и B называется соответствием «на», если его область прибытия совпадает с множеством значений. В этом случае говорят, что соответствие является *сюръективным*.

Соответствие R называется инъективным, если разным элементам из области отправления не сопоставлен один и тот же элемент из области прибытия.

Соответствие R^{-1} называется обратным к R, если каждому элементу из области отправления соответствуют те элементы из области прибытия, с которыми они сопоставлялись при соответствии R. Если выполняется xRy, то обратное соответствие имеет вид: $yR^{-1}x$.

Схема 5



Среди соответствий особо можно выделить два вида, которые имеют разнообразные приложения в различных науках: взаимно-однозначные и функциональные. Соответствие R между элементами множеств A и B называется взаимно-однозначным, если каждому элементу из множества A сопоставляется единственный элемент из множества B, и, наоборот, каждому элементу из множества B сопоставляется единственный элемент из множества A.

2. Понятие отображения. Соответствие $\boldsymbol{R}$ между элементами множеств A и B называется функциональным, если каждому элементу из области отправления соответствия сопоставляется единственный элемент из области прибытия. Если при этом область отправления соответствия совпадает с областью его определения, то такое соответствие называется **отображением** множества A в множество B. Например, отображениями множества $A = \{a;\ в;\ c\}$ в множество $B = \{a;\ к\}$ являются соответствия R_1 и R_2, задаваемые подмножествами декартового произведения $A \times B$: $Г_1 = \{(a;\ a);\ (в;\ a);\ (c;\ a)\}$ и $Г_2 = \{(a;\ a);\ (в;\ к);\ (c;\ к)\}$.

Отображения, как и соответствия между элементами двух множеств, будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, T и т. д.

Соответствие, которое является отображением, может иметь и не иметь математическое содержание. Например, следующие примеры отображений не имеют математического содержания: ребенок и его мать; учащийся и его парта; учащийся и его классный руководитель и т. д. Для теории и практики научного познания более значимы отображения математического характера, определенные на числовых множествах. К таковым можно отнести общеизвестное понятие числовой функции.

Задаются отображения различными способами:

1) с помощью стрелок от элементов первого множества к элементам второго;

2) множеством, состоящим из упорядоченных пар;

3) в виде таблицы;

4) в виде формулы (алгебраическим способом), например, $P = 4 \cdot a$;

5) точками на координатной плоскости (посредством графика);

6) словесным описанием.

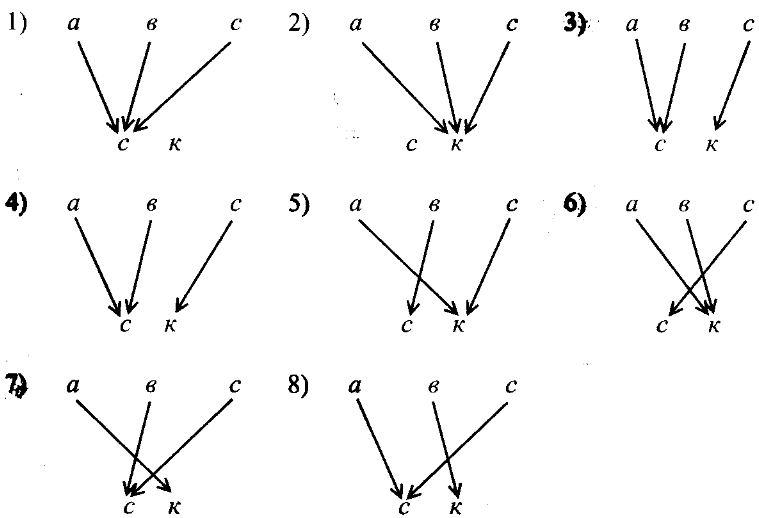
Если отображение задано с помощью некоторого подмножества декартового произведения, то первые элементы в парах называются **прообразами** (аргументами, независимыми переменными), а вторые — **образами** (значениями, зависимыми переменными).

Слова «образ» и «прообраз» очень часто встречаются на практике. Например, в искусстве: прообраз — это то первоначальное лицо, на основе которого создано (определено) другое лицо (образ).

Если отображаемые множества A и B конечные, то можно точно вычислить *число всевозможных отображений* одного множества в другое. Оно связано с числом элементов в отображаемых множествах и вычисляется по формуле: $к^p$, где p — число элементов в множестве A, $к$ — число элементов во множестве B.

Поясним эту взаимосвязь на основе следующего примера: пусть даны множества $A = \{a;\ в;\ c\}$ и $B = \{c;\ к\}$. Их декартово произведение содержит всего 6 пар: $A \times B = \{(a;\ c); (a;\ к); (в;\ к); (в;\ c); (c;\ c); (c;\ к)\}$. По определению, любое непустое подмножество декартова произведения $A \times B$ есть соответствие из множества A в множество B. Число таких соответствий равно числу подмножеств этого произведения без пустого множества, то есть число всех соответствий равно: $2^6 - 1 = 35$. Среди этих соответствий находятся и отображения, число которых нам необходимо определить. Для этого воспользуемся схематическим изображением данных отображений на плоскости (графами данных отображений). Как выше отмечалось, элементы множества A записываются в первой строке, элементы множества B — во второй, а упорядоченные пары, составленные из элементов этих множеств, показываются стрелками.

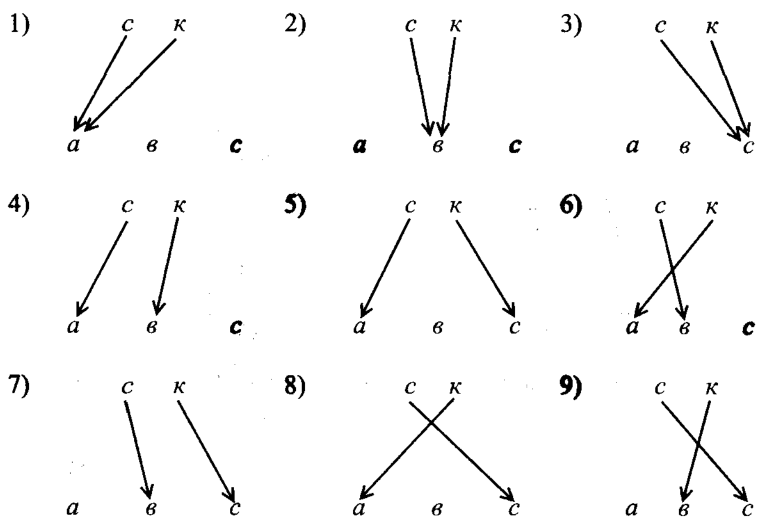
Схема 6



Других вариантов отображения не существует, следовательно, их количество равно 8, а восемь можно представить как 2^3, где показатель степени 3 указывает на число элементов в первом множестве, а основание степени 2 — на число элементов второго множества.

Если же рассматривать соответствие между множествами B и A, то согласно формуле $к^p$, число отображений из множества B в множество A равно $3^2 = 9$. Действительно, декартово произведение $B \times A$ является основой для 35 соответствий, из которых можно выделить следующие отображения:

Схема 7



Всего таких отображений 9. Это число можно представить в виде: $9 = 3^2$, где показатель 2 — число элементов первого множества B, а основание 3 — число элементов второго множества A.

Эти примеры подтверждают справедливость приведенного выше утверждения о количестве всевозможных отображений одного конечного множества в другое: общее число отображений конечного множества A в конечное множество B равно $к^p$, где p — число элементов во множестве A, $к$ — число элементов во множестве B.

Из совокупности отображений множества A в множество B можно выбрать такие, для которых образы составляют все множество B (то есть образами охвачены все элементы множества B). Такого сорта отображения называются отображением множества A «на» множество B. Используя определение отображения одного множества «на» другое, можно дать новое, равносильное ранее приведенному, определение взаимно-однозначного соответствия. Отображение множества A «на» множество B является взаимно-однозначным соответствием, если и обратное ему соответствие является отображением. Например, отображения множества $A = \{a; в; c\}$ «на» множество $B = \{c; к\}$ (схема 8) не является взаимно-однозначным, так как обратное соответствие (образы и прообразы меняются местами) не является отображением (схема 9), поскольку первые элементы пар $(c; a)$ и $(c; в)$ повторяются.

Схема 8

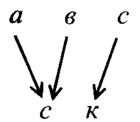
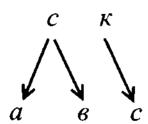


Схема 9



Отображения R множества $A = \{a; в; c\}$ «на» множество $B = \{c; к; e\}$ (схема 10) является взаимно-однозначным, так как обратное соответствие R^{-1} (образы и прообразы меняются местами) между множествами B и A так же является отображением (схема 11).

Схема 10

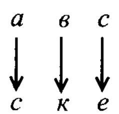
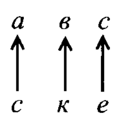


Схема 11



3. Понятие отношения на множестве. Слово отношение (взаимосвязь) часто употребляется в различных сферах человеческой деятельности:

1) отношения между государствами;
2) отношения между людьми (семьями);
3) отношения между школами;
4) отношения между учебными предметами (науками);
5) отношения между геометрическими фигурами;
6) отношения между числами и т. д.

В зависимости от свойств предметов (объектов), между которыми отношения рассматриваются, они выражаются по-разному. Например,

1) между числами возможны следующие отношения: больше, меньше, равно и т. д.;

2) между геометрическими фигурами — отношения: перпендикулярно, параллельно, равно, принадлежит и т. д.;

3) между людьми — отношения: старше, младше, родственники, коллеги, друзья и т. д.

Два понятия, соединенные между собой с помощью того или иного отношения, образуют истинное или ложное высказывание. Например, поставив между числами знак отношения меньше «<», получим: $7 < 20$; $5 < 4$ и т. д. Точно так же, поставив между геометрическими фигурами знак отношения параллельно «$||$», получим: $(AB) \parallel (СД)$; $[MP] \parallel [ЕД]$ и т. д.

На строгом математическом языке можно дать следующие эквивалентные определения отношений на множестве:

1) **Отношением на множестве A** называется любое подмножество декартового произведения $A \times A$;

2) **Отношением на множестве A** называется соответствие между двумя равными множествами $A = B$.

Из данных определений следует, что отношения на множестве — это частный случай соответствий, и поэтому им присущи многие обозначения и свойства, применимые для соответствий.

Отношения, как соответствия и отображения, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: R, S, T и т. д. Если на множестве A задано отношение R, то это можно записать одним из следующих выражений: $R(x; y)$ или xRy, где $x \in A$, $y \in A$.

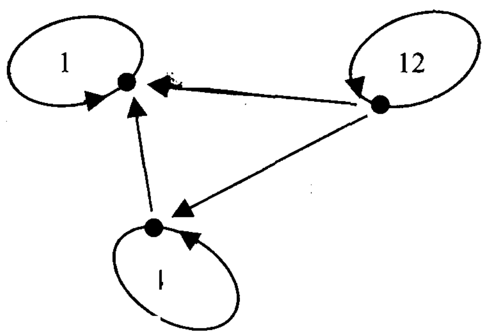
Отношения на множестве бывают *унарные* (одноместные), *бинарные* (двуместные), *тернарные* (трехместные) и т. д.

Отношения на множестве можно задавать с помощью следующих основных способов:

1) Перечислением элементов. Перечисление элементов производится с помощью указания всех пар элементов, находящихся в данном отношении.

2) Построением графа или таблицы отношения. Граф отношения несколько отличается от графа соответствия, так как он показывает взаимосвязь между элементами не двух множеств, а одного множества. При этом точки, используемые для обозначения элементов множества, называются вершинами графа. Например, если на множестве $X = \{1; 4; 12\}$ задано отношение «≤», то имеем следующий граф данного отношения:

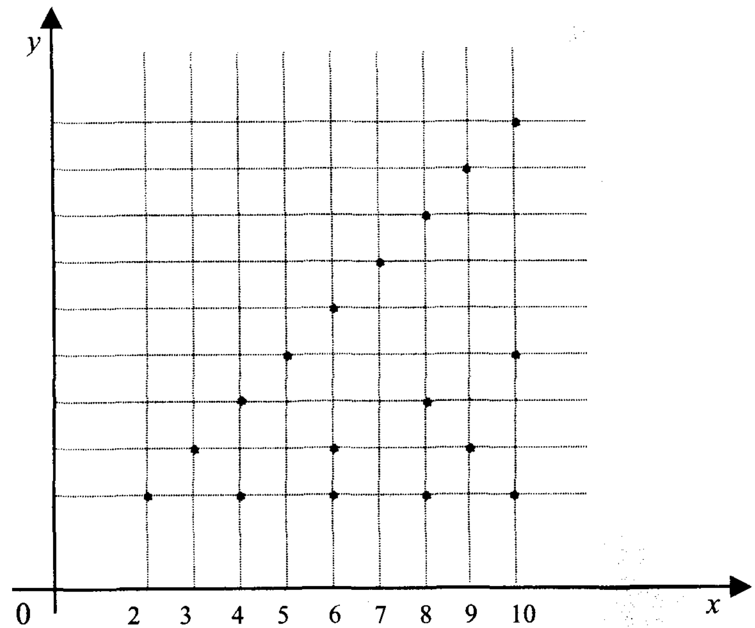
Схема 12



3) Построением графика. Данный способ для задания отношений используется на числовых множествах.

4) Указанием характеристического свойства элементов, находящихся в данном отношении. Например, $M = \{x | x \in Z, x = 3n, n \in N\}$. В этом примере рассматривается отношение «кратно 3» на множестве целых чисел.

Для отношений, заданных на числовых множествах, можно строить как графы, так и графики. Под *графиком отношения* понимается изображение отношения точками на координатной плоскости. Например, если задано отношение «делится на цело» на множестве $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\}$, то его график имеет вид:

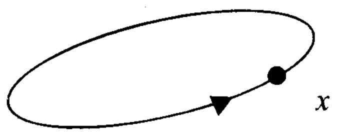


4. Свойства отношений на множестве. Отношения могут обладать различными свойствами: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Очевидно, что отношение на множестве не может обладать всеми этими свойствами одновременно, некоторые отношения обладают одними из них, а некоторые — другими. В зависимости от того, какими свойствами обладает данное отношение, оно причисляется к определенной группе отношений со своим наименованием. Например, отношение эквивалентности, отношение порядка и т. д.

Остановимся подробнее на свойствах отношений.

Пусть на множестве A задано отношение R. Может случиться, что данное отношение относит каждый элемент множества A самому себе. Следовательно, имеют место следующие соотношения: (xRx), (yRy) и т. д. Например: на множестве параллельных прямых задано отношение «параллельно». Очевидно, что оно каждую прямую относит к самому себе, т. е. соотношение $(AB) \parallel (AB)$ — истинное высказывание. Если каждый элемент множества A находится в отношении, в котором каждый элемент относится к самому себе, то такое отношение обладает свойством **рефлексивности.** Таким образом, отношение R обладает свойством рефлексивности, если для любого элемента x из A выполняется соотношение xRx. При изображении на плоскости граф отношения, обладающего свойством рефлексивности, имеет фрагменты в виде замкнутых кривых с началом и концом в каждой вершине.

Схема 13



Отношение «параллельно» обладает свойством рефлексивности, а отношение «меньше» не обладает этим свойством, так как оно не относит каждый элемент множества к самому себе: $4 < 4$ — это ложное высказывание. С этим примером связано *свойство антирефлексивности отношения*: отношение R на множестве A обладает свойством антирефлексивности, если ни один элемент этого множества не находится в этом отношении с самим собой, т. е. для любого элемента x из A выполняется соотношение $\rceil (xRx)$. Кроме отношения «меньше» этим свойством обладает, например, отношение «перпендикулярность прямых». Очевидно, что граф такого отношения не обладает фрагментами в виде петли на вершинах.

Определим отношения симметричности и антисимметричности. Пусть на множестве прямых линий дано отношение «параллельно». Составим истинное высказывание: $(AB) \parallel (СД)$. Левой частью этого отношения является (AB), а правой — $(СД)$. Переставим левую и правую части и получим новое высказывание: $(СД) \parallel (AB)$. Это высказывание также является истинным, то есть от перестановки левой и правой частей отношения «параллельно» смысл высказывания не меняется. В таком случае говорят: отношение «параллельно» обладает свойством **симметричности** (перестановочности).

Для общего случая свойство симметричности отношения, используя математическую символику, можно определить так: если R — отношение, действующее на некотором множестве A и для любых элементов $x, y \in A$ выполняется соотношение $(xRy) \Leftrightarrow (yRx)$, то отношение R обладает свойством **симметричности.** На графе отношения, обладающего свойством симметричности, все вершины соединены двойными стрелками или не соединены ни одной.

Следует отметить, что не все отношения обладают свойством симметричности. Например, отношение «принадлежит», применяемое во множестве геометрических фигур на плоскости, этим свойством не обладает. Смысл истинного высказывания $(\cdot)\ M \in [AB]$ изменится от перестановки левой и правой частей: высказывание $[AB] \in (\cdot)\ M$ — ложное. Таким образом, отношение «принадлежит» не обладает свойством симметричности. Здесь имеет место другое свойство отношения — свойство **антисимметричности**: для любых элементов $x, y \in A$ из истинности высказывания xRy и $x \neq y$ следует истинность $\rceil (yRx)$. Словесно свойство антисимметричности отношения R можно выразить так: если произвольные, неодинаковые элементы x и y множества A находятся в отношении xRy, то они не могут находиться в отношении yRx. На графе отношения, обладающего свойством антисимметричности, вершины могут быть соединены только одной стрелкой.

Составим несколько истинных высказываний с помощью отношения «меньше» среди чисел так, чтобы правая часть данного отношения стала левой частью следующего отношения: $7 < 9$; $9 < 10$; $10 < 12$; $12 < 20$ и т. д. Далее, исходя из этих высказываний, составим новые, переходя от левой части одного высказывания к правой части следующего: $7 < 10$; $9 < 12$; $10 < 20$. Видим, что и эти высказывания являются истинными, то есть из высказываний $7 < 9$ и $9 < 10$ вытекает истинность третьего высказывания, составленного путем перехода от левой части первого к правой части второго: $7 < 10$. В таком случае говорят: отношение «меньше» обладает свойством **транзитивности** (переходности).

В общем случае свойство транзитивности отношения R, заданного на множестве A, формулируется следующим образом: отношение R обладает свойством транзитивности, если для любых элементов x, y, z из множества A из истинности высказываний (xRy) и (yRz) вытекает истинность высказывания (xRz).

Чтобы проверить, обладает ли отношение R, заданное на некотором множестве A, свойством транзитивности, необходимо

мо проверить истинность соотношения: $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$. Если это утверждение истинно, то R обладает свойством транзитивности. На графе отношения, обладающего свойством транзитивности, если есть стрелка от x к y и от y к z, то обязательно будет стрелка от x к z.

Известно, что не все отношения обладают свойством транзитивности. Составим два высказывания с помощью отношения перпендикулярности среди прямых, считая их истинными: $(AB) \perp (СД)$ и $(СД) \perp (MP)$ (рисунок 3). Составим третье высказывание, переходя от левой части первого к правой части второго: $(AB) \perp (MP)$. Полученное высказывание ложно. Следовательно, отношение «перпендикулярно» не обладает свойством транзитивности (переходности).

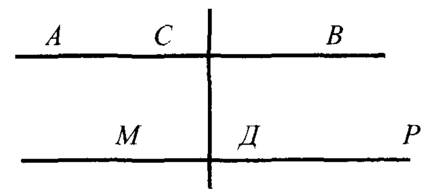
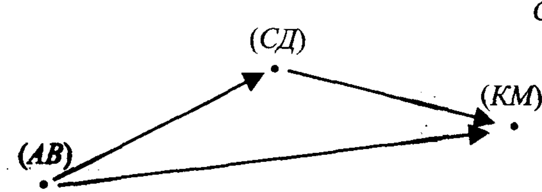


Рис. 3

Отношения «больше», «меньше», «равно», «симметрично» обладают этим свойством. Например, для симметричных прямых отношение транзитивности прямых выглядит следующим образом: если $(AB) \parallel (СД)$ и $(СД) \parallel (KM)$, то $(AB) \parallel (KM)$. А изображение на плоскости в виде графа выглядит так:

Схема 14

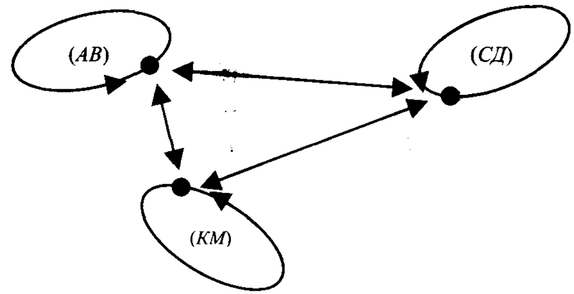


Свойства рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности отношений очень часто применяются при решении математических задач: например, при определении истинности или ложности высказываний, в доказательствах различных теорем, при решении уравнений, неравенств и т. д. Поэтому данные свойства отношений относятся к наиболее употребляемым отношениям в начальном курсе математики.

5. Отношения эквивалентности и порядка. Отношения, заданные на множестве, делятся на различные классы в зависимости от того, обладают ли они теми или иными свойствами.

Остановимся на следующих двух видах отношений, которые широко используются в вопросах обучения различным дисциплинам и в практике научного познания. Это отношения эквивалентности и порядка. Отношение на множестве называется отношением **эквивалентности** (сходства), если оно одновременно обладает тремя свойствами: рефлексивности, симметричности и транзитивности. Например, отношение «параллельно», рассматриваемое на множестве геометрических фигур, является отношением эквивалентности. Граф такого отношения обладает всеми атрибутами графов отношений, обладающих свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. на всех вершинах графа должны быть петли, любые две вершины должны соединяться парными линиями (туда и обратно) или не соединяться вообще, и, наконец, если стрелка соединяет одну вершину графа с другой, а другую с третьей, то первая вершина должна быть соединена стрелкой и с третьей вершиной. Граф отношения «параллельности» на примере трех прямых (*АВ*), (*СД*) и (*КМ*) выглядит так:

Схема 15



Отношение называется отношением **порядка**, если оно обладает свойством транзитивности, но не обладает свойством симметричности (рефлексивностью может обладать и не обладать), иначе говоря, обладает свойствами транзитивности и антисимметричности. Отношения «меньше» и «больше» являются отношениями порядка, оба они не обладают свойством симметричности, но обладают свойством транзитивности.

Множество, в котором введено отношение порядка, называется **упорядоченным множеством**. Таковыми являются основные числовые множества. Отношение порядка в них можно ввести с помощью отношений «больше» и «меньше».

Свойство транзитивности является обязательным для обоих отношений: эквивалентности и порядка. Поэтому для выяснения вида данного отношения определяют, обладает ли оно свойством транзитивности, а затем, если этим свойством обладает, выясняют, обладает ли это отношение свойством симметричности. После этого легко выясняется вид отношения — порядка оно или эквивалетности.

Отношения эквивалентности и порядка находят широкое практическое приложение. Например, с помощью отношения эквивалентности можно разбить заданное множество на подмножества, которые не имеют совпавших частей; пользуясь отношением порядка, можно расположить элементы множества один за другим в порядке убывания или возрастания; используя частный случай: отношение эквивалентности — отношение «равно», из равенств $7x - 5 = y$ и $5x - 3 = y$ можно получить равенство: $7x - 5 = 5x - 3$.

Эти отношения могут использоваться и в быту: библиотекарь сможет множество книг расставлять по полкам, пользуясь отношением сходства — «издана книга в том же году, что и ...»; отношение порядка «старше» поможет расположить людей по возрасту; отношение «выше» может ранжировать людей по росту и т. д.

Применение перечисленных свойств отношений упрощает доказательство различных теорем. Приведем пример, подтверждающий это утверждение, на основе доказательства следующей теоремы: «Если $(AB) \parallel (СД)$ и $(AB) \parallel (MP)$, то $(СД) \parallel (MP)$». Действительно, согласно свойству симметричности, имеем: $(AB) \parallel (СД) \Leftrightarrow (СД) \parallel (AB)$. Затем, учитывая условие $(AB) \parallel (MP)$ и используя свойство транзитивности, получим: $(СД) \parallel (AB), (AB) \parallel (MP) \Rightarrow (СД) \parallel (MP)$. Что и требовалось доказать.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

6.1. Определите множества, из которых образованы следующие декартовы произведения:

$A \times B = \{(0; 1); (0; 2); (0; 3); (1; 1); (1; 2); (1; 3)\}$;

$C \times Д = \{(1; 5); (1; 6); (2; 5); (3; 6); (4; 5); (4; 6)\}$;

$K \times Л = \{(0; 2); (1; 2); (2; 2); (3; 2); (0; 3); (1; 3); (2; 3); (3; 3)\}$;

$M \times P = \{(1; 1); (-1; 1); (2; 1); (-2; 1); (-3; 1); (3; 1); (4; 1); (-4; 1)\}$.

6.2. Заполните таблицу, придавая x числовые значения:

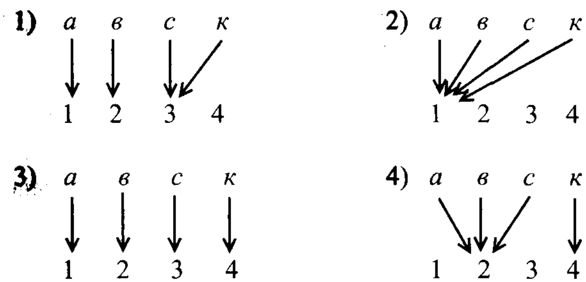
Таблица 15

x	2	−1	−0,5								
$\frac{12-x}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{3}$									

6.3. Имеются два множества: $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Составьте два соответствия из множества A в множество B.

6.4. Даны соответствия между элементами двух множеств. Перепишите их в виде множеств, состоящих из пар:

Схема 16



6.5. Перепишите следующие множества пар, записывая первые элементы в парах в одной строке, а соответствующие им элементы в другой:

1) $\{(a; 0); (в; 0); (c; 3); (к; 3)\}$; 2) $\{(a; 0); (в; 3); (c; 3); (к; 3)\}$;

2) $\{(a; 0); (в; 0); (c; 0); (к; 3)\}$; 4) $\{(a; 0); (a; 3); (в; 0); (c; 3); (c; 0)\}$.

6.6. Запишите соответствие между значениями переменной x и значениями выражения $2x - 3$ с помощью стрелок, располагая значения x в одной строке, а соответствующие значения выражения $2x - 3$ в другой.

6.7. Углекислый газ имеет химическую формулу CO_2. Составьте пять пар количественных соотношений масс кислорода и углерода.

Образец: (C; O): (6; 16).

6.8. Является ли декартово произведение множеств $A \times B$ соответствием между множеством A и множеством B? Почему? Приведите 4 примера соответствий из множества B в множество A, если $A = \{в;\ с;\ к;\ л\}$ и $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

6.9. Какую структуру имеют элементы множества, представляющего соответствие одного множества другому?

6.10. Установите соответствие (словесно) между элементами множеств так, чтобы оно было отображением:

1) множество людей и множество их имен;

2) множество людей и множество жилых домов;

3) множество заводов и множество автомашин, выпущенных на этих заводах;

4) множество учащихся и множество директоров их школ;

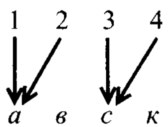
5) множество спичечных коробок и множество спичек в них;

6) множество детских садов и множество детей в них;

7) множество фермерских хозяйств и множество рабочих в них.

6.11. Напишите 3 соответствия между элементами множеств $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ и $B = \{а;\ в;\ с;\ к\}$ так, чтобы все они представляли отображения.

Образец:



6.12. Запишите соответствие между значениями a и значениями выражения $a + 7$ в виде таблицы. Будет ли такое соответствие отображением?

6.13. Запишите 7 точек своими координатами так, чтобы соответствие представляло отображение чисел из (OX) на числа в (OY).

6.14. Напишите 6 точек своими координатами на плоскости так, чтобы это множество точек не представляло отображение чисел из числовой прямой (OX) на числа числовой прямой (OY).

6.15. Какие из следующих соответствий, заданных перечислением элементов, являются отображениями:

1) $\{(1;\ 2);\ (1;\ 3);\ (2;\ 2);\ (3;\ 2)\}$;

2) $\{(1;\ 1);\ (2;\ 2);\ (3;\ 3);\ (4;\ 4)\}$;

3) $\{(1;\ 5);\ (2;\ 6);\ (3;\ 7);\ (4;\ 8)\}$;

4) $\{(1;\ 2);\ (2;\ 3);\ (2;\ 4);\ (3;\ 3)\}$?

6.16. Выясните характер взаимосвязи между прообразом и образом следующего отображения и запишите его в виде алгебраической формулы: $\{(2;\ 4);\ (3;\ 6);\ (4;\ 8);\ (5;\ 10);\ \ldots\}$.

6.17. Имеется ли разница в понятиях «соответствие» и «отображение»? Всегда ли отображение является соответствием? А наоборот? Приведите примеры.

6.18. Даны два вида пар: 1) $(x;\ x^2)$ и 2) $(x^2;\ x)$, где $x \in R$, задающих соответствия на координатной плоскости. Какое из этих соответствий является отображением? Разъясните ваш ответ, придавая x числовые значения.

6.19. Составьте таблицу соответствующих значений x и y по формуле: $y = 3x + 2$, если $x < 20$ и $x \in N$.

6.20. Перечислите те способы задания отображений, которые вам знакомы. Приведите примеры на каждый способ.

6.21. Найдите общее число отображений множества A в множество B, и наоборот, общее число отображений множества B в множество A, если:

1) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ и $B = \{а;\ в;\ с\}$;

2) $A = \{0;\ 5;\ 6;\ 7\}$ и $B = \{а;\ в;\ с;\ к\}$;

3) $A = \{3;\ 4\}$ и $B = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$.

6.22. Можно ли назвать отображением множества A в множество B следующие соответствия: во множестве A не остался элемент, который не поставлен в соответствие элементу из множества B, и во множестве B остались свободные элементы; во множестве A остались элементы, которые не поставлены в соответствие элементам множества B; во множестве A все элементы находятся в парах с элементами множества B, но среди них встречаются и такие, которые находятся в двух различных парах с элементами множества B?

6.23. Даны множества $A = \{a;\ в;\ c;\ к;\ e\}$ и $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Напишите в виде множества, состоящего из пар, два отображения множества A в множество M и три отображения множества A «на» множество M.

6.24. Какое из следующих соответствий является отображением: каждому натуральному числу n ставится в соответствие два целых числа $\pm n$; каждому целому числу ставится в соответствие одно натуральное число?

6.25. Между какими множествами количество отображений выражено следующими числами: 9^1; 8^1; 6^3; 3^3; 4^3; 6^2; 2^4?

6.26. Задайте два отображения множества $A = \{a;\ в;\ c;\ e\}$ в множество $B = \{3;\ 5;\ 7\}$ парами так, чтобы для одного из них существовало обратное отображение, а для другого обратное соответствие не было бы отображением.

6.27. Какие из следующих множеств являются отображениями:

1) $\{(1;\ 3);\ (2;\ 3);\ (3;\ 3);\ (4;\ 3);\ (5;\ 3)\}$;

2) $\{(1;\ 3);\ (1;\ 4);\ (2;\ 3);\ (3;\ 3);\ (3;\ 5)\}$;

3) $\{(1;\ 3);\ (2;\ 4);\ (3;\ 4);\ (4;\ 3);\ (5;\ 1)\}$?

6.28. Даны числа: 8, 13, 24, 17, 12. Используя отношение «больше», составьте 5 истинных высказываний.

6.29. Даны выражения: $18 + 20$; $40 : 8$; 38; $50 : 10$; $40 - 2$. *Используя отношение «равно», составьте несколько истинных* высказываний.

6.30. Используя отношения «параллельно» и «не параллельно», составьте 3 истинных высказывания по рисунку 4.

6.31. Используя отношения «перпендикулярно» и «не перпендикулярно», составьте 4 ложных высказывания по рисунку 4.

6.32. Используя отношение «равно», составьте 4 истинных высказывания по рисунку 4.

6.33. Используя отношение «короче» (меньше), составьте 4 истинных высказывания по рисунку 4.

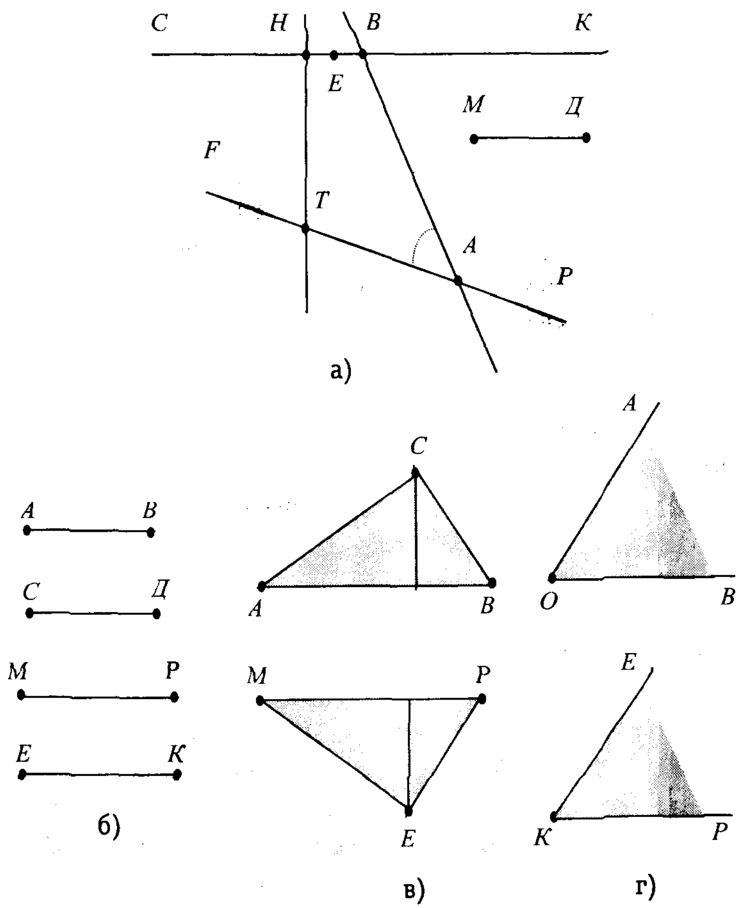


Рис. 4.

6.34. Изобразите следующие отношения на плоскости рисунками:

1) $[AB] = [MP]$;

2) $\Delta ABC \neq \Delta PKE$;

3) $\Delta ABC = \Delta OMД$;

4) $[AB] \parallel [CД]$;

5) $[AB] \perp [OM]$;

6) $(AB) \cdot (MP)$.

6.35. Сформулируйте несколько отношений между автомобилями, используя характеристики двигателей.

6.36. Используя отношение «принадлежит», составьте пять истинных и 3 ложных высказывания.

6.37. Выясните, какие из следующих отношений: «равно», «больше», «меньше», «делится» — обладают свойством симметричности на множестве натуральных чисел.

6.38. Выясните, какие из следующих отношений: «равно», «больше», «меньше», «параллельно» — обладают свойством симметричности на множестве геометрических фигур.

6.39. Даны отношения среди людей:

1) «родился в том же году, что и …»;

2) «является другом»;

3) «выше ростом».

Обладают ли свойством симметричности эти отношения?

6.40. На основе свойства симметричности отношения составьте другие высказывания, вытекающие из данных:

1) $\Delta ABC = \Delta CДE$;

2) $[AB] \parallel [CД]$;

3) $18 = 5x + 3$;

4) $(AB) \perp (CД)$;

5) $(AB) \parallel (MP)$;

6) $(KД) \cdot (MP)$.

6.41. Запишите те отношения, которые встречаются в программе по математике для начальных классов. Обладают ли они свойством симметричности?

6.42. Выясните, какие из следующих отношений: «меньше», «больше», «делится», «равно» — обладают свойством транзитивности на множестве натуральных чисел.

6.43. Выясните, какие из отношений среди людей обладают свойством транзитивности:

1) «является родственником»;

2) «учится так же, как и …»;

3) «является знакомым»; 4) «старше»;

5) «родился в том же году, что и …»;

6) «учился в той же школе, что и …»;

7) «уважает».

6.44. Выясните, какие из следующих отношений: «равно», «принадлежит», «параллельно», «шире» — обладают свойством транзитивности во множестве геометрических фигур.

6.45. Какие отношения встречаются в курсе геометрии средней школы, и какие из них обладают свойством транзитивности?

6.46. Используя свойство транзитивности отношения на множестве, составьте третье высказывание, исходя из данных двух:

1) $3x + 5 = 2$ и $2 = -3-5x$;

2) $(AB) \parallel (CД)$ и $(CД) \parallel (ME)$.

6.47. Из следующих высказываний, задающих те или иные отношения, выберите истинные и определите, какие из них обладают свойством рефлексивности: $15 = 3 + 2$; $16 = 24 - 8$; прямоугольник есть четырехугольник; Володя есть Володя; прямая (AB) перпендикулярна прямой (AB); число 5 делится на число 5?

6.48. Какие из отношений обладают свойством рефлексивности: «моложе»; «короче»; «равно»; «родился в том же году, что и …»; «находится в том же шкафу, что и …»; «не лучше»; «похож»?

6.49. Запишите примеры отношений в три столбика: в первом столбике отношения, обладающие только свойством транзитивности; во втором — отношения, обладающие свойствами транзитивности и рефлексивности; в третьем — отношения, обладающие одновременно транзитивным, симметричным и рефлексивным свойствами.

6.50. Приведите примеры отношений, не обладающих свойством транзитивности.

6.51. Запишите в три столбика примеры (по пять примеров в каждом): в один столбик — отношения эквивалентности, в другой — порядка, в третий — отношения, не относящиеся к первым двум видам.

6.52. Разбейте множество книг в библиотеке на подмножества, задав на нем различные отношения, являющиеся отношениями эквивалентности.

6.53. Разбейте следующие множества на подмножества, задав на них какое-нибудь отношение эквивалентности: множество овец в отаре; множество врачей; множество фигур; множество отрезков; множество городов России.

6.54. Составьте множества, которые могут быть разбиты на подмножества одним из данных отношений: «проживает в том же населенном пункте, что и ...»; «имеет точно такой же цвет, что и ...»; «равно»; «параллельно».

6.55. Пользуясь свойством «транзитивности» отношения, составьте новое высказывание на основе данных двух:

1) $(AB) \parallel (СД)$ и $(СД) \parallel (EK)$;
2) $3x + 2 = y$ и $y = 5 - 2x$;
3) $a < в$ и $в < c$;
4) $a \geq в$ и $в \geq к$.

6.56. Задайте отношение «порядка» на множестве автомашин и сформулируйте характеристическое свойство автомобилей, использованное при этом.

6.57. Заполните следующую таблицу по образцу:

Таблица 16

Отношения	Обладает ли свойством	
	симметричности	транзитивности
Равно	да	да
больше		
меньше		
не меньше		
делится		
принадлежит		
не принадлежит		

Продуктивные

6.58. Можно ли установить взаимно-однозначное соответствие между элементами множества N и элементами множеств Z, Q? А между элементами множеств Z и Q? Если да, то приведите правило (схему) построения таких соответствий.

6.59. Дана формула для вычисления длины окружности по ее радиусу: $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности. Представляет ли данная запись отображение? Как вы узнали? Вычислите пять пар соответствующих элементов по этой формуле.

6.60. В химической формуле воды H_2O имеется соответствие между массой водорода и массой кислорода. Представляет ли такое соответствие отображение? Если да, то найдите 4 пары соответствующих чисел согласно формуле.

6.61. Докажите, что между множеством натуральных чисел и следующими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие:

1) целых неотрицательных чисел;
2) целых чисел;
3) квадратов натуральных чисел;
4) натуральных чисел, кратных 3.

6.62. Какие функциональные зависимости (отображения) в явной или не явной форме встречаются в курсе математики начальной школы? Приведите их определения и свойства.

6.63. Кто впервые воспользовался в своих математических рассуждениях терминами «отображение» и «функция»? Что вы можете рассказать об истории развития понятия «функции».

6.64. Докажите, что между следующими парами множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие:

1) A — множество сторон треугольника, B — множество его углов;

2) A — множество дней недели, $B = \{а, б, в, с, е, к, р\}$;

3) A — множество точек на полуокружности, B — множество точек на диаметре;

4) A — множество четных натуральных чисел, B — множество нечетных натуральных чисел;

5) Пусть ABC — треугольник. MN — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC.

Множество $A \equiv [MN]$, множество $B \equiv [AC]$.

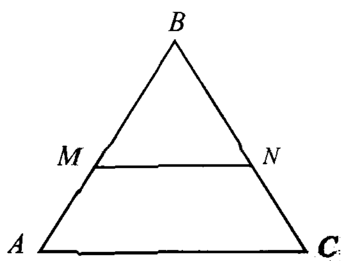


Рис. 5.

6.65. Докажите, что общее число отображений конечного множества A в конечное множество B равно $к^p$, где p — мощность множества A, $к$ — мощность множества B.

6.66. Общепринято определение: множество, в котором введено отношение порядка, называется упорядоченным множеством. Докажите, что множества N, Z, Q — упорядоченные множества. С помощью какого отношения в них введено отношение порядка?

6.67. Постройте графики следующих отношений во множестве действительных чисел и укажите среди них графики отображений:

а) $R = \{(x, y)/y = |x|\}$;

в) $R = \{(x, y)/x^2 + y^2 = 25\}$;

с) $R = \{(x, y)/y = 2x + 1\}$.

6.68. Установите взаимно-однозначное соответствие между отрезком $0 \le x \le 1$ и всей числовой прямой.

6.69. *Установите взаимно-однозначное соответствие между* точками плоскости и точками сферы, из которой выброшена одна точка.

6.70. Докажите, что между множеством точек квадрата и множеством точек окружности, центр которой совпадает с точкой пересечения диагоналей квадрата, можно установить взаимно-однозначное соответствие.

6.71. Считается, что натуральное число a делится на натуральное число $в$ с остатком, если существует пара натуральных чисел q и r, для которых выполняются соотношения $a = bq + r$, $0 \le r < b$. При этом q считается неполным частным, а r — остатком.

Задача: приведите процедуру разбиения множества всех натуральных чисел на попарно непересекающиеся подмножества с помощью отношения «делится с остатком». Что можно сказать о числе элементов в подмножествах? Какое количество вариантов такого разбиения существует?

7. Понятие натурального числа и теоретико-множественное истолкование арифметических операций над натуральными числами

1. Равномощные множества. В природе часто встречаются пары: учитель и ученик, мать и ребенок, муж и жена, ложка и вилка, тарелка и ложка, день и ночь и т. д. Уже в раннем детстве человека интересуют многие практические вопросы, непосредственно связанны с парами: хватит ли в вазе яблок, чтобы каждому члену семьи дать по одному? Достаточно ли тарелок на столе во время обеда? Каждому ли гостю достанется стул за обеденным столом?

Во всех таких примерах мы рассматриваем два множества и выясняем, в каком из них больше (меньше) элементов, или же они состоят из одинакового количества элементов. Для этого мысленно составляются пары, взяв по одному элементу из каждого множества: яблоко — человек; тарелка — человек; стул — человек. При этом могут иметь место различные варианты возможных ситуаций, например, следующие:

а) остался человек, которому не хватило яблока. Отсюда вывод — людей больше, чем яблок, а яблок меньше, чем людей;

б) у каждого человека по одной тарелке и еще оставались тарелки. Вывод: тарелок больше, чем людей, а людей меньше, чем тарелок;

в) все гости сели на стулья и лишних стульев нет. Вывод — гостей столько же, сколько имеется стульев.

Такой способ сравнения двух различных множеств в количественном отношении знаком людям с глубокой древности, еще до того, как они овладели речью и научились считать предметы. В математике, когда возникает необходимость характеристики некоторого множества относительно количества элементов в нем, употребляют слово **мощность**. Используя этот термин, можно констатировать, что в приведенных выше примерах мощность множества людей больше мощности множества яблок и меньше мощности множества тарелок, но мощность множества стульев такова же, что и мощность множества людей, поскольку стульев оказалось столько же, сколько было людей.

Итак, для сравнения двух конечных множеств по их мощностям (по количеству элементов в них) составляются пары путем выбора по одному элементу из каждого множества. То множество, в котором окажется избыток элементов, имеет большую мощность. Если при этом не обнаружится ни избытка, ни недостатка элементов, то множества считаются равномощными. Последнее утверждение по своей сути является определением взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств. Поэтому понятие «равномощности» на строгом математическом языке определяют следующим образом: два множества называются **равномощными**, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Слово «мощность» применяется как для конечных, так и для бесконечных множеств. Для конечных множеств мощность есть число его элементов. Для бесконечных множеств — это более сложное понятие и определяется методом абстракции как то общее, что есть у всех множеств, между элементами которых можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Наименьшей бесконечной мощностью является мощность множества натуральных чисел.

Понятие «мощности» множества введено основателем теории множеств Георгом Кантором (1845–1918), который установил, что мощность множества действительных чисел больше мощности множества натуральных чисел, и тем самым показал, что бесконечные множества могут быть классифицированы по их мощности.

2. Понятие натурального числа и счета элементов конечного множества. История развития понятия числа не отделима от истории развития жизни самого человека. Если люди на первоначальном этапе своей жизни научились сравнивать две совокупности по количеству элементов в них путем составления пар, взяв по одному элементу из каждого множества, то в последующем этот способ был упрощен: в качестве одного из сравниваемых множеств он использовал специальное множество, например, пальцы своих рук или ног. Например, количество орехов у себя в кармане он показывал бы числом пальцев своих рук.

Прошли многие тысячи лет, пока человек не научился обозначать мощности различных множеств знаками. С развитием речи мощности различных множеств человек начал выражать словами: один, два, три и т. д., а с появлением письменности эти слова заменялись специальными знаками. Разные народы по-разному это делали. Древние римляне пользовались такими символами: I, V, X, L, C, D, M, ..., а индусы и арабы использовали другие символы: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Используя различные комбинации из этих символов, люди описывали число элементов, входящих в различные конечные множества.

С развитием ремесла и торговли людям приходилось иметь дело со счетом крупных наборов предметов, а для записи

результатов их счета требовалось все больше новых и новых знаков, являющихся мощностями этих множеств, что создавало большие трудности. Люди нашли выход: счет производился не только отдельными предметами, но и группами из таких предметов (по 2, по 5, по 10, по 20 и т. д.).

Современный счет ведется «десятками», и используются для записи чисел только десять знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Как только при счете получится десять предметов, то говорят, что получился один десяток. Затем счет ведется десятками и единицами, пока число десятков не дойдет до десяти: из десяти десятков образуется новое количество, которое называется сотней. Из десятка таких сотен образуется другое количество, которое называется тысяча. Здесь мы видим, что каждый раз берется десяток (десять единиц, десять десятков, десять сотен и т. д.), поэтому такой счет называется **десятичной системой счета**.

В древние времена были различные системы счета, например, шестидесятеричная система счета. Ее остатки сохранялись в единицах измерения времени (60 секунд составляют 1 минуту, 60 минут составляют 1 час). На Кавказе в ряде языков (аварский, грузинский, лезгинский, карачаевский, ногайский) и в наше время в устной речи пользуются двадцатиричной системой счета. Об этом свидетельствует чтение чисёл. Например, числа 75 и 98 читаются: «три по двадцать и пятнадцать» и «четыре по двадцать и восемнадцать».

Впервые десятичный счет появился в Индии в V веке нашей эры.

В этой системе счета для чтения чисел знаки, участвующие в записи числа, предварительно разбивают на классы, по три цифры в каждом, ведя отсчет справа налево. При этом каждая тройка цифр имеет специальное название:

1) первая тройка цифр — это класс единиц;

2) вторая тройка цифр — это класс тысяч;

3) третья тройка цифр — это класс миллионов;

4) четвертая тройка цифр — это класс миллиардов;

5) пятая тройка цифр — это класс триллионов и т. д.

Каждый класс цифр состоит из трех разрядов: единицы, десятки и сотни (см. табл. 17).

Таблица 17

Класс триллионов			Класс миллиардов			Класс миллионов			Класс тысяч			Класс единиц		
с.	д.	е.	с.	д.	е.	с.	д.	е.	с.	д.	е.	с.	д.	е.
3	5	1	4	4	5	6	7	8	9	3	1	1	6	8

Прежде чем прочитать число 351445678931168, разбивают его на классы, *начиная справа налево по три цифры в каждом* классе: 351 445 678 931 168, затем читают слева направо число каждого класса, добавляя его название — 351 триллион 445 миллиардов 678 миллионов 931 тысяча 168. Название класса единиц обычно опускается. В любом классе единица второго разряда в 10 раз больше единицы первого разряда, а единицы третьего разряда — в 10 раз больше единицы второго разряда: 1 — сотня, 1 — десяток, 1 — единица.

При отсутствии цифр какого-нибудь разряда или класса название этого класса или разряда не читается, а при записи числа отсутствующие классы или разряды обозначаются нулями: 5 000 706 — пять миллионов семьсот шесть.

До недавнего времени широкое применение имела только десятичная система счисления, правда, иногда использовались и другие системы счисления. Например, римская. Для записи чисел римскими цифрами применяются следующие знаки: I — один, V — пять, X — десять, L — пятьдесят, C — сто, D — пятьсот, M — тысяча. Если цифра, означающая меньшее число, расположена перед знаком, означающим большее число, то это

означает вычитание, в остальных случаях расположение знаков принимается за сложение. Знаки I, X, C могут быть повторены до трех раз за крупной цифрой. Например, XXX, CXXV читаются: 30, 125. Запись XIX читается: 19 = 10 + 9.

В последние годы прорыв в области электронно-вычислительной техники был обеспечен благодаря использованию возможностей двоичной системы счисления. В настоящее время для этих же целей используются восьмеричная и шестидесяти четверичная системы счисления.

Если под мощностью конечного множества понимать число его элементов, то совокупность всех множеств можно разбить на классы по количеству элементов в множествах, входящих в данный класс. Например, в первый класс войдут множества, состоящие из одного элемента, во второй — из двух элементов, в третий — из трех элементов, в четвертый — из четырех элементов и т. д. Тем самым, каждый класс будет связан с одним только числом: первый — 1; второй — 2; третий — 3; четвертый — 4 и т. д. Эти числа представляют собой мощности множеств, из которых состоят эти классы.

Располагая данные числа друг за другом мы получим следующий ряд из натуральных чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; и т. д.

Обозначив множество всех натуральных чисел через латинскую букву N, можно записать данное множество чисел следующим образом:

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; ...\}. \qquad (7.1)$$

Некоторые авторы в множество натуральных чисел включают и число элементов пустого множества — 0. В этом случае натуральный ряд обозначается через Z_+ и имеет вид:

$$Z_+ = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; ...\}. \qquad (7.2)$$

Понятие натурального числа позволяет ввести в употребление понятия конечного и бесконечного множеств. Известно, что на ряду с множествами, число элементов которых легко можно сосчитать, существуют множества, для которых пересчитать элементы не всегда возможно. Например, можно точно определить число людей, присутствующих в кинотеатре, на собрании, но число рыб в Черном море или в мировом океане точно не укажешь, хотя такое число, как бы велико оно ни было, имеется. А вот количество точек на прямой линии невозможно указать натуральным числом, так как оно «превосходит» любое натуральное число.

В §5 и в дальнейшем мы пользовались понятием «конечное множество», не давая ему строгого математического определения. Дадим строгое определение данному понятию, используя понятие «отрезок натурального ряда». Его определение вытекает из соотношения (7.1): отрезком N_a натурального ряда чисел называется множество натуральных чисел, не превосходящих число a. Например, под отрезком N_5 мы понимаем множество натуральных чисел от 1 до 6, т. е. $\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Очевидно, что любой отрезок натурального ряда включает в себя единицу. Посредством математической символики отрезок натурального ряда чисел N_a запишется в виде: $N_a = \{x : x \in N \text{ и } x \leq a\}$.

Теперь определение конечного множества можно записать в следующем виде: множество называется **конечным**, если оно равномощно некоторому отрезку натурального ряда. Например, множество вершин куба — конечное множество, так как оно равномощно отрезку натурального ряда чисел N_4. Если же нельзя установить взаимно-однозначное соответствие между элементами множества A и числами некоторого отрезка натурального ряда, то множество A называется **бесконечным**.

Через понятие отрезка натурального ряда чисел можно ввести понятие счета элементов конечного множества. Счетом

элементов конечного множества называется установление взаимно-однозначного соответствия между элементами некоторого множества A и числами некоторого отрезка натурального ряда. Процедура установления взаимно-однозначного соответствия между элементами множества A и числами отрезка натурального ряда удовлетворяет двум основным требованиям, предъявляемым при счете: ни один элемент множества A не может быть пропущен при счете или сосчитан дважды.

Множество натуральных чисел обладает следующими основными свойствами:

1. Каждое натуральное число есть мощность конечного множества.

2. Среди натуральных чисел имеется наименьшее — это единица (1): мощность одноэлементных множеств.

3. Если имеется одно натуральное число, то можно найти еще одно натуральное число, увеличив данное число на единицу.

4. Если имеется натуральное число, отличное от единицы, то всегда можно найти еще одно натуральное число, которое на единицу меньше данного.

5. Множество натуральных чисел бесконечно, так как процесс образования все новых натуральных чисел бесконечен, а это означает, что мощность множества натуральных чисел невозможно выразить натуральным числом.

Данные свойства сформулированы с учетом того, что натуральный ряд определен посредством соотношения (7.1). Если натуральный ряд определен посредством соотношения (7.2), то свойства 2 и 4 имеют несколько иной вид:

2'. Среди натуральных чисел имеется наименьшее — это нуль (0): мощность пустого множества;

4'. Если имеется натуральное число, отличное от единицы, то всегда можно найти еще одно натуральное число, которое на единицу меньше данного.

Приведенные свойства, по сути своей, совпадают с аксиомами Джузеппе Пеано (1858–1932). Они значимы для теории чисел, так как на их основе строится аксиоматика множества натуральных чисел, а внутри построенной аксиоматической теории дается возможность строго определить все арифметические операции над натуральными числами.

Истолкование же смысла арифметических операций над натуральными числами, формирование представлений о свойствах этих операций удобнее проводить на основе понятия о множестве. Арифметические действия над натуральными числами непосредственно связаны с операциями над множествами. Остановимся подробно на так называемом «теоретико-множественном» истолковании каждого из четырех основных арифметических действий.

3. Объединение множеств и сумма двух натуральных чисел. Мощность объединения двух множеств зависит от мощностей объединяемых множеств, она не будет меньше мощности любого из объединяемых множеств, но не будет больше суммы их мощностей. Пусть мощность множества A равна 3, мощность множества B равна 2 (множества A и B не пересекаются), тогда мощность их объединения равна 5: к элементам множества A добавляются элементы множества B, если таковых нет в множестве A. Символически это запишется в виде: $3 + 2 = 5$, которое означает, что сумма чисел 3 и 2 равна 5. Если в объединяемых множествах окажутся одинаковые элементы, то в объединение они входят только один раз. Например, пусть имеются множества $K = \{1; 2; 3; 4\}$ и $E = \{1; 3; 5\}$. Их объединение получается присоединением к элементам множества K тех элементов множества E, которых нет в множестве K: $K \cup E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. В данном случае сумма мощностей объединяемых множеств больше мощности их объединения, то есть $4 + 3 > 5$, но мощность объединения не меньше мощности любого из объединяемых множеств.

В равенстве $3 + 2 = 5$ числа 3 и 2 называются слагаемыми, а число 5 значением суммы $3 + 2$.

Рассмотрим пример: пусть $A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $B = \{0; 5; 6; 7; 8\}$ два непересекающиеся множества. Число элементов множества A равно 4, а число элементов множества B равно 5. Тогда под суммой двух натуральных чисел 4 и 5, которые представляют собой число элементов множеств A и B, нужно понимать число элементов объединения $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Подсчет показывает, что оно равно $9 : 4 + 5 = 9$.

Приведенные выше рассуждения, применяемые для частных случаев сложения натуральных чисел, можно распространить и на общий случай. Пусть A и B — два конечных множества и $A \cap B = \varnothing$. Обозначим через $a = n(A)$ и $в = n(B)$ число элементов множеств A и B соответственно. Тогда под **суммой** натуральных чисел a и $в$ будем понимать натуральное число $c = n(A \cup B)$, равное числу элементов множества $A \cup B$. В символической форме, запись суммы чисел, имеет вид: $a + в = c$, где a и $в$ — слагаемые, c — сумма.

Интерпретация суммы двух натуральных чисел подобным образом носит название теоретико-множественного истолкования.

Сумма натуральных чисел обладает следующими основными свойствами:

1. $a + в = в + a$ — коммутативность;
2. $a + (в + c) = (a + в) + c$ — ассоциативность.

Эти свойства легко доказываются на основе свойств ассоциативности и коммутативности для операции объединения множеств.

4. Дополнение подмножества конечного множества до самого множества и разность натуральных чисел. Разность двух натуральных чисел, определенная тем или иным способом, имеет теоретико-множественное истолкование, которое основывается на определении дополнения подмножества конечного множества до самого множества. Напомним это определение: пусть множество B — некоторое собственное подмножество конечного множества A, тогда **дополнением** множества B до множества A называется такое множество E, которое состоит из элементов, принадлежащих множеству B, но не принадлежащих множеству A. Например, пусть $A = \{a, в, c\}$ и $B = \{a, в\}$, тогда $A \setminus B = E$, где множество $E = \{c\}$ является дополнением множества B до множества A.

Дополнение подмножества B конечного множества A является частным случаем разности двух множеств, поэтому иногда его называют разностью между самим множеством и его подмножеством. Смысл этого предложения математическими символами записывается в виде: $A \setminus B = E$, где множество E есть дополнение подмножества B до множества A. Ясно, что $E \cup B = A$.

Пусть мощность множества A равна 9, а мощность некоторого его подмножества B равна 4. Тогда имеет место числовое равенство: $4 + 5 = 9$, где 5 есть мощность дополнения подмножества B до множества A. Или же 5 есть число элементов разности между самим множеством и его подмножеством. То есть $5 = 9–4$. Таким образом, мы имеем разность между суммой и одним из слагаемых. Очевидно, что другое слагаемое можно назвать дополнением первого слагаемого до суммы. В равенстве «$9–4 = 5$» 9 — уменьшаемое, 4 — вычитаемое, а $9–4$ — разность.

Аналогичные рассуждения имеют место и в общем случае: пусть A — некоторое конечное множество. Множество B — собственное подмножество множества A, т. е. $B \subset A$. Если обозначим через E дополнение подмножества B до множества A, то имеет место равенство $E = A \setminus B$. Введем следующие обозначения для числа элементов этих множеств: $a = n(A)$, $в = n(B)$ и $c = n(E)$. Тогда под разностью натуральных чисел a и $в$, которые выражают собой число элементов множеств A и B, мы понимаем натуральное число c,

равное мощности дополнения подмножества B до самого множества A. Это утверждение символически записывается так: $a - в = c$, где a — уменьшаемое, $в$ — вычитаемое и c — разность.

5. Декартово произведение множеств и произведение натуральных чисел. Произведение натуральных чисел можно определить различными способами: через операцию сложения натуральных чисел, через отношение «непосредственно следовать за» и т. д. Данная операция имеет четко определенный теоретико-множественный смысл, который можно пояснить на основе понятия «декартово произведение двух множеств».

Пусть даны два конечных множества $A = \{a; в; c\}$ и $B = \{p; н; к; e\}$. Их декартово произведение $A \times B = \{(a, p), (a, н), (a, к), (a, e), (в, p), (в, н), (в, c), (в, e), (c, p), (c, н), (c, к), (c, e)\}$.

Для удобства дальнейших пояснений декартово произведение $A \times B$ запишем в табличной форме:

Таблица 18

	р	*н*	*к*	*е*
а	(*а*, *р*)	(*а*, *н*)	(*а*, *к*)	(*а*, *е*)
в	(*в*, *р*)	(*в*, *н*)	(*в*, *к*)	(*в*, *е*)
с	(*с*, *р*)	(*с*, *н*)	(*с*, *к*)	(*с*, *е*)

Декартово произведение двух конечных множеств содержит столько пар, скольким равно произведение их мощностей. Например, в приведенном выше примере, мощность множества A равна 3, мощность множества B равна 4, а мощность их произведения равна 12. Она легко вычисляется простым подсчетом количества пар в таблице 18: $12 = 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$ или $12 = 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4$. На основании этих равенств можно утверждать, что под произведением натуральных чисел 3 и 4, которые равны мощностям множеств A и B, мы понимаем натуральное число 12, равное мощности декартового произведения $A \times B$.

Такие рассуждения имеют место и в общем случае: если A и B — конечные множества, $n(A) = a$, $n(B) = в$, то под произведением натуральных чисел a и $в$ мы должны понимать число элементов в декартовом произведении $A \times B$. Обозначая число элементов декартова произведения через c, имеем: $c = n(A \times B) = a \cdot в$, где a и $в$ — множители, а c — произведение.

Таким образом, с теоретико-множественных позиций, под произведением натуральных чисел a и $в$, которые представляют собой мощности некоторых множеств A и B, нужно понимать число элементов декартова произведения $A \times B$.

Произведение чисел, в отличие от декартова произведения множеств, обладает **коммутативным** свойством. На основе конкретного примера это выглядит так: $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12$ и $3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$, таким образом, $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$.

Для произвольных натуральных чисел a и $в$ данное равенство выглядит следующим образом: $a \cdot в = в \cdot a$. Доказательство этого факта и его теоретико-множественное истолкование будет вынесено в раздел задач этого параграфа.

Основываясь на понятии декартова произведения конечных множеств, можно объяснить результат умножения любого числа на нуль. Пусть дано некоторое конечное множество A, оно может быть любым, в том числе и пустым, и пустое множество $\varnothing$. Их декартово произведение строится из всевозможных упорядоченных пар, первые элементы которых принадлежат множеству A, а вторые — пустому множеству, т. е. $A \times \varnothing = \{(x; y)$, где $x \in A, y \in \varnothing\}$. Однако нет ни одной такой пары, поскольку второй элемент пары y не существует, следовательно, декартово произведение равно пустому множеству и мощность его равна нулю: $A \times \varnothing = \varnothing$ ($к \cdot 0 = 0$, где $к$ — мощность множества A).

6. Разбиение множества на равномощные подмножества и деление натуральных чисел. Будем считать, что некоторое множество A **разбито на классы**, если

1) подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ попарно не пересекаются;

2) объединение подмножеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$ дает само множество A [12].

Например, множество треугольников на плоскости можно разбить на два класса: множество равносторонних и множество неравносторонних треугольников. А множество натуральных чисел можно разбить, скажем, на четыре класса:

1) множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 0;

2) множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1;

3) множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 2;

4) множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3.

Разбиение множества на классы необходимо для точного распределения объектов по классам (группам). При таком разбиении мы не ставим те или иные ограничения на число элементов в подмножествах $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Однако на практике часто приходится иметь дело с разбиением множества на подмножества, в которых одинаковое количество элементов. Такая процедура носит название **разбиение множества на равномощные подмножества**. Например, в классе было 36 учащихся. Во время урока физкультуры они разбились на две группы, по 18 человек в каждой. Здесь мы имеем множество учащихся класса и два равномощных между собой его подмножества.

Разбиение множества на равномощные подмножества возможно не всегда. Так, названное нами выше множество учащихся из 36 человек невозможно разбить на 5 равномощных между собой подмножеств.

Любое непустое множество M, содержащее более одного элемента, можно разбить на равномощные подмножества, если каждое подмножество состоит только из одного элемента, что означает — представление данного множества в виде объединения одноэлементных подмножеств. На языке чисел это пишется: $n(M) = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ слагаемых}}$, где $n(M)$ обозначает мощность множества M.

Если данное множество можно разбить на равномощные подмножества, а число таких подмножеств не совпадает с числом элементов в самом множестве, то разбиение множества можно произвести несколькими способами. Например, множество $A = \{a, в, c, к, e, p\}$ можно разбить на два равномощных подмножества: $A = \{a, в, c\} \cup \{к, e, p\}$ по три элемента в каждом. Это означает, что число 6, выражающее количество элементов множества A, делится на два и частное от деления *есть три — число элементов в каждом из подмножеств*. На языке чисел это записывается в виде 6 : 2 = 3. Это же множество $A = \{a, в, c, к, e, p\}$ можно разбить на подмножества другим способом: на 3 равномощных подмножества, содержащих по 2 элемента: $A = \{a, в\} \cup \{c, к\} \cup \{e, p\}$. Тогда частному от деления натурального числа 6 на натуральное число 3 можно дать следующее теоретико-множественное истолкование: если 6 — число элементов некоторого множества A, которое разбито на три двухэлементных подмножества, то под частным от деления натурального числа 6 на натуральное число 3 понимаем число 2, равное числу элементов в подмножествах, то есть, 6 : 3 = 2. В обоих случаях число 6 называется делимым, а 2 и 3 в зависимости от способа разбиения делителем или частным.

Из этих примеров следует, что деление чисел связано с разбиением конечного множества на равномощные попарно непересекающиеся подмножества. При этом речь идет о нахождении числа элементов в подмножествах разбиения и определении количества таких подмножеств.

Рассуждая по аналогии, частному от деления произвольного натурального числа на другое можно дать следующее теоретико-множественное пояснение.

Пусть некоторое конечное множество A разбито на попарно непересекающиеся равномощные подмножества и $a = n(A)$. Тогда,

1) если через $в$ обозначить число элементов в подмножествах, то частное $a : в$ представляет собой количество таких подмножеств;

2) если через $в$ обозначить число самих подмножеств, то частное $a : в$ представляет собой число элементов в подмножествах.

Приведенные модели теоретико-множественного истолкования смысла арифметических операций над числами могут быть распространены на свойства арифметических операций. В комплексе все они помогут будущим учителям начальных классов понять логику изложения в учебниках понятия числа, операций над ними, свойств операций над числами, а в целом — глубже усвоить смысл натурального числа.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

7.1. Есть выражение «мощность автомашины». Чем отличается смысл этого выражения от смысла выражения «мощность множества»? Назовите множество, у которого мощность не превосходит мощности любого другого множества. Как вы догадались?

7.2. Имеются две корзины: в одной — яблоки, а в другой — груши. Могли бы вы установить, мощность какого из этих множеств больше, не считая отдельно груши и отдельно яблоки? Может ли преподаватель выяснить, не делая переклички, все ли студенты явились на занятие?

7.3. Мощность объединения двух конечных множеств равна сумме мощностей объединяемых множеств. Можно ли догадаться, что эти множества не содержат общих элементов?

7.4. Что общего в понятиях «натуральное число» и «мощность множества»?

7.5. Знакомы ли вам числа, которые не является натуральными? Приведите примеры чисел, не являющихся натуральными.

7.6. Запишите всевозможные четырехзначные числа, используя только цифры — 4 и 5. Сколько таких чисел получится?

7.7. Используя только цифры 1 и 3, запишите пять шестизначных чисел и прочтите их.

7.8. Запишите следующие числа цифрами: 14 миллиардов 500 миллионов; 2 миллиарда 300 миллионов; 900 миллионов; 32 миллиона; 280 миллионов; 7 миллионов 60; 13 миллиардов 17 миллионов 25; 1 миллиард 15 тысяч 700; 23 миллиона 23; 240 миллиардов 7 миллионов 7.

7.9. Прочтите числа: 56 789 305; 8 304 563; 124 005 678; 100 969 357; 505 501 501 515; 400 000 040; 13 500 000 046.

7.10. Сколько сотен и сколько тысяч содержится в каждом из следующих чисел: 86 378 035; 3 008 756; 1 637 568; 6 700 678; 693 005 678; 13 000 000; 56 843 076 033?

Образец: в числе 450 678 содержится 4 506 сотен, 450 тысяч.

7.11. Напишите следующие числа с помощью римских цифр: 18; 39; 112; 1250; 350; 575; 31; 49; 835; 2045.

7.12. Перепишите числа, употребляя обычные цифры: MCLIII; DCXL; LXX; LC; XCIII; LXII; LXXXIV.

7.13. Прочтите предложения и выпишите только примеры бесконечных множеств: множество рыб в Тихом океане; множество детей на земном шаре; множество натуральных чисел; множество песчинок на берегу всех морей; множество точек на прямой; множество людей на земном шаре; множество листьев на деревьях; множество чисел, делящихся на 10.

7.14. Какие из данных множеств являются бесконечными:
$A = \{0; 5; 10; 15; 20; ...\}$; $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$; $C = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; ...\}$; $Д = \{10; 20; 30; 40; 50; 60\}$?

7.15. Запишите с помощью фигурных скобок семь примеров числовых множеств так, чтобы 4 из них были конечными, а 3— бесконечными.

7.16. Выпишите только истинные высказывания: $4 \notin N$; $567506 \in N$; $2\,560\,700 \in N$; $60\,000\,000 \notin N$; $7 \notin N$; $56\,758\,700\,077\,777 \in N$; $70\,700\,700\,700 \in N$; $0 \in N$; $10 \notin N$.

7.17. Назовите следующие множества с указанием характеристических свойств их элементов:

1) $\{0; 7; 14; 21; 28; 35; ...\}$;
2) $\{0; 10; 20; 30; 40; ...\}$;
3) $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
4) $\{0; 100; 200; 300; 400; ...\}$.

7.18. Определите бесконечные **множества и запишите** их с помощью фигурных скобок:

1) множество всех натуральных двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 7;
2) множество всех натуральных чисел, делящихся на 20;
3) множество всех натуральных чисел, делящихся на 15;
4) множество всех двузначных натуральных чисел, означающих круглые десятки.

7.19. Как вы понимаете смысл предложения: «Наибольшего натурального числа не существует»? Какое свойство множества натуральных чисел наводит на мысль о том, что это множество бесконечно?

7.20. Назовите множества, являющиеся объединениями следующих пар множеств:

1) множество девочек и множество мальчиков в группе;
2) множество пап и множество мам;
3) множество солдат и множество их командиров.

7.21. Назовите компоненты в записях: 18 + 20; 18 + 20 = 38. Чем отличается первое предложение от второго? Какое из этих предложений является высказыванием?

7.22. Составьте пять примеров суммы двух чисел так, чтобы только два из них не представляли высказывания.

7.23. Найдите объединения множеств и запишите их так, чтобы записи представляли высказывания:

1) $M = \{а; с; в; р\}$ и $B = \{а; с; н; р\}$;

2) $Д = \{а; н; к\}$ и $C = \{а; н; р\}$;

2) $A = \{с; в; е; н\}$ и $P = \{а; в\}$;

4) $E = \{н; к; р; е\}$ и $K = \{а; в; с\}$.

7.24. Как лучше определить мощность объединения двух множеств, не содержащих одинаковых элементов, пересчитывая элементы объединяемых множеств заново *или же пересчитывая* элементы одного множества к элементам другого? Приведите примеры из практики.

7.25. Запишите предложения с помощью знака $\cup$:

1) объединение множества A и B равно множеству C;

2) объединение множеств K и E равно множеству $Д$;

3) объединение множеств M и P;

4) объединение множеств E и P равно множеству A.

Какое из этих предложений не является представлятся высказыванием?

7.26. Назовите дополнение к множеству:

1) учителей рисования до множества учителей школы;

2) девочек до множества учащихся класса;

3) однозначных чисел до множества всех натуральных чисел до 20;

4) учащихся до множества всех людей.

7.27. Составьте 5 верных и 2 ложных высказывания о множестве натуральных чисел и запишите их с помощью знаков: $\subset$, $\not\subset$.

Образец: $\{1; 2; 3\} \subset N$ — истинно; $\{а; в; с\} \subset N$ — ложно.

7.28. Представьте каждое из множеств в виде объединения его подмножества и дополнения к нему:

$A = \{а; в; с; к\}$; $C = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $E = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$; $M = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$; $Д = \{а; и; о; ы; э; у\}$.

7.29. Из каких элементов может состоять то множество-дополнение, которое обозначено буквой в каждом примере:

1) $A \cup \{1; 2; 4; 6; 8\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

2) $\{2; 4; 6\} \cup B = \{2; 0; 6; 4\}$;

3) $\{а; в; с; к; е\} \cup X = \{а; в; к; е; с\}$?

7.30. Найдите произведения $A \times B$ и $B \times A$ и проверьте истинность равенства $A \times B = B \times A$, если

$A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $K = \{а; в; с\}$;

$A = \{1; 2; 3; 4\}$ и $K = \{1; 2; 3; 4\}$.

7.31. *Что из себя представляют элементы декартового произведения* множеств, если речь идет о произведении:

а) двух множеств;

б) трех множеств;

в) семи множеств?

Можно ли заранее определить число элементов декартового произведения множеств, если известны мощности самих множеств?

7.32. Сколько семизначных чисел можно написать с помощью цифр 1) *1* и *2*; 2) *1*, *2*, *3*? Разъясните суть этого задания с помощью произведения множеств. Если говорится о семизначных числах, то о произведении скольких множеств идет речь?

7.33. Определите число пятизначных и восьмизначных чисел, которые могут быть составлены с помощью цифр 6, 1, 8, 9.

7.34. В поселке телефонные номера состоят из трех цифр. Сколько (максимум) таких номеров может быть в поселке? А если телефонные номера шестизначные, то сколько таких номеров может быть? Ответ разъясните с помощью декартова произведения множеств.

7.35. Во время обеда в столовой посетитель выбрал себе одну столовую, одну чайную ложку и вилку. Сколько вариантов выбора перед ним может оказаться, если имеется 20 столовых ложек, 10 чайных ложек и 15 вилок?

7.36. На торжество собрались 7 девушек и 12 юношей. Сколько времени понадобится для того, чтобы каждый юноша станцевал с каждой девушкой лезгинку, если отдельный танец каждой пары рассчитан на 3 минуты?

7.37. Для патрулирования улиц города выделены 50 офицеров и 100 солдат. Их отправляли группами: по 1 офицеру и по два солдата. Сколько вариантов при этом может оказаться?

7.38. Избираются председатель кооператива, его заместитель и бухгалтер. Сколько вариантов при этом может быть, если в кооперативе всего 15 человек?

7.39. Произведение трех множеств содержит 42 элемента. Составьте эти множества. Сколько вариантов может оказаться? А если произведение трех множеств содержит 48 элементов, то сколько вариантов может оказаться?

7.40. Даны множества: $A = \{a;\ в;\ c\}$, $B = \{a;\ к\}$ и $C = \{в;\ e;\ к\}$. Найдите произведения:

1) $A \times B$;

2) $A \times C$;

3) $A \times B \times C$.

7.41. Дано множество однозначных чисел $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$. Сколько элементов содержит произведение:

1) $A \times A$?

2) $A \times A \times A$?

3) $A \times A \times A \times A$?

7.42. Декартовое произведение трех множеств состоит из:

1) 15 упорядоченных троек;

2) 21 упорядоченной тройки;

3) 24 упорядоченных троек.

Какое число элементов может содержат каждое из множеств, образующих декартовое произведение?

7.43. Дано множество $A = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$. Что из себя представляет один элемент множества $A \times A \times A \times A$? Напишите четыре элемента этого произведения.

7.44. Дано множество $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. Напишите семь элементов произведения $B \times B \times B$. Сколько таких троек содержится в этом произведении?

7.45. Составьте всевозможные трехзначные числа, используя элементы множества $A = \{1;\ 2\}$. Найдите произведение $A \times A \times A$.

7.46. Найдите декартово произведение $E \times E$, если $E = \{н;\ к;\ р;\ е\}$. Задайте два отношения, используя полученный результат, и постройте их графы.

7.47. Составьте 7 элементов множества $B \times B \times B \times B$, если $B = \{1;\ 3;\ 5\}$.

7.48. Дано множество $A = \{а;\ к;\ о;\ н;\ т\}$. Сколько слов, состоящих из трех букв, можно образовать из элементов множества A? А сколько слов из них имеет смысл в русском языке?

7.49. Разбейте множество $B = \{а;\ в;\ с;\ к;\ е;\ н;\ р;\ о;\ м;\ т;\ п;\ л\}$ на равномощные подмножества. Сколько вариантов получилось?

7.50. Сколькими вариантами можно разбить данные множества на равномощные подмножества: $A = \{а;\ в;\ с;\ к\}$; $Д = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 7\}$; $E=\{0;\ 10;\ 2\}$; $M=\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$.

7.51. Всегда ли можно разбить заданное множество на равномощные подмножества? Приведите примеры четырех множеств так, чтобы их невозможно было разбить на равномощные подмножества, содержащие более одного варианта.

7.52. Разъясните смысл выражений:

а) указать подмножества данного множества;

б) разбить данное множество на подмножества;

в) разбить данное множество на равномощные подмножества.

7.53. Приведите пример множества, имеющего 126 собственных подмножеств.

Продуктивные

7.54. Что можно сказать о равенстве $A \times B = B \times A$ для произвольных конечных множеств A и B? Приведите примеры множеств, для которых равенство верно, и примеры множеств, для которых равенство неверно.

7.55. Докажите, что для произвольных конечных множеств A, B и C выполняется равенство: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

7.56. Что можно сказать о равенствах $(A \times B) \cup C = (A \times C) \cup \cup (B \times C)$ и $(A \times B) \cap C = (A \times C) \cap (B \times C)$? Если они истинны, то докажите!

7.57. Что можно сказать о равенстве $(A \times B) \backslash C = (A \times C) \backslash (B \times C)$? Если оно истинно, то докажите!

7.58. Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B — из чисел, делящихся на 10, и множество C из целых чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$?

7.59. Определите, вытекает ли из $A = B \cup C$ равенство $A \backslash B = C$? А из равенства $A \backslash B = C$, что $A = B \cup C$?

7.60. Изобразите на координатной плоскости множество $A \times A$, если $A = \{x : x \in R,\ 0 \leq x < 5\}$. Принадлежат ли этому множеству точки: (0; 0), (0; 1), (–1; 1), (1,5), $(\frac{1}{2}; 0)$, $(\frac{1}{2}; \frac{5}{3})$.

7.61. Найдите декартово произведение множеств и результат изобразите на координатной плоскости: $A = \{x : x \in Z,\ 2 < x \leq 3\}$ и $B = \{y : y \in N,\ 3 \leq y < 5\}$.

7.62. Докажите, что для произвольных натуральных чисел a и $в$ выполняется равенство: $a + в = в + a$. Дайте ему теоретико-множественное истолкование.

7.63. Докажите, что для произвольных натуральных чисел a, $в$ и c выполняется равенство: $a + (в + c) = (a + в) + c$. Определите теоретико-множественный смысл этого равенства.

7.64. Дайте теоретико-множественное истолкование умножению натуральных чисел через понятие «объединение равномощных множеств».

7.65. Докажите, что для любых натуральных чисел a и $в$: $a \cdot в = в \cdot a$. Приведите для данного равенства теоретико-множественное истолкование.

7.66. Докажите, что для произвольных натуральных чисел a, $в$ и c выполняется равенство: $(a \cdot в) \cdot c = a \cdot (в \cdot c)$. Приведите для данного равенства теоретико-множественное истолкование.

7.67. Докажите, что $7 \cdot 0 = 0$, опираясь на:

1) понятие декартова произведения двух множеств;

2) взаимосвязь между суммой и слагаемыми.

7.68. Имеется равенство: $к \cdot 0 = 0$, где $к$ — мощность множества A. Докажите, что оно верно для любого натурального числа $к$.

7.69. Определите правила вычитания числа из суммы и суммы из числа. Дайте этим правилам теоретико-множественное истолкование.

7.70. Какова мощность всех четырехугольников на плоскости, координаты вершин которых обозначены рациональными числами?

7.71. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел?

7.72. В пункте 6 настоящего параграфа, на основе конкретных числовых примеров было показано, как используется разбиение множества на равномощные подмножества для пояснения смысла деления натуральных чисел. Как будет выглядеть данная процедура в общем случае для произвольных натуральных чисел? Сформулируйте определение делимости натуральных чисел без остатка на основе разбиения конечного множества на равномощные подмножества.

7.73. Существуют понятия «Разбиение множества на равномощные подмножества» и «Разбиение множества на классы». Что общего и в чем разница между этими понятиями?

7.74. Одним из инструментов классификации объектов заданного множества A является разбиение его на подмножества. Для этой цели можно использовать понятие «отношение эквивалентности», которое, напомним, определяется следующим образом: элементы заданного множества A называются эквивалентными, если выполняются условия:

а) каждый элемент сам себе эквивалентен;

б) если элемент a эквивалентен элементу $в$, то элемент $в$ эквивалентен a;

в) если элемент a эквивалентен $в$, элемент $в$ эквивалентен элементу c, то элемент a эквивалентен c.

Докажите, что выполнение этих условий необходимо и достаточно для того, чтобы множество A было разбито на подмножества эквивалентных между собой элементов.

7.75. Дайте теоретико-множественное истолкование правилу деления суммы на число.

7.76. Дайте теоретико-множественное истолкование операции деления с остатком.

8. Постоянные и переменные величины

1. Понятие величины. Важнейшим понятием математики, обеспечивающим формирование математической культуры будущих учителей начальных классов, является понятие «величина». С ней студенты сталкиваются не только в процессе изучения математики, но и других естественно-научных дисциплин. Она играет такую же важную роль в начальном курсе математики, как и понятие «натуральное число». По этой причине данным понятиям в курсе математики факультетов подготовки учителей начальных классов уделяется особое внимание.

Под величиной мы понимаем все то, что может быть измерено и выражено действительным числом — это длина, площадь, объем, температура, вес, скорость, ускорение, стоимость, цена и т. п. Изучение природы отдельно взятой конкретной величины не входит в число значимых задач в математике. Она рассматривает величину вообще, отвлекаясь от физического смысла, который она, как правило, имеет.

Понятию «числа» в программе по математике для начальной школы уделяется достаточно много времени и внимания. Это связано с тем, что с числами учащиеся сталкиваются на каждом занятии по математике, а также на занятиях по другим предметам. Относительно «величины» может сложиться впечатление, что она в курсе математики начальной школы играет второстепенную роль. Это далеко не так. Величины в явной и неявной форме присутствуют на всех уроках математики. Учителю и учащимся при выполнении упражнений или решении задач постоянно приходится иметь дело с величинами, изучать свойства и пояснять их смысл. В подтверждение сказанному приведем один возможный фрагмент урока, в котором учащиеся младших классов сталкиваются с понятием величины и ее развитием. Возьмем утверждение: «Купили 10 кг яблок». При разъяснении его смысла учащиеся знакомятся со следующими понятиями, связанными с понятием величины: рассматривается объект (предмет) — яблоко и его свойство — масса; для измерения массы используется единица массы — килограмм; результат измерения выражается числом 10. Число 10 является численным значением массы яблок при единице измерения килограмм. Несколько изменив данное высказывание «Купили 10 кг яблок за 50 рублей», учащиеся знакомятся с новыми величинами: ценой за единицу товара и его стоимостью.

Абсолютное большинство упражнений и задач курса математики начальной школы, в том числе, упражнения на выполнение арифметических операци над числами, имеют реальное, легко иллюстрируемое приложение к конкретным величинам.

В окружающей нас действительности много разнообразных предметов, обладающих различными свойствами: камень твердый, а вата мягкая; столб длинный, а карандаш короткий; океан большой, а пруд маленький. Некоторые свойства предметов можно измерить и результат выразить числом. Например, рост человека можно записать числом, а его ум невозможно выразить числом. Температура тела человека измеряется, но совесть человека невозможно измерить, так как нет соответствующей единицы измерения. Таким образом, для количественной оценки величины, как свойства предмета, необходимо ее измерить. Процесс измерения связан с понятием сравнения предметов.

А сравнивать можно близкие, подобные, однородные величины. Под *однородными величинами* можно понимать величины, выражающие одно и то же свойство предметов. Например: высота дома и высота столба — однородные величины; длина и ширина прямоугольника — однородные величины; площадь комнаты и площадь огорода — однородные величины; температура тела человека и температура окружающей среды — однородные величины.

2. Измерение величин. Однородные величины можно сравнивать и следовательно, измерять. Для того, чтобы выразить результат измерения величины числом или числами, как правило, пользуются следующей процедурой: из данного рода величин выбирают (фиксируют) некоторую величину и называют ее единичной, обозначают буквой e. После этого измерение величины сводится к вычислению количества единичных величин, из которых состоит измеряемая величина. Если количество единичных величин, из которых состоит измеряемая величина A равна n, то для измеряемой величины A будет верно равенство: $A = n \cdot e$.

Число n называется численным значением или *мерой величины A* при единичной величине (при единице измерения) e.

В начальной школе учащиеся сталкиваются с такими величинами, как длина, площадь, объем, время, угол. В тех случаях, когда им приходится искать численное значение этих величин, пользуются приведенной выше схемой измерения. Например, нужно измерить длину данного отрезка. Для этого выбирают единичный (например, отрезок длиной в 1 см), а затем выясняют, сколько раз этот единичный отрезок содержится в измеряемом отрезке. Допустим, что в избранном отрезке он содержится 5 раз, тогда длина отрезка будет равна 5 см.

Аналогичная картина наблюдается и при измерении площади (единица измерения — единичный квадрат), объема (единица измерения — куб со стороной, равной e), промежутков времени (единица измерения — единицы времени: секунда, минута, час и т. д.), величин углов (единица измерения радиан — угол, составляющий 1/180 часть развернутого угла).

Определение единицы измерения для конкретной величины — это длинный и сложный процесс. Долгое время люди одну и ту же величину измеряли разными единицами, пока приходили к соглашению об единой для всех единице измерения. Например, не было единого отрезка для измерения длины. В одних случаях длину измеряли шагами, в других — локтями, руками и т. д., что создавало трудности для точного измерения длины. Только в конце XVIII века во Франции было принято решение подобрать единый для всех народов единичный отрезок для измерения длины. С этой целью французские ученые: философ, математик Жан Лерон Даламбер (1717–1783) и астроном, геодезист Пьер Француа Андре Мешен (1744–1804) — определили расстояние от Северного полюса до экватора Земли по меридиану, проходящему около Парижа. Это расстояние разделили на 10000000 частей. Одну из десятимиллионных частей четверти земного меридиана (или же одну из сорокамиллионных частей всего меридиана) приняли за единичный отрезок (за «меру» длины), назвав его метром (от греческого слова «метрон», означающего «мера»).

В настоящее время во всех странах расстояние принято измерять в метрах. Метр связан с другими общепринятыми единицами измерения длины следующим образом: 1 м = 10 дм = = 100 см = 1000 мм = 0,001 км.

Существуют международные соглашения, определяющие единицы измерения и других величин — массы, времени, силы электрического тока, термодинамической температуры, силы света, плоского и телесного углов, а также производных единиц: площади, объема, плотности, скорости, работы, мощности,

яркости, освещенности и т. д. Все основные и производные единицы измерения, по которым достигнуты соглашения, отражены в Международной системе единиц (СИ).

Однородные величины можно привести к одному наименованию, то есть измерить одной и той же единицей измерения. Например: длина стола равна 120 см, а ширина 800 мм. Длина измерена единицей измерения сантиметр, а ширина — единицей измерения миллиметр. Для практических целей удобнее измерять и длину стола, и его ширину одной и той же единицей измерения: сантиметром или миллиметром. Если измерить сантиметром, то имеем следующие данные: длина — 120 см, а ширина — 80 см. А если измерить в миллиметрах, то длина 1200 мм и ширина 800 мм. Таким образом, видно, что свойства стола, связанные с расстоянием, приводятся к одному и тому же наименованию.

Не все свойства одного и того же предмета могут характеризоваться одной и той же величиной. Например, длина стола и его вес. Длину стола можно измерить единицей измерения сантиметр, а вес невозможно измерить в сантиметрах. Нужна другая единица измерения — килограмм. Эти две единицы измерения нельзя привести к одному наименованию, так как они выражают разные свойства стола. Длина стола и его вес являются величинами разного рода. Если величины выражают различные свойства предмета, то их называют неоднородными (разнородными).

Только однородные величины можно сравнивать, выполнять над ними операции сложения и вычитания. Например, 2 рубля и 2 кг невозможно сравнить, невозможно найти их сумму или разность, но 2 рубля и 20 копеек можно сравнить, выполнить над ними операции сложения и вычитания.

Величины с одинаковыми наименованиями в математике считаются *подобными выражениями*. Часто словосочетание «подобные выражения» используется для приведения подобных членов в выражении. Например, 3 м и 5 м — это подобные выражения. А 5 м^2 и 3 м, или $5a^2$ и $3a$ — неподобны. Выполнить сложение и вычитание над неподобными выражениями невозможно.

Приведение подобных членов в выражении понимается в том же смысле, что и в школе, то есть вычисление суммы или разности подобных выражений и есть приведение подобных членов. Например, 8 м^2 – 5 м^2 + 12 м^2 = 15 м^2 и $7a + 5a - 8a = 4a$. В обоих примерах выполнено приведение подобных членов.

Выполняя сложение среди однородных величин, мы можем прийти к выводу о том, что величину можно умножить на число. Например, 3 м + 3 м + 3 м + 3 м = 3 м · 4 = 12 м. Любую величину можно увеличить или уменьшить в несколько раз. Например, 10 м · 5 = 10 м + 10 м + 10 м + 10 м + 10 м = 50 м (10 м увеличили в 5 раз); 10 м: 5 = 2 м (10 м разделили на 5 равных частей. 10 м = 2 м + 2 м + 2 м + 2 м + 2 м. На каждую из пяти частей приходиться по 2 м).

Имея верное равенство 10 м · 5 = 50 м, можно составить два примера на деление: 50 м: 5 = 10 м (читается: 50 метров, деленные на 5, равны 10 метрам) и 50 м: 10 м = 5 (читается: 50 метров, поделенное по 10 метров, дают 5). Последнее равенство показывает, что частное двух однородных величин есть число, а не величина.

3. Постоянные и переменные величины. В природе встречаются постоянные и переменные величины. Величина, сохраняющая одно и то же численное значение, называется **постоянной**. Например: масса Земли, скорость света и т. д.

Если величина принимает различные численные значения, то она называется **переменной**. Понятие переменной величины связано с явлениями и процессами. Скорость движущегося поезда становится то больше, то меньше. Значит, изменение

величины характеризуется и числом, и направлением (в сторону уменьшения или в сторону увеличения), причем, эти направления противоположны. Например, выигрыш составляет 10 рублей, проигрыш также составляет 10 руб. Хотя в обоих предложениях встречается одно и то же натуральное число 10, но смысл этого числа в одном предложении не совпадает со смыслом в другом: в одном случае речь идет о прибыли, а в другом — об ущербе. Сказав «продвинулся от столба на 20 м», нужно указать и направление: влево или вправо, на север или на юг. Очевидно, что изменение величины происходит в двух противоположных направлениях: налево или направо, вверх или вниз, выше или ниже, расход или приход.

Те величины, которые характеризуются только числом, не имеют отрицательного значения. Например, длина, площадь, объем, вес, цена, стоимость, величина угла. А те величины, которые характеризуются не только числом, но и направлением, имеют и отрицательные значения. Например, движение влево и вправо, температура (повышение и понижение), вращение (вправо, влево).

Говоря о переменных величинах, следует обратить внимание на то, что они легко вводятся через понятие **формы для образования высказываний**. Встречаются высказывания, где меняется только один член предложения, при этом структура и форма предложения не меняется. Например:

- при делении 40 на 5 получится 8 (40 : 5 = 8);
- при делении 30 на 5 получится 8 (30 : 5 = 8);
- при делении 25 на 5 получится 8 (25 : 5 = 8);
- при делении 17 на 5 получится 8 (17 : 5 = 8).

В таких случаях вместо меняющегося члена предложения (в данном случае вместо делимого) ставится буква, которая и есть *переменная величина*. Тогда, вместо всех таких предложений можно написать одно: при делении числа a на 5 получится 8, то есть $a : 5 = 8$, вместо a ставятся числа и получаются высказывания или истинные, или же ложные. Другими словами, равенство $a : 5 = 8$ не является высказыванием, поскольку невозможно узнать, истинно оно или нет, но оно представляет собой форму для получения высказываний.

Формула для составления высказываний (или форма для образования высказываний) называется **уравнением** или **неравенством**, если переменная величина принимает только числовое значение. Если же переменная величина принимает не только числовые значения, то форма для образования высказываний имеет более общее название — **предикат**. Например, $x + 7 = 10$ — это уравнение, а вот предложение: город x находится на берегу реки Волга — нельзя назвать уравнением, оно является предикатом. Несомненно, все уравнения и неравенства являются и предикатами. Множество значений, которые может принимать переменная величина x, называется **областью определения предиката**. Как правило, область определения предиката обозначается буквой D. Для уравнения $x + 7 = 10$ область определения совпадает с множеством действительных чисел, т. е. $D = \boldsymbol{R}$. Предикат имеет и **множество решений**. Чтобы пояснить его смысл, рассмотрим следующие примеры. Уравнение $x + 7 = 10$ при $x = 3$ обращается в верное числовое равенство: $3 + 7 = 10$, а при x равном любому другому числу, отличному от 3, в ложное числовое равенство.

Неравенство $x + 7 < 10$ для всех x, меньших 3, обращается в верное числовое равенство, а для всех x равных или больших 3 — неверное. Таким образом, из уравнения или неравенства, а в общем случае и из предиката, при одних значениях переменной величины получаются истинные, а при других — ложные высказывания. Все значения переменной величины x, при которых образуются истинные высказывания, называются **множеством решений предиката.** Как правило, множество реше-

ний предиката обозначается буквой R. Множество решений уравнения $x + 7 = 10$ состоит только из одного числа — 3 (рис. 6, *а*). Следовательно, $R = \{3\}$. Множество решений неравенства $x + 7 < 10$ состоит из чисел, меньших 3, т. е. $R = \{-\infty, 3\}$ (рис. 6, *б*).

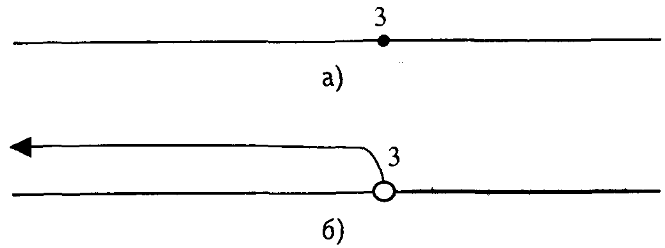


Рис. 6

В математике предикаты обозначаются через $P(x)$. Если вместо x подставить конкретное значение из области определения, то получится высказывание (истинное или ложное). Например, $P(x) : 7 + 2x = 13$ — это предикат. Таким образом, предикат $P(x)$ легко обращается в высказывание, если в нем переменную величину x заменить конкретными значениями из области ее определения или использовать слова: всякий *(каждый, все)*, существует *(найдется хотя бы одно)* какое-нибудь значение x, удовлетворяющее данному утверждению.

При письме вместо слов: *всякий, каждый, любой*, все пишется знак $\forall$. Например, запись $\forall(x)\ P(x)$ читается: для любого значения x верно утверждение $P(x)$. То есть имеется форма для образования высказываний $P(x)$, она становится высказыванием с помощью слов: любой, каждый, все. Знак $\forall$ называется **квантором общности**. Отрицание этого квантора пишется $\rceil\forall$ и читается: *не всякий, не все, не каждый.*

Для получения из предиката высказываний используют и другие слова: *существует, найдется* хоть одно значение для переменной. Например, существует хоть одно значение x, чтобы $P(x)$ стало верным. Смысл этого предложения пишется с помощью знака $\exists$ — *существует, найдется*: $\exists(x)\ P(x)$.

Его отрицание пишется $\rceil\exists$ *(не найдется, не существует)*. Знак $\exists$ называется **квантором существования**.

Итак, данный предикат обращается в высказывание, если переменную x заменить определенным значением или же воспользоваться одним из кванторов существования или общности. Например, $\exists(x \in \boldsymbol{R})$, $x + 7 = 10$ — это высказывание, оно истинно. Из заданного предиката можно получить и ложное высказывание: $\exists(x \in \boldsymbol{R})$, $x^2 + 1 = 0$. Один из этих кванторов можно заменить отрицанием другого: $\exists(x) \Leftrightarrow \rceil\forall(x)$.

Предикаты имеют много синонимов: неопределенные высказывания, уравнения (неравенства), формы для высказываний и др. Поскольку предикаты представляют формы для образования высказываний, то над ними можно произвести те же операции, что и над высказываниями: конъюнкцию, дизъюнкцию, связать их знаками импликации и эквиваленции.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

8.1. Выпишите однородные величины отдельными группами: 40 см; 50 руб.; 32 кв. м; 4 кг; 5 г; 42 коп.; 32 м; 56 мм; 39 ч; 53 г; 47°; 47 мин.; 47 м/ч; 47 м/с; 24 суток; 20 веков; 20 л; 20 кг; 20 коп, ; 20 руб.; 20 ц; 20 тонн; 20 мм.

8.2. Перечислите знакомые вам величины. Назовите несколько предметов, которые:

а) являются величинами;

б) не являются величинами.

8.3. Перечислите единицы измерения времени и массы в порядке возрастания чисел. Сколько наименований единиц измерения времени получилось?

8.4. Из следующих понятий выпишите только те, которые представляют математические величины: красота, температура, грубость, вкус, масса, время, важность, смелость, стоимость, расстояние, цвет, толщина, храбрость, объем, скорость.

8.5. Выполните действия:

1) 18 м · 4;

2) 15 ч 13 мин. · 6;

3) 156 руб. 39 коп. : 13

4) 160°45' : 15;

5) 48 руб. 15 коп. : 45;

6) 3 кг : 20;

5) 5 т 320 кг · 16;

8) 19 ч 36 мин. : 12;

9) 18 ч : 25.

8.6. Выпишите отдельно однородные величины и приведите их к одному наименованию: 1 м; 2 руб.; 2х; 2 м²; 2 га; 2 т; 2а; 2 см; 2 коп.; 2 м³; 2 года; 2°; 2 мин.; 5 дм; 5х; 5а; 5 ч; 5 кв. м; 5 руб.; 4 л; 18 мин.; 18 градусов; 3 мес.; 8а; 8х; 2 см.

8.7. Даны выражения: $5a$; $4a^2$; $6x$; $7в^3$. Составьте по три выражения, подобных каждому.

8.8. Можно ли говорить: «15 м разделить на 3 м»? А как надо говорить? В чем разница между фразами: делить «на» и делить «по»? Приведите пример и поясните свой ответ.

8.9. Наиболее длинные реки в России, находятся в азиатской ее части: Амур — 4444 км; Лена — 4400 км; Енисей — 4092 км; Обь — 5650 км. Определите протяженность русла всех этих рек вместе.

8.10. Заполните третью строку таблицы:

Таблица 19

Цены продуктов в России (цена 1 кг)					
	Мука	Рис	Сахар	Буханка хлеба	Масло
в 1989 г.	41 коп.	80 коп.	84 коп.	24 коп.	3 руб. 60 коп.
в 1991 г.	1 руб. 41 коп.	2 руб. 20 коп.	2 руб. 20 коп.	64 коп.	8 руб. 40 коп.
В 2007 г.	7 руб. 20 коп.	21 руб. 00 коп.	22 руб. 50 коп.	7 руб. 10 коп.	85 руб. 60 коп.
В 1991 г. больше, чем 1989 г. на … В 2006 г. больше, чем 1989 г. на …					

8.11. Приведите примеры на деление однородных величин так, чтобы результат деления не означал величину.

8.12. Найдите результат действия:

1) 5 ч 3 мин. – 2 ч 57 мин.;
2) 10 мин. 15 сек. – 8 мин. 42 сек.;
3) 6 м^2 – 1 м^2 30 см^2;
4) 7 м^2 – 45 см^2;
5) 1 м^3 – 1 дм^3;
6) 170 м^3 + 200 см^3 – 15 дм^3;
7) 12 га – 200 а + 17 м^2;
8) 17° + 1°15^2 – 4°403.

8.13. Вычислите значения выражений:

1) 8 км 645 м + 4 км 260 м;
2) 5 м 38 см + 9 м 75 см;
3) 8 ц 72 кг + 4 ц 98 кг;
4) 8 руб. 05 коп. +12 руб. 99 коп.;
5) 18 м 50 см – 4 м 80 см;

6) 18 т – 13 т 680 кг;
7) 9 руб. 72 коп. – 4 руб.;
8) 3 км – 1 км 540 м.

8.14. Вычислите значения произведений:

1) 2км 125 м · 8;
2) 9 т 438 кг · 2;
3) 6 м 85 см · 7;
4) 4) 15 ч 40 мин. · 14;
5) 18 ц 45 кг · 23;
6) 2 т 45 кг · 25.

8.15. Найдите стоимость товара в каждом из следующих случаев:

а) 4 кг конфет по 99 руб. 70 коп. за 1 кг;
б) 5 кг мяса по 120 руб. 90 коп. за 1 кг;
с) 3 кг печенья по 23 руб. 90 коп. за 1 кг;
д) 5 кг масла по 80 руб. 40 коп. за 1 кг.

8.16. Найдите значения частных:

1) 9 м 52 см : 8;
2) 13 т : 2;
3) 6 руб. 75 коп. : 9;
4) 3 ч 42 мин. : 6;
5) 4 т 40 кг : 8;
6) 15 т : 125;
7) 1 ч : 15;
8) 15 ч 36 мин. : 9;
9) 18 м^2 : 2 5.

8.17. Прочтите выражения правильно и выполните действия:

1) 15 м 6 дм : 4 дм;
2) 8 т : 5 ц;
3) 44 руб. : 10 коп.;
4) 8 м 64 см : 9 см;
5) 2 км : 8 м;

6) 22 руб. 44 коп. : 4 коп.;

7) 6 дм 57 мм : 9 мм;

8) 2 кг : 8 г;

9) 3 ц: 25 кг.

8.18. Составьте сложные предложения из следующих предикатов, используя знак «$\wedge$»:

1) $x + y = 6$; $y = -x - 5$;

2) $x + y = 5$; $x - y \geq 1$;

3) $3x - y \geq 2$; $2x + y \geq 3$;

4) $y = 3 + x$; $y = 2x + 1$;

5) $x - y = 7$; $x + y = 7$;

6) $y = 7$; $y \geq x$.

8.19. Замените следующие предикаты в виде систем уравнений:

1) $3x - y = 3 \wedge 2x + y = 7$;

2) $5 + x + y > 0 \wedge x - y < 0$;

3) $2x - y < 3 \wedge x + y > 3$;

4) $8 - y = x \wedge 3x + y = 8$.

8.20. Замените системы другими формами записи, используя знак «$\wedge$»:

1) $\begin{cases} x - y \leq 3, \\ 5x + 3y \leq 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - y \geq 4, \\ -x + 3y \geq 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y < 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x - y < 3, \\ x + y > 3. \end{cases}$

8.21. Даны предикаты. Обратите каждый из них в высказывание, используя кванторы существования, общности и их отрицания:

1) $x - y = 3$;

2) $7 + x = 9$;

3) $x^2 - 1 = 0$;

4) $18 - 3x = 9$;

5) $x + y < 3$;

6) $x^2 + 2 = 0$;

7) $x + y^2 = 0$

Образец: из предиката $x + y = 5$ можно получить высказывание $\forall (x, y) : x + y = 5 \Leftrightarrow \rceil \exists (x, y) : x + y \neq 5$.

8.22. Прочтите высказывания и запишите их словами:

1) $\forall (\dot{c}) \in [AB]$;

2) $\forall [AB] \subset (MP)$;

3) $\rceil (\forall [AB]) \subset (СД)$;

4) $\rceil \forall [OM] \subset (MP)$;

5) $\forall [AB] \perp (СД)$;

6) $\rceil (\forall (\dot{c})) \notin [AB]$;

7) $\rceil (\exists\, x \in \mathbf{N})$, что $x^2 + 1 = 0$;

8) $\rceil (\exists\, x \in \mathbf{Z})$, что $x + 5 = 0$.

Запись «$\dot{c}$» означает — точка C.

8.23. Каждое из высказываний в предыдущем упражнении замените равносильными им, используя не тот квантор, который используется в записи, а другой.

Оразец: $\forall [AB] \subset (MP) \Leftrightarrow \rceil (\exists [AB]) \not\subset (MP)$.

8.24. Запишите двумя способами отрицания следующих высказываний:

$\forall [AB) \subset (МД)$; $\exists (\dot{c}) \in (МД)$; $\rceil \forall\, x < 25$; $\exists\, x < 25$.

8.25. Прочтите следующее предложение, а затем запишите словесно: $\forall [AB] \subset (MP) \Rightarrow [AB] \cap (MP) = [AB]$.

8.26. Каждое из следующих предикатов обратите в истинное, а затем и в ложное высказывания, используя кванторы общности и существования:

1) $7 + x = 0$;

2) $12 + 3x = 5$;

3) $x^2 + 3 = 0$;

4) $18 - x^2 = 9$;

5) $13 + 3x = 10$;

6) $x^2 + 5x = 0$.

8.27. Составьте одно уравнение и одно неравенство, а затем преобразуйте их в истинные и ложные высказывания, используя кванторы.

Продуктивные

8.28. Запишите следующие высказывания двумя способами, используя кванторы общности и существования:

1) всякое действительное число меньше 5;

2) существует такое число x, квадрат которого меньше 1;

3) не всякая точка A принадлежит лучу MP;

4) не существует действительное число x, которое является решением уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Какие из этих предложений являются высказываниями, а какие формами для составления высказываний? Те предложения, которые являются формами для составления высказываний, обратите в высказывания, а предложения, которые являются высказываниями, в формы для составления высказываний.

8.29. Считается, что две величины x и y находятся в прямо-пропорциональной зависимости, если они соединены следующим равенством: $y - kx = 0$, и в обратно-пропорциональной зависимости, если удовлетворяют соотношению: $y - k/x = 0$. Для обоих случаев $k \in \mathbf{R}$.

Определите, какие из ниже приведенных величин находятся в прямо-пропорциональной зависимости, а какие в обратно-пропорциональной зависимости:

а) количество товара и его стоимость при постоянной цене за единицу товара;

б) время и пройденное расстояние при постоянной скорости в условиях равномерного прямолинейного движения;

в) скорость равномерного прямолинейного движения и время, необходимое для прохождения определенного расстояния;

г) скорость равномерного движения и пройденный путь за определенный промежуток времени;

д) длина стороны квадрата и его площадь;

е) длина и ширина прямоугольника при заданной площади;

ж) диаметр окружности и ее длина;

з) длина стороны квадрата и его периметр.

8.30. Площадь прямоугольника равна 8 см^2, его основание — x см. Запишите уравнение, выражающее зависимость высоты прямоугольника от его основания, и постройте график этой зависимости. Как изменится числовое значение данной величины, если единицу этой величины:

а) увеличить в 5 раз;

б) уменьшить в 3 раза?

8.31. Сколько существует прямоугольников, имеющих площади, равные 24 см^2, если известно, что длины их сторон выражаются натуральными числами? Что можно сказать о данной задаче, если длина стороны выражается действительным числом?

8.32. Участок земли, формы прямоугольного треугольника с длинами катетов 16 и 25 метров, окопали рвом шириной 1 м, причем, ров выкопали на участке. Какова новая площадь участка?

8.33. Решите следующие задачи и объясните, какие операции над длинами были выполнены в процессе решения:

а) В мотке 240 м проволоки. $\frac{5}{8}$ этой проволоки израсходовали. На сколько метров проволоки больше израсходовали, чем осталось?

б) Периметр треугольника — 37 см. Одна сторона — 12 см, другая составляет 75% длины первой стороны. Чему равна длина третьей стороны?

в) В куске было 25 м ткани. Хватит ли этой ткани, чтобы сшить 8 платьев, расходуя на каждое по 3 м?

г) Бревно длиной 8,1 м распилили на две части так, что одна из них оказалась в 1,7 раза длиннее другой. Какова длина каждой части бревна?

8.34. Решите приведенные ниже задачи и объясните, какие операции над величинами (площадями и длинами) были выполнены в процессе решения:

а) Площадь кухни — 9 м^2. Сколько плиток линолеума, имеющих форму квадрата со стороной 3 дм, нужно для покрытия пола в кухне?

б) Длина листа бумаги прямоугольной формы — 9 дм, а ширина — 8 дм. Для стенгазеты отрезали 2/3 листа, а из остальной бумаги сделали две одинаковые коробки. Сколько квадратных дециметров пошло на каждую коробку?

в) На пришкольном огороде прямоугольной формы выделены два опытных участка одинаковой площади. Длина первого участка — 30 м, а ширина — 28 м. Чему равна длина второго участка, если ширина — 20 м?

г) Периметр квадрата — 24 см. Найдите ширину прямоугольника, у которого длина равна 12 см, а площадь равна площади квадрата.

8.35. В середине прямоугольной площадки со сторонами 12 м и 10 м требуется разбить прямоугольную клумбу площадью 8 м^2 так, чтобы ее края были на одинаковом расстоянии от

краев площадки. На каком расстоянии от краев площадки должны быть расположены края клумбы?

8.36. Определите величину «длина отрезка» и опишите процедуру измерения длин отрезков. Приведите пример.

8.37. Определите величину «площадь фигуры» и опишите процедуру измерения площадей фигур. В качестве примера, используя данную процедуру, измерить площадь какой-либо фигуры неправильной формы.

8.38. Определите понятие «объем тела» и опишите процедуру измерения объема различных тел. В качестве примера, используя данную процедуру, измерить объем правильной призмы.

8.39. Определите величину «масса тела» и процедуру ее измерения.

Чем отличается масса тела от веса? Акцентируется ли внимание учащихся начальной школы на эту разницу? Если да, то как это делается?

8.40. Определите понятие «величина угла» и опишите процедуру измерения величины угла. Какие виды углов изучаются в начальной школе? Опишите методику первоначального знакомства детей с понятием «угол».

8.41. Определите величину «промежуток времени» и процедуру измерения промежутков времени. Отличается ли величина «промежуток времени» от понятия «время»? Чем?

8.42. Определите понятие «скорость тела» и процедуру измерения скорости. Во взаимосвязи с какими величинами чаще всего используется данное понятие? Какими математическими моделями описывается взаимосвязь между скоростью тела, пройденным расстоянием и затраченным временем при прямолинейном и равномерном движении? Что вы понимаете под постоянной, средней и мгновенной скоростями тела? Какая из них изучается в начальной школе?

9. Элементы комбинаторики

1. Понятие о комбинаторике. Если перед нами имеется определенное конечное множество объектов (например, цветы, карандаши, фрукты и т. д.), то мы часто задумываемся над тем, как лучше расположить их или сгруппировать с учетом тех или иных пожеланий. На практике нам часто приходится устанавливать порядок следования элементов множества друг за другом, выбирать подмножества и составлять упорядоченные подмножества из элементов данного множества. Все эти наши действия подчиняются определенным законам.

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется **комбинаторикой**. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова «*combinare*» и означает соединять, сочетать.

Группы, составленные из каких-либо предметов, называются **комбинациями** (соединениями) [10]. Предметы, из которых состоят комбинации, называются элементами. Различают три основных типа соединений: **перестановки**, **размещения** и **сочетания**.

При решении задач часто приходится рассматривать различные комбинации из некоторой совокупности элементов, например, составлять различные выборки. Процесс составления выборок подчиняется определенным правилам — это **правила суммы** и **произведения**.

Различные соединения и правила, используемые в комбинаторике, нужны для решения так называемых *комбинаторных задач*. Под *комбинаторными задачами* понимаются задачи, которые имеют несколько вариантов решений, и выбор правильного варианта решения зависит от того, все ли возможные варианты решения рассмотрены. Приведем пример комбинаторной задачи: «К полуфинальному этапу турнира допущены восемь команд: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. В финал могут попасть лишь три из них. Сколькими способами могут определиться участники турнира?». В задаче несущественно, как выглядит вся турнирная таблица, важно лишь, какие команды займут первые три места. Может оказаться, что в финал попадут команды 2, 3 и 5, а может быть, 2, 6 и 7 или другие три команды. При этом порядок расположения в тройке команд финалистов не важен: в финале они поведут борьбу на равных. Очевидно, что возможных исходов такого соревнования будет столько, сколько существует способов выбора трех цифр из восьми. При этом порядок расположения выбранных цифр не играет никакой роли [5].

Решением комбинаторных задач интересовались люди еще в Древнем Китае, Индии, Греции, Арабском Востоке. Однако как специальный раздел математики комбинаторика возникла в XVII веке на основе различных азартных игр (домино, карты и т. д.). Многие игроки, желая победить своего партнера, обращались к ученым. Такое обращение было и к известным французским математикам Блезу Паскалю (1623–1662) и Пьеру Ферма (1601–1665) с просьбой подсказать им верные правила игры. В результате усилий этих ученых появился и развивался новый раздел математики, который впоследствии был именован комбинаторикой.

Первое систематическое изложение формул и законов комбинаторики было опубликовано в 1666 г. немецким математиком Годфридом Лейбницем (1646–1716) в книге «Рассуждения о комбинаторном искусстве». Позже, в 1713 г., появилась книга математика из Швейцарии Якова Бернулли (1654–1705) «Искусство предположения». Другой выходец из Швейцарии, великий ученый Леонард Эйлер (1707–1783) поставил и разрешил ряд исторических комбинаторных задач, из которых впоследствии развились самостоятельные отрасли науки, в частности, криптография. Современный вид формулы комбинаторики приняли к началу XIX века, когда почти полностью сформировалась современная алгебраическая символика.

За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития, что связано с общим повышением интереса к проблемам дискретной математики. Комбинаторные методы исследования используются для решения транспортных задач, составления планов производства, решения проблем теории информации и т. д. [2,18].

2. Основные правила комбинаторики. Комбинаторные задачи бывают самых разных видов. Но большинство из них решаются с помощью двух основных правил комбинаторики: правила суммы и правила произведения. Правило суммы связано с нахождением числа элементов объединения двух непересекающихся множеств. **Правило суммы** (правило логического сложения) формулируется таким образом: если объект *а* может быть выбран n способами, а объект *в* может быть выбран другими m способами (не такими, как *а*), то выбор одного элемента «*а* или *в*» из объединенной совокупности может быть осуществлен $n + m$ способами. На примере это выглядит следующим образом: «На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать один плод?» [14]. По условию задачи яблоко можно выбрать 5 способами, а апельсин — четырьмя. Так как в задаче речь идет о выборе либо яблока, либо апельсина, то его, согласно правилу суммы можно осуществить $5 + 4 = 9$ способами.

При использовании правила суммы мы следим за тем, чтобы ни один способ выбора одного объекта не совпал с каким-либо способом выбора другого объекта. Если, например, имеется $к$ случаев совпадения, то количество способов выбора одного объекта будет вычисляться по формуле: $n + m - к$.

Второе основное правило связано с определением числа элементов декартова произведения двух множеств и называется правилом произведения. **Правило произведения** (принцип логического умножения) формулируется следующим образом: если объект *а* может быть выбран n способами и после такого выбора объект *в* может быть выбран другими m способами, то выбор пары объектов «*а* и *в*», в указанном порядке может быть осуществлен $n \times m$ способами. На том же примере, приведенном для правила сложения, эта задача ставится и решается следующим образом: «На тарелке лежат 5 яблок и 4 апельсина. Сколькими способами можно выбрать пару плодов, состоящую из яблока и апельсина?» [14]. По условию задачи яблоко можно выбрать пятью способами, а апельсин — четырьмя. Так как речь идет о выборе пары (яблоко, апельсин), то задача сводится к нахождению числа элементов декартова произведения множеств яблок и апельсин, которое равно произведению чисел, выражающих количество яблок и количество апельсин: $5 \cdot 4 = 20$ способами.

Очевидно, правила суммы и произведения можно распространить на большее, чем два, количество объектов. В пункте 3 параграфа 5 мы познакомились с декартовым произведением двух конечных множеств — это множество всевозможных упорядоченных пар элементов этих множеств. Число таких пар равно произведению мощностей этих множеств. Например, декартово произведение множеств $A = \{1; 2\}$ и $B = \{1; 0; 3\}$ содержит 6 пар: $6 = 2 \cdot 3$, где 2 — мощность множества A, 3 — мощность множества B и $A \times B = \{(1; 1); (1; 0); (1; 3); (2; 1); (2; 0); (2; 3)\}$.

При нахождении произведения трех множеств образуются всевозможные упорядоченные тройки элементов этих множеств, взятых по одному из каждого множества. Если дано и множество $C = \{5; 4\}$, то произведение трех множеств будет равно: $A \times B \times C = \{ (1; 0; 4); (1; 3; 5); (1; 3; 4); (2; 1; 5); (1; 1; 5); (1; 1; 4); (1; 0; 5); (2; 1; 4); (2; 0; 5); (2; 0; 4); (2; 3; 5); (2; 3; 4) \}$.

Число троек $(x; y; z)$, где $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$, равно 12 — произведению мощностей этих множеств: $12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$.

При определении произведения 4-х, 5-ти, 6-ти и более множеств образуются соответственно всевозможные упорядоченные четверки, пятерки, шестерки элементов этих множеств. Число таких четверок, пятерок, шестерок равно произведению чисел, которые являются мощностями этих множеств.

3. Перестановки. Порядок расположения элементов непустого конечного множества можно изменить. Например, если дано множество $A = \{a; в; c\}$, то переставляя его элементы можно построить другие, равные ему, множества: $\{a; c; в\}$; $\{c; a; в\}$; $\{c; в; a\}$; $\{в; c; a\}$; $\{в; a; c\}$. То есть из одних и тех же элементов множества можно строить различные варианты расстановок, отличающиеся друг от другого только порядком расположения этих элементов. Такого сорта задачи встречаются на практике при расстановке цветных карандашей в коробке, при расположении студентов в аудитории, при расположении членов семьи за обеденным столом и т. д.

Установленный в конечном множестве порядок расположения его элементов называется **перестановкой**. Число таких перестановок элементов конечного множества зависит от числа элементов в нем. Например, в одной семье трое, а в другой — пятеро людей. Во время обеда каждая семья может садиться за стол различными способами. Число таких способов в обоих случаях разное, так как число элементов (членов) неодинаковое. Попытаемся разобраться в этой закономерности.

Рассуждения будем вести на основе числа людей и стульев в столовой.

Единственный человек за единственный стул в столовой может сесть только одним способом: 1.

Если в столовой два стула и семья из двух человек, то количество вариантов расположения увеличивается. Один из них может сесть за стол двумя способами, а другой только одним. Вариантов получается всего $2 : 2 = 2 \cdot 1$.

В случае семьи из трех человек, первый может сесть за стол тремя способами, второй на оставшиеся два стула двумя способами и третий единственным образом. Количество возможных вариантов $6 : 6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Для семьи из четырех человек первый может сесть на один из четырех стульев четырьмя способами, второй на оставшиеся три стула — тремя способами, третий на оставшиеся два стула — двумя способами и четвертый может сесть за стол только одним способом. Число вариантов расположения членов семьи за столом $24 : 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Возможные варианты расположения за обеденным столом семьи из пяти человек распишем более подробно. Для простоты рассуждений членов семьи обозначим буквами: $M = \{a; в; c; d; e\}$. Первым за стол может садиться любой из этих членов семьи, в этом случае мы имеем 5 вариантов, значит, мы имеем множество из пяти элементов, обозначим его через M_5. Затем вторым может садиться за стол каждый из оставшихся четырех человек, в этом случае имеем множество из 4 элементов: M_4. Аналогично, мы получим различные множества по числу элементов: M_3; M_2; M_1. Итак, мы получили искомые 5 множеств, содержащих соответственно 5, 4, 3, 2, 1 элементов. При составлении различных пятерок нужно брать из каждого множества по одному элементу, число таких пятерок равно произведению мощностей этих множеств. Число возможных вариантов равно

$120 : 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Значит, семья, где имеется пять членов, может садиться за стол 120 различными вариантами.

Следуя правилам индукции, можно распространить наши рассуждения на общий случай. Пусть множество содержит n элементов. Число перестановок элементов этого множества обозначим через P_n, оно равно произведению всех натуральных чисел, начиная от n до 0 в порядке их убывания:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Произведение всех натуральных чисел, начиная от n до 0, в порядке их убывания называется ***n*-факториалом** и кратко записывается так: $n!$, т. е. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Итак, число перестановок элементов данного конечного множества, содержащего n элементов, равно n-факториалам: $P_n = n!$

Пример. Если в коробке 12 карандашей, то их можно расположить в коробке различными вариантами. Число таких вариантов (перестановок) равно:

$P_{12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$ (вариантов).

4. Размещения. В предыдущем пункте мы рассматривали варианты расположения элементов некоторого множества. Теперь рассмотрим расстановку элементов данного конечного множества, разбитого на группы, содержащие одно и то же число элементов, то есть рассмотрим расстановки равномощными подмножествами. Например, приехала группа туристов из *20* человек. Разместить их в одной комнате невозможно, поэтому их разместили по 4 человека в каждой комнате. Если мы обратим внимание и на расположение по койкам в комнате, то учитываются два условия:

1) возможности разбиения множества на равномощные подмножества;

2) варианты перестановок в подмножестве.

Упорядоченные подмножества данного конечного множества называется **размещением**. Различные размещения отли-

чаются друг от друга либо выбором элементов, либо порядком их расположения. Число таких размещений зависит не только от числа элементов самого множества, но и от числа элементов в подмножестве. Например, ту же самую группу туристов из 20 человек можно разместить по комнатам по 2 или по 5 человек. В каждом таком случае число размещений различно. Попытаемся разобраться в такой закономерности.

Если в каждой комнате устраиваются по 4 человека, то речь идет о всевозможных четверках, значит, имеется произведение четырех непустых множеств. Выясним, какими могут быть эти множества.

Из 20 человек любой имеет право записаться первым в четверке, значит, мы имеем множество из 20 элементов. Обозначим его через A_{20}. Затем из оставшихся 19 человек каждый имеет право занимать следующее место в четверке — это множество из 19 элементов (A_{19}). Аналогичным образом образуются множества из 18 и из 17 элементов: A_{18} и A_{17}. Теперь перед нами четыре множества: $A_{20}, A_{19}, A_{18}, A_{17}$. Взяв по одному элементу из каждого множества, образуем четверки, следовательно, речь идет о поиске произведения из чисел, равных мощностям множеств A_{20}, A_{19}, A_{18} и A_{17}. Оно равно: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$. Данное число указывает на количество всевозможных четверок из *20* человек.

Итак, мы обнаружили правило вычисления числа размещений заданного конечного множества. Оно распространяется и на общий случай.

Если обозначить число размещений из n элементов по $к$ (разбивая множество из n элементов на равномощные подмножества по $к$ элементов) через $A^к_n$, то это число будет равно произведению из $к$ последовательно расположенных натуральных чисел, наибольшее из которых равно n, то есть имеет равенство:

$$A^к_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots (n-к+1).$$

Если мы разместили бы гостей по 2 человека в комнате и брали бы во внимание и их расположение в каждой комнате, то число таких размещений было бы равно произведению двух последовательно расположенных натуральных чисел, наибольшее из которых равно 20, то есть такое число равно: $A_{20}^{2} = 20 \cdot 19 = 380$ (вариантов). В практике встречается множество такого рода задач, решение которых приводит к размещениям. Например, в классе имеется 30 учащихся, выбираются староста и председатель санитарной комиссии, причем выбираемые лица имеют различные обязанности: первым выбирается староста, а вторым — председатель санитарной комиссии. Число таких вариантов выбора определяется размещениями: $A_{30}^{2} = 30 \cdot 29 = 870$. Таким образом, выбор старосты и его заместителя может иметь 870 вариантов, если в классе 30 учащихся.

5. Сочетания. Произвольные неупорядоченные подмножества данного множества называются **сочетаниями**. Сочетания образуются при расстановке элементов некоторого конечного множества, при котором оно разбивается на равномощные подмножества, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Другими словами, сочетания — это размещения, если не учитывать порядок расположения элементов в каждом подмножестве. Например, та же самая задача с туристами из 20 человек: их размещают по 4 человека в каждой комнате, не учитывая порядок их расположения в комнате. Аналогичная картина наблюдается тогда, когда избирается делегация в составе нескольких человек, не указывая их должности. В таком случае число таких групп меньше, чем число размещений, так как перестановки по *к* элементов в подмножестве не берутся во внимание.

Если число сочетаний из *n* элементов по *к* обозначим через C_n^k, а число перестановок в подмножестве из *к* элементов обозначим через $P_к$, то число размещений равно произведению: $A_n^k = C_n^k \cdot P_к$. Отсюда мы получаем общую формулу для вычисления числа сочетаний из *n* элементов по *к*: $C_n^k = A_n^k / P_к$. Тогда число сочетаний из 20 по 4 равно: $C_{20}^{4} = A_{20}^{4}/P_4 = (20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17)/(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 4845$ (вариантов). Если разместить 20 человек по 3 человека в комнате, то число таких вариантов равно (если не брать во внимание порядок расположения в комнате): $C_{20}^{3} = A_{20}^{3}/P_3 = (20 \cdot 19 \cdot 18)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 1140$ (вариантов). Задачи, решаемые посредством формулы для вычисления числа сочетаний, достаточно часто встречаются на практике. Например: «В соревнованиях по шахматам принимают участие 12 человек. Сколько партий должно быть сыграно для того, чтобы каждый сыграл одну партию со всеми остальными?». В этой задаче речь идет о группах по два человека, причем порядок расположения людей в паре не имеет особого смысла (Руслан с Магомедом или Магомед с Русланом — это одна и та же партия). Поэтому количество возможных партий определяется по формуле для нахождения числа сочетаний: $C_{12}^{2} = A_{12}^{2}/P_3(12 \cdot 11)/(2 \cdot 1) = 66$ (вариантов).

Число сочетаний из *n* элементов по *к* обладает рядом основных свойств.

Свойство 1. Число сочетаний C_n^k из *n* элементов по *к* можно вычислить по формуле:

$$C_n^k = P_n/(P_к \cdot P_{n-к}). \tag{9.1}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой $A_n^k = C_n^k : P_к$ из предыдущего пункта. Если числитель и знаменатель правой части этой формулы умножить на одно и то же число $P_{n-к}$, то значение дроби не изменится: $C_n^k = \dfrac{A_n^k \cdot P_{n-k}}{P_k \cdot P_{n-k}}$.

Выражение в числителе можно упростить, поскольку оно представляет произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно, то есть $A_n^k \cdot P_{n-к} = P_n$. Отсюда вытекает формула (9.1): $C_n^k = P_n/(P_к \cdot P_{n-к})$. Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Число сочетаний C_n^k из n элементов **по к** равно числу сочетаний C_n^{n-k} из n элементов по $(n - к)$, то есть

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{9.2}$$

Доказательство. Вычислим правую и левую части этой формулы, используя соотношение (9.1). Для левой части имеем: а) $C_n^k = P_n/(P_к \cdot P_{n-к})$. Используя ту же формулу (9.1) для правой части равенства, получаем: б) $C_n^{n-k} = P_n/(P_{n-к} \cdot P_к)$. Следовательно, из формул а) и б) окончательно вытекает, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Что и требовалось доказать.

Свойство 3. Число сочетаний C_n^k можно вычислить с помощью числа сочетаний C_{n-1}^k по формуле:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{9.3}$$

Схема доказательства соотношения (9.3) аналогична схеме доказательства соотношения (9.2).

6. Треугольник Паскаля. Число сочетаний C_n^k означает число равномощных подмножеств данного конечного множества, каждое из которых содержит по $к$ элементов. Число всех подмножеств данного конечного множества можно вычислить как сумму чисел сочетаний из n элементов, взятых по 0, 1, 2, 3, 4, ..., n.

Например, число всех подмножеств множества из 5 элементов можно вычислить как сумму:

$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

Для числа сочетаний имеют место следующие соотношения:

1. C_0^0 — число подмножеств пустого множества ....1............. 2^0
2. $C_1^0 + C_1^1$ — число подмножеств множества, содержащего 1 элемент .... 1 + 1.............. 2^1
3. $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2$ — число подмножеств 2-х элементного множества .... 1 + 2 + 1............ 2^2
4. $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$ .... 1 + 3 + 3 + 1.......... 2^3

5. $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$ .... 1 + 4 + 6 + 4 + 1........ 2^4
6. $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$ ..... 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1.... 2^5

....

....

и т. д.

Этот процесс можно продолжить сколь угодно долго. Применительно к конечному множеству, состоящему из n элементов, аналогичные рассуждения позволяют считать, что число его подмножеств равно 2^n.

Впервые числа, выражающие число подмножеств конечных множеств, расположил в форме треугольника французский математик Блез Паскаль. Поэтому такую таблицу из чисел называют **треугольником Паскаля**. Он составлен на основе свойства (9.3) числа сочетаний, согласно которому каждый элемент следующей строки получается как сумма двух элементов предыдущей строки. Например, третий элемент четвертой строки (начиная с нуля) равен сумме третьего и второго элементов третьей строки: 3 = 2 + 1 = 1 + 2.

Треугольник Паскаля легко строится на основе данного свойства:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
....

и т. д.

Треугольник Паскаля удобно использовать для нахождения коэффициентов слагаемых при возведении в степень суммы или разности двучленов:

$(a \pm в)^0 = 1;$

$(a \pm в)^1 = a \pm в\ (1;\ 1);$

$(a \pm в)^2 = a^2 \pm 2aв + в^2 (1;\ 2;\ 1);$

$(a \pm в)^3 = a^3 \pm 3a^2в + 3aв^2 \pm в^3 (1;\ 3;\ 3;\ 1);$

и т. д.

Коэффициенты слагаемых — элементы строки треугольника Паскаля. Если двучлен возводится в четвертую степень, то мы имеем коэффициенты пятой строки Паскаля: 1; 4; 6; 4; 1. Показатель степени каждого слагаемого в разложении двучлена равен показателю степени двучлена. Например, $(a + в)^7 = a^7 + 7a^6в + 21a^5 в^2 + 35a^4в^3 + 21a^2в^5 + 7aв^6 + в^7$, где коэффициенты равны соответственно числу сочетаний по 0, по 1, по 2 и т. д., а степень слагаемых равна степени двучлена.

Рассмотрим еще один пример. Найти седьмое слагаемое многочлена при возведении в степень $(a + в)^к$. Это задание можно выполнить следующим образом: седьмое слагаемое есть число сочетаний из $к$ элементов по 6, то есть получим ответ: $C_k^6 \cdot a^{к-6} \cdot в^6$.

Итак, мы рассмотрели три вида соединений:

1. Перестановки P_n, когда речь идет о расстановке элементов данного множества, не разбивая их на подгруппы. Перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов;

2. Размещения A_n^k, когда речь идет о расстановке элементов данного множества, разбивая его на равномощные подмножества и учитывая порядок расположения элементов в каждом подмножестве. Размещения отличаются либо выбором элементов, либо порядком их расположения;

3. Сочетания C_n^k, когда речь идет о расстановке элементов данного множества, разбивая его на равночисленные подгруппы, но не учитывая порядка расположения элементов в подгруппах. Сочетания отличаются только выбором элементов.

Рассмотренные нами виды соединений приведены для случая, когда входящие в множества элементы не повторяются. Может оказаться, что в размещениях и сочетаниях некоторые из элементов могут быть одинаковыми. Для таких случаев нужны новые формулы для подсчета их количества. Без доказательства для этих двух случаев сформулируем понятия и приведем формулы для подсчета их количества.

Размещение с повторениями n элементов по $к(к \le n)$ элементов может содержать любой элемент от 1 до $к$ сколь угодно раз или не содержать его ни разу. Число размещений с повторениями n элементов по $к(к \le n)$ элементов вычисляется по формуле:

$$(A_n^k)_{\text{с повт.}} = n^к. \tag{9.4}$$

Если в сочетаниях из n элементов по $к$ некоторые элементы повторяются, то такие сочетания называются сочетаниями с повторениями. Сочетание с повторениями из n элементов по $к$ элементов может содержать любой элемент от 1 до $к$ сколь угодно раз, или не содержать его ни разу. Сочетание с повторениями из n элементов по $к$ может состоять не только из $к$ различных элементов, но и из $к$ элементов, сколь угодно раз повторяющихся. Для вычисления числа сочетаний с повторениями из n элементов по $к$ используется формула:

$$C_n^k = (n + к - 1)!/к! \cdot (n - 1)! \tag{9.5}$$

Вывод формул (9.4) и (9.5) будет вынесен в раздел задач повышенной трудности настоящего параграфа.

Задачи и упражнения

Репродуктивные

9.1. Дано число 12567. Сколько всего пятизначных чисел можно образовать, переставляя цифры данного числа? Напишите 8 таких чисел.

9.2. В гости на день рождения пришли 10 человек. Сколькими различными способами можно посадить гостей за один стол?

9.3. В коробке имеется 6 цветных карандашей. Сколькими способами можно их расположить в этой коробке?

9.4. Составьте текст задачи, которая решается с помощью формулы числа перестановок.

9.5. В классе 35 человек. Во время классного собрания выбрали одного председателя и одного секретаря собрания. Сколько вариантов такого выбора может оказаться?

9.6. На собрании пайщиков присутствовало 16 человек. Избрали секретаря организации, его заместителя и кассира для сбора взносов. Сколько вариантов такого выбора может оказаться?

9.7. На совещание административных работников приехала группа в составе 30 человек. Их распределили по 3 человека в каждой комнате. Сколько вариантов при этом может оказаться? (учитывается и порядок расположения людей на койках в комнате).

9.8. Вычислите значения выражений:

1) P_7;

2) P_8;

3) A_6^2;

4) A_{10}^3;

5) A_{12}^3;

6) $A_{40}^4 : P_9$.

9.10. Составьте текст задачи, решаемой с помощью формулы определения числа размещений.

9.11. В бригаде всего 60 человек. Избираются бригадир, его заместитель, повар и учетчик. Сколько вариантов при этом может оказаться?

9.12. В соревнованиях по футболу принимают участие 20 команд. Сколько встреч необходимо, если каждая команда должна встречаться со всеми остальными один раз (в первом круге)?

9.13. Для патрулирования по городу выделено 50 офицеров и 100 солдат. Нужно их разбить на группы по три человека в каждой (один офицер, два солдата). Сколько различных вариантов при этом может оказаться?

9.14. Во время праздника собрались танцоры: 3 девушки и 20 парней. Сколько времени понадобится для того, чтобы каждый парень станцевал с каждой девушкой лезгинку, если каждый танец рассчитан на 3 минуты?

9.15. Из состава участников конференции, на которой присутствовало 18 человек, надо выбрать делегацию, состоящую из 4 человек. Сколькими способами это можно сделать?

9.16. Сколькими способами можно 6 девочек разбить на группы по 3 девочки в каждой группе?

9.17. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 7, 3, 1?

9.18. Вычислите значения выражений: C_{40}^3; C_{20}^4; C_{20}^3; C_{35}^4; P_6; $C_{50}^2 \cdot C_6^1$.

9.19. Вычислите значения выражений удобным способом: C_{40}^{36}; C_{20}^{17}; C_{16}^3; C_{50}^{46}; C_{20}^3.

9.20. Не производя вычислений, определите равные числа: C_{40}^{36}; C_{40}^5; C_{20}^4; C_{20}^{16}; C_{20}^5; C_{20}^3; C_{20}^{15}.

9.21. Вычислите значения выражений, пользуясь свойством (9.3) для числа сочетаний: C_{10}^3; C_8^4; C_{20}^2; C_{14}^4; C_{18}^5.

Образец: $C_{10}^3 = C_9^3 + C_9^2$.

9.22. Упростите выражения, а затем вычислите их значения:

1) $C_6^2 + C_6^3$;

2) $C_{10}^4 + C_{10}^3$;

3) $C_{20}^3 + C_{20}^2$;

4) $C_{24}^3 + C_{24}^2$.

Образец: $C_7^2 + C_7^3 = C_8^3 = (8 \cdot 7 \cdot 6)/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 56$.

9.23. Одна строка треугольника Паскаля содержит числа: 1; 10; 45; 120; 210; 120; 45; 10; 1. Определите числа следующей строки треугольника.

9.24. Составьте элементы восьмой строки треугольника Паскаля, используя число сочетаний по 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

9.25. Вычислите число подмножеств множества, содержащего:

1) 7 элементов;

2) 15 элементов;

3) 10 элементов;

4) 1 элемент.

9.26. Представьте степени в виде многочленов:

1) $(x + y)^8$;

2) $(x - y)^5$;

3) $(x - y^2)^6$;

4) $(2x - y)^6$;

5) $(x^{0,5} + y)^4$;

6) $(3x + 1)^5$;

7) $(x + 2)^6$;

8) $(5x - 1)^4$;

9) $(x + \sqrt{x})^6$.

9.27. Найдите пятое слагаемое многочлена $(2x + \sqrt{x})^6$.

9.28. Напишите два одночлена, а затем из них составьте один многочлен и возведите полученный многочлен в 4-ю степень.

9.29. Напишите многочлен, раскрыв скобки:

1) $(x - y^2)^3$;

2) $(x - 3y)^5$;

3) $(x - \sqrt{x})^7$;

4) $(0,2 + x)^8$.

9.30. Множества $M = \{1; 2\}$ и $E = \{1; 2; 3\}$ являются подмножествами другого множества. Каким может быть это множество? Назовите хотя бы три таких множества.

9.31. Мощность произведения двух конечных множеств равна 18. Назовите возможные мощности этих множеств.

9.32. Представьте число 24 в виде произведения двух целых положительных чисел. Сколько вариантов при этом может оказаться?

9.33. Составьте примеры двух множеств так, чтобы их произведение имело мощность, равную:

1) 15;

2) 28;

3) 25;

4) 30.

9.34. По сведениям геологоразведки, один из 15 участков земли, по всей вероятности, содержит нефть. Однако компания имеет средства для бурения только восьми скважин. Сколько способов отбора восьми скважин у компании?

9.35. На железнодорожной станции имеется шесть запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них четыре поезда?

9.36. Из 20 рабочих нужно выделить 6 для работы на определенном участке. Сколькими способами можно это сделать?

9.37. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

9.38. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 12 открыток? Из 8 открыток?

9.39. На конференции должны выступить докладчики A, B, C и D, причем B не может выступить раньше A. Сколькими способами можно установить очередность выступлений?

Продуктивные

9.40. Пусть некоторое множество содержит n элементов. Число перестановок элементов этого множества обозначим через P_n. Доказать, что число P_n равно произведению всех натуральных чисел, начиная от 1 до n: $P_n = n \cdot (n-1)... 3 \cdot 2 \cdot 1$.

9.41. Приведите строгое доказательство того, что число размещений из n элементов по κ вычисляется по формуле:

$A_n^\kappa = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)... (n-\kappa+1)$.

9.42. Докажите, что число сочетаний C_n^k из n элементов по κ можно вычислить с помощью числа сочетаний C_{n-1}^k из $n-1$ элементов по κ, используя формулу: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

9.43. Докажите, что число размещений с повторениями n элементов по κ ($\kappa \le n$) элементов вычисляется по формуле: $(A_n^k)_{\text{с повт.}} = n^\kappa$.

9.44. Докажите, что для вычисления числа сочетаний с повторениями из n элементов по κ используется формула: $C_n^k = (n+\kappa-1)!/\kappa! \cdot (n-1)!$

9.45. Решите уравнения:

1) $C_x^2 + C_x^1 = 10$;
2) $C_x^2 + C_x^1 = 45$;
3) $C_x^2 = 380$.

9.46. Решите уравнения:

1) $C_x^2 = 28$;
2) $A_y^2 = 240$;
3) $C_x^2 = 36$.

9.47. Решите уравнения:

1) $A_x^2 = 132$;
2) $A_x^2 = 72$;
3) $A_x^2 = 20$.

9.48. Определите правило суммы для трех и более выборок. Приведите примеры.

9.49. Определите правило произведения для трех и более выборок. Приведите примеры.

9.50. Даны $2n$ элементов. Рассматриваются всевозможные разбиения их на пары, причем разбиения, отличающиеся друг от друга только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько существует различных таких разбиений?

9.51. Доказать, что нечетное число предметов можно выбрать из n предметов 2^{n-1} способами.

9.52. Доказать, что число способов, которыми два человека могут разделить $2n$ предметов одного сорта, $2n$ предметов другого сорта и $2n$ предметов третьего сорта так, чтобы каждый получил $3n$ предметов, равно $3n^2 + 3n + 1$.

Тесты для самоконтроля

Приводимый ниже комплекс тестовых заданий предназначен для определения уровня освоенности теоретического материала, изложенного в пособии. На каждое тестовое задание приведены три варианта ответов, из которых правильными могут быть один вариант, два варианта или все три варианта.

Ответ считается полным, если все правильные варианты отмечены.

1. Логика — это наука о:

а) числах,

б) величинах,

в) законах и формах мышления.

2. Предметом изучения логики является:

а) взаимосвязь между числами,

б) строение школьного курса геометрии,

в) высказывания и предикаты.

3. Основоположниками формальной логики являются:

а) И. Кант,

б) Аристотель,

в) А. А. Столяр.

4. В развитие математической логики весомый вклад внесли отечественные математики:

а) А. Н. Колмогоров,

б) И. Ф. Красичков-Терновский,

в) А. А. Столяр.

5. Высказывание является предложением:

а) вопросительным,

б) восклицательным,

в) повествовательным.

6. Высказывание может принять значение:

а) истинное,

б) ложное,

в) одновременно истинное и ложное.

7. Из двух отрицающих друг друга высказываний истинны:

а) оба,

б) одно,

в) оба ложны.

8. Закон противоречия высказываний гласит:

а) ложны данное высказывание и его отрицание,

б) истинны данное высказывание и его отрицание,

в) ложно данное высказывание или его отрицание.

9. Отрицание высказывания можно записать:

а) только одним способом,

б) только двумя способами,

в) несколькими способами.

10. Отрицание отрицания высказывания A совпадает с:

а) $\varnothing$,

б) A,

в) $\rceil A$.

11. Закон исключительного третьего утверждает, что две противоречащих мысли об одном и том же предмете, рассматриваемые в одно и то же время, находящиеся в одном и том же отношении, не могут быть:

а) одновременно ложными,

б) одновременно истинными,

в) другой ответ.

12. Закон тождества утверждает, что каждая мысль в процессе данного рассуждения сохраняет одно и то же определенное содержание, если она прозвучала:

а) только один раз,

б) дважды,

в) сколь угодно большое число раз.

13. Закон достаточного основания базируется на:

а) одном частном рассуждении,

б) общих рассуждениях,

в) ограниченном количестве частных рассуждений.

14. Из простого высказывания можно получить:

а) одно сложное высказывание,

б) два сложных высказывания,

в) нельзя получить сложное высказывание.

15. Сложное высказывание состоит из:

а) одного простого высказывания,

б) нескольких простых высказываний,

в) нескольких сложных высказываний.

16. Дизъюнкция двух высказываний истинна, если:

а) истинны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания,

б) истинно хотя бы одно высказывание, участвующее в формировании сложного высказывания,

в) ложны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания.

17. Для обозначения дизъюнкции высказываний используются символы:

а) N,

б) $\vee$,

в) $\rceil$.

18. Конъюнкция двух высказываний истинна, если:

а) истинны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания,

б) истинно хотя бы одно высказывание, участвующее в формировании сложного высказывания,

в) ложны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания.

19. Для обозначения конъюнкции высказываний используются символы:

а) $\wedge$,

б) $\vee$,

в) $\rceil$.

20. Импликация двух высказываний истинна, если:

а) истинны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания,

б) истинно первое высказывание, участвующее в формировании сложного высказывания, а второе высказывание ложное,

в) ложны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания.

21. Для обозначения импликации высказываний используются символы:

а) $\wedge$,

б) $\vee$,

в) $\Rightarrow$.

22. Эквиваленция двух высказываний истинна, если:

а) истинны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания,

б) истинно первое высказывание, участвующее в формировании сложного высказывания, а второе высказывание ложное,

в) ложны оба высказывания, участвующие в формировании сложного высказывания.

23. Для обозначения эквиваленции высказываний используются символы:

а) $\Leftrightarrow$,

б) $\vee$,

в) $\Rightarrow$.

24. Конъюнкция и дизъюнкция высказываний обладают свойствами:

а) ассоциативным,

б) коммутативным,

в) возведения в степень.

25. Законы де Моргана имеют следующий вид:

а) $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$,

б) $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil \mathrm{A} \wedge \rceil B$,

в) $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

26. Выражение $A \equiv A$ является записью посредством символов логического закона:

а) тождества,

б) противоречия,

в) исключенного третьего.

27. Выражение $\rceil(A \wedge \rceil A)$ является записью посредством символов логического закона:

а) тождества,

б) противоречия,

в) исключенного третьего.

28. Выражение $A \vee \rceil A$ является записью посредством символов логического закона:

а) тождества,

б) противоречия,

в) исключенного третьего.

29. Импликация двух высказываний является основой для построения:

а) аксиом,

б) гипотез,

в) теорем.

30. Аксиома — это высказывание, истинность которого:

а) доказывается,

б) очевидна,

в) принимается на основе частного примера.

31. Теорема — это сложное высказывание, истинность которого:

а) очевидна,

б) необходимо доказать,

в) невозможно доказать.

32. К причинно-следственным высказываниям относятся:

а) аксиомы,

б) теоремы,

в) леммы.

33. Всякое причинно-следственное высказывание имеет:

а) условие,

б) заключение (следствие),

в) условие и заключение (заключение).

34. Основой для построения причинно-следственного высказывания может служить:

а) сложное высказывание в виде конъюнкции двух высказываний,

б) отрицание некоторого высказывания,

в) эквиваленция двух высказываний.

35. Условие теоремы может быть:

а) необходимым для следствия,

б) достаточным для следствия,

в) необходимым и достаточным для следствия.

36. Условие считается необходимым (обязательным), если без этого условия:

а) может быть выполнено заключение,

б) не может быть выполнено заключение,

в) другой ответ.

37. Условие считается достаточным, если из этого условия:

а) не вытекает заключение,

б) непременно вытекает заключение,

в) другой ответ.

38. Условие теоремы «Если число делится на 15, то оно делится на 5» является:

а) необходимым,

б) достаточным,

в) необходимым и достаточным.

39. Если имеется некоторая прямая теорема, то можно построить:

а) теорему, обратную к прямой теореме,

б) теорему, противоположную к прямой теореме,

в) теорему, противоположную к обратной теореме.

40. Пусть A — условие теоремы, B — заключение. Какие из следующих пар теорем являются равносильными:

а) $A \Rightarrow B$ и не $A \Rightarrow$ не B,

в) не $A \Rightarrow$ не B и не $B \Rightarrow$ не A,

с) $A \Rightarrow B$ и не $B \Rightarrow$ не A.

41. Справедливость соотношения ($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (не $B \Rightarrow$ не A) позволяет вместо доказательства:

а) прямой теоремы доказывать обратную,

б) прямой теоремы доказывать противоположную к обратной,

в) противоположной к обратной теореме прямую теорему.

42. Использование в научном мире доказательства ложности противоположной теоремы, чтобы судить об истинности данной, основывается на:

а) методе математической индукции,

б) дедуктивном методе доказательства,

в) методе доказательства от противного.

43. Всякое понятие имеет:

а) объем,

б) содержание,

в) вес.

44. Совместимость понятий может быть:

а) тождественной,

б) перекрещивающейся,

с) понятия находятся в отношении «подчинение».

45. Для объемов двух произвольных понятий верны утверждения:

а) не имеют общих объектов,

б) имеют общие объекты,

в) объекты, из которых состоит объем первого понятия, входят в объем второго понятия.

46. В математике существуют:

а) определяемые понятия,

в) неопределяемые понятия,

с) производные понятия.

47. Неопределяемые понятия в математике являются:

а) базовыми,

б) производными,

в) второстепеными.

48. Следующее геометрическое понятие является неопределяемым:

а) точка,

б) треугольник,

в) плоскость.

49. Следующее числовое понятие является определяемым:

а) простое число,

в) натуральное число,

с) составное число.

50. Понятие множества:

а) определяется,

б) не определяется,

в) формируется эмпирическим путем.

51. Множество состоит из:

а) отношений,

б) элементов,

в) арифметических операций.

52. Два множества считаются равными, если:

а) количество элементов в них совпадает,

б) состоят из одних и тех же элементов,

в) количество элементов в них не совпадает.

53. Для обозначения множеств используются:

а) заглавные буквы алфавитов,

б) строчные буквы алфавитов,

в) фигурные скобки.

54. Множество может иметь:

а) бесконечное число элементов,

б) конечное число элементов,

в) ни одного элемента.

55. Множество называется конечным, если его мощность равна:

а) нулю,

б) натуральному числу,

в) мощности множества действительных чисел.

56. Если множество A является подмножеством конечного множества B, то:

а) число элементов множества A больше числа элементов множества B,

б) число элементов множества B больше числа элементов множества A,

в) число элементов множества A равно числу элементов множества B.

57. Число подмножеств множества $A = \{a, в, c\}$ равно:

а) 3,

б) 8,

в) 9.

58. Множества бывают:

а) конечные и бесконечные,

б) только бесконечные,

в) только конечные.

59. Множества задаются:

а) перечислением элементов,

б) формулировкой характеристического свойства, присущего всем элементам данного множества,

в) только точками на координатной плоскости.

60. Бесконечные множества можно задать:

а) перечислением элементов,

б) формулировкой характеристического свойства, присущего всем элементам данного множества,

в) точками на координатной плоскости.

61. Объединение элементов двух непересекающихся множеств A и B состоит из элементов:

а) множества A,

б) множества B,

в) множеств A и B.

62. Объединение элементов двух множеств обладает свойством:

а) ассоциативности,

б) коммутативности,

в) $A \cup B \neq B \cup A$.

63. Объединение элементов двух множеств обозначается символом:

а) $\cup$,

б) $\cap$,

в) $\wedge$.

64. Пересечение элементов двух неравных множеств A и B может состоять из элементов:

а) только множества A,

б) только множества B,

в) множеств A и B.

65. Пересечение элементов двух множеств обозначается символом:

а) $\cup$,

б) $\cap$,

в) $\in$.

66. Существует пересечение:

а) двух множеств,

б) конечного числа множеств,

в) бесконечного числа множеств.

67. Пересечение элементов двух множеств обладает свойством:

а) ассоциативности,

б) коммутативности,

в) $A \cap B \neq B \cap A$.

68. Разность двух множеств A и B состоит из элементов:

а) множества A,

б) множества B,

в) множества $A \cap B$.

69. Для обозначения разности двух множеств A и B можно использовать запись:

а) $A - B$,

б) $A + B$,

в) $A \backslash B$.

70. Выражения «разность двух множеств» и «дополнение одного множества до другого» имеют:

а) одинаковый смысл,

б) разные смыслы,

в) одинаковый смысл, если одно множество является подмножеством другого.

71. Декартово произведение множеств A и B имеет место, когда одно из этих множеств:

а) пустое,

б) конечное,

в) бесконечное.

72. Соответствием из множества A в множество B называется:

а) любое подмножество множества $A \times B$,

б) любое подмножество множества $A \cup B$,

в) любое подмножество множества $A \cap B$.

73. Число элементов декартового произведения A на B:

а) равно числу соответствий между множествами A и B,

б) меньше числа соответствий между множествами A и B,

в) больше числа соответствий между множествами A и B.

74. Для декартового произведения множеств справедливы соотношения:

а) $A \times B = B \times A$,

б) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$,

в) $(A \times B)^2 = A^2 \times B^2$.

75. Для объединения двух множеств выполняются следующие соотношения:

а) $A \cup B = B \cup A$,

б) $A \cup B =$ А, если $A = B$,

в) $A \cup B = B$, если $A \subset B$.

76. Для пересечения двух множеств выполняются следующие соотношения:

а) $A \cap B = B \cap A$,

б) $A \cap B = 2A$, если $A \subset B$,

в) $A \cap B = B$, если $A \subset B$.

77. Соответствие между множествами A и B состоит из:

а) одноэлементных множеств,

б) упорядоченных пар,

в) пустого множества.

78. В соответствии между двумя множествами первые элементы в парах:

а) могут быть различны,

б) могут быть одинаковы,

в) могут отсутствовать вообще.

79. Соответствие между множеством A и множеством B называется отображением множества A на множество B, если в нем:

а) первые элементы в парах совпадают,

б) первые элементы совпадают в конечном числе пар,

в) первые элементы ни в одной паре не совпадают.

80. Соответствие между множествами может быть задано:

а) графом,

б) словесно,

в) выделением некоторого подмножества декартового произведения.

81. Между понятиями «функциональное соответствие» и «отображение»:

а) нет различий,

б) есть различия,

в) объем первого понятия включается в объем второго понятия.

82. Отображения одного множества в другое задаются:

а) алгебраическим способом,

б) геометрическим способом,

в) множеством упорядоченных пар.

83. Смысл понятий «взаимно-однозначное соответствие» и «отображение одного множества «на» другое»:

а) одинаковый,

б) разный,

в) одинаковый для бесконечных множеств.

84. Отображение одного множества в другое может быть задано:

а) словесно,

б) с помощью алгебраической формулы,

в) точками на координатной плоскости.

85. Число соответствий между двумя множествами вычисляется:

а) по той же формуле, что и число подмножеств конечного множества,

б) по формуле, несколько отличающейся от формулы для вычисления числа подмножеств конечного множества,

в) так же, как число отображений одного множества на другое.

86. В курсе математики начальной школы имеются зависимости, математическая модель которых описывается функцией:

а) тригонометрической,

б) логарифмической,

в) линейной.

87. Необходимым условием того, чтобы отображение было взаимно-однозначным, является:

а) одинаковое число элементов в обоих множествах,

б) превышение числа элементов одного множества над другим,

в) отсутствие элементов в первом множестве.

88. Отношение на множестве устанавливается между элементами:

а) одного и того же множества,

б) между элементами различных множеств,

в) другой ответ.

89. Отношение R, заданное на некотором множестве A, обозначается:

а) $x\,R\,y$,

б) $a \in A$,

в) $R\,(x; y)$.

90. Свойство симметричности отношения R, заданного на некотором множестве A, обозначается одним из следующих выражений:

а) $\forall x, y \in A\ (x\,R\,y) \Leftrightarrow (y\,R\,x)$, б) $\forall x, y \in A\ (x\,R\,y) \Leftrightarrow \rceil(y\,R\,x)$,

в) $\forall x, y \in A\ (x\,R\,y) \Rightarrow (y\,R\,x)$.

91. Свойством симметричности обладает отношение:

а) «параллельно»,

б) «больше»,

в) «меньше».

92. Свойство транзитивности отношения R, заданного на множестве A, означает:

а) $\forall x, y, z \in A$, если xRy, yRz, то xRz,

б) $\forall x, y, z \in A$, если $\rceil xRy$, $\rceil yRz$, то yRx,

в) $\forall x, y, z \in A$, если xRy, yRz, то $\rceil yRx$.

93. Свойством транзитивности обладает отношение:

а) «меньше»,

б) «параллельно»,

в) «делимость чисел».

94. Отношение R, заданное на множестве A, рефлексивно, если:

а) $\forall x \in A\ xRx$,

б) $\forall x \in A\ \rceil xRx$,

в) $\forall x, y \in A\ xRy$.

95. Рефлексивными являются отношения:

а) «больше»,

б) «делимость чисел»,

б) «перпендикулярность прямых».

96. Отношение R, заданное на множестве A, является отношением эквивалентности, если оно:

а) рефлексивно и транзитивно,

б) транзитивно и симметрично,

в) рефлексивно, транзитивно и симметрично.

97. Отношением эквивалентности является отношение:

а) «больше»,

б) «делимость прямых»,

в) «параллельность прямых».

98. Отношение порядка обладает свойствами:

а) рефлексивности и транзитивности,

б) транзитивности и антисимметричности,

в) симметричности и транзитивности.

99. Следующим свойством одновременно обладают отношения эквивалентности и порядка:

а) антисимметричность,

б) рефлексивность,

в) транзитивность.

100. Множество называется упорядоченным, если в нем определено:

а) отношение эквивалентности,

б) отношение равенства фигур,

в) отношение порядка.

101. В каком из следующих множеств определено отношение порядка:

а) множество прямых на плоскости,

б) множество целых чисел,

в) множество многочленов с целыми коэффициентами?

102. Какие из следующих множеств являются упорядоченными:

а) множество рациональных чисел,

б) множество дробей, эквивалентных 2/3,

в) множество прямоугольных треугольников?

103. С помощью отношения эквивалентности данное множество:

а) можно разбить на попарно-непересекающиеся подмножества,

б) нельзя разбить на попарно-непересекающиеся подмножества,

в) можно разбить на эквивалентные классы.

104. Понятие «мощность» относится:

а) к числовым множествам,

б) к множествам, состоящим из элементов любой природы,

в) к автомобилям.

105. Понятия «счет элементов» и «установление взаимно-однозначного соответствия между множеством и некоторым отрезком натурального ряда»:

а) разные,

б) одинаковые,

в) совпадают для некоторого класса множеств.

106. В настоящее время широко используется следующая система единиц счета:

а) арабская,

б) римская,

в) старорусская.

107. В современном мире наиболее употребительными являются системы счисления:

а) двоичная,

б) десятичная,

в) 60-ая.

108. Множество натуральных чисел обозначается символом:

а) N,

б) Z_+,

в) Z_-

109. Для множеств N и Z_+ аксиомы Пеано формулируются:

а) одинаково,

б) по-разному,

в) с незначительной разницей в содержании.

110. Верно следующее утверждение:

а) $A \times \varnothing = A$,

б) $A \times \varnothing = \varnothing$,

в) $A \times \varnothing = 0$.

111. Понятие величины является понятием:

а) не определяемым для общего случая,

б) определяемым для общего случая,

в) определяемым для частных случаев.

112. Величины бывают:

а) постоянные,

б) переменные,

в) однородные.

113. Математические величины:

а) не поддаются числовому измерению,

б) поддаются числовому измерению,

в) могут характеризоваться как числом, так и направлением изменения.

114. Общая процедура измерения величин, встречающихся в курсе математики начальной школы:

а) одинакова для всех величин,

б) не одинакова для всех величин,

в) одинакова для величин геометрического характера.

115. Величины являются однородными, если:

а) они математические,

б) можно их привести к одному наименованию,

в) они присущи только физическому процессу.

116. Однородные величины можно:

а) складывать и вычитать,

б) вычитать и делить,

в) умножать и делить.

117. В результате арифметических действий над величинами можно получить:

а) величину того же рода,

б) величину другого рода,

в) число.

118. В результате любого арифметического действия над однородными величинами получается:

а) величина того же рода,

б) величина другого рода,

в) другой ответ.

119. Результатом деления однородных величин является:

а) величина того же рода,

б) число,

в) производная величина.

120. Результатом умножения однородных величин является:

а) величина того же рода,

б) число,

в) производная величина.

121. Неоднородные величины можно:

а) складывать,

б) умножать,

в) делить.

122. Результатом деления неоднородных величин является:

а) число,

б) величина рода делимого,

в) величина третьего рода.

123. Переменная величина характеризуется:

а) только численным значением,

б) только направлением изменения величины,

в) как направлением изменения величины, так и его численным значением.

124. Всякое уравнение или неравенство можно рассматривать как:

а) предикат,

б) истинное высказывание,

в) форму для образования высказываний.

125. Формы для образования высказываний и предикатов имеют:

а) один и тот же смысл,

б) разный смысл,

в) другой ответ.

126. Для того чтобы из формы для образований высказываний получить высказывание, необходимо:

а) переменную величину заменить некоторым числовым значением,

б) использовать квантор общности,

в) использовать квантор существования.

127. В решении задачи выбора единой для всех меры длины «метр» принял участие:

а) Аристотель,

б) П. Мишень,

в) Л. Даламбер.

128. Решением комбинаторных задач занимались ученые:

а) Б. Паскаль,

б) Г. Лейбниц,

в) Л. С. Выгодский.

129. Основной задачей комбинаторики является нахождение количества:

а) геометрических фигур на плоскости,

б) арифметических операций, выполняемых на множестве действительных чисел,

в) возможных комбинаций из заданных объектов.

130. Какое из следующих соединений относится к основным в комбинаторике:

а) перестановки,

б) размещения,

в) сочетания?

131. Правило суммы связано с нахождением числа элементов:

а) объединения непересекающихся множеств,

б) объединения пересекающихся множеств,

в) декартова произведения двух конечных множеств.

132. Правило произведения связано с нахождением числа элементов:

а) объединения непересекающихся множеств,

б) объединения пересекающихся множеств,

в) декартова произведения двух конечных множеств.

133. Перестановкой называется установленный в конечном множестве:

а) порядок расположения его элементов,

б) отношение порядка,

в) отношение эквивалентности.

134. Число перестановок элементов данного конечного множества, содержащего n элементов, равно:

а) $n!$,

б) $2n$,

б) n^2.

135. При составлении размещений из элементов одного и того же множества учитываются:

а) только возможности разбиения множества на равномощные подмножества,

б) только варианты перестановок в подмножествах,

в) возможности разбиения множества на равномощные подмножества и варианты перестановок в подмножествах.

136. Под размещением элементов конечного множества мы понимаем:

а) упорядоченные подмножества данного конечного множества,

б) любые подмножества данного конечного множества,

в) одноэлементные подмножества данного конечного множества.

137. Число размещений из n элементов по $к$ равно:

а) $A_n^к = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-к+1)$,

б) $A_n^к = n$,

в) $A_n^к = n \cdot к$.

138. Сочетаниями из элементов конечного множества называются:

а) произвольные неупорядоченные подмножества данного множества,

б) любые упорядоченные подмножества данного множества,

в) элементы множества, удовлетворяющие свойству симметричности.

139. Посредством треугольника Паскаля удобно вычислять:

а) число подмножеств конечного множества,

б) число перестановок в конечном множестве,

в) коэффициенты слагаемых при возведении в степень суммы или разности двучленов.

Алфавитный указатель

Литература

1. *Бородин Н. П.* Будущее за теорией человеческого творчества // Образование и общество. — 2003. — № 6.

2. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. — М.: Изд-во «Наука», 1969. — 327 с.

3. *Гетманова А.. Д.* Учебник логики. — М.: АйрисПресс, 2002. — 443 с.

4. *Добротворский А. С., Ковригина Л. П., Мерзон А. Е., Чекин А. Л.* Математика // Программы дисциплин предметной подготовки / Педагогика и методика начального образования. — М., 2001. — С. 77–86.

5. *Зубков В. Г., Ляховский В. А., Мартыненко А. И., Миносцев В. Б.* Курс высшей математики. Часть 1. — М., 2003. — 480с.

6. Кочетков Е. С., Смерчинская С. О., Соколов В. В. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Форум-Инфра-М, 2006. — 239 с.

7. *Кудрявцев Л. Д., Кириллов А. И., Бурковская М. А., Зимина О. В.* Математическое образование: тенденции и перспективы // Высшее образование сегодня. — 2002. — № 4. — С. 20–29.

8. *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. — М., 1980. — 165 с.

9. *Муссалаева З. У.* Некоторые вопросы курса математики. — Карачаевск, 1999. — 46 с.

10. *Ниворожкина Л. И., Морозова З. А.* Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями. — М.: ИЦ «Март», 2005. — 600 с.

11. О контрольных цифрах приема граждан в федеральные учреждения профессионального образования в 2006 году // Доклад на коллегии Министерства образования и науки Российской Федерации от 01.02.2006 г. — М., 2006.

12. Об инновационной деятельности высших учебных заведений по переходу на систему зачетных единиц. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации № 215 от 29.07.2005 года. — М., 2005.

13. Прогноз потребности Российской Федерации в специалистах с высшим профессиональным образованием и структуры их подготовки до 2010 года // Научно-исследовательский институт высшего образования. — М., 2000. — 50 с.

14. *Стойлова Л. П.* Математика. — М.: Академия, 2005. — 425 с.

15. *Столяр А. А.* Элементарное введение в математическую логику. — М., 1965. — 162 с.

16. *Уртенов Н. С., Шихалиев Х. Ш.* Математика. — Майкоп: Изд-во «Аякс», 2002. — 567 с.

17. *Фридман Л. М.* Теоретические основы методики обучения математике. — М., 2004. — 244 с.

18. *Халамайзер А. Я.* Комбинаторика и бином Ньютона. — М., 1980. — 32 с.

19. *Черкасов Р. С., Столяр А. А.* Методика преподавания математики в средней школе. — М., 1985. — 336 с.

Содержание

Учебное издание

Науруз Сулейменович Уртенов

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ

Ответственный редактор *А. Спивак*
Технический редактор *Г. Логвинова*
Корректор *Л. Горбунова*
Верстка: *С. Демченко*
Дизайн обложки: *М. Сафиуллина*

Сдано в набор 18.10.2008 г. Подписано в печать 28.10.2008 г.
Формат 84x108$^{1}/_{32}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Школьная.
Тираж 3000. Заказ № 119

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии ООО «КубаньПечать».
350059, г. Краснодар, ул. Уральская, 98/2.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов.

ООО «ФЕНИКС»
344082, г. Ростов н/Д, пер. Халтуринский, 80