



Е.А. Волков, Э.И. Санковский,
Д.Ю. Сидорович

**ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ
АВТОМАТИКИ,
ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ**

Учебник

УДК 621.372.011.7:656.25 (075.8)

ББК 39.27

В48

Волков Е.А., **Санковский Э.И.**, **Сидорович Д.Ю.** Теория линей-

В48 ных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи: Учебник для вузов ж.-д. транспорта /Под общей ред. проф. В.А. Кудряшова. — М.: Маршрут, 2005. — 509 с.

ISBN 5-89035-311-X

Изложены методы расчета, используемые при анализе и синтезе электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами. Рассмотрено применение теории двух- и четырехполюсных цепей при проектировании, эксплуатации и разработке фильтрующих и корректирующих устройств железнодорожной автоматики, телемеханики и связи на базе пассивных, активных РС и цифровых цепей; теории цепей с распределенными параметрами для расчета условий передачи сигналов по однородным и неоднородным линиям связи и рельсовым цепям.

Учебник предназначен для студентов вузов железнодорожного транспорта по специальности «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» и может быть полезен инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием и эксплуатацией систем автоматики, телемеханики и связи.

УДК 621.372.011.7:656.25(075.8)

ББК 39.27

Учебник написали: канд. техн. наук проф. *В.А. Кудряшов* — введение; д-р техн. наук проф. **Е.А. Волков** — гл. 1, 2; **Э.И. Санковский** — гл. 3, 4 (п. 4.1—4.8, 4.11—4.14); *Д.Ю. Сидорович* — гл. 4 (п. 4.9, 4.10), 5.

Рецензенты: зам. начальника Департамента связи и вычислительной техники ОАО «РЖД» *Ю.И. Филиппов*; зав. кафедрой «Радиотехника и электросвязь» МГУПС(а) (МИИТ) д-р техн. наук профессор *Г.В. Горелов*; начальник службы информатизации и связи Октябрьской ж.д. *Р.Д. Столбовский*;

ISBN 5-89035-311-X

© Коллектив авторов, 2005

© УМЦ по образованию на железнодорожном транспорте, 2005

© Издательство «Маршрут», 2005

ВВЕДЕНИЕ

Системы автоматики, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте, наряду с вычислительной техникой, представляют сегодня технические средства управления перевозочным процессом, способствующие повышению эффективности работы железных дорог, обеспечению безопасности движения поездов. Их роль и значение в системе управления непрерывно возрастают.

На сегодня к таким системам относятся системы диспетчерского управления, системы интервального регулирования движением поездов на перегонах, микроэлектронные системы обеспечения движения поездов, микропроцессорные системы горочной и станционной автоматики, разнообразные виды автоматической локомотивной сигнализации, системы поездной радиосвязи, все виды оперативно-технологической связи и множество других систем. Создается информационное пространство отрасли на основе вычислительных центров, соединенных сетью передачи данных, организованной на волоконно-оптических и спутниковых каналах, увеличивается число локальных сетей.

Вся эта новая и новейшая техника автоматики и связи основывается на последних достижениях науки и техники, прогрессе в области разработки новых электрорадиокомпонентов, микроэлектроники и вычислительной техники.

Для анализа, синтеза, совершенствования системы проектирования отдельных узлов и элементов аппаратуры требуются знания точных методов расчета, которые в значительной степени основываются на положениях теории линейных электрических цепей (ТЛЭЦ).

Методы теории линейных электрических цепей чрезвычайно широки и разнообразны. Они применяются при рассмотрении сложных систем, состоящих из отдельных элементов и простейших схем; изучении совместного действия всех образующих цепь элементов, вне зависимости от особенностей физических процессов, определяющих их работу, будь то источники электрической энергии, резисторы, транзисторы, конденсаторы, частотно-зависимые элементы и др. Указанными методами пользуются и в цифровой технике, и при расчетах СВЧ приборов, и при проектировании микроэлектронных структур. Методы ТЛЭЦ имеют исключительное значение при рассмотрении условий передачи сигналов по сложным трактам, каковыми являются цепи устройств

автоматики (рельсовые цепи, цепи систем электрической централизации) и связи (цепи оперативно-технологической связи, локальные сети). Только методы ТЛЭЦ позволяют адекватно оценить и оптимизировать условия передачи сигналов.

Базовыми дисциплинами при изучении теории линейных электрических цепей являются математика, физика, теоретические основы электротехники, электроника и вычислительная техника. При этом используются: теория матриц, операторный метод, гармонический анализ, известные из ТОЭ законы Ома и Кирхгофа, векторное представление сигналов, теория графов.

Целью ТЛЭЦ является разработка и использование инженерных методов исследования процессов в любых по сложности цепях и устройствах. При разработке и совершенствовании систем автоматики и связи очень часто приходится создавать цепи с заданными свойствами — это можно выполнить используя методы ТЛЭЦ.

Теорию четырехполосников успешно применяют при решении задач разных типов, начиная от анализа свойств сложных, разветвленных электрических цепей и электронных приборов и до создания электрических цепей с заданными передаточными характеристиками. Методы ТЛЭЦ успешно применяются при синтезе цепей с заданными частотными характеристиками (электрические фильтры, линии задержки, корректоры). При расчете рельсовых цепей железнодорожной автоматики приходится прибегать к специальным разделам ТЛЭЦ, таким как теория несимметричных и многопроводных линий. Методы ТЛЭЦ помогают в расчетах взаимных влияний между цепями автоматики и связи и влияния на них со стороны линий электропередачи и высоковольтных линий электропередачи. Методами, отличными от обычно применяемых, рассчитывают групповые цепи оперативно-технологической связи.

Основными разделами теории линейных электрических цепей являются: теория четырехполосника, теория электрических цепей, параметры передачи цепей как четырехполосника, методы анализа и синтеза электрических цепей с заданными частотными или временными характеристиками, электрические фильтры, в том числе активные фильтры.

Курс ТЛЭЦ направлен на углубленное изучение теории линейных электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами, а также на решение задач, связанных с передачей сигналов в системах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи.

В учебном плане специальности «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» дисциплина ТЛЭЦ изучается параллельно с дисциплинами «Теория передачи сигналов» и «Линии железнодорожной автоматики, телемеханики и связи», что в комплексе дает возможность освоить методику анализа, синтеза электрических цепей и их элементов, грамотно подходить к вопросам проектирования систем и устройств автоматики и связи. Теоретические положения в этой области дают возможность обоснованно разбираться в процессах, происходящих в реальных системах автоматики, технологической связи, и исключить аварийные ситуации в инженерной практике.

Основные положения, изучаемые в дисциплине «Теория линейных электрических цепей железнодорожной автоматики, телемеханики и связи», находят применение в дальнейшем при изучении общепрофессиональных дисциплин и дисциплин таких, как «Автоматика и телемеханика на перегонах», «Станционные системы автоматики и телемеханики», «Передача дискретной информации на железнодорожном транспорте», «Многоканальная связь», и др. Они используются в теории рельсовых цепей, при расчетах групповых цепей, в теории электрических фильтров, входных и выходных цепей радиоустройств и во многих других случаях.

Глава 1. УСЛОВИЯ РАБОТЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ

1.1. Электрические цепи в устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи

В устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи электрические цепи выполняют важную роль по формированию и передаче сигналов управления движением поездов и обеспечению безопасности, контроля состояния путей, а также различной информации, связанной с перевозками. Рассмотрим несколько примеров.

На рис 1.1 приведена схема организации каналов передачи диспетчерской централизации «ЛУЧ». Она позволяет передавать сигналы телеуправления (ТУ) спорадически и сигналы телесигнализации —

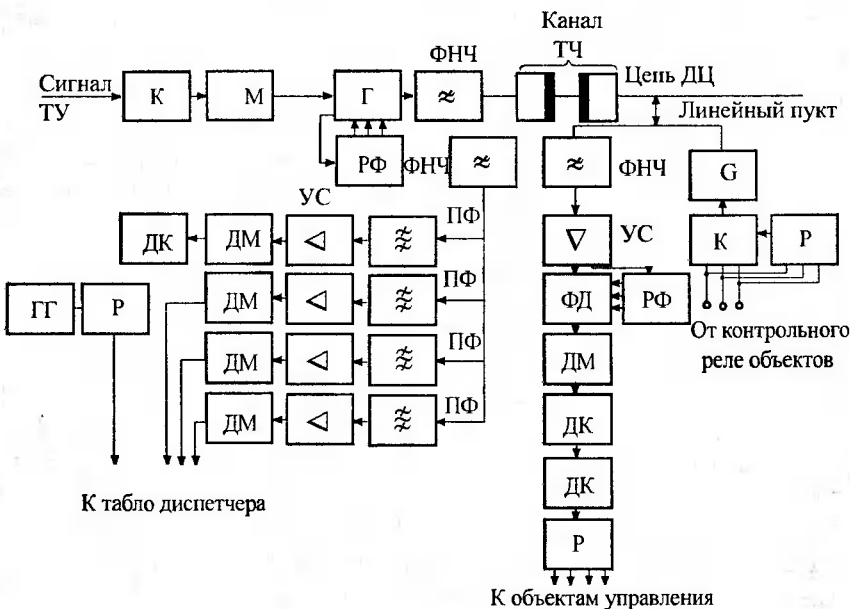


Рис. 1.1

циклически: за 5—6 с контролируется состояние 1840 объектов. Число команд телеуправления — 6400.

Для передачи сигналов телеуправления используется относительно-фазовая модуляция (ОФМ). Из несущей ($f = 500$ Гц), вырабатываемой генератором Г, разделителями фаз РФ формируются три синусоидальных напряжения, отличающихся по фазе на 120° . Смена фаз в направлении $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow \Phi_3 \rightarrow \Phi_1$ соответствует передаче «1», а $\Phi_1 \rightarrow \Phi_3 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow \Phi_1$ соответствует передаче «0». В приемных устройствах сигналов ТУ на линейных пунктах эти смены фаз распознаются фазовым дискриминатором ФД, производится их демодуляция, декодирование и через распределитель (Р) сигналы телеуправления поступают к объектам управления. Сигналы телесигнализации с выхода передающего устройства через полосовые фильтры (ПФ), усилители (УС), демодуляторы (ДМ) поступают на табло диспетчера. С передающего устройства на приемное сигналы передаются по каналу тональной частоты (ТЧ). От контрольного реле объектов телеуправления сигналы телесигнализации подаются обратно по каналу ТЧ на табло диспетчера.

Как видно из блок-схемы рис. 1.1, сигналы телеуправления и телесигнализации формируются устройствами: генераторами, модуляторами, фильтрами, демодуляторами, усилителями, декодерами. Каждое из этих устройств содержит как пассивные (LC , RC -фильтры, переходные цепи), так и активные (транзисторы) элементы. Поэтому приведенные на рис. 1.1 устройства представляют собой нелинейные электрические цепи с сосредоточенными элементами, которые, как видно из короткого описания принципа работы системы «ЛУЧ», позволяют осуществить генерацию колебаний, модуляцию и демодуляцию, усиление колебаний.

На рис. 1.2 приведена схема передачи телефонного разговора.

Каждый из переговаривающихся абонентов имеет в своем распоряжении микрофон (М) и телефон (ТЛФ), абоненты через линии соединяются при помощи автоматической телефонной станции, которая выполняет роль обычного переключателя. В микрофоне под влиянием разговора абонента изменяется звуковое давление на мембрану, что приводит к изменению сопротивления микрофона $r_M = R[1+ks(t)]^{-1}$, где k — коэффициент пропорциональности, R — сопротивление микрофона при отсутствии разговора ($s(t) = 0$), $s(t)$ — звуковое давление. Вследствие изменения сопротивления r_M изменяется ток в цепи микрофона $i = E/R[1+ks(t)]$,

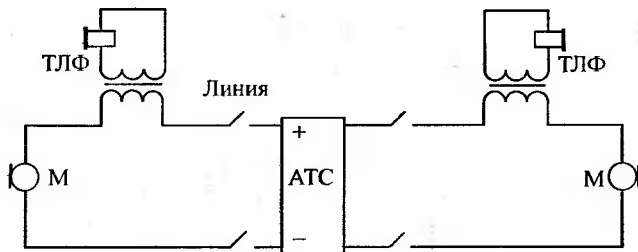


Рис. 1.2

где E — напряжение батареи, подаваемое из АТС. В телефоне происходит обратное преобразование тока, изменяющегося во времени в звуковое давление. Таким образом, преобразование звукового давления в переменный ток происходит в электрической цепи, сопротивление одного из элементов которой (r_M) изменяется во времени. Поэтому цепь микрофона представляет собой пример параметрической цепи.

На рис. 1.3 приведена блок-схема передачи сигналов при частотном уплотнении.

Передаваемые сообщения через микрофоны M_1, M_2, \dots, M_n подводятся к модуляторам Мод₁, Мод₂, ..., Мод_n, ко вторым входам которых подводятся синусоидальные сигналы S_1, S_2, \dots, S_n .

Все модулированные сигналы на частотах f_1, f_2, \dots, f_n после фильтрации фильтрами $(f_1 + \Delta F), (f_2 + \Delta F), \dots, (f_n + \Delta F)$ подаются в общую физическую цепь (например, кабель) и передаются на приемную сторону. Каждый из переданных модулированных сигналов выделяется соответствующими фильтрами $(f_1 + \Delta F), (f_2 + \Delta F), \dots, (f_n + \Delta F)$ и после демодуляции демодуляторами ДЕМ₁, ДЕМ₂, ..., ДЕМ_n подводятся к абонентам ТЛФ₁, ТЛФ₂, ..., ТЛФ_n.

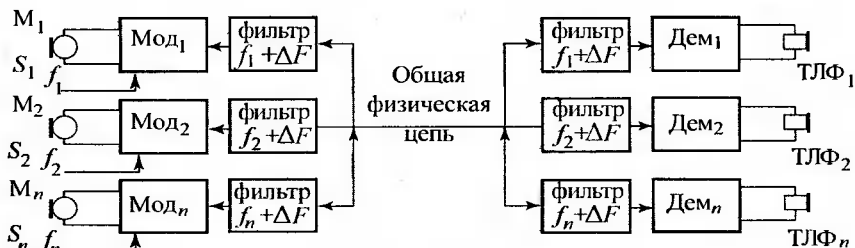


Рис. 1.3

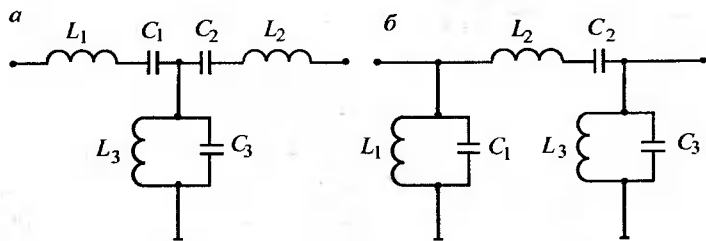


Рис. 1.4

В описанной схеме выделение сигналов на передающей и приемной стороне производится фильтрами, схемы которых могут быть представлены, например, на рис. 1.4 (рис. 1.4, а — Т-образная схема, рис. 1.4, б — П-образная схема).

Приведенные схемы фильтров представляют собой электрические цепи с сосредоточенными постоянными (в них индуктивности и емкости сосредоточены в одном месте).

В последнее время аналоговые фильтры (рис. 1.5) все чаще заменяются цифровыми фильтрами. Схема цифровой фильтрации представлена на рис. 1.5.

Аналоговый сигнал $S(t)$ в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) преобразуется в последовательность импульсов в дискретные моменты времени, а затем квантуется по уровню. Квантование заключается в том, что каждый импульс измеряется и ему приписывается один из возможных уровней. Таких уровней 2^n , где n — число двоичных разрядов. Например, если $n = 8$, то $2^8 = 256$. Каждый из квантованных импульсов заменяется n -разрядным двоичным кодом, в результате на выходе АЦП образуется цифровой сигнал.

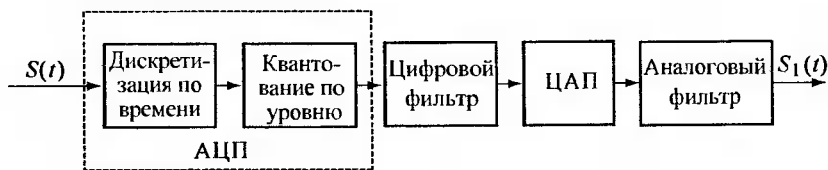


Рис. 1.5

Цифровой фильтр представляет собой вычислительное устройство, в котором над цифровыми сигналами производятся определенные математические действия (сложение, умножение, сдвиг во времени) в соответствии с заданным алгоритмом. В результате на выходе цифрового фильтра возникают новые цифровые сигналы, соответствующие выходному отфильтрованному сигналу.

В цифроаналоговом преобразователе (ЦАП) цифровой сигнал преобразуется в аналоговый сигнал ступенчатой формы. В аналоговом фильтре этот сигнал сглаживается, и в результате на выходе образуется аналоговый сигнал $S_1(t)$.

Представленная на рис. 1.5 схема цифровой обработки аналогового сигнала дает пример дискретной цифровой цепи.

Приведенные примеры показывают весьма важную роль электрических цепей в устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи. Как видно из изложенного, применяются линейные, нелинейные и параметрические цепи, сосредоточенные и распределенные, цифровые цепи. Во всех случаях их использования электрические цепи должны работать в условиях изменения в широких пределах условий окружающей среды (температура, влажность, механические перегрузки) и обеспечивать требуемые характеристики аппаратуры.

Это предъявляет повышенные требования к расчету и проектированию элементов электрической цепи, применяемых в устройствах железнодорожного транспорта.

1.2. Классификация электрических цепей и задачи теории линейных электрических цепей

Во всех устройствах автоматики, телемеханики и связи независимо от принципа их работы происходят одни и те же электромагнитные процессы, подчиняющиеся одним и тем же физическим законам.

Электромагнитные явления и устройства, использующие эти явления, можно описать методами теории электромагнитного поля, которая позволяет описать электромагнитное поле в каждой точке пространства с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и оперирует такими понятиями, как плотность тока, напряженность электрического и магнитного полей. Однако эти методы весьма сложны и на практике позволяют решить ограниченное число задач.

Методы теории цепей оперируют с такими понятиями, как ток, напряжение, электродвижущая сила, и описывают процессы в электротехнических устройствах, элементы которых заменены некоторыми упрощенными моделями, приближенно отображающими свойства реального элемента. Эти методы позволяют решить большое число практических задач. Но они вследствие принятых допущений являются менее универсальными, чем методы теории поля. Например, они не применимы, когда размеры исследуемых элементов соизмеримы с длиной волны воздействующего на устройство сигнала.

Электрической цепью называется совокупность элементов, образующих путь для протекания электрического тока, процессы в которой могут быть описаны с использованием таких терминов, как электродвижущая сила, ток, напряжение. Элементы электрической цепи можно разделить на две группы: источники электрической энергии и потребители (нагрузка). К источникам электрической энергии относятся первичные (устройства, которые превращают различные виды энергии — химическую, тепловую и др. — в электрическую) и вторичные (источники питания — выпрямители, стабилизаторы и др.). Потребители — это элементы электрической цепи, в которых происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии: тепловую (резисторы), магнитную (катушки индуктивности, трансформаторы), производится накопление электрической энергии (конденсаторы).

В теории цепей предполагается, что каждый элемент цепи полностью характеризуется зависимостью между токами и напряжениями на его зажимах, при этом процессы внутри элемента не рассматриваются.

Зная зависимость между током и напряжением на зажимах любого элемента цепи, можно, используя законы Ома и Кирхгофа, составить дифференциальное уравнение цепи, решение которого дает исчерпывающую информацию о процессах, протекающих в цепи. В зависимости от вида дифференциального уравнения, описывающего электрическую цепь, различают электрические цепи с сосредоточенными параметрами и распределенными параметрами.

Цепь с сосредоточенными параметрами описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = f(t), \quad (1.1)$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие, y — реакция этой цепи на внешнее воздействие (y — это или ток в цепи, или напряжение).

Коэффициенты a_j ($j = n, 0$) определяются параметрами элементов цепи (индуктивных элементов, конденсаторов, резисторов, нелинейных элементов — диодов, транзисторов и т.д.). Число n — порядок дифференциального уравнения — определяется количеством независимых реактивных элементов; порядок дифференциального уравнения совпадает с порядком цепи.

Возможность описания цепи дифференциальным уравнением вида (1.1) вытекает из следующих физических соображений: если размеры элементов цепи много меньше длины волны происходящих в цепи колебаний, то с большой точностью можно предположить, что процессы накопления магнитной энергии сосредоточены в индуктивных элементах, процессы накопления электрической энергии сосредоточены в емкостных элементах, а процессы превращения электрической энергии в тепловую — в резистивных элементах.

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (1.1) зависит от реакции (y), то такая цепь будет нелинейной и в ней будет хотя бы один нелинейный элемент:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(y) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = f(t). \quad (1.2)$$

В этом уравнении коэффициент $a_{n-1}(y)$ зависит от y , следовательно это уравнение описывает нелинейную цепь.

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (1.1) зависит от времени, то такое уравнение будет линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, а цепь — параметрической, т.е

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y = f(t). \quad (1.3)$$

В этом уравнении коэффициент $a_{n-2}(t)$ зависит от времени t , следовательно оно описывает параметрическую цепь.

Если в уравнении (1.1) есть коэффициенты, зависящие от реакции y и от времени t , то такое уравнение и описываемая им цепь называются линейно-параметрическими:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(y) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_0 y = f(t). \quad (1.4)$$

В этом уравнении коэффициент $a_{n-1}(y)$ зависит от y , а коэффициент $a_{n-2}(t)$ зависит от времени t .

Если ни один из коэффициентов уравнения (1.1) не зависит ни от реакции y , ни от времени t , то такое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Оно описывает линейную электрическую цепь с постоянными параметрами.

Если размеры элементов цепи становятся соизмеримы с длиной волны происходящих в цепи колебаний, то в этом случае электрическая и магнитная энергии распределены по элементам цепи, на тепло энергия рассеивается также по всем элементам. Токи напряжения становятся зависимыми не только от времени, но и от пространственной координаты. Такая цепь называется распределенной, она описывается дифференциальным уравнением в частных производных.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.1

На рис 1.6 приведен участок рельсовой цепи.

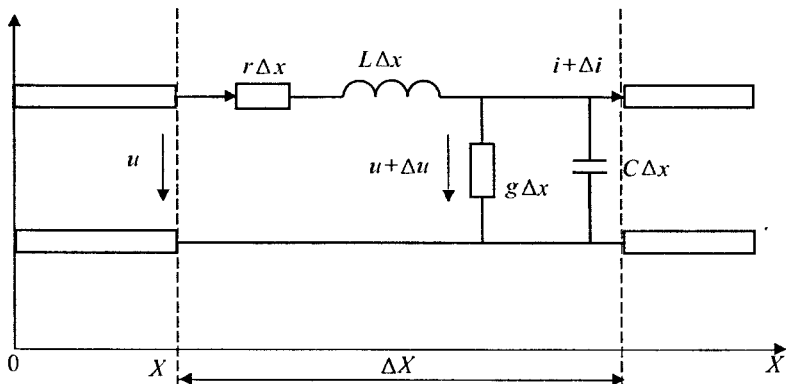


Рис. 1.6

r, L, C, g — погонные сопротивление, индуктивность, емкость и проводимость, учитывающие обе рельсовые нити;

u — напряжение между верхней и нижней рельсой в сечениях;

Δu — приращение напряжения на участке Δx ;

i — ток в сечении x , Δi — приращение тока на участке Δx .

В соответствии с уравнениями Кирхгофа получим

$$\begin{cases} \Delta u = (ri + L \frac{\partial i}{\partial t}) \Delta x \\ \Delta i = (gu + C \frac{\partial u}{\partial t}) \Delta x. \end{cases}$$

Разделив обе части уравнений на Δx и устремив $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Уравнения в частных производных (1.5) описывают линейную распределенную цепь. Задав начальные и граничные условия для уравнений (1.5) и решив их, получим напряжение и ток вдоль рельсовой нити как функции времени и координаты (длины рельсы):

$$i = i(x, t); u = u(x, t).$$

Пример 1.2

Последовательный колебательный контур (рис. 1.7): r_i — внутреннее сопротивление источника; L , C , R — параметры контура. Дифференциальное уравнение для тока в контуре

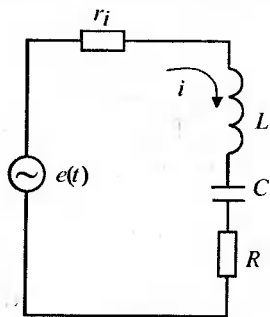


Рис. 1.7

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + (r_i + R)i = e(t).$$

Дифференцируя обе части уравнения, получим дифференциальное уравнение 2-го порядка, линейное с постоянными коэффициентами, в котором $\omega_0^2 = 1/LC$, $e'(t)$ — производная по времени от внешнего воздействия $e(t)$.

Пример 1.3

Цепь с диодом (рис. 1.8).

Диод VD имеет вольт-амперную характеристику

$$i = i_0(e^{b_0 u} - 1),$$

где i — ток диода, u — напряжение на нем.

Решая последнее уравнение относительно напряжения u , получим

$$u = \frac{1}{b_0} \ln\left(\frac{i + i_0}{i_0}\right).$$

Тогда дифференциальное уравнение цепи относительно тока i будет

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{b_0} \ln \frac{i + i_0}{i_0} = e(t).$$

Здесь коэффициент при нулевой производной зависит от тока, следовательно, это уравнение нелинейное 1-го порядка.

Пример 1.4

Микрофонная цепь (см. рис. 1.2) приведена на рис. 1.9.

$$L \frac{di}{dt} + i \frac{R}{[1 + KS(t)]} = E.$$

Здесь коэффициент при нулевой производной зависит от времени, следовательно, это — линейное уравнение 1-го порядка с переменными коэффициентами, а цепь (рис. 1.9) — параметрическая.

Классификация цепей по типу дифференциального уравнения не является единственным признаком.

В зависимости от топологических особенностей электрические цепи бывают планарные, непланарные (объемные); разветвленные и неразветвленные; простейшие (одноконтурные, двухузловые) и сложные (многоконтурные, многоузловые).

По энергетическим свойствам цепи могут быть активными и пассивными.

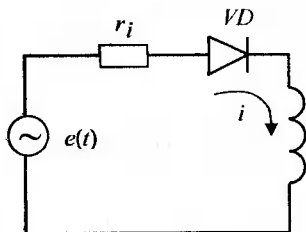


Рис. 1.8

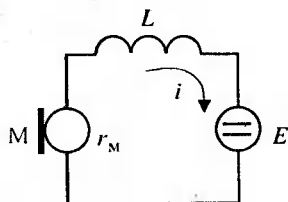


Рис. 1.9

Активные содержат активные элементы-источники, пассивные не содержат источников.

По числу внешних выводов электрические цепи могут быть двухполюсниками, четырехполюсниками, многополюсниками.

Из указанных выше типов дифференциальных уравнений в настоящее время наиболее полно разработана теория линейных уравнений, имеющих вид (1.1), где a_j ($j = \overline{1, n}$) являются либо постоянными, либо зависят только от времени. В частности для этих уравнений справедлива теорема наложения (суперпозиции).

Если y_j является решением уравнения

$$a_n \frac{d^n y_j}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_j}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y_j = f_j(t) \quad (j = \overline{1, n}), \text{ то}$$

$y = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$ является решением уравнения (1.1), в котором правая

$$\text{часть } f(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j(t).$$

На теореме наложения базируется широко используемый в теории цепей принцип наложения (суперпозиции): реакция линейной цепи на сложное воздействие, представленное линейной комбинацией простых

воздействий $x(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t)$, равна линейной комбинации реакций,

вызванных каждым из простых воздействий в отдельности:

$$y(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j(t), \text{ где } y_j(t) \text{ — реакция линейной цепи на воздействие } x_j(t).$$

Применение принципа наложения существенно облегчает решение многих задач в линейных электрических цепях.

Весь дальнейший материал будет относиться к линейным электрическим цепям с постоянными параметрами.

Применительно к этим цепям в их теории решаются две задачи: анализа и синтеза.

Задача анализа формулируется следующим образом: заданы входное воздействие и линейная цепь с параметрами элементов, требуется найти реакцию цепи на заданное воздействие.

Задача синтеза формулируется следующим образом: заданы входное воздействие и требуемая реакция цепи на это воздействие; необходимо найти электрическую цепь и ее параметры, преобразующую входное воздействие в выходную реакцию.

1.3. Модели линейных электрических цепей

Реальная линейная цепь включает в себя резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, трансформаторы, диоды, транзисторы, операционные усилители, источники питания и сигнала и т. д. В каждом из элементов электрической цепи при протекании тока происходят электромагнитные процессы, связанные с превращением подводимой к элементу энергии в энергию магнитного либо электрического поля, либо в тепловую энергию. Каждый из этих процессов связывают с определенным элементом: например, превращение энергии в тепло связано с элементом «сопротивление», запасание магнитной энергии — с элементом «индуктивность», «взаимная индуктивность», запасание электрической энергии — с элементом «емкость». Поэтому модели реальных элементов должны отражать протекающие в них процессы. Так, например, резистор, основная функция которого превращение электрической энергии в тепло, имеет выводы, которыми он устанавливается в схему и которые имеют индуктивность. Кроме того, между этими выводами существует емкость. Поэтому модель резистора будет иметь вид рис. 1.10, *а*. Конденсатор также имеет выводы, с помощью которых он устанавливается в устройство, следовательно, он имеет индуктивность выводов. Кроме того, в нем за счет переменного электрического поля происходит переполяризация диэлектрика, на что затрачивается энергия. Это явление учитывается наличием в модели конденсатора сопротивления r (рис. 1.10, *б*), сопротивление выводов учитывается сопротивлением R_B .

Рассуждая аналогично, модель индуктивной катушки получим в виде (рис. 1.10, *в*), где R_L — сопротивление провода намотки, $R_{из}$ — сопротивление изоляции, C_L — межвитковая емкость. В моделях рис. 1.10 R, L, C — это идеальные элементы: сопротивление, индук-

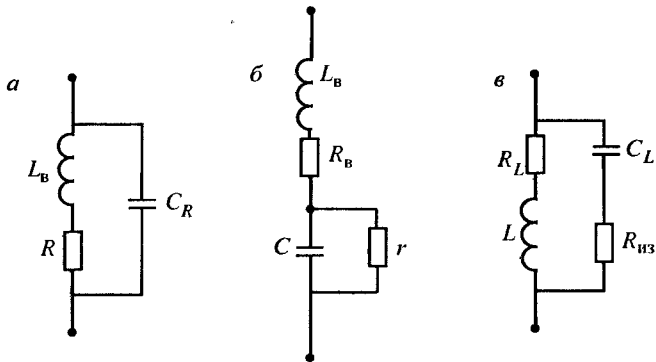


Рис. 1.10

тивность, емкость, т.е. в них происходит только преобразование энергии внешнего источника в тепло, в магнитную и электрическую энергию, соответственно; $L_B, C_R, R_B, r, R_L, C_L, R_{из}$ — это тоже идеальные элементы, они неизбежно сопровождают R, L, C , поэтому они называются паразитными. В зависимости от диапазона частот, в котором используются элементы, их модели могут быть упрощены.

Часто в электрической цепи катушки индуктивности бывают связаны. Поэтому имеет смысл рассмотреть модель индуктивно связанных катушек. Две индуктивно связанных катушки описываются уравнениями

$$\begin{aligned} U_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ U_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где U_1, i_1 — напряжение и ток первой катушки, U_2, i_2 — напряжение и ток второй катушки, L_1, L_2 — индуктивности катушек, M — взаимная индуктивность между катушками; знак «+» соответствует согласному включению катушек, знак «-» встречному включению.

Пусть катушки включены в цепь последовательно — (рис. 1.11, а, б).

Рис. 1.11, а соответствует согласному включению катушек: токи i_1 и i_2 текут одинаково относительно одноименных зажимов катушек (отмеченных звездочкой *), а рис. 1.11, б соответствует встречному включению катушек.

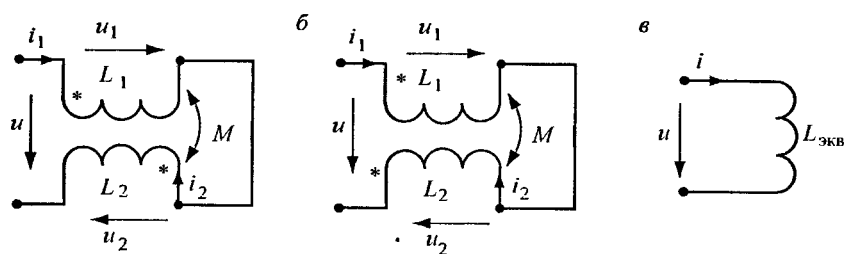


Рис. 1.11

В соответствии с рис. 1.11, а, б $u = u_1 + u_2$; $i = i_1 = i_2$. Используя уравнения (1.6), получим для напряжения для обеих катушек

$$u = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = L_{\text{экв}} \frac{di}{dt},$$

т.е. последовательное включение связанных катушек приводит к эквивалентной индуктивности (рис. 1.11, в):

$$L_{\text{экв}} = (L_1 + L_2 \pm 2M). \quad (1.7)$$

Таким образом, модель двух последовательно включенных связанных катушек индуктивности является $L_{\text{экв}}$ (рис. 1.11, в).

Модели других соединений индуктивно связанных катушек (параллельное, замыкание одной из них и т.д.), а также трансформаторов рассмотрены в курсе «Теоретические основы электротехники». Модели транзисторов приведены в курсе «Электроника».

В качестве модели источника сигнала часто в теории цепей применяют идеализированный источник напряжения или тока.

Идеализированным источником напряжения (генератором ЭДС) называют источник, напряжение на зажимах которого не зависит от тока, потребляемого от него (рис. 1.12, а).

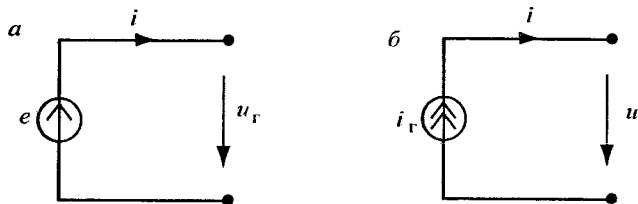


Рис. 1.12

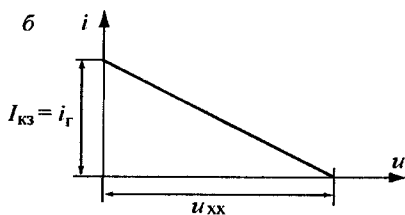
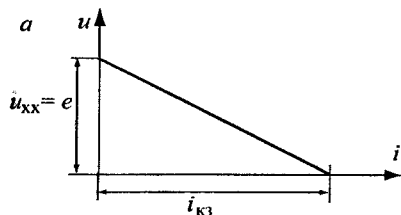


Рис. 1.13

Идеализированным источником тока (генератором тока) называют источник, ток через который не зависит от напряжения на его зажимах (рис. 1.12, б).

Идеальные источники не могут быть реализованы, так как в противном случае они имели бы бесконечную мощность.

Реальные источники имеют зависимости между током и напряжением на выходе, показанные на рис. 1.13.

Для генератора напряжения максимальное напряжение на выходе источника обеспечивается при токе нагрузки $i = 0$ (рис. 1.13, а) и при коротком замыкании ($I_{кз}$) напряжение на выходе $u = 0$. Эту зависимость описывает выражение

$$u = u_{xx} - R_i i, \quad (1.8)$$

где $R_i = u_{xx} / I_{кз}$ — внутреннее сопротивление генератора ЭДС.

Для генератора тока максимальный ток $i_g = I_{кз}$ в режиме короткого замыкания нагрузки, а при увеличении сопротивления нагрузки ток падает до нуля при $R_n \rightarrow \infty$. Эту зависимость (рис. 1.13, б) описывает выражение

$$i = I_{кз} - G_i u, \quad (1.9)$$

где G_i — внутренняя проводимость генератора тока.

На основании (1.8) и (1.9) моделями реальных источников ЭДС и тока будут схемы, приведенные на рис. 1.14.

В соответствии с рис. 1.14, а напряжение на нагрузке $r u = \frac{e}{1 + R_i / r}$

и при $R_i \ll r$ реальный источник ЭДС приближается к идеальному (имеющему $R_i = 0$).

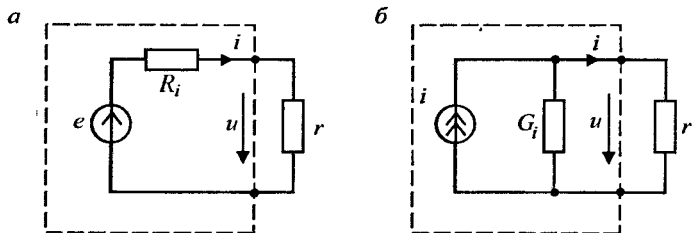


Рис. 1.14

В соответствии с рис. 1.14, б ток в нагрузке r $i = \frac{i_r}{1 + G_i/g}$, где $g = 1/r$, и при $G_i \ll g$ реальный источник тока приближается к идеальному (имеющему $G_i = 0$).

В приведенных моделях реальных резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности (одиночных и связанных), трансформаторов, биполярных и полевых транзисторов, источников напряжения и тока каждый элемент является идеальным сопротивлением, емкостью, индуктивностью, идеальным источником тока или напряжения.

Используя приведенные модели и заменяя ими реальные элементы на схеме устройства, получим модель этого устройства, состоящего из идеальных элементов, т.е. электрическую цепь.

1.4. Характеристики линейных электрических цепей

Свойства электрической цепи определяются реакцией ее на то или иное воздействие. В качестве воздействий в теории цепей принимают элементарные тестовые сигналы. Реакции цепи на эти сигналы и определяют ее характеристики. Тестовые сигналы должны отвечать следующим требованиям.

1. Расчет или экспериментальное определение реакции цепи на их воздействие должны быть достаточно простыми.
2. Суммой тестовых сигналов должно определяться любое сложное воздействие на цепь.

Выполнение этих требований дает возможность при расчете реакции цепи на сложное воздействие применять принцип суперпозиции: найдя реакцию цепи на тестовое воздействие (т.е. характеристику цепи) и представив реальный сигнал суммой тестовых сигналов, реак-

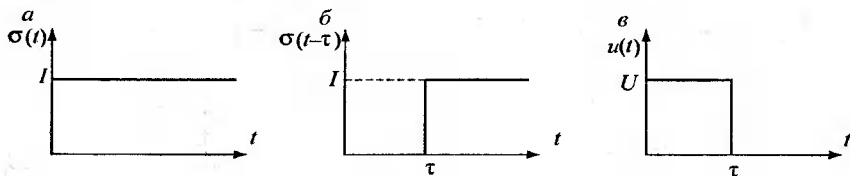


Рис. 1.15

цию цепи на сложное воздействие получим как сумму реакций цепи на каждый тестовый сигнал в отдельности.

В качестве тестовых сигналов применяют:

- гармоническую функцию единичной амплитуды $u = \cos \omega t$, $u = \sin \omega t$ или $u = \exp j\omega t$;
- единичный скачок (функцию Хевисайда) $\sigma(t)$;
- единичный импульс (дельта-функцию Дирака) $\delta(t)$.

Суммой гармонических функций можно представить как периодический, так и непериодический сигнал, удовлетворяющий условиям Дирихле или абсолютной интегрируемости.

Единичный скачек имеет вид, показанный на рис. 1.15, а.

Функция $\sigma(t)$ определяется следующим образом:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1/2 & \text{при } t = 0 \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Функция $\sigma(t)$, запаздывающая на время τ , приведена на рис. 1.15, б. Она определяется следующим образом:

$$\sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ 1/2 & \text{при } t = \tau \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (1.11)$$

Таковыми функциями можно представить любые импульсные функции. Например, прямоугольный импульс амплитудой U и длительностью τ (рис. 1.15, в) можно описать как $u(t) = U\sigma(t) - U\sigma(t - \tau)$.

Единичный импульс, или дельта-функция Дирака, определяется как предел импульса $\Delta(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ (рис 1.16).

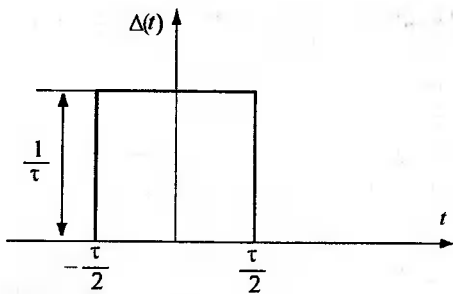


Рис. 1.16

Очевидно при $\tau \rightarrow 0$ длительность стремится к 0, а амплитуда к ∞ .

Но площадь импульса $S = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t) dt = 1$ при любом t . Это и определяет название «единичный импульс».

Так как $\Delta(t)$ — симметричная функция, то $\int_{-\infty}^0 \Delta(t) dt = \int_0^{\infty} \Delta(t) dt$, т.е.

$\delta(t) = \delta(-t)$. Поэтому можно написать

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1/2 & \text{при } t = 0 \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Сравнивая (1.10) и (1.12), получим

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \sigma(t) \quad \text{или} \quad \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}. \quad (1.13)$$

Формулы (1.13) связывают единичный скачек и единичный импульс. Дельта-функция может быть определена как

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Если дельта-функция запаздывает на время t , то она определяется как

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t \neq \tau \end{cases}$$

Как будет показано ниже, суммой дельта функций может быть представлено любое сложное воздействие.

Рассмотрим интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Delta(t-t_0)dt$, где $u(t)$ — гладкая функция (непрерывная и имеющая производную), а $\Delta(t-t_0)$ импульс вида рис. 1.16, запаздывающий на $t = t_0$ (рис. 1.17).

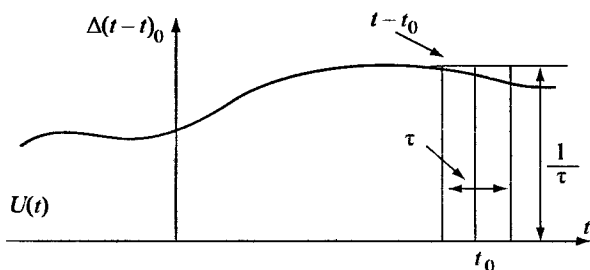


Рис. 1.17

Если τ — мало, то $u(t)$ за это время изменится мало, поскольку в пределе при $\tau \rightarrow 0$ $\Delta(t-t_0) \rightarrow \delta(t-t_0)$. Поэтому $I = U(t_0)$, так как

$$\int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \delta(t-t_0)dt = 1.$$

Полученный результат выражает важное фильтрующее свойство d -функции: интеграл от произведения гладкой функции на d -функцию равен значению гладкой функции в точке, где d -функция отлична от нуля.

Соответственно реакциям на тестовые сигналы различают следующие характеристики линейной электрической цепи.

- Комплексная характеристика — это реакция цепи при нулевых начальных условиях на гармонический тестовый сигнал.

- Переходная характеристика — это реакция цепи при нулевых начальных условиях на единичный скачок.
- Импульсная характеристика — это реакция цепи при нулевых начальных условиях на δ -функцию.

Перечисленные характеристики могут относиться как к характеристикам передачи (в этом случае они называются соответственно комплексным коэффициентом передачи, переходной передаточной и импульсной передаточной характеристиками цепи), так и к входным и выходным функциям цепи (входные сопротивления и проводимости). Для определения передаточных характеристик рассчитываются выходная реакция цепи на входное тестовое воздействие. Входные сопротивления вычисляются как отношение входного напряжения к входному току, а проводимость — величина, обратная входному сопротивлению. Выходное сопротивление вычисляется как отношение выходного напряжения к выходному току, а проводимость — величина, обратная сопротивлению.

Рассмотрим более подробно характеристики и методы их расчета или экспериментального определения.

Комплексные характеристики

Комплексным коэффициентом передачи цепи $K(j\omega)$ называется отношение комплексной амплитуды напряжения (тока) на выходе \dot{U}_2 к комплексной амплитуде напряжения (тока) на входе \dot{U}_1 , т.е. $K(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$. Если передается тестовый сигнал $e^{j\omega t}$ единичной амплитуды, то $K(j\omega) = \dot{U}_2$.

Для расчета $K(j\omega)$ можно воспользоваться методом комплексных амплитуд.

Комплексная величина $K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, где $|K(j\omega)|$, $\varphi(\omega)$ — модуль и аргумент комплексного числа.

Модуль $|K(j\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой цепи (АЧХ), она показывает зависимость от частоты коэффициента передачи цепи.

Аргумент $\varphi(\omega)$ называется фазочастотной характеристикой (ФЧХ) цепи, она показывает зависимость сдвига фаз между входным и выходным напряжением (током) от частоты.

Величина $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = t_3$ называется групповым временем задержки (ГВЗ), она показывает время задержки сигнала с частотой ω при прохождении через цепь.

Приведем примеры.

Пример 1.5

Для цепи рис. 1.18, а

$$K(j\omega) = \frac{1}{R + 1/j\omega C} \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{1 + jR\omega C} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}} e^{-j \arctg R\omega C},$$

$$\text{АЧХ} = |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}},$$

$$\text{ФЧХ} = \arg K(j\omega) = -\arctg R\omega C,$$

$$\text{ГВЗ} - t_3 = \frac{d[\arg K(j\omega)]}{d\omega} = -\frac{RC}{1 + (R\omega C)^2}.$$

Для цепи рис. 1.18, б

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C} \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + jR\omega C} = \\ &= \frac{e^{-j \arctg \frac{R\omega C}{1 - \omega^2 LC}}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{АЧХ} = |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2}},$$

$$\text{ФЧХ} = \arg K(j\omega) = -\arctg \frac{R\omega C}{1 - \omega^2 LC},$$

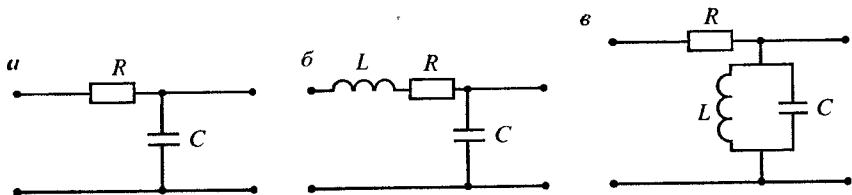


Рис. 1.18

$$\text{ГВЗ}-t_3 = -\frac{RC(1+\omega^2 LC)}{(1-\omega^2 LC)^2 + (R\omega C)^2}.$$

Для цепи рис. 1.18, в

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{j\omega L}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} = \frac{e^{j\pi/2} \omega L e^{-j \arctg \frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}}}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}} = \\ &= \frac{\omega L e^{j\left[\pi/2 - \arctg \frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right]}}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{АЧХ} = |K(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}},$$

$$\text{ФЧХ} = \arg K(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}.$$

При расчете ФЧХ использована формула Эйлера

$$e^{j\pi/2} = \cos \pi/2 + j \sin \pi/2.$$

$$\text{ГВЗ}-t_3 = -\frac{LR(1+\omega^2 LC)}{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}.$$

Если цепь очень сложная (например, длинная рельсовая цепь), то АЧХ, ФЧХ и ГВЗ могут быть измерены экспериментально.

Переходные и импульсные характеристики

Для расчета переходных или импульсных характеристик цепи можно использовать классический метод решения дифференциальных уравнений и операторный метод. Применение классического метода предполагает при использовании законов Ома и Кирхгофа составление дифференциального уравнения цепи и решение его при нулевых начальных условиях для внешнего воздействия в виде единичного скачка

$\Delta(t)$, либо δ -функции. Применение операторного метода представляется более простым. Оно сводится к выполнению следующих шагов.

1. Внешнее воздействие (в данном случае $\Delta(t)$ или $\delta(t)$) заменяется изображением по Лапласу:

$$\begin{aligned}\sigma(p) &= \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \text{ т.е. } \sigma(t) \div \frac{1}{p}; \\ \delta(p) &= \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1, \text{ т.е. } \delta(t) \div 1.\end{aligned}\quad (1.14)$$

В последнем интеграле использовано фильтрующее свойство δ -функций.

2. Элементы цепи заменяются операторными сопротивлениями (проводимостями): $R \div R$; $L \div pL$; $C \div 1/pC$.

В результате схема цепи заменяется своим операторным эквивалентом.

3. По операторной схеме замещения, используя законы Ома и Кирхгофа, находятся операторные изображения переходной $a(p)$ или импульсной $h(p)$ характеристик. Изображения $a(p)$ или $h(p)$ будут иметь вид

$$a(p) = \frac{A(p)}{B(p)}; \quad h(p) = \frac{C(p)}{D(p)}, \quad (1.15)$$

где $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, $D(p)$ — полиномы по комплексной переменной p , т.е.

$$A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0;$$

$$B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0;$$

$$C(p) = c_m p^m + c_{m-1} p^{m-1} + \dots + c_0;$$

$$D(p) = d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \dots + d_0.$$

Значения переменной p , при которых $a(p)$ или $h(p)$ обращаются в нуль, называются нулями $a(p)$ или $h(p)$. Очевидно, чтобы найти нули $a(p)$ или $h(p)$, необходимо приравнять $A(p) = 0$ или $C(p) = 0$ и решить полученные уравнения относительно p .

Значения переменной p , при которых $a(p)$ или $h(p)$ обращаются в бесконечность, называются полюсами $a(p)$ или $h(p)$. Очевидно, чтобы найти полюсы $a(p)$ или $h(p)$, необходимо приравнять $B(p) = 0$ или $D(p) = 0$ и решить полученные уравнения относительно p .

Если найдены корни уравнений $A(p) = 0$, $B(p) = 0$, $C(p) = 0$, $D(p) = 0$, то в соответствии с теоремой Виета:

$$\begin{aligned} A(p) &= a_m (p - p_m)(p - p_{m-1}) \dots (p - p_1); \\ B(p) &= b_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1); \\ C(p) &= c_m (p - p_m)(p - p_{m-1}) \dots (p - p_1); \\ D(p) &= d_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

4. Используя обратное преобразование Лапласа, по изображениям $a(p)$ или $h(p)$ находятся оригиналы, т.е. переходная $a(t)$ или импульсная $h(t)$ характеристики цепи:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} a(p) e^{pt} dp; \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} h(p) e^{pt} dp. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Обратное преобразование Лапласа (1.17) применимо к функциям, $a(p) \rightarrow 0$, $h(p) \rightarrow 0$, при $p \rightarrow \infty$. Учитывая (1.15) и (1.16), это требование можно выполнить в том случае, когда степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя, т.е. $m < n$. Однако это не всегда выполняется. Если $m \geq n$, то числитель в (1.15) делится на знаменатель по правилам деления многочлена на многочлен до тех пор, пока степень

числителя остатка не станет меньше степени знаменателя. Например, пусть $m > n$. Тогда деление $A(p)$ на $B(p)$ дает

$$\begin{array}{r} a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + a_{m-2} p^{m-2} + \dots + a_0 \quad \Big| \quad b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_0 \\ \hline a_m p^m + \frac{b_{n-1}}{b_n} a_m p^{m-1} + \frac{a_m b_{n-2}}{b_n} p^{m-2} + \dots \quad \Big| \quad \frac{a_m}{b_n} p^{m-n} + \left(\frac{1}{b_n} a_{m-1} - \frac{a_n b_{n-1}}{b_n} \right) p^{m-n-1} \\ \hline \left(a_{m-1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n} \right) p^{m-1} + \left(a_{m-2} - \frac{a_m b_{n-2}}{b_n} \right) p^{m-2} + \dots \\ \hline \left(a_{m-1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n} \right) p^{m-1} + \frac{b_{n-1}}{b_n} \left(a_{m-1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n} \right) p^{m-2} + \dots \\ \hline \left[a_{m-2} - \frac{a_m b_{n-2}}{b_n} - \frac{b_{n-1}}{b_n} \left(a_{m-1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n} \right) \right] p^{m-2} + \dots \end{array}$$

Как видно, в результате двух шагов степень числителя остатка понизилась на 2 и стала $m - 2$. Если $m - 2 \geq n$, то процесс деления продолжается до r шагов, пока не станет $m - r < n$.

В итоге изображение $a(p)$ может быть представлено в виде

$$a(p) = [g_{m-n} p^{m-n} + g_{m-n-1} p^{m-n-1} + \dots + g_0] + \frac{l_{m-r} p^{m-r} + l_{m-r-1} p^{m-r-1} + \dots + l_0}{B(p)}, \quad (1.18)$$

$$\text{где } g_{m-n} = \frac{a_m}{b_n}; \quad g_{m-n-1} = \frac{1}{b_n} \left(a_{m-1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n} \right) \dots$$

$$l_{m-2} = \left[a_{m-r} - \frac{a_m b_{n-2}}{b_n} - \frac{b_{n-1}}{b_n} \left(a_{m-r+1} - \frac{a_m b_{n-1}}{b_n} \right) \right] \dots$$

Таким образом, если степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя, то делением многочлена на многочлен у изображения $[a(p)$ или $b(p)]$ может быть выделена целая часть (в ква-

дратных скобках 1.18) и дробная. Для дробной части степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя и условия применимости обратного преобразования Лапласа выполнены. Целая часть (1.18) особенностей не имеет. Интеграл (1.17) в этом случае разбивается на 2:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [g_{m-n} p^{m-n} + g_{m-n-1} p^{m-n-1} + \dots + g_0] e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[\frac{l_{m-r} p^{m-r} + l_{m-r-1} p^{m-r-1} + \dots + l_0}{B(p)} \right] e^{pt} dp. \quad (1.19)$$

Для случая, когда степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя подынтегральной функции в (1.17), вычисление интегралов в (1.17) и от дробной части в (1.19) производится с применением теоремы вычетов, т.е.

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left\{ \frac{a(p)}{h(p)} \right\} e^{pt} dp = \sum_{i=1}^n \text{res}(p = p_i). \quad (1.20)$$

Вычет $\text{res}(p = p_i)$ в (1.20) вычисляется по формуле

$$\text{res}(p = p_i) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\left\{ \frac{a(p)}{h(p)} \right\} (p - p_i)^k e^{pt} \right], \quad (1.21)$$

где k — кратность полюса $p = p_i$ (кратность корня уравнения знаменателя).

Рассмотрим обратное преобразование Лапласа от целой части в (1.19), т.е.

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [g_{m-n} p^{m-n} + g_{m-n-1} p^{m-n-1} + \dots + g_0] e^{pt} dp = I. \quad (1.22)$$

В соответствии с суммой в квадратных скобках он разбивается на сумму интегралов. В соответствии с (1.14) $\delta(p) = 1$, следова-

тельно $\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} g_0 e^{pt} dp = g_0 \delta(t)$. По теореме дифференцирования

$$p^n F(p) \div f^{(n)}(t), \text{ поэтому } \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} g_{m-1} p^{m-n} e^{pt} dp = g_{m-1} \delta^{m-n}(t);$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} g_{m-n-1} p^{m-n-1} e^{pt} dp = g_{m-n-1} \delta^{m-n-1}(t),$$

где $\delta^{(m-n)}(t)$, $\delta^{(m-n-1)}(t)$ — производные порядка $(m-n)$, $(m-n-1)$ от $\delta(t)$.

Таким образом обратное преобразование Лапласа от целой части (1.19) равно

$$I = g_{m-n} \delta^{(m-n)}(t) + g_{m-n-1} \delta^{(m-n-1)}(t) + \dots + g_0 \delta(t). \quad (1.23)$$

Приведем примеры.

Пример 1.6

Для цепи рис. 1.19, а найдем $a(t)$ и $h(t)$.

Операторная схема замещения цепи рис. 1.19, а для расчета $a(p)$ приведена на рис. 1.19, б.

По ней получим

$$a(p) = \frac{\tau}{1 + p\tau}, \text{ где } \tau = RC;$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\tau}{1 + p\tau} e^{pt} dp = \text{res}(p = p_1).$$

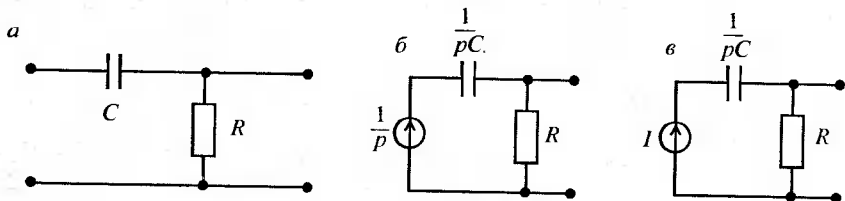


Рис. 1.19

Подынтегральная функция имеет однократный полюс $p = -1/\tau$, поэтому

$$a(t) = \operatorname{res}(p = -\frac{1}{\tau}) = \lim_{p \rightarrow -\frac{1}{\tau}} \left(\frac{p+1/\tau}{p+1/\tau} \right) e^{pt} = e^{-t/\tau}.$$

Операторная схема замещения цепи рис. 1.19, а для расчета $h(p)$ приведена на рис. 1.19, в. По ней получим

$$h(p) = \frac{p\tau}{p\tau + 1}, \text{ где } t = RC.$$

Изображение $h(p)$ имеет степень числителя равным степени знаменателя, поэтому к ней обратное преобразование Лапласа неприменимо. Разделим числитель на знаменатель, получим

$$h(p) = 1 - \frac{1}{p\tau + 1}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к этой функции, получим

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[1 - \frac{1}{p\tau + 1} \right] e^{pt} dp = \delta(t) - \operatorname{res}(p = p_1).$$

Подынтегральная функция имеет один полюс $p_1 = -1/t$. Поэтому

$$\operatorname{res}(p = p_1) = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{p - p_1}{\tau(p - p_1)} e^{pt} \right] = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Итак, импульсная характеристика $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$.

Пример 1.7

Для цепи рис. 1.20, а найдем $a(t)$ и $h(t)$.

Операторная схема замещения цепи для расчета $a(p)$ приведена на рис. 1.20, б. По ней получим

$$a(p) = \frac{R}{p[p^2 RLC + p(L + RrC) + (R + r)]}.$$

Корни знаменателя $p_1 = 0$,

$$p_{2,3} = \frac{-(L + RrC) \pm \sqrt{(L + RrC)^2 - 4RLC(R+r)}}{2RLC};$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{R}{RLCp(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} dp = \sum_{i=1}^3 \text{res}(p = p_i);$$

$$\text{res}(p = p_1) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p}{LCp(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} \right] = \frac{1}{LCp_2p_3};$$

$$\text{res}(p = p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[\frac{(p-p_2)}{LCp(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} \right] = \frac{1}{LCp_2(p_2-p_3)} e^{p_2t};$$

$$\text{res}(p = p_3) = \lim_{p \rightarrow p_3} \left[\frac{(p-p_3)}{LCp(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} \right] = \frac{1}{LCp_3(p_3-p_2)} e^{p_3t}.$$

Произведя сложение, получим

$$a(t) = \frac{1}{LC} \left[\frac{1}{p_2p_3} + \frac{1}{p_2-p_3} \left(\frac{e^{p_2t}}{p_2} - \frac{e^{p_3t}}{p_3} \right) \right].$$

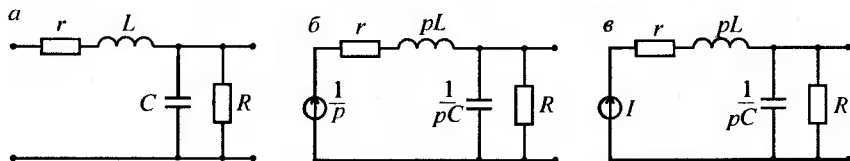


Рис. 1.20

Операторная схема замещения цепи для расчета $h(p)$ приведена на рис. 1.20, в. По ней получим

$$h(p) = \frac{R}{p^2 RLC + p(L + RrC) + (R + r)}$$

Корни знаменателя $p_{2,3}$ найдены выше. Поэтому

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{1}{LC(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} dp = \sum_{i=2,3} \text{res}(p=p_i);$$

$$\text{res}(p=p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[\frac{(p-p_2)}{LC(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} \right] = \frac{1}{LC} \frac{1}{p_2-p_3} e^{p_2 t};$$

$$\text{res}(p=p_3) = \lim_{p \rightarrow p_3} \left[\frac{(p-p_3)}{LC(p-p_2)(p-p_3)} e^{pt} \right] = \frac{1}{LC} \frac{1}{p_3-p_2} e^{p_3 t};$$

$$h(t) = \frac{1}{LC} \frac{1}{(p_2-p_3)} (e^{p_2 t} - e^{p_3 t})$$

1.5. Операторное, частотное и временное представление непрерывных и импульсных воздействий и реакций цепей

Выше были перечислены характеристики линейных электрических цепей, рассматриваемые как реакции цепи на элементарные тестовые сигналы: $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\exp j\omega t$, единичный скачок $\sigma(t)$ и единичный импульс $\delta(t)$. Однако этими сигналами далеко не исчерпывается перечень воздействий, которые имеют место на практике. В реальных устройствах автоматики, телемеханики и связи воздействующие на цепи сигналы имеют сложную форму. Очевидно и реакция цепи на него тоже достаточно сложна.

При расчете реакции линейной электрической цепи на сложное воздействие часто применяют принцип наложения, согласно которому решение этой задачи разделяется на три этапа.

1. Вычисление реакции цепи на каждый из простых сигналов.
2. Представление сложного сигнала в виде суммы простых.

3. Вычисление реакции цепи на сложное воздействие путем суммирования реакций на все простые сигналы.

Первый этап рассмотрен в 1.4. Поэтому рассмотрим второй.

1.5.1. Разложение сложных сигналов на сумму простых

В общем случае сложный сигнал $S(t)$ можно представить в виде суммы простых сигналов

$$S(t) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(t), \quad (1.24)$$

где $\varphi_n(t)$ — базисные функции, принимающие действительные значения, а коэффициенты a_n подбираются такими, чтобы обеспечился минимум величины ошибки:

$$\Delta = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[S(t) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) \right]^2 dt. \quad (1.25)$$

В качестве базисных выбираются ортогональные функции, т.е. такие, которые удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt \begin{cases} = 0 & \text{при } n \neq m \\ \neq 0 & \text{при } n = m. \end{cases} \quad (1.26)$$

Интервал $[t_1, t_2]$ называется интервалом ортогональности.

Используя условие (1.26), найдем коэффициенты a_n из (1.24) такими, чтобы величина Δ из (1.25) приняла минимальное значение. С этой целью продифференцируем (1.25) по a_m и приравняем производную нулю:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_m} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 \left[S(t) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) \right] [-\varphi_m(t)] dt = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Из полученного уравнения, принимая во внимание условие ортогональности (1.26), получим формулу для расчета коэффициентов a_m :

$$a_m = \frac{1}{(t_2 - t_1) \overline{\varphi_m^2(t)}} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \varphi_m(t) dt, \quad (1.27)$$

где обозначено $\overline{\varphi_m^2(t)} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_m^2(t) dt$ ($m = 0, 1, 2, \dots, N$).

Если $\varphi_m(t)$ означает ток или напряжение, то $\varphi_m^2(t)$ имеет физический смысл средней мощности базисной функции, выделяющейся на сопротивлении $R = 1$ Ом.

Разложение (1.24) с коэффициентами, определяемыми по формуле (1.27), наилучшим образом в среднем приближает многочлен (1.24) к функции $S(t)$. Приближение становится более точным при увеличении числа членов, т.е. при $N \rightarrow \infty$, когда многочлен превращается в ряд

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad (1.28)$$

называемый обобщенным рядом Фурье. Он сходится, если на интервале ортогональности $[t_1, t_2]$ $S(t)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го рода и, кроме того, $S(t)$ вместе со своей первой производной абсолютно интегрируема, т.е. существуют

$$\int_{t_1}^{t_2} |S(t)| dt < \infty; \quad \int_{t_1}^{t_2} |S'(t)| dt < \infty.$$

Найдем ошибку Δ . С этой целью раскроем выражение (1.25):

$$\Delta = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) \right]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) dt. \quad (1.29)$$

Первый член выражения (1.29) $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt = P$ по физическому

смыслу представляет собой усредненную за время $(t_1 - t_2)$ мощность сигнала.

Второй член выражения (1.29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) \right]^2 dt &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=0}^N a_n^2 \varphi_n^2(t) dt + \\ &+ \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\substack{n=0 \\ m=0 \\ n \neq m}}^N a_n a_m \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \sum_{n=0}^N a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)}, \end{aligned}$$

так как в силу ортогональности $\varphi_n(t)$ и $\varphi_m(t)$ второй интеграл равен нулю.

Из выражения (1.27) $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \varphi_m(t) dt = a_m \overline{\varphi_m^2(t)}$, поэтому

третий член выражения (1.29) принимает вид

$$-\frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) dt = -2 \sum_{n=0}^N a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)}.$$

Таким образом, выражение (1.29) будет иметь вид

$$\Delta = P + \sum_{n=0}^N a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)} - 2 \sum_{n=0}^N a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)} = P - \sum_{n=0}^N a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)}. \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) дает возможность вычислить ошибку от представления сложного сигнала в виде конечной суммы базисных функций. В этом выражении P и $\overline{\varphi_n^2(t)}$ — усредненные за время $(t_1 - t_2)$ мощности сложного сигнала и базисной функции. Поэтому по физическому смыслу $\Delta \geq 0$ и из (1.51) получаем неравенство Бесселя

$$P \geq \sum_{n=0}^N a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)}, \quad (1.31)$$

показывающее, что мощность сложного сигнала больше или равна сумме мощностей составляющих его простых сигналов.

При $N \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$ и (1.31) превращается в равенство Парсеваля

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)}, \quad (1.32)$$

позволяющее вычислить мощность P сложного сигнала, если известны мощности $a_n^2 \overline{\varphi_n^2(t)}$ его составляющих.

В качестве базисной могут быть использованы любые ортогональные системы функций: тригонометрические, показательные, Чебышева, Лежандра, Эрмита, Лагерра, Уолша. Выбор базисной системы ортогональных функций, обеспечивающих заданную точность разложения Δ при минимальном числе членов многочлена N , производится с учетом характера разлагаемой функции $S(t)$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Тригонометрическая система функций $\cos n\omega t$, $\sin n\omega t$, ортогональна на интервале $[-T/2, T/2]$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период этих функций.

$$\text{Для этой системы } \overline{\varphi_n^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{ \frac{\cos^2 n\omega t}{\sin^2 n\omega t} \right\} dt = \frac{1}{2}; \quad \overline{\varphi_0^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = 1.$$

В соответствии с (1.27) коэффициент при $\cos n\omega t$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos n\omega t dt, \text{ а коэффициент при } \sin n\omega t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin n\omega t dt, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) dt.$$

Тогда ряд Фурье (1.28) по системе тригонометрических функций будет

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (1.33)$$

Ряд (1.33) неудобен тем, что в нем явно не выделены амплитуда и фаза гармонического колебания частоты $n\omega$. Представим в (1.33) каждое из слагаемых в виде

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \\ &= A_n \cos \varphi_n \cos n\omega t - A_n \sin \varphi_n \sin n\omega t. \end{aligned}$$

Приравнивая выражения при $\cos n\omega t$ и $\sin n\omega t$ слева и справа, получим

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n, \quad \text{откуда найдем } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

$$\varphi_n = \text{arctg} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

Таким образом, ряд (1.33) приводится к виду

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \quad (1.34)$$

в котором выделены амплитуда A_n и фаза φ_n гармонического колебания частоты $n\omega$.

Множество амплитуд A_n и фаз φ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) гармонических колебаний частот $n\omega$, в сумме составляющих сложный сигнал $S(t)$, называют спектром амплитуд и фаз этого сигнала. Спектры амплитуд и фаз графически могут быть представлены в прямоугольной системе координат следующим образом (рис 1.21).

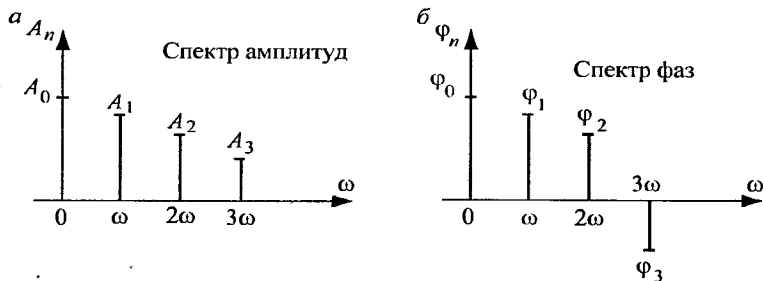


Рис. 1.21

2. Система показательных функций $e^{jn\omega t}$, где n принимает значения целых чисел от $-\infty$ до ∞ .

Для комплексно-значных функций условия ортогональности (1.26), формула для вычисления коэффициентов ряда (1.27) и сам ряд (1.28) должны быть изменены. Чтобы не вводить новых формул, получим их из (1.27) и (1.28), используя формулу Эйлера $\exp j\alpha = \cos \alpha + j \sin \alpha$.

Применяя ее, представим в (1.34) каждое из слагаемых под знаком суммы в виде

$$\begin{aligned} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) &= \frac{1}{2} [\exp jn\omega t A_n \exp j\varphi_n + \exp(-jn\omega t) A_n \exp(-j\varphi_n)] = \\ &= \frac{1}{2} [\dot{A}_n \exp jn\omega t + \dot{A}_{-n} \exp(-jn\omega t)] \end{aligned}$$

где $\dot{A}_n = A_n \exp j\varphi_n$ — комплексная амплитуда колебания частоты $n\omega$,

$\dot{A}_{-n} = A_n \exp(-j\varphi_n)$ — комплексно-сопряженная ей величина.

С учетом полученной формула (1.34) примет вид

$$S(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \dot{A}_n \exp jn\omega t = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \exp jn\omega t, \quad (1.35)$$

где обозначено $A_0 = 2a_0$. Коэффициенты \dot{A}_n ряда (1.35) являются комплексными и могут быть представлены в виде $\dot{A}_n = A_n \cos \varphi_n + jA_n \sin \varphi_n$. Но в соответствии с полученным выше $A_n \cos \varphi_n = a_n$, $A_n \sin \varphi_n = -b_n$.

Поэтому, используя формулы для тригонометрического ряда Фурье, получим

$$\begin{aligned} A_n = a_n - jb_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) [\cos n\omega t - j \sin n\omega t] dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \exp(-jn\omega t) dt. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Формула (1.35) представляет собой ряд Фурье в комплексной форме, а (1.36) позволяет вычислить его коэффициенты, если известна периодическая функция времени $S(t)$, имеющая за период конечное число разрывов 1-го рода. При этом ряд (1.35) сходится к $S(t)$ в точках ее

непрерывности и к значению $\frac{S(a) + S(b)}{2}$ в точках разрыва, где $S(a)$ и $S(b)$ — значения функции $S(t)$ слева и справа от точки разрыва.

При использовании ряда (1.35) спектры амплитуд и фаз представляют собой множество модулей и аргументов комплексных чисел A_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Пример 1.8

Для прямоугольных импульсов длительностью τ , следующих с периодом T , найти спектры амплитуд и фаз (рис. 1.22). Используя (1.36), получим

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\tau} U \exp(-jn\omega t) dt = \frac{2U}{T} \frac{1}{-jn\omega} e^{-jn\omega t} \Big|_0^{\tau} = \\
 &= \frac{2U}{Tn\omega} \left(\frac{e^{\frac{jn\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{jn\omega\tau}{2}}}{j} \right) e^{-\frac{jn\omega\tau}{2}} = \frac{2U\tau}{T} \left(\frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\frac{n\omega\tau}{2}} \right) e^{-\frac{jn\omega\tau}{2}}.
 \end{aligned}$$

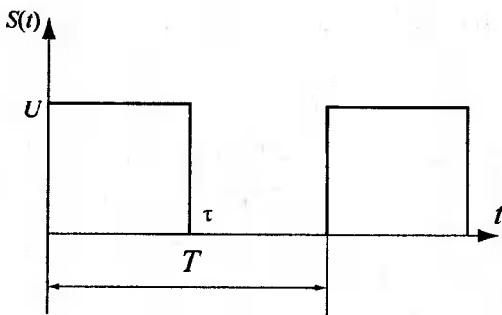


Рис. 1.22

$$\text{Спектрамплитуд } |\dot{A}_n| = \frac{2U\tau}{T} \left| \left(\frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\frac{n\omega\tau}{2}} \right) \right|; \text{ спектр фаз } \varphi_n = \frac{-n\omega\tau}{2} + k\pi.$$

Огибающая спектра амплитуд имеет вид функции $\frac{\sin x}{x}$, обраща-

ющейся в ноль при $\frac{n\omega\tau}{2} = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), отсюда $n\omega = k \frac{2\pi}{\tau}$ —

точки на оси частот, в которых огибающая спектра амплитуд обращается в ноль. Графически спектры амплитуд и фаз изображены на рис. 1.23.

Как видно из рис 1.23, *a*, ширина спектра сигнала зависит от длительности τ : расширяется при уменьшении τ и сужается при увеличении τ .

Спектр периодического сигнала — линейчатый, дискретный.

Расстояние между отдельными составляющими спектра равно $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Спектр фаз получен с учетом знака $\frac{\sin x}{x}$ по уравнению $\varphi = \pi - \frac{n\omega\tau}{2}$

при $\frac{2\pi}{\tau} < n\omega < \frac{4\pi}{\tau}$.

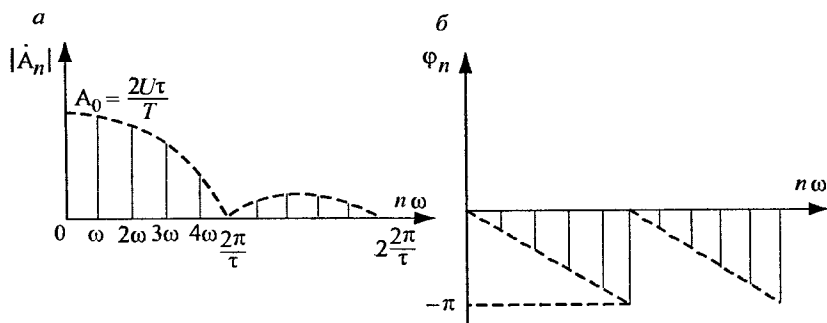


Рис. 1.23

Пример 1.9

Для периодической последовательности импульсов (рис. 1.24) найти спектр амплитуд, спектр фаз, рассчитать ошибку при представлении ряда (1.28) тремя, пятью членами, записать равенство Парсеваля.

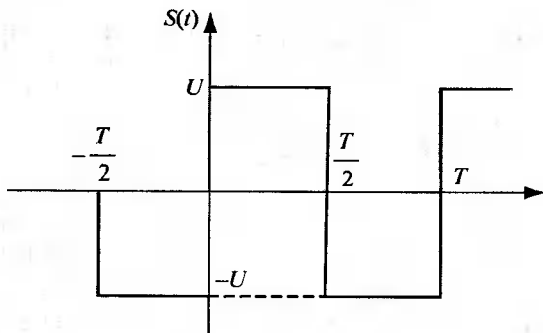


Рис. 1.24

В соответствии с (1.36)

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jn\omega t} dt = \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -U e^{-jn\omega t} dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U e^{-jn\omega t} dt = \frac{2U}{jTn\omega} e^{-jn\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{2U}{jTn\omega} e^{-jn\omega t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
 &= \frac{2U}{jTn\omega} \left[2 - 2 \frac{e^{jn\omega T} + e^{-jn\omega T}}{2} \right] = \frac{4U}{jTn\omega} \left[1 - \cos \frac{n\omega T}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Подставив в это выражение $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим

$$\dot{A}_n = \frac{2U}{jn\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ — четном} \\ \frac{4U}{jn\pi} & \text{при } n \text{ — нечетном} \end{cases}$$

Поэтому ряд (1.35) для этого сигнала будет

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{4U}{j(2m+1)\pi} e^{j(2m+1)\omega t} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4U}{(2m+1)\pi} \left[\frac{e^{j(2m+1)\omega t} - e^{-j(2m+1)\omega t}}{2j} \right] = \frac{4U}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\omega t}{2m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, спектр амплитуд $\frac{4U}{\pi(2m+1)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), спектр

фаз $\varphi_n = 0 \forall n$.

Если использовать 3 члена ряда, то

$$S(t) = \frac{4U}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t \right],$$

а ошибка в соответствии с (1.30)

$$\Delta = U^2 \left\{ 1 - \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 25} \right) \right\} = 6,69 \cdot 10^{-2} U^2.$$

Если использовать 5 членов ряда, то

$$S(t) = \frac{4U}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \frac{1}{9} \sin 9\omega t \right],$$

а ошибка

$$\Delta = U^2 \left\{ 1 - \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 25} + \frac{1}{2 \cdot 49} + \frac{1}{2 \cdot 81} \right) \right\} = 4,04 \cdot 10^{-2} U^2.$$

В соответствии с (1.32) равенство Парсеваля для этого импульсного

сигнала имеет вид $P = \frac{8U^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

3. Функции Уолша ортогональны на интервале $[0,1]$. Первые 8 из них приведены на рис. 1.25.

Обозначение функции включает в себя:

- номер функции (первая цифра в скобках);
- аргумент функции (θ — в скобках).

Существует несколько способов нумерации (упорядочения) функций Уолша. Наиболее употребляемыми являются упорядочения по Пэли, Адамару и Уолшу.

На рис. 1.25 функции упорядочены по Уолшу. Номер функции означает здесь число пересечений с графиком функции оси абсцисс в интервале $[0, 1]$.

Функции Уолша обладают следующими свойствами:

- ортогональность на интервале $[0,1]$, т.е.

$$\int_0^1 \text{wal}(n, \theta) \text{wal}(m, \theta) d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n; \end{cases}$$

– мультипликативность, т.е. перемножение двух функций Уолша дает функцию Уолша $\text{wal}(n, \theta_1) \text{wal}(n, \theta_2) = \text{wal}(n, \theta_1 \oplus \theta_2)$, где $n \oplus m$ — сложение по модулю 2, т.е. без переноса в старший разряд;

– свойство симметрии, состоящее в том, что свойства функций, отмеченные относительно n , справедливы и относительно θ . Например, мультипликативность относительно θ означает, что

$$\text{wal}(n, \theta_1) \text{wal}(n, \theta_2) = \text{wal}(n, \theta_1 \oplus \theta_2);$$

– умножение любой функции Уолша на саму себя дает функцию Уолша нулевого порядка $\text{wal}^2(n, \theta) = \text{wal}(0, \theta)$, а умножение ее на функцию Уолша нулевого порядка не изменяет этой функции.

Любую интегрируемую на интервале $[0,1]$ функцию можно представить рядом Фурье (1.28), в котором в качестве базисных функций $\varphi_n(t)$ используются функции Уолша.

Пример 1.10

Прямоугольный импульс, представленный на рис. 1.22, разложить по функциям Уолша. Обозначив $\theta = t / T$, где T — период повторения импульсов, найдем при $\tau = \frac{1}{2} T$:

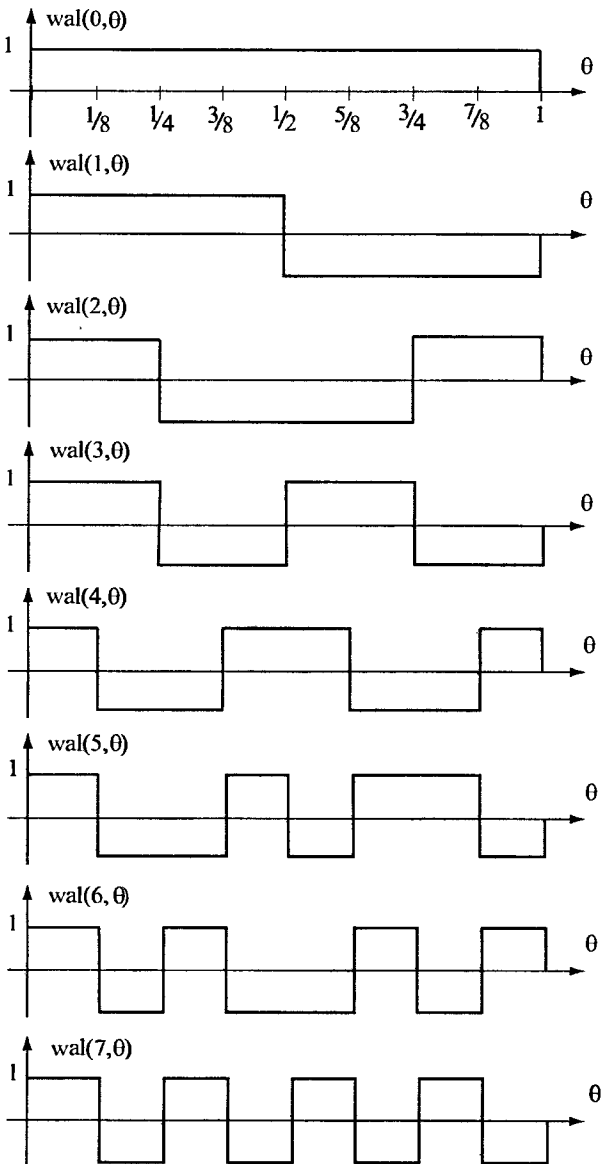


Рис. 1.25

$$A_0 = \int_0^1 S(t) \text{wal}(0, \theta) d\theta = \frac{1}{2} U; \quad A_1 = \int_0^1 S(t) \text{wal}(1, \theta) d\theta = \frac{1}{2} U;$$

$$A_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Таким образом, ряд (1.28) в базисе функций Уолша

$$S(t) = A_0 \text{wal}(0, \theta) + A_1 \text{wal}(1, \theta) = \frac{1}{2} U [\text{wal}(0, \theta) + \text{wal}(1, \theta)]$$

содержит всего две составляющие.

Сравнивая разложения в ряд Фурье по базисам показательных (или тригонометрических) функций (пример 1.8) и Уолша, можно сделать вывод, что для импульсных сигналов при соответствующем выборе интервала разложения функции Уолша обеспечивают точное разложение при минимальном числе членов ряда. Если $t \neq T/2$, то спектр Уолша будет содержать много составляющих.

1.5.2. Разложение непериодических сигналов

Для периодического сигнала разложение в ряд Фурье дается формулой (1.35), где коэффициенты ряда рассчитываются с помощью выражения (1.36).

Если же сигнал непериодический, одиночный, то на отрезке времени $[-T/2, T/2]$ он может быть представлен рядом (1.35) при $T \rightarrow \infty$

$$S(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jn\omega t} dt \right] e^{jn\omega t}.$$

При $T \rightarrow \infty$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jn\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-j\Omega t} dt = G(\Omega) \quad \text{— спектральная функция сигнала } S(t).$$

Тогда

$$S(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} G(n\omega) e^{jn\omega t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} G(n\omega) e^{jn\omega t}.$$

При $T \rightarrow \infty$ — угловая частота $\omega = 2\pi/T$ превращается в бесконечно малое приращение частоты $d\Omega$, частота $n\omega$ — в текущую частоту Ω , а операция суммирования — в операцию интегрирования. Поэтому последнее выражение принимает вид

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, \quad (1.37)$$

где

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (1.38)$$

Выражения (1.37) и (1.38) называют парой преобразований Фурье. Второе из них позволяет по функции времени $S(t)$ вычислить спектральную функцию $G(\Omega)$, а первое по известной спектральной функции позволяет восстановить сам сигнал $S(t)$. Преобразования (1.37) и (1.38) существуют только для абсолютно интегрируемых функций,

т.е. для таких, которые имеют $\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)| dt < \infty$.

Физический смысл выражения (1.37) состоит в том, что сигнал $S(t)$ представлен им в виде бесконечной суммы (интеграл) функций $\exp(j\Omega t)$ с бесконечно малыми амплитудами колебаний $dA(\Omega) = \frac{1}{\pi} G(\Omega) d\Omega$.

Из последнего равенства следует $\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} G(\Omega)$, т.е. модуль спектральной функции $G(\Omega)$ характеризует плотность распределения амплитуд составляющих спектра непериодического сигнала по частоте.

Спектральная функция является комплексной и, как любое комплексное число, может быть представлена в алгебраической и показательной формах, т.е.

$$G(\Omega) = a(\Omega) + jb(\Omega) = |G(\Omega)| \exp j\varphi(\Omega),$$

причем $|G(\Omega)| = \sqrt{a^2(\Omega) + b^2(\Omega)}$; $\varphi(\Omega) = \operatorname{arctg} \frac{b(\Omega)}{a(\Omega)}$.

Модуль $|G(\Omega)|$ спектральной функции $G(\Omega)$ называют спектром амплитуд, а аргумент $j(\Omega)$ — спектром фаз. Как видно из формул для $|G(\Omega)|$ и $j(\Omega)$, спектр амплитуд является четной функцией частоты Ω , а спектр фаз — нечетной ее функцией.

Пример 1.11

Для одиночного импульса (рис. 1.26) найти спектральную функцию, спектры амплитуд и фаз.

Подставив $S(t)$ в выражение (1.59), получим

$$\begin{aligned} G(\Omega) &= \int_0^{\tau} U e^{-j\Omega t} dt = -\frac{U}{j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\tau} = \frac{1}{j\Omega} \left(1 - e^{\frac{j\Omega\tau}{2}} e^{-\frac{j\Omega\tau}{2}} \right) = \\ &= \frac{U}{\Omega} \left(\frac{e^{\frac{j\Omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\Omega\tau}{2}}}{j} \right) e^{-\frac{j\Omega\tau}{2}} = U\tau \left(\frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}} \right) e^{-\frac{j\Omega\tau}{2}}. \end{aligned}$$

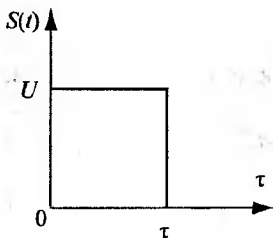


Рис. 1.26

Итак, $G(\Omega) = U\tau \left(\frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}} \right) e^{-\frac{j\Omega\tau}{2}}$.

Спектр амплитуд $|G(\Omega)| = U\tau \left(\frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}} \right)$;

спектр фаз $\varphi(\Omega) = \kappa\pi - \frac{\Omega\tau}{2}$.

Графически $|G(\Omega)|$ и $\varphi(\Omega)$ представлены на рис. 1.27. При $\Omega=0$ $|G(\Omega)|=U\tau$.

Это следует из формулы $G(\Omega) = \int_0^{\tau} Ue^{-j\Omega t} dt$ при $\Omega \rightarrow 0$ и выражает

площадь импульса. Нули функции $|G(\Omega)|$ имеют место при $\frac{\Omega\tau}{2} = k\pi$,

откуда $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Спектр фаз с учетом знака функции $\left(\frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}} \right)$ описывается прямой

линией $\varphi(\Omega) = k\pi - \frac{\Omega\tau}{2}$.

Спектры амплитуд и фаз одиночного импульса сплошные, т.е. содержат в своем составе теоретически все частоты с амплитудами и фазами, определяемыми функциями $|G(\Omega)|$ и $\varphi(\Omega)$.

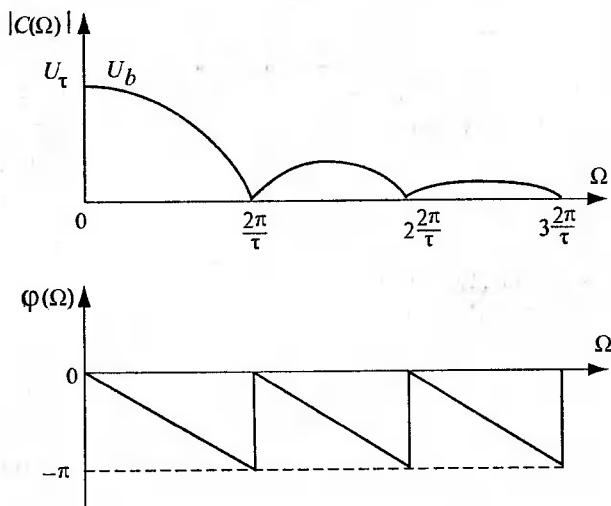


Рис. 1.27

Если импульс $S(t)$ (см., например, рис. 1.27) периодически повторять с частотой $1/T$ (T — период), то комплексная амплитуда частоты

$n\omega = n \frac{2\pi}{T}$ будет (см. формулу (1.36))

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_0^{\tau} S(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Спектральная плотность одиночного импульса на частоте $n\omega$ примет вид

$$G(\Omega = n\omega) = \int_0^{\tau} S(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

Сравнивая два последних выражения, получим

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} G(n\omega). \quad (1.39)$$

Формула (1.39) показывает, что функция $G(\Omega)$ является огибающей дискретного линейчатого спектра периодически повторяющихся импульсов, т.е. $|G(\Omega)|$ и $j(\Omega)$ на рис. 1.27 и огибающие (пунктирные кривые) на рис. 1.23 одинаковы. Соотношение (1.39) позволяет по спектральной функции одиночного импульса $G(\Omega)$ рассчитать комплексные амплитуды гармоник A_n при его периодическом повторении с периодом T . Для этого достаточно в выражение для $G(\Omega)$ подставить значение частоты $\Omega = n\omega$ и умножить на число $2/T$. Так, взяв из примера 1.11 $G(\Omega)$, получим

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} G(\Omega = n\omega) = \frac{2}{T} U\tau \left| \left(\frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\frac{n\omega\tau}{2}} \right) \right|.$$

1.5.3. Обобщение преобразования Фурье. Преобразование Лапласа

Как указывалось выше, преобразование Фурье применимо только к абсолютно интегрируемым функциям. Не все используемые в радиотехнике и связи функции удовлетворяют этому требованию. Например, единичный скачок

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Применяя к $\sigma(t)$ прямое преобразование Фурье (1.59), будем иметь

$$G(\Omega) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-j\Omega t} dt = -\frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\Omega} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\Omega t} \right)$$

Функция $e^{-j\Omega t}$ при $t \rightarrow \infty$ не имеет предела. Поэтому спектральную функцию $G(\Omega)$ по формуле (1.38) найти нельзя. Причина состоит в том, что $\sigma(t)$ не абсолютно интегрируема.

Для того чтобы освободиться от требования абсолютной интегрируемости, обобщим преобразование Фурье. Пусть $S(t)$ — функция, не интегрируемая абсолютно. Умножим ее на $e^{-C_1 t}$, где $C_1 > 0$, константа достаточно большая, чтобы функция $[S(t) e^{-C_1 t}]$ стала абсолютно интегрируемой. Тогда прямое преобразование Фурье от нее (1.38) будет

$$G(C_1 + j\Omega) = \int_0^{\infty} [S(t) e^{-C_1 t}] e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} S(t) e^{-(C_1 + j\Omega)t} dt. \quad (1.40)$$

В выражении (1.40) полагаем $S(t) = 0$ при $t < 0$. Применяя к функции $S(t) e^{-C_1 t}$ обратное преобразование Фурье, получим

$$S(t) e^{-C_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(C_1 + j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Так как интегрирование в последнем выражении производится по Ω , то умножая обе его части на $e^{-C_1 t}$, будем иметь

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(C_1 + j\Omega) e^{(C_1 + j\Omega)t} d\Omega. \quad (1.41)$$

Сделав замену переменных $C_1 + j\Omega = p$ в выражениях (1.40), (1.41), найдем

$$G(p) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-pt} dt, \quad (1.42)$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_1 - j\infty}^{C_1 + j\infty} G(p) e^{pt} dp. \quad (1.43)$$

Выражения (1.42), (1.43) представляют собой соответственно прямое и обратное преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа является обобщением преобразования Фурье. Переход от первого к последнему производится заменой p на $j\Omega$ (т.е. $C_1 = 0$), если на оси $j\Omega$ нет полюсов подынтегральной функции $G(p)$.

Пример 1.12

Найдем спектральную функцию единичного скачка (рис. 1.28)

$$G(p) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} (1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}) = \frac{1}{p},$$

так как $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-C_1 t} e^{-j\Omega t}) = 0$.

Тогда при $C_1 = 0$ $p = j\Omega$ и $G(\Omega) = 1/j\Omega$.

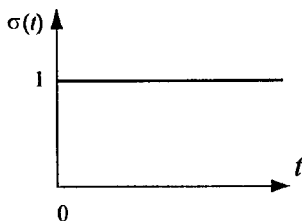


Рис. 1.28

1.5.4. Свойства преобразования Фурье

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье.

1. Свойство линейности

Если сигнал $S(t) = \sum_{k=1}^K S_k(t)$, а спектральные функции каждого из

слагаемых известны, т.е. $G_k(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_k(t) e^{-j\Omega t} dt$ ($k = 1, 2, \dots, K$), то

спектральная функция сигнала $S(t)$ $G(\Omega) = \sum_{k=1}^K G_k(\Omega)$.

Доказательство этого свойства проводится путем подстановки $S(t)$ в (1.42) и использования свойств интеграла.

2. Теорема запаздывания

Пусть сигнал $S(t)$ имеет спектральную функцию $G(\Omega)$. Сигнал, запаздывающий на время t , можно записать как $S(t - \tau)$. Найдем спектральную функцию сигнала $S(t - \tau)$.

$$G_{\tau}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t - \tau) e^{-j\Omega t} dt.$$

Замена переменной при $t - \tau = \theta$ ($dt = d\theta$, $t = \theta + \tau$);

при $t \rightarrow -\infty$ $\theta \rightarrow -\infty$, при $t \rightarrow \infty$ $\theta \rightarrow \infty$ приводит интеграл к виду

$$G_{\tau}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta) e^{-j\Omega\tau} e^{-j\Omega\theta} d\theta = e^{-j\Omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} S(\theta) e^{-j\Omega\theta} d\theta = e^{-j\Omega\tau} G(\Omega),$$

так как $G(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\Omega t} dt.$

Таким образом, запаздывание сигнала на время τ приводит к умножению спектральной функции исходного сигнала $S(t)$ на $e^{-j\Omega\tau}$, т.е.

$$G_{\tau}(\Omega) = G(\Omega) e^{-j\Omega\tau}.$$

Пример 1.13

Спектральная функция единичного скачка, запаздывающего на время τ

(рис. 1.29), равна $G_{\tau}(p) = \frac{1}{p} e^{-p\tau}$.

При $p = j\Omega$

$$G_{\tau}(\Omega) = \frac{2}{j\Omega} e^{-j\Omega\tau} = \frac{1}{\Omega} e^{-j\left(\Omega\tau + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

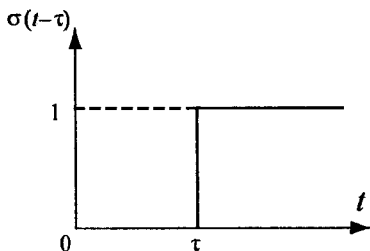


Рис. 1.29

Пример 1.14

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, найдем спектральную функцию прямоугольного импульса длительностью τ (см. рис. 1.26).

Этот импульс можно представить как $S(t) = U[\sigma(t) - \sigma(t - \tau)]$, где $\sigma(t)$ и $\sigma(t - \tau)$ — единичные скачки, совершаемые при $t = 0$, $t = \tau$.

Если спектральная функция первого скачка $G(\Omega) = \frac{1}{j\Omega}$ (см. пример 1.12), а спектральная функция второго скачка $G_\tau(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega\tau}$ (см. пример 1.13), то спектральная функция прямоугольного импульса в соответствии со свойством линейности $G(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} (1 - e^{-j\Omega\tau})$ — сравните с примером 1.11.

Пример 1.15

Пользуясь теоремой запаздывания и свойством линейности, найдем спектральную функцию пачки из N равно отстающих импульсов (рис. 1.30).

Если спектральная функция 1-го импульса $G(\Omega)$, то по теореме запаздывания спектры 2-го импульса $G(\Omega)e^{-j\Omega T}$, 3-го импульса $G(\Omega)e^{-j2\Omega T}$, ..., N -го импульса $G(\Omega)e^{-j(N-1)\Omega T}$.

Применяя свойство линейности, получим спектральную функцию пачки из N импульсов

$$G_\Sigma(\Omega) = G(\Omega)[1 + e^{-j\Omega T} + e^{-j2\Omega T} + \dots + e^{-j(N-1)\Omega T}].$$

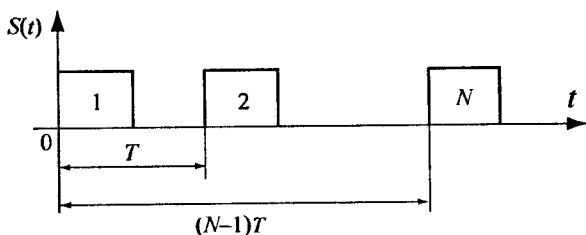


Рис. 1.30

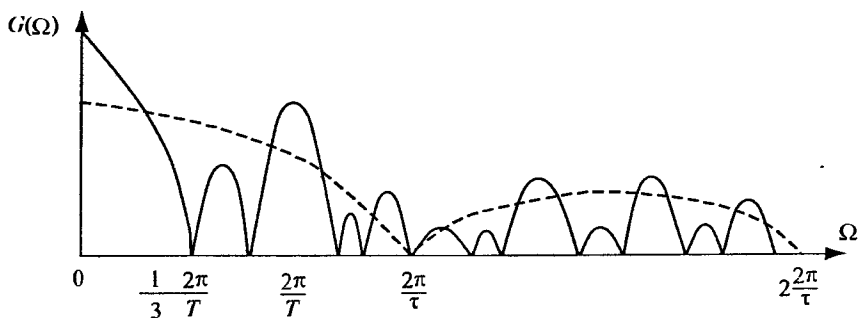


Рис. 1.31

При $\Omega = k2\pi/T$, где k — целое число, каждое из слагаемых в квадратных скобках равно 1.

$$\text{Поэтому } G_{\Sigma} \left[k \frac{2\pi}{T} \right] = NG \left[\frac{k2\pi}{T} \right].$$

Таким образом, на частотах $\Omega = \frac{k2\pi}{T}$ модуль спектральной функции пачки в N раз больше модуля спектра одиночного импульса. Это происходит потому, что на указанных частотах спектральные составляющие складываются с фазами, отличающимися на 2π . При частотах, обращающих в нуль слагаемые в квадратных скобках, $|G(\Omega)|$ обращается в нуль. На рис. 1.31 приведена спектральная функция пачки из трех равноотстоящих импульсов. Пунктиром показана спектральная функция одиночного импульса. Всплески соответствуют частотам $\Omega = 0, \frac{2\pi}{T} \dots$

С увеличением числа N до ∞ получается периодическая последовательность импульсов, спектральная функция становится линейчатой (всплески возрастают, провалы между ними уменьшаются).

3. Теорема подобия (изменение масштаба времени)

Если сигнал $S(t)$ сжимается или растягивается во времени, то это соответствует изменению масштаба времени, новый сигнал будет $S(at)$, где $a > 1$ соответствует сжатию, $a < 1$ — растяжению.

Пусть сигнал $S(t)$ имеет $G(\Omega) = \int_0^{\tau_U} S(t)e^{-j\Omega t} dt$.

Спектральная функция сигнала $S(at)$, будет $G_a(p) = \int_0^{\frac{\tau_U}{a}} S(at)e^{-j\Omega t} dt$.

Сделав в последнем интеграле замену переменной $at = \tau$, получим

$$G_a(p) = \frac{1}{a} \int_0^{\tau_U} S(\tau) e^{-\frac{j\Omega\tau}{a}} d\tau. \text{ Но } \int_0^{\tau_U} S(\tau) e^{-\frac{j\Omega\tau}{a}} d\tau = G\left(\frac{\Omega}{a}\right), \text{ поэтому}$$

$$G_a(\Omega) = \frac{1}{a} G\left(\frac{\Omega}{a}\right) \text{ спектральная функция сигнала, растянутого или сжа-$$

того во времени в a раз, сжимается или растягивается в a раз, причем модуль ее увеличивается или уменьшается также в a раз. Рассмотрим, например, спектральную функцию прямоугольного импульса (пример 1.11, рис. 1.27). При сжатии ($a > 1$) τ становится меньше, что ведет к расширению спектра (нули функции $G(\Omega)$ уходят вправо) и уменьшению модуля, при растяжении импульса ($a < 1$) — наоборот.

4. Теорема о свертке

Пусть сигнал $S(t) = S_1(t) S_2(t)$, причем спектральные функции обоих сигналов известны и равны

$$G_1(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)e^{-j\Omega t} dt; \quad G_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t)e^{-j\Omega t} dt.$$

В соответствии с (1.42) спектр сигнала $S(t)$ равен

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t)S_2(t)e^{-j\Omega t} dt. \quad (1.44)$$

В соответствии с (1.43) каждый из сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ может быть представлен в виде

$$S_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega; \quad S_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Подставляя в (1.44) вместо $S_2(t)$ его представление Фурье, получим

$$G(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) e^{-j(\Omega-\omega)t} dt \right] d\omega.$$

Но $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) e^{-j(\Omega-\omega)t} dt = G_1(\Omega - \omega)$, где $G_1(\Omega - \omega)$ — спектральная

функция сигнала $S_1(t)$ при значении аргумента $\Omega - \omega$ (вместо Ω). Таким образом

$$G(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\omega) G_1(\Omega - \omega) d\omega, \quad (1.45)$$

т.е. спектральная функция произведения двух сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ равна свертке их спектральных функций, умноженной на $1/2\pi$.

Из (1.44) и (1.45) при $\Omega = 0$ получим (заменяв ω на Ω)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t) e^{-j\Omega t} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\Omega) G_1(-\Omega) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\Omega) G_1^*(\Omega) d\Omega, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где $G_1^*(\Omega)$ — комплексно-сопряженная функция к $G_1(\Omega)$.

Из выражения (1.46) найдем распределение энергии в спектре непериодического сигнала. При $S_1(t) = S_2(t) = S(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1^2(t) dt = \mathcal{E} \text{ — энергия сигнала, } G_2(\Omega) = G_1(\Omega) \text{ и}$$

$$G_2(\Omega) G_1^*(\Omega) = |G_1(\Omega)|^2, \text{ поэтому } \mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(\Omega)|^2 d\Omega \text{ — равенство}$$

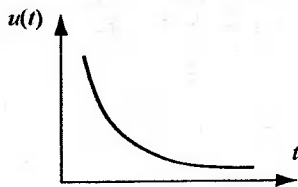


Рис. 1.32

Парсеваля для непериодического сигнала, аналогичное (1.31). Так как $|G_1(\Omega)|^2$ — функция четная, то равенство Парсеваля принимает вид

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |G_1(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (1.47)$$

Пример 1.16

Для единичного скачка (см. рис. 1.28) найдем в соответствии с (1.47)

энергию сигнала $G(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega}$; $|G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{\Omega^2}$;

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Omega^2} d\Omega = -\frac{1}{\pi\Omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega} = \infty.$$

Энергия единичного скачка бесконечна, поэтому эта функция не абсолютно интегрируема и к ней неприменимо прямое преобразование Фурье. *

Пример 1.17

Найдем энергию сигнала $u(t) = e^{-\alpha t}$ (рис. 1.32). В соответствии с (1.42)

$$G(j\Omega) = \frac{1}{\alpha + j\Omega}; \quad |G(j\Omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}.$$

Применяя (1.47), получим

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2} d\Omega = -\frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Прямое вычисление энергии приводит к результату

$$\Xi = \int_0^{\infty} (e^{-\alpha t})^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}.$$

5. Дифференцирование и интегрирование сигнала

Если сигнал $S(t)$ имеет спектральную функцию $G_1(\Omega)$, то производная сигнала $S'(t)$ имеет спектральную функцию

$$G_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S'(t) e^{-j\Omega t} dt.$$

Найдем $G_2(\Omega)$. Для этого последний интеграл возьмем по частям.

$$\text{Получим } G_2(\Omega) = S(t) e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\Omega \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\Omega t} dt = j\Omega G_1(\Omega),$$

так как при $t \rightarrow \pm\infty$, $S(t) \rightarrow 0$ ($S(t)$ — абсолютно интегрируемая функция),

а $\int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\Omega t} dt = G_1(\Omega)$. Итак, спектральная функция $G_2(\Omega)$ производной $S_1(t)$ выражается через спектральную функцию $G_1(\Omega)$ исходной функции следующим образом:

$$G_2(\Omega) = j\Omega G_1(\Omega). \quad (1.48)$$

Пусть сигнал $S(t)$ имеет спектральную функцию $G_1(\Omega)$. Найдем спектральную функцию $G_2(\Omega)$ интеграла от $S(t)$, т.е. спектральную

функцию сигнала $S(t) = \int_0^t S(t) dt$. Применяя (1.42), получим

$$G_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t S(t) dt \right] e^{-j\Omega t} dt.$$

Интегрирование по частям дает

$$G_2(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} S(t) e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\Omega} G_1(\Omega).$$

Если $\int_0^t S(t)dt$ при $t \rightarrow \infty$ обращается в ноль, то

$$G_2(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} G_1(\Omega). \quad (1.49)$$

Пример 1.18

Используя спектральную функцию единичного скачка (пример 1.12)

$G_1(\Omega) = \frac{1}{j\Omega}$, найдем спектральную функцию дельта функции $\delta(t)$

$G_2(\Omega) = 1$. Прямое применение (1.38) к $\delta(t)$ дает $G_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$
(см. фильтрующее свойство δ -функций).

С помощью обратного преобразования Фурье (1.37) найдем

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Пример 1.19

Найдем спектральную функцию гармонического сигнала

$$S(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

$$\begin{aligned} G(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \cos(\omega t + \varphi) e^{-j\Omega t} dt = \frac{A_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\varphi} e^{j\omega t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}] e^{-j\Omega t} dt = \\ &= \frac{A_0}{2} \left\{ e^{-j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega + \omega)t} dt + e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\Omega - \omega)t} dt \right\} = \\ &= \frac{A_0}{2} [e^{-j\varphi} 2\pi \delta(\Omega + \omega) + e^{j\varphi} 2\pi \delta(\Omega - \omega)] = A_0 \pi [e^{j\varphi} \delta(\Omega - \omega) + e^{-j\varphi} \delta(\Omega + \omega)]. \end{aligned}$$

Таким образом, на комплексной плоскости спектральная функция гармонического сигнала образует два всплеска при $\Omega = \pm\omega$. В частности, при $\Omega = 0$ спектральная функция постоянной составляющей $G(\Omega) = 2\pi A_0 \delta(\Omega)$.

Так как $\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \int \cos(\omega t + \varphi) dt$, то, пользуясь формулой (1.49),

найдем спектральную функцию сигнала $S_1(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

$$\begin{aligned} G_2(\Omega) &= \frac{A_0 \pi \omega}{j\Omega} \left[e^{j\varphi} \delta(\Omega - \omega) + e^{-j\varphi} \delta(\Omega + \omega) \right] = \\ &= \frac{A_0 \pi \omega}{\Omega} \left[e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} \delta(\Omega - \omega) + e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \delta(\Omega + \omega) \right]. \end{aligned}$$

Изложенное выше преобразование Фурье позволяет сложные воздействия и реакции цепи, заданные во временной области, представить в частотной области в виде счетного (при периодическом сигнале) или несчетного (при непериодическом сигнале) множества гармонических составляющих. При этом обратное преобразование Фурье (или его обобщение — преобразование Лапласа) позволяет представить воздействие или реакцию цепи, заданные в частотной области, как функцию времени.

Пример 1.20

Пусть спектральная плотность сигнала $G(\Omega) = \frac{1}{j\pi} (1 - e^{-j\Omega\tau})$

(см. пример 1.11). Найдем соответствующий ей сигнал как функцию времени. В соответствии с (1.37) будем иметь

$$S(t) = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\Omega} (1 - e^{-j\Omega\tau}) e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Сделав замену переменной $j\Omega = p$, получим

$$S(t) = \frac{U}{2\pi j} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau}) e^{p\tau} dp = \frac{U}{2\pi j} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \left[\frac{e^{p\tau}}{p} - \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} \right] dp.$$

Первый из интегралов соответствует $\sigma(t)$, второй — $\sigma(t - \tau)$. Следовательно, $S(t) = U[\sigma(t) - \sigma(t - \tau)]$ — прямоугольный импульс длительностью τ и амплитудой U .

Разложение сложного сигнала на сумму единичных скачков рассмотрим на примере сигнала рис 1.33.

Представим сигнал в виде суммы единичных скачков:

- в момент $t = 0$ совершается скачок $x(0)$ $\sigma(t)$;
- в момент $t = \theta_1$ совершается скачок $\Delta x(\theta_1)$ $\sigma(t - \theta_1)$; и т. д.

Рассуждая аналогично, можно написать

$$x(t) \approx x(0)\sigma(t) + \sum_{n=1}^N \Delta x(\theta_n)\sigma(t - \theta_n). \quad (1.50)$$

При увеличении N точность представления возрастает.

Сложный сигнал можно также представить в виде суммы δ -функций (рис 1.34). Элементарный импульс длительностью $\Delta\theta$, амплитудой $x(\theta_k)$ можно выразить как $x(\theta_k)[\sigma(t - \theta_k) - \sigma(t - \theta_k - \Delta\theta)]$. А сам сигнал будет иметь вид

$$x(t) = \sum_k x(\theta_k) \left[\frac{\sigma(t - \theta_k) - \sigma(t - \theta_k - \Delta\theta)}{\Delta\theta} \right] \Delta\theta.$$

Так как $\sigma'(t) = \delta(t)$, то $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sigma(t - \theta_k) - \sigma(t - \theta_k - \Delta\theta)}{\Delta\theta} = \delta(t - \theta_k)$.

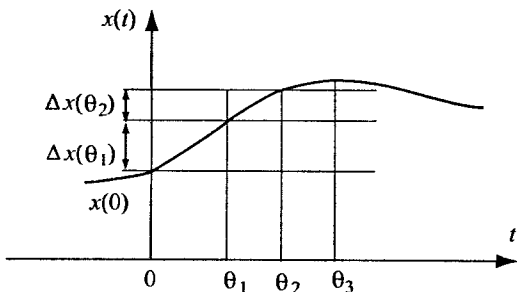


Рис. 1.33

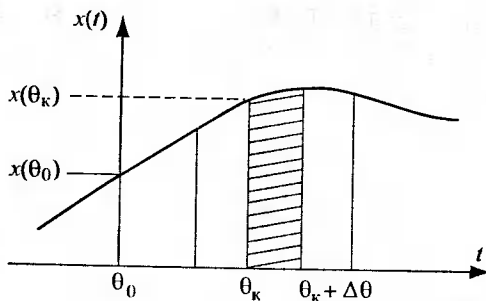


Рис. 1.34

Поэтому

$$x(t) = \sum_k S_k \delta(t - \theta_k), \quad (1.51)$$

где $S_n = x(\theta_k) \Delta\theta$ — площадь элементарного импульса.

Таким образом, произвольное воздействие или реакция цепи $x(t)$ могут быть разложены на сумму тестовых сигналов $\sigma(t)$ или $\delta(t)$.

1.5.5. Z-преобразование

В настоящее время в связи широко применяются дискретные последовательности $S(nT)$, являющиеся выборками аналогового сигнала $S(t)$ в дискретные моменты времени $t = nT$, где T — период дискретизации. Для описания дискретных последовательностей может быть использовано дискретное преобразование Лапласа, которое получается, если в (1.42) подставить выражение для дискретного сигнала:

$$S_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(nT) \delta(t - nt).$$

Получим прямое дискретное преобразование Лапласа

$$G_d(p) = L[S(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} S(nT) e^{-pnT} \quad (1.52)$$

Тогда обратное преобразование Лапласа для дискретного сигнала будет

$$S(nT) = L^{-1}[G_d(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma+j\omega}^{\sigma-j\omega} G_d(p) e^{pnT} dp \quad (1.53)$$

Вычисление интеграла в (1.53) производится при помощи теории вычетов.

Пример 1.21

Пусть дискретная последовательность

$$S(nT) = \begin{cases} a^{nT} & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0; a < 1. \end{cases}$$

Тогда дискретное преобразование Лапласа будет

$$G_d(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{nT} e^{-hnT} = \frac{1}{1 - ae^{-p}}, \text{ как сумма бесконечно убывающей}$$

геометрической прогрессии. Изображение $G_d(p)$ содержит 1 полюс $e^p = a$. Поэтому обратное дискретное преобразование Лапласа для нее

$$\text{будет } S(nT) = \text{res}(p = p_1) = \lim_{e^p \rightarrow a} \left[\frac{e^p - 1}{e^p - 1} e^{pnT} \right] = a^{nT} \text{ при } e^p \rightarrow a.$$

Дискретное преобразование Лапласа содержит трансцендентные функции e^{-pnT} , что неудобно.

Прямое Z -преобразование получается из дискретного преобразования Лапласа заменой $z = e^{pT}$, т.е.

$$S(z) = \sum S(nT) z^{-n}. \quad (1.54)$$

При такой замене трансцендентные функции преобразуются в рациональные полиномы от z .

Прямое Z -преобразование (1.54) определено только в области сходимости ряда. Известно, что степенной ряд сходится в круге сходимости радиуса r_0 , т.е. $|S(nT)| \leq c r_0^n$, где $c > 0$ (постоянная). Ряд (1.54) по отрицательным степеням Z имеет область сходимости $R \geq r_0$.

Пример 1.22

$$\text{Единичный скачек } \sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0 \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases} \text{ описывается рядом}$$

$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$. Функция $S(z)$ имеет $z_0 = 0$ — нуль и полюс

$z_n = 1$.

Радиус сходимости $r_0 = 1$. Ряд сходится при $|z| > 1$.

При переходе от комплексной плоскости $p = \sigma + j\omega$ в плоскость $z = x + jy$ изменяется форма кривых, областей p -плоскости.

Пусть имеется точка в p -плоскости $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$. При переходе в плоскость z она будет $z_1 = x_1 + jy_1 = e^{(\sigma_1 + j\omega_1)T} = e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T + je^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T$, откуда получаем $x_1 = e^{\sigma_1 T} \cos \omega_1 T$, $y_1 = e^{\sigma_1 T} \sin \omega_1 T$.

Поэтому начало координат в плоскости p ($\sigma = 0, \omega = 0$) переходит на плоскости z в точку с координатами $(1, 0)$.

Ось ординат в плоскости p отображается в окружность единичного радиуса в плоскости z , так как при $\sigma = 0$ $x = \cos \omega T$, $y = \sin \omega T$, а $x^2 + y^2 = 1$ — окружность единичного радиуса.

Левая полуплоскость плоскости p ($-j\infty < \omega < j\infty, -\infty < \sigma \leq 0$) отображается во внутренность круга единичного радиуса в плоскости z :

$x = e^{-\sigma T} \cos \omega T$, $y = e^{-\sigma T} \sin \omega T$; $x^2 + y^2 = e^{-2\sigma T}$ — окружность радиуса $e^{-\sigma T}$.

При изменении σ от $-\infty$ до 0 радиус окружности будет меняться от 0 до 1, заполняя внутренность круга. Правая полуплоскость плоскости p ($-j\infty < \omega < j\infty, 0 \leq \sigma < \infty$) отображается во внешность круга единичного радиуса в плоскости z : $x^2 + y^2 = e^{2\sigma T}$ — окружность радиуса $e^{\sigma T}$. При изменении σ от 0 до ∞ радиус этой окружности будет меняться от 1 до ∞ , заполняя внешность круга единичного радиуса.

Таким образом при Z -преобразовании, т.е. переходе от переменной p к переменной z , левой полуплоскости переменного p будет соответствовать внутренность круга единичного радиуса на плоскости z , а правой полуплоскости переменного p будет соответствовать внешность круга единичного радиуса на плоскости z .

Обратное Z -преобразование позволяет найти всю совокупность отсчетов дискретной последовательности.

Пусть $S(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}$ — функция комплексного переменного z .

Умножим левую и правую части ее на z^{m-1} , получим

$$z^{m-1} S(z) = a_0 z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_m z^{-1}.$$

Возьмем интеграл от обеих частей последнего выражения по контуру в области аналитичности функции $S(z)$ и охватывающему все полюсы этой функции. Получим

$$\oint z^{m-1} S(z) dz = \oint [a_0 z^{m-1} + a_1 z^{m-2} + \dots + a_m z^{-1}] dz. \quad (1.55)$$

В правой части интеграл распадается на сумму интегралов, причем только один из них $\oint a_m z^{-1} dz \neq 0$, а остальные равны нулю. В самом

деле, найдем, например, интеграл $\oint a_{m-1} z^{-2} dz = \oint \frac{a_{m-1}}{z^2} dz$. Заменяя

переменную $z = e^{j\varphi}$, $dz = j d\varphi e^{j\varphi}$ и подставив это в интеграл, получим

$$\oint a_{m-1} z^{-2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{a_{m-1}}{e^{j2\varphi}} j e^{j\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} a_{m-1} e^{-j\varphi} d\varphi = 0, \text{ так как функция } e^{-j\varphi}$$

периодическая с периодом 2π . Таким же образом можно показать, что и все интегралы в правой части (1.55), кроме последнего, равны нулю. В то же время

$$\oint a_m z^{-1} dz = 2\pi j a_m. \quad (1.56)$$

Последнее получено следующим образом: взяв контур интегрирования в виде окружности единичного радиуса $z = e^{j\varphi}$ (охватывает единственный полюс $z = 0$) и подставив его в интеграл, получим выражение (1.56).

Подставив (1.56) в (1.55), получим формулу для вычисления обратного Z -преобразования:

$$a_m = \frac{1}{2\pi j} \oint S(z) z^{m-1} dz, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.57)$$

Нахождение отсчетов a_m по формуле (1.57) производится с применением теории вычетов (см. формулу (1.21)).

Пример 1.23

Пусть Z -преобразование последовательности

$$S(z) = \frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}.$$

Найдем саму последовательность. Приравнивая нулю знаменатель функции $S(z)$, найдем ее полюсы:

$$z_{п1, п2} = \cos \omega_0 T + \sqrt{\cos^2 \omega_0 T - 1} = \cos \omega_0 T + j \sin \omega_0 T = e^{-j\omega_0 T}.$$

Оба полюса однократные. Вычет в полюсе $z_{п1}$

$$\text{res}(z = z_{п1}) = \lim_{z \rightarrow z_{п1}} \left[\frac{z \sin \omega_0 T (z - z_{п1})}{(z - z_{п1})(z - z_{п2})} z^{m-1} \right] = \frac{\sin \omega_0 T z_{п1}^m}{z_{п1} - z_{п2}};$$

$z \rightarrow z_{п1}$. Вычет в полюсе $z_{п2}$

$$\text{res}(z = z_{п2}) = \lim_{z \rightarrow z_{п2}} \left[\frac{z \sin \omega_0 T (z - z_{п2})}{(z - z_{п1})(z - z_{п2})} z^{m-1} \right] = \frac{\sin \omega_0 T z_{п2}^m}{z_{п2} - z_{п1}};$$

$z \rightarrow z_{п1}$. Последовательность отсчетов ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi j} \oint S(z) z^{m-1} dz = \text{res}(z = z_{п1}) + \text{res}(z = z_{п2}) = \\ &= \frac{\sin \omega_0 T e^{jm\omega_0 T}}{e^{j\omega_0 T} - e^{-j\omega_0 T}} + \frac{\sin \omega_0 T e^{-jm\omega_0 T}}{e^{-j\omega_0 T} - e^{j\omega_0 T}} = \sin m\omega_0 T. \end{aligned}$$

Таким образом Z -преобразование функции $S(z)$ соответствует последовательности $S(mT) = \sin m\omega_0 T$ $m = 0, 1, 2, \dots$

Приведем некоторые свойства Z -преобразования.

1. Линейность. Если $S_1(kT) \leftrightarrow S_1(z)$, $S_2(kT) \leftrightarrow S_2(z)$, то при любых действительных числах $a_1 a_2$

$$S_3(z) = a_1 S_1(z) + a_2 S_2(z) \leftrightarrow a_1 S_1(kT) + a_2 S_2(kT) = S_3(kT).$$

2. Задержка. Если $S_1(kT) \leftrightarrow S_1(z)$, то

$$S_2(kT) = S_1(kT - nT) \leftrightarrow S_2(z) = z^{-n} S_1(z),$$

3. Свертка. Это последовательность чисел, общий член которой

имеет вид $S_m = \sum_{k=0}^{\infty} S_1(kT)S_2(mT - kT)$. Z -преобразование свертки

$$S(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S_1(kT)S_2^{[(m-k)T]} z^{-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S_1(kT)z^{-k} S_2^{[(m-k)T]} z^{-(m-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} S_1(kT)z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} S_2(nT)z^{-n},$$

где обозначено $n = m - k$. В последнем выражении первый сомножитель — это Z -преобразование последовательности $S_1(kT)$, второй сомножитель — это Z -преобразование последовательности $S_2(nT)$.

Поэтому $S(z) = S_1(z)S_2(z)$.

Таким образом, свертке двух дискретных сигналов соответствует произведение их Z -преобразований.

Глава 2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1. Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие методом преобразования Лапласа

Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие в общем случае заключается в решении дифференциального уравнения с правой частью, описывающего цепь. В зависимости от порядка дифференциального уравнения и сложности внешнего воздействия решение задачи может быть существенно затруднено. Кроме того, учет начальных условий усложняется при увеличении порядка цепи. По этим причинам классические методы расчета переходных процессов в электрических цепях, основанные на прямых методах решения дифференциальных уравнений, применяются только для цепей низкого порядка и простых форм внешнего воздействия.

Операторный метод является символическим методом, в котором операции над функциями времени заменены операциями на символами (изображениями). Взаимно однозначное соответствие между функцией времени $y(t)$ и ее изображением $Y(p)$ в операторном методе устанавливается с помощью прямого (1.52) и обратного (1.53) преобразований Лапласа. Это соответствие указывается знаком соответствия \Leftrightarrow .

$$y(t) \Leftrightarrow Y(p).$$

Исходная функция $y(t)$ по отношению к $Y(p)$ называется оригиналом, а $Y(p)$ — изображением функции $y(t)$. Комплексное число $p = \sigma + j\omega$

Общая схема применения операторного метода к решению дифференциального (или интегродифференциального) уравнения цепи заключается в следующем:

1. Левая и правая части уравнения подвергаются прямому преобразованию Лапласа (1.52). При этом используются свойства преобразования Лапласа, устанавливающие связь между изображениями функций и их производных, между изображениями функций и интегралами от них и т.д. При этом учитываются начальные условия.

2. Из преобразованного по Лапласу уравнения находится изображение искомой функции (решения уравнения) $Y(p)$.

3. По изображению $Y(p)$ при помощи обратного преобразования Лапласа (1.53) находится решение уравнения $y(t)$ — оригинал. При этом

могут использоваться все известные методы нахождения оригиналов по изображению: по таблицам изображений и оригиналов, теоремы разложения, теорема вычетов.

Для пояснения схемы применения метода напомним свойства преобразования Лапласа.

1. Линейность: если $y_i(t) \Leftrightarrow Y_i(p)$, $y(t) = \sum_i k_i y_i(t)$,

где k_i — постоянные, то

$$y(t) \Leftrightarrow Y(p) = \sum_i k_i Y_i(p). \quad (2.1)$$

2. Дифференцирование оригинала: если $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, то

$$\frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow pY(p) - y(0+), \quad (2.2)$$

где $y(0+)$ — предел дифференцируемой функции в точке $t = 0$ справа.

Если начальные условия нулевые, т.е. $y(0+) = 0$, то

$$\frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow pY(p). \quad (2.3)$$

Для производной n -го порядка

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \Leftrightarrow p^n Y(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \left. \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} \right|_{t=0}. \quad (2.4)$$

3. Интегрирование оригинала: если $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, то

$$\int_0^t y(t) dt \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{p}. \quad (2.5)$$

4. Дифференцирование изображения: если $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, то

$$(-t)^n y(t) \Leftrightarrow \frac{d^n Y(p)}{dp^n}. \quad (2.6)$$

5. Интегрирование изображения: если $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_0^{\infty} F(p) dp. \quad (2.7)$$

6. Запоздывание оригинала: если $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, то

$$y(t-t_0) \Leftrightarrow Y(p)e^{-pt_0}. \quad (2.8)$$

7. Смещение изображения: если $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$, то

$$y(p+\alpha) \Leftrightarrow y(t)e^{-\alpha t}. \quad (2.9)$$

8. Произведение изображений: если $y_1(t) \Leftrightarrow Y_1(p)$, а $y_2(t) \Leftrightarrow Y_2(p)$, то

$$Y_1(p)Y_2(p) \Leftrightarrow \int_0^t y_1(t-x)y_2(x)dx = \int_0^t y_1(x)y_2(t-x)dx. \quad (2.10)$$

9. Изображение по Лапласу единичного скачка: если $y(t) = k\sigma(t)$, то $Y(p) = k/p$.

Используя перечисленные свойства преобразования Лапласа, по исходному дифференциальному уравнению находится алгебраическое уравнение относительно изображения искомой функции, найдя которое, обратным преобразованием Лапласа находят оригинал искомой функции — решение уравнения цепи.

Пример 2.1

Для цепи рис. 2.1 дифференциальное уравнение имеет вид

$$U(t) = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + U(0),$$

где $U(0)$ — начальное напряжение на конденсаторе, (при $t = 0$). Пусть внешнее воздействие $u(t) = U(p)$, а ток $i(t) = I(p)$. Тогда в соответствии

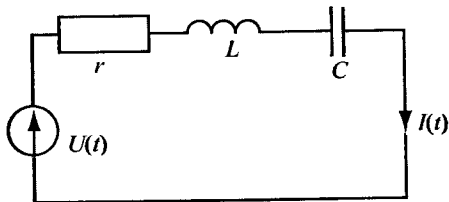


Рис. 2.1

с уравнением (2.2) $L \frac{di}{dt} = LpI(p) - Li(0)$, где $i(0)$ — начальное, при

$t = 0$, значение тока в цепи; $U(0) = \frac{u(0)}{p}$ — в соответствии с (2.11);

$\frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{pC} I(p)$ в соответствии с (2.5).

Подставляя приведенные выше изображения членов уравнения в исходные уравнения и решая его относительно $I(p)$, получим

$$I(p) = \frac{U(p) - \frac{U(0)}{p} + Li(0)}{r + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Как видно, после замены искомых функций, внешних воздействий, производных и интегралов их изображениями дифференциальное уравнение стало алгебраическим, из которого можно найти изображение искомой величины (в данном случае тока $i(t)$).

Одновременно в процессе такого преобразования учитываются и начальные условия: напряжения на конденсаторе и ток в катушке индуктивности. Оригинал $i(t)$ по изображению $I(p)$ найдем при помощи вычетов. Для определенности положим

$$u(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0 \\ E_2 & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

так что $U(0) = E_1$, $i(0) = 0$. Получим

$$I(p) = \frac{E}{p(r + pL + 1/pC)} = \frac{EC}{p^2 LC + prC + 1}, \quad E = E_2 - E_1.$$

Корни знаменателя

$$p_{1,2} = \frac{-rC \pm \sqrt{(rC)^2 - 4LC}}{2LC},$$

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{EC}{p^2 LC + prC + 1} e^{pt} dt = \sum_{i=1}^r \text{res}(p = p_i),$$

$$\text{res}(p = p_1) = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{EC(p - p_1)}{LC(p - p_1)(p - p_2)} e^{pt} \right] = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} e^{p_1 t},$$

$$\text{res}(p = p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[\frac{EC(p - p_2)}{LC(p - p_1)(p - p_2)} e^{pt} \right] = \frac{E}{L(p_2 - p_1)} e^{p_2 t},$$

$$i(t) = \frac{E(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})}{L(p_1 - p_2)}.$$

В результате получено решение исходного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Однако составление дифференциального уравнения цепи и его преобразование в алгебраическое уравнение для изображений можно заменить составлением уравнения для изображений по операторным схемам замещения цепи.

Теоретической основой получения уравнений цепи, как известно, служат законы Кирхгофа для узлов и контуров:

$$\sum_k i_k(t) = 0; \quad \sum_k U_k(t) = \sum_i e_j(t).$$

Применяя свойство линейности преобразования Лапласа к уравнениям для узлов и контуров, получим

$$\sum_k I_k(p) = 0; \tag{2.12}$$

$$\sum_k U_k(p) = \sum_j E_j(p) \tag{2.13}$$

первый и второй законы Кирхгофа для изображений.

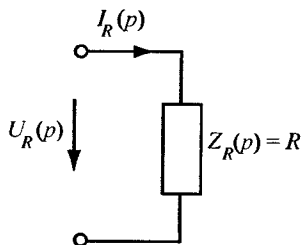


Рис. 2.2

Рассмотрим операторные схемы замещения идеализированных двухполосников с учетом начальных условий. В сопротивлении подводимая энергия преобразуется в тепло, в нем не запасается энергия, поэтому операторная схема замещения резистора имеет вид рис. 2.2.

Операторная проводимость $Y_R(p) = G = 1/R$. Напряжение и ток емкости связаны соотношениями

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}; U_C = U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt.$$

Применяя к этим соотношениям формулы дифференцирования (2.2) и интегрирования (2.5) оригинала, получим

$$I_C(p) = pCU_C(p) - CU_C(0), \quad (2.14)$$

$$U_C(p) = \frac{U_C(0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (2.15)$$

При нулевых начальных условиях $U_C(0) = 0$ и $I_C(p) = pCU_C(p)$;

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p).$$

Отношение операторного напряжения двухполосника к операторному току через него называют операторным входным сопротивлением двухполосника, т.е. $Z(p) = U(p)/I(p)$. Величина, обратная $Z(p)$, называется операторной входной проводимостью двухполосника $Y(p) = 1/Z(p) = I(p)/U(p)$.

Для емкости при нулевых начальных условиях

$$Z_C(p) = 1/pC; \quad Y_C(p) = pC.$$

Уравнениям (2.14) и (2.15) соответствует параллельная (рис. 2.3, а) и последовательная (рис. 2.3, б) операторные схемы замещения емкости.

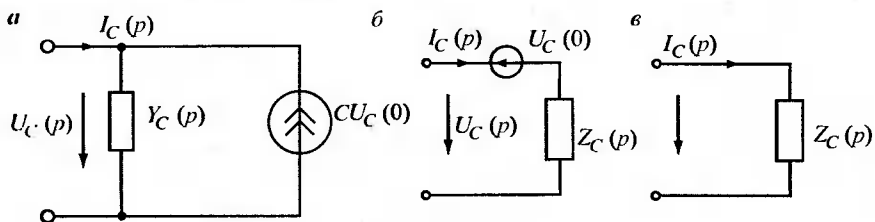


Рис. 2.3

На рис. 2.3, в приведена операторная схема замещения емкости при нулевых начальных условиях.

Напряжение и ток индуктивности связаны между собой соотношениями

$$U_L = L \frac{di}{dt}; \quad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t U_L dt.$$

Применяя к ним формулы дифференцирования (2.2) и интегрирования (2.5) оригиналов, получим

$$U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0), \quad (2.16)$$

$$I_L(p) = \frac{i_L(0)}{p} + \frac{1}{pL} U_L(p). \quad (2.17)$$

При нулевых начальных условиях $U_L(p) = pLI_L(p)$, $I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL}$, операторное сопротивление индуктивности $Z_L(p) = pL$, операторная проводимость $Y_L(p) = 1/pL$.

Уравнения (2.16) и (2.17) позволяют построить последовательную (рис. 2.4, а) и параллельную (рис. 2.4, б) операторные схемы замещения индуктивности.

На рис. 2.4, в приведена операторная схема замещения индуктивности при нулевых начальных условиях.

Используя операторные схемы замещения идеализированных пассивных элементов, можно составить операторную схему замещения

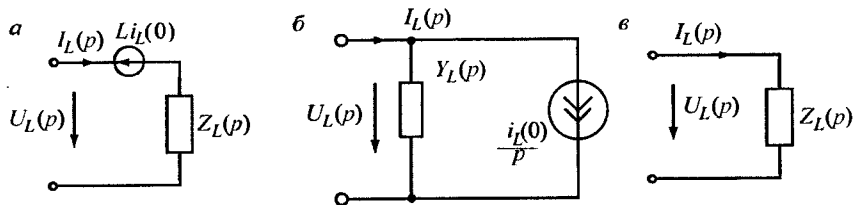


Рис. 2.4

всей цепи. Для этого каждый из двухполюсников цепи надо заменить его операторной схемой замещения, а источники тока или напряжения представить их операторными изображениями.

Пусть на параллельный контур рис. 2.5, а действует источник тока

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ I_m \cos \omega t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найдем напряжение на контуре $U(t)$ при $U_C(0) \neq 0$, $i_L(0) \neq 0$. Заменяв двухполюсники C , L параллельными схемами замещения, $u(t)$ изображением $U(p)$, найдя для тока $i(t)$ изображение в соответствии

с (1.42) $I(p) = I_m \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, получим операторную схему замещения

(рис. 2.5, б) цепи. По схеме найдем

$$U(p) = \frac{I(p) + CU_C(0) - \frac{i_L(0)}{p}}{pC + G + 1/pL}.$$

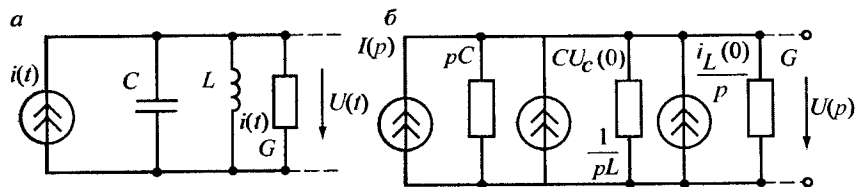


Рис. 2.5

Подставив $I(p)$, получим для

$$U(p) = \frac{C[I_m p^2 + p C U_C(0)(p^2 + \omega^2) - (p^2 + \omega^2)i_L(0)]}{(p^2 + \omega^2)(p^2 LC + p LG + 1)}.$$

Степень полинома числителя (относительно p) меньше степени полинома знаменателя, поэтому обратное преобразование Лапласа (1.43) применимо, т.е.

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{C[I_m p^2 + p C U_C(0)(p^2 + \omega^2) - (p^2 + \omega^2)i_L(0)]}{(p^2 + \omega^2)(p^2 LC + p LG + 1)} e^{pt} dp.$$

Корни знаменателя

$$p_{1,2} = \pm j\omega; \quad p_{3,4} = \frac{-LG \pm \sqrt{(LG)^2 - 4LC}}{2LC}.$$

Поэтому $u(t) = \sum_{i=1}^4 \text{res}(p = p_i)$;

$$\text{res}(p = p_1) = \frac{j\omega I_m e^{j\omega t}}{2C(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)}; \quad \text{res}(p = p_2) = -\frac{j\omega I_m e^{-j\omega t}}{2C(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)};$$

$$\text{res}(p = p_3) = \frac{[I_m p_3^2 + p_3 C U_C(0)(p_3^2 + \omega^2) - (p_3^2 + \omega^2)i_L(0)]}{C(p_3 + j\omega)(p_3 - j\omega)(p_3 - p_4)} e^{p_3 t};$$

$$\text{res}(p = p_4) = \frac{[I_m p_4^2 + p_4 C U_C(0)(p_4^2 + \omega^2) - (p_4^2 + \omega^2)i_L(0)]}{C(p_4 + j\omega)(p_4 - j\omega)(p_4 - p_3)} e^{p_4 t}.$$

Просуммировав все вычеты, получим выражение для напряжения на контуре $u(t)$.

2.2. Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие в частотной области

Для расчета реакции линейной цепи на заданное воздействие применяется комплексный коэффициент передачи, определенный выше как отклик цепи на гармоническое воздействие единичной амплитуды. Если воздействие не единичное, а имеет амплитуду E , то комплексный коэффициент передачи определяется как

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{E}}, \quad (2.18)$$

где $\dot{U}_{\text{âòò}}$, \dot{E} — комплексные амплитуды выходного напряжения и входного воздействия для частоты ω .

Зная комплексный коэффициент передачи (АЧХ, ФЧХ), можно при известном входном воздействии в соответствии с (2.18) найти напряжение или ток на выходе.

2.2.1. Периодическое воздействие

Если воздействие моногармоническое $e = E \cos(\omega t + \psi)$, то комплексная амплитуда напряжения на выходе будет

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{E} K(j\omega) = E e^{j\psi} |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = E |K(j\omega)| e^{j[\psi + \varphi(\omega)]},$$

где $E |K(j\omega)|$ — действительная амплитуда напряжения на выходе, $[\psi + \varphi(\omega)]$ — фаза напряжения на выходе, и следовательно, напряжение как функция времени будет:

$$u(t)_{\text{ВЫХ}} = E |K(j\omega)| \cos[\omega t + \psi + \varphi(\omega)]. \quad (2.19)$$

Если воздействие e негармоническое, сложное, но периодическое (например, периодическая последовательность импульсов), то оно

может быть представлено рядом Фурье, т.е. $e = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n e^{jn\omega t}$.

Применяя принцип наложения, выходное напряжение найдем в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n K(jn\omega) e^{jn\omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n |K(jn\omega)| e^{j\varphi(n\omega)} e^{jn\omega t} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n |K(jn\omega)| e^{j[n\omega t + \psi_n + \varphi(n\omega)]}. \end{aligned}$$

В выражении (2.20) E_n — действительная амплитуда гармоники с частотой $n\omega$, y_n — ее фаза; $K(jn\omega)$ — комплексный коэффициент передачи цепи для частоты $n\omega$, $j(n\omega)$ — сдвиг фазы, осуществляемый цепью для частоты $n\omega$.

Применяя в (2.20) формулу Эйлера к слагаемым при n и $-n$, получим

$$u(t) = \frac{1}{2} E_0 K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n |K(jn\omega)| \cos [n\omega t + \psi_n + \varphi(n\omega)], \quad (2.20)$$

где E_0 — постоянная составляющая в спектре воздействия e ; $K(0)$ — коэффициент передачи цепи для постоянной составляющей.

Таким образом, использование комплексного коэффициента передачи позволяет найти амплитуду и фазу напряжения любой гармоники на выходе цепи.

Пример 2.3

Найти выходное напряжение цепи (см. рис. 1.20, а) при воздействии периодической последовательности импульсов (см. рис. 1.22).

Комплексный коэффициент передачи

$$K(j\Omega) = \frac{R}{(R+r) - \Omega^2 RLC + j\Omega(L + RrC)} = |K(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)},$$

где

$$\text{АЧХ} \quad |K(j\Omega)| = \frac{R}{\sqrt{[(R+r) - \Omega^2 RLC]^2 + \Omega^2 (L + RrC)^2}};$$

$$\text{ФЧХ} \quad \varphi(\Omega) = -\arctg \frac{\Omega(L + RrC)}{R+r - \Omega^2 RLC}.$$

Спектр амплитуд и фаз импульсов (см. рис. 1.33)

$$|\dot{A}_n| = \frac{2U\tau}{T} \left\{ \frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\frac{n\omega\tau}{2}} \right\}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{n\omega\tau}{2}.$$

Тогда выходное напряжение получим в виде

$$u(t) = \frac{U\tau}{T} \frac{R}{R+r} + \frac{2U\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\frac{n\omega\tau}{2}} \frac{R}{\sqrt{[(R+r) - \Omega^2 RLC]^2 + \Omega^2 (L + RrC)^2}} \times \right. \\ \left. \times \cos \left[n\omega t - \frac{n\omega\tau}{2} - \arctg \frac{n\omega(L + RrC)}{R+r - n^2\omega^2 RLC} \right] \right\}$$

2.2.2. Воздействие неперiodическое

Если входное воздействие e неперiodическое (например, одиночный импульс), то оно в соответствии с (1.38) может быть представлено в виде бесконечной суммы (интеграл) гармонических составляющих с частотами Ω (от $-\infty$ до ∞) и комплексными амплитудами $G(\Omega)d\Omega$, т.е.

$$e = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \text{ Умножив } G(\Omega)d\Omega \text{ на } K(j\Omega), \text{ получим комплексную}$$

амплитуду напряжения частоты Ω на выходе цепи. Тогда реакция цепи на все воздействие e в соответствии с принципом наложения будет найдена как бесконечная (интегральная) сумма реакций цепи на все гармоники воздействия, составляющие в сумме e , т.е.

$$u(t)_{\text{вых}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) K(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (2.21)$$

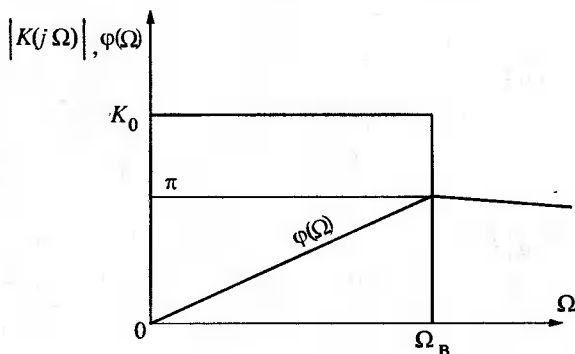


Рис. 2.6

Пример 2.4

На идеальный фильтр нижних частот $K(j\Omega) = K_0 e^{-j\Omega\tau}$ ($\tau = \text{const}$) (рис. 2.6) воздействует δ -импульс. Найти реакцию фильтра. Так как для δ -импульса $G(\Omega) = 1$, то

$$\begin{aligned} u(t)_{\text{вых}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) K(j\omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_B}^{\Omega_B} 1 \cdot K_0 e^{-j\Omega\tau} e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\Omega_B}^{\Omega_B} e^{j\Omega(t-\tau)} d\Omega = \frac{K_0}{2\pi j(t-\tau)} e^{j\Omega(t-\tau)} \Big|_{-\Omega_B}^{\Omega_B} = \frac{K_0}{\pi(t-\tau)} \times \\ &\times \left[\frac{e^{j\Omega_B(t-\tau)} - e^{-j\Omega_B(t-\tau)}}{2j} \right] = \frac{K_0 \Omega_B}{\pi} \frac{\sin \Omega_B(t-\tau)}{\Omega_B(t-\tau)}. \end{aligned}$$

График функции приведен на рис. 2.7. Максимум ее, равный $\frac{K_0 \Omega_B}{\pi}$, располагается при $t = \tau$, а нули находятся из условия $\Omega_B(t - \tau) = n \times \pi$, откуда получаем $t = \tau + n \frac{\pi}{\Omega_B}$ ($n = 1, 2, \dots$).

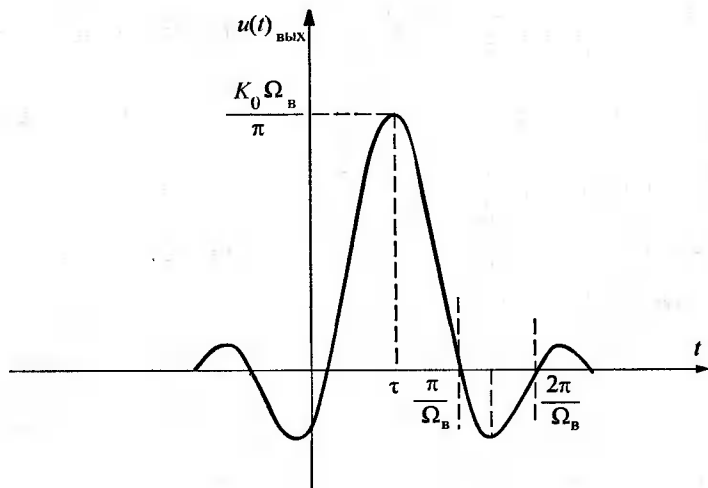


Рис. 2.7

В примере 2.4 спектральная функция $G(\Omega)$ простая ($\Omega = 1$) и $|K(j\Omega)| = K_0 = \text{const}$, поэтому интеграл для $u_{\text{вых}}(t)$ вычисляется просто. В общем случае $G(\Omega)$ и $K(j\Omega)$ сложны, вычисление интегралов (2.21) производится с использованием теории вычетов. Для этого в (2.21) путем замены переменной $j\Omega = p$ осуществляется переход к преобразованию Лапласа с последующим применением формул (1.20), (1.21).

Пример 2.5

Найти отклик цепи (см. рис. 1.20, а) на прямоугольный импульс единичной амплитуды $S(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_u)$. Получим

$$K(p) = \frac{R}{p^2 \tau L + p(L + r\tau) + (r + R)}, \text{ где } t = RC.$$

Для прямоугольного импульса (см. пример 1.14) $G(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-pt_u})$,

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p)G(p)e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{R(1 - e^{-pt_u})}{p[p^2 \tau L + p(L + r\tau) + (r + R)]} e^{pt} dp = \sum_n \text{res}(p = p_n). \end{aligned}$$

Найдем корни знаменателя подынтегральной функции: $p_1 = 0$,

$$p_{2,3} = -\frac{1}{2} \frac{(L + r\tau)}{\tau L} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{(L + r\tau)^2}{\tau^2 L^2} - \frac{r + R}{\tau L}}.$$

Все корни однократные. Применяя (1.21), получим

$$\text{res}(p = p_1 = 0) = \lim_{p \rightarrow p_1 = 0} \left[\frac{PR(1 - e^{-pt_u})e^{pt}}{\tau L p(p - p_2)(p - p_3)} \right] = 0;$$

$$\text{res}(p = p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[\frac{R(1 - e^{-pt_u})(p - p_3)e^{pt}}{\tau L p(p - p_2)(p - p_3)} \right] = \frac{R(1 - e^{-p_2 t_u})e^{p_2 t}}{\tau L p_2(p_2 - p_3)};$$

$$\text{rcs}(p = p_3) = \lim_{p \rightarrow p_3} \left[\frac{R(1 - e^{-p t_u})(p - p_3)e^{p t}}{\tau L p (p - p_2)(p - p_3)} \right] = \frac{R(1 - e^{-p_3 t_u})e^{p_3 t}}{\tau L p_3 (p_3 - p_2)}.$$

В результате найдем

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{R(1 - e^{-p_2 t_u})}{\tau L p_2 (p_2 - p_3)} e^{p_2 t} + \frac{R(1 - e^{-p_3 t_u})}{\tau L p_3 (p_3 - p_2)} e^{p_3 t}.$$

2.2.3. Условия неискаженной передачи сигналов

При передаче сигналов через линейные электрические цепи сигнал $S(t)$ претерпевает изменения: меняется его уровень, он задерживается во времени, меняется его форма. Допуская изменение уровня и задержку во времени, найдем условия, при которых он, проходя через цепь, не меняет своей формы.

Если цепь имеет $K(j\Omega) = K_0 e^{-j\Omega\tau}$ в пределах $-\infty < \Omega < \infty$, где $\tau = \text{const}$, то воспользовавшись выражением (2.21), будем иметь

$$u(t)_{\text{вых}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega t} K_0 e^{-j\Omega\tau} d\Omega = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega(t-\tau)} d\Omega.$$

Но интеграл $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) e^{j\Omega(t-\tau)} d\Omega$ соответствует сигналу $S(t)$,

задержанному на время τ вследствие прохождения через цепь. Таким образом, $u(t)_{\text{вых}} = K_0 S(t - \tau)$, т.е. при таких характеристиках цепи сигнал изменился по уровню в K_0 раз и задержался на время τ . Графически

АЧХ и ФЧХ цепи с $K(j\Omega) = K_0 e^{-j\Omega\tau}$ приведены на рис. 2.8.

Следовательно, для неискаженной передачи сигнала через линейную цепь необходимо, чтобы АЧХ ее не зависела от частоты, а ФЧХ

была линейной. При этом наклон $\alpha = \text{arctg} \frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega} = \text{arctg} \tau$ определяет

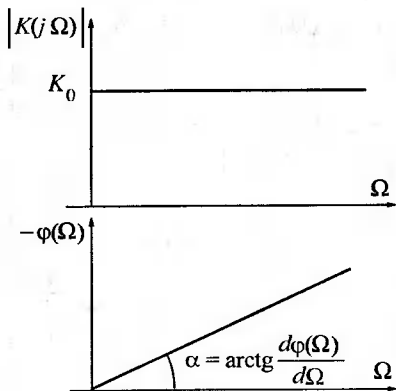


Рис. 2.8

задержку сигнала во времени. Линейность ФЧХ означает, что все составляющие спектра сигнала задерживаются на одно и то же время, поэтому искажения формы сигнала отсутствуют. Однако требования постоянства коэффициента передачи и линейности ФЧХ в пределах $(0, \infty)$ в реальных условиях невыполнимы. Поэтому искажения сигнала будут минимальны, если эти требования будут выполнены в пределах ширины спектра передаваемого сигнала (спектра, содержащего $\geq 95\%$ энергии сигнала).

2.2.4. Связь между временными и частотными характеристиками цепи

Если в выражении (2.21) в качестве $G(\Omega)$ использовать спектральную функцию δ -импульса, для которого $G(\Omega) = 1$ во всей полосе частот от $-\infty < \Omega < \infty$, то выходное напряжение цепи будет ее импульсной характеристикой, т.е. будем иметь

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (2.22)$$

Но если существует обратное преобразование Фурье (2.22), то имеет место и прямое преобразование, т.е.

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (2.23)$$

Таким образом, комплексный коэффициент передачи $K(j\Omega)$ и импульсная характеристика цепи связаны между собой парой преобразований Фурье.

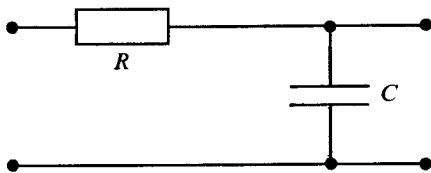


Рис. 2.9

Пример 2.6

Для интегрирующей цепи (рис. 2.9) комплексный коэффициент

передачи $K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\Omega\tau}$, где $\tau = RC$. Используя выражение (2.22),

получим импульсную характеристику $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j\Omega\tau} e^{j\Omega t} d\Omega$.

Для вычисления интеграла перейдем от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа, получим

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{1}{1 + p\tau} e^{pt} dp = \text{res}(p = -\frac{1}{\tau}) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}.$$

Пример 2.7

Для цепи (см. рис. 1.20, а) найти импульсную характеристику.

В примере (2.3) для нее найден комплексный коэффициент передачи

$$K(j\Omega) = \frac{R}{(R + r - \omega^2 RLC) + j\omega(L + RrC)}.$$

Поэтому в соответствии с (2.22)

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re^{j\omega t} d\omega}{(R + r - \omega^2 RLC) + j\omega(L + RrC)}.$$

Переходя в последнем выражении от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа (полагая $j\omega = p$), получим

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re^{pt} dp}{(R + r) + p^2 RLC + p(L + RrC)}.$$

$$p_{1,2} = -\frac{(L+rRC) \pm \sqrt{(L+rRC)^2 - 4(r+R)RLC}}{2RLC}$$

однократные, поэтому $h(t) = \sum_{i=1}^2 \text{res}(p = p_i)$. Находя вычеты

$$\text{res}(p = p_1) = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{R(p-p_1)e^{pt}}{RLC(p-p_1)(p-p_2)} \right] = \frac{e^{p_1 t}}{LC(p_1-p_2)},$$

$$\text{res}(p = p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[\frac{R(p-p_2)e^{pt}}{RLC(p-p_1)(p-p_2)} \right] = \frac{e^{p_2 t}}{LC(p_2-p_1)},$$

получим $h(t) = \frac{1}{LC(p_1-p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$.

Предположим, что $(L+rRC)^2 < 4(r+R)RLC$. Тогда p_1 и p_2 будут равны

$$p_{1,2} = -a \pm jb, \text{ где } \alpha = \frac{(L+2RC)}{2RLC}; \quad \beta = \frac{\sqrt{4(r+R)RLC - (L+rRC)^2}}{2RLC}.$$

В этом случае $h(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\beta LC} \sin(\beta t)$. Импульсная характеристика будет иметь вид синусоидального напряжения с частотой β , с экспоненциально затухающей амплитудой.

2.3. Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие во временной области

Реакция линейной цепи на заданное воздействие во временной области рассматривается с использованием переходной $a(t)$ и импульсной $h(t)$ характеристик.

2.3.1. Использование переходной характеристики

В п. 1.5 (формула (1.50)) произвольное воздействие на линейную цепь представлено в виде разложения на сумму единичных скачков. Так как реакция линейной цепи на каждый из единичных скачков известна: это есть переходная функция цепи, а к самой цепи применим принцип наложения, то реакцию цепи на воздействие (1.50) можно записать

$$y(t) = a(t)x(0) + \sum_{n=1}^N \alpha(t - \theta_n) \Delta x(\theta_n). \quad (2.24)$$

При $N \rightarrow \infty$ и $\Delta\theta_n = (\theta_{n-1} - \theta_n) \rightarrow 0$ ступенчатая функция будет стремиться к своему пределу $x(t)$. При этом $\Delta x(\theta) = \frac{dx}{d\theta} d\theta = x'(\theta) d\theta$.

Тогда (2.24) принимает вид

$$y(t) = a(t)x(0) + \int_0^t a(t - \theta) x'(\theta) d\theta. \quad (2.25)$$

Выражение (2.25) носит название интеграла Дюамеля. Взяв в (2.25) интеграл по частям, получим

$$y(t) = a(0)x(t) + \int_0^t a(t - \theta) x'(\theta) d\theta. \quad (2.26)$$

Выражение (2.26) представляет вторую форму интеграла Дюамеля. Обе формы приводят к одним и тем же результатам. Предпочтение той или иной форме интеграла Дюамеля отдается исходя из простоты и удобства вычислений.

Пример 2.8

Для цепи рис. 2.10, *a* найти выходное напряжение при воздействии входного напряжения $U(t)$ (рис. 2.10, *б*), пользуясь переходной характеристикой $a(t)$.

Приведенное на рис. 2.10, *б* внешнее воздействие может быть представлено следующей функцией:

$$u(t) = \begin{cases} ct + U_0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_{\Pi} \\ -dt + g & \text{при } t_{\Pi} \leq t \leq t_3, \end{cases} \quad (2.27)$$

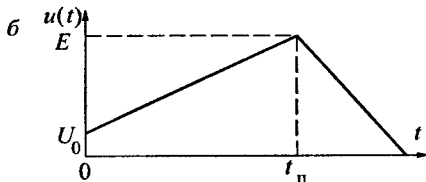
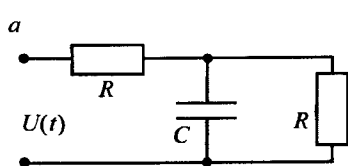


Рис. 2.10

где $C = \frac{E - U_0}{t_{\text{п}}}$; $d = \frac{E}{t_3 - t_{\text{п}}}$; $g = \frac{Et_3}{t_3 - t_{\text{п}}}$.

Найдем переходную характеристику $a(t)$. Операторный коэффициент передачи цепи (рис. 2.10, а) при воздействии единичного скачка $\sigma(e) = 1/p$ имеет вид

$$a(p) = \frac{1}{\tau p(p + 2/\tau)}, \text{ где } t = RC.$$

Степень полинома знаменателя больше степени полинома числителя, поэтому функция $a(p)$ удовлетворяет требованиям обратного преобразования Лапласа.

Корни знаменателя $p_1 = 0$; $p_2 = -2/\tau$ — однократные. Поэтому

$$a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{\tau p(p + 2/\tau)} dp = \text{res}(p = p_1) + \text{res}(p = p_2);$$

$$\text{res}(p = p_1) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{pe^{pt}}{\tau p(p + 2/\tau)} \right] = \frac{1}{2};$$

$$\text{res}(p = p_2) = \lim_{p \rightarrow p_2} \left[\frac{(p + 2/\tau)e^{pt}}{\tau p(p + 2/\tau)} \right] = -\frac{1}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}};$$

$$a(t) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) \quad (2.28)$$

Для вычисления реакции цепи на воздействие (2.27) целесообразно воспользоваться формулой (2.25), так как после дифференцирования воздействия получим постоянные величины (2.27 — уравнения прямой линии) и полученные интегралы будут легко вычисляться.

Интервал интегрирования ($0 \rightarrow t$) разбиваем на три участка:

$t_{\text{п}} > t \geq 0$; $t_3 > t \geq t_{\text{п}}$; $t \geq t_3$ в соответствии с интервалами непрерывности функции $U(t)$.

На первом интервале

$$y(t) = U_0 \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) + \int_0^t \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2(t-\theta)}{\tau}} \right) C d\theta =$$

$$\frac{U_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) + \frac{C}{2} t - \frac{C\tau}{4} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right).$$

На втором интервале

$$y(t) = \frac{U_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) + \frac{C}{2} t_{\text{п}} - \frac{C\tau}{4} \left(1 - e^{-\frac{2t_{\text{п}}}{\tau}} \right) - \int_{t_{\text{п}}}^t d \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2(t-\theta)}{\tau}} \right) d\theta =$$

$$\frac{U_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) + \frac{C}{2} t_{\text{п}} - \frac{C\tau}{4} \left(1 - e^{-\frac{2t_{\text{п}}}{\tau}} \right) - \frac{d}{2} (t - t_{\text{п}}) + \frac{d\tau}{4} \left(1 - e^{-\frac{2(t-t_{\text{п}})}{\tau}} \right)$$

На третьем интервале

$$y(t) = \frac{U_0}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) + \frac{C}{2} t_{\text{п}} - \frac{C\tau}{4} \left(1 - e^{-\frac{2t_{\text{п}}}{\tau}} \right) - \frac{d}{2} (t_3 - t_{\text{п}}) + \frac{d\tau}{4} \left(1 - e^{-\frac{2(t_3-t_{\text{п}})}{\tau}} \right)$$

Построив по интервалам зависимость $y(t)$, получим выходное напряжение цепи, изображений на рис. 2.10, а при воздействии импульса (2.27), показанного на рис. 2.10, б.

2.3.2. Использование импульсной характеристики

В п. 1.5 (формула (1.51)) внешнее воздействие произвольной формы представлено в виде разложения по δ -функциям, сдвинутым одна относительно другой на время $t = \tau_{k+1} - \tau_k = \Delta\tau_k$. Реакция линейной цепи на каждый δ -импульс известна — это импульсная характеристика цепи $h(t)$. Применяя к цепи принцип наложения, реакцию ее на воздействие (1.51) можно записать

$$y(t) = \sum_k S_k h(t - \tau_k) = \sum_k x(\tau_k) h(t - \tau_k) \Delta\tau, \quad (2.29)$$

где $x(t_k)$ — ордината кривой $x(t)$ — внешнего воздействия в точке $t = \tau_k$; $h(t - \tau_k)$ — импульсная характеристика цепи — реакция на δ -импульс при $t = \tau_k$; $\Delta\tau$ — шаг разбиения интервала существования $x(t)$ — (см. рис. 1.34).

Устремляя $\Delta\tau \rightarrow 0$ и переходя от суммирования в (2.29) к интегрированию, получаем

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Выражение (2.30) представляет собой одну из форм интеграла Дюамеля. Другую форму получим из (2.30), если сделаем замену переменной $t - \tau = \theta$. Получим

$$y(t) = \int_0^t x(t - \theta) h(\theta) d\theta. \quad (2.31)$$

Пример 2.9

Для цепи рис. 2.10, а найти выходное напряжение при воздействии прямоугольного импульса $x(t) = x[\sigma(t) - \sigma(t - t_u)]$ с использованием импульсной характеристики $h(t)$.

Изображение импульсной характеристики

$$h(p) = \frac{1}{p\tau + 2}, \quad \tau = RC.$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt} dp}{\tau p + 2} = \text{res}(p = p_1) = \lim_{p \rightarrow -2/\tau} 2 \left[\frac{(p + 2/\tau) e^{pt}}{(p + 2/\tau) \cdot \tau} \right] = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

В соответствии с (2.30)

$$y(t) = \int_0^t x[\sigma(\theta) - \sigma(\theta - t_u)] \frac{1}{\tau} e^{-\frac{2(t-\theta)}{\tau}} d\theta = \frac{x\tau}{\tau 2} e^{-\frac{2(t-\theta)}{\tau}} \Big|_0^t - \frac{x\tau}{\tau 2} e^{-\frac{2(t-\theta)}{\tau}} \Big|_{t_u}^t =$$

$$= \frac{x}{2} \left[\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right) \sigma(t) - \left(1 - e^{-\frac{2(t-t_u)}{\tau}}\right) \sigma(t - t_u) \right].$$

Первая часть формулы для $y(t)$ описывает передний фронт, вторая — задний.

2.3.3. Особенности вычисления импульсных характеристик узкополосных систем

Узкополосные системы (резонансный контур, фильтр) описываются дифференциальными уравнениями как минимум второго порядка. При вычислении импульсной характеристики порядок системы равен числу полюсов подынтегральной функции в формуле обратного преобразования Лапласа, а чем больше полюсов, тем сложнее вычисляется импульсная характеристика. Однако, используя свойство узкополосности, можно понизить порядок уравнения, что приведет к упрощению при вычислении импульсной характеристики. Рассмотрим эти особенности.

Если на вход цепи, имеющей комплексный коэффициент передачи $K(j\omega)$ подать δ -функцию $\delta(t)$, то реакцией цепи на этот δ -импульс будет импульсная характеристика $h(t)$, которая равна

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \text{ Разобьем этот интеграл на два:}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.32)$$

В первом слагаемом сделаем замену переменной $\omega = -(\omega_0 + \Omega)$, где ω_0 — резонансная частота цепи. Получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\omega_0} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\omega_0 t} e^{-j\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\omega_0}^{\infty} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом сделаем замену переменной $\omega = (\omega_0 + \Omega)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\omega_0 t} e^{j\Omega t} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \int_{\omega_0}^{\infty} K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega. \end{aligned}$$

Так как полоса пропускания цепи узкая, т.е. $|K(j\omega)|$ при удалении от ω_0 (увеличении Ω) быстро уменьшается, то пределы интегрирования можно расширить до $-\infty$. Тогда в итоге получим

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} K[-j(\omega_0 + \Omega)] e^{-j\Omega t} d\Omega + \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega. \end{aligned}$$

В последнем равенстве первое и второе слагаемые являются комплексно сопряженными величинами; складывая их, получим

$$h(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K[j(\omega_0 + \Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega \right] e^{j\omega_0 t} \right\}. \quad (2.33)$$

Комплексный коэффициент передачи $K[j(\omega_0 + \Omega)]$, полученный из исходного $K(j\omega)$ путем смещения частоты из окрестности ω_0 в нулевую точку Ω , называется низкочастотным эквивалентом частотно-избирательной системы:

$$K_{\text{нч}}(j\Omega) = K[j(\omega_0 + \Omega)].$$

Подставляя низкочастотный эквивалент в выражение для $h(t)$, получим

$$h_{\text{нч}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{нч}}(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega, \quad (2.34)$$

где $h_{\text{нч}}(t)$ — низкочастотный эквивалент импульсной характеристики частотно-избирательной системы.

Тогда импульсная характеристика узкополосной избирательной системы будет

$$h(t) = \text{Re} [2h_{\text{нч}}(t) e^{j\omega_0 t}]. \quad (2.35)$$

Поясним введенные термины. На рис. 2.11, *а* приведена АЧХ узкополосной избирательной системы с резонансной частотой ω_0 .

На рис. 2.11, *б* приведен низкочастотный эквивалент АЧХ, (см. рис. 2.11, *а*). Он получен путем переноса центра АЧХ в ноль, ход кривой в точности соответствует ходу правой ветви АЧХ и напоминает фильтр нижних частот.

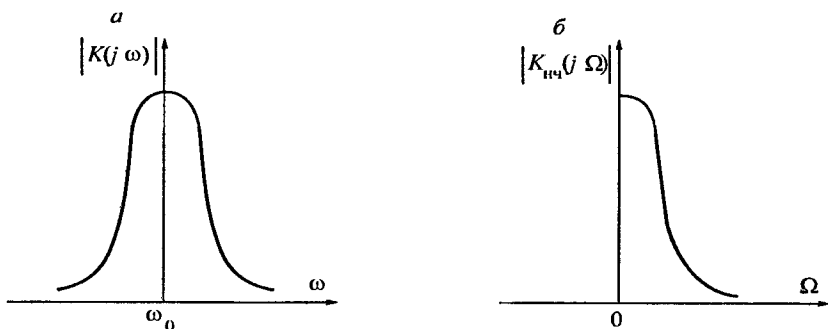


Рис. 2.11

Пример 2.10

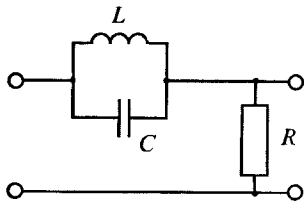


Рис. 2.12

Для резонансной цепи рис. 2.12 найдем импульсную характеристику.

Комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{R}{R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}$$

Для резонансной системы, как известно, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ — резонансная

частота; $\frac{\omega_0 L}{R} = Q$ — добротность ($Q \gg 1$). Поэтому

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{jQ\omega\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)}} \approx \frac{1}{1 + \frac{j(\omega - \omega_0) \frac{2}{Q}}{\omega_0}} = \frac{j\tau_k \Omega}{1 + j\tau_k \Omega},$$

где, поскольку система узкополосная, то $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, $\omega - \omega_0 = \Omega$,

$\tau_k = \frac{2}{Q\omega_0}$ — постоянная времени контура.

Таким образом, путем переноса начала координат ($\omega - \omega_0 = \Omega$) в нуль, получен низкочастотный эквивалент частотно-избирательной системы

$$K(j\Omega) = \frac{j\tau_k \Omega}{1 + j\tau_k \Omega}.$$

Исходный порядок системы (см. рис. 2.12) — второй, так как содержит два энергоемких элемента (L и C), а порядок низкочастотного эквивалента — первый. Найдем

$$h_{\text{нч}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\tau_k \Omega}{1 + j\tau_k \Omega} e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Перейдем к преобразованию Лапласа, приняв $j\Omega = p$. Получим

$$h_{\text{нч}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{\tau_k p}{1 + \tau_k p} e^{pt} dp.$$

Подынтегральная функция имеет степень числителя, равную степени знаменателя. Поделив числитель на знаменатель по правилам деления многочлена на многочлен, будем иметь:

$$\begin{aligned} h_{\text{нч}}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[1 - \frac{1}{1 + \tau_k p} \right] e^{pt} dp = \delta(t) - \text{res}(p = -\frac{1}{\tau_k}) = \\ &= \delta(t) - \lim_{p \rightarrow -1/\tau_k} \frac{p + 1/\tau_k}{(p + 1/\tau_k)\tau_k} e^{pt} = \delta(t) - \frac{1}{\tau_k} e^{-t/\tau_k}. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с (2.35)

$$h(t) = \text{Re} \left\{ 2 \left[\delta(t) - \frac{1}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \right] e^{j\omega_0 t} \right\} = 2 \left[\delta(t) - \frac{1}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \right] \cos(\omega_0 t).$$

2.3.4. Связь между переходной и импульсной характеристиками цепей

При воздействии скачка $x(t) = x\sigma(t)$ отклик линейной цепи имеет вид $y(t) = x a(t)$. Если использовать импульсную характеристику цепи, то реакцию ее на тот же скачок можно вычислить, используя выражение (2.30), т. е.

$$y(t) = \int_0^t x\sigma(\theta) h(t - \theta) d\theta = x \int_0^t h(t - \theta) d\theta.$$

Сравнивая оба отклика, получим

$$a(t) = \int_0^t h(t - \theta) d\theta = \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (2.36)$$

Последнее выражение получено после замены переменной $t - \theta = \tau$. Дифференцируя (2.36) по t , получим

$$h(t) = a'(t). \quad (2.37)$$

Таким образом, импульсная характеристика есть производная от переходной и наоборот, переходная характеристика может быть получена интегрированием импульсной. Однако выражение (2.37) не учитывает наличие скачков у переходной характеристики.

Если известна $a(t)$, то $a(t) = 0$ при $t < 0$ и равна $a(t)\sigma(t)$ при $t \geq 0$. Дифференцируя последнее равенство как произведение и учитывая (1.34), получим

$$h(t) = a'(t)\sigma(t) + a(0)\delta(t), \quad (2.38)$$

где $a(0)$ — скачок переходной характеристики при $t = 0$. Формула (2.38) позволяет вычислить обобщенную производную от $a(t)$, которая совпадает с обычной производной при отсутствии скачка ($a(0) = 0$).

Пример 2.11

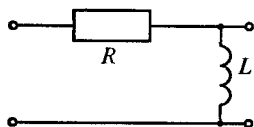


Рис. 2.13

Для цепи рис. 2.13

$$a(p) = \frac{pL}{p(pL + R)} = \frac{1}{p + R/L}.$$

Переходная характеристика

$$a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p + R/L} dp = \operatorname{res} \left(p = -\frac{R}{L} \right) = \lim_{p \rightarrow -\frac{R}{L}} \frac{(p + R/L)}{R} \frac{e^{pt}}{(p + R/L)} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Импульсная характеристика при $a(0) = 1$ имеет вид

$$h(t) = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Импульсную характеристику можно вычислить и непосредственно по цепи. Получим

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{pL}{pL + R} = 1 - \frac{R}{pL + R}; \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left[1 - \frac{R}{pL + R} \right] e^{pt} dp = \delta(t) - \operatorname{res} \left(p = -\frac{R}{L} \right) = \\ &= \delta(t) - \lim_{p \rightarrow -\frac{R}{L}} \frac{R(p + R/L)}{L(p + R/L)} e^{pt} = \delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned}$$

Как видно, импульсные характеристики, вычисленные по переходной характеристике и прямо по цепи, полностью совпадают.

2.4. Расчет характеристик разветвленных линейных цепей

В предыдущих разделах рассматривались только простые, одно-контурные линейные цепи, для расчета характеристик которых достаточно было применения законов Кирхгофа. Однако на практике такие простые цепи применяются крайне редко.

На рис. 2.14 приведены схемы простейших фильтров нижних частот (рис. 2.14, *а*) и полоснопропускающего (рис. 2.14, *б*), на рис. 2.15, *а* — схема мостового четырехполюсника, который может быть либо фильтром, либо фазовым корректором (в зависимости от характеристик двухполосников Z_1 и Z_2), а на рис. 2.15, *б* — схема амплитудного корректора. На рис. 2.16 приведена схема однокаскадного усилителя при простейшей модели транзистора (обведена пунктиром). Даже этот короткий перечень примеров показывает, что на практике имеют дело со сложными, разветвленными цепями. Поэтому возникает задача расчета характеристик сложных, разветвленных линейных цепей.

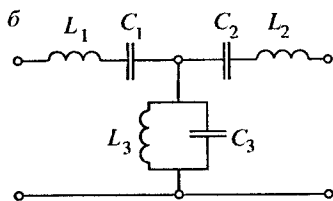
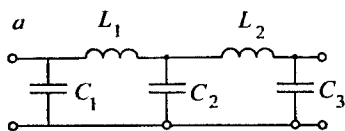


Рис. 2.14

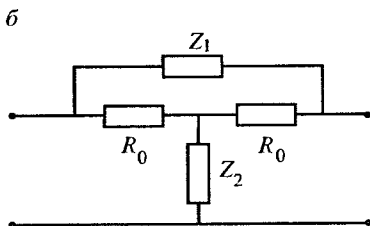
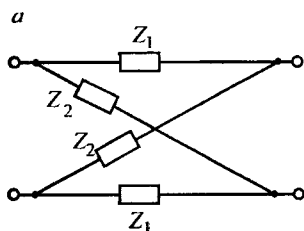


Рис. 2.15

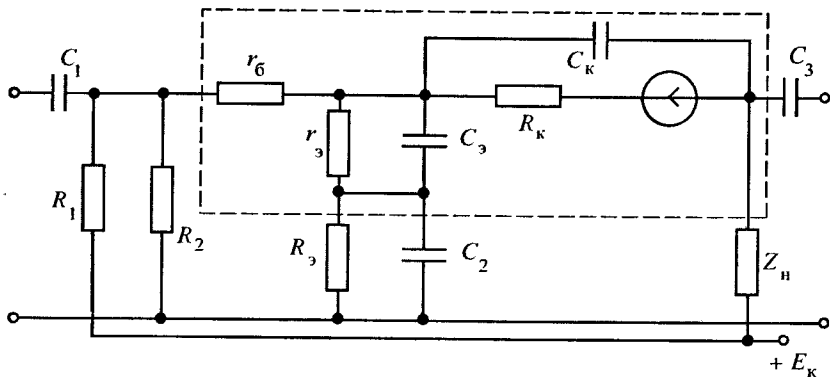


Рис. 2.16

2.4.1. Методы расчета характеристик разветвленных цепей

Расчет характеристик таких цепей можно производить с использованием законов Кирхгофа, методами контурных токов и узловых напряжений. Все эти методы приводят к одним и тем же результатам. Но число уравнений, а следовательно, и трудоемкость расчета, в каждом из них разное.

При использовании законов Кирхгофа число линейно независимых уравнений, описывающих цепь, составляет $q - 1$ уравнений, составленных для узлов по 1-му закону Кирхгофа и $p - (q - 1)$ уравнений, составленных по 2-му закону Кирхгофа, где p и q — число ветвей и узлов цепи соответственно. Общее число уравнений равно p — числу ветвей.

В методе контурных токов уравнения составляются относительно токов, замыкающихся в контурах. Для схемы, содержащей p ветвей и q узлов число линейно независимых уравнений составляет $p - q + 1$. Контурные (а соответственно и уравнения) будут независимы, если каждый последующий контур будет отличаться от предыдущего хотя бы одним элементом. По сравнению с методом, основанном на непосредственном применении уравнений Кирхгофа метод контурных токов позволяет сократить число уравнений, описывающих цепь, что приводит к сокращению трудоемкости расчета цепи.

Пример 2.12 (рис. 2.17)

Эта схема содержит $\dot{p} = 5$ ветвей и $q = 3$ узла, поэтому число независимых контуров $p - q + 1 = 3$. Выберем контуры, совпадающими с токами $I_1(p), I_2(p), I_3(p)$. Применяя 2-й закон Кирхгофа, получим

$$\begin{aligned} I_1(p)[Z_1(p) + Z_2(p)] - I_2(p) Z_2(p) &= e_1(p); \\ -I_1(p) Z_2(p) + I_2(p)[Z_2(p) + Z_3(p) + Z_4(p)] - I_3(p) Z_4(p) &= 0; \\ -I_2(p) Z_4(p) + I_3(p)[Z_4(p) + Z_5(p)] &= -e_2(p). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Элементы цепи — комплексные сопротивления Z_1, Z_2, Z_3 — заменены операторными схемами замещения (при нулевых начальных условиях), а внешние воздействия $e_1(t)$ и $e_2(t)$ преобразованы по Лапласу.

Сумма сопротивлений, входящих в контур, называется собственным сопротивлением контура: в контур I входят $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$, поэтому $Z_1(p) + Z_2(p) = Z_{11}$ — собственное сопротивление I контура; $Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p)$ входят во II контур, поэтому $Z_2(p) + Z_3(p) + Z_4(p) = Z_{22}(p)$ — собственное сопротивление II контура; $Z_4(p)$ и $Z_5(p)$ входят в III контур, поэтому $Z_4(p) + Z_5(p) = Z_{33}(p)$ — собственное сопротивление III контура.

Сопротивления, входящие одновременно в разные контуры, называются взаимными сопротивлениями. Так $Z_2(p) = Z_{12}(p)$ — взаимное сопротивление I и II контуров; $Z_4(p) = Z_{23}(p)$ — взаимное сопротивление II и III контуров.

Если направление обхода контуров выбрано совпадающим с положительным направлением контурного тока, то падение напряжения в собственном сопротивлении от контурного тока берется положительным. Если токи в общем сопротивлении контуров направлены встречно, то при обходе I контура падение напряжения от тока II контура берется со знаком «минус».

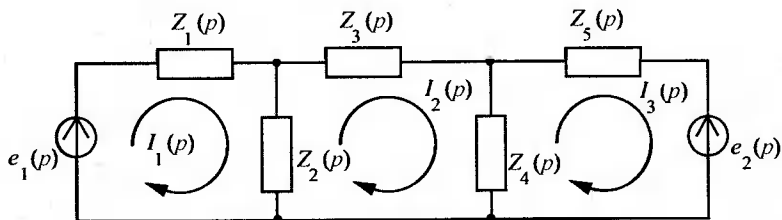


Рис. 2.17

Решение системы уравнений (2.42) можно получить:

1) с использованием обратной матрицы, т.е.

$$I(p) = Z(p)^{-1} e(p). \quad (2.43)$$

где $Z(p)^{-1}$ — матрица, обратная к матрице $Z(p)$;

2) по правилу Крамера, согласно которому ток в j -ом контуре равен

$$I_j(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) & \dots & e_1(p) & \dots & Z_{1n}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) & \dots & e_2(p) & \dots & Z_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}(p) & Z_{n2}(p) & \dots & e_n(p) & \dots & Z_{nn}(p) \end{vmatrix},$$

где Δ — определитель системы (2.42), а определитель в квадратных скобках получен из определителя системы Δ путем замены его j -го столбца на вектор внешних воздействий.

Вычисляя определители в последнем выражении, получим ток в j -м контуре.

Обратная матрица вычисляется следующим образом.

1. Исходную матрицу $Z(p)$ транспонируют, т.е. заменяют строки столбцами, получают транспонированную матрицу $Z^T(p)$.

2. Каждый элемент транспонированной матрицы заменяется минором, т.е. определителем, полученным в результате вычеркивания строки и столбца, соответствующих данному элементу.

3. Каждый минор заменяется алгебраическим дополнением, т.е. он умножается на $(-1)^{i+k}$, где i, k — номера строки и столбца, на пересечении которых находился элемент транспонированной матрицы.

4. Вычисленные алгебраические дополнения делятся на определитель системы Δ .

Для примера 2.12:

$$e(p) = \begin{bmatrix} e_1(p) \\ 0 \\ -e_2(p) \end{bmatrix}; \quad I(p) = \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ I_3(p) \end{bmatrix}; \quad Z(p) = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & -Z_{12}(p) & 0 \\ -Z_{21}(p) & Z_{22}(p) & -Z_{32}(p) \\ 0 & Z_{32}(p) & Z_{33}(p) \end{bmatrix},$$

где

$$Z_{11}(p) = Z_1(p) + Z_2(p); \quad Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = Z_2(p);$$

$$Z_{22}(p) = Z_2(p) + Z_3(p) + Z_4(p); \quad Z_{23}(p) = Z_{32}(p) = Z_4(p).$$

$$\Delta = Z_{11}(p)[Z_{22}(p)Z_{33}(p) - Z_{23}^2(p)] - Z_{12}^2(p)Z_{33}(p).$$

Применяя правило Крамера, получим

$$I_1(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} e_1(p) & -Z_{12}(p) & 0 \\ 0 & Z_{22}(p) & -Z_{23}(p) \\ -e_2(p) & -Z_{32}(p) & Z_{33}(p) \end{bmatrix} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} e_1(p) - \frac{\Delta_{31}}{\Delta} e_2(p),$$

где $\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} Z_{22}(p) & -Z_{23}(p) \\ -Z_{32}(p) & Z_{33}(p) \end{bmatrix} = Z_{22}(p)Z_{33}(p) - Z_{23}^2(p),$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} -Z_{12}(p) & 0 \\ Z_{22}(p) & -Z_{23}(p) \end{bmatrix} = Z_{12}(p)Z_{23}(p).$$

Вычислим обратную матрицу к матрице $Z(p)$.

1. Транспонированная матрица

$$Z^T(p) = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & -Z_{12}(p) & 0 \\ -Z_{21}(p) & Z_{22}(p) & -Z_{32}(p) \\ 0 & -Z_{32}(p) & Z_{33}(p) \end{bmatrix}.$$

2. Каждый элемент матрицы $Z^T(p)$ заменим алгебраическим дополнением, т.е. минором — определителем, полученным из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, умноженным на $(-1)^{i+k}$, где i, k номера строки и столбца. Получим

$$Z'^T(p) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix},$$

где $\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} Z_{22}(p) & -Z_{32}(p) \\ -Z_{23}(p) & Z_{33}(p) \end{bmatrix} = Z_{22}(p)Z_{33}(p) - Z_{23}^2(p);$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} Z_{12}(p) & -Z_{32}(p) \\ 0 & Z_{33}(p) \end{bmatrix} = Z_{12}(p)Z_{33}(p);$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} -Z_{12}(p) & Z_{22}(p) \\ 0 & -Z_{23}(p) \end{bmatrix} = Z_{12}(p)Z_{23}(p);$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} -Z_{21}(p) & 0 \\ -Z_{23}(p) & Z_{33}(p) \end{bmatrix} = Z_{21}(p)Z_{33}(p);$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & 0 \\ 0 & Z_{33}(p) \end{bmatrix} = Z_{11}(p)Z_{33}(p);$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & -Z_{21}(p) \\ 0 & -Z_{23}(p) \end{bmatrix} = Z_{11}(p)Z_{23}(p);$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} -Z_{21}(p) & 0 \\ Z_{22}(p) & -Z_{32}(p) \end{bmatrix} = Z_{21}(p)Z_{32}(p);$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & 0 \\ -Z_{12}(p) & -Z_{32}(p) \end{bmatrix} = Z_{11}(p)Z_{32}(p);$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & -Z_{21}(p) \\ -Z_{12}(p) & Z_{22}(p) \end{bmatrix} = Z_{11}(p)Z_{22}(p) - Z_{12}^2(p).$$

3. Обратная матрица равна

$$Z(p)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}.$$

4. Вектор контурных токов

$$I(p) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(p) \\ 0 \\ -e_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ I_3(p) \end{bmatrix},$$

где $I_1(p) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} e_1(p) - \frac{\Delta_{13}}{\Delta} e_2(p)$; $I_2(p) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} e_1(p) - \frac{\Delta_{23}}{\Delta} e_2(p)$;

$$I_3(p) = \frac{\Delta_{31}}{\Delta} e_1(p) - \frac{\Delta_{33}}{\Delta} e_2(p).$$

Последние равенства получены путем умножения обратной матрицы $Z(p)^{-1}$ на вектор внешних воздействий $e(p)$ по правилу «строка на столбец».

Учитывая правила получения обратной матрицы $Z(p)^{-1}$ и последний пример, в общем случае ток в j -ом контуре может быть получен путем умножения j -й строки матрицы $Z(p)^{-1}$ на вектор внешних воздействий, т.е.

$$I_j(p) = \sum_{n=1}^{p-q+1} \frac{\Delta_{jn}}{\Delta} e_n(p), \quad [j = \overline{1, (p-q+1)}] \quad (2.44)$$

Методом узловых напряжений определяются напряжения в узлах электрической схемы относительно базисного (опорного) узла. Эти напряжения именуется узловыми напряжениями. За положительное направление узлового напряжения принимается направление от узла n к базисному. Число уравнений, составленных для цепи этим методом, составляет $q - 1$, где q — число узлов в схеме. Этот метод выгодно применять по сравнению с методом контурных токов в том случае, когда схема имеет мало узлов.

Метод узловых потенциалов базируется на 1-м законе Кирхгофа. Поэтому при составлении уравнений цепи этим методом обычно элементы цепи характеризуют проводимостями, а внешние воздействия — генераторами тока. В общем случае цепь, содержащая q узлов, описывается уравнением

$$Y(p)U(p) = I(p), \quad (2.45)$$

где $U(p)$ — вектор узловых напряжений, $I(p)$ — вектор задающих токов, $Y(p)$ — матрица проводимостей цепи, равные

$$U(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ \dots \\ U_{q-1}(p) \end{bmatrix}; \quad I(p) = \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ \dots \\ I_{q-1}(p) \end{bmatrix};$$

$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_{11}(p) & Y_{12}(p) & \dots & Y_{1,(q-1)}(p) \\ Y_{21}(p) & Y_{22}(p) & \dots & Y_{2,(q-1)}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{(q-1),1}(p) & Y_{(q-1),2}(p) & \dots & Y_{(q-1),(q-1)}(p) \end{bmatrix}.$$

В матрице $Y(p)$ элементы $Y_{11}(p), Y_{22}(p), \dots, Y_{(q-1),(q-1)}(p)$ называются собственными проводимостями узлов 1, 2, ..., $q-1$, а элементы $Y_{ik}(p)$ ($i \neq k$) — взаимными проводимостями узлов i и k .

Уравнение (2.45) может быть решено либо обратной матрицей, либо методом Крамера, описанными выше.

Пример 2.13 (рис. 2.18)

В качестве базисного примем узел 3. Схема имеет три узла, следовательно число независимых уравнений $q-1=2$.

Собственные проводимости узлов $Y_{11}(p) = Y_1(p) + Y_3(p)$;

$$Y_{22}(p) = Y_3(p) + Y_2(p).$$

Взаимные проводимости узлов 1 и 2 $Y_{21}(p) = Y_3(p) + Y_2(p)$.

Следовательно, уравнение (2.45) будет

$$Y_{11}(p)U_1(p) + Y_{12}(p)U_2(p) = I_1(p);$$

$$Y_{21}(p)U_1(p) + Y_{22}(p)U_2(p) = I_2(p).$$

Решение последней системы уравнений имеет вид:

$$U_1(p) = \frac{Y_{22}(p)}{\Delta} I_1(p) - \frac{Y_{12}(p)}{\Delta} I_2(p);$$

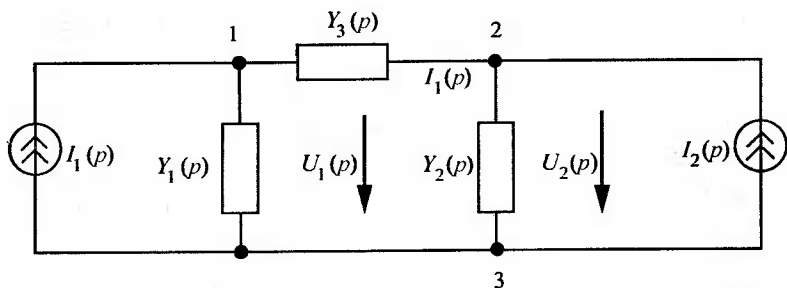


Рис. 2.18

$$U_2(p) = -\frac{Y_{21}(p)}{\Delta} I_1(p) + \frac{Y_{11}(p)}{\Delta} I_2(p).$$

Используя методы контурных токов или узловых напряжений, можно найти характеристики цепи: комплексный коэффициент передачи, переходную и импульсную характеристики.

Если используется метод контурных токов, то для расчета комплексного коэффициента передачи входное воздействие полагают гармоническим и $e_1(p) = \dot{E}_1$ — комплексная амплитуда гармонического воздействия, $Z_{ik}(p) = Z_{ik}(j\omega)$ (остальные компоненты вектора $e(p)$ равны нулю). В результате решения уравнения (2.42) находят контурные токи, а по ним — выходное напряжение цепи $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$. Тогда

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{E}_1}.$$

Для расчета переходной характеристики цепи полагают $e_1(p) = \frac{1}{p}$ — изображение единичного скачка (остальные компоненты вектора $e(p)$ равны нулю). В результате решения уравнения (2.42) находятся изображения контурных токов цепи. Выходное напряжение цепи $U_{\text{ВЫХ}}(p) = a(p) = I_j(p)Z_{\text{ВЫХ}}(p)$, где $I_j(p)$ — контурный ток, определяющий выходное напряжение, $Z_{\text{ВЫХ}}(p)$ — операторное сопротивление, определяющее выходное напряжение. Обратное преобразование Лапласа от $a(p)$ дает переходную характеристику цепи.

Импульсная характеристика цепи находится аналогично переходной,

только вместо $e_1(p) = \frac{1}{p}$ надо подставить $e_1(p) = 1$ (изображение δ -функции). Кроме того, импульсная характеристика цепи может быть найдена обратным преобразованием Фурье от комплексного коэффициента передачи $K(j\omega)$.

Если используется метод узловых напряжений, то для расчета комплексного коэффициента передачи по току входной ток $i_1(p) = I_1$ — комплексная амплитуда тока внешнего гармонического воздействия с частотой ω (остальные компоненты вектора $I(p)$ равны нулю), $Y_{ik}(p) = Y_{ik}(j\omega)$. В результате решения уравнения (2.45) находят узловые напряжения. Выходной ток $\dot{I}_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_{\text{ВЫХ}} Y_{\text{ВЫХ}}$, где $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$ — напряжение выходного узла, $Y_{\text{ВЫХ}}$ проводимость элемента, с которого снимается $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$. Тогда $K(j\omega) = \frac{\dot{I}_{\text{ВЫХ}}}{I_1}$.

Переходная характеристика цепи находится следующим образом:

полагаем $i_1(p) = \frac{1}{p}$ (остальные компоненты вектора $I(p)$ равны нулю).

В результате решения уравнения (2.45) находят изображения узловых напряжений. Тогда выходное напряжение $\dot{U}_{\text{ВЫХ}}$ дает переходное сопротивление цепи. Чтобы найти переходную передаточную характеристику (по току), надо определить $\dot{I}_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_{\text{ВЫХ}} Y_{\text{ВЫХ}}$, где $Y_{\text{ВЫХ}}(p)$ — проводимость выходного элемента цепи. Обратное преобразование Лапласа от $I_{\text{ВЫХ}}(p)$ дает переходную характеристику цепи.

Импульсная характеристика цепи может быть найдена аналогично переходной при $i_1(p) = 1$, либо обратным преобразованием Фурье от комплексного коэффициента передачи.

Изложенные выше методы контурных токов или узловых напряжений используются тогда, когда надо определить реакцию всех (или многих) ветвей схемы на входные воздействия. В том случае, когда требуется найти реакцию только одной или небольшого количества ветвей, то сократить трудоемкость вычислений помогают основные теоремы теории цепей: теоремы взаимности, компенсации и об эквивалентном источнике.

2.4.2. Метод сигнальных графов

Направленным или сигнальным графом называется графически изображенная связь между причиной и следствием. С точки зрения теории цепей он представляет собой наглядное графическое изображение системы уравнений, описывающих электрическую цепь. Узлы (вершины) такого графа не узловы точки схемы, а неизвестные величины, входящие в систему уравнений, описывающей цепь (токи и напряжения ветвей, контурные токи, узловы напряжения), а также величины, характеризующие внешние воздействия (токи независимых источников тока, ЭДС независимых источников напряжения). Ветви сигнального графа отображают причинно-следственные связи между величинами, соответствующими отдельным узлам. Каждой ветви графа приписывается определенное направление, указываемое стрелкой, и проставляется весовой коэффициент, который называется передачей ветви. Узлы графа обозначаются теми же буквами, которыми обозначаются величины, им соответствующие. Под коэффициентом передачи понимается отношение выходной величины к входной.

Если ветвь с передачей a направлена от узла 1 к узлу 2 (рис. 2.19, a), то

$$x_2 = ax_1. \quad (2.46)$$

Из уравнения (2.46) найдем $x_1 = \frac{1}{a}x_2$. (2.47)

Сигнальный граф, построенный по уравнению (2.47), приведен на рис. 2.19, b . Как видно, от сигнального графа рис. 2.19, a он отличается величиной и направлением, следовательно, вид сигнального графа зависит от того, какая из величин является причиной, а какая следствием. Если в узле x_k сходятся несколько ветвей (рис. 2.20, a), то сигнал в узле x_k будет складываться из сигналов, подходящих к узлу, т.е.

$$x_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4. \quad (2.48)$$

При этом передача отходящего узла (x_5) не учитывается. Здесь $a_{k1} = x_k/x_1$ — передача от узла x_1 к x_k ; $a_{k2} = x_k/x_2$ — передача от узла x_2 к x_k и т.д. Если x_k и x_j ($j = 1, 4$) токи или напряжения (одновременно), то a_{kj} ($j = 1, 4$) — безразмерные величины. Если x_k — ток, а x_j ($j = 1, 4$) — напряжения, то a_{kj} — проводимость и, наоборот, если x_k — напряжение, а x_j — ток, то a_{kj} — сопротивление.

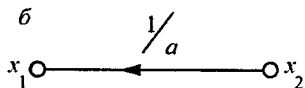
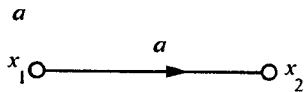


Рис. 2.19

В число ветвей, направленных к узлу x_k , входят и ветви, начинающиеся и заканчивающиеся в одном узле (рис. 2.20, б). Такие ветви называются петлями.

Для графа, приведенного на рис. 2.20, б, сигнал в узле 4 будет:

$$x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

Как видно из (2.49), наличие петли приводит к появлению переменной, соответствующей узлу, к которому подключена петля, не только в левой, но и в правой части уравнения.

Истоком называется узел сигнального графа, от которого направлены все примыкающие к нему ветви.

Узел сигнального графа, к которому направлены все примыкающие к нему ветви, называется стоком.

Узлы, которые имеют как входящие в них, так и исходящие из них ветви, называются смешанными. Так в графе (см. рис. 2.19, а) x_1 — исток, x_2 — сток; в графе (см. рис. 2.20, а) узлы x_1, x_2, x_3, x_4 — истоки, x_5 — сток, x_k — смешанный.

Если сигнал, соответствующий некоторому узлу сигнального графа, не выражается через сигналы других узлов, то такой узел называется

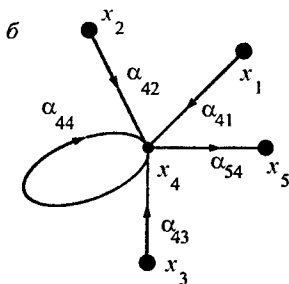
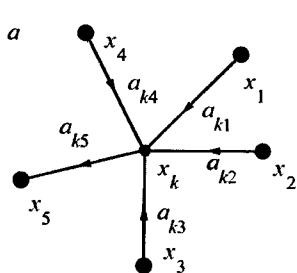


Рис. 2.20

ся независимым. Если сигнал, соответствующий какому-либо узлу графа, выражается через сигналы других узлов, то такой узел называется зависимым. Независимыми узлами являются истоки, зависимыми — стоки и смешанные узлы.

Пример 2.14

Для сигнального графа (рис. 2.21) составить систему уравнений. Получим

$$x_3 = a_1 x_1 + a_8 x_4; \quad x_4 = a_{10} x_2 + a_9 x_3 + a_{12} x_6; \quad x_5 = a_2 x_3 + a_3 x_5;$$

$$x_6 = a_{11} x_4 + a_{13} x_6; \quad x_7 = a_4 x_5 + a_5 x_9; \quad x_8 = a_{14} x_6 + a_7 x_7;$$

$$x_9 = a_6 x_7 + a_{16} x_{10}; \quad x_{10} = a_{15} x_8; \quad x_{11} = a_{17} x_{10}.$$

Непрерывная последовательность одинаково направленных ветвей, связывающая узлы x_j и x_k и проходящая через каждый узел графа не более одного раза, называется путем. Произведение передач ветвей, образующих путь между узлами x_j и x_k , называется передачей пути P_{jk} . Так в графе (рис. 2.21) между узлами x_1 и x_{11} имеются следующие пути: $a_1 a_2 a_4 a_7 a_{15} a_{17}$; $a_1 a_9 a_{11} a_{14} a_{15} a_{17}$; между узлами x_2 и x_{11} имеются следующие пути: $a_{10} a_{11} a_{14} a_{15} a_{17}$ и $a_{10} a_8 a_2 a_4 a_7 a_{15} a_{17}$. Для определения передачи каждого из путей надо перемножить передачи ветвей, образующих каждый из путей.

Замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одном и том же узле, называется контуром. Петля является также контуром. Произведение передач всех ветвей, входящих в контур, называется передачей контура L_j . Так, в графе (см. рис. 2.21) имеются следующие контуры: $a_8 a_9$; $a_{11} a_{12}$; a_3 ; a_{13} ; $a_5 a_6$; $a_5 a_7 a_{15} a_{16}$.

Два контура или контур и путь, имеющие общие узлы, называются соприкасающимися. Если же они не имеют общих узлов, то они не являются соприкасающимися. Например, в графе контуры $a_8 a_9$ и $a_{12} a_{11}$ соприкасающиеся, так как имеют общий узел x_4 ; контур a_3 и путь $a_1 a_2 a_4 a_7 a_{15} a_{17}$ соприкасаются, так как имеют общий узел x_5 .

Выше было показано, как по сигнальному графу можно построить соответствующую ему систему уравнений. Однако может быть решена и обратная задача: построение графа по системе уравнений, либо по электрической цепи.

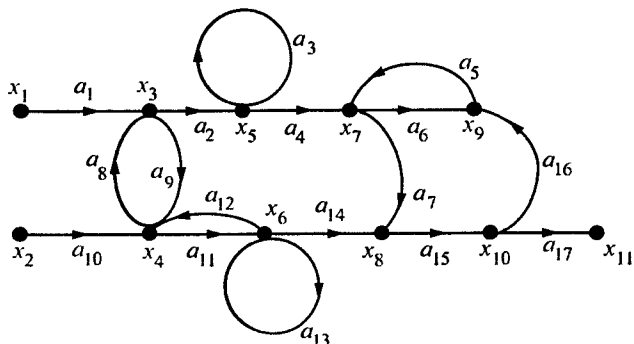


Рис. 2.21

Для построения сигнального графа по системе уравнений последнюю надо привести к причинно-следственной форме, т.е. из системы уравнений каждая из неизвестных должна быть выражена через остальные переменные и свободные члены уравнений. Поскольку это можно сделать различными способами, то каждому из этих способов будет соответствовать свой сигнальный граф. Но так как эти графы соответствуют одной и той же системе уравнений, то они называются равносильными, т.е. приводят к одному результату. Приведем примеры построения сигнального графа по системе уравнений и по электрической цепи.

Пример 2.15

Построим сигнальный граф, соответствующий системе уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_2;$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_3.$$

Приведем данную систему уравнений к причинно-следственной форме. Из каждого из уравнений выразим по одному неизвестному

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 + \frac{b_1}{a_{11}};$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \frac{a_{24}}{a_{22}}x_4;$$

$$x_3 = -\frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 - \frac{a_{34}}{a_{33}}x_4 + \frac{b_2}{a_{33}};$$

$$x_4 = -\frac{a_{41}}{a_{44}}x_1 - \frac{a_{42}}{a_{44}}x_2 - \frac{a_{43}}{a_{44}}x_3 + \frac{b_3}{a_{44}}.$$

Число вершин графа равно числу неизвестных и числу ненулевых свободных членов. Поэтому искомый граф будет содержать 7 вершин (узлов). Он приведен на рис. 2.22. Если исходную систему уравнений разрешить относительно неизвестных другим способом, например, так:

$$x_1 = -\frac{a_{42}}{a_{41}}x_2 - \frac{a_{43}}{a_{41}}x_3 - \frac{a_{44}}{a_{41}}x_4 + \frac{b_3}{a_{41}};$$

$$x_2 = -\frac{a_{31}}{a_{32}}x_1 - \frac{a_{33}}{a_{32}}x_3 - \frac{a_{34}}{a_{32}}x_4 + \frac{b_2}{a_{32}};$$

$$x_3 = -\frac{a_{21}}{a_{23}}x_1 - \frac{a_{22}}{a_{23}}x_2 - \frac{a_{24}}{a_{23}}x_4;$$

$$x_4 = -\frac{a_{11}}{a_{14}}x_1 - \frac{a_{12}}{a_{14}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{14}}x_3 + \frac{b_1}{a_{14}},$$

то получим граф, приведенный на рис. 2.23. Сравнение графов, приведенных на рис. 2.22 и 2.23 показывает, что они разные, но так как графы соответствуют одной и той же системе уравнений, то они являются равносильными.

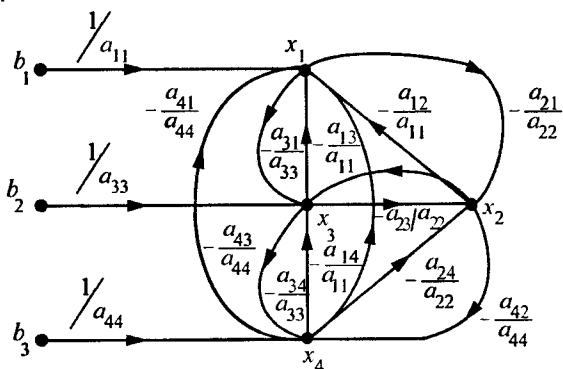


Рис. 2.22

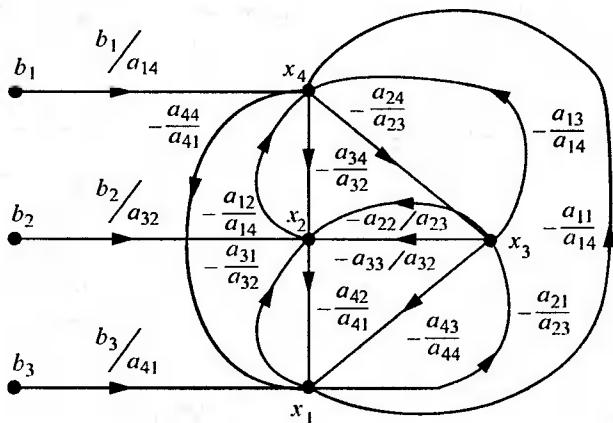


Рис. 2.23

Пример 2.16

Составить сигнальный граф для цепи, приведенной на рис. 2.24.

Если использовать для описания схемы метод контурных токов, то узлами сигнального графа будут контурные токи I_{k1}, I_{k2}, I_{k3} . Для этой схемы система уравнений, составленная для комплексных амплитуд, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{k1}(Z_0 + Z_1) - \dot{I}_{k2}Z_1 &= \dot{E}; \\ -\dot{I}_{k1}Z_1 + \dot{I}_{k2}(Z_1 + Z_2 + Z_3) - \dot{I}_{k3}Z_3 &= 0; \\ -\dot{I}_{k2}Z_3 + \dot{I}_{k3}(Z_3 + Z_4 + Z_5) &= 0. \end{aligned}$$

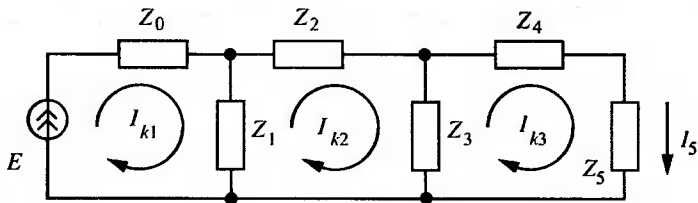


Рис. 2.24.

Приведем эти уравнения к причинно-следственному виду:

$$\dot{I}_{k1} = \frac{\dot{E}}{Z_0 + Z_1} + \dot{I}_{k2} \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1} = a\dot{E} + \dot{I}_{k2}b;$$

$$\dot{I}_{k2} = \dot{I}_{k1} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} + -\dot{I}_{k3} \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = c\dot{I}_{k1} + d\dot{I}_{k3};$$

$$\dot{I}_{k3} = \dot{I}_{k2} \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5} = e\dot{I}_{k2},$$

где $a = \frac{1}{Z_0 + Z_1}$; $b = \frac{Z_1}{Z_0 + Z_1}$; $c = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$;

$$d = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad e = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4 + Z_5}.$$

Сигнальный граф, соответствующий схеме рис. 2.24, приведен на рис 2.25.

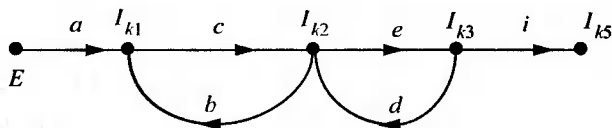


Рис. 2.25

Если в схеме имеется несколько источников, то используется принцип наложения и находится передача по каждому источнику.

Вычисление передачи по сигнальному графу осуществляется двумя путями:

- упрощением графа по определенным правилам до получения конечного графа, не содержащего смешанных узлов и имеющего в своем составе только истоки и стоки;

- применением формулы Мезона.

Рассмотрим правила упрощения графа.

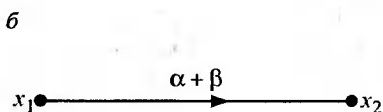
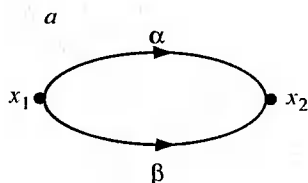


Рис. 2.26

1. Объединение параллельных ветвей (рис. 2.26).

В соответствии с рис. 2.26, $x_2 = (\alpha + \beta)x_1$. Поэтому параллельные ветви α и β можно заменить одной ветвью с передачей $(\alpha + \beta)$ — рис. 2.26, б. Итак, две параллельные ветви α и β могут быть заменены одной ветвью с передачей $(\alpha + \beta)$.

Правило объединения параллельных ветвей может быть распространено на любое число параллельных ветвей, в частности, при помощи этого правила можно объединить петли, подключенные к одному узлу (рис. 2.27, а и б).

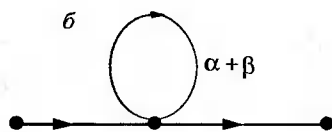
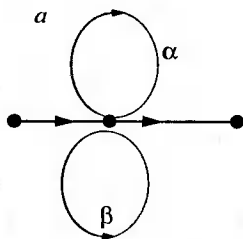


Рис. 2.27

2. Объединение последовательных, одинаково направленных ветвей (рис. 2.28).

По графу (рис. 2.28, а) найдем $x_2 = \alpha x_1$; $x_3 = \beta x_2$.

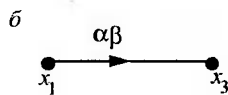
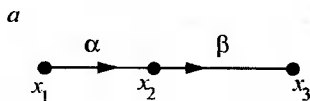


Рис. 2.28

Подставляя первое уравнение во второе, получим $x_3 = \alpha\beta x_1$. Следовательно, две последовательные одинаково направленные ветви с передачами α и β могут быть заменены одной ветвью с передачей $\alpha\beta$ (рис. 2.28, б).

3. Устранение простой узловой точки, т.е. точки, в которой сходятся несколько входящих или выходящих ветвей.

На рис. 2.29, а приведен граф, в узел x_4 которого входит одна ветвь, а выходят две ветви. По графу найдем $x_4 = \alpha x_1$; $x_2 = \beta x_4$; $x_3 = \gamma x_4$. Исключая из этих уравнений x_4 , получим $x_2 = \alpha\beta x_1$; $x_3 = \alpha\gamma x_1$.

По полученным уравнениям построен граф (рис. 2.29, б).

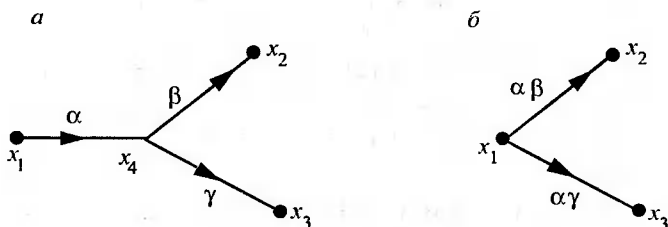


Рис. 2.29

На рис. 2.30, а приведен граф, в узел x_4 которого входят две ветви, а выходит одна ветвь. По графу имеем $x_4 = \beta x_1 + \gamma x_2$; $x_3 = \alpha x_4$. Исключая x_4 , получим $x_3 = \alpha\beta x_1 + \alpha\gamma x_2$. Этому уравнению соответствует граф, приведенный на рис. 2.30, б. Таким образом, простая узловая точка может быть устранена.

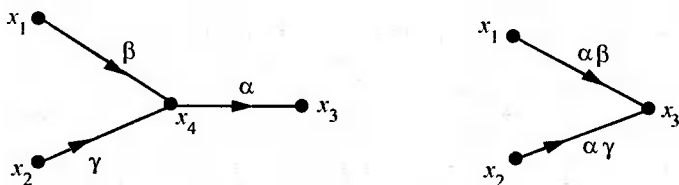


Рис. 2.30

4. Устранение контура на пути.

Изображенному на рис. 2.31, *a* графу соответствуют уравнения $x_2 = \alpha x_1 + \gamma x_3$; $x_3 = \beta x_2$. Подставив первое уравнение во второе, получим $x_3 = \beta \alpha x_1 + \beta \gamma x_3$. Этому уравнению соответствует граф, приведенный на рис. 2.31, *б*.

5. Устранение петли.

В уравнении $x_3 = \beta \alpha x_1 + \beta \gamma x_3$ приведем подобные члены, получим

$$x_3(1 - \beta\gamma) = \beta\alpha x_1 \text{ или } x_3 = \frac{\beta\alpha}{(1 - \beta\gamma)} x_1.$$

Этому уравнению соответствует граф, приведенный на рис. 2.31, *в*. Таким образом, устранение петли приводит к конечному графу

с передачей $\frac{\alpha\beta}{(1 - \beta\gamma)}$.

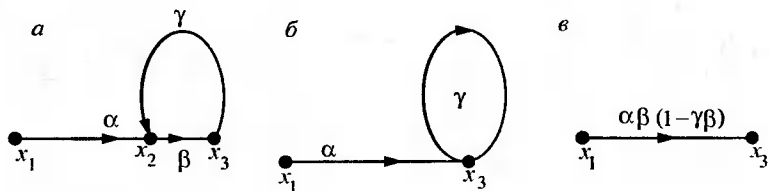


Рис. 2.31

Пример 2.17

Упростить граф, приведенный на рис. 2.32, *a*. Этому графу соответствует система уравнений $x_4 = \alpha x_1 + \beta x_2 + \lambda x_4$; $x_3 = x_4 \delta$. Подставив x_4 во второе уравнение, приведя подобные члены, получим

$$x_3 = \frac{\delta\alpha}{1 - \lambda} x_1 + \frac{\beta\delta}{1 - \lambda} x_2.$$

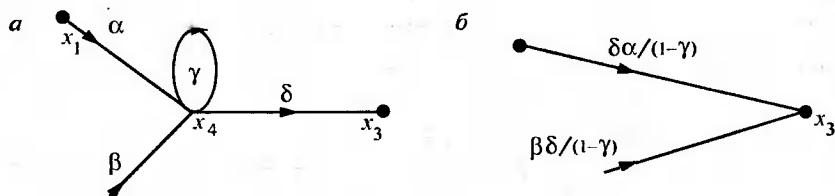


Рис. 2.32

Этому уравнению соответствует граф, приведенный на рис. 2.32, б. Как видно, устранение петли изменяет передачи ветвей α и β в $1/(1-\gamma)$ раз, а затем устраняется узловая точка x_4 , изменяя при этом передачи ветвей (умножение на δ).

6. Инверсия (изменение направления) ветви.

Графу, изображенному на рис. 2.33, а соответствует система уравнений $x_4 = \alpha x_1 + \beta x_2$; $x_3 = \gamma x_4$, где x_1 и x_2 — причины, а x_4 — следствие. Изменим причинно-следственную связь: пусть будут x_2 и x_3 причинами, а x_1 — следствием, т.е.

$$x_1 = \frac{1}{\alpha} x_4 - \frac{\beta}{\alpha} x_2; \quad x_3 = \gamma x_4.$$

Этому уравнению соответствует граф, приведенный на рис. 2.33, б. Как видно из рисунка, при изменении направления одной из ветвей изменяются направления ветвей, входящих в тот же узел, что и изменяемая ветвь. Передачи каждой из этих ветвей делятся на передачу инвертируемой ветви.

7. Расщепление узла.

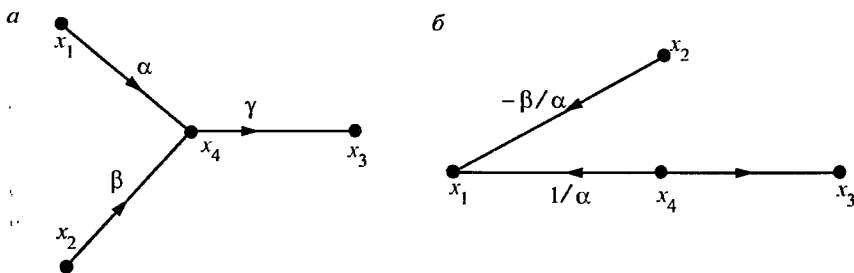


Рис. 2.33

Сигнал в каждом узле графа определяется передачами ветвей, входящих в этот узел. Исходящие ветви на сигнал в узле не оказывают влияния. Поэтому каждый узел, в который входят ветви и из которого выходят ветви рис. 2.34, а, может быть расщеплен на два узла: один из них содержит только входящие ветви рис. 2.34, б, второй — только исходящие (рис. 2.34, в).

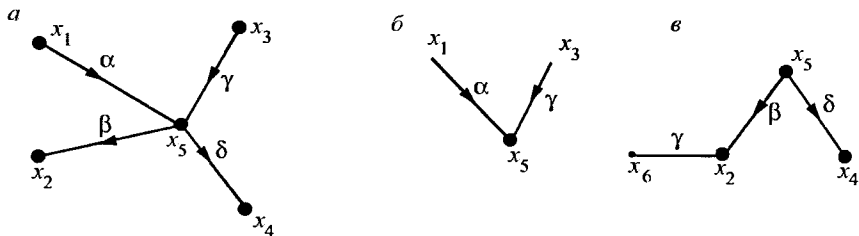


Рис. 2.34

8. Удлинение узла.

Иногда при преобразовании сигнальных графов возникает необходимость во введении дополнительного узла, сигнал в котором совпадает с сигналом одного из узлов. В этом случае вводимый вновь узел соединяется с удлиняемым узлом ветвью с передачей, равной единице. Например, на рис. 2.34, в проведено удлинение узла x_2 : введен дополнительный узел x_6 , соединенный с узлом x_2 ветвью с передачей, равной единице.

Применяя изложенные правила упрощения сигнального графа, приводят последний к конечному, т.е. такому, который содержит только исток и не подлежит дальнейшему упрощению. Тем самым находится передаточная характеристика цепи, которой соответствует упрощенный граф.

Пример 2.18

Упрощая граф (см. рис. 2.25), найдем передаточную характеристику цепи (см. рис. 2.24).

Схема на рис. 2.24 описывает система уравнений

$$\dot{I}_{k1} = a \dot{E} + \dot{I}_{k2} b; \quad \dot{I}_{k2} = c \dot{I}_{k1} + d \dot{I}_{k3}; \quad \dot{I}_{k3} = e \dot{I}_{k2}.$$

Подставляя 3-е уравнение во 2-е, получим $\dot{I}_{k2} = \frac{c}{1-de} \dot{I}_{k1}$.

Системе уравнений $\dot{I}_{k1} = a \dot{E} + \dot{I}_{k2} b$; $\dot{I}_{k2} = \frac{c}{1-de} \dot{I}_{k1}$ соответствует граф, приведенный на рис. 2.35, а. Устраняя контур в графе, получим граф (рис. 2.35, б), который может быть заменен конечным (рис. 2.35, в) с передачей, указанной на ветви.

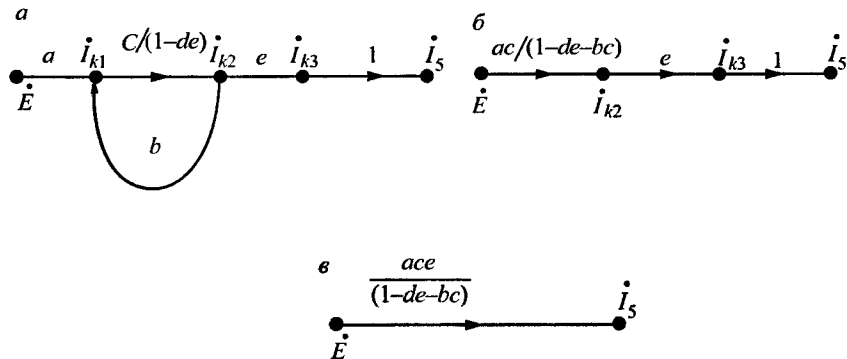


Рис. 2.35

Итак, в результате преобразования сигнального графа схемы (см. рис. 2.24) получено выражение для передаточной проводимости цепи (передача конечного графа — рис. 2.35, в).

Для расчета передаточной характеристики по напряжению надо найденную передаточную проводимость умножить на Z_5 .

Иногда приведение исходного графа к конечному может оказаться трудоемким. Если требуется найти передачи нескольких путей, то преобразования графа требуется повторить несколько раз. В этом случае для нахождения комплексных частотных характеристик или неизвестных токов и напряжений применяется формула Мезона, которая позволяет вычислить передачи ветвей конечного графа непосредственно по исходному графу цепи, не прибегая к его упрощению. Формула Мезона имеет вид

$$G_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^n P_{ji}^{(k)} \Delta_k}{\Delta}, \quad (2.46)$$

где Δ — определитель сигнального графа, численно равный определителю исходной системы уравнений; $P_{ji}^{(k)}$ — передача k -го пути от истока \dot{X}_i к стоку \dot{X}_j ; Δ_k — алгебраическое дополнение k -го пути. Суммирование в (2.46) производится по всем возможным путям из узла \dot{X}_i в узел \dot{X}_j .

Определитель сигнального графа вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,m} L_i L_j L_m + \dots, \quad (2.47)$$

где $\sum_i L_i$ — сумма передач всех контуров сигнального графа;

$\sum_{i,j} L_i L_j$ — сумма произведений передач всех возможных пар несоприкасающихся контуров;

$\sum_{i,j,m} L_i L_j L_m$ — сумма произведений передач всех несоприкасающихся троек контуров и т.д.

Алгебраическое дополнение k -го пути также вычисляется по формуле (2.47), но при этом учитываются только контуры, не касающиеся пути $P_{ji}^{(k)}$.

Пример 2.19

Для схемы на рис. 2.24 найдем передаточную проводимость по графу цепи (см. рис. 2.25), используя формулу Мезона. Граф имеет два контура bc и de с передачей $L_1 = bc$ и $L_2 = de$. Оба контура соприкасаются в узле I_{k2} . Поэтому определитель системы $\Delta = 1 - bc - de$. Граф имеет один путь с передачей $P_1 = ace$. Так как граф не имеет несоприкасающихся контуров, то алгебраическое дополнение $\Delta_1 = 1$. Подставляя полученные величины в формулу Мезона (2.46), получим передаточную проводимость (от входа к узлу I_5) (см. рис. 2.35, в)

$$G = \frac{ace}{1 - bc - de}.$$

Сравнение полученного результата с результатами, полученными в примере 2.18 путем упрощения графа, показывает их полную идентичность.

2.5. Моделирование электрических цепей на ЭВМ

Расчет сложных разветвленных линейных цепей представляет весьма сложную задачу, решить которую ручными способами зачастую не представляется возможным. Поэтому в настоящее время все чаще расчет таких цепей выполняется при помощи ЭВМ.

Как видно из рассмотренных выше методов расчета и приведенных примеров, расчет линейной электрической цепи состоит из следующих этапов:

1. Переход от электрической схемы к модели.
2. Составление уравнений.
3. Решение уравнений и представление результатов.

На первом этапе реальные элементы схемы (резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, диоды, транзисторы и т.д.) заменяются своими моделями (эквивалентными схемами). В результате получается модель всей схемы, содержащая только идеальные элементы (сопротивления, емкости, индуктивности, идеальные источники тока или напряжения).

На втором этапе для выбранных переменных (напряжения и токи ветвей, контурные токи, узловые потенциалы) составляется система уравнений, описывающая поведение электрической цепи. При этом могут использоваться законы Кирхгофа для узлов и ветвей, методы контурных токов или узловых потенциалов.

На третьем этапе составленная система уравнений решается одним из известных методов решения линейных уравнений (метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса или LU -разложения), полученные результаты представляются либо в виде таблиц, либо в виде графиков.

Наибольший выигрыш от применения ЭВМ для расчета электрических цепей (сокращение времени и трудоемкости расчета, повышение точности и надежности получаемых результатов) получается в том случае, когда ЭВМ применяется на всех этапах расчета: от получения электрической схемы до решения уравнений и представления результатов.

Получение электрической схемы (рисование) и переход от нее к модели особых трудностей не вызывает: на место каждого реального элемента ЭВМ должна подставить модель каждого элемента и запомнить эквивалентную схему всего устройства — электрическую цепь. Полное описание модели схемы должно содержать следующую информацию: 1) способ соединения ветвей; 2) опорные направления для токов ветвей и напряжений; 3) характеристики ветвей.

Информация по первым двум пунктам может быть получена из топологии схем, которая рассматривает только такие свойства сложных

схем, которые связаны с соединением ветвей. С этой целью вводится понятие направленного графа, соответствующего данной схеме, и выполненного в соответствии со следующими правилами: каждый двухполюсник схемы заменяется линией, которая соединяет узлы, между которыми был подключен двухполюсник. На этой линии, называемой ветвью графа, наносится стрелка в том направлении, в котором принимается положительное направление тока через двухполюсник. Эта стрелка служит также для обозначения опорного направления для напряжения ветви: стрелка направлена от вывода с положительным потенциалом.

На рис. 2.36, *а* приведена схема, а на рис. 2.36, *б* — соответствующий ей граф. Такой граф, на котором показаны опорные направления для токов ветвей и напряжений, называется направленным или ориентированным. Если опорные направления не нужны, то стрелки на ветвях графа могут быть опущены.

Тогда граф, соответствующий схеме рис. 2.36, *а*, будет иметь вид, приведенный на рис. 2.36, *в*. Как видно, такой граф содержит информацию только о способе соединения ветви. Этот граф называется ненаправленным, или неориентированным.

В отличие от сигнальных графов, описанных в п. 2.4, графы, приведенные на рис. 2.36, *б*, *в*, соответствуют электрической схеме (рис. 2.36, *а*). Узлы графа (1, 2, 3, 4) соответствуют узлам схемы, а ветви (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*) — ветвям схемы (Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 , *r*, *e*). Такие графы будем называть графами схемы. Дадим некоторые определения.

Набор ветвей a_1, a_2, \dots, a_n в графе является путем между двумя узлами V_j и V_k , если этот набор удовлетворяет следующим требованиям: 1) следующие одна за другой ветви a_i и a_{i+1} всегда имеют общие концы; 2) ни один из узлов графа не является концом более, чем двух ветвей набора; 3) узлы V_j и V_k являются концами только одной ветви набора. Например, в графе рис. 2.36, *б* набор *aedf* не является путем между узлами 1 и 4, так как узел 1 является концом 3-х ветвей набора; наборы *deb*, *ab*, *dc* — пути между узлами 1 и 4.

Ненаправленный граф (например, рис. 2.36, *в*) называется связным, если имеется путь между любыми узлами графа. Схема и соответствующий ей направленный граф называются связными, если соответствующий ненаправленный граф является связным. Подграф G_s графа G_n

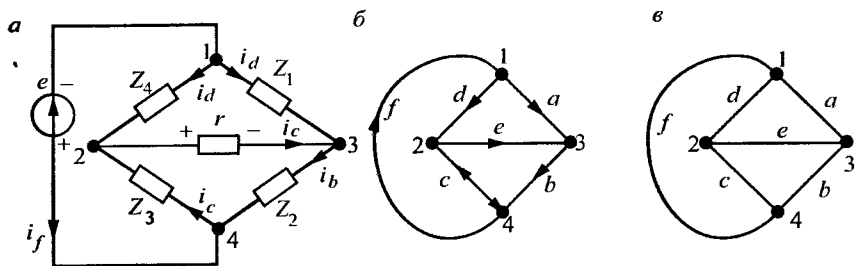


Рис. 2.36

называется контуром, если подграф является связным и любой узел подграфа имеет две ветви графа, сходящиеся в нем. Например, в графе рис. 2.36, б подграф abf является контуром, подграф $acebd$ не является контуром, так как не выполняется второе условие.

Подграф G_s графа G_n называется деревом, если подграф связан, содержит все узлы графа G_n и не имеет контуров. Например, из графа (рис. 2.36, б) можно образовать подграфы (рис. 2.37, а, б, в), каждый из которых связан, содержит все узлы и не имеет контуров. Следовательно, каждый из этих графов является деревом графа рис. 2.36, б.

Набор ветвей связного графа называется сечением, если устранение этого набора ветвей (но не их окончаний) приводит к графу, который не является связным, а после устранения набора ветвей восстановление любой ветви из этого набора вновь приводит к связному графу. Например, в графе рис. 2.36, б устраним набор ветвей d, e, c . В результате получим граф (рис. 2.38, а), который очевидно не связан, так как нет пути к узлу 2 из узлов 1, 3, 4. Восстановление любой ветви из набора, например ветви e , делает граф связным (рис. 2.38, б).

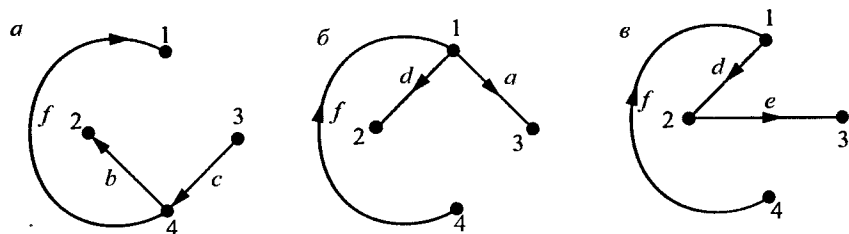


Рис. 2.37

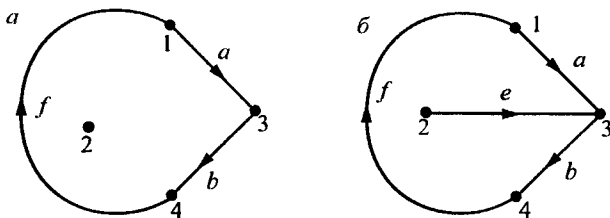


Рис. 2.38

Введенные понятия используются при анализе сложных разветвленных цепей; контуры являются подграфами, к которым применяется второй закон Кирхгофа для напряжений; сечения являются подграфами, к которым применяется первый закон Кирхгофа (для токов). Понятие дерева используется при формировании независимых уравнений цепи при помощи ЭВМ. Сами графы трудно поддаются формальному описанию, реализуемому на ЭВМ. Но с графами связаны топологические матрицы инцидентий, сечений и контуров, которые могут быть сформированы ЭВМ.

2.5.1. Топологические матрицы цепи

Для направленного графа с n узлами и b ветвями матрицей инцидентий является $n \times b$ матрица $A_a = [a_{ij}]$, в которой элемент $a_{ij} = 1$, если ветвь j принадлежит узлу i и стрелка направлена от узла i ; $a_{ij} = -1$, если ветвь j принадлежит узлу i и стрелка направлена к узлу i ; $a_{ij} = 0$, если ветвь j не соединяется с узлом i . Например, для направленного графа (см. рис. 2.36, б) матрица инцидентий имеет вид

		Ветви						
		a	b	c	d	e	f	
$A_a =$	у	1	$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$					
	з	2						
	л	3						
	ы	4						

Как видно из графа и полученной для него матрицы инцидентий A_a , каждая ветвь соединяется с двумя узлами, поэтому только два элемента

каждого столбца ненулевые, остальные равны нулю. Сумма элементов каждого столбца равна нулю. Поэтому любую из строк матрицы A_a можно исключить, не потеряв при этом информации о цепи, поскольку матрица всегда может быть восстановлена путем дополнения каждого столбца до нулевой суммы. Матрица A_a называется полной матрицей инциденций. Матрица, получившаяся из A_a исключением какой-либо строки называется редуцированной и обозначается A .

Обозначим через i вектор-столбец токов ветвей схемы, причем k -я строка вектора i будет соответствовать k -му столбцу матрицы A_a . Тогда систему уравнений по 1-му закону Кирхгофа для узлов схемы можно записать в виде матричного уравнения

$$A_a i = 0. \quad (2.48)$$

Например, это уравнение для графа (см. рис. 2.36, б) будет:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Однако система уравнений (2.48) не является линейно независимой: любое из уравнений системы является следствием остальных, т.е. оно может быть получено из остальных уравнений системы. При этом максимальное число линейно независимых уравнений системы, составленной по первому закону Кирхгофа, определяется редуцированной матрицей инциденций, т.е.

$$A i = 0. \quad (2.49)$$

Матрицу A можно представить в виде

$$A = [A^T : A_L], \quad (2.50)$$

где A^T соответствует дереву графа, а A_L — связям (хордам).

Например, если дерево графа (см. рис. 2.36, б) выбрано в виде подграфа, приведенного на рис. 2.37, а, то

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить компактную запись системы уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, вводится матрица контуров B_a . Она строится в координатах «ветви-контурь»: элемент b_{ij} матрицы B_a равен 1, если ветвь j входит в контур i и их направления совпадают; элемент $b_{ij} = -1$, если ветвь j входит в контур i и их направления противоположны; элемент матрицы B_a $b_{ij} = 0$, если ветвь j не входит в контур i .

Пример 2.20

На рис. 2.39, *a* приведен граф цепи (рис. 2.36, *a*), на нем выбраны контуры 1, 2, 3 и указаны направления этих контуров стрелками. Направления ветвей также указаны стрелками на самих ветвях. Матрица контуров

$$B_a = \begin{array}{c} \text{К} \\ \text{о} \\ \text{н} \\ \text{т} \\ \text{у} \\ \text{р} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{В е т в и} \\ a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если обозначить через V —вектор-столбец напряжений на ветвях графа, причем нумерация строк вектора V соответствует нумерации ветвей, то систему уравнений, составленных для схемы по второму закону Кирхгофа, можно записать в виде

$$B_a V = 0. \quad (2.51)$$

Например, для схемы рис. 2.36, *a* такая система уравнений имеет вид

$$B_a V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ V_e \\ V_f \end{bmatrix},$$

где $V_a, V_b, V_c, V_d, V_e, V_f$ напряжения на ветвях a, b, c, d, e, f соответственно.

Однако не все уравнения, входящие в систему (2.51), являются линейно независимыми. В теории цепей доказывается, что максимальное число линейно независимых уравнений в системе (2.51) равно

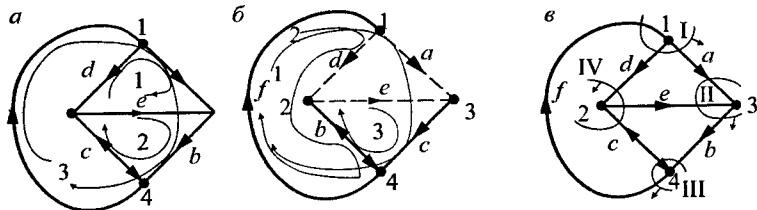


Рис. 2.39

$b - n + 1$, где b — число ветвей, n — число узлов цепи. Если в графе, соответствующем схеме, выбрано дерево, т.е. граф, содержащий все узлы и не имеющий контуров, то ветви, не вошедшие в дерево, образуют дополнение к дереву и называются хордами. Контур, образуемый некоторыми ветвями дерева и хордой и имеющий направление, совпадающее с направлением хорды, называется главным контуром. Поскольку граф, имеющий n узлов и b ветвей, имеет $b - n + 1$ хорд, то число главных контуров будет $b - n + 1$. Матрица B , построенная с использованием главных контуров, называется матрицей главных контуров, а система линейно независимых уравнений, полученных с использованием второго закона Кирхгофа, будет иметь вид

$$BV = 0. \quad (2.52)$$

Любая матрица главных контуров B может быть представлена в виде

$$B = [B^T : 1], \quad (2.53)$$

где матрица B^T соответствует ветвям дерева, а 1 — единичная матрица, соответствующая хордам.

Например, если выбрать дерево в соответствии с рис. 2.37, а, то граф схемы (см. рис. 2.36, а) с направлениями ветвей и главных контуров примет вид, приведенный на рис. 2.39, б, где сплошными линиями показаны ветви дерева, а пунктиром — хорды. Тогда матрица главных контуров будет иметь вид

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B^T : 1].$$

Как видно, матрица B^T соответствует ветвям графа, образующим дерево, а единичная матрица — ветвям дополнения (хордам). Граф

(рис. 2.39, б) имеет 6 ветвей и 4 узла, поэтому число линейно-независимых уравнений в системе (2.52) составляет 3, единичная матрица имеет размер 3×3 .

Топологическая матрица сечений является естественным обобщением первого закона Кирхгофа, который в общем виде гласит: алгебраическая сумма всех токов через сечение всегда равна нулю. Сечение разделяет граф на две части, причем границей является линия сечения. На рис. 2.39, в изображен граф цепи (см. рис. 2.36, а) с выбранными сечениями I, II, III, IV. На каждом сечении стрелкой обозначена ориентация сечения. Матрица сечения для направленного графа с b ветвями и n_c сечениями составляется следующим образом: элемент матрицы сечения $a_{ij} = 1$, если ветвь j находится в сечении i и их ориентации совпадают; $a_{ij} = -1$, если ветвь j находится в сечении i , но их ориентации противоположны; $a_{ij} = 0$, если ветвь j не находится в сечении i . Например, для графа (рис. 2.39, в) матрица сечений

$$D_a = \begin{array}{c} \text{С} \\ \text{е} \\ \text{ч} \\ \text{е} \\ \text{н} \\ \text{и} \\ \text{я} \end{array} \begin{array}{c} \text{В е т в и} \\ a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ \text{I} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Если вектор-столбец токов ветвей $i = [i_a \ i_b \ i_c \ i_d \ i_e \ i_f]^T$, где T — знак транспонирования, то система уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для цепи (рис. 2.36, а) будет $D_a i = 0$. И вообще для любой цепи, если найдена матрица сечений, система уравнений будет

$$D_a i = 0, \quad (2.54)$$

где i — вектор-столбец токов ветвей.

Система уравнений (2.54) избыточна, так как не все уравнения линейно независимы. Получить линейно независимую систему уравнений, а следовательно, и безизбыточную, можно с использованием дерева графа.

Сечение графа, выбранное таким образом, что в него входит ветвь дерева и некоторая часть хорд, называется главным сечением для этой

ветви дерева. Опорное направление сечения выбирается одинаковым с направлением ветви дерева. Для графа, имеющего n узлов, имеется $n - 1$ ветвей дерева. Матрица, составленная для $n - 1$ главных сечений, называется матрицей главных сечений. Например, для графа (рис. 2.40) матрица главных сечений

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2.40 ветви дерева графа изображены сплошной линией, хорды — пунктиром. Каждой ветви дерева соответствует свое сечение (I, II, III).

Используя матрицу главных сечений D , систему уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, можно записать

$$Di = 0, \quad (2.55)$$

Как видно по матрице D , она может быть разбита на две субматрицы

$$D = [1 \vdots D_L], \quad (2.56)$$

где 1 — единичная матрица $(n - 1) \times (n - 1)$, D_L — матрица, соответствующая хордам.

Единичная матрица показывает, какие ветви образуют дерево графа, а матрица D_L — какие ветви графа образуют дополнение.

В уравнении (2.52) матрицу главных контуров B представим в виде (2.53), а вектор напряжений ветвей V представим в виде

$$V = \begin{bmatrix} V_T \\ V_L \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

где V_T — вектор напряжений на ветвях дерева, а V_L — вектор напряжений на хордах.

Подставляя (2.53) и (2.57) в (2.52) и перемножая, получим

$$BV_L = \begin{bmatrix} B^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_T \\ \vdots \\ V_L \end{bmatrix} = B^T V_T + V_L = 0; \text{ откуда получаем}$$

$$V_L = -B^T V_T. \quad (2.58)$$

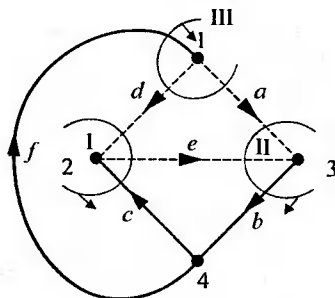


Рис. 2.40

Уравнение (2.58) позволяет найти напряжения на хордах графа через напряжения на ветвях дерева V_T .

В уравнении (2.61) матрицу главных сечений D представим в виде (2.56), а вектор токов ветвей i в виде

$$i = [i_T \ ; \ i_L]^T, \quad (2.59)$$

где i_T — вектор токов ветвей дерева, а i_L — вектор токов хорд.

Подставляя (2.56) и (2.59) в (2.55) и перемножая, получим

$$Di = [1 \ ; \ D_L] \begin{bmatrix} i_T \\ \dots \\ i_L \end{bmatrix} = i_T + D_L i_L = 0. \text{ Отсюда получаем}$$

$$i_T = -D_L i_L. \quad (2.60)$$

Уравнение (2.60) позволяет найти токи ветвей дерева i_T через токи хорд i_L .

Между матрицами главных контуров B и главных сечений D имеют место соотношения ортогональности

$$BD^T = 0 \text{ или } DB^T = 0, \quad (2.61)$$

где D^T, B^T — транспонированные матрицы главных сечений и главных контуров.

Учитывая выражения (2.53) и (2.62), получим

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ D_L^T \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} B_T^T \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя (2.59), (2.56) и последние выражения в (2.61), получим

$$B_T = -D_L^T, \quad D_L = -B_T^T. \quad (2.62)$$

Полученные соотношения позволяют по матрице главных контуров B получить матрицу главных сечений D и, наоборот, по матрице главных сечений D получить матрицу главных контуров B .

Используя полученные уравнения, можно записать уравнения для цепи с помощью независимых токов и напряжений. Токи ветвей состоят из токов дерева и токов хорд

$$i = \begin{bmatrix} i_T \\ \dots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_L i_L \\ \dots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_L \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} i_L = \begin{bmatrix} B_T^T \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} i_L = B^T i_L. \quad (2.63)$$

При выводе (2.63) использовано (2.60), а затем (2.62).

Выражение (2.63) показывает, что, имея матрицы главных контуров, все токи ветвей можно выразить через токи хорд i_L , т.е. через независимые токи.

Напряжения ветвей V состоят из напряжений ветвей дерева V_T и напряжений хорд V_L , т.е.

$$V = \begin{bmatrix} V_T \\ \dots \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_T \\ \dots \\ -B_T V_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ -B_T \end{bmatrix} V_T = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ D_L^T \end{bmatrix} V_T = D^T V_T. \quad (2.64)$$

Из (2.64) следует, что, имея матрицу главных сечений D , все напряжения ветвей можно выразить через независимые напряжения ветвей дерева V_T .

2.5.2. Топологические методы формирования уравнений цепи

В качестве источников воздействий в цепи могут действовать независимые источники тока и источники ЭДС. Они должны быть учтены в уравнениях цепи: либо в ветвях дерева, либо в хордах. Из уравнения (2.60) следует, что токи хорд являются независимыми. Поскольку токи независимых источников тока не могут быть зависимыми, то источники тока должны включаться в хорды, а не в дерево.

Из (2.58) видно, что напряжения ветвей дерева являются независимыми переменными. Поэтому независимые источники ЭДС должны включаться в дерево.

Для получения матриц B и D в виде (2.53) и (2.56) соответственно уже на стадии формирования топологических уравнений необходимо придерживаться следующих правил нумерации ветвей:

1. Нумеруются сначала источники ЭДС и помещаются в дерево графа.
2. Дерево графа дополняется пассивными элементами, они нумеруются последовательностью целых чисел, начиная с единицы.
3. Продолжается нумерация остальных пассивных элементов.
4. Нумеруются источники тока.

Направление ветвей источников указывается стрелкой. Независимые источники включаются в соответствующие топологические матрицы.

Пример 2.21

Для цепи, приведенной на рис. 2.41, *a*, найдем матрицу главных сечений D .

Граф цепи приведен на рис. 2.41, *б*, где сплошными линиями обозначены ветви дерева, а пунктиром — хорды. Схема содержит 5 узлов (считая и нулевой), следовательно, она имеет 4 ветви дерева. Соответственно ветвям дерева выбираем сечения I, II, III, IV. Ориентация сечений показана стрелками. Получим расширенную матрицу сечений D_p . Субматрица D_e описывает способ включения независимого источника ЭДС, D_j — субматрица, описывающая способ включения независимого источника тока; D — матрица главных сечений.

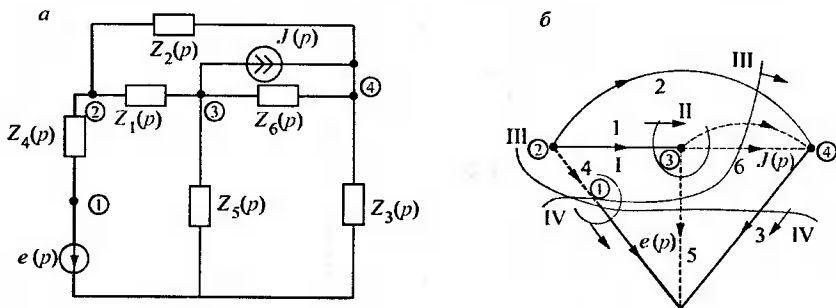


Рис. 2.41

$$D_p = \begin{matrix} e(p) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & I(p) \text{ — ветви графа} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] & = [D_e \vdots D \vdots D_J]. \end{matrix}$$

Для машинного анализа линейных цепей применяются в основном методы узловых потенциалов и контурных токов. Рассмотрим формирование уравнений узловых потенциалов. Предположим, что все источники ЭДС в цепи преобразованы в эквивалентные источники тока. Все пассивные элементы в цепи описываются компонентными уравнениями $Y_B(p)V_B(p) = I_B(p)$, где $Y_B(p)$ — операторная проводимость ветви, а $V_B(p)$, $I_B(p)$ — операторные напряжение и ток ветви. В целом для всех ветвей цепи компонентное уравнение будет иметь вид

$$Y(p)V(p) = I(p), \quad (2.65)$$

где $Y(p)$ — диагональная матрица операторных проводимостей цепи, $V(p)$ — матрица-столбец операторных напряжений на ветвях цепи; $I(p)$ — матрица-столбец операторных токов ветвей.

Расширенная матрица сечений может быть представлена в виде

$$D_p = [D \vdots D_J], \quad (2.66)$$

где D — матрица сечений пассивной части цепи, D_J — субматрица, учитывающая способ включения в цепь независимых источников тока.

Вектор токов цепи может быть представлен в виде суммы двух субвекторов:

$$I(p) = \begin{bmatrix} I_B(p) \\ \dots \\ J(p) \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

где $I_B(p)$ — вектор токов ветвей дерева, $J(p)$ — вектор токов независимых источников.

Подставляя (2.72), (2.73) в (2.61), получим

$$[D \vdots D_J] \begin{bmatrix} I_B(p) \\ \dots \\ J(p) \end{bmatrix} = DI_B(p) + D_J J(p) = 0. \quad (2.68)$$

Подставив (2.71) в (2.74) и учитывая (2.70), получим

$$DY(p)D^T V_T(p) = -D_J J(p). \quad (2.69)$$

Уравнение (2.69) позволяет рассчитать узловые потенциалы (вектор $V_T(p)$), а затем, используя (2.64), найти напряжения на остальных ветвях графа схемы. Выражение $DY(p)D^T$ представляет собой матрицу проводимостей цепи (см. пример 2.30).

Пример 2.22

Для цепи рис. 2.42, а составить уравнения узловых потенциалов.

Граф цепи приведен на рис. 2.42, б, где сплошными линиями показаны ветви дерева и источников тока, а пунктирными — ветви хорд. Номера узлов показаны в кружках, а сечения пронумерованы римскими цифрами.

Для графа (рис. 2.42, б) расширенная матрица главных сечений имеет вид

$$D_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 0 & -1 \end{bmatrix} = [D : D_J].$$

Вектор напряжений ветвей дерева $V_T(p) = [V_1(p) V_2(p) V_3(p)]^T$, где T — знак транспонирования, вектор независимых источников тока $J(p) = [J_1(p) J_2(p)]^T$.

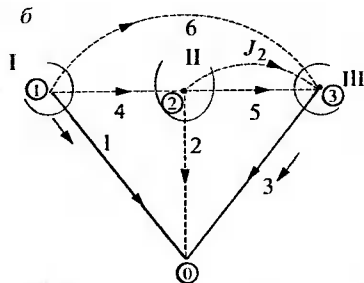
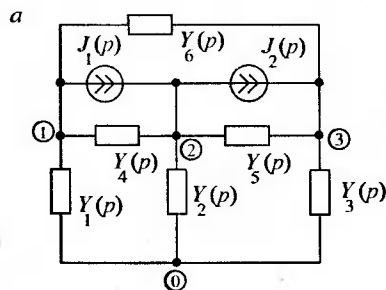


Рис. 2.42

$$Y(p) = \begin{bmatrix} Y_1(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6(p) \end{bmatrix}.$$

Подставляя D , D_J , $Y(p)$, $V_T(p)$, $J(p)$ в уравнение (2.69), получим

$$\begin{bmatrix} [Y_1(p) + Y_4(p) + Y_6(p)] & -Y_4(p) & -Y_6(p) \\ -Y_4(p) & [Y_2(p) + Y_4(p) + Y_5(p)] & -Y_5(p) \\ -Y_6(p) & -Y_5(p) & [Y_3(p) + Y_5(p) + Y_6(p)] \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} V_1(p) \\ V_2(p) \\ V_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1(p) \\ J_1(p) - J_2(p) \\ J_2(p) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование уравнений контурных токов. Допустим, что все источники тока преобразованы в эквивалентные источники ЭДС. По схеме находится граф и по нему — расширенная матрица главных контуров

$$B_p = [B_E \vdots B], \quad (2.70)$$

где B_E — субматрица, описывающая способ подключения в цепь независимых источников ЭДС, B — матрица главных контуров, описывающая соединение пассивных элементов цепи.

Вектор напряжений ветвей графа схемы V_p может быть также представлен в виде двух субвекторов

$$V_p = \begin{bmatrix} E \\ \dots \\ V \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

где E — вектор независимых источников ЭДС, V — вектор напряжений ветвей пассивных элементов цепи.

Учитывая (2.52), получим

$$B_p V_p = B_E E + BV = 0. \quad (2.72)$$

Напряжение на каждом пассивном элементе подчиняется компонентному уравнению

$$Z(p)I(p) = V(p), \quad (2.73)$$

где $Z(p)$ — диагональная матрица операторных сопротивлений пассивных элементов цепи; $I(p)$ и $V(p)$ — векторы-столбцы операторных токов и напряжений на элементах цепи.

Подставляя (2.73) в (2.72) и учитывая (2.63), получим

$$BZ(p)B^T I_L(p) = -B_E E. \quad (2.74)$$

В уравнении (2.80) $I_L(p)$ — вектор контурных токов $BZ(p)B^T$ — матрица сопротивлений цепи, а $B_E E$ — вектор контурных ЭДС.

Пример 2.23

Для цепи (рис. 2.43, а) составить уравнения контурных токов.

Граф цепи приведен на рис. 2.43, б, где сплошными линиями показаны ветви дерева, пунктирными линиями — хорды, цифрами в кружках — узлы графа. Выбирая контуры, соответствующие ветвям 4, 5, 6, а направления контуров — совпадающими с направлениями хорд, получим расширенную матрицу главных контуров

$$B_p = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B_E \ : \ B].$$

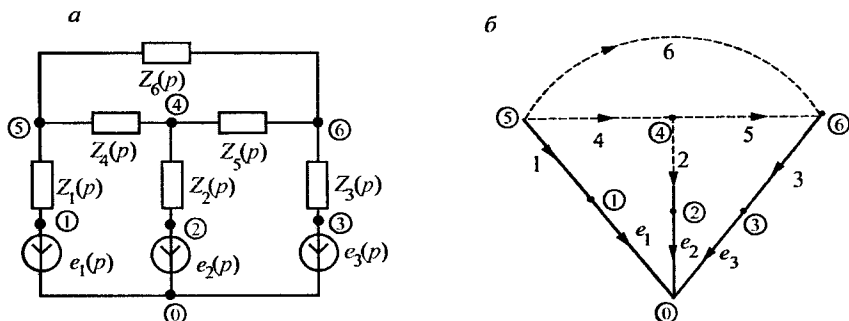


Рис. 2.43

Диагональная матрица сопротивлений цепи

$$Z(p) = \begin{bmatrix} Z_1(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2(p) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6(p) \end{bmatrix}$$

Вектор токов хорд (контурных токов) $I_L(p) = [I_4(p) I_5(p) I_6(p)]^T$, где T — знак транспонирования; нумерация токов соответствует нумерации ветвей на рис. 2.43, б. Вектор независимых источников ЭДС $E = [e_1(p) e_2(p) e_3(p)]$.

Подставляя $B, B_E, Z(p), I_L(p), E$ в (2.74), получим систему уравнений контурных токов цепи (см. рис. 2.43, а).

$$\begin{bmatrix} [Z_1(p) + Z_2(p) + Z_4(p)] & -Z_2(p) & Z_1(p) \\ -Z_2(p) & [Z_2(p) + Z_3(p) + Z_5(p)] & Z_3(p) \\ Z_1(p) & Z_3(p) & [Z_1(p) + Z_3(p) + Z_6(p)] \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} I_4(p) \\ I_5(p) \\ I_6(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1(p) - e_2(p) \\ e_2(p) - e_3(p) \\ e_1(p) - e_3(p) \end{bmatrix}$$

2.5.3. Решение уравнений цепи

В результате применения топологических методов сформированы уравнения для узловых потенциалов (2.69) или контурных токов (2.74). Оба уравнения — линейные. Для их решения могут быть применены различные методы: обратной матрицы, метод Крамера, метод исключения Гаусса, метод LU -разложения.

При использовании методов обратной матрицы и Крамера, как показано в предыдущих разделах, необходимо вычислить определитель системы, который в радиоэлектронных схемах часто бывает близок к нулю. Это приводит к большим ошибкам в вычислениях. Кроме того, оба эти метода требуют много операций при реализации на ЭВМ.

ные $(n - 1)$ неизвестных, надо проделать обратную подстановку, которая в общем виде записывается как

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} b_j^{(j)}; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (2.82)$$

Алгоритм исключения Гаусса требует выполнения $\approx \frac{n^3}{3}$ операций (умножение + вычитание), где n — порядок матрицы. Обратная подстановка выполняется за $\approx \frac{n^2}{2}$ операций.

Рассмотрим метод LU -разложения. Предположим, что матрицу A системы уравнений

$$Ax = b \quad (2.83)$$

можно представить в виде

$$A = LU, \quad (2.84)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}; \quad (2.85)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & U_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Матрица L является нижней треугольной, а матрица U — верхней треугольной, причем на главной диагонали ее стоят единицы. Следовательно, определитель матрицы A равен произведению диагональных членов матрицы L .

Система уравнений (2.89) после подстановки в нее (2.90) будет иметь вид $LUx = b$.

$$\text{Обозначим} \quad Ux = Z. \quad (2.88)$$

$$\text{Подставив (2.88) в (2.87), получим} \quad LZ = b. \quad (2.89)$$

В (2.89) подставим L из (2.85), Z и b представим в виде вектора-столбца. Получим систему уравнений (2.89) в виде

$$\begin{aligned} l_{11}Z_1 &= b_1; \\ l_{21}Z_1 + l_{22}Z_2 &= b_2; \\ l_{31}Z_1 + l_{32}Z_2 + l_{33}Z_3 &= b_3; \\ &\dots\dots\dots \\ l_{n1}Z_1 + l_{n2}Z_2 + \dots + l_{nn}Z_n &= b_n. \end{aligned}$$

Из этой системы находим:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{b_1}{l_{11}}; \\ Z_2 &= \frac{1}{l_{22}}(b_2 - l_{21}Z_1); \\ Z_3 &= \frac{1}{l_{33}}(b_3 - l_{31}Z_1 - l_{32}Z_2); \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n &= \frac{1}{l_{nn}}(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}Z_j). \end{aligned}$$

Этот процесс называется прямым ходом. Найденный вектор-столбец Z подставим в (2.88), получим его в виде

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \dots + u_{1n}x_n &= Z_1; \\ x_2 + u_{23}x_3 + \dots + u_{2n}x_n &= Z_2; \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n &= Z_{n-1}; \\ x_n &= Z_n. \end{aligned}$$

Из последней системы уравнений компоненты вектора x находятся последовательно, начиная с последнего:

$$\begin{aligned} x_n &= Z_n; \\ x_i &= Z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j; \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

Этот процесс называется обратным ходом. Число операций для прямого и обратного хода составляет $\approx n^2$, где n — размер матрицы.

Разложение матрицы A на матрицы L и U может быть произведено при помощи алгоритма Краута, который заключается в следующем. Перемножим матрицы L (2.85) и U (2.86) по правилу «строка на столбец». Получим

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & \cdots & l_{11}u_{1n} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & \cdots & l_{21}u_{1n} + l_{22}u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n1}u_{12} + l_{n2} & \cdots & l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + \cdots + l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая элементы произведения матрицы LU с элементами матрицы A , получим: $l_{i1} = a_{i1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Используя найденные l_{i1} ($i = 1, 2, \dots, n$) из первой строки произведения, получим $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$ ($j = 2, 3, \dots, n$). Используя найденные коэффициенты матриц L и U , из второй строки произведения матриц найдем $l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$; $u_{2j} = (a_{2j} - l_{21}u_{1j})/l_{22}$ ($j = 3, 4, \dots, n$).

Продолжая процесс, можно найти все коэффициенты матриц L и U . В общем случае они равны

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk}, \quad i \geq k; \quad (2.90)$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}}(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}), \quad j > k. \quad (2.91)$$

В процессе получения уравнений цепи элементы матрицы A заносятся в память ЭВМ. Элементы матрицы A используются только для расчета элементов матриц L и U , причем поскольку матрица L является нижней треугольной, а U — верхней треугольной, то элементы этих матриц могут разместиться в памяти ЭВМ на месте матрицы A .

По сравнению с методом исключения Гаусса метод LU -разложения имеет следующие преимущества:

1. Легко вычисляется определитель матрицы A . Он равен

$$\det A = \prod_{i=1}^n l_{ii}. \quad (2.92)$$

2. Не требуется дополнительной памяти для запоминания матриц L и U (они могут быть записаны на место матрицы A).

3. При изменении правой части уравнения (2.83) не требуется проводить разложение матрицы A на L и U матрицы; достаточно провести только прямую и обратную подстановки.

По объему вычислений методы LU -разложения и метод Гаусса примерно эквивалентны.

2.6. Двухполюсники

Двухполюсники входят в состав сложных разветвленных цепей. Их свойства определяют характеристики всей цепи. Поэтому в этом разделе будут рассмотрены свойства двухполюсников.

Двухполюсником называется любая электрическая цепь, рассматриваемая относительно двух зажимов, т.е. имеющая два внешних зажима.

Двухполюсники бывают линейные и нелинейные. Двухполюсник будет линейным, если он не содержит в своем составе нелинейных элементов. Он описывается линейным дифференциальным уравнением. Если в составе двухполюсника есть нелинейные элементы, то он будет нелинейным. Такой двухполюсник описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

По числу элементов двухполюсники различаются как одноэлементные (содержат один элемент), двухэлементные и n -элементные (содержат n элементов).

По характеру элементов двухполюсники могут быть реактивные и диссипативные. Реактивные двухполюсники состоят только из индуктивностей и емкостей. В таких двухполюсниках не происходит потеря энергии на тепло. Диссипативные двухполюсники имеют в своем составе, кроме индуктивностей и емкостей, еще и сопротивления, которые обуславливают в таких двухполюсниках превращение подводимой энергии в тепловую.

Двухполюсники могут быть активными и пассивными. Пассивный двухполюсник не имеет внутри себя источников энергии и поэтому мощность на нем не может превышать ту, которая к нему подведена. Активный двухполюсник имеет в своем составе источники энергии. Двухполюсник характеризуется либо сопротивлением $Z(p)$, либо проводимостью $Y(p) = 1/Z(p)$. Зависимость сопротивления или проводимости от

частоты называется частотной характеристикой двухполюсника. Эта зависимость определяется структурой и числом реактивных элементов двухполюсника.

Для изучения частотных характеристик двухполюсников выведем общее выражение для его сопротивления (проводимости).

Для изучения частотных характеристик двухполюсников выведем общее выражение для его сопротивления (проводимости).

Если известна схема двухполюсника, то используя, например, метод контурных токов и выбирая $i_1(p)$ в качестве тока первого контура, получим систему уравнений схемы (рис. 2.44) в виде

$$Z(p)i(p) = e(p), \quad (2.93)$$

где $i(p) = [i_1(p) i_2(p) \dots i_n(p)]^T$ — вектор-столбец контурных токов;

$e(p) = [e_1(p) 0 \dots 0]$ — вектор-столбец задающих ЭДС;

$$Z(p) = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) & \dots & Z_{1n}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) & \dots & Z_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}(p) & Z_{n2}(p) & \dots & Z_{nn}(p) \end{bmatrix} \text{ — матрица сопротивлений цепи.}$$

Решая систему (2.93) относительно $i_1(p)$ методом Крамера, получим

$$i_1(p) = \frac{D_1}{\Delta}, \quad (2.94)$$

где D_1 — определитель матрицы

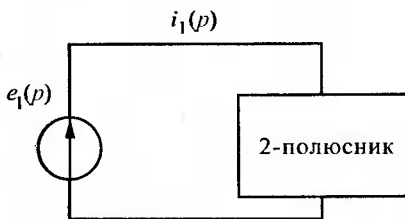


Рис. 2.44

$$\begin{bmatrix} e_1(p) & Z_{12}(p) & \dots & Z_{1n}(p) \\ 0 & Z_{22}(p) & \dots & Z_{2n}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_{n2}(p) & \dots & Z_{nn}(p) \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

а Δ — определитель системы уравнений, т.е. матрицы $Z(p)$.

Разложив его по элементам первого столбца, получим

$$D_1 = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = \Delta_{11}, \quad (2.96)$$

где Δ_{11} — минор для элемента $e_1(p)$, т.е. определитель матрицы, полученной из (2.95) путем вычеркивания первой строки и первого столбца.

Подставив (2.96) в (2.94), получим $i_1(p) = e_1(p) \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, или

$$Z_{\hat{a}\hat{o}}(p) = \frac{e_1(p)}{i_1(p)} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}. \quad (2.97)$$

Элементы каждого из определителей Δ и Δ_{11} в общем случае имеют вид

$$Z_{ii}(p) = r_{ii} + pL_{ii} + \frac{1}{pC_{ii}}; \quad Z_{ik}(p) = \left\{ r_{ik} + pL_{ik} + \frac{1}{pC_{ik}} \right\}$$

подставив последние выражения в (2.97), получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (2.98)$$

На практике часто потерями в двухполоснике можно пренебречь, т.е. $r_{ii} = r_{ik} = 0$. В этом случае выражение (2.98) будет представлять входное сопротивление реактивного двухполосника, у которого

$$Z_{ii}(p) = pL_{ii} + \frac{1}{pC_{ii}} = \frac{1}{p} \left(p^2 L_{ii} + \frac{1}{C_{ii}} \right);$$

$$Z_{ik}(p) = -\frac{1}{p} \left(p^2 L_{ik} + \frac{1}{C_{ik}} \right)$$

Определитель Δ системы (2.93) имеет порядок n — число независимых контуров цепи, определитель Δ_{11} имеет порядок $n - 1$. Поэтому, подставив в (2.97) выражения для $Z_{ii}(p)$ и $Z_{ik}(p)$, получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n}p^{2n} + a_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + a_2p^2 + a_0}{p(b_{2n-1}p^{2n-2} + b_{2n-3}p^{2n-4} + \dots + b_3p^2 + b_1)}. \quad (2.99)$$

Приравняв нулю числитель выражения (2.99) и решив полученное уравнение относительно p^2 , получим корни уравнения $p^2 = p_{2k-1}^2$, ($k = \overline{1, n}$), обращающие $Z_{\text{вх}}(p)$ в нуль. Такие значения p называются нулями. При $p = j\omega$ $p_{2k-1}^2 = -\omega_{2k-1}^2$.

Приравняв знаменатель выражения (2.99) нулю и решив полученное уравнение относительно p^2 , получим значения p , обращающие $Z_{\text{вх}}(p)$ в бесконечность $p^2 = p_{2k}^2$. Такие значения p называются полюсами $Z_{\text{вх}}(p)$. При $p = j\omega$ $p_{2k}^2 = -j\omega_{2k}$, ($k = \overline{1, n-1}$).

Найдя корни числителя и знаменателя выражения (2.98), можно в соответствии с теоремой Виета разложить их на множители. Тогда получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n}(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_3^2) \dots (p^2 - p_{2n-1}^2)}{pb_{2n-1}(p^2 - p_2^2)(p^2 - p_4^2) \dots (p^2 - p_{2n-2}^2)}. \quad (2.100)$$

Умножив числитель и знаменатель (2.100) на p и обозначив $a_{2n}/b_{2n-1} = H$ при $p = j\omega$ получим

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{j\omega H(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}, \quad (2.101)$$

где $\omega_0 = 0$.

В выражении (2.101) частоты с нечетными номерами являются нулями $Z_{\text{вх}}(j\omega)$, а частоты с четными номерами — полюсами этой функции.

2.6.1. Канонические схемы реактивных двухполюсников

Выражение (2.101) может быть представлено в следующем виде

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = j\omega H \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{2k-2}}{\omega^2 - \omega_{2k-2}^2} \right), \quad (2.102)$$

где $\alpha_{2k-2} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{2k-2}} \frac{(\omega^2 - \omega_{2k-2}^2)Z_{\text{вх}}(j\omega)}{j\omega H}$,

а единица в (2.102) получена при делении многочлена числителя на многочлен знаменателя (степень числителя больше степени знаменателя относительно ω^2 на единицу).

Сумма первых двух слагаемых в выражении (2.102)

$$j \left[\omega H - \frac{1}{\omega \left(-\frac{1}{\alpha_0 H} \right)} \right] = j \left(\omega L_{2n} - \frac{1}{\omega C_0} \right), \quad (2.103)$$

где $L_{2n} = H$, $C_0 = -\frac{1}{\alpha_0 H}$.

Величина $H > 0$, а α_0 вычисляется как предел (2.102) при $\omega \rightarrow 0$. Так как степень числителя и знаменателя в (2.101) отличаются на единицу, то $\alpha_0 < 0$ и $C_0 > 0$.

Выражение (2.103) соответствует последовательному соединению индуктивности L_{2n} и емкости C_0 .

Остальные слагаемые в (2.101) имеют вид

$$Z_{2k-2}(j\omega) = j\omega \frac{H\alpha_{2k-2}}{\omega^2 - \omega_{2k-2}^2}. \quad (2.104)$$

Выражение (2.104) соответствует параллельному соединению индуктивности L_{2k-2} и емкости C_{2k-2} , т.е.

$$Z_{2k-2}(j\omega) = \frac{j\omega L_{2k-2}}{1 - \omega^2 L_{2k-2} C_{2k-2}} = \frac{j\omega(-L_{2k-2})}{\omega^2 - \omega_{2k-2}^2}, \quad (2.105)$$

где $\omega_{2k-2} = \frac{1}{\sqrt{L_{2k-2} C_{2k-2}}}$ — резонансная частота параллельного контура L_{2k-2} и C_{2k-2} .

Сравнивая (2.104) и (2.105), получим $L_{2k-2} = -H\alpha_{2k-2} > 0$, т.к. $\alpha_{2k-2} < 0$.

Емкость C_{2k-2} вычислим как $C_{2k-2} = \frac{1}{\omega_{2k-2}^2 L_{2k-2}}$. В результате полу-

чим схему реактивного двухполосника, входное сопротивление которого описывается выражением (2.101).

Схема двухполосника, приведенного на рис. 2.45, называется канонической (приведенной).

По уравнению (2.101) можно построить другую схему канонического двухполосника. От входного сопротивления в уравнении (2.101) перейдем к проводимости. Получим

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}{j\omega H(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}. \quad (2.106)$$

Разложив (2.106) на сумму дробей, получим

$$Y_{\text{вх}}(j\omega) = -j \frac{\omega}{H} \sum_{k=1}^n \frac{\beta_{2k-2}}{\omega^2 - \omega_{2k-1}^2}, \quad (2.107)$$

где $\beta_{2k-1} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_{2k-1}} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_{2k-1}^2) Y_{\text{вх}}(j\omega)}{-j\omega H^{-1}} \right]$.

Каждое слагаемое в выражении (2.107) соответствует проводимости двухполосника, состоящего из последовательно включенных L_{2k-1} и C_{2k-1} , т.е.

$$\frac{j\omega H^{-1} \beta_{2k-1}}{\omega^2 - \omega_{2k-1}^2} = \frac{1}{j\omega L_{2k-1} + \frac{1}{j\omega C_{2k-1}}} = \frac{-j\omega C_{2k-1} \omega_{2k-1}^2}{\omega^2 - \omega_{2k-1}^2},$$

где $\omega_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{L_{2k-1} C_{2k-1}}}$ — резонансная частота последовательного контура L_{2k-1} и C_{2k-1} .

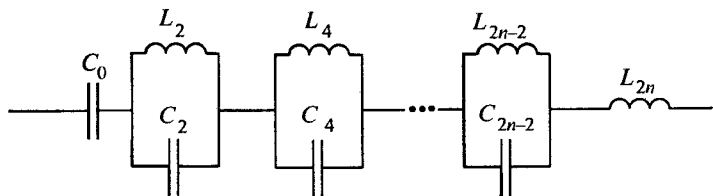


Рис. 2.45

Сравнивая левую и правую части последнего равенства, получим

$$C_{2k-1} = \frac{H^{-1}\beta_{2k-1}}{\omega_{2k-1}^2} = \frac{1}{\omega_{2k-1}^2(H\beta_{2k-1})} = \frac{1}{\omega_{2k-1}^2 L_{2k-1}},$$

где $L_{2k-1} = H\beta_{2k-1}$.

В результате получим схему канонического двухполосника.

Схемы канонического двухполосника, изображенные на рис. 2.45 и 2.46, являются наиболее общими. Из них, как частные случаи, можно получить другие схемы. В частности, если в схеме рис. 2.45 отсутствует емкость C_0 , то будем иметь каноническую схему, приведенную на рис. 2.47.

Входное операторное сопротивление двухполосника (рис. 2.47) имеет вид

$$Z_{\text{вх}}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{pL_{2k}}{1 + p^2 L_{2k} C_{2k}} + pL_{2n}.$$

Его можно привести к виду

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n+1}p^{2n+1} + a_{2n-1}p^{2n-1} + \dots + a_3p^3 + a_1p}{b_{2n}p^{2n} + b_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + b_2p^2 + b_0}. \quad (2.108)$$

Частотную характеристику двухполосника (рис. 2.47) получим из выражения (2.114) аналогично формуле (2.101). Она будет иметь вид

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{j\omega H(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}, \quad H = \frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}. \quad (2.109)$$

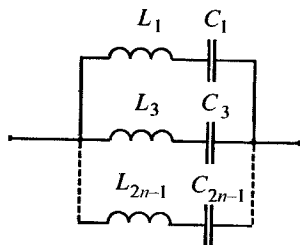


Рис. 2.46

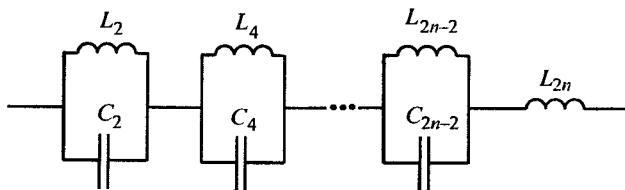


Рис. 2.47

Другие две формы канонических реактивных двухполосников, полученных из схемы рис. 2.45 при отсутствии индуктивности L_{2n} и обоих элементов (L_{2n} и C_0), приведены на рис. 2.48.

Для схемы (рис. 2.48, а) входное операторное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{pL_{2k}}{1 + p^2 L_{2k} C_{2k}} + \frac{1}{pC_0}$$

Оно приводится к виду

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n}p^{2n} + a_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + a_2p^2 + a_0}{b_{2n+1}p^{2n+1} + b_{2n-1}p^{2n-1} + \dots + b_1p}$$

и имеет частотную характеристику

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{j\omega H(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n}^2)}. \quad (2.110)$$

Для схемы (рис. 2.48, б) входное операторное сопротивление

$$Z_{\text{вх}}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{pL_{2k}}{1 + p^2 L_{2k} C_{2k}}$$

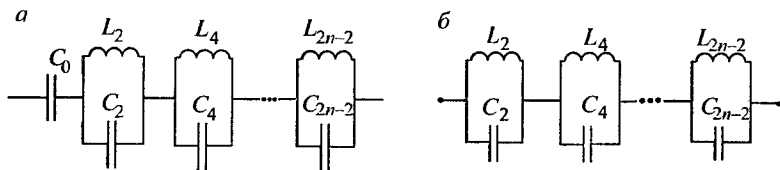


Рис. 2.48

Оно приводится к виду

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n-1}p^{2n-1} + \dots + a_1p}{b_{2n}p^{2n} + b_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + b_2p^2 + b_0}$$

и имеет частотную характеристику

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{j\omega H(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2n}^2)}. \quad (2.111)$$

К одной из четырех форм канонического двухполосника (рис. 2.45, 2.47 и 2.48) путем преобразований может быть приведен любой реактивный двухполосник. Как видно из выражений (2.101), (2.109), (2.110) и (2.111), частотная характеристика любого из канонических двухполосников определяется нулями и полюсами входного сопротивления и может быть построена, если известны эти нули и полюсы и найдена постоянная H . Последняя может быть рассчитана из выражения для входного сопротивления, если известно входное сопротивление двухполосника для частоты, не совпадающей ни с нулем, ни с полюсом.

По выражениям (2.101), (2.109), (2.110) и (2.111) можно построить частотные характеристики входного сопротивления канонических реактивных двухполосников. Они приведены на рис. 2.49.

Четными номерами на оси частот ω (рис. 2.49) обозначены полюсы, нечетными — нули частотных характеристик. Внутренние полюсы $\omega_2 \div \omega_{2n-2}$ соответствуют частотам резонанса параллельных контуров канонических схем двухполосников. Внутренние нули соответствуют частотам последовательного резонанса. Частотные характеристики двухполосников, приведенные на рис. 2.49, отличаются только внешними нулями и полюсами. Рис. 2.49, *а* соответствует канонической схеме двухполосника, изображенного на рис. 2.45. Внешний полюс при частоте $\omega_0 = 0$ обусловлен сопротивлением емкости C_0 , а внешний полюс при $\omega \rightarrow \infty$ — индуктивностью L_{2n} . Рис. 2.49, *б* соответствует схеме двухполосника, приведенной на рис. 2.47. Внешний нуль при частоте $\omega_1 = 0$ обусловлен тем, что двухполосник пропускает постоянный ток, а внешний полюс при $\omega \rightarrow \infty$ — индуктивностью L_{2n} . Рис. 2.49, *в* соответствует схеме двухполосника, приведенной на рис. 2.48, *а*. Внешний полюс при $\omega_0 = 0$ определяется емкостью C_0 , а внешний нуль при $\omega \rightarrow \infty$ обусловлен тем, что сопротивление

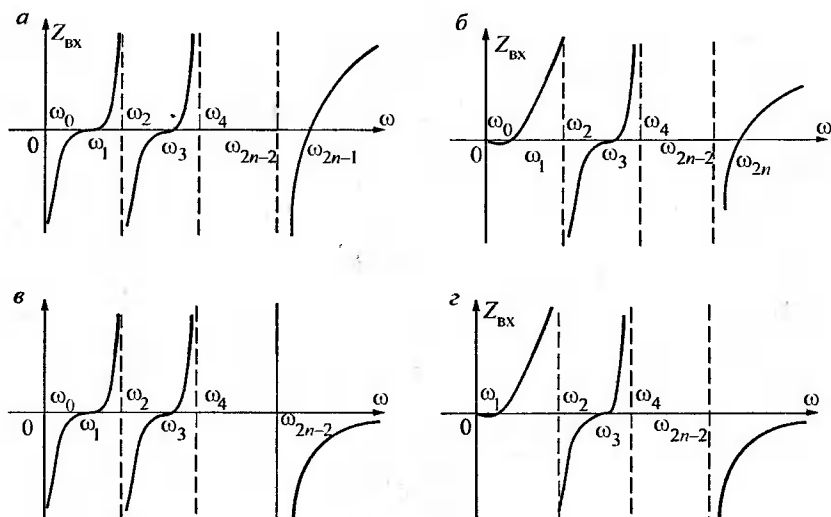


Рис. 2.49

двухполосника $|Z_{\text{вх}}| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Рис. 2.49, а соответствует схеме двухполосника, приведенной на рис. 2.48, б. Двухполосник пропускает постоянный ток и в то же время $|Z_{\text{вх}}| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Поэтому частотная характеристика имеет два внешних нуля.

По уравнениям (2.109), (2.110), (2.111) можно построить параллельные схемы реактивных двухполосников, аналогично тому, как это было сделано по уравнению (2.101). С этой целью в уравнениях (2.109), (2.110), (2.111) перейдем от сопротивлений к проводимостям и, рассуждая аналогично тому, как это было сделано при выводе выражения (2.107), получим параллельные схемы канонических двухполосников. Они приведены в табл. 2.1.

2.6.2. Свойства функций входных сопротивлений и проводимостей двухполосников

Рассмотрим свойства пассивных двухполосников.

1. Для реактивных двухполосников

$$\frac{dZ_{\text{вх}}(p)}{dp} = \frac{dZ_{\text{вх}}(j\omega)}{d(j\omega)} > 0.$$

Для канонической схемы «а» (см. табл. 2.1) имеем

$$Z_{\text{вх}}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{pL_{2k}}{1 + p^2 L_{2k} C_{2k}} + pL_{2n} + \frac{1}{pC_0},$$

$$\frac{dZ_{\text{вх}}(p)}{dp} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_{2k}(1 - p^2 L_{2k} C_{2k})}{(1 + p^2 L_{2k} C_{2k})^2} + L_{2n} - \frac{1}{p^2 C_0}.$$

При $p = j\omega$ получим

$$\frac{dZ_{\text{вх}}(j\omega)}{d(j\omega)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_{2k}(1 + \omega^2 L_{2k} C_{2k})}{(1 - \omega^2 L_{2k} C_{2k})^2} + L_{2n} + \frac{1}{\omega^2 C_0} > 0.$$

Для других схем реактивных двухполосников результат будет аналогичен.

Из этого свойства можно сделать вывод относительно частотных характеристик реактивных двухполосников: если наклон частотных характеристик реактивных двухполосников положителен, то нули и полюсы этих характеристик должны чередоваться; в противном случае возникают участки частотной характеристики, где наклон их отрицателен, что противоречит доказанному свойству.

Приведенные на рис. 2.49 частотные характеристики канонических схем реактивных двухполосников, как видно, доказанному свойству соответствуют.

Пример 2.24

Модель (одночастотная) кварцевого резонатора изображена на рис. 2.50, а, где C_0 — емкость кварцедержателя, L_q , C_q , r_q — индуктивность, емкость и активное сопротивление кварцевой пластины. Построить частотную характеристику кварцевого резонатора при условии $r_q \ll \omega L_q$.

Так как двухполосник не пропускает постоянного тока, то при $\omega_0 = 0$ $Z_{\text{вх}}$ будет иметь полюс. Поскольку нули и полюсы частотной характеристики чередуются, то следующим за полюсом при $\omega_0 = 0$ будет нуль при $\omega = \omega_1$, а за нулем — полюс при $\omega = \omega_2$. При $\omega \rightarrow \infty$ двухполосник будет иметь нуль, обусловленный емкостью C_0 .

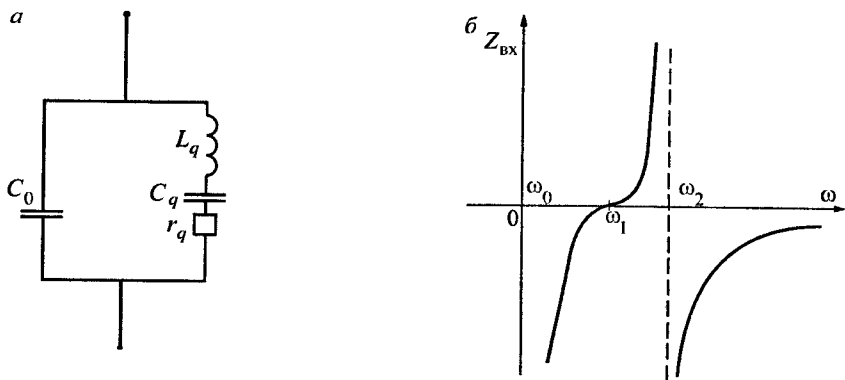


Рис. 2.50

Частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_q C_q}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_q \left(\frac{C_0 C_q}{C_q + C_0} \right)}}$$

называются частотами последовательного и параллельного резонанса кварца. Первая определяется резонансом в последовательном контуре \$L_q C_q\$, вторая — резонансом во всей цепи (рис. 2.50, б).

Для входной проводимости, например, параллельного двухполюсника типа «б» (см. табл. 2.1)

$$Y_{вх}(p) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{p C_k}{1 + p^2 L_k C_k} + \frac{1}{p L_1}.$$

Производная $\frac{dY_{вх}(p)}{dp} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{C_k(1 - p^2 L_k C_k)}{(1 + p^2 L_k C_k)^2} - \frac{1}{p^2 L_1}$, при \$p = j\omega\$

получим

$$\frac{dZ_{вх}(j\omega)}{d(j\omega)} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{C_k(1 + \omega^2 L_k C_k)}{(1 - \omega^2 L_k C_k)^2} + \frac{1}{\omega^2 L_1} > 0.$$

2. Для диссипативного двухполюсника активная часть входного сопротивления (проводимости) является четной функцией частоты, а реактивная — нечетной функцией частоты.

Таблица 2.1

Схемы канонических двухполюсников

	Последовательная схема	Параллельная схема	Частотная характеристика
а			Рис. 2.55, а
б			Рис. 2.55, б
в			Рис. 2.55, в
г			Рис. 2.55, г

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции.

Как следует из (2.97) $Z_{\text{вх}}(p) = \Delta / \Delta_{11}$. Предположим, что определитель системы

$$\Delta = \begin{bmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) \end{bmatrix}.$$

Тогда $\Delta_{11} = Z_{22}(p)$. При $p = j\omega$ $Z_{ii}(j\omega) = r_{ii} + j(\omega L_{ii} - \frac{1}{\omega C_{ii}})$,

$$Z_{ik}(j\omega) = - \left[r_{ik} + j \left(\omega L_{ik} - \frac{1}{\omega C_{ik}} \right) \right], \quad (i, k = \overline{1, 2}).$$

Подставляя значения сопротивлений в определителе Δ и Δ_{11} , получим

$$Z_{\text{вх}}^{(1)}(j\omega) = \frac{R_1(\omega^2) + j\omega X_1(\omega^2)}{r_1(\omega^2) + j\omega x_1(\omega^2)}, \quad (2.112)$$

где

$$R_1(\omega^2) = r_{11}r_{22} - \omega^2 \left(L_{11} - \frac{1}{\omega^2 C_{11}} \right) \left(L_{22} - \frac{1}{\omega^2 C_{22}} \right) - r_{12}r_{21} + \omega^2 \left(L_{12} - \frac{1}{\omega^2 C_{12}} \right) \left(L_{21} - \frac{1}{\omega^2 C_{21}} \right)$$

$$X_1(\omega^2) = r_{11} \left(L_{22} - \frac{1}{\omega^2 C_{22}} \right) + r_{22} \left(L_{11} - \frac{1}{\omega^2 C_{11}} \right) - r_{12} \left(L_{21} - \frac{1}{\omega^2 C_{21}} \right) - r_{21} \left(L_{12} - \frac{1}{\omega^2 C_{12}} \right)$$

$$r_1(\omega^2) = r_{22}; \quad x_1(\omega^2) = \left(L_{22} - \frac{1}{\omega^2 C_{22}} \right).$$

Выражение (2.112) приводится к виду

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}}^{(1)}(j\omega) &= \frac{r_1(\omega^2)R_1(\omega^2) + \omega^2 X_1(\omega^2)x_1(\omega^2) + j\omega[r_1(\omega^2)X_1(\omega^2) - R_1(\omega^2)x_1(\omega^2)]}{r_1^2(\omega^2) + \omega^2 x_1^2(\omega^2)} = \\ &= R_{\text{вх}}^{(1)}(\omega^2) + j\omega X_{\text{вх}}^{(1)}(\omega^2). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае двухполосника с матрицей 2×2 активная часть входного сопротивления является четной, а реактивная — нечетной функцией частоты.

Теперь предположим, что это утверждение верно для матрицы $n \times n$ и докажем, что оно выполняется для матрицы $(n+1) \times (n+1)$, т.е. если входное сопротивление двухполосника с матрицей $n \times n$

$$Z_{\text{вх}}^{(n)}(j\omega) = \frac{R_n(\omega^2) + j\omega X_n(\omega^2)}{r_n(\omega^2) + j\omega x_n(\omega^2)}, \quad (2.113)$$

где $R_n(\omega^2)$, $\omega X_n(\omega^2)$ — действительная и мнимая части определителя $n \times n$, а $r_n(\omega^2)$, $\omega x_n(\omega^2)$ — действительная и мнимая части определителя Δ_{11} (размера $(n-1) \times (n-1)$).

Определитель матрицы $(n+1) \times (n+1)$ имеет вид

$$\Delta_{n+1} = \begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \dots & Z_{1n}(j\omega) & Z_{1(n+1)}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \dots & Z_{2n}(j\omega) & Z_{2(n+1)}(j\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{(n+1)1}(j\omega) & Z_{(n+1)2}(j\omega) & \dots & Z_{(n+1)n}(j\omega) & Z_{(n+1)(n+1)}(j\omega) \end{bmatrix}.$$

Разложив определитель Δ_{n+1} по элементам последнего столбца, получим сумму произведений $(-1)^{j \pm (n+1)} Z_{j,n+1}(j\omega) \Delta_{j,n+1}$, ($j = \overline{1, n+1}$).

Каждый из определителей n -го порядка $\Delta_{j,n+1}$, ($j = \overline{1, n+1}$) представляется в виде $R_n(\omega^2) + j\omega X_n(\omega^2)$, а

$$Z_{j,n+1}(j\omega) = r_{j,n+1} + j\omega \left(L_{j,n+1} - \frac{1}{\omega^2 C_{j,n+1}} \right).$$

Перемножая их и суммируя все слагаемые, получим

$$\Delta_{n+1} = R_{n+1}(\omega^2) + j\omega X_{n+1}(\omega^2).$$

Определитель Δ_{11} — n -го порядка и его можно представить в виде

$$\Delta_{11} = r_{n+1}(\omega^2) + j\omega x_{n+1}(\omega^2).$$

Поэтому входное сопротивление двухполюсника с матрицей $(n-1) \times (n-1)$ будет

$$Z_{\text{ВХ}}^{(n+1)}(j\omega) = \frac{R_{n+1}(\omega^2) + j\omega X_{n+1}(\omega^2)}{r_{n+1}(\omega^2) + j\omega x_{n+1}(\omega^2)} = R_{\text{ВХ}}^{(n+1)}(\omega^2) + j\omega X_{\text{ВХ}}^{(n+1)}(\omega^2);$$

где $R_{\text{ВХ}}^{(n+1)}(\omega^2) = R_{n+1}(\omega^2)r_{n+1}(\omega^2) + \omega^2 X_{n+1}(\omega^2)x_{n+1}(\omega^2)$;

$$X_{\text{ВХ}}^{(n+1)}(\omega^2) = r_{n+1}(\omega^2)X_{n+1}(\omega^2) - R_{n+1}(\omega^2)x_{n+1}(\omega^2).$$

Таким образом, мы доказали, что у двухполюсника с матрицей $(n+1) \times (n+1)$ действительная часть входного сопротивления является четной функцией, а реактивная часть — нечетной функцией частоты. Следовательно, утверждение доказано.

Проводимость

$$Y_{\text{ВХ}}(j\omega) = \frac{1}{Z_{\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{1}{R_{\text{ВХ}}(\omega^2) + j\omega X_{\text{ВХ}}(\omega^2)} = \frac{R_{\text{ВХ}}(\omega^2) - j\omega X_{\text{ВХ}}(\omega^2)}{R_{\text{ВХ}}^2(\omega^2) + \omega^2 X_{\text{ВХ}}^2(\omega^2)} = g_{\text{ВХ}}(\omega^2) - j\omega b(\omega^2).$$

Из полученного выражения видно, что и для проводимости двухполюсника действительная его часть является четной, а мнимая — нечетной функцией частоты.

Из свойства четности активной и нечетности реактивной составляющих входного сопротивления следует, что при $\omega \rightarrow 0$ или $\omega \rightarrow \infty$ активная составляющая будет стремиться к постоянной величине, а реактивная — к нулю или бесконечности.

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, равна $i^2 \operatorname{Re}[Z_{\text{ВХ}}(j\omega)] \geq 0$. Так как $i^2 > 0$, то $\operatorname{Re}[Z_{\text{ВХ}}(j\omega)] \geq 0$; т.е. активная часть входного сопротивления диссипативного двухполюсника неотрицательна. Это же можно утверждать и относительно активной части входной проводимости.

3. Расположение нулей и полюсов входного сопротивления (проводимости).

Для двухполюсника рис. 2.44 найдем импульсную характеристику. Учитывая (2.98), получим

$$h(t) = \frac{1}{2pj} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{N(p)}{M(p)} e^{pt} dp = \sum_i \operatorname{res}(p = p_i).$$

Для вычисления вычетов в полюсах подынтегральной функции надо найти корни знаменателя, решив уравнение $M(p) = 0$. При этом возможны следующие варианты:

– все корни однократные (они могут быть действительными и комплексными);

– кратные корни.

Так как коэффициенты уравнения $M(p) = 0$ действительные, то комплексные корни могут быть только комплексно сопряженными парами.

Вычет в полюсе кратности n равен

$$\operatorname{res}(p = p_i) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left\{ (p - p_i)^n \frac{N(p)}{M(p)} e^{pt} \right\}. \quad (2.114)$$

Если корни однократные, то каждому корню $p_i = \alpha_i + j\beta_i$ будет соответствовать выражение

$$\operatorname{res}(p = p_i) = \frac{N(p_i)}{M'(p_i)} e^{\alpha_i t} e^{j\beta_i t},$$

где $M'(p) = \frac{dM(p)}{dp}$.

В зависимости от знака α_i импульсная характеристика при $t \rightarrow \infty$ будет неограниченно возрастать ($\alpha_i > 0$), либо уменьшаться ($\alpha_i < 0$). Случай $\alpha_i = 0$ является граничным, он соответствует существованию гармонических колебаний в двухполюснике. Пассивному двухполюснику соответствует случай $\alpha_i < 0$. Поэтому действительные части корней должны быть отрицательными.

Если корни кратные, то вычет в полюсе кратности n вычисляется по

формуле (2.114). Рассмотрим его. Обозначим $\frac{N(p)}{M(p)} (p - p_i)^n = A(p)$.

Тогда производная

$$\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \{ A(p) e^{pt} \} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m A^{(m)}(p) (e^{pt})^{n-1-m} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m A^{(m)}(p) t^{n-m-1} e^{pt},$$

где C_{n-1}^m — число сочетаний из $n-1$ по m ; $A^{(m)}(p)$ производная порядка m от $A(p)$.

Подставив выражение для производной в (2.120), получим вычет в n -кратном полюсе p_i :

$$\operatorname{res}(p = p_i) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m A^{(m)}(p_i) t^{n-m-1} e^{p_i t}. \quad (2.115)$$

Как видно из (2.115) поведение $\operatorname{res}(p = p_i)$ при $t \rightarrow \infty$ существенно зависит от знака действительной части корня p_i и кратности корня n . Если $\operatorname{Re} p_i < 0$, то при любой кратности n $\operatorname{res}(p = p_i) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\operatorname{Re} p_i = 0$ (корень мнимый), то при $n > 1$ $\operatorname{res}(p = p_i) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, что не соответствует пассивному двухполюснику.

На комплексной плоскости (рис. 2.51) $\operatorname{Re} p_i < 0$ соответствует левая часть плоскости, $\operatorname{Re} p_i > 0$ — правая полуплоскость, а $\operatorname{Re} p_i = 0$ — мнимая ось.

Действительным корням отвечает ось $\operatorname{Re} p$. Если двухполюсник пассивный, то резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы:

1. Полюсы его входного сопротивления располагаются в левой части плоскости ($\operatorname{Re} p_i < 0$), они могут быть кратными.
2. Если полюсы располагаются на мнимой оси ($\operatorname{Re} p_i = 0$), то они должны быть однократными.
3. Комплексные полюсы располагаются в левой части плоскости комплексно сопряженными парами симметрично относительно действительной оси.

Чтобы установить место расположения полюсов входной проводимости, найдем импульсную характеристику для тока через двухполюсник (рис. 2.52).

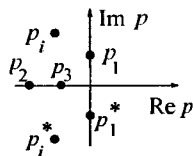


Рис. 2.51

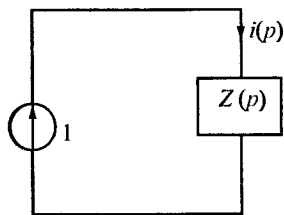


Рис. 2.52

$$h(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

Импульсная характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{M(p)}{N(p)} e^{pt} dp.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, можно сделать следующие выводы.

1. Если двухполюсник пассивный, то полюсы его входной проводимости располагаются в левой части плоскости ($\operatorname{Re} p_i < 0$). Они могут быть кратными.

2. Если имеются полюсы на мнимой оси, то они должны быть однократными.

3. Комплексные полюсы располагаются в левой части плоскости комплексно сопряженными парами симметрично относительно действительной оси.

Так как полюсы входной проводимости являются нулями входного сопротивления, а полюсы входного сопротивления являются нулями входной проводимости, то можно сделать выводы относительно расположения нулей и полюсов входного сопротивления (проводимости). Нули и полюсы входного сопротивления (проводимости) пассивного двухполюсника находятся в левой части плоскости или на мнимой оси; в последнем случае они должны быть однократными.

4. Два двухполюсника, имеющие разную структуру, эквивалентны в электрическом смысле, если их сопротивления или проводимости равны во всем спектре частот. Очевидно, эквивалентность имеет место, если совпадают их нули и полюсы и постоянные H .

5. Два двухполюсника называются обратными, если произведение их сопротивлений или проводимостей равно постоянной величине. Очевидно, это свойство выполняется, если нули и полюсы одного двухполюсника совпадают с полюсами и нулями другого.

Например, если

$$Z_I = \frac{j\omega H_1(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2k-1}^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2k-2}^2)};$$

$$Z_{II} = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_2^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2k-2}^2)}{j\omega H_2(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2) \dots (\omega^2 - \omega_{2k-1}^2)}.$$

Тогда $Z_I Z_{II} = \frac{H_1}{H_2} = \text{const}$ и двухполосники I и II являются обратными.

Пример 2.25

Последовательный (рис. 2.53, а) и параллельный (рис. 2.53, б) контуры являются взаимно обратными.

$$Z_{\text{посл}} = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = r(1 + jQ\alpha), \text{ где } Q = \frac{\omega_0 L}{r}; \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \alpha;$$

$$Z_{\text{пар}} = \frac{\left(\eta_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) (r_2 + j\omega L)}{r_1 + r_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \approx \frac{L/C}{r(1 + jQ\alpha)} = \frac{R_{\text{ос}}}{1 + jQ\alpha},$$

где

$$\eta_1 \ll \frac{1}{\omega C}; r_2 \ll \omega L; \eta_1 + r_2 = r; \frac{L}{C} = \rho^2; \frac{\rho^2}{r} = R_{\text{ос}}; Z_{\text{посл}} Z_{\text{пар}} = r R_{\text{ос}} = \text{const}.$$

Следовательно, параллельный и последовательный контуры взаимно обратны.

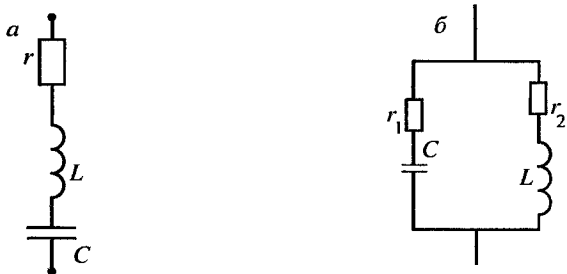


Рис. 2.53

2.6.3. Синтез схем двухполосников по заданной функции входного сопротивления (проводимости)

Задача синтеза заключается в построении схемы двухполосника по заданной функции его входного сопротивления или проводимости. В отличие от задачи анализа, которая решается однозначно, задача синтеза имеет несколько вариантов решения, каждый из которых сводится к отысканию комбинации элементов электрической цепи, в целом удовлетворяющей функции входного сопротивления или проводимости. При этом используются свойства функций $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ и составных элементов.

Синтез состоит из двух этапов.

1. Разложение $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ на составляющие их элементы.
2. Реализация.

При разложении $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ на составляющие их элементы используются свойства этих функций. Этап реализации может быть решен только в том случае, если двухполосник может быть составлен из положительных вещественных элементов: сопротивлений, индуктивностей, емкостей. При этом в физической реализуемости, осуществимости можно убедиться заранее, если провести исследование свойств $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$, описанных в п. 2.6.2.

Синтезируемый двухполосник будет реализуем, если

- коэффициенты полиномов числителя и знаменателя $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ положительны;
- отсутствуют нули и полюсы $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ в правой полуплоскости комплексного переменного p ;
- нули и полюсы $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$, расположенные на мнимой оси, однократные;
- действительные части $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ положительны или равны нулю.

Для построения двухполосника по заданной функции $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ применяют:

- метод последовательного выделения нулей и полюсов;
- метод разложения $Z_{\text{вх}}(p)$ или $Y_{\text{вх}}(p)$ в непрерывную дробь.

Метод последовательного выделения нулей и полюсов

Пусть $Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}$. Все коэффициенты a_j ($j = \overline{1, n}$),

b_j ($j = \overline{1, m}$) положительны. Если степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя, то поделив числитель на знаменатель по правилам деления многочлена на многочлен (см. глава 1), получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \alpha_\infty p + \frac{a'_m p^m + a'_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \alpha_\infty p + Z_1(p),$$

где $\alpha_\infty = \frac{a_n}{b_m}$ — действительная положительная величина. При $p = j\omega$

$\alpha_\infty p = j\alpha_\infty \omega$, т.е. на мнимой оси $\text{Re}(\alpha_\infty p) = 0$. Так как $\text{Re}Z_{\text{вх}}(p) \geq 0$ при $p = j\omega$, то $\text{Re}Z_1(j\omega) \geq 0$ и $Z_1(j\omega)$ удовлетворяют условиям реализуемости.

Если $Z_1(p)$ (а следовательно и $Z_{\text{вх}}(p)$) имеет полюсы $p_k = \pm j\omega_k$ и $p = 0$ с вычетами α_k и α_0 , то $Z_1(p)$ можно разложить на элементарные дроби:

$$Z_1(p) = \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \left(\frac{\alpha_k}{p + j\omega_k} + \frac{\alpha_k}{p - j\omega_k} \right) + Z_2(p) = \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Z_2(p). \quad (2.116)$$

Каждое слагаемое под знаком суммы в (2.116) соответствует паре комплексно сопряженных корней знаменателя на мнимой оси.

На мнимой оси выражения $\frac{\alpha_0}{p}$ и $\frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}$ принимают чисто мнимые значения и поэтому $\text{Re}Z_2(p) \geq 0$, т.е. функция $Z_2(p)$ удовлетворяет условиям реализуемости.

Функция $Z_2(p)$, получившаяся из функции $Z_1(p)$ после выделения из последней всех полюсов, лежащих на мнимой оси, может иметь полюсы в левой полуплоскости.

Если $Z_2(p)$ не имеет полюсов в левой полуплоскости, то в соответствии с теоремой Лиувилля она равна постоянной a_0 .

Если же $Z_2(p)$ имеет полюсы в левой части плоскости, то, найдя их, получим

$$Z_2(p) = \sum_{k=1}^l \left(\frac{\gamma_k + j\delta_k}{p + \beta_k - j\omega_k} + \frac{\gamma_k - j\delta_k}{p + \beta_k + j\omega_k} \right) + \alpha_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^l \frac{2[\gamma_k(p + \beta_k) - \delta_k\omega_k]}{(p + \beta_k)^2 + \omega_k^2} + \alpha_0. \quad (2.117)$$

Из (2.117) видно, что корни в левой полуплоскости комплексного переменного p имеют комплексно сопряженные вычеты. Каждое слагаемое под знаком суммы в (2.117) соответствует паре комплексно сопряженных корней в левой полуплоскости. Так как в результате выделения полюсов в $Z_2(p)$ оставшаяся часть функции особенностей не имеет, то она равна постоянной α_0 .

Учитывая (2.116), (2.117), функция $Z_{\text{вх}}(p)$ может быть представлена в виде

$$Z_{\text{вх}}(p) = \alpha_\infty p + \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2} + \sum_{k=1}^l \frac{2[\gamma_k(p + \beta_k) - \delta_k\omega_k]}{(p + \beta_k)^2 + \omega_k^2} + \alpha_0. \quad (2.118)$$

В результате функция $Z_{\text{вх}}(p)$ разложена на составляющие элементы. Перед реализацией необходимо определить коэффициенты $\alpha_\infty, \alpha_0, \alpha_k, \gamma_k$.

Коэффициент $\alpha_\infty = \frac{a_n}{b_n}$. Для определения коэффициента a_0 умножим левую и правую части (2.118) на p и перейдем к пределу. Получим

$$\lim_{p \rightarrow 0} [pZ_{\text{вх}}(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left\{ \alpha_\infty p^2 + \alpha_0 + \sum_{k=1}^q \frac{2\alpha_k p^2}{p^2 + \omega_k^2} + \sum_{k=1}^l \frac{2\gamma_k p(p + \beta_k)}{p^2 + 2\beta_k p + \beta_k^2} + \alpha_0 p \right\}.$$

Из последнего соотношения получим

$$\alpha_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [pZ_{\text{вх}}(p)]. \quad (2.119)$$

Для определения α_k умножим обе части (2.118) на $(p^2 + \omega_k^2)$ и, перейдя к пределу при $p \rightarrow j\omega_k$, получим

$$\alpha_k = \frac{1}{2j\omega_k} \lim_{p \rightarrow \infty} [(p^2 + \omega_k^2)Z_{ex}(p)], \quad k = (\overline{1, q}).$$

(2.120)

Для определения $(\gamma_k + j\delta_k)$ умножим обе части (2.118) на $(p + \beta_k - j\omega_k)$ и перейдем к пределу при $p \rightarrow (-\beta_k + j\omega_k)$. Получим

$$(\gamma_k + j\delta_k) = \lim_{p \rightarrow (-\beta_k + j\omega_k)} [(p + \beta_k - j\omega_k)Z_{ex}(p)], \quad k = (\overline{1, l}). \quad (2.121)$$

Для определения $(\gamma_k - j\delta_k)$ умножим обе части (2.118) на $(p + \beta_k + j\omega_k)$ и перейдем к пределу при $p \rightarrow (-\beta_k - j\omega_k)$. Получим

$$(\gamma_k - j\delta_k) = \lim_{p \rightarrow (-\beta_k - j\omega_k)} [(p + \beta_k + j\omega_k)Z_{ex}(p)], \quad k = (\overline{1, l}). \quad (2.122)$$

Решая совместно (2.121) и (2.122), получим γ_k, δ_k ($k = \overline{1, l}$).

Рассмотрим реализацию. Первое слагаемое в (2.124) означает полюс при $p \rightarrow \infty$, следовательно, в схеме двухполюсника это слагаемое реализуется индуктивностью $L_{2n} = \alpha_\infty$. Второе слагаемое $\frac{\alpha_0}{p}$ имеет

полюс при $p \rightarrow 0$, что равносильно наличию в схеме емкости $C_0 = \frac{1}{\alpha_0}$.

Каждое слагаемое в первой сумме соответствует параллельно включенным емкости $C_k = \frac{1}{2\alpha_k}$ и индуктивности $L_k = \frac{1}{\omega_k^2 C_k}$; $\omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}$, $k = (\overline{1, q})$.

Каждое из слагаемых во второй сумме выражения (2.118) приводится к виду

$$\frac{2\gamma_k p + 2(\gamma_k \beta_k - \delta_k \omega_k)}{p^2 + 2\beta_k p + \beta_k^2 + \omega_k^2}.$$

Сравним полученное выражение с сопротивлением двухполюсника $Z_k(p)$, приведенного на рис. 2.54.

$$Z_k(p) = \frac{\frac{1}{C_k r_k} p + \frac{R_k}{L_k C_k r_k}}{p^2 + p \left(\frac{R_k}{L_k} + \frac{1}{C_k r_k} \right) + \frac{R_k + r_k}{r_k} \Omega_k^2}; \quad \Omega_k^2 = \frac{1}{L_k C_k}.$$

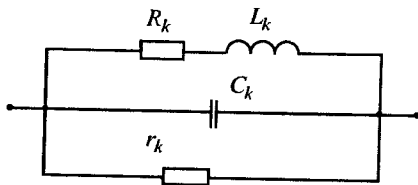


Рис. 2.54

$$\text{Если } 2\gamma_k = \frac{1}{C_k r_k}; \quad 2(\gamma_k \beta_k - \delta_k \omega_k) = \frac{R_k}{L_k C_k r_k}; \quad 2\beta_k = \frac{R_k}{L_k} + \frac{1}{C_k r_k};$$

$$\beta_k^2 + \omega_k^2 = \frac{R_k + r_k}{r_k} \Omega_k^2, \text{ то каждое слагаемое во второй сумме (2.118)}$$

может быть реализовано двухполюсником (рис. 2.54). Для расчета параметров двухполюсника имеется требуемое число уравнений.

И, наконец, последнее слагаемое в (2.118) реализуется сопротивлением $r = \alpha_0$.

Таким образом, применение метода последовательного выделения нулей и полюсов приводит в общем случае к реализации двухполюсника в виде $Y_{\text{вх}}(p)$.

Если в качестве характеристики синтезируемого двухполюсника задана проводимость $Y_{\text{вх}}(p)$, то синтез проводится таким же образом, как показано выше. При этом в качестве реализации получается двухполюсник, обратный приведенному на рис. 2.55.

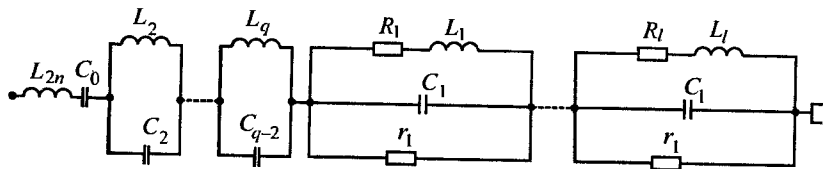


Рис. 2.55

Метод разложения в непрерывную дробь

При синтезе этим методом используются канонические цепные схемы (рис. 2.56).

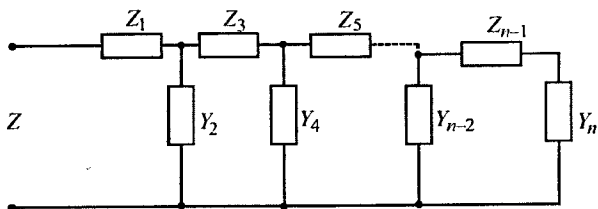


Рис. 2.56

Для такой схемы

$$Z = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \dots + \frac{1}{Z_{n-1} + \frac{1}{Y_n}}}}}}$$

Синтез двухполюсника этим методом производится следующим образом. Допустим, что заданная функция входного сопротивления двухполюсника $Z_{\text{вх}}(p)$ удовлетворяет условиям реализуемости:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_{2n}p^{2n} + a_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + a_2p^2 + a_0}{b_{2n-1}p^{2n-1} + b_{2n-3}p^{2n-3} + \dots + b_3p^3 + b_1p}$$

Степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя на единицу. Тогда, поделив числитель на знаменатель, получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n}}{b_{2n-1}} p + \frac{N_1(p)}{M(p)} = \frac{a_{2n}}{b_{2n-1}} p + \frac{1}{\frac{M(p)}{N_1(p)}},$$

где остаток от деления $N_1(p)$ имеет степень старшего члена $(2n-2)$, а $M(p)$ — степень $(2n-1)$. Поэтому, разделив $M(p)$ на $N_1(p)$, получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_{2n}}{b_{2n-1}} p + \frac{1}{dp + \frac{M_1(p)}{N_1(p)}},$$

Первое слагаемое в последнем выражении имеет нуль при $p = 0$ и полюс при $p \rightarrow \infty$, следовательно оно реализуется индуктивностью, т.е. $\frac{a_{2n}}{b_{2n-1}} = L_1$. Второе слагаемое (dp) имеет полюс при $p = 0$ и нуль при $p > \infty$. Следовательно, оно реализуется емкостью, т.е. $d = C_1$. Кроме того, $M_1(p)$ — остаток от деления $M(p)$ на $N_1(p)$ — имеет степень меньше степени полинома $N_1(p)$. Поэтому

$$Z_{\text{вх}}(p) = L_1 p + \frac{1}{p C_1 + \frac{1}{\frac{N_1(p)}{M_1(p)}}}$$

Разделив $N_1(p)$ на $M_1(p)$, получим $\frac{N_1(p)}{M_1(p)} = p L_2 + \frac{N_2(p)}{M_1(p)}$. Остаток $N_2(p)$ от деления $N_1(p)$ на $M_1(p)$ имеет степень меньше на единицу, чем полином $M_1(p)$, поэтому

$$Z_{\text{вх}}(p) = L_1 p + \frac{1}{p C_1 + \frac{1}{p L_2 + \frac{1}{\frac{M_1(p)}{N_2(p)}}}}$$

Деление продолжается до тех пор, пока в остатке не получится сопротивление или проводимость известного двухполюсника.

В итоге получаем полную схему реактивного двухполюсника рис. 2.57. При синтезе путем разложения в непрерывную дробь схема синтезируемого двухполюсника зависит от того, как расположены

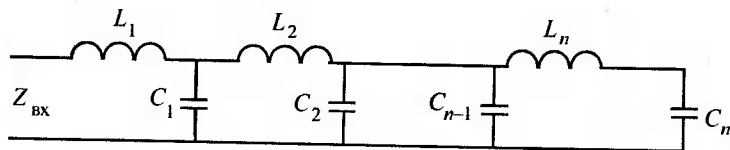


Рис. 2.57

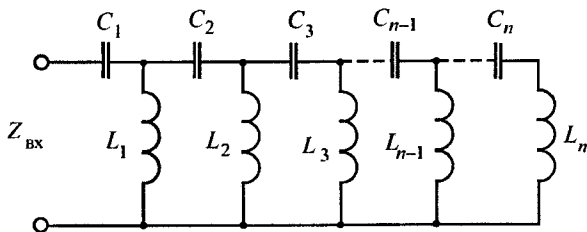


Рис. 2.58

полиномы $N(p)$ и $M(p)$ — по восходящим или нисходящим степеням p . Выше был рассмотрен способ, когда полиномы расположены по нисходящим степеням p . Теперь расположим их по восходящим степеням, т.е. пусть

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_0 + a_2 p^2 + a_4 p^4 + \dots + a_{2n} p^{2n}}{b_1 p + b_3 p^3 + b_5 p^5 + \dots + b_{2n-1} p^{2n-1}}.$$

Разделив $N(p)$ на $M(p)$, получим

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{a_0}{b_1 p} + \frac{1}{\frac{M(p)}{N_1(p)}} = \frac{1}{p C_1} + \frac{1}{\frac{1}{p L_1 + \frac{1}{p C_2 + \frac{1}{p L_2 + \dots}}}}.$$

В результате получим двухполосник, приведенный на рис. 2.58.

Аналогично можно синтезировать двухполосник по заданной проводимости $Y_{\text{вх}}(p)$.

2.7. Четырехполосники

Четырехполосником называется любая электрическая цепь, имеющая две пары зажимов (рис. 2.59). Зажимы, к которым подключается источник сигнала, называются входными, а к которым подключается нагрузка, называются выходными.

В зависимости от типа дифференциального уравнения, которыми описываются четырехполосники, они могут быть линейными или нелинейными.



Рис. 2.59

Линейный четырехполосник описывается линейным дифференциальным уравнением, нелинейный четырехполосник — нелинейным дифференциальным уравнением.

В зависимости от типа линейного дифференциального уравнения, которым описывается четырехполосник, последние могут быть с сосредоточенными или распределенными параметрами. Линейный четырехполосник, описываемый линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, является четырехполосником с сосредоточенными параметрами. Примерами таких четырехполосников являются фильтры, транзисторы. Линейный четырехполосник с распределенными параметрами описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных. Примером такого четырехполосника является рельсовая цепь.

Четырехполосники могут быть активными или пассивными. На внешних зажимах активного четырехполосника обнаруживаются напряжения, либо токи через двухполосники, подключаемые к его внешним зажимам. Появление напряжений или токов на внешних зажимах четырехполосника является следствием наличия внутри него нескомпенсированных источников энергии. На внешних зажимах пассивного четырехполосника не обнаруживается напряжений и токов (при подключении к нему двухполосников), что говорит либо об отсутствии внутри него источников энергии, либо об их скомпенсированности относительно внешних зажимов.

Например, в четырехполоснике (рис. 2.60) имеется три источника напряжения U . Однако относительно внешних зажимов они скомпенсированы и напряжения на выходе и входе равны нулю. Поэтому, несмотря на наличие внутри него источников энергии, данный четырехполосник является пассивным.

Активный четырехполосник называется автономным, если при отсоединении его от остальной схемы на его внешних зажимах обнаруживаются напряжения. Если источники внутри четырехполосника за-

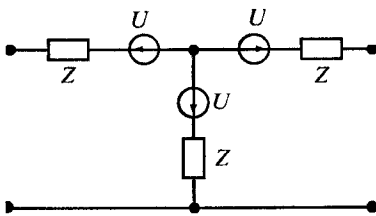


Рис. 2.60

висимы, то при отключении его от остальной цепи напряжения на разомкнутых зажимах четырехполосника не обнаруживаются. Такой четырехполосник называется неавтономным. Примером такого четырехполосника является модель транзистора.

Четырехполосники бывают обратимые и необратимые. Обратимые четырехполосники подчиняются принципу взаимности. Такие четырехполосники имеют матрицу сопротивлений или проводимостей, симметричную относительно главной диагонали (см. пример 2.9). Необратимые четырехполосники имеют матрицу сопротивлений или проводимостей, несимметричную относительно главной диагонали. Они не подчиняются принципу взаимности. Примерами таких четырехполосников являются схемы, содержащие зависимые источники тока или напряжения (см. пример 2.11).

Четырехполосник называется симметричным, если перемена местами его входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепи, к которой он подключен. В противном случае он несимметричен. Симметричный четырехполосник всегда обратим.

Большим достоинством теории четырехполосника, обусловившим ее широкое применение, является следующее.

1. Пользуясь обобщенными параметрами четырехполосника, можно рассчитать напряжения и токи на его входе и выходе, не производя расчеты внутри цепи, рассматриваемой как четырехполосник. Это дает возможность оценить передающие свойства цепей, различных по своей структуре (например, фильтр, рельсовая цепь).

2. Сложная электрическая цепь (например, канал связи, рельсовая цепь большой протяженности с разветвлениями) может быть разбита на ряд четырехполосников, включенных последовательно, параллельно или комбинированно. Зная параметры отдельных четырехполосников, можно получить формулы для расчета характеристик всей цепи через параметры составляющих ее четырехполосников.

2.7.1. Системы уравнений четырехполюсника

При выводе уравнений четырехполюсника будем пользоваться методом комплексных амплитуд. Предположим, что на вход четырехполюсника (рис. 2.61, а) действует входное напряжение с комплексной амплитудой \dot{U}_1 , за счет чего на его входе (на Z_H) возникает выходное напряжение с комплексной амплитудой $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H$, где \dot{I}_2 — комплексная амплитуда тока на выходе.

В соответствии с теоремой компенсации сопротивление Z_H на рис. 2.61, а можно заменить источником \dot{U}_2 , что не изменит токов и напряжений в четырехполюснике. В результате получим схему, приведенную на рис. 2.61, б.

В общем случае четырехполюсник может представлять собой сложную цепь, имеющую много узлов и ветвей. Используя метод контурных токов, получим систему уравнений, описывающую четырехполюсник

$$Z \dot{I} = \dot{U}, \quad (2.123)$$

где Z — матрица сопротивлений, равная

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}; \quad \dot{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix}; \quad \dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

\dot{I} — вектор-столбец контурных токов, а \dot{U} — вектор-столбец заданных напряжений четырехполюсника.

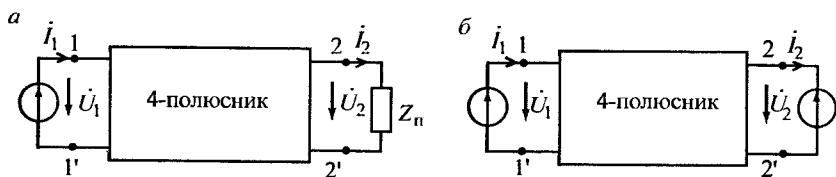


Рис. 2.61

Решая методом Крамера уравнение (2.123) относительно входного \dot{I}_1 и выходного \dot{I}_2 токов, получим

$$\dot{I}_1 = \frac{D_1}{\Delta}; \quad \dot{I}_2 = \frac{D_2}{\Delta},$$

где Δ — определитель матрицы Z , а D_1 и D_2 — определители матриц

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ \dot{U}_2 & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} Z_{11} & \dot{U}_1 & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & \dot{U}_2 & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & 0 & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}, \text{ соответственно.}$$

Разложив определители D_1 и D_2 по элементам столбца, содержащего задающие напряжения \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , получим

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (-1)^{1+1} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 + (-1)^{2+1} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_2 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_2; \\ -\dot{I}_2 &= (-1)^{1+2} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 + (-1)^{2+2} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2 = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2, \end{aligned}$$

где $\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{12}, \Delta_{22}$ — алгебраические дополнения элементов $Z_{11}, Z_{21}, Z_{12}, Z_{22}$.

Полученную систему уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 \end{cases}, \quad (2.124)$$

где обозначено $Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$; $Y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}$; $Y_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta}$; $Y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$.

Уравнения (2.129) называются системой Y .

Физический смысл параметров в системе (2.124) можно выяснить, проделав опыты короткого замыкания на входе и выходе.

При $\dot{U}_2 = 0$ (короткое замыкание на выходе) из системы (2.124) получим $Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}$ — входная проводимость четырехполосника при

коротком замыкании на выходе; $Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$ — взаимная проводимость

между входом и выходом при закороченных выходных зажимах.

При $\dot{U}_1 = 0$ (закорочены входные зажимы) из системы (2.124)

получим $Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}$ — входная проводимость со стороны выходных зажимов при замкнутых входных зажимах; $Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}$ — взаимная

проводимость между входом и выходом при закороченных входных зажимах.

Решая систему (2.124) относительно напряжений на входе и выходе, получим

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (2.125)$$

где $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$; $Z_{12} = -\frac{Y_{12}}{\Delta_Y}$; $Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta_Y}$; $Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$,

$\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{21}Y_{12}$ — определитель системы (2.124).

Система (2.125) называется системой Z .

Физический смысл параметров системы (2.125) можно выяснить, проделав опыт холостого хода на входе и выходе четырехполюсника.

При холостом ходе на выходе ($\dot{I}_2 = 0$) из (2.125) получим $Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ — входное сопротивление четырехполюсника при холостом ходе на выходе; $Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$ — взаимное сопротивление между входом и выходом при холостом ходе на выходе четырехполюсника.

При холостом ходе на входе ($\dot{I}_1 = 0$) из (2.125) получим: $Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}$ — взаимное сопротивление между входом и выходом при холостом ходе на входе четырехполюсника; $Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ — входное сопротивление четырехполюсника со стороны выходных зажимов при холостом ходе на входе.

Переход от системы Y к системе Z можно коротко записать так:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{22}/\Delta_Y & -Y_{12}/\Delta_Y \\ -Y_{21}/\Delta_Y & Y_{11}/\Delta_Y \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

Соотношение (2.126) называется формулой перехода.

Если из системы (2.124) найти \dot{U}_1 и \dot{I}_1 , то получим

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (2.127)$$

где $A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}$; $A_{12} = \frac{1}{Y_{21}}$; $A_{21} = -\frac{\Delta_Y}{Y_{21}}$; $A_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}}$.

Система уравнений (2.127) называется системой A .

При холостом ходе на выходе ($\dot{I}_2 = 0$) из первого уравнения (2.127)

получим $A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$ — затухание четырехполосника по напряжению при холостом ходе на выходе, а из второго уравнения $A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}$ — переходная проводимость при холостом ходе на выходе.

При коротком замыкании на выходе ($\dot{U}_2 = 0$) из системы (2.127)

получим $A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}$ — переходное сопротивление четырехполосника при коротком замыкании на выходе; $A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}$ — затухание четырехполосника по току при коротком замыкании на выходе.

Формула перехода от системы Y к системе A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{22}/Y_{21} & 1/Y_{21} \\ -\Delta_Y/Y_{21} & Y_{11}/Y_{21} \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

Найдя из уравнений (2.127) \dot{U}_2 и \dot{I}_2 , получим

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1, \end{cases} \quad (2.129)$$

где

$$B_{11} = \frac{A_{22}}{\Delta_A}; B_{12} = -\frac{A_{12}}{\Delta_A}; B_{21} = -\frac{A_{21}}{\Delta_A};$$

$$B_{22} = \frac{A_{11}}{\Delta_A}; \Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Для обратимого четырехполосника $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, $Y_{12} = -Y_{21}$. Поэтому

$$\Delta_A = -\frac{Y_{22}Y_{11}}{Y_{21}^2} + \frac{Y_{22}Y_{11} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}^2} = 1; B_{11} = A_{22};$$

$$B_{12} = -A_{12}; B_{21} = -A_{21}; B_{22} = A_{11}.$$

Формула перехода от системы A к B в общем случае имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22}/\Delta_A & -A_{12}/\Delta_A \\ -A_{21}/\Delta_A & A_{11}/\Delta_A \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

При холостом ходе на входе ($\dot{I}_1 = 0$) из уравнений (2.129) получим:

$B_{11} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$ — комплексный коэффициент передачи четырехполосника при холостом ходе на входе; $B_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ — переходная проводимость четырехполосника при холостом ходе на входе.

При коротком замыкании на входе ($\dot{U}_1 = 0$) из уравнений (2.129)

получим $B_{12} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$ — переходное сопротивление при коротком замыкании на входе; $B_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ — комплексный коэффициент передачи четырехполосника по току при коротком замыкании на входе.

Из системы уравнений (2.127) найдем \dot{U}_1 и \dot{I}_2 , получим

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_2 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2, \end{cases} \quad (2.131)$$

где $H_{11} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$; $H_{12} = \frac{\Delta_A}{A_{22}}$; $H_{21} = \frac{1}{A_{22}}$; $H_{22} = -\frac{A_{21}}{A_{22}}$. Для обратимого четырехполюсника $\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 1$ и $H_{12} = 1/A_{22} = H_{21}$. Система (2.131) называется *H*-системой.

Формула перехода от системы *A* к системе *H* имеет вид:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}/A_{22} & \Delta_A/A_{22} \\ 1/A_{22} & -A_{21}/A_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.132)$$

При коротком замыкании на выходе ($\dot{U}_1 = 0$) из системы (2.131) получим $H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ — входное сопротивление четырехполюсника при коротком замыкании на выходе; $H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ — комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по току при коротком замыкании на выходе.

При холостом ходе на входе ($\dot{I}_1 = 0$) из уравнений (2.131) получим $H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$ — затухание четырехполюсника по напряжению при холостом ходе на входе; $H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}$ — проводимость четырехполюсника со стороны выходных зажимов при холостом ходе на входе.

Решая систему уравнений (2.137) относительно \dot{I}_1 , \dot{U}_2 , получим

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (2.133)$$

где $G_{11} = \frac{H_{22}}{\Delta_H}$; $G_{12} = -\frac{H_{12}}{\Delta_H}$; $G_{21} = -\frac{H_{21}}{\Delta_H}$; $G_{22} = \frac{H_{11}}{\Delta_H}$. Система (2.133) называется *G*-системой. Формула перехода от системы *H* к системе *G* имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22}/\Delta_H & -H_{12}/\Delta_H \\ -H_{21}/\Delta_H & H_{11}/\Delta_H \end{bmatrix}. \quad (2.134)$$

При холостом ходе на выходе ($\dot{I}_2 = 0$) из уравнений (2.133) получим

$G_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}$ — входная проводимость четырехполюсника при холостом

ходе на выходе; $G_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$ — комплексный коэффициент передачи

четырёхполюсника при холостом ходе на выходе.

При коротком замыкании на входе ($\dot{U}_2 = 0$) из уравнений (2.133)

получим $G_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}$ — затухание по току четырехполюсника при

коротком замыкании входа; $G_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ — входное сопротивление

четырёхполюсника со стороны выходных зажимов при коротком замыкании входа.

Таким образом, в любой системе уравнений четырехполюсник характеризуется в общем случае четырьмя параметрами. Если четырехполюсник обратим, то $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ и он может характеризоваться тремя параметрами. В случае симметричного четырехполюсника $\Delta_{11} = \Delta_{22}$, откуда следует $Y_{11} = Y_{22}$, $Z_{11} = Z_{22}$ и т.д. Это сокращает число необходимых параметров до двух.

Формулы перехода из одной системы уравнений в другую, аналогичные приведенным (см. (2.126), (2.128), (2.130), (2.132), (2.134)), могут быть получены так же, как получены упомянутые.

Связь между параметрами различных систем уравнений приведена в табл. 2.2.

Параметры любой из систем четырехполюсника могут быть либо рассчитаны любым методом анализа линейных электрических цепей, либо из опытов холостого хода или короткого замыкания. Пример применения одного из методов анализа линейных цепей (контурных

Таблица 2.2

	Y	Z	A	B	H	G
Y	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ \Delta_Z & \Delta_Z \end{matrix}$ $\begin{matrix} -Z_{21} & Z_{11} \\ \Delta_Z & \Delta_Z \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{22} & -\Delta_A \\ A_{12} & A_{12} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -A_{11} \\ A_{12} & A_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -B_{11} & 1 \\ B_{12} & B_{12} \end{matrix}$ $\begin{matrix} -\Delta_B & B_{22} \\ B_{12} & B_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -H_{12} \\ H_{11} & H_{11} \end{matrix}$ $\begin{matrix} H_{21} & \Delta_H \\ H_{11} & H_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta_G & G_{12} \\ G_{22} & G_{22} \end{matrix}$ $\begin{matrix} -G_{21} & 1 \\ G_{22} & G_{22} \end{matrix}$
Z	$\begin{matrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ \Delta_Y & \Delta_Y \end{matrix}$ $\begin{matrix} -Y_{21} & Y_{11} \\ \Delta_Y & \Delta_Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & -\Delta_A \\ A_{21} & A_{21} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -A_{22} \\ A_{21} & A_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{22} & 1 \\ -B_{21} & B_{21} \end{matrix}$ $\begin{matrix} -\Delta_B & B_{11} \\ -B_{21} & B_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta_H & H_{12} \\ H_{22} & H_{22} \end{matrix}$ $\begin{matrix} H_{21} & 1 \\ -H_{22} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -G_{12} \\ G_{11} & G_{11} \end{matrix}$ $\begin{matrix} G_{21} & \Delta_G \\ G_{11} & G_{11} \end{matrix}$
A	$\begin{matrix} Y_{22} & 1 \\ Y_{21} & Y_{21} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \Delta_Y & Y_{11} \\ Y_{21} & Y_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & -\Delta_Z \\ Z_{21} & Z_{21} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -Z_{22} \\ Z_{21} & Z_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{22} & -B_{12} \\ \Delta_B & \Delta_B \end{matrix}$ $\begin{matrix} -B_{21} & B_{11} \\ \Delta_B & \Delta_B \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\Delta_H & H_{11} \\ H_{21} & H_{21} \end{matrix}$ $\begin{matrix} H_{22} & 1 \\ -H_{21} & H_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -G_{22} \\ G_{21} & G_{21} \end{matrix}$ $\begin{matrix} G_{11} & -\Delta_G \\ G_{21} & G_{21} \end{matrix}$
B	$\begin{matrix} Y_{11} & 1 \\ Y_{12} & Y_{12} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \Delta_Y & Y_{22} \\ Y_{12} & Y_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{22} & -\Delta_Z \\ Z_{12} & Z_{12} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -Z_{11} \\ Z_{12} & Z_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{22} & -A_{12} \\ \Delta_A & \Delta_A \end{matrix}$ $\begin{matrix} -A_{21} & A_{11} \\ \Delta_A & \Delta_A \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -H_{11} \\ H_{12} & H_{12} \end{matrix}$ $\begin{matrix} H_{22} & -\Delta_H \\ H_{12} & H_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\Delta_G & G_{22} \\ G_{12} & G_{12} \end{matrix}$ $\begin{matrix} -G_{11} & 1 \\ G_{12} & G_{12} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{11} & Y_{11} \end{matrix}$ $\begin{matrix} Y_{21} & \Delta_Y \\ Y_{11} & Y_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta_Z & Z_{12} \\ Z_{22} & Z_{22} \end{matrix}$ $\begin{matrix} -Z_{21} & 1 \\ Z_{22} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{12} & \Delta_A \\ A_{22} & A_{22} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -A_{21} \\ A_{22} & A_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -B_{12} & 1 \\ B_{11} & B_{11} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \Delta_B & B_{21} \\ B_{11} & B_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{22} & -G_{12} \\ \Delta_G & \Delta_G \end{matrix}$ $\begin{matrix} -G_{21} & G_{11} \\ \Delta_G & \Delta_G \end{matrix}$
G	$\begin{matrix} \Delta_Y & Y_{12} \\ Y_{22} & Y_{22} \end{matrix}$ $\begin{matrix} -Y_{21} & 1 \\ Y_{22} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{11} & Z_{11} \end{matrix}$ $\begin{matrix} Z_{21} & \Delta_Z \\ Z_{11} & Z_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{21} & \Delta_A \\ A_{11} & A_{11} \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & -A_{12} \\ A_{11} & A_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -B_{21} & 1 \\ B_{22} & B_{22} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \Delta_B & B_{12} \\ B_{22} & B_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{22} & -H_{12} \\ \Delta_H & \Delta_H \end{matrix}$ $\begin{matrix} -H_{21} & H_{11} \\ \Delta_H & \Delta_H \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$

токов) дан в начале этого раздела. Рассмотрим ряд примеров применения опытов холостого хода или короткого замыкания для расчета параметров четырехполюсников.

Пример 2.26

Для четырехполюсника рис. 2.62, а найдем параметры в системе A .

В режиме холостого хода на выходе ($\dot{I}_2 = 0$) из схемы получим

$$A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 1; \quad A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{Z_1};$$

в режиме короткого замыкания на выходе ($\dot{U}_2 = 0$)

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = Z_2; \quad A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{1}{Z_1};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{\dot{U}_1 (Z_1 + Z_2)}{Z_1 Z_2}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_2}.$$

Подставив \dot{I}_1 и \dot{I}_2 в выражение для A_{22} , получим $A_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$.

Таким образом, матрица A для четырехполюсника (рис. 2.62, а) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{bmatrix}.$$

Пример 2.27

Найдем матрицу A четырехполюсника, приведенного на рис. 2.62, б.

В режиме холостого хода на выходе ($\dot{I}_2 = 0$) найдем $\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}$,

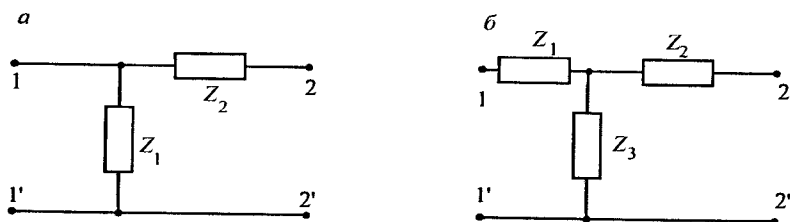


Рис. 2.62

поэтому $A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3}$; $\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_3}$, поэтому $A_{21} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{Z_3}$. В режиме

короткого замыкания по выходу ($\dot{i}_2 = 0$) $\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_3}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}$.

Поэтому $A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_2} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}{Z_3}$, $\dot{i}_1 = \frac{U_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}$,

поэтому $A_{22} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_2} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3}$.

Матрица A для четырехполосника на рис. 2.62, б имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_3}{Z_3} & \frac{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_3} & \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3} \end{bmatrix}.$$

Пример 2.28

Найдем A матрицу для мостового четырехполосника, приведенного на рис. 2.63, а.

В режиме холостого хода на выходе ($\dot{i}_2 = 0$) — см. схему

рис. 2.63, б — получим $\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{\dot{U}_1 Z_1}{Z_1 + Z_2} = \dot{U}_1 \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$. Поэтому

$A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1}$; $\frac{1}{2} \dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_2}$, поэтому $A_{21} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{U}_2} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$.

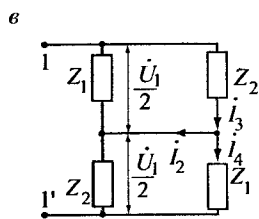
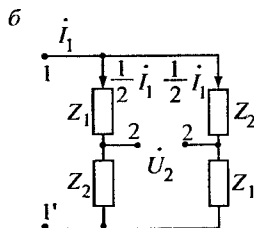
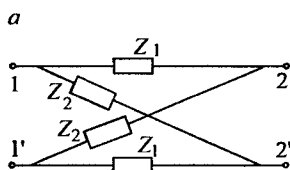


Рис. 2.63

В режиме короткого замыкания по выходу ($\dot{U}_2 = 0$) — см. схему рис. 2.63, в — получим

$$\dot{i}_2 = \dot{i}_4 - \dot{i}_3; \quad \dot{i}_4 = \frac{1}{2} \dot{U}_1 Z_1; \quad \dot{i}_3 = \frac{1}{2} \dot{U}_1 Z_2; \quad \dot{i}_2 = \frac{1}{2} \dot{U}_1 \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{1}{2} \dot{U}_1 \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 Z_2};$$

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1}{2} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}; \quad \text{поэтому } A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_2} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}; \quad A_{22} = \frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1}.$$

Таким образом, A -матрица для четырехполюсника рис. 2.63, а имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{Z_2 + Z_1}{2} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ \frac{Z_2 - Z_1}{2} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{bmatrix}.$$

Матрицы в других системах могут быть получены из A -матриц при помощи формул перехода, приведенных в табл. 2.2.

В цепях с распределенными параметрами широко используются другие матрицы, характерные для волновых процессов. Они связывают между собой падающие и отраженные волны, возникающие в линии с распределенными параметрами (рельсовая цепь, кабель в устройствах связи). На рис. 2.64 изображен линейный четырехполюсник, ко входу и выходу которого подключены две линии с волновыми сопротивлениями Z_{B1} и Z_{B2} . Линейный четырехполюсник можно описать уравнениями

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{i}_2 \\ \dot{i}_1 = A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{i}_2. \end{cases} \quad (2.135)$$

Комплексные амплитуды напряжений \dot{U}_1 , \dot{U}_2 и токов \dot{i}_1 , \dot{i}_2 связаны, как известно, с комплексными амплитудами падающих и отраженных волн следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{U}_{1\text{пад}} + \dot{U}_{1\text{отр}}; \quad \dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_{1\text{пад}}}{Z_{B1}} - \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{Z_{B1}}; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{пад}} + \dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{Z_{B2}} - \frac{\dot{U}_{2\text{отр}}}{Z_{B2}}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

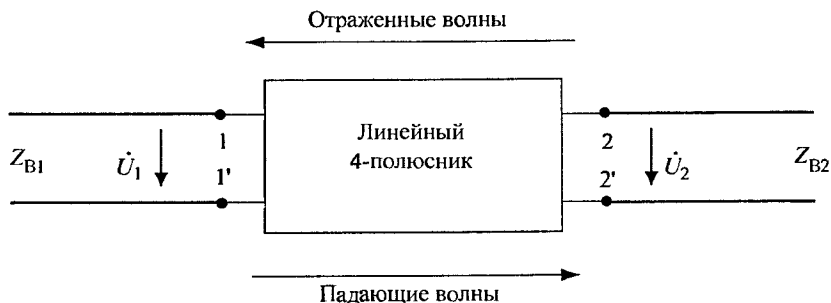


Рис. 2.64

Если соотношения (2.136) подставить в (2.135), то можно получить шесть систем уравнений, в каждой из которых связаны между собой комплексные амплитуды падающих и отраженных волн на входе и выходе линейного четырехполосника. Из всех возможных шести систем уравнений применяются две.

1. Приняв за независимые переменные комплексные амплитуды напряжений падающей и отраженной волн на выходе четырехполосника, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{U}_{1\text{пад}} = T_{11}\dot{U}_{2\text{пад}} + T_{12}\dot{U}_{2\text{отр}} \\ \dot{U}_{1\text{отр}} = T_{21}\dot{U}_{2\text{пад}} + T_{22}\dot{U}_{2\text{отр}}, \end{cases} \quad (2.137)$$

где

$$\begin{cases} T_{11} = \frac{1}{2} \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_{B2}} + A_{21}Z_{B1} + A_{22} \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right) \\ T_{12} = \frac{1}{2} \left(A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_{B2}} + A_{21}Z_{B1} - A_{22} \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right) \\ T_{21} = \frac{1}{2} \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_{B2}} - A_{21}Z_{B1} - A_{22} \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right) \\ T_{22} = \frac{1}{2} \left(A_{11} - \frac{A_{12}}{Z_{B2}} - A_{21}Z_{B1} + A_{22} \frac{Z_{B1}}{Z_{B2}} \right) \end{cases} \quad (2.138)$$

Матрица коэффициентов системы уравнений (2.137) $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$

называется волновой матрицей четырехполосника.

2. Если за независимые переменные принять комплексные амплитуды напряжений $\dot{U}_{1\text{пад}}$ и $\dot{U}_{2\text{отр}}$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{U}_{1\text{отр}} = S_{11}\dot{U}_{1\text{пад}} + S_{12}\dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{U}_{2\text{пад}} = S_{21}\dot{U}_{1\text{пад}} + S_{22}\dot{U}_{2\text{отр}}, \end{cases} \quad (2.139)$$

где $S_{11} = \frac{T_{21}}{T_{11}}$; $S_{12} = \frac{(T_{11}T_{12} - T_{12}T_{21})}{T_{11}}$; $S_{21} = \frac{1}{T_{11}}$; $S_{22} = -\frac{T_{12}}{T_{11}}$.

Матрицу коэффициентов уравнений (2.139) $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ называют матрицей рассеяния четырехполосника.

Широкое применение волновой матрицы T и матрицы рассеяния S обусловлено тем, что в них отсутствуют токи, которые трудно измерять при волновых процессах. Кроме того, существуют устройства (например, фильтры на поверхностных акустических волнах), в которых токи и напряжения носят формальный характер, но мощность, переносимую волной измерить можно. Поэтому вводят понятия волновых амплитуд или нормированных напряжений падающих и отраженных волн:

$$\begin{cases} \dot{U}_{\text{Н1пад}} = \frac{\dot{U}_{1\text{пад}}}{\sqrt{2Z_{\text{В1}}}}; & \dot{U}_{\text{Н1отр}} = \frac{\dot{U}_{1\text{отр}}}{\sqrt{2Z_{\text{В1}}}}; \\ \dot{U}_{\text{Н2пад}} = \frac{\dot{U}_{2\text{пад}}}{\sqrt{2Z_{\text{В2}}}}; & \dot{U}_{\text{Н2отр}} = \frac{\dot{U}_{2\text{отр}}}{\sqrt{2Z_{\text{В2}}}}; \end{cases} \quad (2.140)$$

Волновые амплитуды $\dot{U}_{\text{Н1пад}}$, $\dot{U}_{\text{Н1отр}}$, $\dot{U}_{\text{Н2пад}}$, $\dot{U}_{\text{Н2отр}}$ имеют размерность корня квадратного из мощности. Поэтому для вычисления мощности необходимо найти квадраты модулей соответствующих волновых амплитуд, т.е. $P_{1\text{пад}} = \dot{U}_{\text{Н1пад}} \dot{U}_{\text{Н1пад}}^*$;

$P_{1отр} = \dot{U}_{Н1отр} \dot{U}_{Н1отр}^*$; $P_{2пад} = \dot{U}_{Н2пад} \dot{U}_{Н2пад}^*$; $P_{2отр} = \dot{U}_{Н2отр} \dot{U}_{Н2отр}^*$,
 где * — означает комплексное сопряжение.

Подставив (2.140) в (2.137), получим систему уравнений для нормированных амплитуд

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Н1пад} &= T_{Н11} \dot{U}_{Н2пад} + T_{Н12} \dot{U}_{Н2отр}; \\ \dot{U}_{Н1отр} &= T_{Н21} \dot{U}_{Н2пад} + T_{Н22} \dot{U}_{Н2отр}, \end{aligned}$$

в которой нормированная волновая матрица $T_H = \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}} T$.

Таким же путем получают нормированную матрицу рассеяния

$$S_H = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \sqrt{\frac{Z_{B2}}{Z_{B1}}} \\ S_{21} \sqrt{\frac{Z_{B1}}{Z_{B2}}} & S_{22} \end{bmatrix}.$$

Выясним физический смысл волновых параметров четырехполюсника. Если в матрицах Y, Z, A, B, H, G физический смысл параметров связан с режимами холостого хода или короткого замыкания, то в матрицах T и S физический смысл увязывается с согласованным режимом нагрузки четырехполюсника, при котором $\dot{U}_{2отр} = 0$. В этом режиме из (2.143) и (2.145) получим

$$T_{11} = \frac{\dot{U}_{1пад}}{\dot{U}_{2пад}}; \quad T_{21} = \frac{\dot{U}_{1отр}}{\dot{U}_{2пад}}; \quad S_{11} = \frac{\dot{U}_{1отр}}{\dot{U}_{1пад}}; \quad S_{21} = \frac{\dot{U}_{2пад}}{\dot{U}_{1пад}}.$$

Коэффициенты $T_{11}, T_{21}, S_{11}, S_{21}$ определяют параметры четырехполюсника, нагруженного на согласованную линию, при прямой передаче. Коэффициент T_{11} определяет отношение амплитуд напряжений падающих волн на входе и выходе четырехполюсника и называется коэффициентом передачи. Коэффициент S_{11} называется коэффициентом отражения во входной линии при согласовании выходной. Коэффициент

$S_{21} = \frac{1}{T_{11}}$ называется коэффициентом пропускания. Коэффициент T_{21} связывает отраженную волну на входе с падающей волной на выходе четырехполосника.

Коэффициенты S_{22} и S_{12} имеют такой же физический смысл, как и S_{11} и S_{21} , только при изменении направления передачи на обратное.

2.7.2. Характеристические параметры четырехполосника

Приведенные в п. 2.7.1 параметры четырехполосника в системах Y, Z, A, B, H, G называются первичными параметрами четырехполосника. Используя их, рассмотрим параметры четырехполосника, определяющие его передаточные характеристики.

Характеристическими сопротивлениями четырехполосника называется пара сопротивлений Z_{C1} и Z_{C2} , которые выбраны таким образом, что при подключении к зажимам 2-2' сопротивления $Z_{H2} = Z_{C2}$ входное сопротивление четырехполосника со стороны зажимов 1-1' равно Z_{C1} , а при подключении к зажимам 1-1' сопротивления $Z_{H1} = Z_{C1}$ входное сопротивление четырехполосника со стороны зажимов 2-2' равно Z_{C2} . Сопротивление Z_{C1} называют входным, а Z_{C2} — выходным характеристическими сопротивлениями четырехполосника.

Возьмем систему A (2.127)

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

Входное сопротивление четырехполосника со стороны входных зажимов

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}},$$

где $Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ — сопротивление нагрузки на зажимах 2-2'. Нагрузим

четыреполосник на выходе на сопротивление $Z_2 = Z_{C2}$. Тогда в соответствии с определением должно выполняться равенство $Z_{\text{вх}} = Z_{C1}$. Поэтому из последнего соотношения получим

$$Z_{1C} = \frac{A_{11}Z_{2C} + A_{12}}{A_{21}Z_{2C} + A_{22}}. \quad (2.141)$$

Изменим направление передачи в четырехполоснике на обратное и возьмем систему B (2.129)

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1. \end{cases}$$

Входное сопротивление четырехполосника со стороны зажимов 2-2'

$$Z_{2\text{вх}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1}{B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1} = \frac{B_{11}Z_1 + B_{12}}{B_{21}Z_1 + B_{22}},$$

где $Z_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ — сопротивление нагрузки на зажимах 1-1'.

Нагрузим четырехполосник на входе сопротивлением $Z_1 = Z_{1C}$. Тогда в соответствии с определением должно выполняться равенство $Z_{2\text{вх}} = Z_{2C}$. Поэтому из последнего соотношения получим

$$Z_{2C} = \frac{B_{11}Z_{1C} + B_{12}}{B_{21}Z_{1C} + B_{22}}. \quad (2.142)$$

Принимая во внимание формулы перехода (2.130) и изменение направления передачи (A_{12} и A_{21} изменят знак), получим (2.142) в виде

$$Z_{2C} = \frac{A_{22}Z_{1C} + A_{12}}{A_{21}Z_{1C} + A_{11}}. \quad (2.143)$$

Из уравнений (2.141) и (2.143) получим

$$Z_{1C} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{22}A_{21}}}; \quad Z_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{11}A_{21}}}. \quad (2.144)$$

Режим четырехполосника, когда он нагружен на характеристические сопротивления, называется режимом согласованной нагрузки, или согласованного включения.

Сопротивления Z_{1C} и Z_{2C} относятся к характеристическим параметрам четырехполосника. Другими характеристическим параметрам являются постоянные передачи. Рассмотрим их.

Как показано в предыдущем разделе (2.7.1), для обратимого четырехполосника $\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\sqrt{A_{11}A_{22}}\right)^2 - \left(\sqrt{A_{12}A_{21}}\right)^2 = 1. \quad (2.145)$$

Если обозначить $\sqrt{A_{11}A_{22}} = \operatorname{ch} g$, то (2.151) можно записать в виде $\operatorname{ch}^2 g - \operatorname{sh}^2 g = 1$, т.е. $\sqrt{A_{12}A_{21}} = \operatorname{sh} g$.

Преобразуем систему уравнений (2.127). Используя выражение (2.144) и обозначения $\operatorname{ch} g$ и $\operatorname{sh} g$, получим

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} \operatorname{ch} g; \quad A_{12} = \sqrt{Z_{1C}Z_{2C}} \operatorname{sh} g; \quad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} \operatorname{ch} g; \quad A_{21} = \frac{\operatorname{sh} g}{\sqrt{Z_{1C}Z_{2C}}}.$$

Тогда уравнения (2.127) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} \operatorname{ch} g \dot{U}_2 + \sqrt{Z_{1C}Z_{2C}} \operatorname{sh} g \dot{I}_2 = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_{2C} \dot{I}_2 \operatorname{sh} g), \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{\sqrt{Z_{1C}Z_{2C}}} \operatorname{sh} g \dot{U}_2 + \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} \operatorname{ch} g \dot{I}_2 = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} \left(\dot{I}_2 \operatorname{ch} g + \frac{\dot{U}_2}{Z_{2C}} \operatorname{sh} g \right) \end{aligned} \quad (2.146)$$

При согласованном включении четырехполосника

$$Z_{2C} \dot{I}_2 = \dot{U}_2, \quad \frac{\dot{U}_2}{Z_{2C}} = \dot{I}_2.$$

Тогда из (2.146) получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} (\dot{U}_2 \operatorname{ch} g + Z_{2C} \dot{I}_2 \operatorname{sh} g) = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} \dot{U}_2 e^g, \\ \dot{I}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} \dot{I}_2 e^g, \end{aligned} \quad (2.147)$$

где $e^g = \operatorname{ch} g + \operatorname{sh} g$.

Из (2.147) получим затухание четырехполосника по напряжению и току в согласованном режиме

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} e^g; \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} e^g.$$

Постоянная g является мерой передачи четырехполосника, $g=a+jb$, где a — затухание четырехполосника, а b — коэффициент фазы.

Так как $\operatorname{ch} g = \sqrt{A_{11}A_{22}}$, $\operatorname{sh} g = \sqrt{A_{12}A_{21}}$, то $e^g = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}$.

Поэтому $g = \ln(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}) = \ln|\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}| + jb$, где

$$b = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} e^g}{\operatorname{Re} e^g}, \quad a = \ln|\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}|.$$

В случае симметричного четырехполосника $Z_{1C} = Z_{2C}$ и из уравнений

$$(2.147) \text{ получим } \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^g, \text{ или } g = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}, \quad a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}.$$

Величина a называется собственным затуханием четырехполосника; оно вычисляется либо в неперах, либо в децибелах.

Затухание a в 1 непер соответствует $a_{\text{неп}} = \ln \frac{U_1}{U_2} = 1$, т.е.

$$\frac{U_1}{U_2} = 2,718 = e \text{ — основание натурального логарифма.}$$

Таким образом затухание $a = 1$ Нп соответствует уменьшению напряжения на выходе по сравнению со входом в 2,718 раза.

Затухание в децибелах $a_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2}$. Из

равенства $20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 1$ получим $\frac{U_1}{U_2} = 1,12$, т.е. затухание в 1 дБ

соответствует уменьшению напряжения на выходе по сравнению со входом в 1,12 раза.

Соотношения между непером и децибелом составляют:

$$1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ}; \quad 1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}.$$

Таким образом, четырехполюсник характеризуется вторичными, собственными параметрами: характеристическими сопротивлениями Z_{1C} , Z_{2C} и постоянными передачи — собственным затуханием a и коэффициентом фазы b .

Пример 2.29

Найдем характеристические параметры четырехполюсника, приведенного на рис. 2.63, a :

$$Z_{1C} = Z_{2C} = \sqrt{Z_1 Z_2}; \quad a = \ln \left| \frac{Z_2 + Z_1 + \sqrt{2Z_2 Z_1 (Z_2 + Z_1)}}{Z_2 - Z_1} \right|;$$

$$b = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} C}{\operatorname{Re} C}.$$

где

$$C = \frac{Z_2 + Z_1 + \sqrt{2Z_2 Z_1 (Z_2 + Z_1)}}{Z_2 - Z_1}.$$

2.7.3. Входные и передаточные характеристики четырехполюсника

Выше входные и передаточные характеристики четырехполюсника определялись в согласованном режиме, когда четырехполюсник по входу и выходу нагружается характеристическими сопротивлениями Z_{C1} и Z_{C2} . В общем случае, когда сопротивления нагрузки произвольные, входное сопротивление четырехполюсника со стороны входных зажимов

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}, \quad (2.148)$$

где $Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$ — сопротивление нагрузки.

Входное сопротивление четырехполюсника со стороны выходных зажимов, нагруженного по входу на Z_1 , равно

$$Z_{2\text{вх}} = \frac{A_{22}Z_1 + A_{12}}{A_{21}Z_1 + A_{11}}. \quad (2.149)$$

Формулы (2.148) и (2.149) получены с использованием систем уравнений (2.127) и (2.129) с учетом формул перехода (2.130) и изменения направления передачи (в (2.130) меняются знаки A_{12}, A_{21}).

Передаточной характеристикой четырехполосника называется отношение комплексной амплитуды напряжения (тока) на выходе к комплексной амплитуде напряжения (тока) на входе, т.е. комплексный коэффициент передачи по напряжению — это $K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, а комплексный коэффициент передачи по току — это $K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$. Модуль комплексного

коэффициента передачи называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) четырехполосника, а аргумент комплексного коэффициента передачи называется фазочастотной характеристикой (ФЧХ).

Используя систему уравнений (2.127), получим

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}}; \quad (2.150)$$

$$K_I = \frac{\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_2 + A_{22}}, \quad (2.151)$$

где Z_2 — сопротивление нагрузки.

По формулам (2.150), (2.151) можно рассчитать комплексные коэффициенты передачи четырехполосника при произвольной нагрузке Z_2 . При согласованной нагрузке из уравнений (2.147) получим

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} e^{-g}; \quad K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} e^{-g}. \quad (2.152)$$

Для симметричного четырехполосника $Z_{C1} = Z_{C2}$, поэтому $K_U = K_I = e^{-g}$.

2.7.4. Согласование четырехполосника с генератором и нагрузкой

Четырехполосники предназначены для передачи мощности сигналов. Эффективность этой передачи определяется не только параметрами самого четырехполосника (постоянная передачи, характеристические сопротивления), но и сопротивлением нагрузки и

внутренним сопротивлением генератора, питающего четырехполосник. Для эффективной передачи необходимо, чтобы эти внешние сопротивления были связаны с внутренними параметрами четырехполосника.

На рис. 2.65 изображен четырехполосник с внешними цепями: нагрузкой Z_2 , генератором с внутренним сопротивлением Z_{Γ} .

Рассмотрим входную цепь. Активная мощность, потребляемая нагрузкой (в данном случае $Z_{1ВХ}$) равна

$$P = I_1^2 r = \frac{U^2 r_{1ВХ}}{|Z_{\Gamma} + Z_{1ВХ}|^2} = \frac{U^2 r_{1ВХ}}{(r_{\Gamma} + r_{1ВХ})^2 + (x_{\Gamma} + x_{1ВХ})^2}, \quad (2.153)$$

где $Z_{\Gamma} = r_{\Gamma} + jx_{\Gamma}$, $Z_{1ВХ} = r_{1ВХ} + jx_{1ВХ}$.

Если считать $(r_{1ВХ} + r_{\Gamma})$ постоянным и менять только $(x_{1ВХ} + x_{\Gamma})$, то элементарные исследования на экстремум выражения (2.153) приводят к выводу, что максимум активной мощности на входе четырехполосника будет выделяться при $x_{1ВХ} = -x_{\Gamma}$. При этом она будет равна

$$P = \frac{U^2 r_{1ВХ}}{(r_{\Gamma} + r_{1ВХ})^2}. \quad (2.154)$$

Производная $\frac{dP}{dr_{1ВХ}} = \frac{U^2 (r_{1ВХ} + r_{\Gamma} - 2r_{1ВХ})}{(r_{\Gamma} + r_{1ВХ})^3}$.

При $r_{1ВХ} = r_{\Gamma}$ $\frac{dP}{dr_{1ВХ}} = 0$ и во входное сопротивление четырехполосника от генератора передается максимальная активная мощность.

Она равна $P = \frac{1}{4} \frac{U^2}{r_{1ВХ}}$.

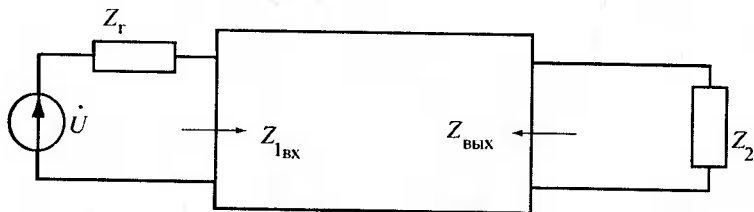


Рис. 2.65

Таким образом, условиями передачи максимальной активной мощности в нагрузку являются: равенство активных частей сопротивлений генератора и нагрузки (в данном случае $r_{\text{вх}} = r_{\text{Г}}$) и противоположные знаки при равенстве абсолютных значений реактивных частей этих сопротивлений.

Эти условия коротко можно записать так:

$$Z_{\text{Г}} = Z_{\text{1вх}}^*, \quad (2.155)$$

где * — означает комплексное сопряжение.

Рассматривая выходную цепь четырехполюсника как генератор с выходным сопротивлением $Z_{\text{вых}}$, работающий на нагрузку Z_2 , можно найти условия передачи максимальной активной мощности в нагрузку Z_2 . Они имеют вид $Z_{\text{вых}} = Z_2^*$.

Затухание четырехполюсника, которое он будет иметь при включении между генератором и нагрузкой (см. рис. 2.65), называется рабочим. Для него имеет место соотношение

$$a_{\text{раб}} = a + \ln \left| \frac{Z_{\text{Г}} + Z_{1\text{С}}}{2\sqrt{Z_{\text{Г}}Z_{1\text{С}}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_2 + Z_{2\text{С}}}{2\sqrt{Z_2Z_{2\text{С}}}} \right| + \ln |1 - n_1 n_2 e^{-2g}|, \quad (2.156)$$

где $n_1 = \frac{Z_{\text{Г}} - Z_{1\text{С}}}{Z_{\text{Г}} + Z_{1\text{С}}}$; $n_2 = \frac{Z_2 - Z_{2\text{С}}}{Z_2 + Z_{2\text{С}}}$.

В выражении (2.156) a — собственное затухание четырехполюсника; второе слагаемое дает затухание вследствие несогласованности $Z_{\text{Г}}$ и $Z_{1\text{С}}$ на входе четырехполюсника; третье слагаемое дает затухание вследствие несогласованности сопротивлений нагрузки Z_2 и $Z_{2\text{С}}$; четвертое слагаемое дает затухание вследствие взаимодействия отражений на входе и выходе четырехполюсника; n_1 и n_2 — коэффициенты отражений на входе и выходе, возникающие вследствие разницы нагрузочных и характеристических сопротивлений.

При $Z_{\text{Г}} = Z_{1\text{С}}$, Z_2 и $Z_{2\text{С}}$ рабочее затухание равно собственному, $a_{\text{раб}} = a$.

2.7.5. Соединения четырехполюсников

На практике простые четырехполюсники, для которых легко рассчитываются параметры, используются редко. Достаточно привести такие примеры, как фильтры и корректоры в технике связи, рельсовые цепи большой протяженности с разветвлениями, звенья в автоматике,

корректирующие амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики в обратной связи авторегулирования. Для таких сложных четырехполосников рассчитать характеристики достаточно сложно. Однако имеется возможность разбить сложные четырехполосники на элементарные, а затем, зная уравнения элементарных четырехполосников, получить уравнения сложного четырехполосника, определенным образом составленного из элементарных. При этом элементарные четырехполосники могут соединяться каскадно, последовательно, параллельно, параллельно-последовательно, последовательно-параллельно. Рассмотрим такие соединения.

1. Каскадное соединение четырехполосников.

Каскадным (цепным) соединением четырехполосников называется такое соединение, при котором входные зажимы последующего четырехполосника присоединяются к выходным зажимам предыдущего (рис. 2.66).

На рисунке обозначено: $\dot{i}_1^{(1)}, \dot{U}_1^{(1)}, \dot{i}_2^{(1)}, \dot{U}_2^{(1)}$ — входные и выходные токи и напряжения первого четырехполосника; $\dot{i}_1^{(2)}, \dot{U}_1^{(2)}, \dot{i}_2^{(2)}, \dot{U}_2^{(2)}$ — входные и выходные токи и напряжения второго четырехполосника; $\dot{i}_1, \dot{U}_1, \dot{i}_2, \dot{U}_2$ — входные и выходные токи и напряжения сложного четырехполосника; $[A^{(1)}], [A^{(2)}]$ — матрицы в системе A первого и второго четырехполосников соответственно.

Для получения уравнений сложного четырехполосника при таком соединении воспользуемся системой A . Уравнения первого четырехполосника

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(1)} \\ \dot{i}_1^{(1)} \end{bmatrix} = [A^{(1)}] \begin{bmatrix} \dot{U}_2^{(1)} \\ \dot{i}_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \text{где } A^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (2.157)$$

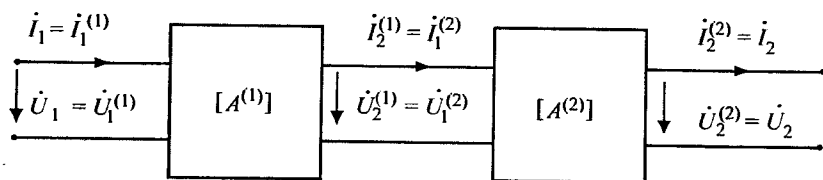


Рис. 2.66

Уравнения второго четырехполосника

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(2)} \\ \dot{i}_1^{(2)} \end{bmatrix} = [A^{(2)}] \begin{bmatrix} \dot{U}_2^{(2)} \\ \dot{i}_2^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \text{где } A^{(2)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (2.158)$$

При таком соединении четырехполосников (см. рис. 2.72)

$$\dot{i}_1^{(1)} = \dot{i}_1, \dot{U}_1^{(1)} = \dot{U}_1, \dot{i}_2^{(1)} = \dot{i}_1^{(2)}, \dot{U}_2^{(1)} = \dot{U}_1^{(2)}, \dot{i}_2 = \dot{i}_2^{(2)}, \dot{U}_2^{(2)} = \dot{U}_2.$$

Поэтому, подставляя в (2.157) значение вектора $[\dot{U}_1^{(2)} \ \dot{i}_1^{(2)}]^t$ из (2.158),

получим
$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = [A^{(1)}][A^{(2)}] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } [A] = [A^{(1)}][A^{(2)}].$$

Таким образом, при каскадном соединении четырехполосников они могут быть заменены одним четырехполосником с матрицей A , равной произведению A -матриц соединяемых четырехполосников, т.е. $[A] = [A^{(1)}][A^{(2)}]$. Этот результат можно обобщить на произвольное число соединяемых каскадно четырехполосников

$$A = \prod_{k=1}^N [A_k^{(k)}]. \quad (2.159)$$

Каскадное соединение четырехполосников широко применяется, так как каналы связи и автоматики образуются из отдельных звеньев, включенных последовательно друг за другом. Однако с целью обеспечения наилучшей передачи мощности сигнала стремятся согласовать характеристические сопротивления звеньев.

Пусть включены N четырехполосников каскадно (рис. 2.67), имеющих меры передачи g_1, g_2, \dots, g_N и характеристические сопротивления $Z_{1C}^{(n)}, Z_{2C}^{(n)}$ ($n = \overline{1, N}$).

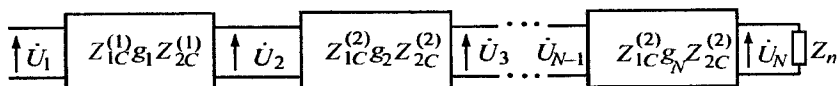


Рис. 2.67

Последний четырехполосник нагружен на сопротивление Z_H .
В соответствии с (2.147)

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{1C}^{(1)}}{Z_{2C}^{(1)}}} \dot{U}_2 e^{g_1}; \dot{U}_2 = \sqrt{\frac{Z_{1C}^{(2)}}{Z_{2C}^{(2)}}} \dot{U}_3 e^{g_2}, \dots, \dot{U}_{N-1} = \sqrt{\frac{Z_{1C}^{(N)}}{Z_{2C}^{(N)}}} \dot{U}_N e^{g_N}.$$

Если четырехполосники включены согласованно, т.е.

$Z_{2C}^{(1)} = Z_{1C}^{(2)}, Z_{2C}^{(2)} = Z_{1C}^{(3)}, \dots, Z_{2C}^{(N-1)} = Z_{1C}^{(N)}, Z_{2C}^{(N)} = Z_H$, то из последних соотношений получим

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_N \sqrt{\frac{Z_{1C}^{(1)}}{Z_{2C}^{(N)}}} \exp(g_1 + g_2 + \dots + g_N).$$

Таким образом все N четырехполосников можно заменить одним четырехполосником с характеристическими сопротивлениями $Z_{1C}^{(1)}$ и $Z_{2C}^{(N)}$ и мерой передачи $g = \sum_{k=1}^N g_k$. Если четырехполосники будут включены несогласованно, то возникнут дополнительные затухания от несогласованности.

2. *Последовательное соединение четырехполосников* (рис. 2.68).

На рисунке все величины с индексами (1) относятся к верхнему четырехполоснику, с индексами (2) — к нижнему, без индексов — к общему четырехполоснику, полученному при соединении двух первых. При таком соединении используется система «Z». Уравнения четырехполосников

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(1)} \\ \dot{U}_2^{(1)} \end{bmatrix} = [Z^{(1)}] \begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(2)} \\ \dot{U}_2^{(2)} \end{bmatrix} = [Z^{(2)}] \begin{bmatrix} i_1^{(2)} \\ i_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Складывая левые и правые части последних уравнений, получим

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(1)} \\ \dot{U}_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(2)} \\ \dot{U}_2^{(2)} \end{bmatrix} = [Z^{(1)}] \begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \end{bmatrix} + [Z^{(2)}] \begin{bmatrix} i_1^{(2)} \\ i_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

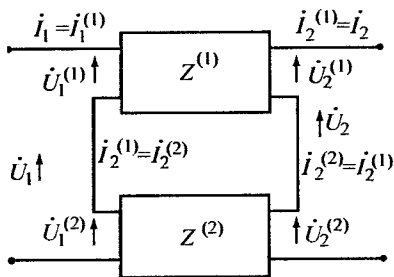


Рис. 2.68

При таком соединении четырехполосников, если $i_1^{(1)} = i_1^{(2)} = i_1$, $i_2^{(1)} = i_2^{(2)} = i_2$, то $U_1^{(1)} + U_1^{(2)} = U_1$, $U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = U_2$.

Учитывая эти равенства, получим $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$, где

$[Z] = [Z^{(1)}] + [Z^{(2)}]$. Таким образом, при последовательном соединении четырехполосников их матрицы Z складываются, и четырехполосники, приведенные на рис. 2.68, могут быть заменены одним с матрицей $[Z] = [Z^{(1)}] + [Z^{(2)}]$.

3. Параллельное соединение четырехполосников (рис. 2.69).

На рисунке так же, как и ранее, величины с индексом (1) относятся к верхнему четырехполоснику, с индексом (2) — к нижнему, без индекса — к общему четырехполоснику, полученному в результате параллельного соединения верхнего и нижнего.

Для расчета матрицы общего четырехполосника воспользуемся системой «Y».

В соответствии с обозначениями, приведенными на рис. 2.69, уравнения четырехполосников будут

$$\begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \end{bmatrix} = [Y^{(1)}] \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} i_1^{(2)} \\ i_2^{(2)} \end{bmatrix} = [Y^{(2)}] \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

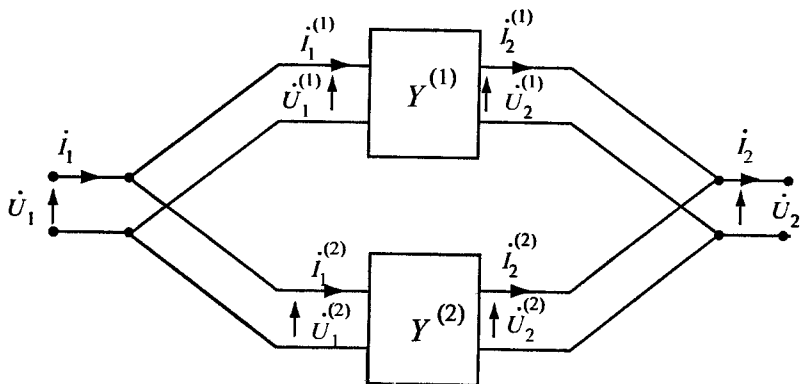


Рис. 2.69

Если $\dot{U}_1^{(1)} = \dot{U}_1^{(2)} = \dot{U}_1$, $\dot{U}_2^{(1)} = \dot{U}_2^{(2)} = \dot{U}_2$; $i_1^{(1)} + i_1^{(2)} = i_1$, $i_2^{(1)} + i_2^{(2)} = i_2$, то с учетом этих равенств, складывая почленно последние два уравнения, получим

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [Y] = [Y^{(1)}] + [Y^{(2)}].$$

Таким образом, при параллельном соединении четырехполосников их входные и выходные токи суммируются, напряжения на входе и выходе равны, а матрицы «Y» суммируются.

4. *Последовательно-параллельное соединение четырехполосников* (рис. 2.70).

На рисунке величины с индексами (1) относятся к верхнему четырехполоснику, с индексами (2) — к нижнему, а величины без индекса — к четырехполоснику, полученному в результате соединения верхнего и нижнего.

Здесь четырехполосники соединены последовательно по входу и параллельно по выходу. Для обоих четырехполосников можно записать системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(1)} \\ \dot{i}_2^{(1)} \end{bmatrix} = [H^{(1)}] \begin{bmatrix} \dot{i}_1^{(1)} \\ \dot{U}_2^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(2)} \\ \dot{i}_2^{(2)} \end{bmatrix} = [H^{(2)}] \begin{bmatrix} \dot{i}_1^{(2)} \\ \dot{U}_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

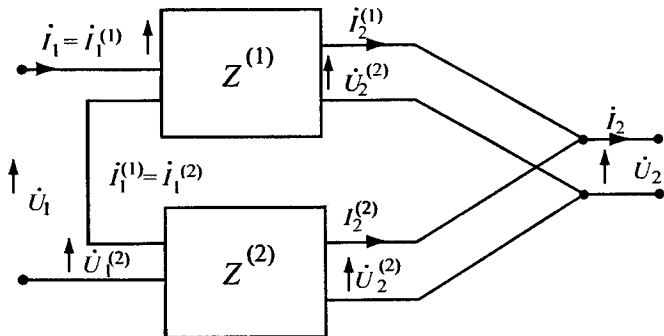


Рис. 2.70

Если для схемы рис. 2.70 справедливы равенства: $i_1^{(1)} = i_1^{(2)} = i_1$, $i_2^{(1)} + i_2^{(2)} = i_2$; $\dot{U}_1^{(1)} + \dot{U}_1^{(2)} = \dot{U}_1$; $\dot{U}_2^{(1)} = \dot{U}_2^{(2)} = \dot{U}_2$, то из последних уравнений (складывая их почленно) получим

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [H] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [H] = [H^{(1)}] + [H^{(2)}].$$

Таким образом, при последовательно-параллельном соединении четырехполюсников их входные напряжения и выходные токи суммируются, токи на входе и напряжения на выходе равны, а оба четырехполюсника могут быть заменены эквивалентным с матрицей H , равной сумме H -матриц соединяемых четырехполюсников.

5. *Параллельно-последовательное соединение четырехполюсников* (рис. 2.71).

Здесь четырехполюсники соединены параллельно по входу и последовательно по выходу. Так же как и ранее, величины с индексами (1) относятся к верхнему (по схеме) четырехполюснику, с индексами (2) — к нижнему, а без индексов — к четырехполюснику, полученному в результате соединения верхнего с нижним.

Для каждого из четырехполюсников уравнения в системе G -параметров имеют вид

$$\begin{bmatrix} i_1^{(1)} \\ \dot{U}_2^{(1)} \end{bmatrix} = [G^{(1)}] \begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(1)} \\ i_2^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} i_1^{(2)} \\ \dot{U}_2^{(2)} \end{bmatrix} = [G^{(2)}] \begin{bmatrix} \dot{U}_1^{(2)} \\ i_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

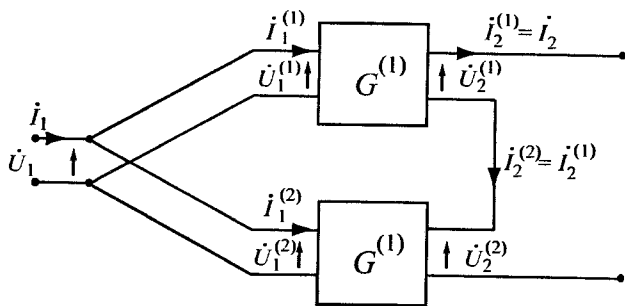


Рис. 2.71

Если для токов и напряжений схемы (рис. 2.71) справедливы равенства $i_1^{(1)} + i_1^{(2)} = I_1$; $i_2^{(1)} = i_2^{(2)} = i_2$; $U_1^{(1)} = U_1^{(2)} = U_1$; $U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = U_2$, то, складывая левые и правые части последних уравнений, получим

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \text{ где } [G] = [G^{(1)}] + [G^{(2)}].$$

Таким образом, при параллельно-последовательном соединении токи на входе и напряжения на выходе складываются, напряжения на входе и токи на выходе одинаковы. Параллельно-последовательно соединенные четырехполюсники можно заменить одним эквивалентным четырехполюсником с матрицей $[G] = [G^{(1)}] + [G^{(2)}]$, где $[G^{(1)}]$ и $[G^{(2)}]$ — матрицы соединяемых четырехполюсников.

При выводе выражений для матриц эквивалентного четырехполюсника, полученного в результате параллельного, последовательного, последовательно-параллельного и параллельно-последовательного соединений четырехполюсников, предполагалось, что токи в верхнем и нижнем зажимах каждого из соединяемых четырехполюсников равны по величине и противоположны по направлению. Соединение четырехполюсников, удовлетворяющее этому условию, называется регулярным. Это условие может нарушаться из-за связей, возникающих из-за соединения четырехполюсников.

Пример 2.30

На рис. 2.72 два T -образных четырехполосника соединены последовательно.

Если в схеме (рис. 2.72, *a*) токи i_1 и i_2 принять за контурные токи, то напряжение на параллельном соединении сопротивлений Z_1 и Z_2 нижнего четырехполосника будет равно $(i_1 - i_2) \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$, а ток в

нижнем выводе верхнего четырехполосника $i_1' (i_1 - i_2) \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \neq i_1$.

Таким образом, токи в нижнем и верхнем выводах четырехполосника не равны. Поэтому соединение четырехполосников, показанное на рис. 2.72, *a*, нельзя считать регулярным и его матрицу Z нельзя найти сложением Z -матриц верхнего и нижнего четырехполосников. Из схемы (рис. 2.72, *б*) видно, что $i_1 = i_1'$. Поэтому такое последовательное соединение четырехполосников является регулярным и матрица Z всего четырехполосника может быть получена как сумма Z -матриц соединяемых четырехполосников.

Этот пример показывает, что прежде чем находить матрицу сложного четырехполосника по матрицам соединяемых четырехполосников, необходимо убедиться в регулярности такого соединения.

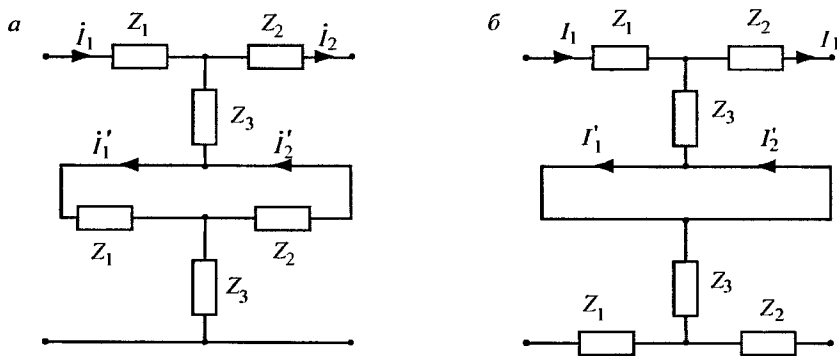


Рис. 2.72

Проверку регулярности соединения делают следующим образом:

1. При последовательном соединении проверка осуществляется в соответствии с рис. 2.73.

Если при прямой (рис. 2.73, *a*) и обратной (рис. 2.73, *б*) передачах напряжение между разомкнутыми выводами четырехполюсников $U = 0$, то такое соединение будет регулярным.

2. При параллельном соединении регулярность проверяется в соответствии со схемами рис. 2.74.

Если при прямой (рис. 2.74, *a*) и обратной (рис. 2.74, *б*) передачах напряжения между замкнутыми выводами четырехполюсников $U = 0$, то соединение регулярно.

3. При последовательно-параллельном соединении проверка регулярности соединения производится по схемам рис. 2.75.

Последовательно-параллельное соединение четырехполюсников будет регулярным, если при прямой передаче напряжение между замк-

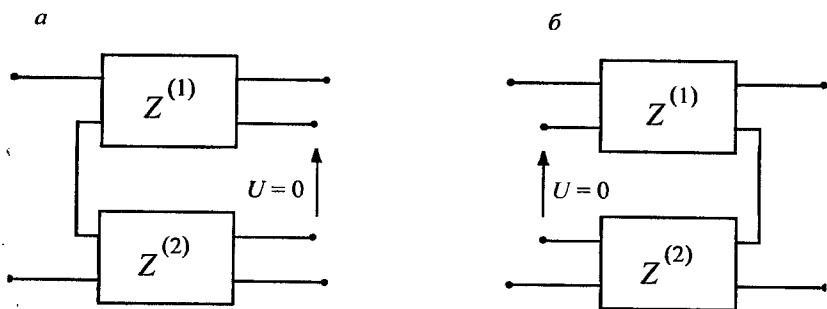


Рис. 2.73

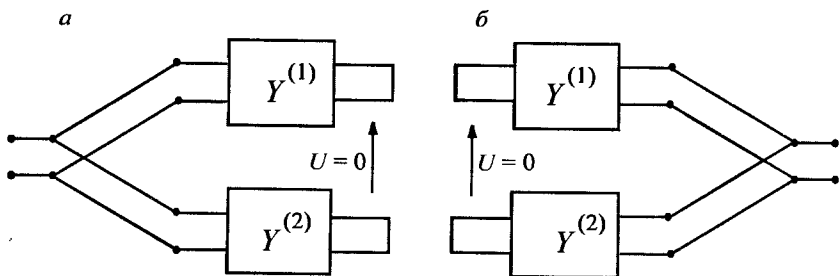


Рис. 2.74

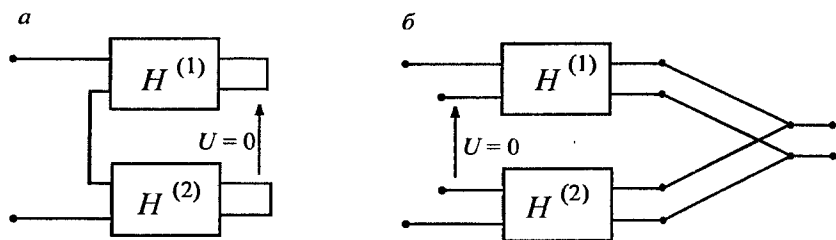


Рис. 2.75

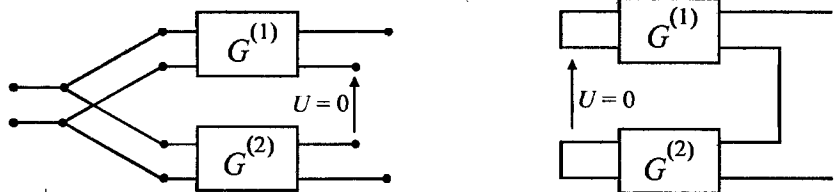


Рис. 2.76

нутыми выходными зажимами (рис. 2.75, а), а при обратной передаче — между разомкнутыми входными зажимами (рис. 2.75, б) $U = 0$.

4. Регулярность при параллельно-последовательном соединении проверяется по схемам, приведенным на рис. 2.76.

Соединение четырехполюсников будет регулярным, если при прямой передаче (рис. 2.76, а) напряжение между разомкнутыми выходными зажимами, а при обратной передаче (рис. 2.76, б) напряжение между замкнутыми входными зажимами $U = 0$.

Приведем несколько примеров.

Пример 2.31

Для Г-образного четырехполюсника (рис. 2.77, а) найти А-матрицу и характеристические параметры.

Четырехполюсник (рис. 2.77, а) можно представить в виде каскадного соединения четырехполюсников $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ (рис. 2.77, б).

Для первого четырехполюсника уравнения в системе «А» имеют вид

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2; \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix}.$$

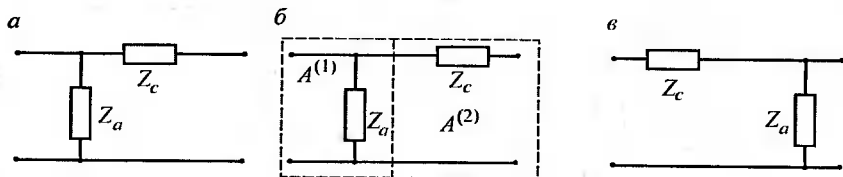


Рис. 2.77

Для второго четырехполюсника такая же система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2; \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}; \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому матрица Г-образного четырехполюсника

$$A = A^{(1)} A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ \frac{1}{Z_a} & \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) \end{bmatrix}.$$

Характеристические параметры Г-образного четырехполюсника (рис. 2.77, а)

$$\begin{aligned} Z_{1C} &= \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = Z_a \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a + Z_c}}; \quad Z_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} = \sqrt{Z_c(Z_a + Z_c)}; \\ \text{ch } g &= \sqrt{A_{11}A_{22}} = \sqrt{1 + \frac{Z_c}{Z_a}}. \end{aligned}$$

Пример 2.32

Найти A -матрицу и характеристические параметры четырехполюсника (рис. 2.77, в).

Этот четырехполюсник можно представить в виде каскадного соединения четырехполюсников $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ (рис. 2.77, б), но включенных в обратном порядке. Поэтому матрица A этого четырехполюсника

$$A = A^{(2)} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) & Z_c \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix}.$$

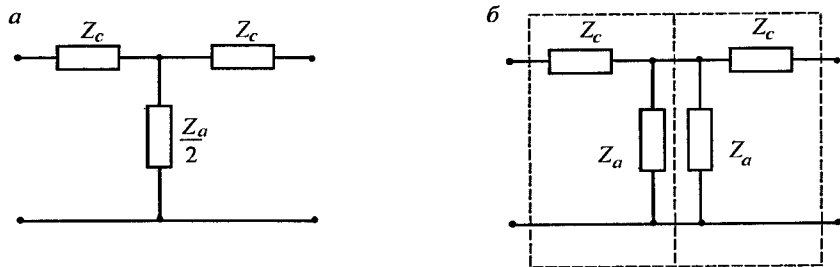


Рис. 2.78

Характеристические параметры четырехполосника

$$Z_{1C} = \sqrt{Z_c(Z_a + Z_c)}; Z_{2C} = Z_a \sqrt{\frac{Z_c}{Z_a + Z_c}}; \operatorname{ch} g = \sqrt{1 + \frac{Z_c}{Z_a}}.$$

Пример 2.33

Найти А-матрицу и характеристические параметры Т-образного четырехполосника, приведенного на рис. 2.78, а.

Этот четырехполосник можно представить в виде каскадного соединения двух Г-образных четырехполосников (рис. 2.78, б). Поэтому его матрица

$$A = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) & Z_c \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ \frac{1}{Z_a} & \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + 2\frac{Z_c}{Z_a}\right) & 2Z_c \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) \\ \frac{2}{Z_a} & \left(1 + 2\frac{Z_c}{Z_a}\right) \end{bmatrix}.$$

Характеристические параметры четырехполосника

$$Z_{1C} = Z_{2C} = \sqrt{Z_c(Z_a + Z_c)}; \operatorname{ch} g = 1 + 2\frac{Z_c}{Z_a}.$$

Пример 2.34

Найти А-матрицу и характеристические параметры П-образного четырехполосника, приведенного на рис. 2.79, а.

Этот четырехполосник можно представить в виде каскадного соединения двух Г-образных четырехполосников (см. рис. 2.77, а и б).

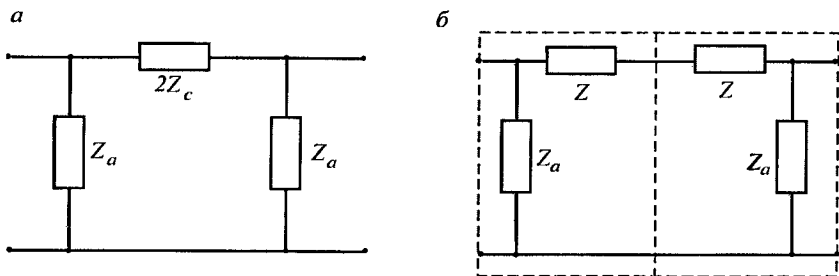


Рис. 2.79

Поэтому его матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & Z_c \\ \frac{1}{Z_a} & \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) & Z_c \\ \frac{1}{Z_a} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + 2\frac{Z_c}{Z_a}\right) & 2Z_c \\ \frac{2}{Z_a} \left(1 + \frac{Z_c}{Z_a}\right) & \left(1 + 2\frac{Z_c}{Z_a}\right) \end{bmatrix}$$

Характеристические параметры четырехполосника

$$Z_{1C} = Z_{2C} = \sqrt{\frac{Z_c Z_a}{1 + \frac{Z_c}{Z_a}}}; \quad \text{ch } g = 1 + 2\frac{Z_c}{Z_a}$$

Рассмотренные в примерах 2.31 — 2.34 четырехполосники используются в качестве звеньев фильтров в аппаратуре связи или корректирующих звеньев в автоматике.

Наряду с рассмотренными выше регулярными соединениями четырехполосников на практике применяются нерегулярно включенные четырехполосники, на основе которых могут быть созданы различные фильтрующие и согласующие устройства. Например, на рис. 2.80 приведены схемы нерегулярно включенных четырехполосников.

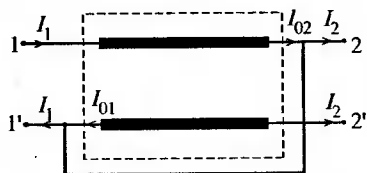
Четырехполосники в виде распределенных линий на рис. 2.80 обведены пунктиром.

Как видно из приведенных схем, токи в верхних выводах линии и нижних не равны, следовательно, четырехполосники включены нерегулярно. Однако, если рассмотреть схемы на рис. 2.80 относительно

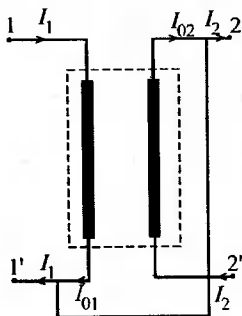
зажимов 1-1' и 2-2', то видно, что токи в нижних зажимах равны токам в верхних зажимах и противоположно им направлены, т.е. удовлетворяются условия регулярности включения.

При помощи схем четырехполюсников, приведенных на рис. 2.80, можно получить схемы фильтров верхних частот — рис. 2.80, а, б; полосовых — рис. 2.80, в, г, д с одновременной трансформацией сопротивлений, т.е. приведенные схемы могут быть использованы и в качестве согласующих устройств.

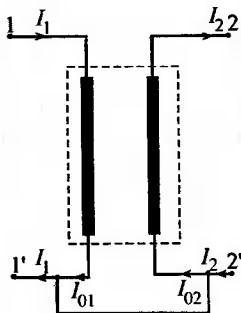
а



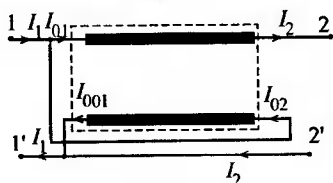
б



в



г



д

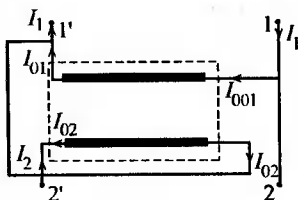


Рис. 2.80

Для облегчения расчета параметров нерегулярно включенных четырехполосников вводятся сопротивления перегиба. Сопротивлениями перегиба называются входные сопротивления двухполосников, образованных из четырехполосников в соответствии со схемами, приведенными на рис. 2.81.

На схемах ИТ— идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации 1:1. Он предназначен для того, чтобы сделать равными друг другу токи, входящие в четырехполосник по верхнему проводу и возвращающиеся из него по нижнему проводу. Для четырехполосника, у которого эти токи не равны, все последующие выводы будут неверны.

Сопротивления перегиба $Z_{III}, Z_{IV}, Z_V, Z_{VI}$ можно выразить через A -параметры.

В соответствии с рис. 2.81 можно написать следующие соотношения для схемы:

- a* $U_0 = Z_{III}I_0 = U_1 = U_2; I_0 = I_1 - I_2;$
- б* $U_0 = Z_{IV}I_0 = U_1 - U_2; I_0 = I_1 + I_2;$
- в* $U_0 = Z_V I_0 = U_1 + U_2; I_0 = I_1 = -I_2;$
- г* $U_0 = Z_{VI}I_0 = U_1 - U_2; I_0 = I_1 = I_2.$

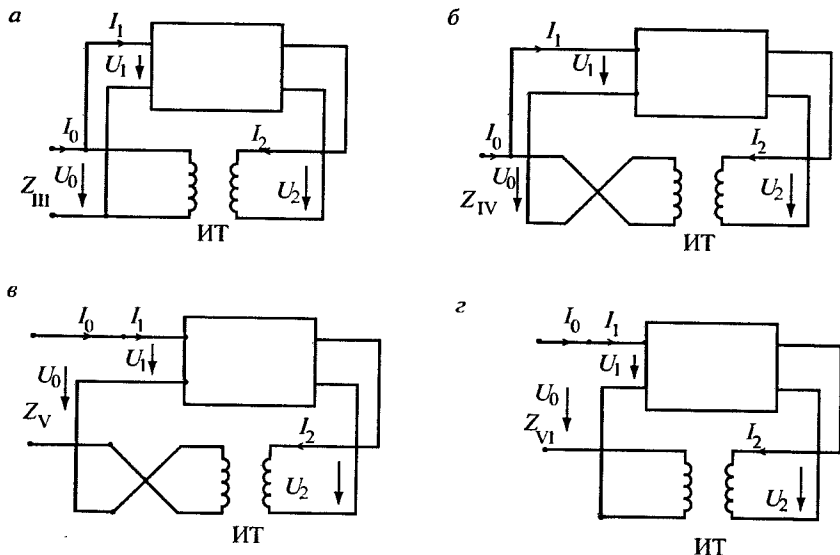


Рис. 2.81

Учитывая эти соотношения, из системы уравнений (2.127) получим

$$Z_{III} = \frac{A_{12}}{A_{11} + A_{22} - \Delta_A - 1}; \quad Z_{IV} = \frac{A_{12}}{A_{11} + A_{22} + \Delta_A + 1}. \quad (2.160)$$

$$Z_V = \frac{1}{A_{21}}(A_{11} + A_{22} + \Delta_A + 1); \quad Z_{VI} = \frac{1}{A_{21}}(A_{11} + A_{22} - \Delta_A - 1).$$

Для симметричного четырехполосника ($\Delta_A, A_{11} = A_{22}$)

$$Z_{III} = \frac{A_{12}}{2(A_{11} - 1)}; \quad Z_{IV} = \frac{A_{12}}{2(A_{11} + 1)}; \quad Z_V = \frac{2}{A_{21}}(A_{11} + 1); \quad Z_{VI} = \frac{2}{A_{21}}(A_{11} - 1).$$

Уравнения (2.160) можно разрешать относительно A -параметров четырехполосника, в результате получим возможность выразить их через сопротивления перегиба. Для симметричного четырехполосника получим

$$\begin{aligned} [A] &= \frac{1}{Z_{III} - Z_{IV}} \begin{bmatrix} Z_{III} + Z_{IV} & 4Z_{III}Z_{IV} \\ 1 & Z_{III} + Z_{IV} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{III} - Z_{VI}} \begin{bmatrix} 4Z_{III} + Z_{VI} & 4Z_{III}Z_{VI} \\ 4 & 4Z_{III} + Z_{VI} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{Z_V - 4Z_{IV}} \begin{bmatrix} 4Z_{IV} + Z_V & 4Z_{IV}Z_V \\ 4 & 4Z_{IV} + Z_V \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_V - Z_{VI}} \begin{bmatrix} Z_V + Z_{VI} & 4Z_VZ_{VI} \\ 4 & Z_V + Z_{VI} \end{bmatrix} \quad (2.161) \end{aligned}$$

В некоторых случаях идеальные трансформаторы в схемах расчета сопротивлений перегиба (рис. 2.81) могут быть исключены:

- в схеме *a*, когда четырехполосник разрывный, либо симметричный относительно продольной или поперечной оси, либо трехполосный;
- в схеме *б*, когда четырехполосник разрывный либо симметричный относительно продольной оси;
- в схеме *в*, когда четырехполосник разрывный;
- в схеме *г*, когда четырехполосник разрывный либо трехполосный.

При выполнении этих условий схемы расчета упрощаются и принимают вид, приведенный на рис. 2.82.

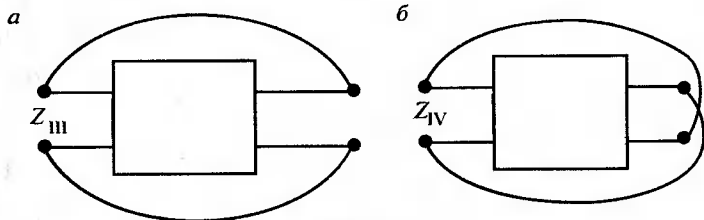


Рис. 2.82

При помощи сопротивлений перегиба достаточно просто находятся параметры сложных четырехполюсников.

Пример 2.35

Используя сопротивления перегиба, найти A -матрицу мостового четырехполюсника (см. рис. 2.63, a).

Так как четырехполюсник симметричный, то, выполняя схему (рис. 2.82, a), найдем $Z_{III} = \frac{1}{2} Z_2$, а затем, выполняя схему (рис. 2.82, b),

получим $Z_{IV} = \frac{1}{2} Z_1$. Подставляя полученные сопротивления перегиба в (2.161), получим матрицу мостового четырехполюсника (сравните с примером 2.28).

$$A = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{bmatrix} (Z_2 + Z_1) & 2Z_1Z_2 \\ 2 & (Z_2 + Z_1) \end{bmatrix}.$$

Используя сопротивления перегиба, можно найти схему замещения нерегулярно включенного четырехполюсника. Известно, что схема замещения обратимого четырехполюсника может быть построена в виде полного четырехугольника (рис. 2.83, a), который характеризуется шестью параметрами ($Y_1 \div Y_6$). Если четырехполюсник симметричен относительно продольной и поперечной осей, то число параметров снижается до трех ($Y_1 \div Y_3$) — рис. 2.83, b .

Вычислим для четырехполюсника (см. рис. 2.83, b) сопротивления перегиба, заменив их проводимостями, т.е.

$$Y_{III} = 2(Y_2 + Y_3); \quad Y_{IV} = 2(Y_1 + Y_3); \quad Y_{VII} = 2(Y_1 + Y_2).$$



Рис. 2.83

Решая последние уравнения относительно Y_1, Y_2, Y_3 , получим

$$Y_1 = 0,25 (-Y_{III} + Y_{IV} + Y_{VII}); \quad Y_2 = 0,25 (Y_{III} - Y_{IV} + Y_{VII});$$

$$Y_3 = 0,25 (Y_{III} + Y_{IV} - Y_{VII}).$$

Таким образом, зная проводимости перегиба Y_{III}, Y_{IV}, Y_{VII} , можно построить схему замещения нерегулярно включенного четырехполосника.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.36

Для четырехполосников, приведенных на рис. 2.80, *а, б*, получить схему замещения.

Заменяя обведенные пунктиром нерегулярно включенные четырехполосники полным четырехугольником, получим для схем рис. 2.80, *а, б* соответственно рис. 2.84, *а и б*.

Обе схемы в результате преобразуются к П-образному четырехполоснику (рис. 2.85), для которого могут быть найдены параметры в одной из систем уравнений.

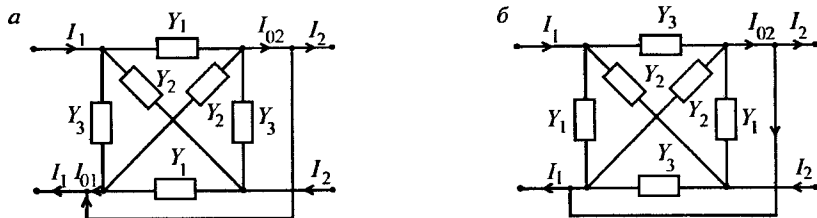


Рис. 2.84

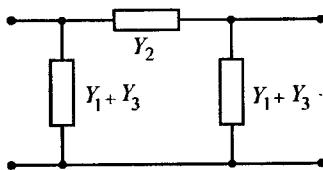


Рис. 2.85

Пример 2.37

Получить схему замещения для четырехполюсников, приведенных на рис. 2.80, в, г.

Заменяя нерегулярно включенные четырехполюсники (обведены пунктиром) полными четырехугольниками, получим схемы, приведенные на рис. 2.86, а, б.

Каждая из схем преобразуется к П-образному четырехполюснику (рис. 2.87, а, б).

Таким образом, чтобы найти параметры нерегулярно включенного четырехполюсника, необходимо следующее.

1. Заменить нерегулярно включенный четырехполюсник полным четырехугольником, параметры модели которого можно найти, используя сопротивления перегиба.

2. В соответствии со схемой включения нерегулярно включенного четырехполюсника привести его к одному из известных видов (П-, Т-, Г-образные, мостовые).

3. Найти параметры полученного четырехполюсника в одной из систем уравнений.

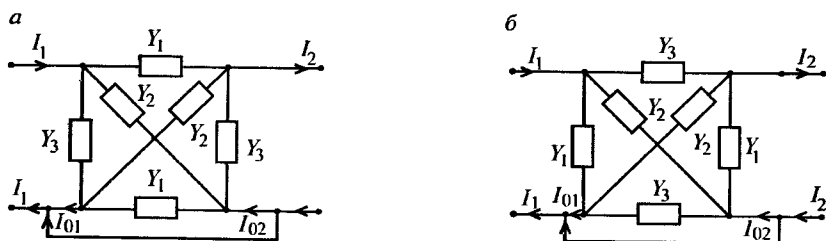


Рис. 2.86

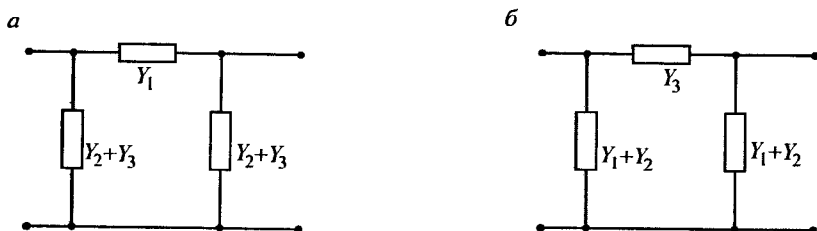


Рис. 2.87

2.7.6. Свойства функций четырехполосников

Как показано в п. 2.7.3, четырехполосник имеет входные сопротивления (проводимости) и передаточные характеристики, определяемые выражениями (2.148), (2.149) и (2.150), (2.151). Анализ поведения этих функций четырехполосника при произвольных нагрузках Z_1, Z_2 достаточно сложен. Поэтому ограничимся случаем $Z_1 = Z_2 = 0$ при изучении входных функций и $Z_H \rightarrow \infty$ — при изучении передаточных характеристик.

Из (2.148), (2.149) при $Z_1 = Z_2 = 0$ получим

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}; \quad Z_{2\text{вх}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{1}{Y_{22}} = \frac{\Delta}{\Delta_{22}}. \quad (2.161)$$

Из (2.156) при $|Z_H| \rightarrow \infty$ получим

$$K_U = \frac{1}{A_{11}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}}, \quad (2.162)$$

где Δ, Δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) — определитель и алгебраические дополнения системы уравнений, описывающей четырехполосник (см. п. 2.7.1).

Выражения для входных сопротивлений (2.161) аналогичны входному сопротивлению двухполосника (2.96). Поэтому свойства входных сопротивлений (проводимостей) четырехполосников аналогичны свойствам входного сопротивления (проводимости) двухполосника, т.е.:

- они не имеют нулей и полюсов в правой части плоскости комплексного переменного p ;
- комплексные нули и полюсы располагаются в левой части плоскости комплексно сопряженными парами;
- нули и полюсы на мнимой оси являются однократными.

Полюсы входных сопротивлений определяются, как видно из (2.161), нулями многочлена Δ_{22} . Нулями этого же многочлена определяются полюсы и передаточной характеристики (2.162). Поэтому передаточная характеристика четырехполосника не будет иметь полюсов в правой полуплоскости комплексного переменного p . Однако нули передаточной характеристики, определяемые нулями многочлена Δ_{12} , могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскости. При этом свойства четырехполосников, имеющих нули и не имеющих нулей в правой полуплоскости, существенно отличаются.

В общем случае коэффициент передачи четырехполосника (2.162) может быть выражен в виде отношения полиномов

$$K_U(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (2.163)$$

Чтобы пояснить влияние расположения нулей на свойства передаточной характеристики, рассмотрим пример. Возьмем два четырехполосника A и B с коэффициентами передачи

$$K_A(p) = \frac{p+a}{p+b}; \quad K_B(p) = \frac{p-a}{p+b}.$$

Полюсы у обоих четырехполосников $p = -b$ расположены в левой полуплоскости, а нуль четырехполосника B $p = a$ находится в правой полуплоскости комплексного переменного p . На комплексной плоскости (рис. 2.88, a) сумма $p + b$ изображается вектором из точки $\sigma = -b$ в точку $j\omega$, сумма $p + a$ — вектором из точки $\sigma = -a$ в точку $j\omega$, а сумма $p - a$ — вектором из точки $\sigma = a$ в точку $j\omega$ (рис. 2.88, b).

Модули комплексных коэффициентов передачи четырехполосников

$$K_A = K_B = \sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2}}, \quad \text{а фазовые углы } \Psi_A = \alpha_A - \beta_A = \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{b}\right)$$

$$\Psi_B = \alpha_B - \beta_B = \pi - \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{b}\right)$$

Таким образом, оба четырехполосника имеют одинаковые модули коэффициента передачи, а аргумент четырехполосника, нули которого расположены в правой полуплоскости, больше, чем у четырех-

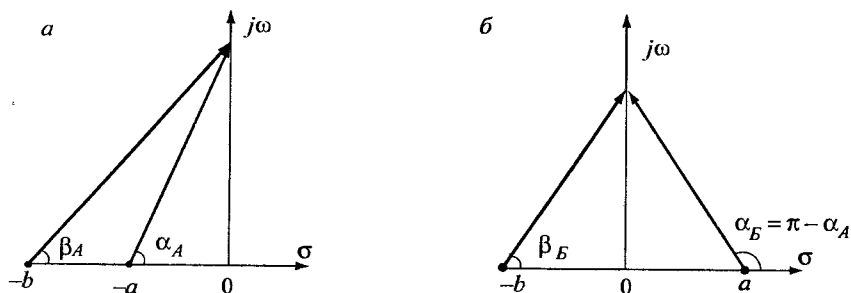


Рис. 2.88

полосника, нули которого расположены в левой полуплоскости. Если рассматривать общий случай передаточной характеристики (2.163), то решив уравнения $N(p) = 0$, $M(p) = 0$, можно разложить числитель и знаменатель на множители и найти модуль и аргумент передаточной характеристики. Однако качественно вывод, сделанный на простом примере, не изменится.

Четырехполосники, не имеющие нулей в правой полуплоскости называются четырехполосниками минимальной фазы, а имеющие нули в правой полуплоскости называются четырехполосниками неминимальной фазы. Смысл названий состоит в том, что четырехполосник минимальной фазы обеспечивает минимальный сдвиг фазы сигналу, проходящему через такой четырехполосник. У четырехполосника минимальной фазы имеется однозначная связь между амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками. Для четырехполосника неминимальной фазы такой однозначной связи между характеристиками нет. В то же время неминимально-фазовые четырехполосники обладают интересными свойствами: обеспечим в четырехполоснике B

равенство $|a| = |b|$, тогда $K_B = \sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{b^2 + \omega^2}} = 1$, а $\Psi_B(\omega) = \pi - 2\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$, т.е. модуль равен 1 и не зависит от частоты, а аргумент меняется от π до 0 при изменении частоты ω от 0 до ∞ . Четырехполосник с амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками такого типа называется четырехполосником чисто фазового сдвига или фазовым контуром. Такие четырехполосники применяются для коррекции ФЧХ без изменения АЧХ.

Пример 2.36 (рис. 2.89)

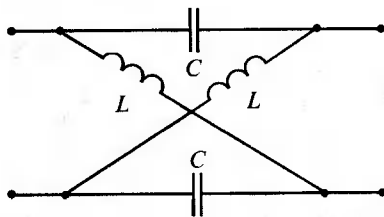


Рис. 2.89

См. пример 2.25.

$$A_{11} = A_{22} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} = \frac{pL + \frac{1}{pC}}{pL - \frac{1}{pC}} = \frac{p^2LC + 1}{p^2LC - 1};$$

$$A_{12} = \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{2\frac{L}{C}}{pL - \frac{1}{pC}} = \frac{2\left(\frac{L}{C}\right)pC}{p^2LC - 1};$$

$$A_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1} = \frac{2pC}{p^2LC - 1}; \quad Z_1C = Z_2C = \sqrt{Z_1Z_2} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_1C}{Z_2C}} \dot{U}_2 e^g = \dot{U}_2 e^g.$$

Коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(p) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = e^{-g}; \quad \text{ch } g = A_{11}; \quad \text{sh } g = \sqrt{A_{12}A_{21}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_U(p) = e^{-g} &= \frac{1}{\text{ch } g + \text{sh } g} = \frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{p^2LC + 1}{p^2LC - 1} + \sqrt{\frac{2\left(\frac{L}{C}\right)pC + 1}{p^2LC - 1} \cdot \frac{2pC + 1}{p^2LC - 1}}} = \\ &= \frac{p^2LC - 1}{p^2LC + 2p\sqrt{LC} + 1} = \frac{p - \frac{1}{\sqrt{LC}}}{p + \frac{1}{\sqrt{LC}}}. \end{aligned}$$

Нули и полюсы этого четырехполосника расположены симметрично относительно нуля. Поэтому $|K_U(p)| = 1$, этот четырехполосник является фазовым контуром.

Установим связь между АЧХ и ФЧХ минимально-фазовых четырехполосников. Пусть $K(p)$ — операторный коэффициент передачи четырехполосника, который не имеет нулей в правой полуплоскости комплексного переменного p . Возьмем натуральный логарифм от $K(p)$, т.е. положим $\theta(p)|_{p=j\omega} = \ln K(j\omega) = \ln|K(j\omega)| + j\varphi(\omega)$. Так как $K(p)$ не имеет нулей в правой полуплоскости, то $\theta(p) = \ln K(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости. Поясним этот вывод. Пусть

$$K(p) = \frac{p - p_{01}}{p + p_{\Pi 1}}, \text{ где } p_{01} \text{ — нуль в правой полуплоскости. Тогда}$$

$$\theta(p) = \ln K(p) = \ln(p - p_{01}) - \ln(p + p_{\Pi 1}). \text{ Если } p_{01} \text{ — нуль, то } \ln(p - p_{01}) = -\infty, \text{ т.е. } \theta(p) \text{ будет иметь полюс в правой полуплоскости.}$$

Итак, $\theta(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости. Возьмем интеграл $\oint \frac{\theta(p)}{p - j\omega_1} dp$ по контуру, указанному на рис. 2.90.

Подынтегральная функция в правой полуплоскости (включая мнимую ось) имеет единственный полюс $p = j\omega_1$, так как функция $\theta(p)$ в правой полуплоскости полюсов не имеет. Полюс при $p = j\omega_1$ обойдем по полуокружности радиуса r . Тогда в области с исключенной особой точкой подынтегральная функция будет аналитической и в соответствии с теоремой Коши

$$\oint \frac{\theta(p)}{p - j\omega_1} dp = 0. \quad (2.164)$$

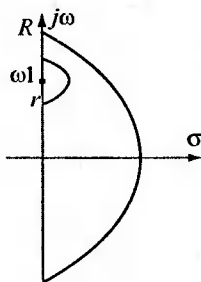


Рис. 2.90

Интеграл в (2.164) можно представить в виде

$$\oint \frac{\theta(p)}{p - j\omega_1} dp = \int_{-jR}^{j(\omega_1-r)} + \int_{j(\omega_1+r)}^{jR} + \int_{(r)} + \int_{(R)} = 0,$$

где $\int_{-jR}^{j(\omega_1-r)}$ — интеграл по мнимой оси от $-jR$ до начала окружности

радиуса r ; $\int_{j(\omega_1+r)}^{jR}$ — интеграл по мнимой оси от конца окружности

радиуса r до jR ; $\int_{(r)}$ — интеграл по полуокружности радиуса r с центром

в точке $j\omega_1$; $\int_{(R)}$ — интеграл по полуокружности радиуса R .

Так как $r \rightarrow 0$, то $\int_{-jR}^{j(\omega_1-r)} + \int_{j(\omega_1+r)}^{jR} = \int_{-jR}^{jR}$. Интеграл по полуокружности радиу-

са r , переходя к полярной системе координат $[(p - j\omega_1) = re^{j\varphi}, dp = rje^{j\varphi}d\varphi]$, получим в виде

$$\int_{(r)} = \int_{(r)} \frac{\theta(p)}{p - j\omega_1} dp = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\theta(p)}{re^{j\varphi}} rje^{j\varphi} d\varphi = j\pi\theta(j\omega_1).$$

Так как в правой полуплоскости $\theta(p)$ полюсов не имеет и при $R \rightarrow \infty$

$\theta(p) \rightarrow 0$, то $\int_{(R)} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ в соответствии с известной леммой

Жордана.

Учитывая изложенное, интеграл (2.164) получим в виде

$$j\pi\theta(j\omega_1) + \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\theta(p)}{p - j\omega_1} dp = 0.$$

При $p = j\omega$, $dp = jd\omega$ получим $j\pi\theta(j\omega_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(j\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega = 0$.

Подставляя в последнее выражение $\theta(j\omega) = \ln|K(j\omega)| + j\varphi(\omega)$ и разделяя действительные и мнимые части, получим

$$\ln|K(j\omega_1)| = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - \omega_1} d\omega, \quad \varphi(\omega_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|K(j\omega)|}{\omega - \omega_1} d\omega \quad (2.165)$$

Соотношения (2.165), известные как преобразования Гильберта, дают связь между АЧХ и ФЧХ минимально-фазового четырехполосника. Они позволяют найти значение АЧХ в точке $\omega = \omega_1$, если известна функция $j(\omega)$ в диапазоне $(-\infty, \infty)$ и, наоборот, найти значение ФЧХ в точке $\omega = \omega_1$, если известна функция $\ln|K(j\omega)|$ в диапазоне $(-\infty, \infty)$.

С расположением нулей и полюсов входных сопротивлений (проводимостей) или передаточных характеристик связано понятие устойчивости равновесия (отсутствие автоколебаний) или стационарных колебаний. В п. 2.6.2 было показано, что в зависимости от расположения нулей и полюсов входного сопротивления двухполосника, его импульсная характеристика будет либо неограниченно возрастающей (если имеются нули или полюсы в правой полуплоскости или многократные на мнимой оси), либо убывающей при $t \rightarrow \infty$ (если нет нулей и полюсов в правой полуплоскости, а на мнимой оси они однократные).

Причинами появления нулей полюсов входного сопротивления в правой полуплоскости могут быть элементы с отрицательным сопротивлением (например, туннельный диод), положительные обратные связи и др. Было бы желательно, до расчета корней полиномов, определяющих нули и полюсы, определить наличие (или отсутствие) их в правой полуплоскости. С этой целью разработано много критериев, позволяющих решить эту задачу.

2.7.7. Синтез линейных цепей по заданным функциям передачи

Синтез линейных цепей и, в частности, четырехполосников можно проводить в частотной и временной областях.

При синтезе в частотной области по заданным операторным входным и передаточным характеристикам задача может быть сформулирована по-разному.

1. По заданным первичным параметрам четырехполосника в одной из систем требуется получить схему, имеющую требуемые первичные параметры.

2. По заданной передаточной характеристике четырехполосника получить схему, реализующую требуемую передаточную характеристику.

Независимо от того, как поставлена задача синтеза, решается она в два этапа.

На первом этапе проверяются условия реализуемости заданных характеристик. При этом так же, как и при синтезе двухполосников, под реализуемостью понимается возможность составления синтезируемого четырехполосника из положительных элементов R, L, C . А чтобы до решения задачи быть уверенным в реализуемости синтезируемого четырехполосника, необходимо проверить выполнение некоторых условий, которым должны удовлетворять функции синтезируемого четырехполосника. Свойства функций четырехполосников подробно обсуждаются в п. 2.7.6. Условия реализуемости сводятся к следующим требованиям:

- нули и полюсы входного сопротивления или проводимости должны находиться в левой полуплоскости комплексного переменного p или на мнимой оси, в этом случае они должны быть однократными;
- полюсы передаточной характеристики должны находиться в левой полуплоскости комплексного переменного p , а нули могут находиться как в левой, так и в правой полуплоскости.

На втором этапе решается задача получения четырехполосника с заданными характеристиками. При этом могут использоваться многие методы, из которых ниже будут изложены два:

- сведение задачи синтеза четырехполосника к синтезу двухполосников;
- последовательное выделение простейших четырехполосников.

Сведение задачи синтеза четырехполосника к синтезу двухполосников

Пусть заданы Z -параметры четырехполосника $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$, т.е. уравнения, описывающие синтезируемую цепь, имеют вид

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.$$

Заменим четырехполосник эквивалентной Т-образной схемой замещения (рис. 2.91). Из схемы имеем:

$$\text{при } \dot{I}_2 = 0; Z_{11} = Z_1 + Z_2; \quad Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{Z_2 I_1}{I_1} = Z_2;$$

$$\text{при } \dot{I}_1 = 0; Z_{22} = -(Z_2 + Z_3); \quad Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = -Z_2.$$

Решая совместно полученные уравнения относительно Z_1, Z_2, Z_3 , получим $Z_1 = Z_{11} + Z_{12}$; $Z_2 = -Z_{12}$; $Z_3 = -Z_{22} + Z_{21}$.

Таким образом, синтез четырехполосника по заданным первичным Z -параметрам сведен к синтезу трех двухполосников Z_1, Z_2, Z_3 . Синтез двухполосников изложен в п. 2.6.3. Однако перед синтезом необходимо убедиться в реализуемости двухполосников Z_1, Z_2, Z_3 .

Двухполосник $Z_1 = Z_{11} + Z_{12}$ из которых Z_{11} не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости, а на мнимой оси — нули и полюсы только однократные; Z_{12} имеет нули в обеих полуплоскостях, а полюсы — только в левой полуплоскости или на мнимой оси (однократные). Для реализуемости двухполосника Z_1 надо исключить нули Z_{12} в правой полуплоскости.

Двухполосник Z_2 будет также реализуем, если Z_{12} не будет иметь нулей в правой полуплоскости.

Двухполосник $Z_3 = -Z_{22} + Z_{21}$ из которых Z_{22} не имеет ни нулей, ни полюсов в правой полуплоскости, а на мнимой оси — нули и полюсы однократные, а Z_{21} может иметь нули в правой полуплоскости. Для реализуемости двухполосника Z_3 надо исключить нули Z_{21} в правой полуплоскости комплексного переменного p .

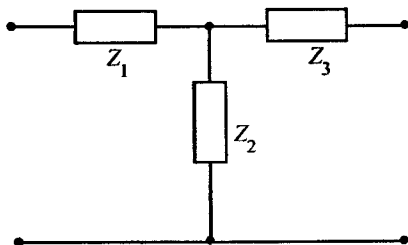


Рис. 2.91

Таким образом, рассчитанные по первичным Z -параметрам двухполосники Z_1, Z_2, Z_3 , будут реализуемы, если передаточные характеристики четырехполосника Z_{12} и Z_{21} не будут иметь нулей в правой полуплоскости, т.е. если четырехполосник будет минимально фазовым.

Синтезируя двухполосники Z_1, Z_2, Z_3 методами, изложенными в п. 2.6.3 и подставляя их в схему рис. 2.91, получим четырехполосник с заданными первичными Z -параметрами.

Последовательное выделение простейших четырехполосников

Пусть задана передаточная характеристика четырехполосника, нагруженного на согласованное сопротивление R . Требуется реализовать эту передаточную характеристику в виде конкретной электрической схемы.

Идея метода сходна с методами последовательного выделения нулей и полюсов двухполосника и получения таким образом простейших одно-, двух- и более элементарных двухполосников.

Итак имеем передаточную характеристику требуемого четырехполосника:

$$K(p) = Q \frac{(p - p_1)(p - p_3)(p - p_5) \cdots (p - p_n)}{(p + p_2)(p + p_4)(p + p_6) \cdots (p + p_{2m})}, \quad (2.166)$$

где $Q = \text{const}$.

Передаточная характеристика не имеет полюсов в правой полуплоскости, но имеет нули как в правой (например, p_1, p_3, p_5), так и в левой (например, p_n) полуплоскостях.

Пусть $p_1 = a_1, p_3 = a_3 + jb_3, p_5 = a_3 - jb_3$, т.е. передаточная характеристика имеет однократный нуль на действительной оси и пару комплексно-сопряженных нулей в правой полуплоскости. Остальные нули расположены в левой полуплоскости.

Умножим $K(p)$ (2.166) на следующий множитель $\frac{p + p_1}{p + p_1} \frac{p + p_3}{p + p_3} \frac{p + p_5}{p + p_5}$, равный единице, и представим передаточную характеристику (2.166) в виде

$$K(p) = Q \frac{p - p_1}{p + 1} \cdot \frac{(p - p_3)(p - p_5)}{(p + p_3)(p + p_5)} \frac{(p + p_1)(p + p_3)(p + p_5) \cdots (p + p_n)}{(p + p_2)(p + p_4) \cdots (p + p_{2m})} =$$

$$K_1(p) K_2(p) K_3(p) K_4(p), \text{ где } K_1(p) = Q; K_2(p) = \frac{p - p_1}{p + 1};$$

$$K_3(p) = \frac{(p - p_3)(p - p_5)}{(p + p_3)(p + p_5)}; K_4(p) = \frac{(p + p_1)(p + p_3)(p + p_5) \cdots (p + p_n)}{(p + p_2)(p + p_4) \cdots (p + p_{2m})}$$

В результате синтезируемый четырехполосник может быть представлен в виде рис. 2.92.

Передаточная функция первого четырехполосника $K_1(p) = Q$ не зависит от частоты. Следовательно ей соответствует четырехполосник постоянного затухания. Его реализация в виде мостового четырехполосника имеет вид, представленный на рис. 2.93.

Коэффициент передачи такого четырехполосника

$$K_1(p) = \frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}},$$

где $A_{11} = A_{22} = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$; $A_{12} = \frac{2R_2 R_1}{R_2 - R_1}$; $A_{21} = \frac{2}{R_2 - R_1}$.

Подставляя значения A -параметров в выражение $K_1(p)$ получим

$K_1(p) = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1 + 2\sqrt{R_1 R_2}} = Q$. Получили одно условие для расчета значений R_1 и R_2 . Второе условие получим, учитывая, что четырехполосник нагружен на согласованное сопротивление R и, следовательно,

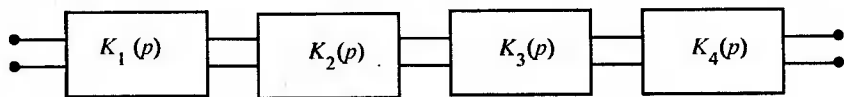


Рис. 2.92

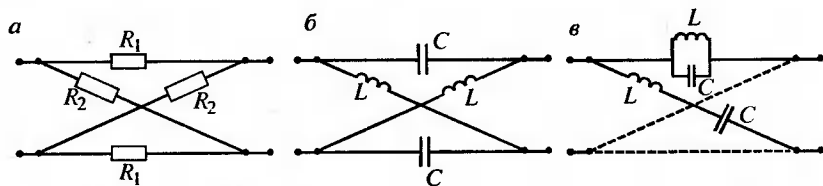


Рис. 2.93

его характеристическое сопротивление $Z_M = \sqrt{R_1 R_2} = R$. Из этих двух

условий найдем: $R_2 = R \frac{Q+1}{Q-1}$; $R_1 = \frac{R^2}{R_2}$. Передаточная функция $K_2(p)$

при $p = j\omega$ имеет вид $K_2(j\omega) = \frac{j\omega - a_1}{j\omega + a_1}$, $|K_2(j\omega)| = 1$. Следовательно,

второй четырехполюсник, имеющий нуль в правой полуплоскости, является четырехполюсником чисто фазового сдвига. Он реализуется схемой рис. 2.93, б. Значения его элементов рассчитываются из двух условий:

– согласованное включение, т.е. $Z_1 = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R$;

– коэффициент передачи $K(p) = \frac{p - \frac{1}{\sqrt{LC}}}{p + \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{j\omega - a_1}{j\omega + a_1}$.

Из этих условий найдем $L = \frac{R}{a_1}$; $C = \frac{1}{a_1 R}$.

Передаточная характеристика третьего четырехполюсника

$K_3(p) = \frac{(p - p_3)(p - p_5)}{(p + p_3)(p + p_5)}$; имеет два комплексно-сопряженных нуля

в правой полуплоскости и два комплексно-сопряженных полюса в левой полуплоскости. Нули и полюсы расположены симметрично относительно мнимой оси. Следовательно, третий четырехполюсник имеет $|K_3(j\omega)| = 1$ т.е. это будет чисто фазовым контуром, реализуемым четырехполюсником, приведенным на рис. 2.93, в. Для этого четырехполюсника

$$Z_1(p) = \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{pL\omega_0^2}{pL + \omega_0^2}, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; Z_2(p) = pL + \frac{1}{pC} = \frac{p^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2 pC}.$$

Характеристическое сопротивление $Z_M = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R$.

$$\begin{aligned} \text{Передаточная характеристика } K_3(p) &= \frac{1}{A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}} = \\ &= \frac{1}{\frac{Z_2(p) + Z_1(p)}{Z_2(p) - Z_1(p)} + \sqrt{\frac{4Z_1(p)Z_2(p)}{[Z_2(p) - Z_1(p)]^2}}} = \frac{\sqrt{Z_2(p)} - \sqrt{Z_1(p)}}{\sqrt{Z_2(p)} + \sqrt{Z_1(p)}}. \end{aligned}$$

Так как четырехполосник включается согласовано, то

$$Z_M = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)} = R, \text{ откуда получаем } Z_1(p) = \frac{R}{Z_2(p)}.$$

Подставив это соотношение и выражение $Z_2(p)$ в $K_3(p)$, получим

$$K_3(p) = \frac{Z_2 - R}{Z_2 + R} = \frac{p^2 - p(R\omega_0^2 C) + \omega_0^2}{p^2 + p(R\omega_0^2 C) + \omega_0^2} = \frac{(p - p_3)(p - p_5)}{(p + p_3)(p + p_5)}.$$

$$\text{Нули } K_3(p) \quad p_{3,5} = \frac{R\omega_0^2 C \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - R^2\omega_0^4 C^2}}{2}.$$

Сравнивая действительные и мнимые части корней p_3 и p_5 , получим два уравнения для расчета индуктивности L и емкости C взаимно обратных двухполосников, образующих мостовой четырехполосник (рис. 2.93, в):

$$\frac{1}{2} R\omega_0^2 C = a_3; \quad \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - R^2\omega_0^4 C^2} = b_3.$$

Четвертый четырехполосник не содержит нулей в правой полуплоскости — он минимально-фазового типа. Он может быть реализован в виде мостового четырехполосника, нагруженного на согласованное сопротивление. В этом случае его характеристическое сопротивление

$$Z_M = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)} = R, \text{ а передаточная характеристика } K_4(p) = \frac{Z_2(p) - R}{Z_2(p) + R},$$

откуда получаем $Z_1(p) = \frac{R^2}{Z_2(p)}$, т.е. двухполосники $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$, реализующие мостовой четырехполосник с передаточной функцией $K_4(p)$, взаимно обратные, а входное сопротивление двухполосника

$Z_2(p) = R \frac{1 + K_4(p)}{1 - K_4(p)}$. Так как R и $K_4(p)$ известны, то $Z_2(p)$ будет найдена.

По ней может быть реализован двухполюсник с сопротивлением $Z_2(p)$, а найдя ему обратный, получим $Z_1(p)$. В результате будет реализован синтезируемый четырехполюсник, полученный как каскадное соединение мостовых четырехполюсников (рис. 2.92). Таким образом, синтезируемый четырехполюсник с передаточной функцией (2.166) реализован в виде каскадного соединения согласованно включенных четырехполюсников. Каждый из согласованных четырехполюсников нагружен на сопротивление R и имеет входное характеристическое сопротивление, равное R , не зависящее от частоты. Такие четырехполюсники, имеющие вещественное входное сопротивление, независящее от частоты, называются цепью постоянного активного сопротивления.

Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЛИНИИ)

3.1. Электрические линии железнодорожной автоматики, телемеханики и связи, рельсовые цепи

В автоматике, телемеханике и связи на железнодорожном транспорте по сравнению с другими отраслями народного хозяйства широко используют электрические линии самых различных конструкций, работающие в условиях взаимных влияний со стороны устройств электрической тяги и линий электропередачи. Так, например, на участке с электрической тягой на переменном токе вдоль железнодорожного полотна расположены контактные провода и питающие их высоковольтные линии; рельсовые цепи, по которым проходит тяговый ток и которые используются также для целей железнодорожной телемеханики (автоблокировки и автоматической локомотивной сигнализации); высоковольтные линии автоблокировки; кабели связи; радиоволноводы, обеспечивающие радиосвязь с электроподвижным составом, и др. Поэтому процессам, происходящим в электрических линиях, уделяют особое внимание, причем рассматривают процессы в уединенной и во взаимосвязанных линиях.

Для цепей воздушных и кабельных линий связи, высоковольтных линий, радиоантенн, полосковых линий в радиоустройствах, выполненных с использованием печатного монтажа, рельсовых цепей и др. характерно изменение тока в каждой точке цепи вследствие наличия полной проводимости, распределенной по ее длине. Этим электрические линии, являющиеся цепями с распределенными параметрами, отличаются от цепей, рассматривавшихся ранее, которые являются цепями с сосредоточенными параметрами.

Электрические цепи с сосредоточенными и распределенными параметрами. Во многих практических задачах, связанных с расчетом электрических цепей, ток в которых обычно имеет малые частоты, источником энергии является один определенный элемент цепи, а по отношению к пассивным элементам можно с достаточной точностью допустить, что каждый из основных параметров цепи — сопротивление, индуктивность и емкость — сосредоточен в своем месте. Это значит,

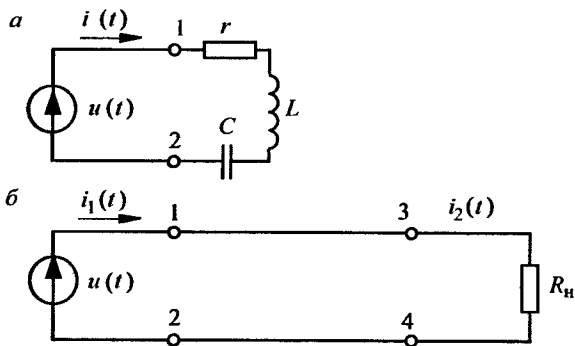


Рис. 3.1

что электрическое и магнитное поля разделены пространственно (первое связано с конденсатором, второе — с катушкой). Схема такой цепи приведена на рис. 3.1, *a*, она правильно отражает свойства цепи при относительно малых значениях паразитных параметров элементов цепи и емкости соединительных проводов. При удовлетворении этих условий цепь называют электрической цепью с сосредоточенными параметрами.

Для рассматриваемой цепи характерны одинаковые значения токов во всех ее последовательно соединенных частях. Считая, что цепь имеет сосредоточенные параметры r , L и C , изучают только процессы накопления и преобразования электромагнитной энергии в ее элементах, пренебрегая процессами распространения электромагнитной энергии в окружающей среде.

Источник $u(t)$, поставляющий энергию в цепь, и расходующий ее пассивный элемент могут быть рассмотрены как элементы, входящие в состав данной цепи, или как внешние по отношению к ней. В простейших случаях резистор считают элементом цепи, а источник — внешним по отношению к ней. Цепь, схема которой приведена на рис. 3.1, *a*, состоит из двух двухполюсников: активного источника ЭДС $u(t)$ и пассивного, содержащего r , L и C . Источник ЭДС $u(t)$ отражает связь рассматриваемой цепи с внешней средой, посредством которой энергия из внешней среды поступает в цепь, а элемент с сопротивлением r отражает связь, посредством которой энергия из цепи уходит во внешнюю среду в виде тепла, механического движения и т. д.

При большой длине соединительных проводов, т. е. передаче электрической энергии, особенно высокочастотной, по линии, длина которой соизмерима с длиной волны электромагнитного колебания, нельзя не учитывать сопротивление, индуктивность и емкость, распределенные по всей ее длине. Электрическое и магнитное поля в этом случае распределены вдоль линии и пространственно совмещены. Такую линию называют электрической цепью с распределенными параметрами.

Для цепи с распределенными параметрами характерны неодинаковые токи в различных ее точках вследствие наличия токов смещения между отдельными частями цепи (а часто и токов проводимости из-за несовершенной изоляции). Рассматривая цепь, как обладающую распределенными параметрами, изучают процесс распространения электромагнитной энергии в ней.

Цепь с распределенными параметрами может включать в себя также распределенные источники напряжения или тока (рис. 3.1, б). Электрическая цепь, изображенная на этом рисунке, получает энергию от источника ЭДС $u(t)$, подключенного к ней в точках 1 и 2. Поступающая в цепь энергия частично расходуется на нагревание ее проводов и изоляции, частично передается приемнику (нагрузке) с сопротивлением R_n , подключенному к цепи в точках 3 и 4. Если источник и приемник считать внешними элементами по отношению к цепи, то последняя представляет собой четырехполюсную цепь, или четырехполюсник. Моделируя электрическую цепь составлением ее эквивалентной схемы как цепи с сосредоточенными или распределенными параметрами, мы определенным образом аппроксимируем свойства этой цепи и тем самым в значительной степени предопределяем характер рассматриваемых процессов и результаты последующего анализа.

Поскольку до сих пор наиболее широко применяемой электрической линией является цепь, образованная двумя одинаковыми параллельными проводами, принято изображать цепи с распределенными параметрами электрической схемой (см. рис. 3.1, б).

Соотношения между напряжениями и токами, характеризующие процессы в такой цепи, являются общими для всех технических разновидностей электрических линий и применяются для расчетов линий всех конструкций в самых разнообразных отраслях электротехники.

При изучении процессов распространения электромагнитной энергии вдоль электрических цепей с распределенными параметрами сами

цепи характеризуются их параметрами, а процессы в них — напряжениями и токами, которые зависят от двух переменных: времени и пространственной координаты.

Для получения исходных соотношений, определяющих процессы в цепях с распределенными параметрами (линиях), используют так называемые первичные параметры цепи: сопротивление проводов R , Ом/км, их индуктивность L , Гн/км, проводимость изоляции G , 1/Ом/км, емкость проводов C , Ф/км. Физически эти параметры представляют те же свойства цепи, что и в цепи с сосредоточенными параметрами.

Если значения первичных параметров линии остаются неизменными по всей ее длине, линию называют однородной.

3.2. Уравнения однородной уединенной линии в установившемся режиме гармонического переменного тока

Уравнение равновесия напряжений цепи (см. рис. 3.1, *a*) в установившемся режиме переменного тока имеет вид

$$r\dot{I}(\omega) + j\omega L\dot{I}(\omega) + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}(\omega) = \dot{U}(\omega). \quad (3.1)$$

Оно вполне определяет процессы в цепи, поскольку по частотной характеристике $Z(\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$, пользуясь связями между характеристиками, можно получить сведения о поведении цепи при воздействиях любой формы.

Поэтому рассмотрим цепь с распределенными параметрами также в установившемся режиме переменного тока и определим для нее необходимые частотные характеристики. Проводимость G и емкость C , распределенные вдоль всей длины линии, вызывают утечку тока, который неодинаков в различных ее точках. Поэтому для расчета условий передачи энергии по линии нельзя применять уравнение цепи с сосредоточенными параметрами, выведенное в предположении, что ток остается неизменным вдоль всей неразветвленной цепи.

Однако если участок линии dx столь мал, что изменениями тока и напряжения вдоль него можно пренебречь (рис. 3.2, *a*), то для этого

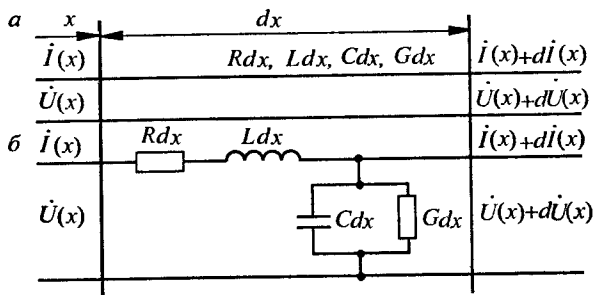


Рис. 3.2

участка линии можно составить эквивалентную схему (рис. 3.2, б). Здесь Rdx — активное сопротивление участка линии; Ldx — индуктивность участка линии; Cdx — емкость между проводами; Gdx — проводимость изоляции между проводами на участке линии.

Эквивалентная схема только приближенно отображает свойства участка цепи с распределенными параметрами. В линии утечка тока происходит по всей длине участка, а эквивалентная схема отражает утечку тока только на его конце. Однако при интегрировании дифференциальных уравнений, устанавливающих связь между напряжениями и токами участка dx линии, получаются результаты, точно отображающие взаимозависимости между $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ в линии конечной длины.

Применяя закон Ома к эквивалентной схеме, найдем падение напряжения в проводах на участке dx : $-d\dot{U} = (R + j\omega L)dx\dot{i}$.

Соответственно утечка тока: $-d\dot{i} = (G + j\omega C)dx(\dot{U} + d\dot{U})$.

Знак минус указывает на то, что приращения $d\dot{U}$ и $d\dot{i}$ отрицательны.

Разделив $-d\dot{U}$ и $-d\dot{i}$ на dx и исключив во втором случае бесконечно малую величину второго порядка, получим

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= (R + j\omega L)\dot{i} = Z_{\text{пр}}\dot{i}; \\ -\frac{d\dot{i}}{dx} &= (G + j\omega C)\dot{U} = Y_{\text{из}}\dot{U}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Это дифференциальные уравнения линии, которые характеризуют цепь с распределенными параметрами, так же как уравнение (3.1) — неразветвленную цепь с сосредоточенными параметрами.

Так же как уравнение (3.1), независимо от конструкций, входящих в цепь катушек индуктивностей, конденсаторов и резисторов, уравнение (3.2) справедливо для всех конструкций однородных линий. Изменение конструкции линии приводит только к новым численным значениям параметров R , L , C и G .

Наиболее характерные конструкции линий и картины соответствующих им статических электрического и магнитного полей приведены на рис. 3.3. Во всех случаях часть пространства, охваченного электромагнитным процессом, ограничена поверхностями металлических проводников, форма которых определяет структуру соответствующих полей и возможные направления их движения (вдоль линий). Каждая последующая конструкция линий может рассматриваться как видоизменение предшествующей.

Если нижний провод двухпроводной линии (рис. 3.3, а) разрезать по радиусу $0a$ и развернуть, то получается однопроводная линия над проводящей плоскостью (рис. 3.3, б). Если проводящую плоскость однопроводной линии завернуть вокруг цилиндрического проводника, получается коаксиальный кабель (рис. 3.3, в). Сплюснув последний и отбросив несущественные для процесса удаленные короткие стенки, приходим к полосковой линии (рис. 3.3, г). Совершенно очевидно, что рассмотренные деформации границ пространства не могут существенно влиять на физическую природу электромагнитных процессов. Во всех случаях они остаются процессами распространения электромагнитных полей вдоль металлических границ. Поэтому рассмотрение процесса в какой-либо одной из линий приводит к выводам, справедливым в основном и для всех других.

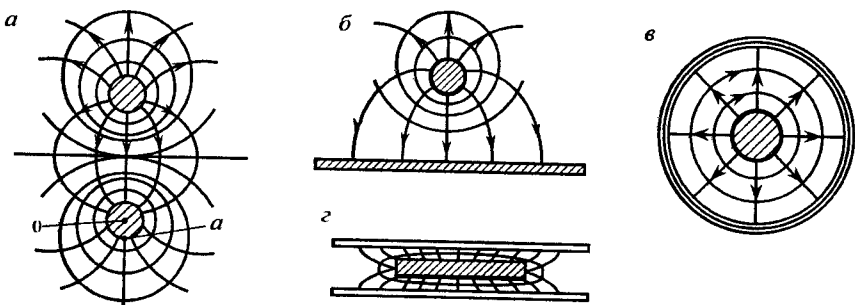


Рис. 3.3

В простых случаях (например, для двух-, однопроводных и коаксиальных линий), когда распределение магнитного и электрического полей известно, первичные параметры можно вычислить с достаточной для практики точностью. В более сложных случаях, например, для рельсовых цепей, когда проводники-рельсы имеют сложное поперечное сечение, первичные параметры находят измерением. Проводимость изоляции для всех типов линий устанавливают опытным путем.

Решение уравнений линии. Для перехода к уравнению, содержащему одну функцию, продифференцируем первое уравнение (3.2) по x :

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_{\text{пр}} \frac{d\dot{I}}{dx}$$

и подставим сюда значение $d\dot{I}/dx$ из второго уравнения

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}} \dot{U}.$$

Обозначив $Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) = \gamma^2$, получим

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \gamma^2 \dot{U} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0.$$

Аналогичное уравнение можно получить и для \dot{I} . Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом. Его общий интеграл

$$\dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = A_1 e^{-\sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}} x} + A_2 e^{\sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}} x}, \quad (3.3)$$

где $\dot{U}(x)$, A_1 , A_2 — напряжения;

$\gamma = \sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}}$ — комплексный коэффициент, называемый коэффициентом распространения волны.

Соответствующее уравнение для тока можно получить, воспользовавшись исходным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (R + j\omega L)\dot{I} = Z_{\text{пр}}\dot{I}, \quad (3.4)$$

$$\text{откуда } \dot{i} = \frac{\gamma}{R + j\omega L} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_{\text{пр}}} \frac{d\dot{U}}{dx}.$$

Подставляя в это выражение значения U из формулы (3.4) и выполняя дифференцирование по x , получим

$$\dot{i} = \frac{\gamma}{Z_{\text{пр}}} (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Обозначим величину, имеющую размерность проводимости,

$$\frac{\gamma}{Z_{\text{пр}}} = \frac{\gamma}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} = \frac{1}{Z_B}.$$

Величину Z_B называют волновым сопротивлением линии. Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \\ \dot{i}(x) &= \frac{A_1}{Z_B} e^{-\gamma x} - \frac{A_2}{Z_B} e^{\gamma x}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{Z_{\text{пр}} Y_{\text{из}}}, \\ Z_B &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{Z_{\text{пр}}}{Y_{\text{из}}}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Величины γ и Z_B называют вторичными или волновыми параметрами линии.

3.2.1. Волновые процессы в линии. Волновые параметры

Падающая волна напряжения. Рассмотрим, что представляют собой физические процессы в линии, описываемые уравнениями (3.5).

Пусть в них $x = 0$. Тогда напряжение в начале линии $\dot{U}(0) = A_1 + A_2$. Здесь A_1 и A_2 — составляющие напряжения в начале линии. Будем поэтому вместо A_1 писать $\dot{U}'(0)$ и вместо A_2 — $\dot{U}''(0)$.

Рассмотрим первое слагаемое первого уравнения (3.5):

$$\dot{U}'(x) = \dot{U}'(0) e^{-\gamma x}.$$

Полагая, что комплексный коэффициент γ состоит из действительной и мнимой частей

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (3.7)$$

получим

$$\dot{U}'(x) = e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}. \quad (3.8)$$

Соответствующий этому выражению характер изменения вектора напряжения $\dot{U}'(x)$ вдоль линии графически показан на рис. 3.4, а и б. Из выражения (3.8) и его графического изображения следует, что вектор напряжения, имеющий в начале линии значение $\dot{U}'(0)$, с возрастанием x уменьшается по модулю и меняет свою фазу.

Мы пользовались до сих пор символическим методом, в котором зависимость величин от времени задается выражением $e^{j\omega t}$.

Множитель $e^{j\omega t}$ ранее был опущен как общий. Теперь можно его учесть, чтобы одновременно с зависимостью напряжения и тока от координаты x рассмотреть также зависимость от времени t . Тогда вместо выражения (3.8) имеем

$$\dot{U}'(x, t) = \dot{U}'(0) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = \dot{U}'(0) e^{-\alpha x} e^{j\omega t - j\beta x}. \quad (3.9)$$

На комплексной плоскости выражение (3.9) изображают вращающимся вектором с начальной фазой βx . Проекция этого вектора на ось действительных величин плоскости комплексного переменного дает мгновенное значение косинусоидального напряжения.

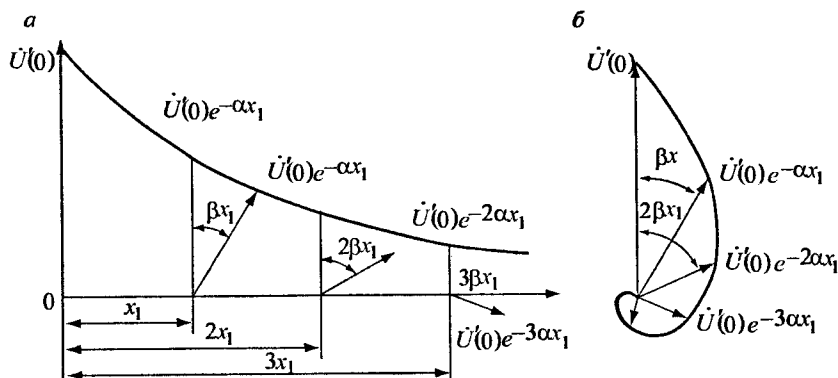


Рис. 3.4

Таким образом, мгновенное значение напряжения

$$\dot{U}'(x,t) = \dot{U}'(0)e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x). \quad (3.10)$$

Для каждого момента $t = t_1$ уравнение (3.10) дает изменение мгновенного значения напряжения вдоль линии (рис. 3.5). В каждой точке линии $x = x_1$ мгновенное значение напряжения меняется по закону косинуса.

С увеличением t аргумент $\omega t - \beta x$ остается неизменным, если x также будет возрастать со скоростью $v = \omega/\beta$. Следовательно, двигаясь по линии со скоростью v , можно наблюдать мгновенное значение напряжения $\dot{U}'(x,t)$ соответствующее одному и тому же фазовому состоянию, например $\dot{U}'(0)e^{-\alpha x} \cos 0$. Скорость перемещения по линии каждого фазового состояния $v = \omega/\beta$ называют фазовой скоростью. Для цепей воздушных линий с медными проводами на частотах более 300 Гц фазовая скорость близка к скорости света в пустоте. Для цепей воздушных линий со стальными проводами и для кабельных линий эта величина значительно ниже и в большой степени зависит от частоты тока, еще меньшие значения имеет она для рельсовых цепей.

Выражение (3.9) математически представляет собой волну, движущуюся от начала линии к ее концу. Эту волну называют падающей. Уменьшение напряжения при движении вдоль линии объясняется выделением энергии в виде тепла вследствие активного сопротивления проводов и проводимости изоляции каждого элемента линии. Изменение фазы напряжения от точки к точке обусловлено запаздыванием

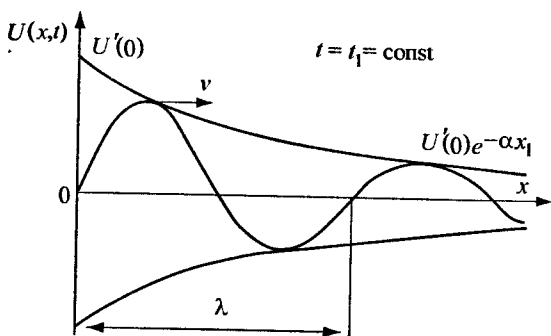


Рис. 3.5

колебательного процесса в точке x по сравнению с колебанием в начале линии, связанным с определенной скоростью движения.

Уменьшение вектора напряжения и изменение его фазы при движении волны вдоль линии определяют двумя частями комплексного километрического коэффициента распространения волны:

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

Километрический коэффициент затухания α — действительная часть комплексного коэффициента распространения волны. Километрический коэффициент затухания показывает, как убывают векторы напряжения вдоль линии вследствие потерь энергии в проводах и изоляции линии.

Численное определение α можно получить из соотношения (3.9)

$$|\dot{U}'(x)| = |\dot{U}'(0)| e^{-\alpha x},$$

из этого выражения $e^{-\alpha x} = \frac{|\dot{U}'(x)|}{|\dot{U}'(0)|},$

или
$$\alpha x = \ln \frac{|\dot{U}'(0)|}{|\dot{U}'(x)|}. \quad (3.11)$$

Таким образом, километрический коэффициент затухания измеряется натуральным логарифмом модуля отношения напряжений в начале и конце участка линии длиной 1 км. Формула (3.11) определяет затухание αx в единицах затухания, называемых неперами (Нп), Определение единицы затухания рассматривается далее.

С увеличением частоты затухание возрастает, так как растут сопротивление проводов вследствие поверхностного эффекта и диэлектрические потери в изоляции.

Километрический коэффициент фазы β — мнимая часть комплексного коэффициента распространения волны и представляет собой сдвиг фаз между векторами напряжения в начале и конце участка линии длиной 1 км; βx — угол между $\dot{U}'(0)$ и $\dot{U}'(x)$.

Разность фаз напряжения в двух точках линии, находящихся на расстоянии x друг от друга, $\beta x = \omega t_x$, где ωt_x — угол, на который поворачивается вектор $\dot{U}'(0)$ за время t_x ; t_x — время пробега волной расстояния x , после которого в точке x появляется напряжение $\dot{U}'(0)e^{-\alpha x}$.

Если по линии передаются токи с несколькими частотами, то их коэффициент β неодинаков и тогда для оценки запаздывания используют величину $t_x = \frac{d\beta(\omega)x}{d\omega}$, которую называют *групповым временем прохождения*.

Расстояние между точками линии, в которых фазы напряжения отличаются на угол 2π , называют длиной волны и обозначают символом λ .

Отраженная волна напряжения. Проанализируем второе слагаемое первого уравнения (3.5):

$$\dot{U}''(x) = \dot{U}''(0)e^{\gamma x} = \dot{U}''(0)e^{\alpha x}e^{\beta x}. \quad (3.13)$$

Соответствующее изменение вектора напряжения вдоль линии показано на рис. 3.6.

При переходе к мгновенным значениям имеем:

$$\dot{U}''(x,t) = \dot{U}''(0)e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \beta x). \quad (3.14)$$

Здесь аргумент $\omega t + \beta x$ остается неизменным, если с увеличением t x уменьшается с той же скоростью, что и в случае падающей волны, $v = \omega/\beta$. Это свидетельствует о движении к началу линии.

Таким образом, уравнение (3.14) соответствует волне, движущейся от конца линии к началу и называемой отраженной. Падающая и отраженная волны вместе называются бегущими.

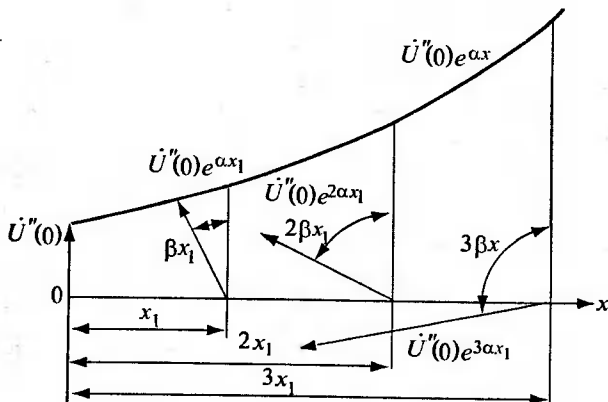


Рис. 3.6

Напряжение в каждой точке линии (см. 3.5) равно сумме напряжений падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}'(x) + \dot{U}''(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x). \quad (3.15)$$

Переходя к току, представляемому вектором $\dot{I}(x)$, перепишем второе уравнение (3.5) в виде

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{Z_{\text{В}}} - \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{Z_{\text{В}}} = \dot{I}_{\text{пад}}(x) - \dot{I}_{\text{отр}}(x). \quad (3.16)$$

Здесь можно повторить все рассуждения, проведенные для напряжения. Следовательно, ток в каждой точке линии равен разности токов падающей и отраженной волн, так как ток отраженной волны направлен навстречу току падающей волны.

Волновое сопротивление линий. В падающей и отраженной волнах напряжение и ток связаны соотношением

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{\dot{I}_{\text{пад}}(x)} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{\dot{I}_{\text{отр}}(x)} = Z_{\text{В}}. \quad (3.17)$$

Волновое сопротивление $Z_{\text{В}}$ определяет отношение напряжения к току в отдельной волне падающей или отраженной — в любой точке однородной линии. Комплексную величину $Z_{\text{В}}$ принято представлять в показательной форме:

$$Z_{\text{В}} = |Z_{\text{В}}| e^{j\varphi_{\text{В}}}. \quad (3.18)$$

Угол $\varphi_{\text{В}}$ определяет сдвиг фаз между векторами \dot{U} и \dot{I} в каждой из волн — падающей или отраженной — в любой точке линии.

Волновое сопротивление $Z_{\text{В}}$ связывает напряжение и ток в бегущей по линии волне, но не определяет непосредственно потери в ней. Действительно, $Z_{\text{В}}$ вычисляются по формуле (3.6), которую можно записать в виде $Z_{\text{В}} = \sqrt{Z_{\text{пр}} Z_{\text{из}}}$, где $Z_{\text{пр}}$ — сопротивление проводов линии длиной 1 км; $Z_{\text{из}}$ — сопротивление изоляции линии длиной 1 км.

Абсолютное значение $|Z_{\text{В}}|$ растет с увеличением сопротивления проводов линии. В этом случае рост $|Z_{\text{В}}|$ сопровождается возрастанием потерь. Значение $|Z_{\text{В}}|$ будет расти также с увеличением сопротивления

изоляции линии. В этом случае рост $|Z_B|$ сопровождается уменьшением потерь в линии. В зависимости от частоты модуль сопротивления всех типов реальных линий связи уменьшается. Угол сдвига фаз между векторами напряжения и тока в бегущей волне φ_B определяет характер мощности волны. Модуль волнового сопротивления рельсовых цепей с увеличением частоты растет. Это характерно для линии с потерями в изоляции. Если $\varphi_B = 0$, как это бывает в линиях без потерь, для которых при $R = 0$ и $G = 0$

$$Z_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (3.19)$$

то векторы напряжения и тока находятся в фазе и переносимая волной мощность чисто активна. В случае $\varphi_B \neq 0$ мощность, переносимая волной, содержит реактивную составляющую; в существующих линиях различной конструкции обычно емкостную. Таким образом, волновое сопротивление показывает характер переносимой волной мощности, а также относительную роль магнитного и электрического полей в этом переносе. Из выражения (3.19) для линии без потерь

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_B = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}}.$$

Если теперь возвести левые и правые части в квадрат, то можно видеть, что

$$\frac{C\dot{U}^2}{2} = \frac{L\dot{I}^2}{2},$$

т. е. в бегущей волне энергии электрического и магнитного полей равны и в равной степени участвуют в транспортировке энергии вдоль линии.

Способы описания волновых процессов. Полная картина распределения векторов напряжения и тока при передаче энергии переменного тока по электрической цепи с распределенными параметрами и при наличии в линиях только падающей волны приведена на рис. 3.7, а, б. Этот рисунок иллюстрирует совместное изменение векторов \dot{U} и \dot{I} вдоль линий, рис. 3.8 — распределение по линии и изменение во времени мгновенных напряжений и токов в падающей волне.

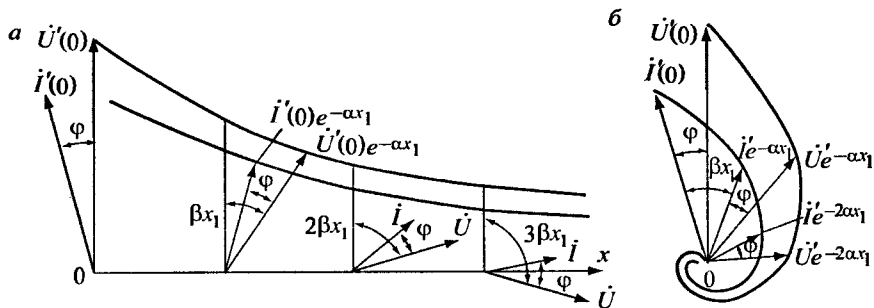


Рис. 3.7

Пользуясь символическим представлением \dot{U} и \dot{I} , получаем решение, не содержащее времени и определяющее только распределение напряжения и тока вдоль линии в установившемся режиме гармонического переменного тока в виде векторов.

Уравнения (3.5) определяют постоянное распределение амплитуд и фаз этих векторов вдоль линии. Получающиеся для каждой точки линии действующие значения и фазы результирующего вектора напряжения или тока можно найти путем измерений.

Для более полного объяснения распределения векторов напряжения и тока вдоль линии, а также механизма передачи энергии целесообразно переходить к мгновенным значениям напряжения и тока и рассматривать движущиеся вдоль линии падающие и отраженные волны напряжения и тока.

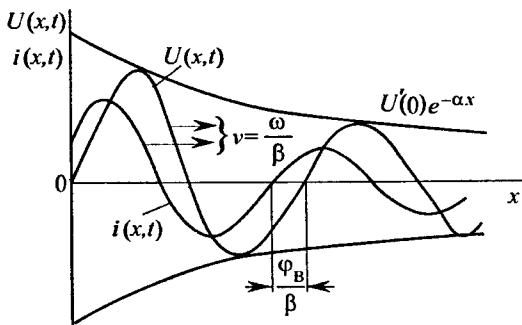


Рис. 3.8

В установленном режиме падающие и отраженные волны в отдельности наблюдать, проводя измерения, нельзя, так как в каждой точке линии напряжение равно сумме напряжений падающей и отраженной волн, а ток — разности токов этих волн.

В переходном режиме падающие и отраженные волны можно практически наблюдать в отдельности. Эта возможность использована, например, в импульсных приборах, предназначенных для обнаружения повреждений в линиях.

Волновые процессы в электрических линиях можно рассматривать, характеризуя их зарядом и напряженностями электрического и магнитного полей. В качестве поясняющего примера рассмотрим волну в линии без потерь, возбужденную подключенным к ее началу источником постоянного напряжения. Движение электромагнитного поля вдоль линии в первый момент после подключения источника иллюстрируется рис. 3.9, а.

Скорость движения волны v определяется следующим рассуждением. Пусть q — заряд линии длиной l км, тогда ток в проводе $\dot{I} = q v$.

Следовательно, $U = \frac{\dot{I}}{q}$, но $q = C\dot{U}$, а $\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Отсюда
$$U = \frac{\dot{I}}{q} = \frac{1}{C\dot{U}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.20)$$

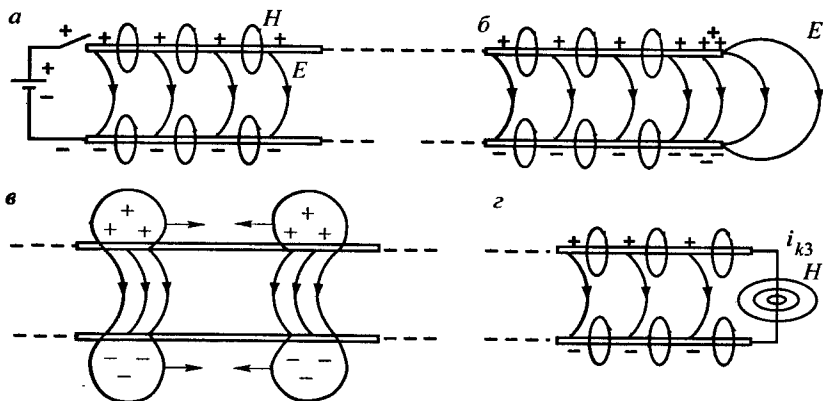


Рис. 3.9

По истечении времени $t = \ell/v$ волна дойдет до конца линии, и если она разомкнута, то дальнейшее движение зарядов невозможно. На конце линии произойдет скопление зарядов, сопровождающееся увеличением напряженности электрического поля (рис. 3.9, б). Поскольку такое состояние долго существовать не может, начнется встречное движение зарядов. Это и есть отраженная волна, которая здесь несет обратно всю энергию, доставленную падающей волной. Нетрудно видеть (рис. 3.9, в), что наличие зарядов на проводах линии повышает напряжение между ними независимо от направления движения этих зарядов. Из этого следует, что напряжение между проводами линии есть сумма напряжений падающей и отраженной волн.

Ток в данной точке линии, естественно, зависит от направления движения зарядов. Встречное движение зарядов приводит к уменьшению тока, так как ток линии есть разность токов падающей и отраженной волн.

Если бы провода линии на ее конце были замкнуты накоротко, то произошло бы увеличение напряженности магнитного поля полное отражение (рис. 3.9, з).

Коэффициент отражения. Рассмотрим зависимость между векторами напряжения и тока отраженных и падающих волн на конце линии, для чего введем понятие отношения напряжения отраженной волны к напряжению падающей волны, называемое коэффициентом отражения:

$$\frac{\dot{U}_{\text{отр}}(\ell)}{\dot{U}_{\text{пад}}(\ell)} = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}(\ell)}{\dot{I}_{\text{пад}}(\ell)} = \eta.$$

Для численного определения коэффициента отражения рассмотрим условия равновесия напряжений и токов в конце линии (рис. 3.10), где из-за удобства изображения показана только однопроводная линия. Все выводы будут справедливы для однородных линий всех конструкций. На рисунке условными обозначениями, напоминающими своими очертаниями гребень волны на поверхности воды, показаны падающий и отраженный волновые потоки.

В точке B , где к линии подключен приемник с сопротивлением Z_H должны выполняться два условия:

– напряжение в линии слева от точки B , представляющее собой сумму напряжений падающей и отраженной волн, должно быть равно на-

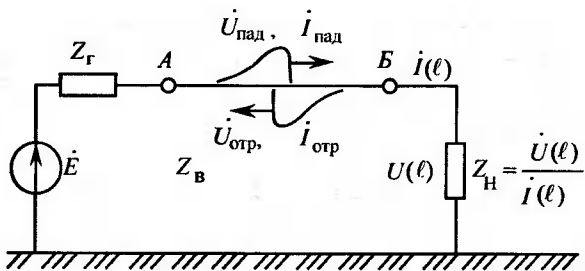


Рис. 3.10

пряжению нагрузки справа от точки B , определяемому падением напряжения на сопротивлении Z_H :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(\ell) + \dot{U}_{\text{отр}}(\ell) = Z_H \dot{I}(\ell),$$

— ток в линии слева от точки B , представляющей собой разность токов падающей и отраженной волн, должен быть равен току нагрузки:

$$\dot{I}_{\text{пад}}(\ell) - \dot{I}_{\text{отр}}(\ell) = \dot{I}(\ell).$$

Представляя каждое напряжение как произведение тока и сопротивления и умножая уравнение для токов на Z_H , получим

$$Z_B \dot{I}_{\text{пад}} + Z_B \dot{I}_{\text{отр}} = Z_H \dot{I}(\ell); \quad Z_H \dot{I}_{\text{пад}} - Z_H \dot{I}_{\text{отр}} = Z_H \dot{I}(\ell).$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем:

$$\frac{\dot{I}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = \eta. \quad (3.21)$$

Из последнего выражения видно, что коэффициент отражения равен нулю при равенстве сопротивления приемника на конце линии Z_H волновому сопротивлению линии Z_B . При этом отраженные волны в линии отсутствуют. Линию с нагрузкой $Z_H = Z_B$ называют *согласованно нагруженной*, а эту нагрузку — *согласованной*.

Отраженные волны являются следствием перераспределения энергии на конце линии в тех случаях, когда отношение напряжения к току

в падающей волне, подошедшей к концу линии, не соответствует отношению напряжения к току, которое может существовать в нагрузке.

Рассмотрим численные значения коэффициентов отражения в трех случаях:

– холостой ход линии: $Z_H = \infty$, $\eta = +1$. Коэффициент отражения равен единице. Амплитуды отраженных и падающих волн равны. Полное напряжение на конце линии равно удвоенному напряжению падающей волны. Полный ток равен нулю. Энергия из линии не потребляется;

– короткое замыкание линии: $Z_H = 0$, $\eta = -1$. На конце линии полное напряжение равно нулю, полный ток — удвоенному току падающей волны. Энергия из линии, как и в первом случае, не потребляется, так как приемник фактически отсутствует;

– линия замкнута на согласованную нагрузку: $Z_H = Z_B$, $\eta = 0$. Отраженных волн нет. Вся энергия, пришедшая к концу линии, потребляется нагрузкой. Это возможно только при равенстве отношений напряжения к току в волне и нагрузке.

Удвоенное напряжение на конце разомкнутой линии или удвоенный ток на конце короткозамкнутой линии по сравнению с напряжением или током в падающей волне в действительности появляется вследствие перехода энергии магнитного поля в энергию электрического поля (при холостом ходе) и наоборот (при коротком замыкании).

Коэффициент бегущей волны. Когда в линии имеются падающие и отраженные волны, полное напряжение $\dot{U}(x)$ в любой ее точке есть сумма напряжений падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x).$$

Поскольку фазы векторов напряжения волн при переходе от точки к точке вдоль линии принимают новые значения, векторное напряжение $\dot{U}(x)$ с изменением x будет меняться волнообразно.

В точках, где векторы $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}}$ совпадают по фазе, $\dot{U}(x)$ максимально $|\dot{U}(x)|_{\text{max}} = |\dot{U}_{\text{пад}}| + |\dot{U}_{\text{отр}}|$.

В точках, в которых векторы $\dot{U}_{\text{пад}}$ и $\dot{U}_{\text{отр}}$ противоположны по фазам, $\dot{U}(x)$ минимально и $|\dot{U}(x)|_{\text{min}} = |\dot{U}_{\text{пад}}| - |\dot{U}_{\text{отр}}|$. Чем больше амплитуда отраженной волны, тем значительнее колебания напряжения.

Если потери в линии малы и ими можно пренебречь и коэффициент отражения равен 1, то амплитуды отраженной и падающей волн равны $|\dot{U}_{\text{отр}}| = |\dot{U}_{\text{пад}}|$ и $\dot{U}(x)$ изменяется от 0 до $2\dot{U}_{\text{пад}}(x)$. В этом случае в линии устанавливается режим так называемых *стоячих волн*.

$$v = \frac{|\dot{U}|_{\min}}{|\dot{U}|_{\max}} = \frac{|\dot{U}_{\text{пад}}| - |\dot{U}_{\text{отр}}|}{|\dot{U}_{\text{пад}}| + |\dot{U}_{\text{отр}}|} = \frac{1 - |\eta|}{1 + |\eta|}. \quad (3.22)$$

Для оценки сложившегося в линии режима в технике сверхвысоких частот используют коэффициент бегущей волны.

Этот коэффициент равен единице, когда $\eta = 0$ и в линии имеется только бегущая волна. Равенство его нулю соответствует режиму стоячих волн.

3.2.2. Распределение напряжений и токов вдоль линии

Проведенный в предшествующих главах физический анализ решений дифференциальных уравнений линии показал волновую природу процессов передачи электрической энергии по линиям. Опираясь на основные свойства волновых процессов, можно получить соотношения, связывающие полные напряжения и токи на входе линии, в произвольной точке и на ее конце.

Связь между напряжениями и токами на входе и выходе линии характеризует передающие свойства последней и позволяет определить напряжение и ток на входе линии, которые обеспечивают на ее выходе напряжение и ток, необходимые для работы приемника.

Связи между напряжениями и токами на концах линии и в произвольной точке используются при рассмотрении взаимных электромагнитных влияний между параллельно расположенными цепями. Рассмотрим рис. 3.11, на котором условно показаны падающие и отраженные волны и связи между ними. Мы знаем (и это показано на рисунке), что падающая волна в конце линии $\dot{U}_{\text{пад}}(\ell) = \dot{U}_{\text{пад}}(0)e^{-\gamma\ell}$, отраженная волна в конце линии $\dot{U}_{\text{отр}}(\ell) = \dot{U}_{\text{пад}}(\ell)\eta$, отраженная волна в начале

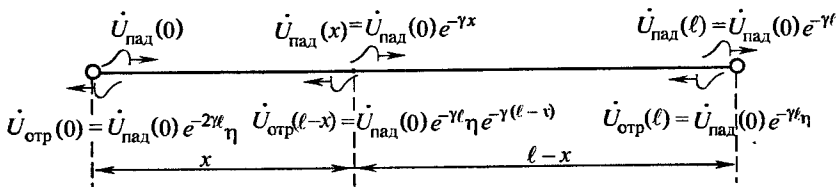


Рис. 3.11

линии $\dot{U}_{отр}(0) = \dot{U}_{отр}(\ell)e^{-\gamma \ell}$ и что полное напряжение в любой точке линии есть сумма напряжений падающей и отраженной волн.

Поэтому можно написать:

$$\dot{U}(0) = \dot{U}_п(0) + \dot{U}_о(0) = \dot{U}_п(\ell)e^{\gamma \ell} + \dot{U}_п(\ell)\eta e^{-\gamma \ell}. \quad (3.23)$$

Кроме того, $\dot{U}(\ell) = \dot{U}_п(\ell) + \dot{U}_о(\ell) = \dot{U}_п(\ell)(1 + \eta)$.

Здесь $\dot{U}_{пад} = \dot{U}_п$ и $\dot{U}_{отр} = \dot{U}_о$.

Отсюда
$$\dot{U}_п(\ell) = \dot{U}(\ell) \frac{1}{1 + \eta}. \quad (3.24)$$

Подставляя выражение (3.24) в формулу (3.23), получим

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell)e^{\gamma \ell} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 + \eta}; \quad (3.25)$$

$$\dot{I}(0) = \frac{1}{Z_B} (\dot{U}_п(0) - \dot{U}_о(0)) = \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B} e^{\gamma \ell} - \frac{1 - \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 + \eta} = \dot{I}(\ell)e^{\gamma \ell} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 - \eta}. \quad (3.26)$$

Выражения (3.25) и (3.26) определяют коэффициенты передачи по напряжению и току.

Условие работы передатчика характеризует входное сопротивление:

$$Z_{вх} \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = \frac{\dot{U}_п(0) + \dot{U}_о(0)}{\dot{I}_п(0) - \dot{I}_о(0)} = Z_B \frac{1 + \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 - \eta e^{-2\gamma \ell}}. \quad (3.27)$$

Напряжение и ток в произвольной точке линии, находящейся на расстоянии x от ее начала и $(l-x)$ от конца, найдем аналогично:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\Pi}(x) + \dot{U}_{\text{о}}(x) = \dot{U}_{\Pi}(0)e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\text{о}}(0)e^{\gamma x} = \\ &= \dot{U}_{\Pi}(0)e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\text{о}}(0)e^{-\gamma l} \eta e^{-\gamma(l-x)} = \dot{U}(0)e^{-\gamma x} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \eta e^{-2\gamma l}}; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{U}(0)}{Z_{\text{В}}} e^{-\gamma l x} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \eta e^{-2\gamma l}}.$$

При расчетах электромагнитных влияний линий друг на друга часто пользуются преобразованными выражениями (3.28). Рассмотрим способ преобразования на примере связи между $\dot{U}(x)$ и $\dot{U}(0)$.

$$\dot{U}(x) = \dot{U}(0)e^{-\gamma x} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + \eta e^{-2\gamma l}}.$$

Представим коэффициент отражения выражением $\eta = e^{\ln \eta}$, подставим это в формулу для $\dot{U}(x)$ и вынесем за скобки в числителе $e^{-\gamma l}$, $e^{-\gamma x}$, $e^{\ln \sqrt{\eta}}$ и знаменателе $e^{-\gamma x}$, $e^{\ln \sqrt{\eta}}$. После сокращений получим

$$\dot{U}(x) = \dot{U}(0) \frac{\text{ch}[\gamma(l-x) - \ln \sqrt{\eta}]}{\text{ch}[\gamma l - \ln \sqrt{\eta}]}. \quad (3.29)$$

Выражения (3.26) и (3.27) являются общими, охватывающими все многообразие возможных особенностей параметров и режимов работы линии. Во многих практически важных частных случаях они упрощаются. Рассмотрим эти случаи.

Согласованная линия. Довольно часто с известным приближением линии связи можно считать нагруженными согласованно. При этом $Z_{\text{Н}} = Z_{\text{В}}$, $\eta = 0$. В линии нет отраженных волн, поэтому в соотношениях, определяющих связи между напряжениями и токами, пропадают слагаемые, соответствующие этим волнам. Из выражений (3.25) и (3.26) получаем

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell)e^{\gamma \ell}; \quad \dot{I}(0) = \dot{I}(\ell)e^{\gamma \ell}; \quad (3.30)$$

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = \frac{\dot{U}(\ell)}{\dot{I}(\ell)} = Z_{\text{В}}. \quad (3.31)$$

Электрически длинная линия. Линию называют электрически длинной, если $|\gamma\ell| \geq 2,3$ Нп и $|e^{-2\gamma\ell}| \leq 0,01$. Физически это означает, что амплитуда напряжения отраженной волны в начале линии по меньшей мере в 100 раз меньше амплитуды напряжения падающей волны.

Пренебрегая в выражениях (3.25) и (3.26) слагаемым $\eta e^{-2\gamma\ell}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(\ell) \frac{1}{2} e^{\gamma\ell} \left(1 + \frac{Z_B}{Z_H} \right); \\ \dot{I}(0) &= \dot{I}(\ell) \frac{1}{2} e^{\gamma\ell} \left(1 + \frac{Z_H}{Z_B} \right); \\ \dot{S}(0) &= \dot{S}(\ell) e^{+2\gamma\ell} \frac{(Z_H + Z_B)^2}{4Z_H Z_B}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $S(0)$ и $S(\ell)$ — мощности на входе и выходе линии.

Линии без потерь. Многие устройства — фидеры, питающие радиоантенны; сами радиоантенны; линии сильного тока при использовании их для передачи сигналов, а также кабели, применяемые при монтаже устройств СВЧ, — характеризуются весьма малыми потерями и сильно выраженными волновыми процессами. Если потери в линии настолько малы, что можно считать $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$, то

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}, \quad \alpha = 0, \quad Z_B = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Коэффициент распространения в этом случае оказывается чисто мнимой величиной. Подставляя $\gamma = j\beta$ в уравнения (3.25) и (3.26) и имея в виду, что в этом случае $e^{\gamma\ell} = e^{j\beta\ell}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(\ell) e^{j\beta\ell} \frac{1 + \eta e^{-j2\beta\ell}}{1 + \eta}; \\ \dot{I}(0) &= \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B} e^{j\beta\ell} \frac{1 - \eta e^{-j2\beta\ell}}{1 + \eta}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Уравнения (3.33) применимы для линий, у которых $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$, а ℓ соизмеримо с длиной волны λ .

Характерным для линий без потерь является чисто активное их волновое сопротивление, а фазовая скорость $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{LC}$ не зависит от частоты тока. При согласованной нагрузке линии без потерь на сопротивление $R_H = R_B = \sqrt{\frac{L}{C}}$ напряжения и токи в линии связаны соотношениями

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell)e^{j\beta\ell} \quad \dot{I}(0) = \dot{U}(\ell)e^{j\beta\ell}. \quad (3.34)$$

Векторные напряжения и ток не изменяются вдоль линии. Вследствие того, что Z_B активно, напряжение и ток бегущей волны находятся в фазе и передаваемая волной мощность чисто активна. Линия потребляет от питающего ее генератора активную мощность, которую передает к выходу для питания приемника. Напряжение и ток вдоль линии меняются только по фазе на значение $\beta\ell = 2\pi f(\ell/v)$.

Совсем иначе происходят процессы в линии без потерь, если на конце ее нет приемника. Поскольку в самой линии потерь нет, энергия падающей волны при отсутствии приемника на конце израсходована быть не может и полностью возвращается в виде отраженной волны.

В установившемся режиме в линии с разомкнутыми или замкнутыми концами одновременно существуют два равных по значению потока энергии, движущихся во встречных направлениях. Энергия, воспринятая линией от генератора, через время $t = 2\ell/v$ возвращается обратно в генератор. Распределение напряжения и тока вдоль линии при этом определяется соотношениями:

при холостом ходе ($\eta=1$) из выражений (3.25) и (3.26)

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}(\ell)[e^{j\beta(\ell-x)} + e^{-j\beta(\ell-x)}] = \dot{U}(\ell) \cos\beta(\ell-x); \\ \dot{I}(x) &= j \frac{\dot{U}(\ell)}{\sqrt{LC}} \sin\beta(\ell-x); \end{aligned} \quad (3.35)$$

при коротком замыкании ($\eta=-1$)

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= j\dot{I}(\ell)Z_B \sin\beta(\ell - x); \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}(\ell)\cos\beta(\ell - x). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Как следует из выражений (3.35) и (3.36), в этих режимах каждой точке линии соответствуют свои значения $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$, при одних x они достигают максимума $\dot{U}(\ell)$ или $\dot{I}(\ell)$, при других — нуля. Эти выражения определяют режим стоячих волн в линии. Такой режим характерен для радиоантенн.

Со стороны входа линия ведет себя как реактивное сопротивление и значение его определяется как $\dot{U}(0)/\dot{I}(0) = jX_{\text{вх}}$. При холостом ходе это будет $-j\sqrt{LC}\text{ctg}\beta\ell$; при коротком замыкании $j\sqrt{LC}\text{tg}\beta\ell$.

При $\beta\ell = 2\pi/\lambda\ell$, что соответствует $\ell = \lambda/4$, входное сопротивление $Z_{\text{вх кз}} = \infty$, $Z_{\text{вх хх}} = 0$. Входное сопротивление разомкнутого отрезка линии длиной $\lambda/4$ равно нулю. Эта величина четверть волнового отрезка линии без потерь, замкнутого накоротко, бесконечно велика.

Не менее замечательные свойства имеет отрезок линии длиной $\lambda/4$, замкнутый на произвольное сопротивление $R_{\text{Н}}$.

Подставив эти значения в уравнения (3.33), получим

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell)e^{j\frac{\pi}{2}\frac{1-\eta}{1+\eta}}; \quad \dot{I}(0) = \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B}e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Отсюда

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = Z_B^2 / R_{\text{Н}}. \quad (3.37)$$

Таким образом, четвертьволновая линия без потерь может быть использована как трансформатор для согласования сопротивлений.

Для приложений существенны также частотные зависимости входных сопротивлений: $Z_{\text{кз}} = j\sqrt{L/C}\text{tg}\beta\ell$ и $Z_{\text{хх}} = -j\sqrt{L/C}\text{ctg}\beta\ell$. Так как для линии без потерь $\beta = \omega\sqrt{LC}$, то получаем

$$Z_{\text{кз}} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\text{tg}t\omega \quad \text{и} \quad Z_{\text{хх}} = -j\sqrt{\frac{L}{C}}\text{ctg}t\omega,$$

где $t = \ell/v = \ell\sqrt{LC}$.

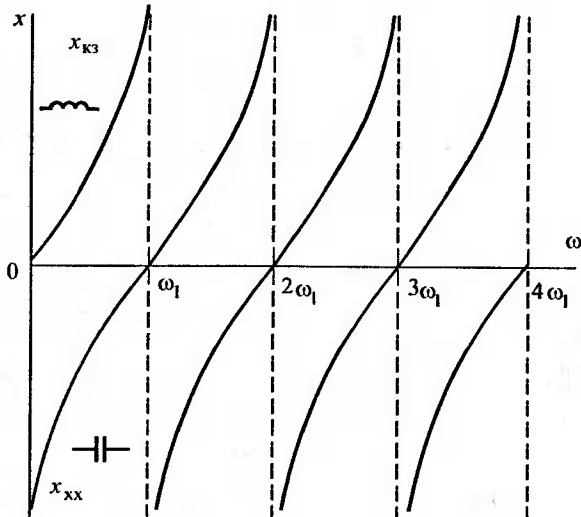


Рис. 3.12

Частотные зависимости $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$ линии без потерь подобны таковым реактивных двухполосников (рис. 3.12).

Электрически короткая линия. Электрически короткой называют линию с малыми затуханием и фазовым сдвигом. В такой линии волновые процессы проявляются слабо и связи между напряжениями и токами на входе и выходе линии можно охарактеризовать, используя вместо волновых параметров Z_B и γl первичные параметры линии $Z_{л} = Z_{пр} l$ и $Y_{л} = Y_{кз} l$.

Признаком электрически короткой линии является такое малое значение величины γl , при котором выполняется соотношение

$$(\gamma l)^3 \ll 3!$$

При этом множители $e^{\gamma l}$ и $e^{-\gamma l}$ в уравнениях (3.25) и (3.26) можно заменить разложениями их в ряд, удержав только три первых слагаемых, и принять

$$e^{\gamma l} = 1 + \gamma l + \frac{(\gamma l)^2}{2}; \quad e^{-\gamma l} = 1 - \gamma l + \frac{(\gamma l)^2}{2}.$$

Эта подстановка и дает уравнения электрически короткой линии.

Раскрыв также в уравнениях (3.25) и (3.26)

$$\eta = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}; \quad \frac{1}{1+\eta} = \left(\frac{1}{2} + \frac{Z_B}{2Z_H} \right); \quad \frac{\eta}{1+\eta} = \left(\frac{1}{2} - \frac{Z_B}{2Z_H} \right)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(\ell) \left(e^{\gamma\ell} \frac{1}{1+\eta} + e^{-\gamma\ell} \frac{\eta}{1+\eta} \right) = \dot{U}(\ell) \left(1 + \frac{(\gamma\ell)^2}{2} \right) + i(\ell)\gamma\ell Z_B; \\ i(0) &= \dot{U}(\ell) \frac{\gamma\ell}{Z_B} + i(\ell) \left(1 + \frac{(\gamma\ell)^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Воспользуемся соотношениями (3.6). Из них следует, что

$$\gamma\ell Z_B = Z_n; \quad \frac{\gamma\ell}{Z_B} = Y_n; \quad \frac{(\gamma\ell)^2}{2} = \frac{Z_n Y_n}{2}.$$

Подставив эти значения в уравнения электрически короткой линии (3.38), получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(0) &= \dot{U}(\ell) + i(\ell)Z_n + \dot{U}(\ell) \frac{Z_n Y_n}{2}; \\ i(0) &= i(\ell) + \dot{U}(\ell)Y_n + i(\ell) \frac{Z_n Y_n}{2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Эти уравнения, не содержащие волновых параметров, и используют для расчетов режимов электрически коротких линий.

Сравним уравнения (3.39) с уравнениями симметричных схем замещения Т и П. Зависимость $\dot{U}(0)$ электрически короткой линии от $\dot{U}(\ell)$ и $i(\ell)$ точно совпадает с аналогичной зависимостью симметричной схемы замещения П, в которой Z_1 и Z_2 заменены Z_n и $1/Y_n$. Зависимость $i(0)$ от $\dot{U}(\ell)$ и $i(\ell)$ электрически короткой линии отличается от аналогичной зависимости для схемы П на величину $\dot{U}(\ell) \frac{Z_1}{4Z_2}$.

Зависимость для $i(0)$ электрически короткой линии точно совпадает с аналогичной зависимостью для симметричной схемы Т.

Это обстоятельство используют при расчетах коротких линий для замены их эквивалентными схемами замещения.

3.3. Однородная уединенная линия как четырехполюсник

Параметры линии как четырехполюсника. Любую пассивную линейную электрическую цепь с постоянными параметрами и четырьмя зажимами, используемую для передачи электрической энергии в качестве промежуточного звена, можно рассматривать как четырехполюсник. К числу таких цепей относят однородную уединенную электрическую линию.

Уравнения линии как четырехполюсника должны связывать четыре величины: $\dot{U}(0)$, $\dot{I}(0)$, $\dot{U}(\ell)$, $\dot{I}(\ell)$. Для их получения вернемся к выражениям (3.25) и (3.26):

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell) e^{\gamma \ell} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 + \eta};$$

$$\dot{I}(0) = \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B} e^{\gamma \ell} \frac{1 - \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 + \eta}.$$

Преобразуем выражения (3.25) и (3.26), подставив в них значение $\eta = (Z_H - Z_B)/(Z_H + Z_B)$ и заменяя $\dot{U}(\ell)/Z_B$ на $\dot{I}(\ell)$. Имея в виду, что

$$\frac{1}{1 + \eta} = \frac{1}{2} + \frac{Z_B}{2Z_H}; \quad \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{1}{2} - \frac{Z_B}{2Z_H},$$

получим

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell) e^{\gamma \ell} \frac{1}{1 + \eta} + \dot{U}(\ell) e^{-\gamma \ell} \frac{\eta}{1 + \eta} = \dot{U}(\ell) \operatorname{ch} \gamma \ell + \dot{I}(\ell) Z_B \operatorname{sh} \gamma \ell;$$

$$\dot{I}(0) = \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B} e^{\gamma \ell} \frac{1}{1 + \eta} - \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B} e^{-\gamma \ell} \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{\dot{U}(\ell)}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma \ell + \dot{I}(\ell) \operatorname{ch} \gamma \ell.$$

Здесь величина $\dot{U}(\ell) \frac{\eta}{1 + \eta} = \frac{1}{2} [\dot{U}(\ell) - Z_B \dot{I}(\ell)]$ представляет собой

отраженную, а величина $\dot{U}(\ell) \frac{1}{1 + \eta} = \frac{1}{2} [\dot{U}(\ell) + Z_B \dot{I}(\ell)]$ — падающую волны напряжения на выходе линии.

Обозначим $\dot{U}(0) = \dot{U}_0$; $\dot{I}(0) = \dot{I}_0$; $\dot{U}(\ell) = \dot{U}_\ell$; $\dot{I}(\ell) = \dot{I}_\ell$ и сопоставим уравнения электрической линии и четырехполюсника:

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \dot{U}_\ell \operatorname{ch} \gamma \ell + \dot{I}_\ell \operatorname{sh} \gamma \ell; \\ \dot{I}_0 &= \dot{U}_0 \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma \ell + \dot{I}_\ell \operatorname{ch} \gamma \ell.\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Из сопоставления этих уравнений следует, что матрица параметров линии

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma \ell & Z_B \operatorname{sh} \gamma \ell \\ \frac{1}{Z_B} \operatorname{sh} \gamma \ell & \operatorname{ch} \gamma \ell \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и у каждого пассивного обратимого четырехполюсника, выполняется соотношение, выражающее свойства обратимости: $AD - BC = 1$, так как $\operatorname{ch}^2 \gamma \ell - \operatorname{sh}^2 \gamma \ell = 1$.

Линия как четырехполюсник симметрична, так как $A = D$.

Совершенно очевидно, что уравнения линии можно представить всеми формами уравнений четырехполюсника. Матрица проводимостей линии

$$(Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_B} \operatorname{cth} \gamma \ell & -\frac{1}{Z_B \operatorname{sh} \gamma \ell} \\ -\frac{1}{Z_B \operatorname{sh} \gamma \ell} & \frac{1}{Z_B} \operatorname{cth} \gamma \ell \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

а матрица сопротивлений

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_B \operatorname{cth} \gamma \ell & \frac{Z_B}{\operatorname{sh} \gamma \ell} \\ \frac{Z_B}{\operatorname{sh} \gamma \ell} & Z_B \operatorname{cth} \gamma \ell \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Таким образом, однородную линию рассматриваемую как симметричный четырехполосник, можно характеризовать двумя независимыми комплексными коэффициентами, задаваемыми различными способами: первичными параметрами $Z_{\text{л}}$ и $Y_{\text{л}}$, волновыми или вторичными параметрами $Z_{\text{В}}$ и $\gamma\ell$, третичными параметрами A, B, C , а также матрицами проводимостей и сопротивлений.

Все эти способы взаимозаменяемы и в одинаковой степени могут характеризовать линию как систему передачи. Выбор того или иного из них зависит только от удобства его использования при решении конкретной задачи.

Линию как систему передачи сигналов наиболее удобно характеризовать волновыми параметрами: волновым сопротивлением $Z_{\text{В}}$ и коэффициентом распространения $\gamma\ell$. (рис. 3.13). Волновое сопротивление показывает, как следует подобрать сопротивления генератора и приемника, чтобы в линии отсутствовали отраженные волны. Коэффициент распространения волны $\gamma\ell$ указывает на потери и фазовый сдвиг, возникающие при пробеге волны вдоль линии. Величины $Z_{\text{В}}$ и $\gamma\ell$ вполне характеризуют передающие свойства линии при согласованной нагрузке.

В общем случае, рассматривая линию как четырехполосник, условия передачи энергии от генератора к приемнику в схеме, приведенной на рис. 3.13, можно характеризовать входным сопротивлением, сопротивлением передачи или приведенным сопротивлением. Из формул (3.41) и (3.27) получаем

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{AR_{\text{Н}} + B}{CR_{\text{Н}} + D} = Z_{\text{В}} \frac{R_{\text{Н}} \operatorname{ch} \gamma\ell + Z_{\text{В}} \operatorname{sh} \gamma\ell}{R_{\text{Н}} \operatorname{sh} \gamma\ell + Z_{\text{В}} \operatorname{ch} \gamma\ell} = Z_{\text{В}} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma\ell}}{1 - \eta e^{-2\gamma\ell}}. \quad (3.44)$$

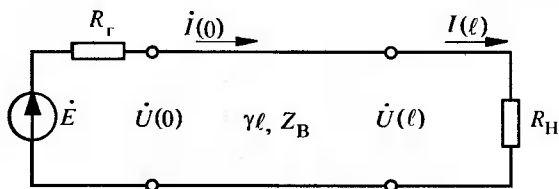


Рис. 3.13

Выражение (3.44), как и аналогичные последующие, одинаково верно при активных R_H и комплексных Z_H сопротивлениях нагрузки.

В частных случаях при $R_H = 0$ (короткое замыкание) и $R_H = \infty$ (холостой ход) получим

$$Z_{вх R_H=0} = Z_{кз} = \frac{1}{Y_{11}} = Z_B \operatorname{th} \gamma \ell; \quad (3.45)$$

$$Z_{вх R_H=\infty} = Z_{хх} = Z_{11} = Z_B \operatorname{cth} \gamma \ell. \quad (3.46)$$

Сопротивление передачи и приведенное сопротивление линии

$$Z_{пер} = Z_{вх} \frac{1}{F} = AR_H + B = R_H \operatorname{ch} \gamma \ell + Z_B \operatorname{sh} \gamma \ell = Z_B e^{\gamma \ell} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma \ell}}{1 - \eta}; \quad (3.47)$$

$$Z_{прив} = \frac{Z_{вх} + R_r}{Z_{вх}} Z_{пер} = AR_H + DR_r + CR_H R_r + B = (R_r + R_H) \operatorname{ch} \gamma \ell + \left(Z_B + \frac{R_r R_H}{Z_B} \right) \operatorname{sh} \gamma \ell = e^{\gamma \ell} \frac{(R_r + Z_B) + (Z_B - R_r)}{1 - \eta}. \quad (3.48)$$

При $R_r = R_H = R$

$$Z_{прив} = (R + Z_B) e^{\gamma \ell} \frac{1 - \eta^2 e^{-2\gamma \ell}}{1 - \eta}. \quad (3.49)$$

Сопоставляя выражения (3.47) и (3.49), можно видеть, что наличие отраженных волн в линии в большей степени влияет на величину $Z_{пер}$ и в меньшей — на $Z_{прив}$, так как в последнем в числителе стоит η^2 .

Использование понятий $Z_{пер}$ и $Z_{прив}$ облегчает решение многих задач при определении напряжений и токов в линиях.

Определение параметров линии из опытов холостого хода и короткого замыкания. Параметры электрической линии, как и всякого четырехполюсника, могут быть установлены из опытов короткого замыкания и холостого хода. ТЛЭЦ позволяет получить новый вариант их определения, который может быть использован для вычисления параметров любых четырехполюсников.

Если в результате измерения входного сопротивления линии оказалось возможным определить $Z_{кз} = |Z_{кз}| e^{j\varphi_{кз}}$ и $Z_{хх} = |Z_{хх}| e^{j\varphi_{хх}}$, то все параметры линии можно рассчитать исходя из этих опытных данных.

Умножив и разделив выражение (3.45) на (3.46), получим

$$Z_B = \sqrt{Z_{K3} Z_{XX}} = \sqrt{|Z_{K3}| |Z_{XX}|} e^{j0,5(\varphi_{K3} + \varphi_{XX})} = Z_B e^{j\varphi_B}, \quad (3.50)$$

$$\operatorname{th} \gamma \ell = \sqrt{\frac{Z_{K3}}{Z_{XX}}} = T e^{j\varphi_T}, \quad (3.51)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{|Z_{K3}|}{|Z_{XX}|}}; \quad \varphi_T = 0,5(\varphi_{K3} - \varphi_{XX}).$$

Обычно значение $\gamma \ell$ находят по частям, пользуясь формулами

$$e^{2\gamma \ell} = \frac{1 + T e^{j\varphi_T}}{1 - T e^{j\varphi_T}} = M e^{j\theta}; \quad (3.52)$$

$$\alpha \ell = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + T e^{j\varphi_T}}{1 - T e^{j\varphi_T}} \right|; \quad (\beta \ell)' = 0,5\theta. \quad (3.53)$$

Рассчитанное $\alpha \ell$ можно использовать сразу. При вычислении фазового угла $\beta \ell$ возникает затруднение. Выражение (3.53) определяет его неоднозначно. Приближенное значение находят, сопоставляя длину линии с длиной волны. Километрический коэффициент фазы

$$\beta = \frac{(\beta \ell)' + k\pi}{\ell},$$

где k находят подбором.

Если известно волновое сопротивление линии Z_B и постоянная передачи $\gamma \ell = \alpha \ell + j\beta \ell$, то можно вычислить Z_{Γ} и Y_{Γ} :

$$Z_{\Gamma} = (R + j\omega L)\ell = \gamma \ell Z_B, \quad (3.54)$$

в произведении $\gamma \ell Z_B$ действительная часть равна $R\ell$, а мнимая — $\omega L\ell$:

$$Y_{\Gamma} = (G + j\omega C)\ell = \gamma \ell / Z_B. \quad (3.55)$$

в отношении $\gamma \ell$ действительная часть равна G , мнимая — $\omega C\ell$.

Для пояснения способа выбора значения k рассмотрим численный пример на определение параметров линии по результатам измерений входных сопротивлений холостого хода и короткого замыкания. Пусть при измерении входного сопротивления двухпроводной цепи кабельной линии связи на частоте $f = 800$ Гц получено: $Z_{кз} = 383 \perp^{-4^\circ}$ и $Z_{хх} = 627 \perp^{-78^\circ}$. Знак \perp читается «с углом». Длина линии $\ell = 12$ км. По формуле (3.50) волновое сопротивление линии

$$Z_B = \sqrt{Z_{кз} Z_{хх}} = \sqrt{383 \perp^{-4^\circ} 627 \perp^{-78^\circ}} = 490 \perp^{-41^\circ}.$$

Для определения комплексной постоянной передачи $\gamma \ell$ воспользуемся формулой (3.51):

$$\text{th } \gamma \ell = \sqrt{Z_{кз} / Z_{хх}} = \sqrt{383 \perp^{-4^\circ} / 627 \perp^{-78^\circ}} = 0,782 \perp^{37^\circ}.$$

Найдем $\alpha \ell$ и $(\beta \ell)'$ по формулам (3.52) и (3.53):

$$\alpha \ell = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + T e^{j\varphi_T}}{1 - T e^{j\varphi_T}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + 0,782 e^{j37^\circ}}{1 - 0,782 e^{j37^\circ}} \right| = 0,521 \text{ Нп}$$

километрическое затухание $\alpha = 0,521/12 = 0,0434$ Нп/км, фазовый угол

$$(\beta \ell)' = 0,5\theta = 0,588 \text{ рад}$$

Коэффициент k , необходимый для определения $\beta \ell$, выберем следующим образом. Примем фазовую скорость для цепи кабельной линии связи, равной примерно $2 \cdot 10^5$ км/с.

Длина волны равна произведению фазовой скорости и периода тока:

$$\lambda = v / f = 2 \cdot 10^5 / 10^2 = 250 \text{ км}$$

Из сравнения длины линии $\ell = 12$ км с длиной волны $\lambda = 250$ км следует, что по длине линии в рассматриваемом случае укладывается малая часть волны. Это значит, что угол $\beta \ell$ должен иметь значение $\beta \ell \equiv 2\pi \frac{12}{250}$ и коэффициент k следует взять равным 0. Найдем значение километрического фазового коэффициента:

$$\beta = \frac{(\beta \ell)' + 0}{\ell} = 0,049 \text{ рад/км}$$

Следовательно,

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,043 + j0,049 \angle 48,73^\circ .$$

Полное сопротивление проводов линии длиной 1 км можно вычислить по формуле (3.54):

$$Z_{л} = (R + j\omega L) = \gamma Z_{В} = 0,065 \angle 48,73^\circ \cdot 490 \angle -40,88^\circ = 31,94 \angle 7,85^\circ .$$

Разлагая произведение $\gamma Z_{В}$ на действительную и мнимую части, получим

$$R + j\omega L = 31,64 + j4,36.$$

Определим полную проводимость между проводами линии длиной 1 км по формуле (3.55):

$$Y_{л} = (G + j\omega C) = \gamma / Z_{В} = 133 \cdot 10^{-6} \angle 89,61^\circ = (0,905 + j133) \cdot 10^{-6};$$

$$Z_{л} = (R + j\omega L) = \gamma Z_{В} = 0,065 \angle 48,73^\circ \cdot 490 \angle -40,88^\circ = 31,94 \angle 7,85^\circ .$$

Окончательно для первичных параметров линии получим

$$R = 31,64 \text{ Ом/км}; \quad L = \frac{4,36}{\omega} = 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км};$$

$$G = 0,905 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом км}}; \quad C = \frac{133 \cdot 10^{-6}}{\omega} = 26,5 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}.$$

При определении параметров линии измерением $Z_{кз}$ и $Z_{хх}$ по изложенному методу следует выбирать небольшие участки линии, для которых $\alpha l < 1,5 \dots 2$ и $Z_{кз} \neq Z_{хх}$, в противном случае точное вычисление затухания линии по th затруднительно.

3.4. Линия, возбуждаемая распределенными источниками

Линия, возбуждаемая распределенной ЭДС. Мы рассматривали случаи возбуждения электромагнитного процесса в линии генератором, подключенным к ее входу. Это обычно бывает при использовании линии для передачи электрической энергии или сигналов управления и связи и если она является уединенной.

Однако все линии в большей или меньшей степени подвержены воздействию внешних электромагнитных полей, наводящих в них напряжения и токи. Двухпроводные цепи линий связи испытывают

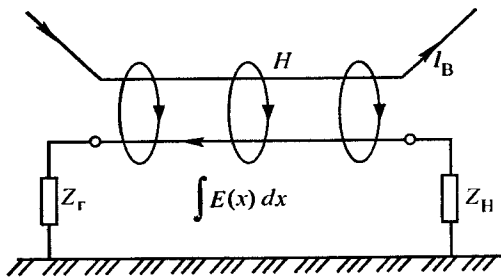


Рис. 3.14

влияние электротяги, электромагнитных полей от радиостанций, со стороны других цепей той же линии связи. Во всех этих случаях внешние влияния не меняют условий работы цепи, им подверженной. Если при передаче по линиям электрической энергии большими напряжениями и токами такими влияниями полностью пренебрегают, то при передаче сигналов связи малыми напряжениями и токами с ними необходимо считаться. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения линии, волновой процесс в которой непрерывно возбуждается внешними полями. Их действие можно заменить действием источников напряжения или тока, распределенными по длине линии.

Пусть под воздействием внешнего переменного магнитного поля, создаваемого другой влияющей цепью, в каждом элементе цепи связи наводится ЭДС $\dot{E}(x)dx$ (рис. 3.14). Зависимость $\dot{E}(x)$ обуславливается изменением значения влияющего тока в соответствии с выражением (3.28) или расстояния между влияющей и рассматриваемой линиями. Указанная ЭДС распределена по всей длине линии. Таким образом, линию, находящуюся под воздействием переменного магнитного поля, можно представить как бы питаемой распределенным источником с плотностью напряжения $\dot{E}(x)$ В/км.

ЭДС $\dot{E}(x)dx$ вызовет ток в каждом элементе линии и обеспечит в линии возникновение волнового процесса, для расчета которого следует решить дифференциальные уравнения линии с учетом внешнего воздействия. Как и при изучении уединенной линии, составим эквивалентную схему малого участка линии, подверженной влиянию (рис. 3.15 сравним с рис. 3.2).

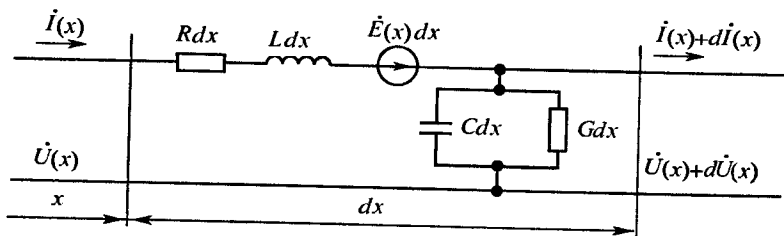


Рис. 3.15

Уравнения для приращения напряжения и тока на этом участке:

$$-d\dot{U} = (R + j\omega L)dx\dot{I} + \dot{E}(x)dx; \quad -d\dot{I} = (G + j\omega C)dx\dot{U}.$$

При отсутствии источников на концах линии величины \dot{U} и \dot{I} вызваны здесь источниками, распределенными по ее длине. Разделив эти уравнения на dx , взяв в первом из них вторую производную по x и исключив $d\dot{I}/dx$, получим

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2\dot{U} = \dot{E}'(x). \quad (3.56)$$

Это уравнение в отличие от уравнения (3.3) неоднородно. Общее решение его есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений. Частное решение неоднородного уравнения

$$\dot{U}(x) = \frac{1}{\gamma} \int E(x) \operatorname{sh} \gamma(x-u) du$$

характеризует волновые процессы, вызванные распределенными источниками.

Определение произвольных постоянных интегрирования приводит в рассматриваемом случае к громоздким выкладкам, поэтому воспользуемся волновыми свойствами однородной линии, ее свойствами как четырехполюсника и принципом наложения.

Принцип наложения позволяет утверждать, что, поскольку цепь линейна, элементарная ЭДС $d\dot{E}(x)$ в каждом бесконечно малом элементе линии действует независимо и вызывает свою реакцию.

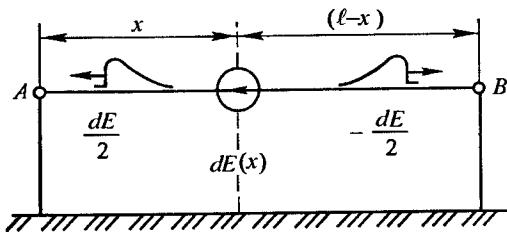


Рис. 3.16

Результат действия полной ЭДС есть сумма результатов от действия всех $d\dot{E}(x)$.

Рассмотрим действие ЭДС $d\dot{E}(x)$, находящейся в точке, удаленной на расстояние x от начала линии (рис. 3.16). В этой точке возникают две волны с напряжениями $0,5 d\dot{E}(x)$ и $-0,5 d\dot{E}(x)$, соответственно расходящиеся в стороны концов линии AB . Напряжение волны, падающей в точке A линии, равно $0,5d\dot{E}(x)e^{-\gamma x}$, а падающей в точке B — $0,5d\dot{E}(x)e^{-\gamma(\ell-x)}$.

Если в линии $dE(x)$ действует ЭДС $\dot{E}(x)$, распределенная по всей ее длине, то напряжение падающей волны:

в начале линии

$$\dot{U}_{\text{пад}}^*(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} d\dot{E}(x) e^{-\gamma x}, \quad (3.57)$$

в конце линии

$$\dot{U}_{\text{пад}}(\ell) = -\frac{1}{2} \int_0^{\ell} d\dot{E}(x) e^{-\gamma(\ell-x)}. \quad (3.58)$$

При согласованных нагрузках на концах линии величины $\dot{U}_{\text{пад}}(0)$ и $\dot{U}_{\text{пад}}(\ell)$ являются напряжениями на концах линии, а токи соответственно:

$$\dot{I}(0) = \dot{U}_{\text{пад}}(0) / Z_B \quad \text{и} \quad \dot{I}(\ell) = \dot{U}_{\text{пад}}(\ell) / Z_B.$$

При несогласованных нагрузках на концах линии возникнут отраженные волны, которые наложатся на падающие здесь волны.

Напряжение суммарной волны, падающей на нагрузочное сопротивление $Z_{\text{л}}$, включенное в начале линии в точке A :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(0) + \dot{U}_{\text{отр}}(0) \eta_{\ell} e^{-\gamma \ell} = \dot{U}_A, \quad (3.59)$$

на нагрузочное сопротивление Z_H , включенное в конце линии в точке B :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(\ell) + \dot{U}_{\text{отр}}(0)\eta_0 e^{-\gamma\ell} = \dot{U}_B. \quad (3.60)$$

Определим ток, возникающий в сопротивлении Z_H . Для упрощения расчета суммарную волну напряжения \dot{U}_0 , падающую на сопротивление Z_H , заменим эквивалентной ей по действию на сопротивление Z_H падающей волной в точке A линии. Последняя должна иметь напряжение $\dot{U}_B e^{\gamma\ell}$.

Допустим далее, что волна с напряжением \dot{U}_B , падающая в точке B , вызывается не внутренними ЭДС линии, а генератором с сопротивлением Z_r , и ЭДС \dot{E}_0 , подключенными к входу A линии. В отношении действия на сопротивление Z_H , существенно напряжение, а не причина возникновения волны. Таким образом, приходим к эквивалентной схеме линии (рис. 3.17).

Для возбуждения такой волны ЭДС генератора с внутренним сопротивлением Z_r должна быть:

$$\dot{E}_3 = \frac{1}{Z_B} \dot{U}_B e^{\gamma\ell} (Z_B + Z_r). \quad (3.61)$$

Ток в сопротивлении Z_H

$$i(\ell) = \frac{\dot{E}_3}{Z_{\text{прив}}} = \frac{\dot{U}_B e^{\gamma\ell} (Z_B + Z_r)}{Z_B Z_{\text{прив}}}. \quad (3.62)$$

Здесь $Z_{\text{прив}}$ определяется выражением (3.48), а \dot{U}_B — выражением (3.60). Подставляя его значение в формулу (3.62), получим

$$i(\ell) = \frac{1}{Z_B Z_{\text{прив}}} \left[\dot{U}_{\text{пад}}(\ell) e^{\gamma\ell} (Z_B + Z_r) + \dot{U}_{\text{пад}}(0) (Z_r - Z_B) \right]. \quad (3.63)$$

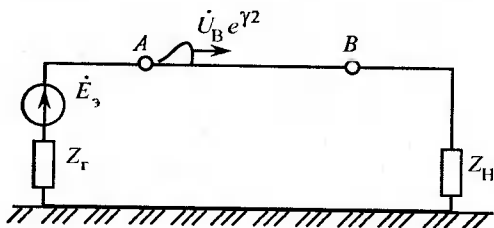


Рис. 3.17

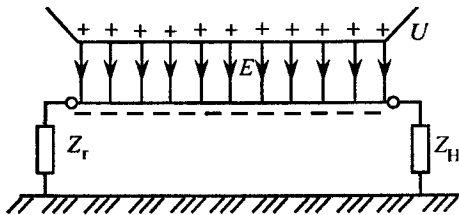


Рис. 3.18

Аналогично можно получить выражение тока, проходящего через сопротивление Z_r на конце A линии.

Линия, возбуждаемая распределенным источником тока. Если цепь связи находится в переменном электрическом поле (рис. 3.18), то каждый элемент провода представляет собой как бы обкладку конденсатора и в нем индуцируются электрические заряды. Эти заряды, растекаясь по проводам, создают ток, значение которого в месте его возникновения зависит не от сопротивления цепи, а от значения вызвавшего его заряда. Таким образом, линию, находящуюся под воздействием переменного электрического поля, можно представить как бы питаемой распределенным источником тока, возбуждающим в линии волновой процесс, проходящий аналогично таковому при действии распределенных источников ЭДС.

Эквивалентная схема бесконечно малого элемента линии приведена на рис. 3.19. Задача по определению возникающих на концах линии токов и напряжений и в этом случае может быть решена определением реакции от элементарного источника тока и интегрирования по длине линии. Здесь в отличие от рассмотренной задачи о линии с источником ЭДС напряжение волн, расходящихся из точки приложения источника x , будет $0,5dI(x)Z_B$, и обе волны напряжения будут одного знака. При наличии распределенных ЭДС и токов действие тех и других суммируется в соответствии с принципов наложения. Все изложенное по отношению к линии вообще справедливо при решении практических задач по расчету подверженных внешним влияниям двух- и однопроводных цепей связи различных конструкций.

Эквивалентная схема линии с распределенными источниками. Действие распределенных по линии источников на нагрузки с сопротивлениями Z_r и Z_H , включенные на концах линии, вполне определяется волнами, падающими из линии на ее концы.

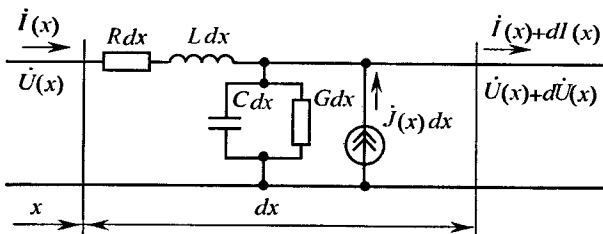


Рис. 3.19

В случае распределенных ЭДС напряжения этих волн $\dot{U}_{\text{пад}}(0)$ и $\dot{U}_{\text{пад}}(\ell)$ определяются выражениями (3.59) и (3.60). Это обстоятельство позволяет построить схему замещения линии с распределенными источниками как пассивной линии с генераторами соответствующих волн на ее концах.

Для составления схемы генератора бегущей волны заметим, что для этой волны обязательным является соотношение $\dot{U}_{\text{пад}}(0) = Z_{\text{В}} \dot{I}_{\text{пад}}$. Это значит, что в указанную схему должен быть включен генератор с ЭДС $\dot{E} = \dot{U}_{\text{пад}}$ и сопротивлением $Z_{\text{Г}} = 0$ и генератор тока $\dot{I}_{\text{пад}} = \frac{1}{Z_{\text{В}}} \dot{U}_{\text{пад}}$ и $Y_{\text{Г}} = 0$ (рис. 3.20, а).

Допустим, что с двух сторон образованного таким образом активного четырехполюсника включены сопротивления $Z_{\text{В}}$. Тогда в левом сопротивлении будет ток

$$\dot{I}_{\text{лев}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{2Z_{\text{В}}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{В}}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{В}}},$$

в правом сопротивлении будет ток

$$\dot{I}_{\text{прав}} = -\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{2Z_{\text{В}}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{В}}} = 0.$$

Как видно, имеет место необходимое одностороннее действие. Пусть теперь одно из сопротивлений $Z_{\text{Н}} \neq Z_{\text{В}}$ (рис. 3.20, б), тогда

$$\dot{I}_{\text{прав}} = -\frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{В}}} + \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{В}}} \frac{Z_{\text{Н}}}{Z_{\text{Н}} + Z_{\text{В}}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_{\text{В}}} \eta_{\text{Н}},$$

т.е. при согласованной нагрузке $i_{\text{прав}} = 0$, при несогласованной $i_{\text{прав}} = \eta_H i_{\text{пад}}$.

Ток в сопротивлении Z_H

$$i_{\text{лев}} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_H + Z_B} + \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{Z_B} \frac{Z_H}{Z_H + Z_B} = (1 - \eta) i_{\text{пад}}$$

Токи, вызванные в сопротивлении Z_H и в линии, полностью соответствуют создаваемым падающей волной с напряжением $\dot{U}_{\text{пад}}$. Используя рассмотренную схему замещения генератора волны, построим схему замещения линии (рис. 3.20, в). Она содержит независимые источники напряжения и тока и называется схемой активного автономного четырехполюсника.

Можно построить вариант схемы замещения, в которой все эквивалентные источники находятся с одной стороны пассивной линии. Так, если перенести источники с конца B схемы, приведенной на рис. 3.20, в, влево с одновременной заменой их эквивалентными, получим схему (рис. 3.20, г). Здесь

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 &= \dot{U}_{\text{пад}}(0) - \dot{U}_{\text{пад}}(\ell) e^{\gamma \ell}; \\ i_3 &= \frac{1}{Z_B} \left[\dot{U}_{\text{пад}}(0) + \dot{U}_{\text{пад}}(\ell) e^{\gamma \ell} \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Рассмотренные в этом разделе приемы с успехом применяются при расчете влияний между линиями.

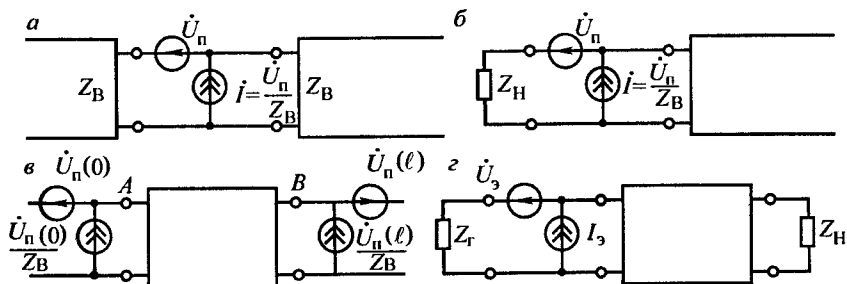


Рис. 3.20

3.5. Волновые параметры линий автоматики, телемеханики и связи и их частотные зависимости

Частотные характеристики волновых параметров линий. В устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи широко применяют цепи с распределенными параметрами — проводные, кабельные и рельсовые линии.

В установленном режиме гармонического переменного тока условия передачи электрической энергии по линии зависят от частоты тока. Это влияние проявляется в отклонении параметров R и L вследствие поверхностного эффекта и параметра G из-за изменения диэлектрических потерь. Сопротивление проводов или рельсов R и проводимость изоляции G с увеличением частоты тока растут, а индуктивность L уменьшается.

По линиям электропередачи передают электроэнергию с какой-нибудь одной частотой тока, по рельсовым цепям — с одной или несколькими фиксированными частотами тока в диапазоне от 25 до 500 Гц (в некоторых специальных видах рельсовых цепей используют и более высокие частоты); радиоантенны, питающие их фидеры и линии СВЧ работают в относительно узкой полосе частот.

По линиям проводной связи передают разнообразные сложные сигналы, содержащие токи с различными частотами. Сигналы, посылаемые по каждой линии связи, как правило, занимают совместно широкую полосу частот. По стальным цепям воздушных линий связи передают сигналы с частотами до 30 кГц, по цветным цепям — до 150 кГц, симметричным парам кабелей дальней связи — от 12 до 552 кГц и коаксиальным парам кабелей связи — от 60 кГц до 6 МГц и выше.

Условия передачи сигналов по линиям во многом зависят от их волновых параметров. Если цепь замкнута с обоих концов на согласованные сопротивления $Z_{\Gamma} = Z_{\text{Н}} = Z_{\text{В}}$, то условия передачи полностью определяются выражениями (3.30):

$$\dot{U}(0) = \dot{U}(\ell)e^{\gamma\ell}; \quad i(0) = i(\ell)e^{\gamma\ell}; \quad \frac{\dot{U}(0)}{i(0)} = \frac{\dot{U}(\ell)}{i(\ell)} = Z_{\text{В}};$$

т. е. значениями волновых параметров

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta; \quad Z_{\text{В}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_{\text{В}}|e^{j\varphi_{\text{В}}}. \quad (3.65)$$

Для расчета волновых параметров линий связи и установления зависимости их от частоты используют формулы (3.65), значения первичных параметров в которые подставляют с учетом зависимости их от частоты.

Общий характер изменения волновых параметров линий связи на примере цепи симметричного кабеля с жилами диаметром 1,2 мм иллюстрируется рис. 3.21, а и б и 3.22.

На рис. 3.21, а и б и рис. 3.22 приведены частотные зависимости соответственно километрического коэффициента затухания, фазовой скорости и модуля и аргумента волнового сопротивления. Так как провода существующих линий всех типов по конструктивным соображениям располагают по возможности близко друг к другу, то всегда выполняется неравенство $R/C > L/C$. Этим объясняется уменьшение модуля волнового сопротивления линий с увеличением частоты и отрицательный знак аргумента волнового сопротивления.

Поскольку емкость от частоты не зависит, а индуктивность уменьшается, изменение знака последнего неравенства с возрастанием частоты тока может произойти только вследствие изменения R и G в том случае, если увеличение проводимости изоляции G будет превышать рост сопротивления проводов R . При больших потерях в диэлектрике может быть $R/C > L/C$, и тогда угол волнового сопротивления будет положительным.

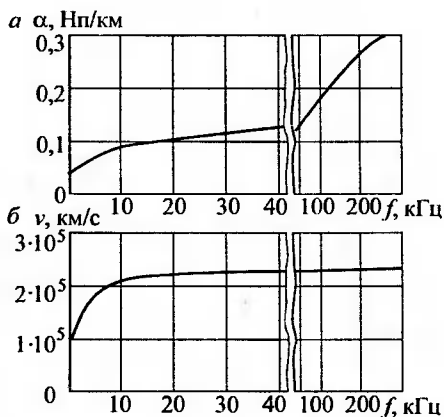


Рис. 3.21

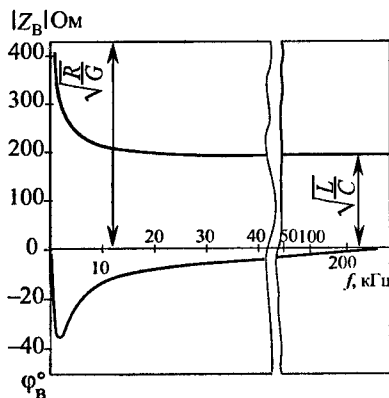


Рис. 3.22

В рельсовых линиях емкостной составляющей проводимости изоляции можно пренебречь. С учетом этого их волновые параметры

$$Z_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G}}; \quad \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)G}.$$

Поэтому аргумент волнового сопротивления рельсовых линий остается положительным во всем диапазоне частот. Модуль и аргумент Z_B , а также коэффициенты α и β рельсовой линии с увеличением частоты возрастают (рис. 3.23 и 3.24).

Отличительной особенностью рельсовых линий является большая проводимость изоляции G (нормативное значение G для магистральных дорог равно 1 См/км). Поэтому рельсовые линии, несмотря на их относительно небольшую длину ($\ell \leq 2,6$ км), относят к линиям с большими

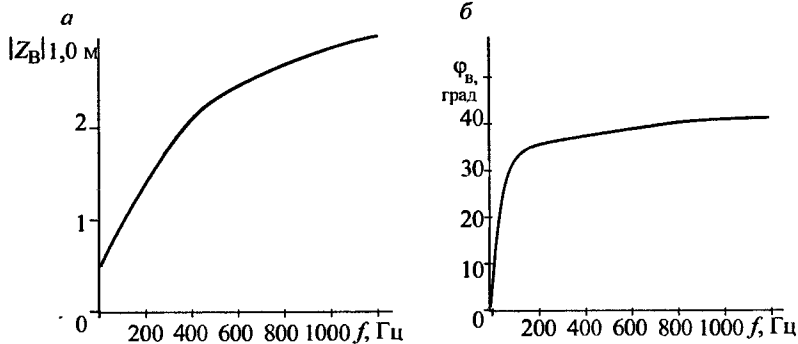


Рис. 3.23

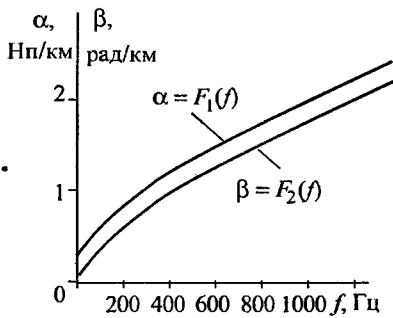


Рис. 3.24

потерями, фазовая скорость распространения сигналов в которых значительно ниже скорости света и находится в пределах от 500 до 6500 км/с.

В общем случае аналитическое исследование частотных зависимостей волновых параметров линий связи и рельсовых линий затруднительно, и, как правило, используют их экспериментальные характеристики.

В отдельных случаях волновые параметры можно рассчитывать по более простым приближенным формулам. К таким случаям относятся:

1) вычисление параметров воздушных и кабельных цепей связи при условии, что $R \ll \omega L$ и $G \ll \omega C$. Здесь можно использовать приближенные формулы, полученные из равенства (3.65):

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_B} + GZ_B \right); \quad (3.66)$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC}; \quad (3.67)$$

$$Z_B = \sqrt{L/C}, \quad (3.68)$$

где α — километрический коэффициент затухания; β — километрический коэффициент фазы; Z_B — волновое сопротивление.

По формулам (3.66) — (3.68) следует рассчитывать параметры цветных цепей воздушных линий связи, работающих в диапазоне звуковых частот и выше, и параметры цепей симметричных кабелей при передаче по ним сигналов частотами порядка 50 кГц и выше;

2) вычисление параметров цепей симметричных кабелей связи, по которым передаются сигналы низкими частотами, когда $R \gg \omega L$ и $G \ll \omega C$. В этом случае

$$\gamma = \sqrt{j\omega RC}; \quad \alpha = \beta = \sqrt{\omega RC/2}; \quad Z_B = \sqrt{R/(j\omega C)};$$

3) вычисление параметров коаксиальных кабелей и высокочастотных параметров линий электропередачи, когда потери в изоляции значительно меньше потерь в проводах и имеет место сильный поверхностный эффект:

$$\alpha = \frac{R}{2Z_B} = \frac{RC}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \approx k\sqrt{f};$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon};$$

$$Z_B = \sqrt{L/C} = \sqrt{\mu\epsilon}/C;$$

4) вычисление параметров рельсовых линий при передаче по ним сигналов с относительно высокими частотами (выше 400 Гц), когда $R \ll \omega L$:

$$\gamma = \sqrt{j\omega LG}; \quad \alpha = \beta = \sqrt{\omega LG/2}; \quad Z_B = \sqrt{j\omega L/G}.$$

Следует подчеркнуть, что зависимости волнового сопротивления, затухания и фазовой скорости от частоты представляют собой крайне нежелательное явление, так как приводят к искажениям передаваемых по линиям сложных сигналов.

Условие минимума потерь в линии. Из соотношений (3.65) следует зависимость волновых параметров линии — километрического коэффициента затухания, километрического коэффициента фазы и волнового сопротивления от ее первичных параметров. Выясним, какие должны быть значения индуктивности и емкости линии, чтобы при заданных активном сопротивлении R проводов и проводимости изоляции линии G километрическое затухание было наименьшим. Для этого определим мощность потерь в бесконечно малом элементе линии dx при прохождении по нему одиночной волны с напряжением \dot{U} и током \dot{I} . Эти потери складываются из потерь в активном сопротивлении проводов $I^2 R$ и потерь, вызванных проводимостью изоляции \dot{U}^2/C . Для участка dx первая часть потерь

$$\dot{I}^2 R dx = \left| \frac{\dot{S}}{Z_B} \right| R dx, \quad \text{где } \dot{S} = \dot{I}^2 Z_B = \frac{\dot{U}^2}{Z_B};$$

вторая часть потерь $\dot{U}^2 G dx = \left| \dot{S} Z_B \right| G dx$.

Полная активная мощность потерь в элементе dx линии

$$dP = |S| \left(\frac{R}{|Z_B|} + G|Z_B| \right) dx. \quad (3.69)$$

На рис. 3.25 приведена графическая иллюстрация выражения (3.69) как функции модуля волнового сопротивления. Мощность потерь как функции модуля волнового сопротивления имеет явно выраженный минимум при потерях в сопротивлении, равных потерям, обусловленным проводимостью изоляции. Отсюда условие минимума потерь:

$$R/|Z_B| = G|Z_B|; \quad R/G = |Z_B|^2;$$

или при $Z_B = \sqrt{L/C}$; $R/G = L/C$.

Условие минимума потерь является в то же время и условием минимума затухания, так как затухание есть величина, характеризующая потери в логарифмическом масштабе.

Преобразовав формулу (3.69) и воспользовавшись условием минимума километрического затухания, получим

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{RG} \left(1 + j \frac{\omega L}{R} \right),$$

отсюда затухание и километрический коэффициент фазы

$$\alpha = \sqrt{RG}; \quad \beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (3.70)$$

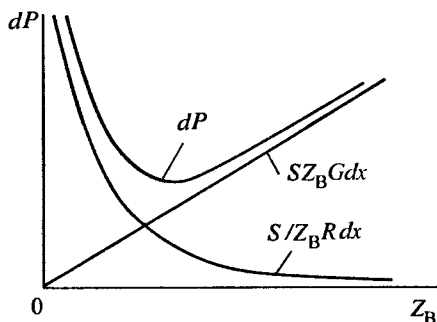


Рис. 3.25

Согласно выражению (3.70) километрический коэффициент затухания α в данном случае зависит от частоты лишь косвенно, поскольку от нее зависит активное сопротивление проводов и проводимость изоляции.

Коэффициент фазы β при независимости индуктивности линии от частоты (что имеет место на высоких частотах) прямо пропорционален частоте; следовательно, фазовая скорость не является функцией частоты, как и в линиях без потерь. Соответствующий комплекс волнового сопротивления

$$Z_B = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{R}{G}}$$

содержит только вещественную составляющую. Если первичные параметры линии удовлетворяют условию минимума потерь, то ее волновые параметры минимально зависят от частоты тока.

Для существующих типов воздушных и кабельных линий связи условие минимума затухания из-за конструктивных возможностей не выполняется. На кабельных линиях для уменьшения затухания иногда искусственно увеличивают индуктивность (пупинизация).

Единицы затухания и уровни сигнала

Единицы затухания. Если линия согласована и в ней имеются только падающие волны, то напряжения и токи в начале и конце линии связаны уравнениями (3.30), из которых следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(\ell)} &= \frac{\dot{I}(0)}{\dot{I}(\ell)} = e^{\gamma\ell}; \quad \gamma\ell = \alpha\ell + j\beta\ell = \ln\left(\left|\frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(\ell)}\right| e^{j\beta\ell}\right) = \\ &= \ln\left(\left|\frac{\dot{I}(0)}{\dot{I}(\ell)}\right| e^{j\beta\ell}\right) = \ln\left|\frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(\ell)}\right| + j\beta\ell. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Приравняв в формуле (3.71) действительные части, найдем, что

$$\alpha\ell = \ln\left|\frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(\ell)}\right| = \ln\left|\frac{\dot{I}(0)}{\dot{I}(\ell)}\right|. \quad (3.72)$$

Величину $\alpha\ell$ называют собственным затуханием линии. Эту величину можно выразить через мощности в начале линии $\dot{S}(0)$ и конце ее $\dot{S}(\ell)$:

$$\alpha\ell = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(\ell)}\right|.$$

Затухание в линии можно также рассчитать по системе десятичных логарифмов. В этом случае собственное затухание линии

$$\alpha l = \lg \left| \frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(l)} \right| = 2 \lg \left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| = 2 \lg \left| \frac{\dot{I}(0)}{\dot{I}(l)} \right|. \quad (3.73)$$

Затухание в цепях автоматики, телемеханики и связи измеряют и рассчитывают в специальных единицах: децибелах (дБ), белах (Б) и неперах (Нп). Основной единицей затухания является децибел. Децибел — это затухание, при котором отношение мощности на входе линии к мощности на выходе ее равно 1,26. Собственное затухание линии в децибелах определяют по следующим формулам:

$$\alpha l = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(l)} \right| = 20 \lg \left| \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(l)} \right| = 20 \lg \left| \frac{\dot{I}(0)}{\dot{I}(l)} \right|.$$

Бел — это затухание, при котором мощность в начале линии больше мощности в конце ее в 10 раз. Один Б в 10 раз превышает один дБ. Затухание в белах рассчитывают по формуле (3.73). Если отношение напряжений и токов на входе линии к этим же параметрам на ее выходе $e = 2,718$, то говорят о затухании 1 Нп. Затухание в неперах определяют по формулам (3.71) и (3.72).

Между децибелами и неперами существуют следующие соотношения:

$$1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}, \quad 1 \text{ Нп} = 8,68 \text{ дБ}.$$

Уровни напряжения, тока и мощности. Логарифмические единицы — бел, децибел и непер — вполне определяют отношение двух напряжений, двух токов или двух мощностей. Если задать определенные значения тока и мощности, то всякие другие значения этих величин можно измерить в логарифмических единицах относительно заданных. При этом число логарифмических единиц, показывающих, во сколько раз одна величина больше другой заданной, называют *уровнем измеряемой величины*. Уровни напряжений, токов и мощностей широко применяют в технике связи, и, в частности, это очень удобно при измерении затуханий. Если, например, задано напряжение 1 В, то уровень напряжения 2,718 В равен +1 Нп по отношению к 1 В, так как $\ln \frac{2,718}{1} = +1$. Уровень напряжения 0,1 В (0,1/1) равен -20 дБ по отношению к напряжению 1 В, так как $20 \lg 0,1 = -20$.

В приведенных примерах величины +1 Нп и -20 дБ называют относительными уровнями напряжений 2,718 и 0,1 В относительно напряжения 1 В. При использовании относительных уровней следует задавать величину, относительно которой идет отсчет. Понятие относительного уровня применимо к любой величине.

В технике передачи сигналов по каналам связи мощность 1 мВт, напряжение 0,775 В и ток 1,29 мА приняты за мощность, напряжение и ток нулевого уровня. Эти величины получаются в случае выделения мощности 1 мВт на сопротивлении 600 Ом.

Результат измерения мощности, напряжения или тока в логарифмических единицах по отношению к величинам нулевого уровня называют абсолютным уровнем измеряемых величин. Например, мощности 1 Вт соответствует абсолютный уровень мощности +3,45 Нп, так как

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1000}{1} = +3,45. \text{ Напряжение } 7,75 \text{ В имеет абсолютный уровень } +20 \text{ дБ или } 2,3 \text{ Нп, так как } 20 \lg \frac{7,75}{0,775} = +20.$$

Если уровни измеряемых значений мощности, тока или напряжения больше значений соответствующих заданным для сравнения величинам, то абсолютный уровень этих величин положителен, в противном случае отрицателен.

Общие выражения для абсолютных уровней:

в неперях

в децибеллах

$$P_U = \ln \frac{U}{0,775};$$

$$P_U = 20 \lg \frac{U}{0,775};$$

$$P_I = \ln \frac{I}{1,29 \cdot 10^{-3}};$$

$$P_I = 20 \lg \frac{I}{1,29 \cdot 10^{-3}};$$

$$P_S = \ln \frac{S}{1 \cdot 10^{-3}};$$

$$P_S = 10 \lg \frac{S}{1 \cdot 10^{-3}}.$$

Если напряжения и токи в начале и конце согласованной линии измеряют в уровнях, то собственное затухание линии, дБ,

$$\alpha \ell = p(0) - p(\ell) = 20 \lg \frac{\dot{U}(0)}{0,775} - 20 \lg \frac{\dot{U}(\ell)}{0,775} = 20 \lg \frac{\dot{U}(0)}{\dot{U}(\ell)}.$$

Уровень напряжения измеряют вольтметром, шкала которого проградуирована в неперах или децибелах.

В несогласованных цепях связи при определении затухания возникает необходимость в расчете разности уровней мощности на входе и выходе цепи:

$$P_S(0) - P_S(\ell) = 10 \lg \frac{\dot{S}(0)}{\dot{S}(\ell)}.$$

Если учесть, что

$$\dot{S}(0) = \dot{U}^2(0) / Z_{\text{вх}}, \text{ а } \dot{S}(\ell) = \dot{U}^2(\ell) / Z_{\text{н}},$$

где $Z_{\text{вх}}$ и $Z_{\text{н}}$ соответственно входное сопротивление линии и сопротивление нагрузки, то

$$P_S(0) - P_S(\ell) = 10 \lg \frac{\dot{U}^2(0) Z_{\text{н}}}{\dot{U}^2(\ell) Z_{\text{вх}}} = \left[20 \lg \frac{U(0)}{U(\ell)} + 20 \lg \sqrt{\frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{вх}}}} \right].$$

Характеристика условий передачи узкополосного сигнала по однородной согласованной линии. Диаграмма уровня. Передача сигналов по линиям связи представляет собой случайный процесс, который с достаточной точностью можно считать стационарным и характеризовать спектром мощности.

Если по линии передаются сигналы, частотный спектр которых занимает относительно узкую полосу, в которой параметры линии на всех частотах остаются практически неизменными, то вместо передачи реального сигнала можно рассматривать передачу установившегося синусоидального напряжения (или тока) средней частоты.

Форма сигналов при передаче их по линиям связи меняется вследствие самого прохождения по линии и наложения на них посторонних напряжений и токов — помех. Передаваемые по линии синусоидальные напряжения и токи остаются синусоидальными и подвергаются затуханию, сдвигу фазы и воздействию помех.

Изменение мощности узкополосного (одночастотного) сигнала вдоль линии вследствие затухания и соотношение его с помехами отображают обычно *диаграммой уровня*. Характерный вид диаграммы уровня для линии без усилителей приведен на рис. 3.26, а, а для линии с усилителем — на рис. 3.26, б. Здесь $p_{\text{вых}}$ — выходной уровень. Его устанавливают обычно для различных систем передачи сигналов в пределах от +1,74 дБ (+0,2 Нп) до 17,4 дБ (+2 Нп), в отдельных случаях

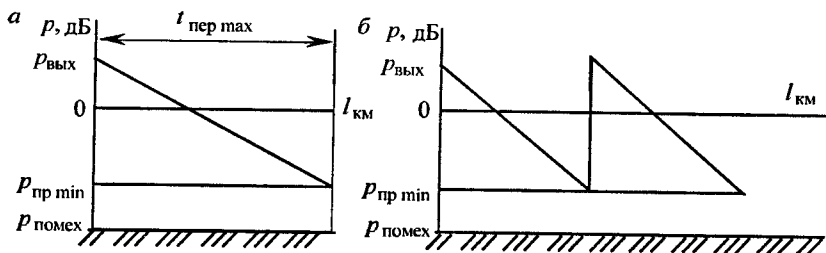


Рис. 3.26

до 40 дБ (+4,6 Нп), что определяется в основном двумя соображениями: стремлением ограничить мощность выходных устройств передатчиков и уменьшить влияние на соседние цепи. $P_{\text{пр min}}$ — минимально допустимый уровень приема. Его значение определяется необходимым превышением уровня полезного сигнала над уровнем помех, при котором обеспечивается прием необходимой информации.

Необходимое превышение уровня сигнала над уровнем помех зависит от свойств приемника (его способности отличать сигнал от помехи) и вида помех. Помехи обычно подразделяют на *шумы* и *переходные сигналы*. В линиях, по которым передаются сигналы с относительно низкими частотами (20—100 кГц), шумы являются следствием влияний со стороны различных промышленных и энергетических установок.

В линиях, сигналы в которых имеют более высокие частоты, уровень шумов значительно ниже и определяется тепловыми процессами в проводниках и элементах аппаратуры. Переходные сигналы есть следствие влияния параллельно идущих цепей такого же назначения. Шумы, обусловленные внешними влияниями, могут быть снижены экранированием цепей линии, а переходные сигналы — уменьшением связи между цепями.

Для каждой системы передачи сигналов задаваемой величиной является разность $P_{\text{вых}} - P_{\text{пр min}} = a$, определяющая допустимое затухание передачи. Эта величина зависит от диаметра проводов цепи и других ее конструктивных особенностей. По отношению $a/\alpha = \ell$ судят о дальности передачи сигналов данной частотой.

Если передаются сигналы несколькими частотами, то диаграмму уровня строят для наивысшей из них.

3.6. Передача по линии широкополосных сигналов. Искажения сигналов

Условия передачи сигнала, спектр которого занимает относительно — узкую полосу частот, достаточно точно определяются условиями передачи одной средней частоты. Если же спектр сигнала занимает широкую полосу частот, в которой параметры линии α , β и Z_B заметно изменяются, следует рассматривать условия передачи всех или наиболее важных частотных составляющих сигналов.

Для упрощения передаваемый сигнал удобно предположить периодическим. В этом случае его можно представить рядом Фурье. Сигнал в комплексной форме ряда Фурье

$$\dot{U}_0(t) = \sum_n \dot{U}_{0n} e^{jn\omega_0 t}; \quad \omega_0 = 2\pi/T,$$

где \dot{U}_{0n} — амплитуда n -й гармоники напряжения сигнала, приложенного в начале линии, представленная вектором на комплексной плоскости.

Ток на входе линии также можно выразить суммой гармонических составляющих:

$$i_0(t) = \sum_n \frac{\dot{U}_{0n}}{Z_{вх}(n\omega_0)} e^{jn\omega_0 t}.$$

Периодическую функцию при несущественных фазах частотных составляющих удобно изображать спектральной диаграммой (рис. 3.27). Последняя дает наглядное представление о распределении амплитуд гармоник по спектру частот. Спектральная диаграмма периодической функции заданной частоты содержит дискретные частотные составляющие, равно отстоящие по оси частот друг от друга на частоту основного колебания.

Для каждой пары величин \dot{U}_{0n} и $\dot{I}_{0n} = \dot{U}_{0n} / Z_{вх}(n\omega_0)$, являющихся гармоническими установившимися напряжением и током, напряжение и ток на выходе согласованной линии

$$\dot{U}_{in} = \dot{U}_{0n} e^{-\gamma \ell}; \quad \dot{I}_{in} = \dot{I}_{0n} e^{-\gamma \ell},$$

где γ вычисляют на частоте $(n\omega_0)$.

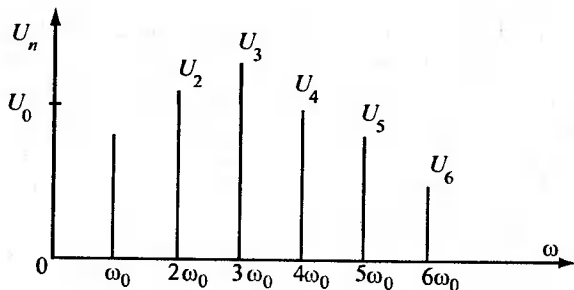


Рис. 3.27

Полные напряжения и ток в конце линии также можно представить суммой гармонических составляющих теми же частотами

$$\dot{U}_i(t) = \sum_n \dot{U}_{in} e^{jn\omega_0 t};$$

$$\dot{I}_i(t) = \sum_n \dot{I}_{in} e^{jn\omega_0 t},$$

где \dot{U}_{in} — амплитуда гармоники напряжения сигнала на выходе линии;
 \dot{I}_{in} — амплитуда гармоники тока на выходе линии.

Напряжение и ток как функции времени:

$$u_i(t) = \text{Re} \dot{U}_i(t); \quad i_i(t) = \text{Re} \dot{I}_i(t).$$

Изложенный метод расчета условий передачи периодических сигналов позволяет полностью учесть свойства линии, но весьма громоздок из-за необходимости учитывать большое число гармоник.

В ряде случаев, например при изучении условий телефонной передачи, реальный сигнал аппроксимируется набором нескольких некратных составляющих. Для отображения речи используют, например, совокупность частот 300, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400, 1600, 2000, 2400 Гц. В таком случае условия передачи речи также изучают рассмотрением передачи различных ее составляющих.

Рассмотрим в качестве примера передачу по линии импульсных сигналов. Допустим, что импульсы посылаются непрерывно, так что процесс можно считать периодическим. Тогда напряжение сигнала $u(t)$ можно представить суммой гармонических составляющих (рис. 3.28). Следовательно, в этом случае вместо передачи по линии прерывистого напряжения (рис. 3.29, а) можно рассматривать передачу по ней суммы синусоидальных напряжений и постоянного тока (рис. 3.29, б).

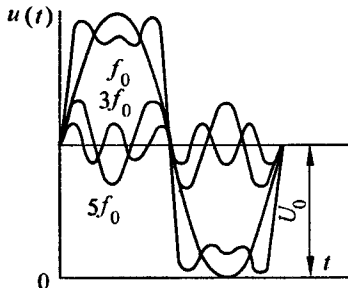


Рис. 3.28

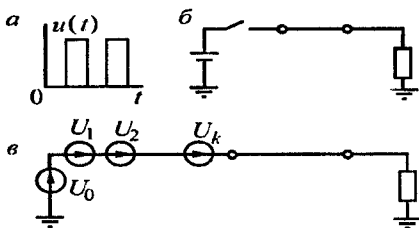


Рис. 3.29

Составляющие сигнала с разными частотами $0; \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$ и т.д. при передаче по линии ослабляются различно, получают неодинаковые фазовые сдвиги, а в случае несогласованной нагрузки и отражения. Вследствие этого изменяются соотношения между амплитудами и фазами составляющих сигнала в конце и начале линии. Поэтому при суммировании напряжения с частотами $0; \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$ и т.д. сигнал в конце линии отличается по форме от исходного.

Отличие формы временных зависимостей напряжений на выходе линии и ее входе есть искажение сигнала при передаче. Изменения в форме сигнала, вызванные искажениями в линии для рассматриваемого случая передачи, показаны на рис. 3.30.

Различают амплитудно- и фазочастотные искажения. *Амплитудно-частотными* называют искажения, обусловленные зависимостью затухания линий от частоты, приводящей к неодинаковому затуханию разных частотных составляющих (рис. 3.30, а). *Фазочастотными* называют искажения, связанные с зависимостью фазовой скорости от частоты, и, следовательно, с неодинаковым временем прохождения различных частотных составляющих сигнала (рис. 3.30, б). При передаче сигналов по цепям проводных линий связи одновременно присутствуют и накладываются друг на друга оба вида искажений. Общий характер искажения одиночного импульса, переданного по цепи кабельной линии связи, показан на рис. 3.31. Изменение формы импульса при передаче по линиям рассматривается подробнее в следующем параграфе.

Для неискаженной передачи по линии сигналов сложной формы необходимо, чтобы затухание линии, фазовая скорость, волновое сопротивление и сопротивление нагрузки не зависели от частоты. Фазовая

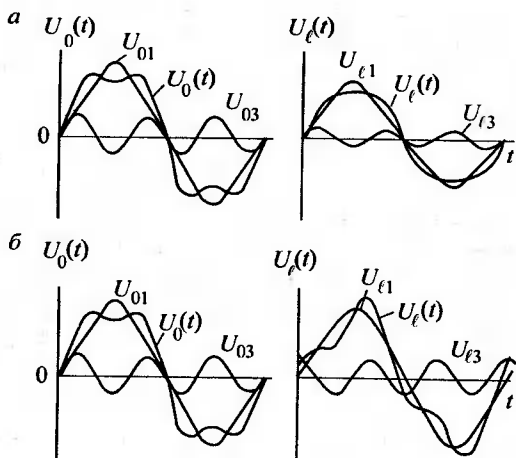


Рис. 3.30

скорость не зависит от частоты в линиях, километрический фазовый сдвиг которых прямо пропорционален частоте. В этом случае время прохождения $t_3 = d(\beta\ell)/d\omega$ для всех частотных составляющих одинаково. Практически этим условиям достаточно удовлетворяют параметры цветных цепей воздушных линий связи на высоких частотах ($f > 1000$ Гц) и параметры цепей широкополосных коаксиальных кабелей связи. Воздушные линии связи со стальными проводами и симметричные кабели связи вносят значительно большие амплитудно- и фазочастотные искажения.

Различные системы связи неодинаково относятся к искажениям сигналов. Так, например, ухо человека нечувствительно к фазочастотным искажениям звуковых колебаний и определяет смысловое содержание звукового колебания в основном по спектральному составу. Изменение

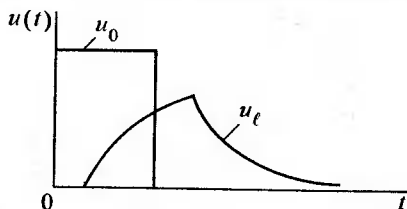


Рис. 3.31

амплитуд отдельных частотных составляющих звуковых колебаний ведет к новому смысловому содержанию речи. Поэтому при проектировании устройств телефонной связи принимают меры для возможного уменьшения амплитудно-частотных искажений. Отсутствие указанных искажений обеспечивает сохранение спектрального состава сигнала, но не формы кривой $u_0(t)$.

Рассмотренные нами искажения называют *линейными*. Они происходят в цепях, напряжения и токи в которых пропорциональны друг другу. В таких цепях, как мы видим, возможно различное изменение амплитуд и фаз частотных составляющих сигнала, но не могут появиться новые составляющие. Последние, кроме всего прочего, возможны в нелинейных цепях. Такие искажения называют *нелинейными*.

Для устранения линейных амплитудно- и фазочастотных искажений сигналов или уменьшения их до допустимого значения в тракт передачи цепочечно включают специальные четырехполусные цепи — амплитудные и фазовые корректоры. Устройство и расчет последних рассматриваются далее.

3.7. Временные характеристики однородной линии

В ряде случаев сигнал, передаваемый по линии, удобно изображать отдельными импульсами или интегралом наложения. Поскольку в линейных цепях импульс может быть заменен двумя единичными напряжениями противоположных знаков, включенных со сдвигом по времени, то достаточно рассмотреть передачу по линии единичного напряжения. Зная характер нарастания $\dot{i}_\ell(t)$ и $\dot{i}_\ell(t)$ при воздействии единичного напряжения на вход линии, можно судить об условиях передачи импульсных и других сигналов. Хотя при этом форма сигнала на входе максимально упрощена, задача остается еще весьма сложной и следует ввести упрощающие предположения относительно свойств линии. Во многих практически важных случаях, когда линия может считаться электрически короткой, расчет можно проводить по схеме замещения. В других случаях необходимое решение можно получить, если считать, что линия не имеет утечки тока ($G = 0$) и параметры R и L не зависят от его частоты. Эти допущения практически оправдываются при передаче сигналов, занимающих относительно узкую полосу в области низких частот.

При этих предположениях для согласованной линии из выражения (3.65) получаем

$$Z_B = \sqrt{\frac{R+pL}{pC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + 2ap};$$

$$\gamma = \sqrt{(R+pL)pC} = \frac{1}{v} \sqrt{p^2 + 2ap},$$

где $v = 1/\sqrt{LC}$; $a = R/(2L)$.

Изображение напряжения на входе будет $U(p) = U_0 \frac{1}{p}$, а тока

$$I(p) = \frac{U_0}{pZ_B(p)} = \frac{U_0 \sqrt{C/L}}{\sqrt{p^2 + 2ap}}.$$

Из операционных соотношений следует:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ap}} \equiv e^{-at} J_0(jat).$$

Тогда

$$i_0(t) = U_0 \sqrt{C/L} e^{-\frac{R}{2L}t} J_0\left(j \frac{R}{2L}t\right) \quad (3.74)$$

Изображение тока на выходе

$$I_\ell(p) = \frac{U_0}{pZ_B} e^{-\gamma \ell} = \frac{U_0 \sqrt{C/L}}{\sqrt{p^2 + 2ap}} e^{-\frac{1}{v} \sqrt{p^2 + 2ap} \ell}.$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ap}} e^{-\tau_0 \sqrt{p^2 + 2ap}} \equiv e^{-at} J_0\left(ja \sqrt{t^2 - \tau_0^2}\right); \quad t > \tau_0 = \frac{1}{v}.$$

Следовательно,

$$i_\ell(t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{2L}t} J_0\left(j \frac{R}{2L} \sqrt{t^2 - \frac{\ell^2}{v^2}}\right); \quad t > \frac{1}{v}. \quad (3.75)$$

Как видно, ток в конце линии изменяется по тому же закону, что и в начале ее, однако в конце линии он появляется только по прошествии времени $\tau_0 = \frac{\ell}{v}$, необходимого на прохождение волной расстояния ℓ .

Формулы (3.74) и (3.75) отображают процессы, происходящие в линиях, весьма приближенно, так как они получены в предположении, что $R_r = 0$, $G = 0$, а параметры R и L приняты независимыми от p , т. е. от частоты, что можно считать справедливым только в узком диапазоне частот. Формула (3.75) дает для линий различных длины и затухания неодинаковый характер нарастания тока (рис. 3.32, а). В различных точках реальных линий благодаря появляющемуся искажению формы волны ток возникает не толчком (см. выражение (3.75)), а нарастает плавно.

Если постоянное напряжение включается и выключается через короткие интервалы времени, то получающиеся импульсы содержат значительное число частотных составляющих и предположение о независимости параметров линии от частоты делается практически неприемлемым. В этом случае необходимое решение можно получить подходящей аппроксимацией частотных зависимостей волновых параметров линии.

Частотные зависимости волновых параметров цепей воздушных и кабельных линий связи при $Z_B = \sqrt{L/C}$ в ряде случаев достаточно точно аппроксимируются выражениями

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha\sqrt{\omega}; \quad \beta = \frac{\omega}{v} + \alpha\sqrt{\omega}.$$

С этими выражениями частотных зависимостей α и β , справедливых при незначительных потерях в изоляции, и в предположении, что $R = k\sqrt{f}$, имеем:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha_0 + \alpha\sqrt{\omega} + j\frac{\omega}{v} + j\alpha\sqrt{\omega};$$

$$\gamma(p) = \alpha_0 + \alpha\sqrt{p/j} + \frac{p}{v} + \alpha\sqrt{jp} = \alpha_0 + \frac{p}{v} + \sqrt{2} \alpha\sqrt{p},$$

так как

$$\alpha\sqrt{p/j} + \alpha\sqrt{jp} = \alpha\sqrt{p} \left(\frac{1}{\sqrt{j}} + \sqrt{j} \right) = \alpha\sqrt{p}\sqrt{2}.$$

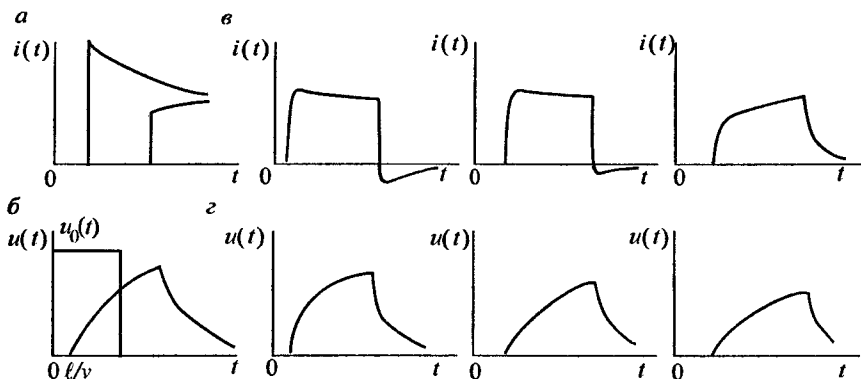


Рис. 3.32

Для согласованной линии при напряжении на входе U_0/p :

$$U_\ell(p) = \frac{1}{p} U_0 e^{-\gamma \ell} = \frac{1}{p} U_0 e^{-\left(\alpha_0 + \frac{p}{v} + \sqrt{2\alpha_0 p}\right) \ell};$$

$$F(p) = \frac{U_\ell(p)}{U_0(p)} = \frac{1}{p} e^{-\alpha_0 \ell} e^{-\frac{p}{v} \ell} e^{-\sqrt{2\alpha_0 p} \ell}.$$

Найдем $L^{-1}[F(p)]$.

На основании свойств L -преобразований первый множитель в выражении $F(p)$ выносится за знак преобразования как независящий от p . Второй множитель на основании теоремы о сдвиге дает сдвиг по оси t на ℓ/v , что соответствует запаздыванию сигнала.

Третий множитель имеет табличный оригинал:

$$\frac{1}{p} e^{-\lambda \sqrt{p}} = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \right).$$

Таким образом, окончательное решение будет

$$H(t) = \frac{U_\ell(t)}{U_0(t)} = e^{-\alpha_0 \ell} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{\alpha \ell}{\sqrt{2} \sqrt{t - \frac{\ell}{v}}} \right]. \quad (3.76)$$

Для функции $\text{erf}(Z) = \Phi(Z)$, называемой *интегралом вероятности*, составлены специальные таблицы.

Решение (3.76), как и (3.75), предполагает согласованность нагрузки линии, т. е. такую же, как у Z_B , зависимость сопротивления приемника от параметра p (частоты). Практически неточность согласования наиболее проявляется в области относительно низких частот, в которой изменение волнового сопротивления в зависимости от частоты происходит наиболее резко. Поэтому для получения более верной зависимости по формуле (3.76) в качестве $\alpha_0 \ell$ в последнюю следует подставлять затухание цепи, измеренное на постоянном токе, независимо от того, какое значение a_0 было использовано при аппроксимации α . Это значит, что в формулу (3.76) вместо множителя $e^{-\alpha_0 \ell}$ следует подставлять отношение $R_H / (R_\ell + R_H)$, где R_H — сопротивление нагрузки, а R_ℓ — сопротивление проводов линии.

Характер изменения напряжения на согласованном с линией приемнике при включении и выключении напряжения на входе линии, рассчитанное по формуле (3.76), иллюстрируется рис. 3.32, б. На этом рисунке напряжение на входе линии $u_0(t)$ показано таким, каким его практически вырабатывает генератор, нагруженный на активное, не зависящее от частоты сопротивление. При подключении к генератору линии, входное сопротивление которой зависит от частоты (на низких частотах оно больше), форма импульса на входе изменяется тем в большей степени, чем выше внутреннее сопротивление генератора (меньше его мощность), причем формы импульсов напряжения и тока искажаются по-разному. В импульсе напряжения составляющие низких частот подчеркиваются, в импульсе тока подавляются.

Практически наблюдаемые формы импульсов напряжения, передаваемых по кабелю, иллюстрируются рис. 3.32, в. Здесь ряд осциллограмм показывает изменение формы импульса напряжения от входа к середине линии и ее концу. На рис. 3.32, г показано изменение формы импульса тока. Если сопротивление приемника активно, то формы импульсов напряжения и тока на выходе линии совпадают.

3.8. Рабочие параметры передачи однородной линии

Волновые параметры линии (волновое сопротивление, собственное затухание и фазовый сдвиг) определяют условия передачи сигналов по линии, если последняя замкнута на согласованную нагрузку и в ней

отсутствуют отраженные волны. При несогласованной нагрузке в линии в общем случае имеют место отраженные волны, возрастают потери, а отношение напряжения к току уже не определяется величиной Z_B . Условия передачи сигналов по несогласованно нагруженной линии определяются уравнениями (3.25), (3.26), которые значительно сложнее уравнений (3.30) согласованной линии. Для расчета условий передачи по линиям и рельсовым цепям сильного тока, когда вычисления необходимо провести для одной частоты, можно пользоваться уравнениями (3.25), (3.26) или их разновидностями.

При расчете по этим уравнениям условий передачи сигналов по линии связи потребовались бы те же громоздкие вычисления для ряда частот. Для упрощения расчетов вводят рабочие параметры передачи линии и рассматривают зависимость их от частоты. К наиболее часто используемым рабочим параметрам линии связи относят ее входное сопротивление и рабочую постоянную передачи.

Входное сопротивление линии измеряют отношением полного напряжения на ее входе к полному току

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(0) + \dot{U}_{\text{отр}}(0)}{\dot{I}_{\text{пад}}(0) - \dot{I}_{\text{отр}}(0)} = Z_B \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta e^{-2\gamma l}}. \quad (3.77)$$

Входное сопротивление определяет нагрузку, создаваемую линией питающему ее генератору. Это важнейшая характеристика работы генератора.

Входное сопротивление согласованной линии

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = Z_B = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}}$$

равно волновому, так как в этой линии есть только падающие волны и нет отраженных $\eta = 0$.

Входное сопротивление электрически длинной линии

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = Z_B = \frac{\dot{U}_{\text{пад}}}{\dot{I}_{\text{пад}}}.$$

Эта величина равна волновому сопротивлению линии, так как в данном случае в начале линии нет отраженных волн $|e^{-2\gamma l}| \rightarrow 0$, а

в падающей волне отношение напряжения к току неизменно по всей длине линии и равно волновому сопротивлению.

Входное сопротивление линии в общем случае сложно и зависит от многих факторов: параметров линии Z_B и γ , в свою очередь зависящих от частоты тока, длины линии ℓ и сопротивления нагрузки Z_H , входящего в формуле (3.77) в коэффициент отражения. Рассмотрим сначала некоторые частные случаи.

Короткое замыкание на конце линии

$$Z_H = 0; \quad \eta = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = -1,$$

$$Z_{вх} = Z_{кз} = Z_B \frac{1 - e^{-2\gamma\ell}}{1 + e^{-2\gamma\ell}} = Z_B \frac{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}} = Z_B \operatorname{th} \gamma\ell. \quad (3.78)$$

Выражение (3.78) можно представить в виде

$$Z_{кз} = Z_B \frac{(e^{\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}) \cos \beta\ell + j(e^{\alpha\ell} + e^{-\alpha\ell}) \sin \beta\ell}{(e^{\alpha\ell} + e^{-\alpha\ell}) \cos \beta\ell + j(e^{\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}) \sin \beta\ell}.$$

при $\beta\ell = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$ $\sin \beta\ell = 0$, $\cos \beta\ell = 1$,

$$Z_{кз} = Z_B \frac{e^{-\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}}{e^{\alpha\ell} + e^{-\alpha\ell}} = Z_B \operatorname{th} \alpha\ell;$$

при $\beta\ell = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots, (2n-1)\pi/2$ $\cos \beta\ell = 0$, $\sin \beta\ell = 1$,

$$Z_{кз} = Z_B \frac{e^{\alpha\ell} + e^{-\alpha\ell}}{e^{\alpha\ell} - e^{-\alpha\ell}} = Z_B \operatorname{cth} \alpha\ell.$$

При холостом ходе на конце линии, когда $Z_H = \infty$, $\eta = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B} = 1$;

$$Z_{вх} = Z_{хх} = Z_B \frac{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}} = Z_B \operatorname{cth} \gamma\ell. \quad (3.79)$$

Характер изменения модуля входного сопротивления линии для двух предельных значений Z_H при изменении длины линии, вызывающем изменение аргумента $\gamma\ell$, показан на рис. 3.33, где $\alpha\ell$ и $\beta\ell$ условно

отложены на одной и той же оси. Аналогична и частотная зависимость $Z_{\text{вх}}$. Следует, однако, иметь в виду, что $|Z_{\text{B}}|$ с увеличением частоты уменьшается.

В общем случае конечного Z_{H}

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{B}} \frac{1 + \eta e^{-2\gamma l}}{1 - \eta e^{-2\gamma l}}.$$

Подставим в эту формулу выражение $\eta = \frac{Z_{\text{H}} - Z_{\text{B}}}{Z_{\text{H}} + Z_{\text{B}}} = 1$ и преобразуем его:

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{B}} \frac{Z_{\text{H}}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + Z_{\text{B}}(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{Z_{\text{H}}(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) + Z_{\text{B}}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})}.$$

Разделим далее числитель и знаменатель дроби на $Z_{\text{B}}(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})$:

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{B}} \frac{(Z_{\text{H}}/Z_{\text{B}}) + \text{th } \gamma l}{1 + (Z_{\text{H}}/Z_{\text{B}}) \text{th } \gamma l} = \frac{Z_{\text{H}} + Z_{\text{кз}}}{1 + Z_{\text{H}}/Z_{\text{xx}}} = Z_{\text{xx}} \frac{Z_{\text{H}} + Z_{\text{кз}}}{Z_{\text{H}} + Z_{\text{xx}}}.$$

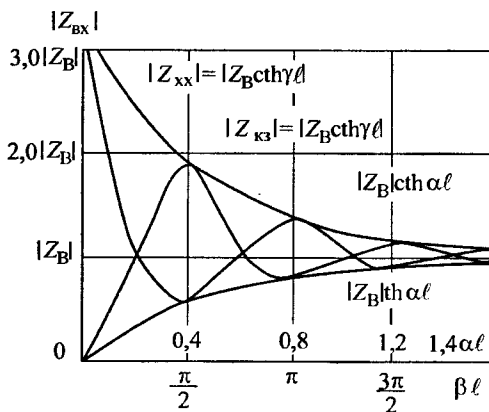


Рис. 3.33

Эта формула позволяет рассчитать входное сопротивление линии по измеренным сопротивлениям Z_{xx} и $Z_{кз}$.

Обозначая отношение $Z_H / Z_B = \text{th } u$ и имея в виду формулу $\text{th}(x + y) = \text{th } x + \text{th } y(1 + \text{th } x \text{th } y)$ получим другую формулу:

$$Z_{вх} = Z_B \text{th}(\gamma \ell + n)$$

Входное сопротивление нагруженной, но не согласованной линии изменяется по тому же закону, что и входное сопротивление коротко замкнутой или разомкнутой линии, но в меньших пределах. График изменения входного сопротивления нагруженной линии приближается к графику $Z_{кз}$, если $Z_H < Z_B$, и к графику Z_{xx} , если $Z_H > Z_B$.

Сложное и весьма нежелательное волнообразное изменение входного сопротивления в зависимости от длины линии и частоты объясняется наличием в линии падающих и отраженных волн. Если фазы напряжений падающей и отраженной волн на входе линии совпадают, то получается максимум полного напряжения и соответственно максимум входного сопротивления. При другой длине линии на ее входе могут совпадать фазы токов. Тогда получается максимум полного тока и минимум входного сопротивления. Фазы напряжений и токов могут совпадать не только на входе, а и в других различных точках линии, так как в падающей волне $\dot{U}_{пад}$ и $\dot{I}_{пад}$ сдвинуты по фазе на угол φ_B , а в отраженной волне — на угол $\varphi_B + 180^\circ$. Ток отраженной волны вычитается из тока падающей волны, напряжения же складываются.

В коротких линиях (при малых значениях собственного затухания $\alpha \ell$) амплитуды отраженных волн на входе линии соизмеримы с амплитудами падающих волн, и поэтому в результате их суммирования в зависимости от фазовых соотношений получаются резко отличные полные значения напряжения и тока.

В длинных линиях (т. е. при больших значениях $\alpha \ell$) амплитуды отраженных волн на входе линии малы по сравнению с амплитудами падающих волн и незначительно влияют на полные значения напряжения и тока. Этим объясняется то обстоятельство, что с увеличением ℓ границы изменений входного сопротивления сужаются.

Если не учитывать волновых процессов в линии и подойти к оценке сопротивления линии с точки зрения ТЛЭЦ с сосредоточенными параметрами, то можно было бы предположить, что сопротивление между входными зажимами линии растет с увеличением ее длины. В действи-

тельности (см. рис. 3.33) с возрастанием длины линии ее входное сопротивление то растет, то снижается в зависимости от фазовых соотношений напряжений и токов падающих и отраженных волн.

Наиболее ярко волновой характер процессов в линии проявляется при рассмотрении входного сопротивления линии с малыми потерями, длина которой $\ell = \lambda/4$, где λ — длина волны. В этом случае при разомкнутых выходных зажимах линии

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{в}} \operatorname{cth} \gamma \ell = Z_{\text{в}} \operatorname{cth} j\beta \ell = -j\sqrt{LC} \operatorname{ctg} \beta \ell = -j\sqrt{LC} \operatorname{ctg} \omega \frac{\ell}{v};$$

при $\ell = \lambda/4$, $\beta \ell = \pi/2$, $Z_{\text{вх}} = -j\sqrt{LC} \operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$.

Этот результат означает, что на входе линии падающие и отраженные волны одинаковы по амплитудам. Фазовые их соотношения таковы, что напряжения взаимно уничтожаются, а токи складываются. Таким образом, в линии при отсутствии напряжения на входе проходит ток.

При замкнутых накоротко выходных зажимах этой линии ее входное сопротивление

$$Z_{\text{кз}} = Z_{\text{в}} \operatorname{th} \gamma \ell = Z_{\text{в}} \operatorname{th} j\beta \ell = j\sqrt{LC} \operatorname{tg} \omega \frac{\ell}{v},$$

при $\ell = \lambda/4$, $\beta \ell = \pi/2$, $Z_{\text{кз}} = j\sqrt{LC} \operatorname{tg} \pi/2 = \infty$.

В этом случае в начале линии токи падающей и отраженной волн взаимно уничтожаются и полный ток на входе линии равен нулю, несмотря на наличие напряжения.

Входное сопротивление коротко замкнутой или разомкнутой линии без потерь чисто реактивно и с изменением частоты при $\beta \ell = \omega\sqrt{LC}\ell = \pi/2$ обращается соответственно в ∞ или 0. Таким образом, четвертьволновые отрезки линии подобны резонансным контурам.

Эти свойства входного сопротивления линии находят практическое применение в технике связи. Так, например, короткие отрезки линий с малыми потерями, имеющие на высоких частотах в режимах короткого замыкания и холостого хода чисто реактивные сопротивления, используют в фильтрах.

В рельсовых линиях вследствие высокой проводимости изоляции затухание велико и даже на низких частотах (50—75 Гц) их следует относить к линиям с большими потерями. Поэтому волновой характер процессов в рельсовых линиях, в частности изменение входных сопротивлений, выражен в меньшей степени, чем в линиях связи.

Иногда резонансные свойства входных сопротивлений линии ведут к нежелательным явлениям. Если напряжение в линиях электропередачи или тяговых проводах электрифицированных железных дорог содержит гармоники, то при совпадении частот отдельных из них с резонансными частотами входных сопротивлений амплитуды этих гармоник резко возрастают.

Часто применяют схему передачи сигналов из многих пунктов с источником тока на приемном конце (рис. 3.34). Замыкание ключа на одном из пунктов меняет режим работы линии с холостого хода на режим короткого замыкания и соответственно входное сопротивление линии в пункте приема. В результате изменения последнего параметра через обмотку реле К, принимающего сигналы, начинает проходить другой ток. Параметры такой линии рассчитывают по формулам (3.78) и (3.79).

При передаче сигналов по рассматриваемой схеме можно столкнуться и с крайне неприятным проявлением волновых процессов в линиях. Действительно, из графиков (см. рис. 3.33) видно, что замыкание ключа, расположенного от приемного реле на расстоянии четверти или половины волны, резко меняет входное сопротивление линии и ток в реле. Если это расстояние составляет одну восьмую или три восьмых длины волны, то замыкание ключа на условия работы реле не сказывается.

Рабочая постоянная передача линии, как всякого симметричного четырехполюсника, определяется выражением

$$g_{\text{раб}} = \ln \frac{Z_{\text{прив}}}{2\sqrt{Z_{\Gamma} Z_{\text{Н}}}} = a_{\text{раб}} + j\beta_{\text{раб}},$$

где $a_{\text{раб}}$ — рабочее затухание линии;

$\beta_{\text{раб}}$ — рабочий фазовый коэффициент.

Собственное затухание линии характеризует отношение напряжений или токов в начале и конце согласованно нагруженной линии. Если линия не согласована с нагрузкой, то часть электрической энергии под-

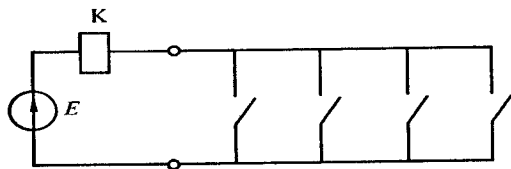


Рис. 3.34

ходящей к ее концу, отражается и возвращается к генератору, частично рассеиваясь вдоль линии. Для отраженной волны нагрузкой линии является сопротивление подключенного к ней генератора.

Многочисленные пробеги волн вдоль линии с несогласованными нагрузками на обоих концах приводит к дополнительному рассеиванию энергии, т.е. к дополнительному затуханию. В теории передачи сигналов потери мощности в линии принято характеризовать *рабочим затуханием* линии. Эту характеристику с успехом можно применить и при оценке условий передачи сигналов автоматики и телемеханики:

$$a_{\text{раб}} = \ln \left| \frac{Z_{\text{прив}}}{2\sqrt{Z_{\text{Г}}Z_{\text{Н}}}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\ell}} \right| (\text{Нп}) = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\ell}} \right| (\text{дБ}), \quad (3.80)$$

где $\dot{S}_0 = \dot{I}_{\text{Н}}^2 Z_{\text{Н}} = \frac{\dot{E}^2}{4Z_{\text{Г}}}$ — мощность, которая может быть получена от генератора сопротивлением $R_{\text{Г}}$, развивающего ЭДС \dot{E} , на непосредственно подключенном и согласованном с ним приемнике (рис. 3.35, а); $\dot{S}_{\ell} = \dot{I}_{\text{Н}}^2 Z_{\text{Н}}$ — мощность, поступающая к приемнику с сопротивлением $Z_{\text{Н}}$ через систему передачи (рис. 3.35, б).

Рассмотрение мощностей при оценке условий передачи сигналов по несогласованной линии обусловлено тем обстоятельством, что при наличии помех в линии и использовании помехоустойчивых методов приема успех борьбы с помехами определяется отношением мощности сигнала к мощности помехи, которое должно быть как можно больше.

В волновой трактовке \dot{S}_0 — мощность волны, падающей на вход линии; \dot{S}_{ℓ} — мощность волны, выходящей из линии и поглощаемой приемником.

Как следует из выражения (3.80), рабочее затухание линии измеряется половиной натурального логарифма модуля отношения мощности,

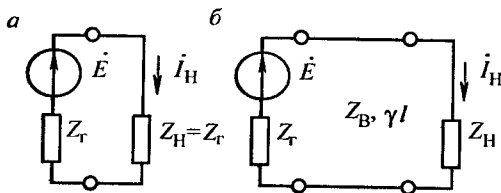


Рис. 3.35

которую отдал бы генератор согласованному с ним приемнику, к мощности, которую он отдает приемнику с сопротивлением Z_H через систему передачи с параметрам Z_B и γl .

Рабочее затухание является характеристикой не только линии, но и всей системы передачи: генератор—линия—приемник. Его вычисление заменяет собой расчет условий передачи по уравнениям линии.

Для расчета рабочего затухания по формуле (3.80) при заданных \dot{E} , Z_T , γl , Z_B , Z_H найдем I_ℓ . Рассмотрим распространение тока по несогласованной линии (рис. 3.36). Представим себе, что в некоторый момент к линии с волновым сопротивлением Z_B подключают генератор с сопротивлением Z_T и ЭДС \dot{E} . В этот момент в линии возникает падающая волна тока $\dot{I}_{пад}$. Так как в этот момент в линии отраженных волн еще нет, то и входное сопротивление равно волновому.

Ток падающей волны $\dot{I}_{пад} = \dot{E} / (Z_T + Z_B)$.

К концу линии волна тока приходит затухшей с измененной фазой. Ее амплитуда и фаза

$$\dot{I}_{пад} e^{-\gamma l} = \frac{\dot{E}}{Z_T + Z_H} e^{-\gamma l}.$$

Если линия замкнута на несогласованную нагрузку ($Z_H \neq Z_B$), то в конце линии возникает отраженная волна тока

$$\dot{I}_{отр} = \dot{I}_{пад} e^{-\gamma l} \eta_\ell,$$

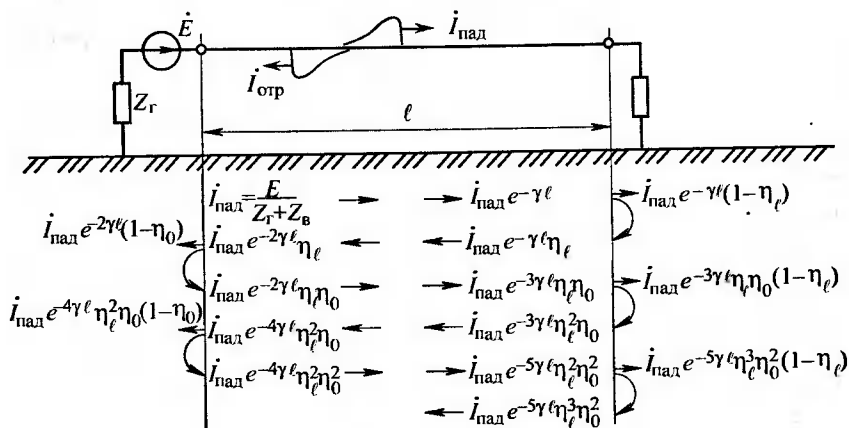


Рис. 3.36

где $\eta_\ell = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}$ — коэффициент отражения в конце линии.

Ток в нагрузке при этом равен разности токов падающей и отраженной волн

$$i_{\text{пад}} e^{-\gamma \ell} (1 - \eta_\ell).$$

Отраженная волна тока $i_{\text{пад}} e^{-\gamma \ell} \eta_\ell$ распространяется по линии от ее конца к началу. Вследствие наличия затухания и фазового сдвига в начале линии отраженная волна тока $i_{\text{пад}} e^{-2\gamma \ell} \eta_\ell$.

Как отмечалось, нагрузочным сопротивлением для отраженной волны, пришедшей на вход линии, является сопротивление генератора. Если последнее не равно волновому сопротивлению линии ($Z_r \neq Z_B$), то на входе линии также происходит отражение. Пусть коэффициент отражения на входе линии $\eta_0 = \frac{Z_r - Z_B}{Z_r + Z_B}$, тогда здесь вследствие отражения возникает вторая падающая волна $i_{\text{пад}} e^{-2\gamma \ell} \eta_\ell \eta_0$, которая движется от начала линии к ее концу.

Ток, являющийся разностью между током первой отраженной волны, подошедшей к входу линии, и током второй падающей волны, движущейся от входа линии, проходит через генератор. Тем самым генератору возвращается часть энергии, переданной в линию при подключении.

Вторая падающая волна при подходе к концу линии определяется выражением $i_{\text{пад}} e^{-3\gamma \ell} \eta_\ell \eta_0$. Здесь повторяется процесс отражения, имевший место при подходе к концу линии первой падающей волны. Возникает вторая отраженная волна тока $i_{\text{пад}} e^{-2\gamma \ell} \eta_\ell^2 \eta_0$, а разностный ток $i_{\text{пад}} e^{-3\gamma \ell} (1 - \eta_\ell) \eta_\ell \eta_0$ проходит через нагрузку и складывается с током первой падающей волны. Процесс отражения волн от несогласованных концов линии повторяется многократно (см. рис. 3.36).

Полный ток нагрузки равен сумме токов всех падающих волн

$$\begin{aligned} i_\ell &= i_{\text{пад}} e^{-\gamma \ell} (1 - \eta_\ell) \left(1 - e^{-2\gamma \ell} \eta_\ell \eta_0 + e^{-4\gamma \ell} \eta_0^2 \eta_\ell^2 + \dots \right) = \\ &= i_{\text{пад}} e^{-\gamma \ell} (1 - \eta_\ell) \frac{1}{1 - e^{-2\gamma \ell} \eta_\ell \eta_0}. \end{aligned}$$

Мощность, выделяющаяся в нагрузке, — $\dot{S}_\ell^2 Z_H$.

Составим отношение

$$\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_\ell} = \frac{\dot{E}^2 I(4Z_T)}{I_\ell^2 Z_H} = \frac{e^{2\gamma\ell} (Z_T + Z_H)^2 (1 - e^{-2\gamma\ell} \eta_0 \eta_\ell)^2}{(1 - \eta_\ell)^2 Z_H 4Z_T}.$$

Заменить η_ℓ в знаменателе последней формулы его выражением

$$\eta_\ell = \frac{Z_H - Z_B}{Z_H + Z_B}.$$

После преобразования получим

$$\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_\ell} = k_p^2 = e^{\gamma\ell} \left(\frac{Z_T + Z_H}{2\sqrt{(Z_T Z_H)}} \right)^2 \left(\frac{Z_B + Z_H}{2\sqrt{(Z_B Z_H)}} \right)^2 (1 - e^{-2\gamma\ell} \eta_0 \eta_\ell)^2. \quad (3.81)$$

Это отношение называют *рабочим коэффициентом передачи мощности*. Более формально этот коэффициент можно найти, воспользовавшись его связью с приведенным сопротивлением

$$k_p = Z_{\text{прив}} I(2\sqrt{Z_T Z_H}). \quad (3.82)$$

Величину $Z_{\text{прив}}$ следует определить по сигнальному графу линии с несогласованными нагрузками по концам (рис. 3.37), из которого

$$i_\ell = \dot{E} \frac{1}{Z_T + Z_B} \frac{e^{-\gamma\ell}}{1 - e^{-2\gamma\ell} \eta_0 \eta_\ell} \frac{2Z_B}{Z_H + Z_B}.$$

Отсюда

$$Z_{\text{прив}} = \frac{\dot{E}}{i_\ell} = e^{-\gamma\ell} \frac{(Z_T + Z_B)(Z_H + Z_B)}{2Z_B} (1 - e^{-2\gamma\ell} \eta_0 \eta_\ell). \quad (3.83)$$

Подставляя значение $Z_{\text{прив}}$ из выражения (3.83) в формулу (3.82), получим то же значение k_p , что и определяемое выражением (3.81).

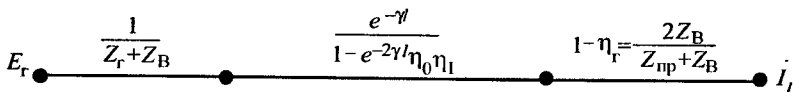


Рис. 3.37

Рабочее затухание

$$\begin{aligned}
 a_{\text{раб}} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_\ell} \right| = \ln |k_p| = \alpha \ell + \ln \left| \frac{Z_r + Z_H}{2\sqrt{(Z_r Z_B)}} \right| + \ln \left| \frac{Z_B + Z_H}{2\sqrt{(Z_B Z_H)}} \right| + \\
 &+ \ln \left| 1 - e^{-2\gamma \ell} \eta_0 \eta_\ell \right| = \alpha \ell + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3.
 \end{aligned} \quad (3.84)$$

В этой формуле первое слагаемое — собственное затухание линии, второе — затухание вследствие несогласованности сопротивления генератора и волнового сопротивления линии, третье — затухание из-за несогласованности линии и нагрузки и, наконец, последнее — затухание взаимодействия отражений.

Зависимость рабочего затухания от частоты тока иллюстрируется рис. 3.38. Зависимость этой величины от длины линии аналогична и отличается тем, что слагаемое a становится пропорциональным.

Из формулы (3.80) следует, что рабочее затухание представляет собой выраженную в логарифмических единицах меру использования приемником мощности генератора. Если приемник получает мощность, которую может отдать ему согласованный с ним генератор с заданной ЭДС \dot{E} и внутренним сопротивлением Z_r , то говорят о наилучшем использовании приемником мощности генератора ($a_{\text{раб}} = 0$). Известно, что при активной согласованной нагрузке генератор отдает наибольшую мощность, его КПД при этом равен 50 %.

Стремление получить от генератора наибольшую мощность и КПД 50 % при передаче сигналов объясняется и тем обстоятельством, что применяемые при этом генераторы маломощны и стоимость потребляемой ими электрической энергии весьма мала по сравнению со стоимостью самих генераторов. Повышение мощности генераторов в этом случае затруднительно и приводит к значительному их удорожанию.

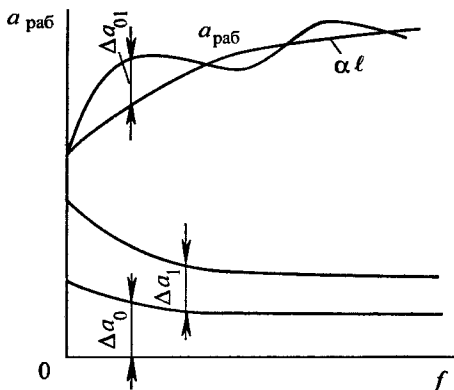


Рис. 3.38

Рабочее затухание может увеличиваться вследствие роста потерь в линии, соединяющей генератор с приемником. В этом случае возрастанию рабочего затухания соответствует уменьшение КПД установки. Рабочее затухание может расти и при увеличении несогласованности между внутренним сопротивлением генератора и входным сопротивлением линии. Если входное сопротивление линии больше внутреннего сопротивления генератора, то росту рабочего затухания соответствует увеличение КПД установки. Однако возрастание КПД в этом случае сопровождается уменьшением мощности, выделяющейся в приемнике, и является нежелательным.

Вносимое затухание. Для оценки условий передачи электрической энергии в системе передачи генератор—линия—приемник наряду с понятием о рабочем затухании применяют понятие о вносимом затухании

$$a_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_{\text{H}}}{\dot{S}_{\ell}} \right|, \text{ где } \dot{S}_{\text{H}} = \frac{\dot{E}^2 Z_{\text{H}}}{(Z_{\text{r}} + Z_{\text{H}})^2}; \dot{S}_{\ell} = I_{\ell}^2 Z_{\text{H}}.$$

Вносимое затухание измеряется половиной натурального логарифма модуля отношения мощности, которую отдавал бы генератор непосредственно подключенному к нему приемнику, к мощности, отдаваемой этому же приемнику через линию с заданными параметрами

$$a_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_{\text{H}}}{\dot{S}_{\ell}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\ell}} \frac{\dot{S}_{\text{H}}}{\dot{S}_0} \right| = a_{\text{раб}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_{\text{H}}}{\dot{S}_0} \right|.$$

Но принимая во внимание, что $\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\text{H}}} = \frac{(Z_{\text{r}} + Z_{\text{H}})^2}{4Z_{\text{r}}Z_{\text{H}}}$, получим

$$a_{\text{вн}} = a_{\text{раб}} - \ln \left| \frac{Z_{\text{r}} + Z_{\text{H}}}{2\sqrt{Z_{\text{r}}Z_{\text{H}}}} \right|. \quad (3.85)$$

Вносимое затухание меньше рабочего на затухание несогласованности генератора и приемника. При $Z_{\text{r}} = Z_{\text{H}}$ рабочее затухание равно вносимому.

Затухание вследствие несогласованности сопротивлений соединяемых четырехполюсников в общем случае

$$\Delta a = \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1Z_2}} \right|. \quad (3.86)$$

Вносимое затухание наряду с рабочим находит широкое использование при оценке свойств неоднородных линий.

3.9. Неоднородные электрические линии

В целом ряде радиотехнических и электронных устройств для формирования импульсов, согласования сопротивлений, в качестве элементов фильтров и для других целей широко применяют неоднородные линии. Параметры таких линий изменяются вдоль ее длины от точки к точке по какому-либо закону. Обычно это линии с весьма малыми потерями.

Для получения уравнений, приближенно описывающих процессы в неоднородных линиях, следует в уравнениях (3.2) пренебречь параметрами R и G и посчитать L и C зависящими от координаты x . Это дает

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = j\omega L(x)\dot{I}; \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = j\omega C(x)\dot{U}. \quad (3.87)$$

Как и в случае однородной линии, перейдем к уравнению, содержащему одну неизвестную функцию \dot{U} . Для этого возьмем вторую производную по x от $-\frac{d\dot{U}}{dx}$:

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = j\omega L(x)\frac{d\dot{I}}{dx} + j\omega\frac{dL(x)}{dx}\dot{I}(x).$$

Исключим теперь \dot{I} и $d\dot{I}/dx$, подставив их значения из первого и второго уравнений (3.87):

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = j\omega L(x)C(x)\dot{U} + \frac{1}{L(x)}\frac{dL(x)}{dx}\frac{d\dot{U}}{dx}.$$

Последнее уравнение можно записать также в виде

$$-\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \gamma^2(x)\dot{U} = j\omega\frac{dL(x)}{dx}\dot{I}. \quad (3.88)$$

Сравнивая уравнение (3.87) с (3.3) и (3.56), можно процессы в неоднородной линии интерпретировать как волновые. Они, однако, отличаются от процессов в однородной линии. Во-первых, постоянная распространения $g(x)$ (в линии без потерь фазовая скорость v) зависит от x

$$\gamma = j\omega\sqrt{L(x)C(x)} = j\beta(x); \quad v = \omega/\beta = 1/\sqrt{L(x)C(x)}. \quad (3.89)$$

Во-вторых, в каждой точке линии имеется как бы источник ЭДС, порождающий новые волны, накладывающиеся на бегущую по линии волну и деформирующие ее. Эта деформация изменяет отношение напряжения к току в волне при переходе от точки к точке и является следствием зависимости от x волнового сопротивления линии:

$$Z_B = \sqrt{L_0/C_0}. \quad (3.90)$$

Более конкретные результаты при описании процессов в неоднородных линиях можно получить, задавшись определенным законом изменения $L(x)$ и $C(x)$. В частности, если $L(x) = L_0 e^{kx}$ и $C(x) = C_0 e^{kx}$, линию называют экспоненциальной.

У экспоненциальной линии

$$Z_B = \sqrt{L(x)/C(x)} = \sqrt{L_0/C_0} e^{kx}; \quad v = 1/\sqrt{L_0/C_0}. \quad (3.91)$$

Скорость распространения волны вдоль экспоненциальной линии сохраняется постоянной. Отличие от процессов в однородной линии здесь сводится только к деформации волны из-за непрерывного отражения.

3.10. Волновые процессы в несимметричных двухпроводных линиях и рельсовых цепях

Практические задачи. В теории однородной уединенной линии предполагалось, что ток в обоих проводах линии один и тот же и линия не подвержена никаким внешним влияниям. В уединенной линии имеется одна цепь тока, и, таким образом, понятия «линия» и «цепь» тождественны.

Все соотношения, определяющие процессы в такой двухпроводной линии, называемой также симметричной, полностью справедливы и для однопроводной линии.

В действительности, даже уединенные двухпроводные линии, а также рельсовые цепи не свободны от влияний земли (утечка тока в землю). Это положение усугубляется различием параметров самих проводов цепи.

Кроме того, в большинстве случаев цепи многопроводных линий располагают на общих с другими цепями того же, а иногда и другого типа опорах. Современные воздушные линии связи содержат до 40 проводов, влияющих друг на друга, а кабели связи — большое число жил, заключенных в общую оболочку; высоковольтно-сигнальные линии автоблокировки несут на общих опорах высоковольтные и сигнальные провода; линии электропередачи часто состоят из двух цепей; линии связи местами проходят вблизи линий электропередачи, на участках с электрической тягой — параллельно тяговому проводу дороги. Естественно, что в этих условиях неизбежно должно проявляться взаимное влияние линий.

Все это говорит о том, что при расчете различных устройств не всегда можно применять теорию однородной уединенной линии. Следует вопросы работы цепей с распределенными параметрами рассматривать в условиях взаимных влияний между ними. При применении мер по устранению взаимных влияний (скрещивание цепей воздушных линий связи, скручивание в группы жил симметричных кабелей, транспони-

рование проводов линий электропередачи, стремление к одинаковым параметрам симметричных цепей всех типов) во многих случаях можно для каждой отдельной цепи пользоваться уравнениями уединенной линии, что чрезвычайно упрощает расчеты условий передачи энергии.

Однако ряд практических задач (например, учет взаимного влияния разных линий друг на друга, использование для передачи энергии всей совокупности проводов линии (пучка), как при организации поездной радиосвязи и передаче высокочастотных сигналов по высоковольтным линиям электропередачи, учет влияния неоднородности проводов цепи, включая обрыв одного из них, на условия передачи по ней и др.) требует более строгого и точного анализа процессов, учитывающих взаимодействие всех проводов влияющих линий. Всю совокупность вычислений по общему решению этих задач из-за их громоздкости и сложности следует разделить на ряд более мелких.

Любая задача в области теории линий содержит три части.

1. Вычисление первичных параметров проводов и цепей многопроводной линии, включая взаимные сопротивления и проводимости. Расчет собственных и взаимных сопротивлений и проводимостей проводов (или цепей) при наличии большого их числа с учетом близости земли или проводящей оболочки, конечной проводимости последних и наличия конструктивных неоднородностей оказывается во многих случаях также весьма сложным. Поэтому значения собственных и взаимных параметров часто устанавливают измерениями.

2. Вычисление волновых параметров многопроводной линии.

3. Выявление влияния несогласованности нагрузок на концах линии и определение рабочих условий передачи энергии.

При решении любой практической задачи следует определять собственные первичные параметры, а затем (при необходимости) учитывать волновой характер процессов в линии и состояние ее концов.

Уравнения однородной уединенной линии (3.2) отражают процессы в линиях определенной конструкции (см. рис. 3.3). Электромагнитные процессы в этих линиях определяются одним током и одним напряжением. В любой точке линии токи в обоих проводах одинаковы по значению и противоположны по направлению. Процессы в двухпроводной линии можно характеризовать одним напряжением и одним током только в том случае, если можно пренебречь присутствием вблизи проводов земли и или других проводящих поверхностей, напри-

мер кабельных оболочек. Во многих практически важных случаях явления в линиях следует рассматривать с учетом близлежащих проводящих поверхностей.

Уравнения двухпроводной линии над проводящей поверхностью.

Двухпроводная линия (рис. 3.39) образована двумя проводами, параметры которых в общем случае могут быть различны. Токи двух проводов этой линии из-за утечки части их в землю различны. Такие линии называют несимметричными.

Пусть первичные параметры однопроводных цепей, образованных каждым из проводов с возвратом тока по земле, соответственно будут:

$$R_1, L_1, C_1', G_1', R_2, L_2, C_2', G_2'.$$

Емкость и проводимость провода относительно земли зависят от того, как их измеряют: в присутствии или в отсутствии второго провода. Штрихи у величин C' и G' означают, что они измерены в присутствии второго провода или вычислены с учетом этого присутствия. Величины C' и G' называют частичными емкостями и проводимостями линии.

Кроме собственных первичных параметров, двухпроводную линию характеризуют взаимными параметрами: $R_{12}, M_{12}, G_{12}, C_{12}'$. Взаимное сопротивление R_{12} — общая часть сопротивления петель (контуров): первый провод — земля и второй провод — земля; M_{12} — взаимная индуктивность этих же петель; G_{12}, C_{12}' — соответственно взаимные проводимость и емкость.

Схема замещения бесконечно малого элемента двухпроводной линии с учетом влияния земли приведена на рис. 3.40 (сравним с рис. 3.2).

Составим дифференциальные уравнения двухпроводной несимметричной линии, применяя законы Ома и Кирхгофа к эквивалентной схеме ее бесконечно малого элемента, как это было сделано ранее по отношению к симметричной или однопроводной линии.

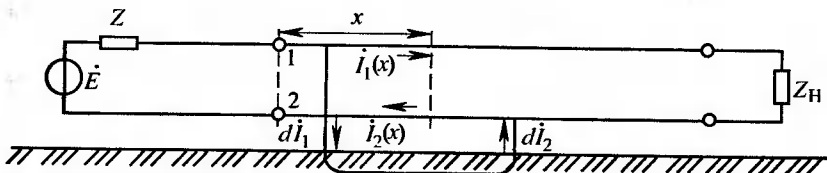


Рис. 3.39

Изменение напряжения на бесконечно малом участке первого провода складывается из падения напряжения на полном сопротивлении провода и напряжения, наведенного в этом элементе током второго провода:

$$-d\dot{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)dx\dot{i}_1 + (R_{12} + j\omega M_{12})dx\dot{i}_2; \quad (3.92)$$

аналогично для второго провода

$$-d\dot{U}_2 = (R_{12} + j\omega M_{12})dx\dot{i}_1 + (R_2 + j\omega L_2)dx\dot{i}_2.$$

Утечка тока с каждого провода в любом элементе линии происходит как в землю за счет напряжения провода относительно земли, так и на второй провод, если его напряжение относительно земли не равно напряжению рассматриваемого провода:

$$\begin{aligned} -d\dot{I}_1 &= (G'_1 + j\omega C'_1)dx\dot{U}_1 + (G'_{12} + j\omega C'_{12})dx(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \\ &= [G'_1 + G'_{12} + j\omega(C'_1 + C'_{12})]dx\dot{U}_1 + [-(G'_{12} + j\omega C'_{12})]dx\dot{U}_2; \\ -d\dot{I}_2 &= [-(G'_1 + j\omega C'_{12})]dx\dot{U}_1 + [G'_2 + G'_{12} + j\omega(C'_2 + C'_{12})]dx\dot{U}_2. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} R_i + j\omega L_i &= Z_{ii}; & R_{ij} + j\omega M_{ij}; \\ G'_i + G'_{ij} &= G'_{ii}; & C'_i + C'_{ij} = C'_{ii}; \\ G'_{ii} + j\omega C'_{ii} &= Y_{ii}; & -(G'_{ij} + j\omega C'_{ij}) = Y_{ij}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

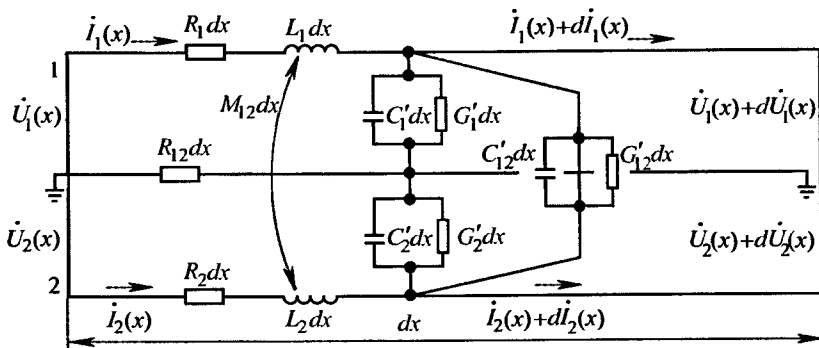


Рис. 3.40

В принятых обозначениях уравнения двухпроводной линии будут

$$\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}_1}{dx} &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; & -\frac{d\dot{U}_2}{dx} &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2; \\ -\frac{d\dot{I}_1}{dx} &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; & -\frac{d\dot{I}_2}{dx} &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Систему (3.94) можно записать в матричной форме

$$-\frac{d(\dot{U})}{dx} = (Z_{\text{пр}})(\dot{I}); \quad -\frac{d(\dot{I})}{dx} = (Y_{\text{из}})(\dot{U}). \quad (3.95)$$

Эта система матричных уравнений соответствует системе уравнений однопроводной линии (3.2). Здесь, как и при переходе от неразветвленной цепи к разветвленной, характеристики проводов $Z_{\text{пр}}$ и $Y_{\text{из}}$ заменились матрицами:

$$(Z_{\text{пр}}) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \text{ и } (Y_{\text{из}}) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

Продифференцировав первое и второе уравнения системы (3.94) по x и заменив производные от токов по x их значениями, взятыми из третьего и четвертого уравнений, получим уравнение второго порядка, содержащее только напряжения:

$$\frac{d^2(\dot{U})}{dx^2} = (Z_{\text{пр}})(Y_{\text{из}})(\dot{U}). \quad (3.96)$$

В нематричной форме уравнение (3.96) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2\dot{U}_1}{dx^2} &= (Z_{11}Y_{11} + Z_{12}Y_{12})\dot{U}_1 + (Z_{11}Y_{12} + Z_{12}Y_{22})\dot{U}_2 = \gamma_{11}^2\dot{U}_1 + \gamma_{12}^2\dot{U}_2; \\ \frac{d^2\dot{U}_2}{dx^2} &= (Z_{12}Y_{11} + Z_{22}Y_{12})\dot{U}_1 + (Z_{12}Y_{12} + Z_{22}Y_{22})\dot{U}_2 = \gamma_{21}^2\dot{U}_1 + \gamma_{22}^2\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Решение уравнений двухпроводной линии. Матричное уравнение (3.96) совершенно подобно уравнению (3.3) однопроводной линии. Использование матричной формы записи позволяет формально по аналогии между уравнениями сразу составить решение уравнения (3.96) и результаты, полученные для двухпроводной линии, распространить на линии с любым числом проводов.

Составим решение матричного уравнения (3.96) в виде выражений (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= A_1 e^{-\sqrt{\gamma^2} x} - A_2 e^{\sqrt{\gamma^2} x}; \\ \dot{i}(x) &= \frac{1}{Z_B} \left(A_1 e^{-\sqrt{\gamma^2} x} - A_2 e^{\sqrt{\gamma^2} x} \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

В этих решениях $\dot{U}, \dot{i}, A_1, A_2, \gamma^2, Z_B$ — матрицы. Для перехода к нематричной форме решений прежде всего следует найти значения $\sqrt{\gamma^2}$ и $e^{\sqrt{\gamma^2} x}$. Последнее можно осуществить, пользуясь теоремой Сильвестра, для чего в свою очередь необходимо определить характеристические числа матрицы $\gamma^2 - k^2$, являющиеся корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} (\gamma_{11}^2 - k^2) & \gamma_{12}^2 \\ \gamma_{21}^2 & (\gamma_{22}^2 - k^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.99)$$

Уравнение (3.99) — биквадратное и имеет четыре попарно сопряженных корня $\pm k_{1,2}$.

Опуская довольно громоздкие промежуточные выкладки, выпишем окончательные решения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) &= (A_{11_1} e^{-k_1 x} + A_{11_2} e^{k_1 x}) + (A_{12_1} e^{-k_2 x} + A_{12_2} e^{k_2 x}); \\ \dot{U}_2(x) &= (A_{21_1} e^{-k_1 x} + A_{21_2} e^{k_1 x}) + (A_{22_1} e^{-k_2 x} + A_{22_2} e^{k_2 x}); \\ \dot{i}_1(x) &= \frac{1}{Z_{B1}} (A_{11_1} e^{-k_1 x} - A_{11_2} e^{k_1 x}) + \frac{1}{Z_{B2}} (A_{12_1} e^{-k_2 x} - A_{12_2} e^{k_2 x}); \\ \dot{i}_2(x) &= \frac{1}{Z_{B1}} (A_{21_1} e^{-k_1 x} - A_{21_2} e^{k_1 x}) + \frac{1}{Z_{B2}} (A_{22_1} e^{-k_2 x} - A_{22_2} e^{k_2 x}). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Здесь

$$Z_{B1} = \frac{1}{k_1} (Z_{11} - \eta_1 Z_{12}), \quad Z_{B2} = \frac{1}{k_2} (Z_{22} - \eta_2 Z_{12}); \quad (3.101)$$

$$\eta_1 = \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}^2 - k_2^2}; \quad \eta_2 = \frac{\gamma_{21}^2}{\gamma_{11}^2 - k_2^2}. \quad (3.102)$$

Значения коэффициентов γ_{ij} определены выражениями (3.97).

Из выражений (3.100) при сопоставлении их с выражениями (3.5) следует, что в двухпроводной линии могут быть два типа падающих и отраженных волн. Первый тип волн характеризуется километрическим коэффициентом распространения: $k_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ и волновым сопротивлением Z_{B1} , а второй тип волн — соответственно величинами $k_2 = \alpha_2 + j\beta_1$ и Z_{B2} . Напряжения и токи обеих волн присутствуют в обоих проводах линии. В линии, состоящей из N проводов, в общем случае могут существовать N пар волн, характеризующихся N различными коэффициентами распространения и N различными волновыми сопротивлениями.

Постоянные интегрирования A_{ij} есть амплитуды падающих, а A_{ji} — отраженных волн напряжения. Как и в случае однопроводной линии, их определяют через напряжения и токи в начале или конце линии.

Схема замещения несимметричной двухпроводной линии. Если определить постоянные интегрирования через напряжения и токи проводов в начале линии $\dot{U}_1(0), \dot{U}_2(0), \dot{I}_1(0)$ и $\dot{I}_2(0)$, то для бесконечно длинной линии, в которой имеются только падающие волны, из уравнений (3.100) получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) = & \frac{1}{2(1-\eta_1\eta_2)} \left\{ \dot{U}_1(0) - \eta_1 \dot{U}_2(0) \right\} + Z_{B1} \left[\dot{I}_1(0) + \eta_2 \dot{I}_2(0) \right] e^{-k_1 x} + \\ & + \frac{\eta_1}{2(1-\eta_1\eta_2)} \left\{ -\eta_2 \dot{U}_1(0) + \dot{U}_2(0) \right\} + Z_{B2} \left[\eta_1 \dot{I}_1(0) + \dot{I}_2(0) \right] e^{-k_2 x}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Выражение для $\dot{U}_2(x)$ получается перестановкой индексов 1 и 2 у напряжений, токов и коэффициентов η .

В выражениях, определяющих отраженные волны, $(\dot{U} + Z\dot{I})$ заменяются на $(\dot{U} - Z\dot{I})$. Ток волны получается делением напряжения на соответствующие Z_B . Уравнения несимметричной линии впервые были получены В. И. Коваленковым. Двухпроводная линия над землей (или в экране), в которой рассматриваются напряжения каждого из проводов относительно земли (или экрана), является $2(2+1)$ -полюсником (рис. 3.41).

Уравнения двухпроводной линии как $2(2+1)$ -полюсника довольно громоздки.

Из уравнения (3.103) следует, что по простым законам, соответствующим законам преобразования напряжений и токов в уединенной одно-

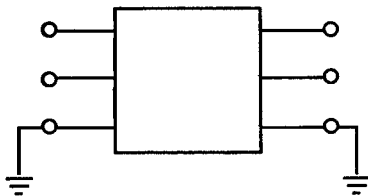


Рис. 3.41

родной линии, изменяются линейные комбинации напряжений и токов проводов:

$$(\dot{U}_1 - \eta_1 \dot{U}_2); (\dot{i}_1 - \eta_2 \dot{i}_2); (-\eta_2 \dot{U}_1 + \dot{U}_2); (\eta_1 \dot{i}_1 + \dot{i}_2).$$

Преобразование напряжений и токов на входе линии в напряжения и токи на выходе можно представить как последовательность следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(\ell) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\dot{U}'(\ell) + \eta_1 \dot{U}''(\ell)]; & \dot{i}_1(\ell) &= [\dot{i}'(\ell) + \eta_2 \dot{i}''(\ell)]; \\ \dot{U}_2(\ell) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\eta_2 \dot{U}'(\ell) + \dot{U}''(\ell)]; & \dot{i}_2(\ell) &= [-\eta_1 \dot{i}'(\ell) + \dot{i}''(\ell)]. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}'(\ell) &= \dot{U}'(0) \operatorname{ch} k_1 \ell - \dot{i}(0) Z'_{B1} \operatorname{sh} k_1 \ell; \\ \dot{i}'(\ell) &= -\frac{1}{Z'_{B1}} \dot{U}'(0) \operatorname{sh} k_1 \ell + \dot{i}'(0) Z'_{B1} \operatorname{ch} k_1 \ell; \\ \dot{U}''(\ell) &= \dot{U}''(0) \operatorname{ch} k_2 \ell - \dot{i}''(0) Z'_{B2} \operatorname{sh} k_2 \ell; \\ \dot{i}''(\ell) &= -\frac{1}{Z'_{B1}} \dot{U}''(0) \operatorname{sh} k_2 \ell + \dot{i}''(0) \operatorname{ch} k_2 \ell. \end{aligned} \quad (2) \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}'(0) &= [\dot{U}_1(0) - \eta_1 \dot{U}_2(0)]; & \dot{i}'(0) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\dot{i}_1(0) + \eta_2 \dot{i}_2(0)]; \\ \dot{U}''(0) &= [-\eta_2 \dot{U}_1(0) + \dot{U}_2(0)]; & \dot{i}''(0) &= \frac{1}{1 - \eta_1 \eta_2} [\eta_1 \dot{i}_1(0) + \dot{i}_2(0)]. \end{aligned} \quad (3)$$

$$Z'_{B1} = (1 - \eta_1 \eta_2) Z_{B1}. \quad (3.105)$$

$$Z'_{B2} = (1 - \eta_1 \eta_2) Z_{B2}. \quad (3.106)$$

Из соотношений (3.104), если их читать в порядке (3), (2), (1), следует, что приложенные к проводам в начале линии напряжения и токи $\dot{U}'_1(0), \dot{I}'_1(0), \dot{U}'_2(0)$ и $\dot{I}'_2(0)$ преобразуются в новые независимые переменные $\dot{U}'(0), \dot{I}'(0), \dot{U}''(0)$ и $\dot{I}''(0)$ в соответствии с формулами (3); эти новые независимые переменные передаются на выход линии по независимым трактам, характеризующимся постоянными передачи k_1 и k_2 волновыми сопротивлениями Z'_{B1} и Z'_{B2} , превращаясь в величины $\dot{U}'(\ell), \dot{I}'(\ell), \dot{U}''(\ell)$ и $\dot{I}''(\ell)$ в соответствии с формулами (2); на выходе линии эти независимые переменные $\dot{U}'(\ell), \dot{U}''(\ell), \dot{I}'(\ell)$ и $\dot{I}''(\ell)$ вновь преобразуются в напряжения и токи проводов $\dot{U}'_1(\ell), \dot{I}'_1(\ell), \dot{U}'_2(\ell)$ и $\dot{I}'_2(\ell)$ в соответствии с формулами (1).

Схема замещения. В соответствии с выражениями (1), (2) и (3) соотношений (3.104) построена схема замещения двухпроводной линии над землей как 2 (2+1)-полюсника (рис. 3.42, а); структура 2 (2+1)-полюсников 1, 2, и 3 в свою очередь показана на рис. 3.42, б и в;

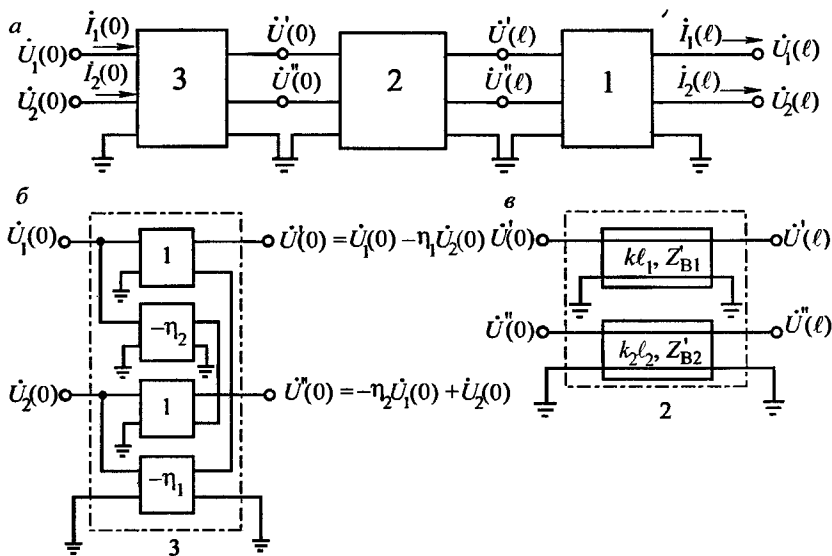


Рис. 3.42

2(2+1)-полосник 3 представляет собой соединение четырех трансформаторов с соответствующими коэффициентами трансформации; 2(2+1)-полосник 2 есть два независимых четырехполосника с общим заземлением; 2(2+1)-полосник 1 — то же, что и 3, но включен в обратную сторону.

Таким образом, схема замещения несимметричной двухпроводной линии представляет собой схемы двух взаимосвязанных трактов передачи.

Симметричная двухпроводная линия над землей или в экране. Двухпроводную линию, провода которой расположены вблизи земли (проводящей поверхности) и имеют одинаковые параметры, называют симметричной.

В этом случае $Z_{11} = Z_{22}$, $Y_{11} = Y_{22}$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = -1$. Выражения, определяющие коэффициенты распространения волн и волновые сопротивления, упрощаются:

$$k_1 = \sqrt{(Z_{11} - Z_{12})(Y_{11} - Y_{12})}, \quad (3.107)$$

$$Z_{B1} = \sqrt{(Z_{11} - Z_{12})/(Y_{11} - Y_{12})}. \quad (3.108)$$

Электрические и магнитные поля, соответствующие этому типу волн, связаны с проводами (фазами) линии. Сами волны поэтому принято называть межпроводными или междуфазовыми (рис. 3.43, а).

Сравнивая картину распределения векторов E и H с аналогичной картиной для уединенной двухпроводной линии (см. рис. 3.3, а), легко заметить, что это тот тип волн, которые существуют в уединенной линии. Эти волны вызываются симметричными напряжениями на входе линии.

Для второго типа волн

$$k_2 = \sqrt{(Z_{11} + Z_{12})(Y_{11} + Y_{12})}, \quad (3.109)$$

$$Z_{B2} = \sqrt{(Z_{11} + Z_{12})/(Y_{11} + Y_{12})}. \quad (3.110)$$

Электрическое и магнитное поля, соответствующие этому типу волн, связаны с обоими проводами линии и землей (проводящей поверхностью) (рис. 3.43, б, сравним с рис. 3.3, б). Волны этого типа в случае воздушных линий принято называть земляными. Они появляются при приложении напряжения между обоими проводами линии и землей (проводящей поверхностью).

В общем случае, если не равны \dot{U}_1 и \dot{U}_2 или Z_{H1} и Z_{H2} , то в двухпроводной симметричной линии возникают волны обоих типов. Появление земляных волн в двухпроводных линиях связи крайне нежелательно, так как это ведет к увеличению взаимного влияния линий.

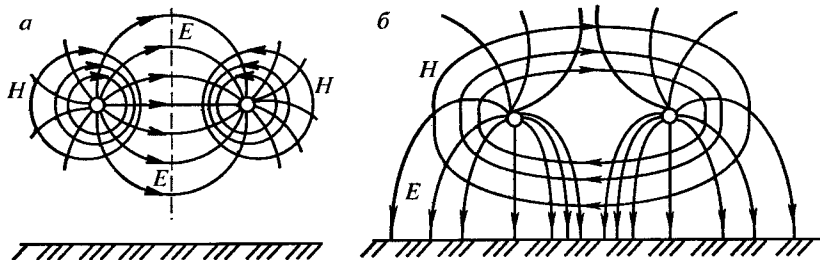


Рис. 3.43

Так как междупроводная и земляная волны в симметричной линии могут существовать одновременно и независимо друг от друга, их можно применять для одновременной передачи двух различных сигналов (рис. 3.44). Это свойство двухпроводных симметричных линий начали использовать в технике связи для одновременного телефонирования и телеграфирования задолго до разработки теории многопроводных линий. Тот же принцип реализован в рельсовых цепях на участках с электротягой для отделения тягового тока от сигнального.

Напряжение в проводе электрически длинной двухпроводной симметричной линии, подвешенной над землей.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x) = & \frac{1}{4} \{ [\dot{U}_1(0) - \dot{U}_2(0)] + Z_{B1} [\dot{I}_1(0) - \dot{I}_2(0)] \} e^{-k_1 x} + \\ & + \frac{1}{4} \{ [\dot{U}_1(0) + \dot{U}_2(0)] + Z_{B2} [\dot{I}_1(0) + \dot{I}_2(0)] \} e^{-k_2 x}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Это выражение получено из формулы (3.103) подстановкой в нее значений $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = -1$.

Выражение для напряжения второго провода получается перестановкой индексов 1 и 2 у напряжений и токов выражения (3.111). В линии конечной длины амплитуды отраженных волн напряжения содержат разности $[\dot{U}(0) - Z\dot{I}(0)]$. Амплитуды токов во всех случаях отличаются от напряжений соответствующих волн множителем $\frac{1}{Z_{Bi}}$.

Если к двухпроводной симметричной линии приложены симметричные напряжения и нагрузки проводов одинаковы, то $\dot{U}_1 = -\dot{U}_2$ и $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$. При этом

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 = 2\dot{U}_1; \quad \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 2\dot{I}_1; \quad \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0; \quad \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0. \quad (3.112)$$

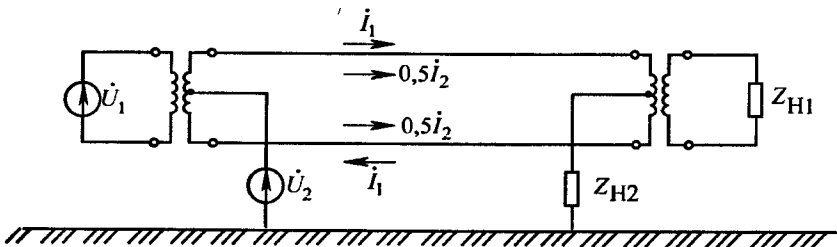


Рис. 3.44

Земляной волны в линии нет, так как ее амплитуда равна нулю. Из уравнения (3.103)

$$\dot{U}_1(x) = \frac{1}{2} [\dot{U}_1(0) + Z_{B1} \dot{I}_1(0)] e^{-k_1 x}. \quad (3.113)$$

Если $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ и $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$, то междуфазовая волна отсутствует и имеется только земляная волна, при этом

$$\dot{U}_1(x) = \frac{1}{2} [\dot{U}_1(0) + Z_{B2} \dot{I}_1(0)] e^{-k_2 x}. \quad (3.114)$$

Возможность существования волн второго типа в двухпроводной линии, расположенной над проводящей поверхностью земли, при обрыве одного из проводов линии не вызывает полного прекращения передачи энергии по ней.

Передача энергии в условиях обрыва одного провода. Если генератор и приемник включены между проводами двухпроводной цепи, а сама цепь уединена, то при обрыве одного из проводов передача энергии от генератора к приемнику прекращается полностью. При расположении цепи над землей или вблизи другой проводящей поверхности при обрыве одного из проводов передача энергии продолжается.

Для выяснения условий передачи энергии в этом случае удобно применить уравнения и схему замещения двухпроводной линии, рассмотренные выше. Допустим, что цепь симметричная, тогда ее схема замещения (см. рис. 3.42) при $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = -1$ преобразуется в схему, приведенную на рис. 3.44, которую можно составить иначе (рис. 3.45, а). Схема замещения линии с оборванным проводом приведена на рис. 3.45, б.

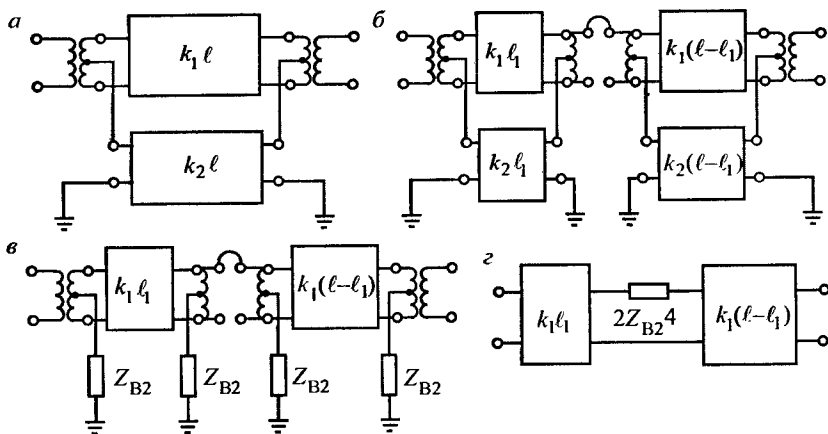


Рис. 3.45

В большинстве практических случаев затухание тракта земляной волны $Re k_2$ значительно больше затухания тракта межпроводной волны $Re k_1$. Поэтому тракт земляной волны можно считать электрически длинным, передаваемой через него долей энергии можно пренебречь и заменить в схеме только входными сопротивлениями (рис. 3.45, в). Учитывая пересчет сопротивления автотрансформатором, получим эквивалентную схему передачи энергии по двухпроводной цепи (рис. 3.45, г). Последнюю схему можно применять для расчета условий передачи сигнала в аварийных случаях обрыва провода и расчета контрольного режима рельсовых цепей.

3.11. Расчет условий передачи сигналов по неоднородным трактам автоматики, телемеханики и связи

Во многих случаях тракт передачи сигналов автоматики, телемеханики и связи наряду с линиями включает в себя четырехполосные элементы с сосредоточенными параметрами. Условия передачи по неоднородным трактам можно рассчитать по тем же методам, что и условия передачи по однородным линиям.

Затухание четырехполосника. Затухание, определяемое в общем случае в неперах как $0,5 \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|$ и в децибелах $10 \lg \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|$, может характе-

ризовать соотношения между мощностями в различных частях системы передачи энергии.

На практике чаще всего приходится рассматривать следующие мощности:

$S_0 = \dot{E}^2 / (4Z_T)$ — мощность, отдаваемую генератором с внутренним полным сопротивлением Z_T , и ЭДС \dot{E} согласованной с ним нагрузке;

$S_H = \dot{E}^2 Z_H / (Z_T + Z_H)^2$ — мощность, отдаваемую генератором непосредственно присоединенной к нему нагрузке с сопротивлением Z_H ;

$\dot{S}_2 = Z_H I_2^2$ — мощность, получаемую приемником с сопротивлением Z_H через систему передачи;

$\dot{S}_1 = E^2 Z_{вх1} / (Z_T + Z_{вх1})^2$ — мощность, входящую в систему передачи с входным сопротивлением $Z_{вх1}$;

$$\dot{S}_{отр} = S_0 - S_1 = \frac{\dot{E}^2 (Z_T - Z_{вх1})^2}{4Z_T (Z_T + Z_{вх1})^2} \text{ — мощность, отражающаяся от}$$

входа системы передачи с входным сопротивлением $Z_{вх1}$.

Отношения между рассматриваемыми мощностями определяют затухания, характеризующие условия передачи энергии через систему. Наиболее употребительны:

собственное затухание при $Z_H = Z_{Х2}$

$$a = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|, \quad a = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|;$$

рабочее затухание

$$a_{раб} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_2} \right|, \quad a_{раб} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_2} \right|;$$

вносимое затухание

$$a_{вн} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_H}{\dot{S}_2} \right|, \quad a_{вн} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_H}{\dot{S}_2} \right|;$$

входное затухание

$$a_{вх} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \right|, \quad a_{вх} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \right|;$$

затухание передачи при $Z_H \neq Z_{X2}$

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|, \quad a_{\text{пер}} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|; \quad (3.115)$$

затухание отражения или несогласованности (эхо)

$$a_{\text{отр}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\text{отр}}} \right|, \quad a_{\text{отр}} = 10 \lg \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{\text{отр}}} \right|.$$

Рабочее затухание несимметричного четырехполосника, выраженное через параметры системы, по аналогии с формулой (3.84)

$$a_{\text{раб}} = a + \ln \left| \frac{Z_r + Z_{X1}}{2\sqrt{Z_r Z_{X1}}} \right| + \ln \left| \frac{Z_{X2} + Z_H}{2\sqrt{Z_{X2} Z_H}} \right| + \ln |1 - e^{-2g} \eta_1 \eta_2|, \quad (3.116)$$

где $\eta_1 = \frac{Z_r - Z_{X1}}{Z_r + Z_{X1}}; \eta_2 = \frac{Z_H - Z_{X1}}{Z_H + Z_{X2}}.$

Здесь Z_{X1} и Z_{X2} — характеристические сопротивления четырехполосника со стороны входа и выхода (у симметричного четырехполосника они равны); g — постоянная передачи. Формулы для расчета характеристических сопротивлений и постоянной передачи рассматриваются ниже.

Вносимое затухание рассчитывают по формуле (3.85), измененной в соответствии с формулой (3.116).

Из определений затуханий вытекают соотношения

$$a_{\text{раб}} = a_{\text{вх}} + a_{\text{пер}},$$

$$a_{\text{раб}} = a_{\text{вн}} + \ln \left| \frac{Z_r + Z_H}{2\sqrt{Z_r Z_H}} \right|, \quad (3.117)$$

$$a_{\text{вх}} = \ln \left| \frac{Z_r + Z_{\text{вх}}}{2\sqrt{Z_r Z_{\text{вх}}}} \right|. \quad (3.118)$$

Затухание тракта передачи, образованного цепочечным соединением четырехполосников. При расчете различного рода устройств автоматики и связи нередко целесообразно рассматривать полный путь передачи сигнала от генератора к приемнику как цепочечное соединение нескольких четырехполосников, каждый из которых отражает свой-

ства одного из элементов сложной цепи передачи. В этом случае, как и при характеристике условий передачи энергии через один четырехполосник, можно использовать понятия собственных, называемых также характеристическими, и рабочих параметров передачи.

При цепочечном соединении четырехполосников характеристические параметры всего соединения определяются произведением матрицы (A) или (T).

Характеристические параметры целесообразно определять в тех случаях, когда система передачи состоит из многих элементов, но с повторяющимися характеристиками, так что для установления условий передачи достаточно рассмотреть группу из двух-трех включенных цепочкой четырехполосников. При этом удается найти и частотные зависимости характеристических сопротивлений и затухания системы.

Если же система состоит из большого числа четырехполосников с различными характеристиками, то вычисление параметров соединения перемножением матриц оказывается крайне громоздким. В таких случаях целесообразно оперировать рабочими параметрами передачи: $Z_{вх}$ и $a_{раб}$.

Входное сопротивление цепочки находят последовательным определением этой величины для каждого четырехполосника, начиная с конца, полагая, что $Z_{вх}$ последнего играет роль $Z_{Н}$ для предпоследнего, и т. д.

Для определения рабочего затухания цепочки рассмотрим схему на рис. 3.46. Пусть $\dot{S}_1, \dot{S}_2, \dots, \dot{S}_N$ — мощности на входах четырехполосников 1, 2, ..., N ; \dot{S}_{N+1} — мощность в приемнике на выходе системы передачи.

Тогда

$$a_{раб} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_{N+1}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \dots \frac{\dot{S}_{N+1}}{\dot{S}_N} \frac{\dot{S}_N}{\dot{S}_{N+1}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_1} \right| + \sum_{m=1}^{m=N} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_m}{\dot{S}_{m+1}} \right|.$$

Рабочее затухание цепочки четырехполосников равно сумме входного затухания и затуханий передачи отдельных четырехполосников. При-

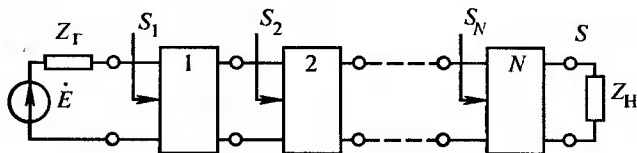


Рис. 3.46

менение логарифмической меры затухания позволяет заменить многократное умножение матриц сложением затуханий.

При большом числе участков сложной передающей системы расчету затуханий передачи их должен предшествовать расчет входных сопротивлений от конца системы к началу. При этом сопротивлением нагрузки для каждого четырехполюсника следует считать входное сопротивление четырехполюсника, следующего за ним.

Затухание передачи полного четырехполюсника. Затухание передачи четырехполюсника определяется выражением (3.115)

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right|,$$

где \dot{S}_1 — мощность на входе четырехполюсника;

\dot{S}_2 — мощность на его выходе.

Заметим, что затухание передачи не зависит от того, какой генератор подключен к входу четырехполюсника. Допустим поэтому, что к входу четырехполюсника подключен генератор с внутренним сопротивлением $Z_r = Z_{X1}$ (рис. 3.47). Вычислим затухание передачи $a_{\text{пер}} = a_{\text{раб}} - a_{\text{вх}}$ (см. формулу 3.117).

Рабочее затухание в соответствии с формулой (3.116) при $Z_r = Z_{X1}$

$$a_{\text{раб}} = a + \ln \left| \frac{Z_{X2} + Z_H}{2\sqrt{Z_{X2}Z_H}} \right|.$$

Входное затухание в соответствии с формулой (3.118)

$$a_{\text{вх}} = \ln \left| \frac{Z_{X1} + Z_{\text{вх1}}}{2\sqrt{Z_{X1}Z_{\text{вх1}}}} \right|.$$

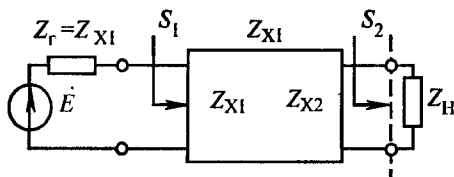


Рис. 3.47

Таким образом,

$$a_{\text{пер}} = a + \ln \left| \frac{Z_H + Z_{X2}}{2\sqrt{Z_H + Z_{X2}}} \right| - \ln \left| \frac{Z_{X1} + Z_{\text{вх1}}}{2\sqrt{Z_{X1}Z_{\text{вх1}}}} \right|.$$

Затухание тракта передачи, содержащего неполные четырехполюсники или ответвления. Сложные тракты передачи сигналов автоматики, телемеханики и связи часто содержат двухполюсники, включаемые параллельно (рис. 3.48) или последовательно (рис. 3.49). В соответствии со схемой, приведенной на рис. 3.46, такие элементы следует рассматривать как неполные четырехполюсники.

Имеются две возможности учета затухания, появляющегося при включении таких неполных четырехполюсников. Первая состоит в том, что рабочее затухание всего тракта передачи рассматривается как сумма входного затухания и затуханий передачи всех четырехполюсников. При этом необходимо иметь формулы, определяющие затухание передачи неполных четырехполюсников.

Для схемы (см. рис. 3.48)

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_H}{Z_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_H}{Z_{\text{вх}}} \right|, \quad (3.119)$$

где $Z_{\text{вх}} = Z_H Z_2 / (Z_H + Z_2)$.

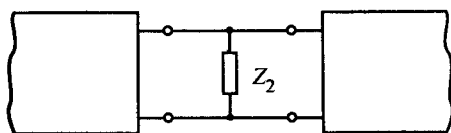


Рис. 3.48

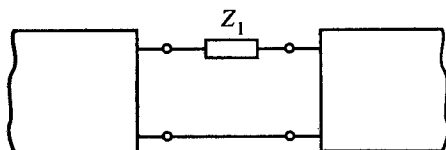


Рис. 3.49

Для схемы (см. рис. 3.49)

$$a_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_1}{Z_H} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Z_{\text{вх}}}{Z_H} \right|, \quad (3.120)$$

где $Z_{\text{вх}} = Z_1 + Z_H$.

Включение в тракт передачи неполного четырехполюсника увеличивает затухание передачи тракта в соответствии с выражением (3.119) или (3.120). Кроме того, изменяется входное сопротивление тракта и соответственно входное затухание. Таким образом, добавочное рабочее затухание, появляющееся в тракте передачи при включении неполного четырехполюсника, состоит из затухания передачи последнего и дополнительного входного затухания.

Вторая возможность учета дополнительного затухания, вызываемого включением в тракт передачи неполного четырехполюсника, заключается в вычислении добавочного рабочего затухания непосредственно, минуя расчет затухания передачи. Этот способ особенно удобен при учете увеличения рабочего затухания вследствие ответвлений линии и в некоторых других случаях.

Вычислим добавочное рабочее затухание, вызванное ответвлениями от линии. На рис. 3.50 показано сечение тракта передачи до включения ответвления, а на рис. 3.51 — с ответвлением.

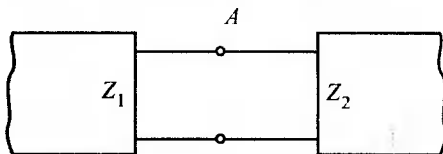


Рис. 3.50

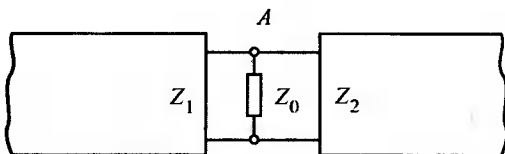


Рис. 3.51

До подключения ответвления в точке А соединились два участка тракта: первый с выходным сопротивлением Z_1 и второй с входным сопротивлением Z_2 . Допустим, что затухания участков достаточно велики, чтобы можно было пренебречь дополнительным затуханием, связанным с отражениями. Тогда при $Z_1 \neq Z_2$ в месте соединения участков из-за несогласованности соединений [см. формулу (3.86)] возникает дополнительное затухание

$$\Delta a = \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \right| = \ln \left| \frac{Y_1 + Y_2}{2\sqrt{Y_1 Y_2}} \right|.$$

Рассмотрим теперь, насколько изменится дополнительное затухание в точке А, если в стыке участков включить ответвление с сопротивлением $Z_0 = 1/Y_0$ (см. рис. 3.51). Дополнительное затухание в этом случае обуславливается отбором ответвлением из тракта некоторой мощности и изменением соотношения между сопротивлениями предшествующей и последующей частей тракта.

Дополнительное затухание вследствие отбора энергии ответвлением оценивают затуханием передачи ответвления

$$\Delta a_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Z_2}{Z_0} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{Y_0}{Y_2} \right|.$$

Дополнительное затухание вследствие изменения соотношения между сопротивлениями в точке А

$$\Delta a_2 = \ln \left| \frac{Y_0 + Y_1 + Y_2}{2\sqrt{Y_1(Y_0 + Y_2)}} \right| - \ln \left| \frac{Y_1 + Y_2}{2\sqrt{Y_1 Y_2}} \right|.$$

Полное дополнительное рабочее затухание, вызванное включением ответвления,

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 = \ln \left| 1 + \frac{Y_0}{Y_1 + Y_2} \right|.$$

Связь рабочего затухания составного тракта с функциями передачи по напряжению. Как известно, затухание между какими-либо точками трактов передачи сигналов удобно измерять разностью уровней. При этом, учитывая, что напряжения могут быть измерены на различных сопротивлениях, необходимо пользоваться уровнями мощности. В то же время измерительные приборы измеряют уровни напряжения.

В групповых линиях сопротивление меняется от точки к точке, поэтому уровни напряжения не определяют распределения затухания, однако контроль распределения напряжения для правильно спроектированного тракта является удобным способом проверки его исправности. Поэтому при проектировании целесообразно задавать напряжения (уровни напряжения) для точек подключения передатчиков и приемников, а при эксплуатации их контролировать. Покажем, как рабочее затухание тракта связано с напряжениями в отдельных его точках:

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_\ell} \right|;$$

$$\frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_\ell} = \frac{\dot{E}^2}{4Z_\Gamma} \frac{Z_H}{\dot{U}^2(\ell)} = \frac{\dot{U}^2(0)(Z_\Gamma + Z_{\text{вх}})^2}{Z_{\text{вх}}^2} \frac{Z_H}{4Z_\Gamma} \frac{1}{\dot{U}^2(\ell)} =$$

$$= \frac{(Z_\Gamma + Z_{\text{вх}})^2}{4Z_{\text{вх}}^2 Z_\Gamma} Z_H \frac{\dot{U}^2(0)}{\dot{U}_1^2} \frac{\dot{U}_1^2}{\dot{U}_2^2} \dots \frac{\dot{U}_n^2}{\dot{U}_1^2(\ell)} = \frac{(Z_\Gamma + Z_{\text{вх}})^2}{4Z_{\text{вх}} Z_\Gamma} \frac{Z_H}{Z_{\text{вх}}} \prod_i \frac{1}{F_{ni}};$$

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\dot{S}_0}{\dot{S}_\ell} \right| = a_{\text{вх}} + \ln \sqrt{\frac{Z_H}{Z_{\text{вх}}}} - \sum_i |F_{Ui}|.$$

Коэффициент изменения тока тракта передачи. При анализе и расчете цепей железнодорожной автоматики и телемеханики, в частности рельсовых цепей, необходимо учитывать непрерывные воздействия (плавное изменение входной функции напряжения или тока, колебания первичных параметров линии и т. д.) и дискретные воздействия, изменяющие структуру схемы (короткое замыкание, шунтирование, обрыв элементов и т. д.).

Сложные электрические цепи при непрерывных и дискретных воздействиях целесообразно анализировать по схемам замещения, позволяющим использовать известные разделы теории четырехполосников и линий и представить цепи автоматики и телемеханики в виде каскадного соединения четырехполосников. Полную схему замещения (см. рис. 3.46) можно упростить, оставив в ней четырехполосник, замещающий линию, а части схемы относительно входных и выходных зажимов линии заменить их входными сопротивлениями (см. рис. 3.47).

Подобные схемы широко применяют при анализе основных информационных устройств железнодорожной автоматики и телемеханики —

рельсовых цепей. Особый интерес при их расчете представляют частные случаи дискретных воздействий на рельсовую линию — наложение поездного шунта и излом рельсов. В этих случаях рельсовая цепь должна среагировать на дискретное воздействие снижением тока в приемнике до значения, обеспечивающего достаточную информацию о занятости или неисправности контролируемого участка пути.

Реакцию цепи на дискретное воздействие удобно количественно характеризовать коэффициентом изменения тока тракта передачи сигналов

$$k_T = \dot{I}_H / \dot{I}'_H,$$

где \dot{I}_H — ток в нагрузке до воздействия на цепь;

\dot{I}'_H — ток в нагрузке при дискретном воздействии на цепь.

Токи в нагрузке соответственно

$$\dot{I}_H = \dot{E} / Z_{\text{прив}}; \quad \dot{I}'_H = \dot{E}' / Z'_{\text{прив}},$$

где $Z_{\text{прив}} = AZ_H + B + (CZ_H + D)Z_T$ — приведенное сопротивление цепи до воздействия на нее;

$Z'_{\text{прив}} = A'Z_H + B' + (C'Z_H + D')Z_T$ — приведенное сопротивление цепи при дискретном на нее воздействии.

С учетом последних выражений

$$k_T = \frac{Z'_{\text{прив}}}{Z_{\text{прив}}} = \frac{A'Z_H + B' + (C'Z_H + D')Z_T}{AZ_H + B + (CZ_H + D)Z_T}.$$

Понятие коэффициента изменения тока тракта передачи можно использовать при анализе рельсовых цепей, работающих в режимах наложения шунта (шунтовом) и изломе рельсов (контрольном).

Глава 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЧАСТОТНЫМИ И ВРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ИХ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ

4.1. Устройства железнодорожной автоматики, телемеханики и связи со специальными характеристиками

В любой из применяющихся на железнодорожном транспорте систем телемеханики и связи можно выделить, по крайней мере, две основные части: устройства сбора и распределения информации и устройства передачи ее на расстояние.

Указанные устройства должны обеспечивать передачу по любым линиям связи (волоконно-оптическим, проводным, радио или смешанным) заданного количества информации с заданной верностью в условиях подверженности искажениям и воздействиям посторонних электромагнитных процессов — помех. Обе эти задачи (передача необходимого количества информации и обеспечение ее достоверности) решают за счет использования в передающих устройствах сигналов специальной формы, обеспечивающих их устойчивость при передаче в условиях наличия искажений и помех, и применения в приемниках специальных устройств, восстанавливающих по возможности переданные сигналы путем специальной обработки принятых сигналов. Как при формировании сигналов в передающих устройствах, так и при восстановлении их в приемных в качестве основных электрических цепей наряду с электронными цифровыми находят применение специальные аналоговые электрические цепи с соответствующими характеристиками.

В широком смысле любые устройства, преобразующие электрические сигналы, называют фильтрами. Электрические цепи (в них могут быть применены разные базовые элементы, в том числе и активные), используемые для получения сигналов определенной формы, называют формирующими фильтрами. Цепи, наилучшим в каком-то смысле образом восстанавливающие сигналы в приемных устройствах, называют оптимальными фильтрами.

Для отделения сигналов друг от друга или помех в тех случаях, когда и те и другие содержат частотные составляющие, занимающие не-

прерывающиеся полосы частот, используют частотные фильтры. Этот тип фильтров появился раньше других и нашел наиболее широкое распространение в устройствах передачи сигналов.

При передаче сигналов по цепям проводных линий связи вследствие зависимости от частоты затухания и фазовой скорости (или, что то же самое, времени распространения) происходит изменение их формы — искажение. Для устранения этих искажений или уменьшения их до допустимого значения в тракт передачи сигналов включают корректоры, придающие характеристике затухания и фазы желательную форму. Корректоры, как и частотные фильтры, можно встретить в любых системах передачи сигналов.

Частотные фильтры. В соответствии с местоположением полосы пропускаемых частот частотные фильтры делят на фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтры верхних частот (ФВЧ), полосовые фильтры (ПФ) и режекторные фильтры (РФ). Все эти термины поясняются рис. 4.1. На рисунке полосы пропускания частотных фильтров показаны резко ограниченными частотами среза $\omega_{\text{ср}}$, за которыми идет полоса задерживания. В реальных частотных электрических фильтрах с изменением частоты переход от пропускания к непропусканию всегда происходит более или менее плавно и тем плавней, чем проще схема фильтра и больше потери в ее элементах.

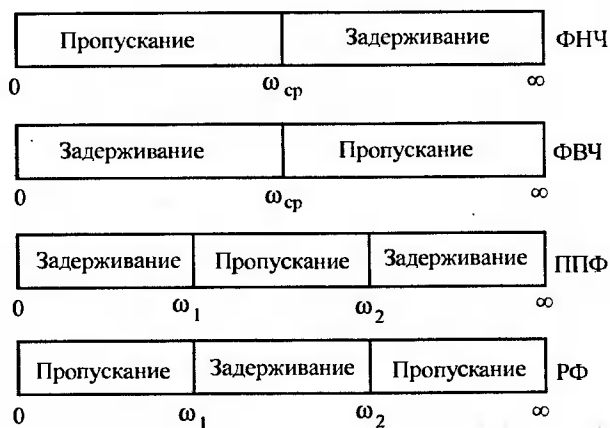


Рис. 4.1

Фильтры из пассивных элементов подразделяют на цепочечные, построенные по схемам Т, П и Г, и мостовые, выполненные по схеме моста. В зависимости от используемых элементов фильтры классифицируют на rC (рис. 4.2, а), LC (рис. 4.2, б), кварцевые, магнитоstrictionные, электромеханические, цифровые и т. д.

Фильтры, образованные только из элементов rC (пассивные фильтры rC), имеют худшие, чем у фильтров LC , фильтрующие свойства. Для простейших ФНЧ это различие иллюстрируется рис. 4.2, в. Однако если цепи rC использовать совместно с усилительными элементами в соединении с обратной связью, можно получать так называемые активные фильтры rC , характеристики которых не уступают фильтрам LC .

Рассмотрим использование частотных фильтров для разделения сигналов, передаваемых одновременно по общей линии. Разделение сигналов возможно, если их спектры занимают разные неперекрывающиеся полосы частот. Это свойство имеют сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$, спектры которых $\dot{U}_1(f)$ и $\dot{U}_2(f)$ показаны на рис. 4.3, а. На рис. 4.3, б приведены характеристики затухания $a_1(f)$ и $a_2(f)$ двух фильтров. Первый приспособлен для пропускания частотных составляющих $u_1(t)$ и задерживания частотных составляющих $u_2(t)$; второй — наоборот. Характеристики затухания $a_1(f)$ и $a_2(f)$ соответственно у ФНЧ и ФВЧ, простейшие схемы которых приведены на рис. 4.3, в. На рис. 4.3, г показано включение фильтров в линию, при котором возможна одновременная и независимая передача двух сигналов.

При применении полосовых фильтров с соответственно сдвинутыми полосами пропускания могут быть одновременно переданы многие

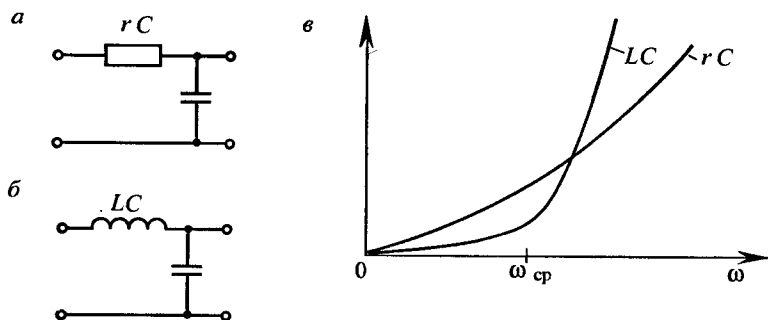


Рис. 4.2

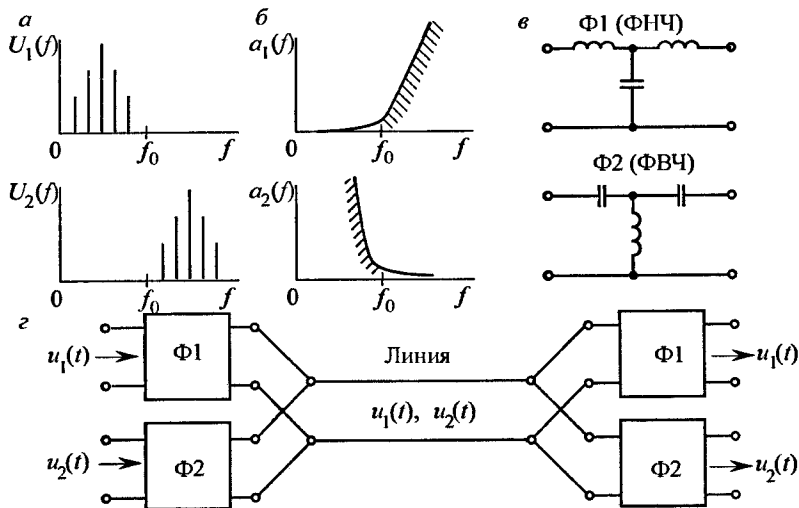


Рис. 4.3

сигналы. Частотные электрические фильтры используют также для отделения сигналов от помех, ограничения частотного спектра сигналов, устранения переменных составляющих напряжений питания.

Свойства фильтров пропускать или задерживать гармонические колебания с разными частотами характеризуются частотной зависимостью какой-либо функции передачи, определяющей изменение амплитуды колебания при прохождении его через фильтр. Практически используют: модуль функции передачи фильтра

$$|F(\omega)| = \left| \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)} \right|;$$

логарифмическую амплитудно-частотную характеристику фильтра в децибелах $L(\omega) = 20 \lg |F(\omega)|$;

загухание фильтра, в децибелах,

$$a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{\dot{U}_1(\omega)}{\dot{U}_2(\omega)} \right| = 20 \lg \frac{1}{|F(\omega)|}.$$

Зависимости $|F(\omega)|$, $L(\omega)$ и $a(\omega)$ для простейшего фильтра нижних частот приведены на рис. 4.4.

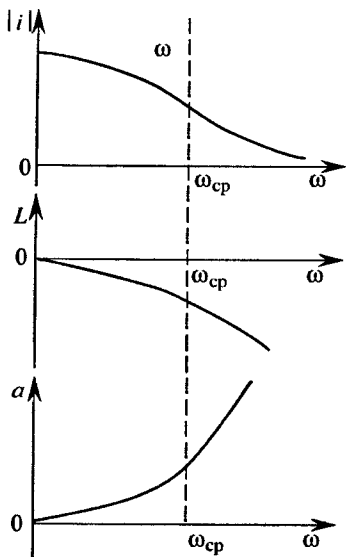


Рис. 4.4

корректора, затухание которого увеличивается с возрастанием частоты тока, приведена на рис. 4.6,а. Корректоры фазочастотных искажений должны без ослабления передавать все частотные составляющие сигналов с изменением их фазы. Простейший пример такой цепи приведен на рис. 4.6, б.

Формирующие устройства. Примерами простых, но весьма распространенных в электронной аппаратуре цепей для получения сигналов определенной формы могут служить интегрирующие и дифференцирующие цепи.

Корректоры амплитудно- и фазочастотных искажений. Способ выбора характеристик корректоров на примере корректора амплитудно-частотных искажений поясняется рис. 4.5, где показано (рис. 4.5,а) включение корректора с затуханием $a_k(\omega)$ между системой передачи и приемником. Предполагается, что включение согласованно. В этом случае затухание всего соединения для каждой частоты сигнала равно сумме затуханий корректора и системы передачи.

Зная, как зависит от частоты затухание системы передачи $a_n(\omega)$, можно подобрать $a_k(\omega)$ так, чтобы их сумма не была функцией частоты (рис. 4.5, б). Простейшая схема

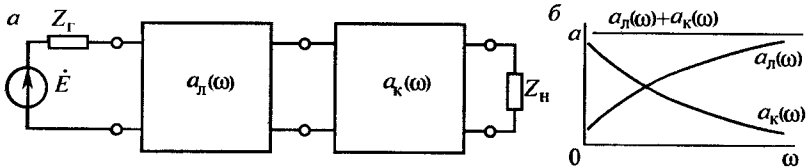


Рис. 4.5

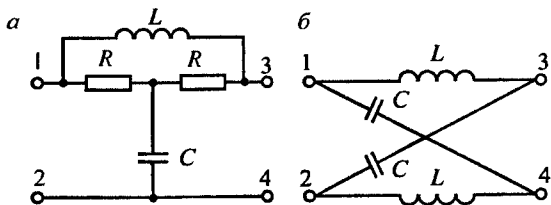


Рис. 4.6

В системах телемеханики и связи все чаще применяют сигналы, состоящие из последовательности узких импульсов. Спектр напряжения узких импульсов занимает соответственно широкую полосу частот. Ее сужение приводит к расширению импульсов, необходимости увеличения расстояния между ними и замедлению передачи. Важной практической задачей является формирование импульсов, являющихся по возможности узкими, спектр которых занимал бы в то же время возможно узкую полосу частот. Этому условию удовлетворяют импульсы так называемой колокольной формы. Схема, используемая для формирования таких импульсов, элементы которой подбирают специальным образом, приведена на рис. 4.7.

Приведенные примеры иллюстрируют разнообразие задач по построению электрических цепей с заданными характеристиками. Свойства любой цепи, как известно, могут быть определены по разным эквивалентным и взаимозаменяемым характеристикам: частотной, операторной, временной. Их применяют при синтезе цепей, однако методы синтеза цепей по частотным (операторным) характеристикам разработаны значительно более полно и пока практически чаще используются.

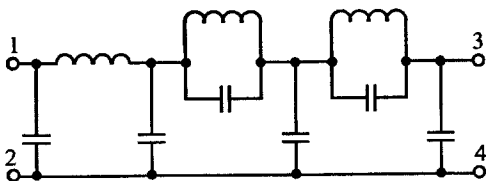


Рис. 4.7

4.2. Электрические фильтры LC . Условия пропускания и задерживания цепочечных фильтров

В устройствах автоматики, телемеханики и связи часто возникает задача выделения полезных сигналов из смеси различных сигналов и помех. Если полезные сигналы и помехи различаются занимаемыми частотными полосами, то такое разделение осуществляют частотными электрическими фильтрами. Частотные фильтры, отделяющие электрические колебания токов с одними частотами от колебаний с другими частотами, применяют в самых разнообразных частотных диапазонах. Простейшими фильтрами могут служить цепи rC , или реактивные двухполюсники, рассмотренные в главе 2.

Однако наиболее распространены фильтры, представляющие собой четырехполюсники, составленные из реактивных двухполюсников по цепочечным или мостовым схемам. Эти фильтры отличаются от простейших фильтрующих цепей более качественными частотными характеристиками. По сравнению с используемыми в качестве фильтров цепями rC они имеют в полосе пропускания теоретически нулевое, а практически весьма малое затухание. От активных фильтров rC их отличает возможность работы при больших токах, например, в цепях тяговых сетей и рельсовых цепях. В то же время фильтры LC имеют и недостатки: невысокую добротность элементов (особенно катушек индуктивности) и значительные габаритные размеры, что затрудняет их использование на сверхнизких и высоких частотах.

Учет влияния сопротивления нагрузки фильтра требует полного анализа его свойств как четырехполюсника. Последнее может быть осуществлено использованием любого полного набора параметров четырехполюсника.

Для анализа и синтеза реактивных фильтров наиболее удобно использовать собственные параметры передачи g и Z_X . Цепочечные фильтры представляют собой каскадное соединение Γ -, T - или Π -образных четырехполюсников, содержащих реактивные сопротивления (рис. 4.8).

Как было показано в главе 2, собственные параметры передачи этих четырехполюсников определяются по следующим уравнениям:

$$Z_T = \sqrt{Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)}; \quad (4.1)$$

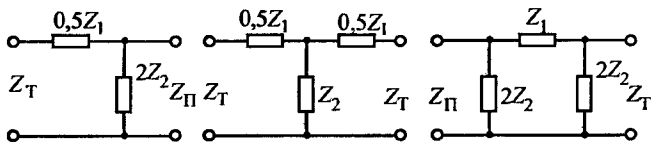


Рис. 4.8

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}; \quad (4.2)$$

$$\text{Sh} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) справедливо для Т- и П-образных четырехполюсников. Для Г-образного полузвена постоянная передачи в 2 раза меньше.

Из определения электрического фильтра следует, что его затухание в полосе пропускания должно быть минимальным (теоретически равняться нулю), а в полосе задерживания — зависеть от частоты (быть максимальным). С учетом этого можно получить условия пропускания и задерживания цепочечных фильтров, анализируя зависимость постоянной передачи цепочечных схем от параметров схемы (4.3) в широком диапазоне частот.

Напомним, что собственная постоянная передачи $g = a + jb$ определяет затухание и фазовый сдвиг четырехполюсника в условиях согласованной нагрузки ($Z_{\text{H}} = Z_{\text{X}}$). Проанализируем выражение

$$\text{Sh} \frac{g}{2} = \text{Sh} \left(\frac{a}{2} + j \frac{b}{2} \right) = \text{Sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + j \text{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}. \quad (4.4)$$

При чисто реактивном характере сопротивлений Z_1 и Z_2 возможны два варианта их соотношений.

Вариант 1. Величины Z_1 и Z_2 — реактивные сопротивления одного знака, в этом случае $\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}$ — положительное вещественное число, не зависящее от частоты.

Тогда из равенства (4.4) получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}; \\ \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как $\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ не может быть равным нулю, то из уравнений (4.5) следует, что $\sin \frac{b}{2} = 0$, при этом $\cos \frac{b}{2} = 1$.

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}. \quad (4.6)$$

Таким образом, четырехполосники, сопротивления Z_1 и Z_2 которых имеют одинаковые реактивные знаки во всем диапазоне частот (рис. 4.9), не могут быть фильтрами, поскольку их затухание является постоянной, не зависящей от частоты величиной. Это обычные делители напряжения.

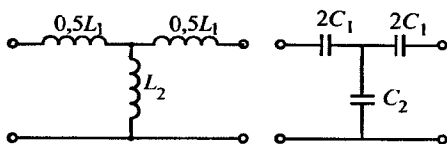


Рис. 4.9

Вариант 2. Величины Z_1 и Z_2 — реактивные сопротивления различных знаков, тогда

$$\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}} \quad (4.7)$$

мнимое число, зависящее от частоты. В этом случае равенство (4.4) распадается на два уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} &= \pm \sqrt{\frac{x_1}{4x_2}}; \\ \operatorname{sh} \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Система уравнений (4.8) допускает два решения.

Первое решение:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{2} = 0; \quad a = 0; \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} = 1; \quad \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{|x_1|}{4x_2}} = f(\omega). \quad (4.9)$$

Второе решение:

$$\cos \frac{b}{2} = 0; \quad b = \pm \pi; \quad \sin \frac{b}{2} = \pm 1; \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{|x_1|}{4x_2}} = f(\omega).$$

Здесь возможны два режима: режим пропускания, соответствующий первому решению, когда затухание $a = 0$, и режим задерживания, соответствующий второму решению, когда $a \neq 0$. Следовательно, четырехполюсник цепочечной схемы, образованный из реактивных сопротивлений Z_1 и Z_2 разных знаков, является электрическим фильтром.

Рассмотрим условия, при которых действует каждое из решений системы и соответственно имеет место пропускание или задерживание.

Так как выражение $\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{|x_1|}{4x_2}}$ имеет смысл только на тех частотах,

на которых $\left| \frac{x_1}{4x_2} \right| < 1$, то в этом случае действует решение (4.9). Это режим пропускания. Совокупность частот, на которых $|x_1| < |4x_2|$, образует

полосу (или полосы) пропускания фильтра $\sqrt{\frac{|x_1|}{4x_2}}$.

Выражение $\operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{|x_1|}{4x_2}}$ имеет смысл только на частотах, для

которых $\left| \frac{x_1}{4x_2} \right| > 1$, при этом действует решение (4.10). Это режим

задерживания. Совокупность частот, на которых $|x_1| > |4x_2|$, образует полосу (или полосы) задерживания фильтра.

Частоту, на которой $|x_1| = |4x_2|$, называют граничной, или частотой среза.

Если Z_1 и Z_2 — взаимнообратные реактивные сопротивления, то $Z_1 Z_2 = k^2 = R^2$. Цепочечные фильтры, содержащие такие сопротивления, называют фильтрами типа k . Условие их пропускания $\left| \frac{x_1}{4x_2} \right| < 1$

в этом случае можно также представить в виде

$$\left| \frac{x_1}{4x_2} \right| = \left| \frac{x_1^2}{4x_1 x_2} \right| = \left| \frac{x_1^2}{4R^2} \right| < 1 \quad \text{или} \quad |x_1| < 2R \quad (4.11)$$

Частоту среза определяют из условия

$$|x_1| = 2R \quad (4.12)$$

Величину R называют *номинальным характеристическим сопротивлением фильтра*.

Если сопротивления Z_1 и Z_2 не взаимнообратны, то они могут быть различными по знаку только в каком-либо конечном диапазоне частот. Вне этого диапазона схема не является фильтром, а представляет собой делитель напряжения.

Все выводы, вытекающие из анализа формулы (4.4), можно получить, рассматривая любую другую гиперболическую или показательную функцию от g .

4.3. Характеристики фильтров типа k

4.3.1. Фильтр нижних частот типа k

Фильтр нижних частот должен пропускать токи с $\omega < \omega_{\text{ср}}$, включая постоянный ток, и задерживать токи с более высокими частотами. Эти свойства имеет цепочечный четырехполосник, у которого в качестве Z_1 включено индуктивное сопротивление, а в качестве Z_2 — емкостное. Варианты таких схем приведены на рис. 4.10.

Для них

$$Z_1 = j\omega L; \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C}; \quad Z_1 Z_2 = R^2; \quad R = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.13)$$

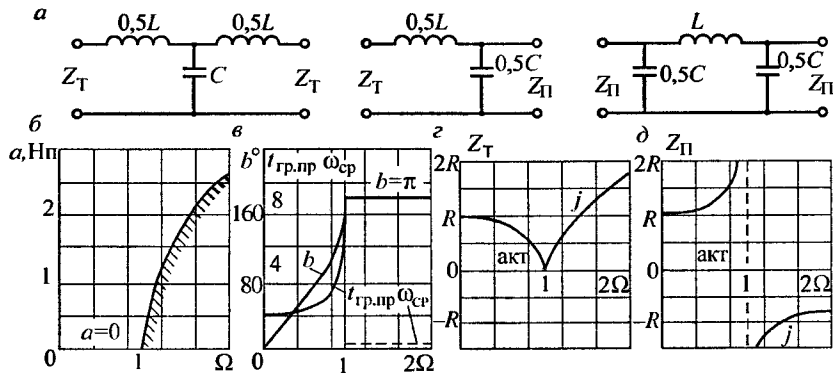


Рис. 4.10

Фильтры, схема которых приведена на рис. 4.10, *a*, оказывают нулевое затухание токам с частотами, для которых $|x_1| < 2R$ и конечное затухание токам с частотами, для которых $|x_1| > 2R$. Частоту среза ω_{cp} определяют из условия (4.12): $|x_1(\omega_{cp})| = 2R$.

$$\text{Отсюда } |x_1(\omega_{cp})| = \omega_{cp}L = 2R = 2\sqrt{L/C} ; \quad \omega_{cp} = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \quad (4.14)$$

Для определения характеристик фильтра по формулам (4.9) и (4.10) рассмотрим, как изменяется в зависимости от частоты отношение

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{j\omega L}{4 \frac{1}{j\omega C}} = -\frac{\omega^2 LC}{4} = -\frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2} = -\frac{f^2}{f_{cp}^2} = -\Omega^2, \quad (4.15)$$

где Ω — относительная, или нормированная, частота.

Следовательно, фильтр пропускает все частоты ниже ω_{cp} , для которых $\Omega < 1$. Подставляя значения $Z_1 Z_2 = |x_1 x_2| = R^2$ и $\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{x_1}{4x_2} = -\Omega^2$ в выражения (4.9) и (4.10), найдем их конкретные формы для ФНЧ.

В полосе пропускания на частотах $\omega < \omega_{cp}$, $\Omega < 1$, $a = 0$.

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}} = \frac{f}{f_{cp}} = \Omega. \quad (4.16)$$

В полосе задерживания при $\omega < \omega_{\text{ср}}$, $\Omega < 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2}} = \frac{f}{f_{\text{ср}}} = \Omega; & b &= \pi; \\ a &= 2 \operatorname{Arch} \Omega = 40 \lg \left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1} \right), \text{ дБ.} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Частотные зависимости затухания и фазовой постоянной звена ФНЧ приведены на рис. 4.10, б и в. Эти зависимости одинаковы для схем Т и П, так как их постоянная передачи задана одним и тем же выражением. Для схемы Г следует брать $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Знак фазового сдвига выбран в соответствии с тем, что на частотах полосы пропускания ток, а следовательно, и напряжение на выходе отстают по фазе от этих величин, действующих на входе.

Из зависимостей $a = a(\Omega)$ и $b = b(\Omega)$ видно, что даже составленный из чисто реактивных сопротивлений идеальный фильтр в широком диапазоне частот не имеет желаемых характеристик. В полосе задерживания этого фильтра затухание растет довольно медленно, а его фазочастотная характеристика в полосе пропускания нелинейна. Последнее может приводить к фазовым искажениям сигналов, передаваемых через фильтр.

Наклон фазочастотной характеристики определяет время задержки сигнала на выходе фильтра по сравнению с сигналом на его входе. У фильтров с меньшей частотой среза это время больше.

Во многих случаях вместо зависимости от частоты фазового сдвига удобнее рассматривать зависимость от частоты группового времени прохождения:

$$t_{\text{гр.пр}} = \frac{db}{d\omega} \quad \text{или} \quad t_{\text{гр.пр}} \omega_{\text{пр}} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega}.$$

Имея в виду, что из выражения (4.17) следует $b = 2 \arcsin \omega$. для $t_{\text{гр.пр}} \omega_{\text{ср}}$ в полосе пропускания получим

$$t_{\text{гр.пр}} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} 2 \arcsin \Omega = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2}}.$$

В полосе задерживания $b = \pi$, $t_{\text{гр.пр}} = 0$. Зависимость для $t_{\text{гр.пр}}$ от $\omega_{\text{ср}}(\Omega)$ приведена на рис. 4.10, в.

Кривые, определяющие зависимость от частоты собственных параметров передачи фильтров, состоят из различных участков, относящихся к частотным полосам пропускания и задерживания, что является их характерной особенностью. Важной характеристикой всякого четырехполюсника является его характеристическое сопротивление Z_X . Оно показывает желательные сопротивления генератора R_G и приемника R_H , при которых четырехполюсник (в рассматриваемом случае фильтр) нагружен согласованно и имеет собственное затухание a и фазовый сдвиг b . Если полного согласования добиться не удастся, сравнение характеристического сопротивления фильтра с сопротивлением генератора R_G и сопротивлением приемника R_H позволяет оценить вызванное несогласованностью изменение затухания a и соответствующее изменение b или $t_{\text{гр.пр}}$. Для схем Т и П характеристические сопротивления неодинаковы. Схема Г имеет различные характеристические сопротивления: с одной стороны сопротивление схемы Т, а с другой — схемы П.

Для установления частотной зависимости характеристических сопротивлений ФНЧ по схемам Т и П воспользуемся выражениями (4.1) и (4.2). Подставляя вместо Z_1 и Z_2 их значения, получим

$$Z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} \right)} = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad (4.18)$$

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2}}} = \frac{R}{\sqrt{1 - \Omega^2}}. \quad (4.19)$$

Зависимости Z_T и Z_{Π} от относительной частоты, соответствующие формулам (4.18) и (4.19), приведены на рис. 4.10, з и д. Из этих зависимостей следует, что характеристическое сопротивление схемы, составленной из чисто реактивных элементов, на частотах, лежащих в полосе пропускания, оказывается активным. Активное входное сопротивление означает, что фильтр способен воспринимать от гене-

ратора энергию с определенными частотами и передавать ее приемнику, поскольку в схеме фильтра нет элементов, способных ее поглощать. Такой фильтр аналогичен линии без потерь также с чисто активным волновым сопротивлением.

На частотах полосы задерживания сопротивление фильтра реактивно, он не воспринимает энергии от генератора. Знак реактивности легко устанавливается из следующих соображений: если реактивное сопротивление растет с частотой, то оно имеет индуктивный характер (для ФНЧ — Z_T), если уменьшается — емкостный (для ФНЧ — Z_{II}).

При постоянном токе ($\omega = 0$) характеристическое сопротивление фильтра $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Это значит, что сопротивление фильтра со стороны входных зажимов равно сопротивлению нагрузки, подключенной к нему.

Дальнейшее изменение Z_X с увеличением частоты предполагает, что нагрузки с обоих концов остаются согласованными и сопротивления R_r и R_H изменяются с частотой так же, как и Z_X . На частотах полосы задерживания должны быть реактивны как R_r и R_H , так и $Z_{вх\phi} = Z_X$. На достаточно высоких частотах в случае схемы T генератор и приемник как бы отключены от фильтра индуктивностями, имеющими на этих частотах очень большие сопротивления. В схеме II на высоких частотах генератор и приемник зашунтированы емкостями с соответственно малыми сопротивлениями.

Для определения значений индуктивности и емкости фильтра необходимо знать частоту среза и сопротивления нагрузок, между которыми фильтр должен работать. Так как характеристическое сопротивление фильтра не остается постоянным в пределах полосы пропускания и согласовать нагрузки на всех частотах нельзя, то в простейших случаях фильтр согласовывают по номинальному характеристическому сопротивлению. Это приводит к условию

$$\omega_{cp}L = 2R_H, \quad (4.20)$$

в котором
$$R_H = R = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.21)$$

Из формул (4.20) и (4.21) получим

$$L = \frac{2R}{\omega_{cp}} = \frac{R}{\pi f_{cp}}; \quad C = \frac{L}{R^2} = \frac{2}{\omega_{cp}R} = \frac{1}{\pi f_{cp}R}. \quad (4.22)$$

Следует отметить, что формулы (4.22) дают полные значения элементов L и C , тогда как в схемы надо вводить также и $0,5L$ или $0,5C$ (см. рис. 4.10, a). Схемы T и Π называют звеньями ФНЧ, схему Γ — полувзеном.

4.3.2. Фильтр верхних частот типа k

Фильтр верхних частот должен пропускать с нулевым затуханием все токи с частотами выше заданной ($\omega > \omega_{\text{ср}}$) и задерживать токи с более низкими частотами и постоянный ток. Этим требованиям удовлетворяют цепочечные схемы T , Π , и Γ с емкостным сопротивлением в качестве Z_1 и индуктивным в качестве Z_2 (рис. 4.11, a). Здесь

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_2 = j\omega L, \quad Z_1 Z_2 = \frac{L}{C} = R^2, \quad R = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.23)$$

Пользуясь общим условием (4.12), характеризующим частоту среза $|X_1(\omega_{\text{ср}})| = 2R$, найдем:

$$|X_1(\omega_{\text{ср}})| = \frac{1}{\omega_{\text{ср}} C} = 2R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}; \quad \omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \quad (4.24)$$

Для определения характеристик фильтра по формулам (4.9) и (4.10) рассмотрим, как изменяется в зависимости от частоты отношение

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{4\omega^2 LC} = -\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2} = -\frac{f_{\text{ср}}^2}{f^2} = -\frac{1}{\Omega^2}. \quad (4.25)$$

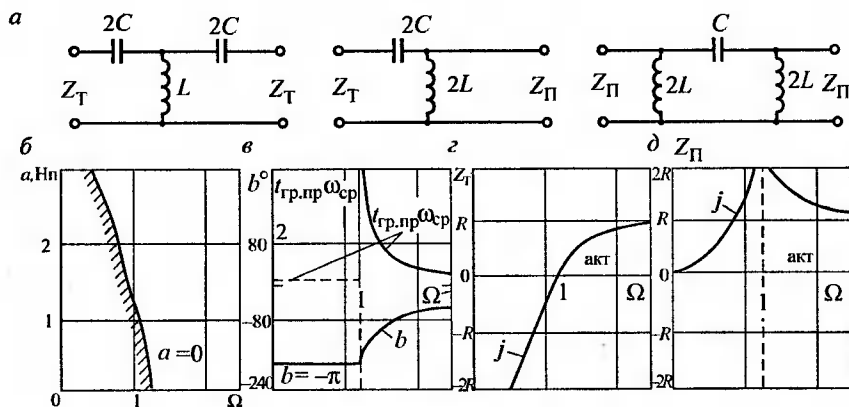


Рис. 4.11

Четырехполосник пропускает все частоты выше $\omega_{\text{ср}}$, $\Omega > 1$.

Формулы, определяющие затухание и фазовый сдвиг ФВЧ, получим, если значение $\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{1}{\Omega^2}$ подставим в общие выражения (4.9) и (4.10).

В полосе пропускания при $\omega > \omega_{\text{ср}}$, $\Omega > 1$.

$$a = 0; \quad \sin \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}} = -\frac{1}{\Omega}. \quad (4.26)$$

В полосе задерживания $\omega < \omega_{\text{ср}}$, $\Omega < 1$.

$$b = -\pi; \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\Omega};$$

$$a = 2 \operatorname{Arch} \frac{1}{\Omega} = 40 \lg \left(\frac{1}{\Omega} + \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - 1} \right), \text{ дБ.} \quad (4.27)$$

Частотные зависимости затухания и фазовой постоянной ФВЧ приведены на рис. 4.11, *б* и *в*. Знак фазового сдвига выбран здесь противоположным знаком этой величины ФНЧ, поскольку, как это хорошо видно, в области достаточно высоких частот при последовательно включенных конденсаторах ток и напряжение на выходе опережают по фазе эти величины, действующие на входе.

Найдем выражение для группового времени прохождения.

Из выражения (4.26) для полосы пропускания найдем

$$b = -2 \arcsin \frac{1}{\Omega}.$$

Тогда

$$t_{\text{гр. пр}} \omega_{\text{ср}} = \frac{db(\Omega)}{d\Omega} = 2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}} \frac{1}{\Omega^2} = \frac{2}{\Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}}. \quad (4.28)$$

В полосе задерживания $t_{\text{гр. пр}} \omega_{\text{ср}} = 0$ (см. рис. 4.11, *в*).

Рассмотрим характеристические сопротивления:

$$Z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2} \right)} = \frac{R\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega}; \quad (4.29)$$

$$Z_{\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2}}} = \frac{R\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}}. \quad (4.30)$$

Частотные зависимости этих сопротивлений приведены на рис. 4.11, ε и δ .

Расчетные формулы для определения элементов получаются аналогично формулам для ФНЧ.

Из условия $|X_1| = 2R$ на частотах $\omega = \omega_{\text{ср}}$ и $R = \sqrt{L/C}$ найдем

$$C = \frac{1}{2R\omega_{\text{ср}}} = \frac{1}{4\pi f_{\text{ср}} R}; \quad L = CR^2 = \frac{R}{2\omega_{\text{ср}}} = \frac{R}{4\pi f_{\text{ср}}}. \quad (4.31)$$

Здесь в отличие от ФНЧ согласование с нагрузкой проводится на бесконечно большой угловой частоте ($\omega \rightarrow \infty$). В остальном о фильтре верхних частот можно повторить все, что было сказано о ФНЧ.

Характеристическое сопротивление ФВЧ на очень высоких частотах активно и равно $\sqrt{\frac{L}{C}}$. Это значит, что сопротивление фильтра со стороны входных зажимов равно сопротивлению подключенной к нему нагрузки.

На частоте среза имеют место резонанс напряжений в схеме Т и резонанс токов в схеме П, обращающие характеристическое сопротивление фильтра в нуль или бесконечность. Предполагается, что с дальнейшим понижением частоты нагрузка остается согласованной, т. е. реактивной, и, следовательно, входное сопротивление фильтра делается реактивным; фильтр не воспринимает энергии от генератора, причем в глубине полосы задерживания (т. е. на частотах, близких к нулю) в случае схемы Т генератор как бы отключен от фильтра конденсатором, имеющим при этом весьма большое сопротивление, в случае же схемы П генератор шунтируется индуктивностью, имеющей на этих частотах малое сопротивление.

В случаях параллельного соединения нескольких фильтров уменьшение до нуля входного сопротивления одного из них шунтирует и остальные, чем нарушает их работу. Поэтому фильтры для параллельной работы строят по схеме Т, в случае же индивидуального включения фильтр рекомендуется выполнять по схеме П. На выбор схемы может влиять также наличие реактивной составляющей в сопротивлении нагрузки. Схему фильтра следует выбирать так, чтобы избежать непредусмотренных резонансных явлений.

4.3.3. Полосовой фильтр типа k

Полосовым фильтром называют четырехполюсник, который пропускает без затухания электрические колебания с угловыми частотами, лежащими в полосе от ω_1 до ω_2 , и оказывает затухание колебаниям с частотами вне этой полосы. Схемы полосового фильтра типа k приведены на рис. 4.12, а. В последовательной их ветви содержатся емкость, препятствующая прохождению тока с низкими частотами, и индуктивность, преграждающая путь току с высокими частотами. Емкость и индуктивность параллельного контура, наоборот, беспрепятственно пропускают токи с очень низкими и очень высокими частотами. На частотах, близких к резонансным, который наступает одновременно во всех ветвях на частоте ω_0 , последовательная ветвь имеет малое сопротивление, а параллельная — большое, и, таким образом, фильтр пропускает энергию относительно свободно.

Свойства ПФ можно определить сравнением его с ФВЧ и ФНЧ. На частотах ниже резонансной сопротивление Z_1 имеет емкостный характер, а сопротивление Z_2 — индуктивный. Поэтому на указанных частотах полосовой фильтр ведет себя как ФВЧ. На частотах выше резонансной сопротивление Z_1 носит индуктивный характер, а сопротивление Z_2 — емкостный, и полосовой фильтр ведет себя как ФНЧ. Сказанное иллюстрируется рис. 4.12, б, где приведены частотные зависимости сопротивлений Z_1 и Z_2 фильтров верхних, нижних частот и полосового. Из этого рисунка видно, что условие $|x_1| = 4|x_2|$ или $|x_1| = 2R$ для ПФ наблюдается дважды: на частоте ω_1 , меньшей ω_0 и на частоте ω_2 , большей ω_0 . В первом случае имеет место переход от задерживания к пропусканию, а во втором, наоборот, от пропускания к задерживанию.

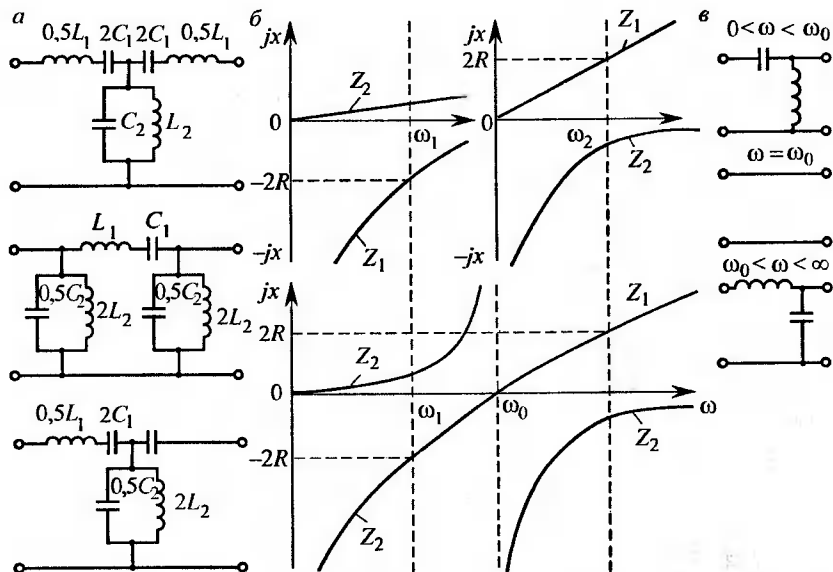


Рис. 4.12

Таким образом, в каждой из частотных полос схему ПФ можно заменить более простой эквивалентной схемой, действительной для данной полосы. Такие эквивалентные схемы приведены на рис. 4.12, в. Из них следует, что характеристики ПФ представляют собой как бы соединение соответствующих характеристик ФВЧ и ФНЧ (рис. 4.13).

Согласно определению фильтров типа k сопротивления Z_1 и Z_2 должны быть взаимнообратны. Для ПФ это возможно при

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}};$$

$$Z_1 = \frac{jL_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2) = j\omega_0 L_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right); \quad (4.32)$$

$$Z_2 = \frac{\omega}{jC_2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{j\omega_0 C_2} \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}.$$

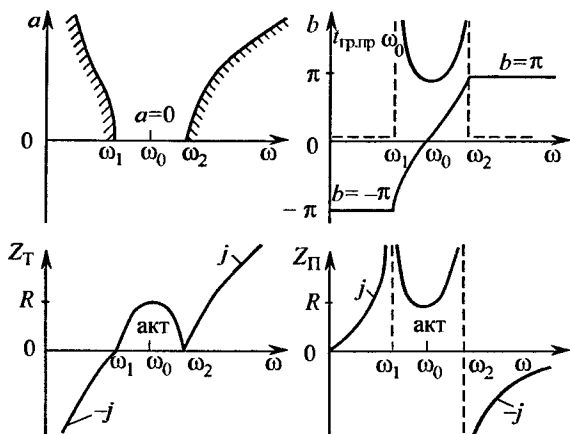


Рис. 4.13

Отсюда

$$\sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} = R. \quad (4.33)$$

Для угловых частот среза ω_1 и ω_2 , при которых $|x_1| = 2R$, с учетом формулы (4.32) получим

$$\omega_0 L_1 \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0 - \omega_1} \right) = -2R; \quad \omega_0 L_1 \left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0 - \omega_1} \right) = 2R. \quad (4.34)$$

После преобразований с учетом формул (4.32) и (4.33) из уравнений (7.34) получаем выражения для угловых частот среза

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} + \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}.$$

Из последних равенств следуют такие выражения:

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2; \quad \omega_1 - \omega_2 = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}. \quad (4.35)$$

Для аналитического исследования свойств ПФ с учетом уравнений (4.32) найдем отношение:

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = \frac{L_1 C_2}{4} \omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2.$$

Если учесть выражения (4.35) и ввести следующие обозначения:

$n = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}$ и $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ — нормированная частота ПФ, то из предыдущего уравнения получим

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = - \left[n \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right) \right]^2 = -\Omega^2. \quad (4.36)$$

Параметры a , b , Z_T , Z_{II} ПФ можно определить по тем же формулам, что и параметры ФНЧ, с заменой в них R и Ω в соответствии с выражениями (4.33) и (4.36). По ним и построены частотные зависимости на рис. 4.13.

Формулы для расчета параметров ПФ найдем по заданным частотам среза ω_1, ω_2 , и $R_H = R$ с учетом выражений (4.33), (4.34) и (4.35):

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2R}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)}; & C_1 &= \frac{1}{L_1 \omega_1 \omega_2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1 \omega_2 R} = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R}; \\ C_2 &= \frac{L_1}{R^2} = \frac{2}{R(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{1}{\pi R(f_2 - f_1)}; \\ L_2 &= \frac{L_1 C_1}{C_2} = \frac{R(\omega_2 - \omega_1)}{2\omega_1 \omega_2} = \frac{R(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

При неодинаковых требованиях к ослаблению нежелательных частотных составляющих, лежащих ниже и выше полосы пропускания, часто применяют более простые схемы полосовых фильтров. Их строят исключением из схем, приведенных на рис. 4.12, a , какого-либо одного элемента. Если, например, из сопротивления Z_1 исключить катушку индуктивности L_1 , оставив конденсатор C_1 , то получаются схемы полосовых фильтров, обеспечивающих более сильное подавление частот, лежащих ниже полосы пропускания. Тот же эффект достигается при исключении из указанных схем конденсатора C_2 (рис. 4.14, a и b).

Обратный эффект — более сильное подавление частот, лежащих выше полосы пропускания, — получается при исключении C_1 или L_2 .

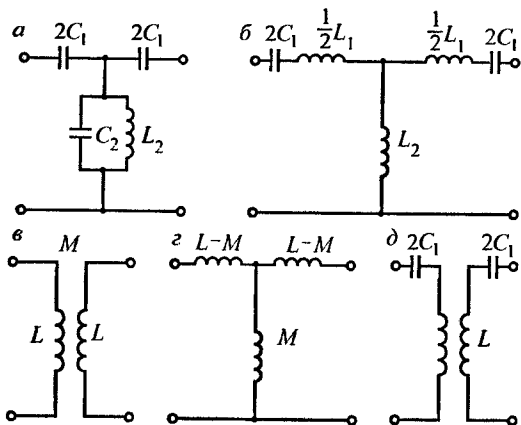


Рис. 4.14

Схема (см. рис. 4.14, б) содержит соединения трех индуктивностей. Известно, что связанные индуктивности (рис. 4.14, в) могут быть заменены эквивалентной схемой (рис. 4.14, з). Используя такую эквивалентную замену, можно получить полосовой фильтр эквивалентный схеме, приведенной на рис. 4.14, б, если выполнить его по схеме (рис. 4.14, д). Преимущество этой схемы заключается в том, что при пробое конденсаторов вход и выход фильтра остаются изолированными друг от друга, вследствие чего этому способу реализации фильтров в ряде случаев отдают предпочтение. Такой фильтр должен быть рассчитан как фильтр (см. рис. 4.14, б) по формулам

$$L_1 = \frac{f_1 R}{\pi f_2 (f_2 - f_1)}; \quad C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R}; \quad L_2 = \frac{(f_1 + f_2) R}{4\pi f_1 f_2}. \quad (4.38)$$

Затем «звезда» из индуктивностей должна быть заменена эквивалентным трансформатором с индуктивностью обмоток $L = 0,5L_1 + L_2$ и коэффициентом взаимной индукции $M = L_2$.

Если в схемах Г, Т, и П в качестве Z_1 и Z_2 взять соответственно контуры резонансов токов и напряжений (рис. 4.15, а), то эти схемы будут пропускать все частоты ниже ω_1 и выше ω_2 и вносить затухание на частотах, удовлетворяющих условию $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Такие четырехполосники называют режекторными фильтрами (РФ) типа k . Их характеристики приведены на рис. 4.15, б и в.

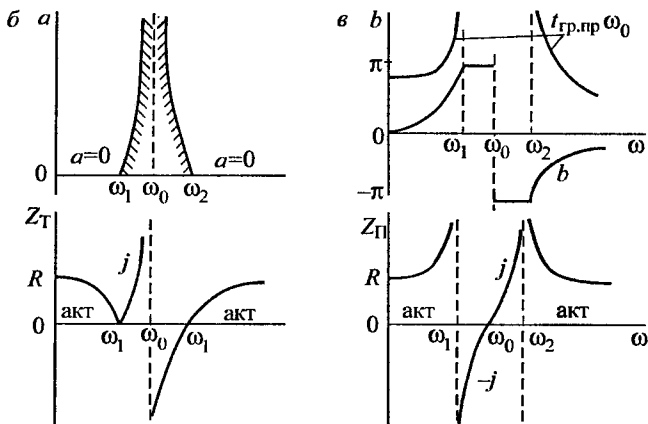
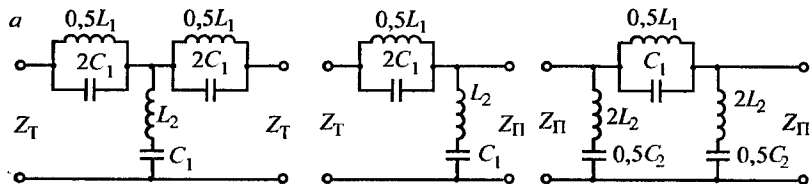


Рис. 4.15

4.3.4. Преобразование масштаба частот

Из изложенного можно заключить, что все рассмотренные схемы фильтров исследуют одинаково. Задаваясь видом двухполосников Z_1 и Z_2 , из которых составлена схема, выражения $\frac{Z_1}{4Z_2}$ представляют в виде функции от ω и затем строят характеристики затухания и фазы,

руководствуясь соображением о значении $\left| \frac{x_1}{4x_2} \right|$ по сравнению с 1 или $|x_1|$ по сравнению с $2R$. Различия в свойствах отдельных схем обнаруживаются при этом в связи с соответствующей зависимостью сопротивлений Z_1 и Z_2 от частоты.

Замеченное обстоятельство позволяет при исследовании свойств фильтрующих четырехполосных схем пользоваться преобразованием частот. Последнее заключается в следующем: Зная свойства какой-либо

схемы, например ФНЧ, и желая определить свойства другой схемы, получающейся заменой сопротивлений Z_1 и Z_2 другими, в формулах, характеризующих свойства первой схемы, угловую частоту ω заменяют функцией от ω , соответствующей выполненной замене сопротивлений.

Действительно, для ФНЧ $Z_1 = j\omega L$ и $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$. Если заменить Z_1 на $\frac{1}{j\omega C}$, а Z_2 на $j\omega L$, то, как известно, получится ФВЧ. Его свойства легко устанавливаются, если во всех характеристиках ФНЧ $\frac{\omega}{\omega_{cp}}$ заменить $\frac{\omega_{cp}}{\omega}$ или, что то же, Ω — на $\frac{1}{\Omega}$. Переход от ФНЧ к ПФ требует замены Ω величиной η .

Преобразование частоты при переходе от одного типа фильтра к другому иллюстрируются табл. 4.1. Применение преобразования частоты особенно удобно при исследовании сложных схем и количественном определении влияния потерь на свойства фильтров. При учете

Таблица 4.1

Преобразование частоты при переходе от одного типа фильтра к другому

Фильтр	$x_1(\omega)$	$x_2(\omega)$	Условие $ x_1(\omega_{cp}) = 2R$	Расчетные формулы из условия	
				$ x = 2R$	$ x = \frac{R_2}{ x_1 }$
ФНЧ	$x_1(\omega) = \omega L = \frac{\omega}{\omega_{cp}} 2R$	$x_2(\omega) = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{\omega_{cp} R}{\omega 2}$	$\omega_{cp} L = 2R$	$L = \frac{2R}{\omega_{cp}}$	$C = \frac{L}{R^2} = \frac{2}{\omega_{cp} R}$
ФВЧ	$x_1(\omega) = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{\omega_{cp} 2R}{\omega}$	$x_2(\omega) = \omega L = \frac{\omega R}{\omega_{cp} 2}$	$\frac{1}{\omega_{cp} C} = 2R$	$C = \frac{1}{2\omega_{cp} R}$	$L = CR^2 = \frac{R}{2\omega_{cp}}$
ПФ	$x_1 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} L_1$	$x_2 = -\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \times \frac{1}{C_2}$	$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} L_1 = 2R$ $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$	$L_1 = \frac{2R}{\omega_2 - \omega_1}$ $L_1 C_1 = \frac{1}{\omega_0^2}$	$C_2 = \frac{L_1}{R_2 (\omega_2 - \omega_1) R^2}$ $L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$
РФ	$x_1 = -\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \times \frac{1}{C_1}$	$x_2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} L_2$	$x_1 = -\frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{1}{C_1} = 2R$	$C_1 = \frac{1}{2R(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_1 C_1 = \frac{1}{\omega_0^2}$	$L_2 = C_1 R^2 = \frac{R}{2(\omega_2 - \omega_1)}$ $L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$

влияния потерь следует в рассматриваемых схемах чисто реактивные сопротивления, например $j\omega L_1$ заменить на $r_1 + j\omega L_1$. Получаемые изменения в свойствах схемы можно определить, заменяя угловую частоту ω комплексной величиной $\omega - j\frac{r_1}{L_1}$, которая при умножении на jL_1 дает полное сопротивление $r_1 + j\omega L_1$, так как в случае чисто реактивного сопротивления при умножении ω на jL получаем $j\omega L$.

4.4. Влияние потерь и несогласованности нагрузок на характеристики фильтров

Влияние потерь. Практически фильтры вследствие потерь в элементах имеют затухание в полосе пропускания, не равное нулю, а в полосе задерживания — меньшее, чем в идеальном фильтре. Обусловливается это в основном потерями в катушках индуктивности.

Потери в катушке оценивают ее добротностью $Q = \frac{\omega L}{r}$ или обратной величиной, называемой *коэффициентом потерь*. Величины Q и d

$\left(d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\omega L} \right)$ катушек с ферромагнитными сердечниками в большой степени зависят от частоты (рис. 4.16).

Характеристики фильтра с учетом потерь можно рассчитать по тем же формулам, что и характеристики идеального фильтра с той только разницей, что относительная частота, определяемая из условия

$\Omega^2 = \frac{Z_1}{4Z_2}$, в случае фильтра с потерями будет комплексным числом.

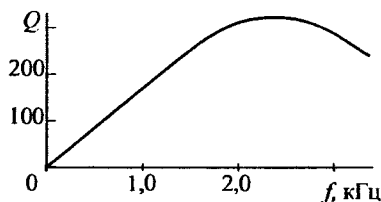


Рис. 4.16

Например, для ФНЧ, у которого

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1 = j\omega L_1(1 - jd) \quad \text{и} \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C},$$

имеем

$$\frac{Z_1}{4Z_2} = -\frac{\omega^2 LC}{4}(1 - jd) = -\Omega^2(1 - jd).$$

Затухание и фазовый сдвиг фильтра с потерями можно рассчитать по формуле

$$g = 20 \lg(A + \sqrt{BC}). \quad (4.39)$$

Матрица параметра передачи симметричного четырехполосника схем Т

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) & Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right) \\ \frac{1}{Z_2} & \left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) \end{pmatrix},$$

где

$$A = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = 1 - 2\Omega^2(1 - jd);$$

$$BC = -4\Omega^2(1 - jd)(1 - \Omega^2(1 - jd));$$

$$\sqrt{BC} = j2\Omega\sqrt{1 - \Omega^2(1 - jd)}.$$

Подставляя A и \sqrt{BC} в (4.39) получим

$$\begin{aligned} g &= 20 \lg \left(j\Omega\sqrt{1 - jd} + \sqrt{1 - \Omega^2(1 - jd)} \right)^2 = \\ &= 40 \lg \left(j\Omega\sqrt{1 - jd} + \sqrt{1 - \Omega^2(1 - jd)} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Отсюда затухание фильтра с потерями равно модулю выражения

$$a = 40 \lg \left| j\Omega\sqrt{1 - jd} + \sqrt{1 - \Omega^2(1 - jd)} \right|,$$

а фазовый сдвиг b , как угол аргумента,

$$b = 2 \arg \left(j\Omega\sqrt{1 - jd} + \sqrt{1 - \Omega^2(1 - jd)} \right).$$

Аналогично учитывают потери и в конденсаторах.

Влияние несогласованности на затухание фильтра. Фильтры обычно работают между постоянными активными нагрузками. При расчете фильтров сопротивления нагрузок предполагают равными характеристическому сопротивлению фильтра во всем диапазоне частот. Несогласованность нагрузок дополнительно приводит к отклонению кривой затухания от теоретической.

В рабочих условиях затухание фильтра в полосе пропускания не равно нулю, а в полосе задерживания может быть меньше собственного затухания a , определяемого формулой (4.17).

Для вычисления рабочих параметров фильтра при $R_r = R_H = R$ воспользуемся выражением

$$\varepsilon_{\text{раб}} = a_{\text{раб}} + jb_{\text{раб}} = \ln \left\{ \operatorname{ch} g + \left(\frac{R}{2Z_X} + \frac{Z_X}{2R} \right) \operatorname{sh} g \right\}.$$

Из этого выражения следует, что

$$a_{\text{раб}} = \ln \left| \operatorname{ch} g + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right) \operatorname{sh} g \right|. \quad (4.41)$$

В полосе пропускания фильтра $a = 0$, $g = jb$, Z_X активно. Имея это в виду и учитывая, что $\operatorname{ch} jb = \cos b$ и $\operatorname{sh} jb = j \sin b$, получим

$$\begin{aligned} a_{\text{раб}} &= 20 \lg \left| \cos b + j \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right) \sin b \right| = \\ &= 10 \lg \left[\cos^2 b + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right)^2 \sin^2 b \right] = 10 \lg \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right)^2 \sin^2 b \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Как видно, рабочее затухание фильтра в полосе пропускания не равно нулю и изменяется в зависимости от частоты, поскольку от последней зависят фазовая постоянная b и Z_X .

Исследуем формулу (4.42) применительно к схеме ТФНЧ. Для нее

$$Z_X = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad \sin \frac{b}{2} = \Omega.$$

Отсюда

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{b}{2}} = \sqrt{1 - \Omega^2};$$

$$\sin b = 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} = 2\Omega \sqrt{1 - \Omega^2};$$

$$\sin^2 b = 4\Omega^2(1 - \Omega^2); \quad \cos^2 b = 1 - \sin^2 b = 1 - 4\Omega^2(1 - \Omega^2);$$

$$a_{\text{раб}} = 10 \lg \left[1 - 4\Omega^2(1 - \Omega^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{R^2 + R^2(1 - \Omega^2)}{R^2 \sqrt{1 - \Omega^2}} \right)^2 4a^2(1 - \Omega^2) \right] = \quad (4.43)$$

$$= 10 \lg [1 + \Omega^6].$$

Из формулы (4.42) можно видеть, что $a_{\text{раб}}$ будет иметь максимальное значение на тех частотах, на которых $\sin^2 b$ будет наибольшим. Поскольку максимальное значение $\sin^2 b = 1$, то наибольшее значение рабочего затухания в полосе пропускания

$$a_{\text{раб}} = \Delta a = 10 \lg \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right)^2 \right] = 20 \lg \frac{1}{2} \left[\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right]. \quad (4.44)$$

В частности, для частоты среза $\Omega = 1$ из выражения (4.43) получим

$$a_{\text{раб}} = 10 \lg 2 = 3 \text{ дБ.}$$

В полосе задерживания $a \neq 0$, $b = +p$, $Z_X = jx_X = j|Z_X|$.

Из выражения (4.44) получим

$$a_{\text{раб}} = \ln \left| \operatorname{ch} a + j \frac{1}{2} \left(\frac{|Z_X|}{R} - \frac{R}{|Z_X|} \right) \operatorname{sh} a \right|.$$

Имея в виду, что при больших затуханиях $\operatorname{ch} a = \operatorname{sh} a = \frac{1}{2} e^a$, найдем

$$a_{\text{раб}} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{4} e^{2a} + \frac{1}{4} \left(\frac{|Z_X|}{R} - \frac{R}{|Z_X|} \right)^2 \frac{1}{4} e^{2a} \right] =$$

$$= \ln \frac{1}{4} e^a \left(\frac{R}{|Z_X|} + \frac{|Z_X|}{R} \right) = a + 20 \lg \frac{1}{4} \left(\frac{R}{|Z_X|} + \frac{|Z_X|}{R} \right). \quad (4.45)$$

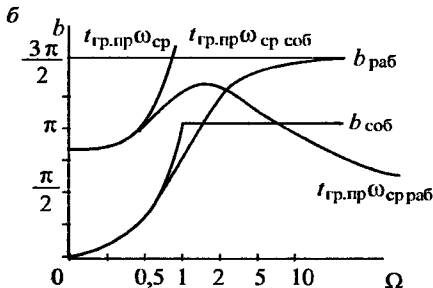
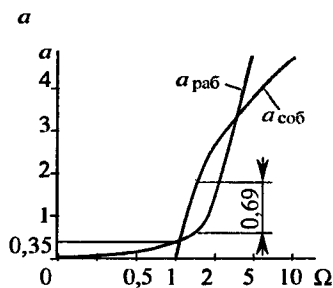


Рис. 4.17

Величина $\left(\frac{R}{|Z_X|} + \frac{|Z_X|}{R} \right)$ входящая в выражение (4.45), имеет минимум при $R = |Z_X|$ и равна 2. Этому соответствует наименьшее рабочее затухание в полосе задерживания:

$$a_{\text{раб}} = a - 20 \lg 2 = a - 6, \text{ дБ.}$$

Возможность такого уменьшения рабочего затухания фильтра по сравнению с собственным следует учитывать при расчете.

Таким образом, вследствие потерь в элементах фильтра и несогласованности его с нагрузками кривая затухания фильтра в реальных условиях отличается от кривой собственного затухания идеального фильтра (рис. 4.17, а).

Влияние несогласованности на фазовый сдвиг. Несогласованность фильтра с нагрузкой вызывает также изменение частотных зависимостей фазового коэффициента b и группового времени прохождения $t_{\text{гр.пр}}$ по сравнению с собственными параметрами.

Вспользуемся выражением (7.42) и определим рабочий фазовый сдвиг для частот полосы пропускания:

$$g_{\text{раб}} = \ln \left[\cos b + j \frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right) \sin b \right].$$

Рабочий фазовый сдвиг $b_{\text{раб}}$ есть угол комплексного числа, стоящего под знаком логарифма.

$$b_{\text{раб}} = \arctg \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{Z_X} + \frac{Z_X}{R} \right) \operatorname{tg} b \right]; \quad t_{\text{гр.пр}} = t_{\text{гр.пр.раб}} = \frac{db_{\text{раб}}}{d\omega}. \quad (4.46)$$

В частности, для фильтра типа k , выполненного по схеме Т, при $R_H = R$

$$Z_X = R\sqrt{10 - \Omega^2}; \quad \sin \frac{b}{2} = \Omega; \quad \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2}};$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}} = \frac{2\Omega\sqrt{1 - \Omega^2}}{1 - 2\Omega^2}.$$

Подставляя эти значения в выражение (4.46), получим

$$b_{\text{раб}} = \operatorname{arctg} \frac{(2 - \Omega^2)\Omega}{1 - 2\Omega^2}. \quad (4.47)$$

На рис. 4.17, б приведены рабочие характеристики $b_{\text{раб}}(\Omega)$ и $t_{\text{гр.пр}} \omega_{\text{ср. раб}}(\Omega)$ для ФНЧ, существенно отличающиеся от соответствующих собственных характеристик.

4.5. Фильтры типа m

Рассмотренные выше электрические фильтры типа k имеют два существенных недостатка. Первым из них является медленный рост затухания фильтров на частотах полосы задерживания, вторым — значительная зависимость их характеристических сопротивлений от частоты, не позволяющая достаточно точно согласовать фильтры с нагрузками на всех частотах полосы пропускания, вследствие чего затухание фильтра на этих частотах возрастает. Таким образом, фильтры типа k можно применять при невысоких требованиях к ослаблению нежелательных частот и согласованию.

Качественным следует считать фильтр, имеющий активное и независящее от частоты характеристическое сопротивление в полосе пропускания и достаточное постоянное затухание в полосе задерживания. Приближением к этому идеалу в известной степени являются комбинированные фильтры, содержащие звенья типа m . Принцип устройства таких фильтров рассмотрим на примере ФНЧ. Преобразованием частоты все полученные результаты можно перенести на ФВЧ, ПФ и РФ.

Получение большего затухания на частотах, близких к частоте среза. Большее затухание, чем от ФНЧ (рис. 4.18, а), на частотах, близких к частоте среза, можно получить введением в схему ФНЧ

резонансных ветвей, обрывающих или шунтирующих цепь тока на резонансной частоте (рис. 4.18, б и в). Резкое увеличение затухания цепи на частоте резонанса, которую обозначим ω_p , называют всплеском затухания. Применяя математическую терминологию, часто всплеск называют полюсом затухания. Изменяя частоту резонансов контуров, включенных в схему фильтра, можно менять соответственно требованиям крутизну кривой затухания.

На рис. 4.18, б приведена схема последовательно-производного полувзена типа m , а на рис. 4.18, в — параллельно-производного полувзена типа m . Смысл этих названий ясен из рисунков. На рис. 4.18, б и в показано также, какими должны быть значения элементов схемы. Вывод соответствующих выражений дается ниже.

Частотные зависимости затухания исходного фильтра, называемого в этом случае прототипом, и нового фильтра — производного фильтра типа m , приведены на рис. 4.18, г и д.

Собственное затухание фильтра типа m , кроме всплеска, характерно еще уменьшением своего значения на угловых частотах, превышающих резонансную частоту ω_p . Это объясняется тем, что на указанных частотах оба сопротивления, образующие схему фильтра, представляют собой реактивные сопротивления одного знака (рис. 4.18, е), так как сама схема преобразуется в делитель напряжения и теряет свойст-

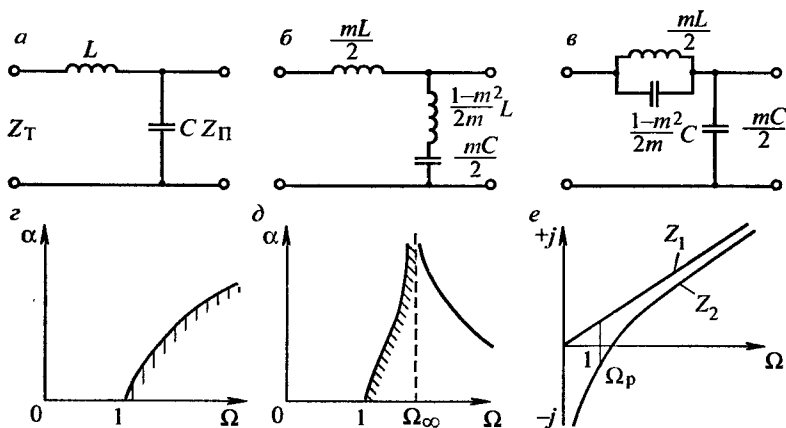


Рис. 4.18

ва фильтра. Рабочее затухание звена типа m при нагрузке его на активное сопротивление после некоторого уменьшения растет.

Фильтры типа m вследствие малого затухания, обеспечиваемого ими в глубине полосы задерживания, большей частью применяют не самостоятельно, а в комбинации с фильтрами типа k .

На рис. 4.19 приведены варианты схем и частотная зависимость затухания ФНЧ, составленного из полузвеньев типов k и m . Затухание имеет достаточную крутизну вблизи $\omega_{\text{ср}}$ и характеризует определенное затухание, вносимое ФНЧ токам всех частот полосы пропускания.

Однако для получения затухания комбинированного фильтра, равного сумме затуханий фильтров типов k и m , оба фильтра должны быть рассчитаны на одну и ту же частоту среза и иметь одинаковые характеристические сопротивления в месте соединения. В противном случае вследствие несогласованности увеличится затухание комбинированного фильтра в полосе пропускания. Согласование характеристических сопротивлений фильтров типа m с фильтрами типа k осуществляется специальным подбором их элементов.

Подбор элементов фильтров типа m . Комбинированный фильтр, частотная зависимость затухания которого приведена на рис. 4.19, β , можно получить цепочечным соединением полузвена типа k с последовательно-производным (рис. 4.19, a) или параллельно-производным (рис. 4.19, b) полузвеном типа m .

В первом случае фильтр строят по несимметричной схеме Π , во втором случае — по несимметричной схеме T . В месте соединения полу-

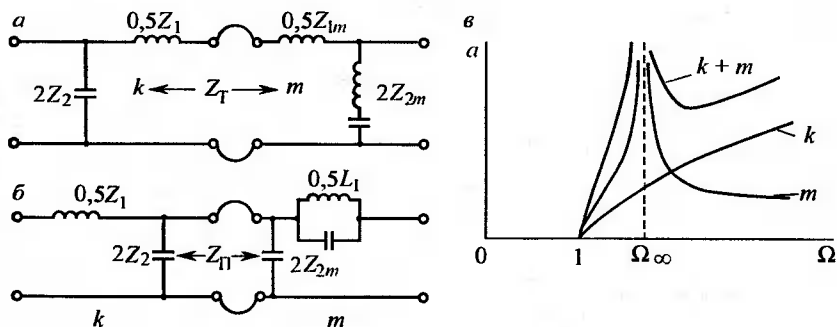


Рис. 4.19

звеньев необходимо согласовать их характеристические сопротивления. В схеме (см. рис. 4.19, а) должны быть согласованы сопротивления $Z_{\tau k}$ и $Z_{\tau m}$, а в схеме (см. рис. 4.19, б), имеющей ту же характеристику затухания, сопротивления $Z_{\text{пк}}$ и $Z_{\text{пм}}$.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять элементы полузвена типа m для равенства сопротивлений $Z_{\tau k}$ и $Z_{\tau m}$ на всех частотах.

Очевидно, что в соответствии с выражением (4.1) должно быть

$$Z_1 Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right) = Z_{1m} Z_{2m} \left(1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}} \right),$$

где Z_{1m} и Z_{2m} — сопротивления, образующие схему m .

Поскольку сопротивления Z_1 и Z_{1m} одного знака, положим

$$Z_{1m} = mZ_1, \quad (4.48)$$

где m — постоянное число,

$$\text{тогда} \quad Z_2 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right) = mZ_{2m} \left(1 + \frac{mZ_1}{4Z_{2m}} \right),$$

$$\text{откуда} \quad Z_{2m} = \frac{Z_{2m}}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m}, \quad (4.49)$$

что и дает значения элементов, указанных на схеме, приведенной на рис. 4.18, б.

Формулы (4.48) и (4.49) показывают, что согласование характеристических сопротивлений возможно при различных значениях коэффициента m , который, однако, не должен быть больше единицы. В противном случае Z_{2m} содержит отрицательное сопротивление. При $m = 1$ получаем фильтр типа k .

Для определения элементов параллельно-производного полузвена следует приравнять сопротивления $Z_{\text{пк}}$ и $Z_{\text{пм}}$. Положив

$$Z_{2m} = \frac{Z_2}{m}, \quad (4.50)$$

найдем

$$\frac{1}{Z_{1m}} = \frac{1}{mZ_1} + \frac{1}{Z_2} \frac{1-m^2}{4m} \quad (4.51)$$

(см. рис. 4.18, в).

Затухание и фазовый сдвиг звена типа m . Численные значения затухания и фазового сдвига полувзвена ФНЧ типа m на различных частотах, как и всякой другой цепочечной схемы, определяются выражением (4.3).

$$\text{При } Z_{1m} = mZ_1 \text{ и } Z_{2m} = \frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m}$$

получаем
$$\text{sh} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{m^2 Z_1}}{\sqrt{4Z_2 \left[1 + \frac{Z_1}{4Z_2} (1-m^2) \right]}} = \pm \frac{j m \Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2 (1-m^2)}}. \quad (4.52)$$

Если Z_1 и Z_2 представляют собой реактивные сопротивления разных знаков, то из формулы (4.52) следует:

при $0 < \omega < \omega_{cp}$ $a = 0$;

при $\omega_{cp} < \omega < \omega_{\infty}$
$$\text{ch} \frac{a}{2} = \frac{m \Omega}{\sqrt{|1 - \Omega^2 (1-m^2)|}}. \quad (4.53)$$

Обозначив
$$\frac{m \Omega}{\sqrt{|1 - \Omega^2 (1-m^2)|}} = X, \text{ получаем}$$

$$a = 40 \lg |X + \sqrt{X^2 - 1}|, \text{ дБ}. \quad (4.54)$$

После частоты ω_{∞} знаки сопротивлений Z_{1m} и Z_{2m} становятся одинаковыми, и в соответствии с выражением (4.52) затухание следует рассчитывать по формуле

$$\text{sh} \frac{a}{2} = \frac{m \Omega}{\sqrt{|1 - \Omega^2 (1-m^2)|}}; \quad a = 40 \lg (X + \sqrt{X^2 + 1}). \quad (4.55)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ величина
$$\text{sh} \frac{a}{2} \rightarrow \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Из выражения (4.55) видно, что $a \rightarrow \infty$ при $\Omega^2 = \Omega_{\infty}^2 = \frac{1}{1-m^2}$.

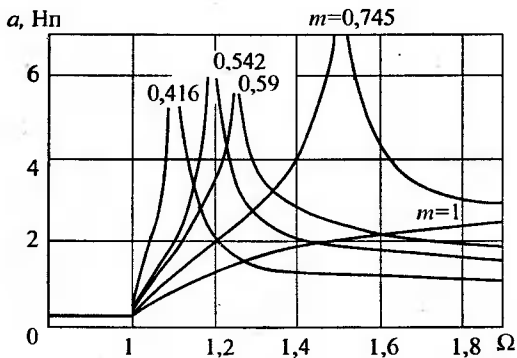


Рис. 4.20

Отсюда $\omega_{\infty} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{1-m^2}}$; $m = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_{\infty}^2}}$.

Таким образом, изменяя коэффициент m , можно перемещать максимальное затухания по оси частот. Общий характер зависимости a от Ω и m показан на рис. 4.20.

Рассмотрим зависимость от частоты фазового сдвига:

– при $0 < \omega < \omega_{\text{ср}}$

$$\sin \frac{b}{2} = \frac{m\Omega}{\sqrt{1-\Omega^2(1-m^2)}}; \quad a=0; \quad (4.56)$$

– при $\omega_{\text{ср}} < \omega < \omega_{\infty}$ $b = \pi$;

– при $\omega > \omega_{\infty}$ $b = 0$;

Зависимость $b(\Omega)$ иллюстрируется рис. 4.21.

Частотные зависимости затухания и фазового сдвига для звеньев типа m сложнее, чем для звеньев типа k , и определяются величиной m .

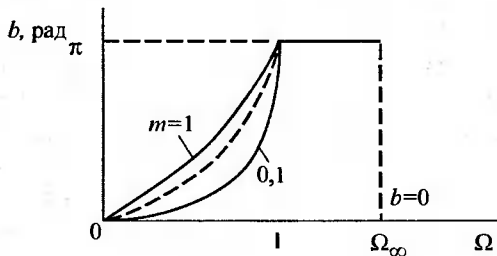


Рис. 4.21

Характеристические сопротивления фильтра типа m . Каждое полужвено фильтра типа m имеет два характеристических сопротивления, одно из которых является характеристическим сопротивлением прототипа. Так, согласно формуле (4.18) последовательно производное полужвено ФНЧ со стороны Т имеет характеристическое сопротивление:

$$Z_{Tm} = Z_{Tk} = R\sqrt{1 - \Omega^2}.$$

Найдем его характеристическое сопротивление со стороны П по общей формуле (4.2):

$$\begin{aligned} Z_{\Pi m} &= \frac{\sqrt{Z_{1m}Z_{2m}}}{\sqrt{1 + \frac{Z_{1m}}{4Z_{2m}}}} = \frac{\sqrt{mZ_1 \left(\frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m} \right)}}{\sqrt{1 + \frac{mZ_1}{4 \left(\frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m} \right)}}} = \frac{\sqrt{Z_1Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}(1-m^2)}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \frac{m^2}{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}(1-m^2)}}} = \\ &= Z_{Tk} \left[1 + \frac{Z_1}{4Z_2}(1-m^2) \right] = \frac{R}{\sqrt{1-\Omega^2}} \left[1 - \Omega^2(1-m^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Аналогичное выражение можно получить для Z_{Tm} параллельно-производного полужвена:

$$Z_{Tm} = \frac{R\sqrt{1 - \Omega^2}}{[1 - \Omega^2(1 - m^2)]}. \quad (4.58)$$

Зависимости характеристических сопротивлений фильтра типов m от относительной частоты при различных значениях коэффициента m приведены на рис. 4.22. Из кривых видно, что при $m = 0,59 \dots 0,61$ характеристические сопротивления меньше всего зависят от Ω в полосе пропускания. Это обстоятельство используют для согласования фильтров с нагрузками включением на входе и выходе многозвенных фильтров полужвенов типа m с $m = 0,59$ или близким к нему значением.

В полосе непропускания на частоте ω_ω сопротивление $Z_{Tm} \rightarrow \infty$, а $Z_{\Pi m} = 0$, так как $\frac{Z_{Tm}}{R} = \frac{R}{Z_{\Pi m}}$.

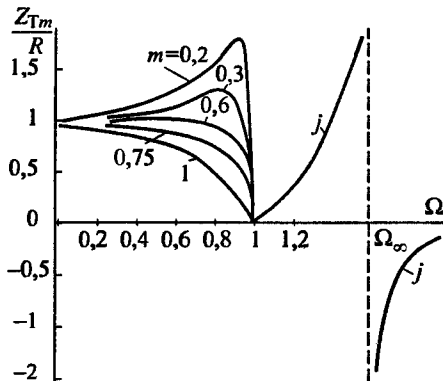


Рис. 4.22

Из выражений (4.52), (4.56) и (4.57) следует, что при $m = 1$, $\Omega_\infty = \infty$ фильтр типа m преобразуется в фильтр типа k . Таким образом, фильтр типа k можно считать частным случаем фильтра типа m .

Переход от ФНЧ типа m к ФВЧ или полосовым фильтрам можно осуществить преобразованием частоты. Следует отметить, что при переходе от ФНЧ к ФВЧ заменой $\frac{\omega}{\omega_{cp}}$ на $\frac{\omega_{cp}}{\omega}$ в случае фильтра типа m

в одноэлементном двухполюснике изменяется знак реактивного сопротивления. Второе сопротивление, образуемое двухэлементным двухполюсником, не меняется. Схемы ФВЧ и ПФ типа m , построенные в соответствии с выражениями (4.48)—(4.51), приведены на рис. 4.23, а и б.

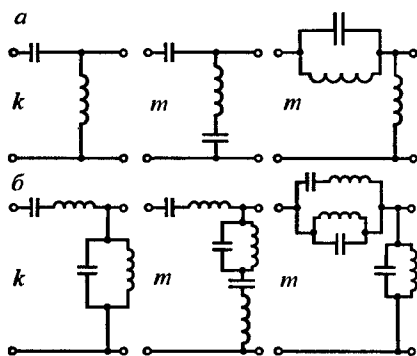


Рис. 4.23

4.6. Требования к электрическим фильтрам.

Пример расчета

Электрический фильтр должен пропускать без потерь электрические колебания с одними частотами (например, ФНЧ при $0 < \Omega < 1$) и оказывать сопротивление колебаниям с другими частотами. Для того чтобы фильтр на частотах полосы пропускания был приспособлен к отбору энергии от генератора и передаче ее нагрузке, он должен иметь активное и не зависящее от частоты в этом диапазоне характеристическое сопротивление.

На частотах полосы задерживания фильтр должен иметь постоянное затухание, соответствующее заданному ослаблению токов со всеми частотами полосы задерживания.

Поскольку электрические фильтры имеют зависящее от частоты характеристическое сопротивление и не дают постоянного затухания в полосе задерживания, при проектировании каждого фильтра следует устанавливать допустимые отклонения характеристик фильтра $Z_X(\Omega)$ в полосе пропускания (у ФНЧ при $0 < \Omega < 1$) и $a(\Omega)$ в полосе задерживания (у ФНЧ при $1 < \Omega < \infty$) от идеальных.

Характеристики фильтров по сопротивлению. Неравенство характеристического сопротивления фильтра Z_X сопротивлению нагрузки R_H на каких-либо частотах полосы пропускания приводит к появлению на этих частотах дополнительного затухания Δa , значение которого оценивается выражением (4.44):

$$\Delta a = a_{\text{раб}} = 20 \lg \frac{1}{2} \left(\frac{R_H}{Z_X} + \frac{R_X}{Z_H} \right)$$

Эта величина равна нулю, если $R_H = Z_X$.

Из выражения (4.44) следует, что при проектировании фильтров необходимо добиваться возможного улучшения согласования его с нагрузкой. Последнее достигается двумя способами. Первым простейшим из них является расширение полосы пропускания фильтра по сравнению с полосой частот, которая должна быть пропущена фильтром с малым затуханием, и выбор оптимального сопротивления фильтра $Z_X(0)$ в соответствии с рис. 4.24, а (на примере фильтра ФНЧ, выполненного на схеме Т). Как видно из рисунка, сопротивление фильтра точно равно сопротивлению нагрузки R_H на некоторой средней частоте

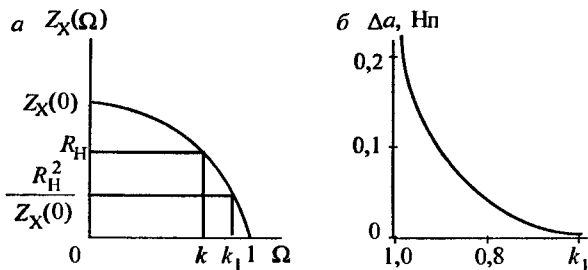


Рис. 4.24

те полосы пропускания $\Omega = k$. На краях полосы пропускания на частотах $\Omega = 0$ и $\Omega = k_1$ сопротивление фильтра в $Z_X(0) / R_H$ раз больше, или в $Z_X(0) / R_H$ раз меньше сопротивления нагрузки. Такой выбор $Z_X(0)$ при заданном R_H является оптимальным, поскольку обеспечивает наименьшее увеличение затухания при данном значении величины k_1 , называемой коэффициентом использования полосы пропускания. Чем точнее мы хотим согласовать фильтр с нагрузкой, тем меньшей следует выбирать величину k_1 .

Найдем связь между величинами $Z_X(0) / R_H$ и k_1 . Для фильтра типа k , выполненного по схеме Т,

$$Z_T(\Omega) = Z_X(\Omega) = Z_X(0)\sqrt{1 - \Omega^2}.$$

При $\Omega = k_1$

$$Z_X(k_1) = Z_X(0)\sqrt{1 - k_1^2} = R_H^2 / Z_X(0).$$

Отсюда
$$Z_X(0) / R_H = 1 / \sqrt{1 - k_1^2}. \quad (4.59)$$

Таким образом, для фильтра типа k при оптимальном выборе $Z_X(0)$ наибольшее рабочее затухание в полосе пропускания в соответствии с выражением (4.44).

$$\Delta\alpha = 20 \lg \frac{1}{2} \left(\frac{Z_X(0)}{R_H} + \frac{R_H}{Z_X(0)} \right) = 20 \lg \left[\frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2}} + \sqrt{1 - k_1^2} \right]. \quad (4.60)$$

Соответствующая выражению (4.59) зависимость $\Delta\alpha$ от k_1 приведена на рис. 4.24, б. Она позволяет по заданному значению $\Delta\alpha$ найти

необходимое значение k_1 . Как видно из этой зависимости, фильтры типа k дают хорошее согласование с нагрузкой и малое значение Δa только при весьма малом использовании полосы пропускания: $k_1 < 0,8$.

О фильтрах типа k и других, зависимость сопротивления от частоты которых подобна зависимости, приведенной на рис. 4.24, *a*, говорят, что они являются фильтрами первого класса по характеристическому сопротивлению.

Вторым более эффективным способом улучшения согласования фильтра с нагрузкой является построение фильтра с сопротивлением, как у фильтра типа m (рис. 4.25, *a*) (фильтры второго класса по характеристическому сопротивлению). Такой фильтр, как и фильтр типа k , можно рассчитывать на сопротивление $Z_X(0)$, равное R_H , или на оптимальное сопротивление, при котором можно получить равномерное отклонение $Z_X(0)$ от R_H в полосе частот $0 < \Omega < k_1$.

Решение задачи определения оптимального значения $Z_X(0)$ в этом случае:

$$\frac{Z_X(0)}{R_H} = \sqrt{\frac{2\sqrt{1-k_1^2}}{1+\sqrt{1-k_1^2}}}. \quad (4.61)$$

Как видно из выражения (4.60), фильтр второго класса по сопротивлению $\frac{Z_X(0)}{R_H}$ также можно представить в виде функции от k_1 .

Это позволяет связать Δa с k_1 . Соответствующая зависимость для оптимального $Z_X(0)$ иллюстрируется рис. 4.25, *б*.

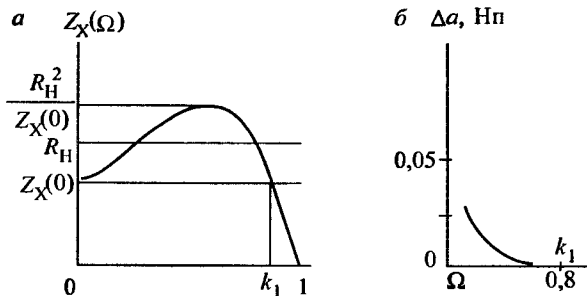


Рис. 4.25

Характеристика фильтров по затуханию. Всякий фильтр, в том числе и фильтр типа k , на некоторых частотах может дать неограниченно большое затухание. Необходимо, однако, чтобы некоторое минимальное заданное затухание a_{\min} поддерживалось постоянным на всех частотах полосы задерживания. Вследствие несогласованности Z_X и R_H в полосе задерживания в соответствии с формулой (4.45) $a_{\text{раб}}$ меньше собственного затухания a на 6 дБ. Это обстоятельство должно быть учтено при расчете фильтра. Требования к затуханию фильтра (как и при обеспечении характеристик фильтра по сопротивлению) выполняются ограничением полосы его пропускания и усложнением схемы.

На рис. 4.26, а на примере фильтра типа k показано, что затухание a_{\min} обеспечивается фильтром на всех относительных угловых частотах, превышающих величину k_2 , называемую коэффициентом использования полосы задерживания. Более высокое затухание вносится тем же фильтром только при меньшем использовании полосы задерживания.

Применение комбинированных фильтров позволяет полнее использовать полосу задерживания или при том же использовании получить большее затухание (рис. 4.26, б). Приближением всплесков затухания к частоте среза увеличивается использование полосы задерживания, но уменьшается a_{\min} и наоборот (см. рис. 4.20).

На практике приходится составлять фильтры, содержащие до двух, трех и более звеньев с разными значениями коэффициента m . Правильный выбор этих значений является одной из основных задач конструирования фильтра. Имеются аналитические методы расчета фильтров, основанные на использовании теории наилучших приближений и применяющиеся при проектировании фильтров многоканальной связи, в которой требования к фильтрам наиболее высоки. Однако наряду с методами аналитического синтеза фильтры рассчитывают и методом подбора.

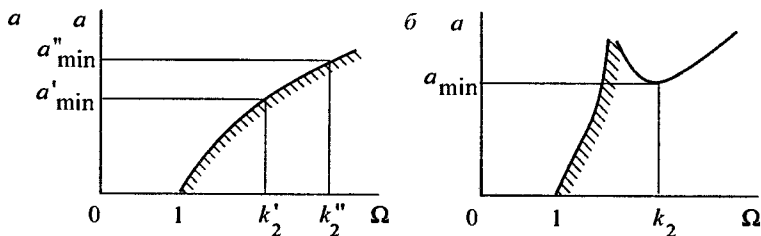


Рис. 4.26

Пример расчета фильтра методом подбора. Пусть требуется рассчитать фильтр для работы между генератором и приемником с сопротивлениями R_H по 600 Ом, который пропускал бы все токи частотами ниже 2400 Гц с затуханием не более 1,3 дБ и оказывал бы токам с частотами свыше 3200 Гц затухание не менее 45 дБ. Фильтр будем рассчитывать по формулам, определяющим его характеристические параметры, учитывая влияние несогласованности фильтра с нагрузками. Последнее ведет к увеличению затухания фильтра в полосе пропускания, особо возрастающего вблизи частоты среза, и к уменьшению затухания в полосе задерживания до 6 дБ. Поэтому расчет следует вести по кривой затухания 1 (рис. 4.27, а) на $a_{\min} = 45 + 6 = 51$ дБ.

Не учитывая затухания, возникающего вследствие потерь в элементах фильтра, определим коэффициент использования полосы пропускания k_1 по кривой (см. рис. 4.24, б).

При $\Delta a = 1,3$ дБ, $k_1 = 0,94$; $f_{cp} = 2400/0,94 = 2550$ Гц.

Соответствующее k_1 оптимальное сопротивление найдем по формуле (4.58)

$$Z_X(0) = \frac{R_H}{\sqrt[4]{1 - k_1^2}} = \frac{600}{\sqrt[4]{1 - (0,94)^2}} = 1030, \text{ Ом.}$$

Перейдем к обеспечению характеристики фильтра на частотах полосы задерживания. Поскольку для получения затухания в глубине задерживания необходимо включение в схему фильтра звена или полузвена типа k , рассчитаем элементы последнего по формулам (4.22):

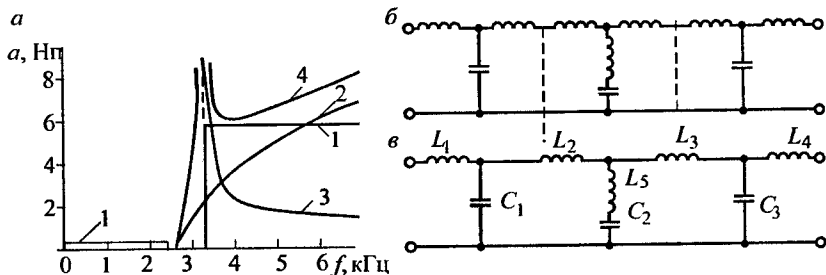


Рис. 4.27

$$L = \frac{R}{\pi f_{cp}} = \frac{Z_X(0)}{\pi f_{cp}} = \frac{1030}{\pi \cdot 2550} = 0,128 \text{ Гн.}$$

$$C = \frac{1}{\pi f_{cp} Z_X(0)} = \frac{1}{\pi \cdot 2550 \cdot 1030} = 0,121 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

По формуле $a = 40 \lg \left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1} \right)$ построим характеристику

затухания звена типа k .

Задавая частоты, лежащие в полосе задерживания, получим

f	2600	2800	3000	3200	3600	4400	6000
$\Omega = f/f_{cp}$	1,019	1,098	1,176	1,255	1,412	1,725	2,353
a , дБ	3,43	7,63	10,17	12,15	15,27	19,83	26,06

Сравнение затухания одного звена типа k с требуемым показывает, что в схему фильтра следует включить два звена; затухание этих звеньев характеризует кривая 2 (см. рис. 4.27, a).

Дальнейшее приближение кривой затухания фильтра к заданной можно получить, включив в схему фильтра звено типа m . Поскольку наибольшее приращение затухания должно быть на частоте $f = 3200$ Гц, примем эту частоту за f_{∞} .

$$\text{Рассчитаем коэффициент } m = \sqrt{1 - \frac{f_{cp}^2}{f_{\infty}^2}} = \sqrt{1 - \frac{(2550)^2}{(3200)^2}} = 0,6.$$

По формулам (4.54) и (4.55) для $m = 0,6$ найдем затухание звена:

f	2600	2800	3000	3200	3600	4400	6000
$\Omega = f/f_{cp}$	1,019	1,098	1,176	1,255	1,412	1,725	2,353
a , дБ	5,86	15,76	23,74	—	21,82	16,36	13,86

Из кривой 4 (2 + 3) (см. рис. 4.27, a) видно, что наименьшее суммарное затухание будет на $f = 3500$ Гц: $a > 51$ дБ. Следовательно, заданные требования удовлетворены. Схема этого фильтра приведена на рис. 4.27, b .

Объединяя индуктивности звеньев типов k и m , получим схему (рис. 4.27, в), в которой в соответствии с параметрами звена типа m

$$L_1 = L_4 = \frac{L}{2} = \frac{0,128}{2} \text{ Гн}; \quad L_2 = L_3 = \frac{L}{2}(1+m) = 0,1024 \text{ Гн};$$

$$L_5 = \frac{L}{2} \frac{1}{m} = 0,068 \text{ Гн}.$$

$$C_1 = C_3 = 0,121 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad C_2 = \frac{C}{2} m = 0,0363 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

4.7. Мостовые фильтры

Условия пропускания и задерживания мостовых фильтров. В устройствах автоматики, телемеханики и связи находят применение мостовые реактивные фильтры, которые отличаются от цепочечных более разнообразными частотными характеристиками и позволяют добиваться существенного улучшения частотной характеристики затухания. Условия пропускания и задерживания мостовых фильтров отличаются от цепочечных. Если цепочечный фильтр не пропускает колебания благодаря обрыву или шунтированию цепи, то мостовой задерживает колебания при уравновешивании моста.

Собственные параметры передачи симметричной мостовой, или что то же скрещенной схемы (рис. 4.28, а) определяются следующим образом:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2}; \quad \text{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}.$$

$$\text{Так как } g = a + jb, \text{ то } \text{th} \frac{g}{2} = \frac{\text{sh } a + j \sin b}{\text{ch } a + \cos b} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (4.62)$$

Если Z_1 и Z_2 представляют собой реактивные сопротивления разных знаков, то из выражения (4.62) следует:

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \pm j \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}; \quad \frac{\text{sh } a}{\text{ch } a + \cos b} = 0; \quad a = 0;$$

$$\frac{\sin b}{1 + \cos b} = \text{tg} \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

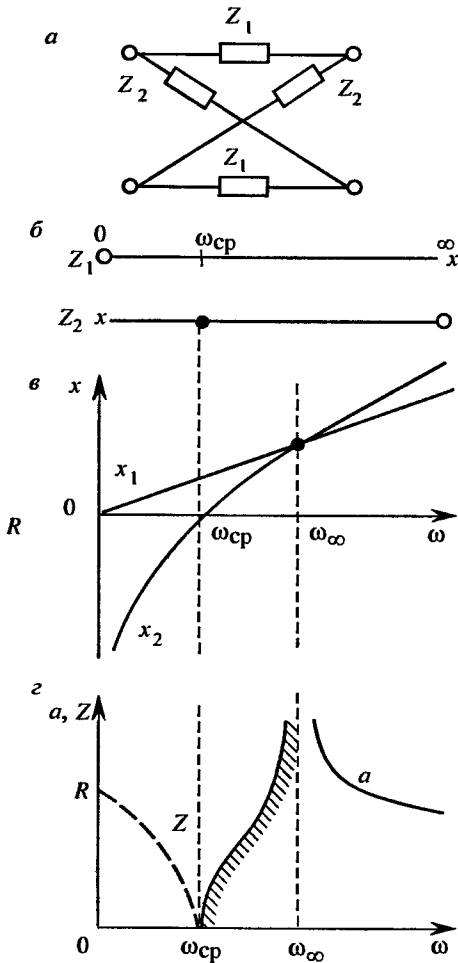


Рис. 4.28

Мостовая схема, составленная из реактивных сопротивлений разного знака, пропускает сигналы без затухания.

Если Z_1 и Z_2 — реактивные сопротивления одного знака, то из выражения (4.62)

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + \cos b} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}; \quad \frac{\sin b}{\operatorname{ch} a + \cos b} = 0.$$

Возможны два варианта решения полученной системы:

$$1. \quad b=0; \quad \cos b=1; \quad \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a+1} = \operatorname{th} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Поскольку гиперболический тангенс (th) не может быть больше единицы, данное решение возможно при $|x_1| < |x_2|$.

$$2. \quad b=\pm\pi; \quad \cos b=-1; \quad \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a-1} = \operatorname{cth} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Так как cth больше единицы, то $|x_1| > |x_2|$.

Если $Z_1 = Z_2$; $\operatorname{th} \frac{a}{2} = \operatorname{cth} \frac{a}{2} = 1$, то $a \rightarrow \infty$, что соответствует полному равновесию плеч моста.

Для получения фильтрующих свойств Z_1 и Z_2 следует выбрать таким образом, чтобы на частотах полосы пропускания они были реактивными сопротивлениями разных знаков, а на частотах полосы задерживания — реактивными сопротивлениями одного знака.

Простейший мостовой фильтр нижних частот (рис. 4.28, б).
Для этого фильтра

$$Z_1 = j\omega L_1; \quad Z_2 = \frac{jL_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2).$$

На рис. 4.28, б, в и г соответственно даны распределения полюсов, и нулей функций сопротивлений Z_1 и Z_2 , зависимости их от частоты и характеристики фильтра. При равенстве сопротивлений Z_1 и Z_2 мост уравновешен и затухание фильтра $a = \infty$. По сопротивлению этот фильтр подобен фильтру типа k , затухание же его соответствует затуханию звена типа m . При $m = 1$ затухание соответствует таковому у фильтра типа k .

Характеристики фильтра по сопротивлению и затуханию определяются выражениями

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{L_1 L_2 (\omega_{\text{ср}}^2 - \omega^2)} = R \sqrt{1 - \Omega^2},$$

где $R = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}$; $\Omega = \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}$.

Сравним с выражением (4.18)

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{j\omega L_1}{\frac{jL_2}{\omega}(\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2)}} = \frac{m\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}},$$

где $m = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$.

Поскольку затуханию $a = \infty$ соответствует значение $\operatorname{th} \frac{g}{2} = 1$, постольку относительная частота Ω удовлетворяет условию

$$\frac{m\Omega_{\infty}}{\sqrt{\Omega_{\infty}^2 - 1}} = 1 \quad \text{или} \quad m^2 = 1 - \frac{1}{\Omega_{\infty}^2}.$$

Из характеристик фильтра следует, что значение Ω_{∞} определяется соотношением между значениями L_1 и L_2 , а входящий в выражение для $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ коэффициент m имеет то же значение, что и для цепочечных фильтров типа m .

Вид характеристик мостового ФНЧ указывает на эквивалентность его однозвенному фильтру типа m (рис. 4.29, а и б). Схемы, приведенные на этих рисунках, по условиям передачи полностью эквивалентны друг другу на всех частотах, но физическая сущность изменения условий передачи в них различна. Например, всплеск по затуханию в мостовой схеме получается вследствие равенства сопротивлений Z_1 и Z_2 и

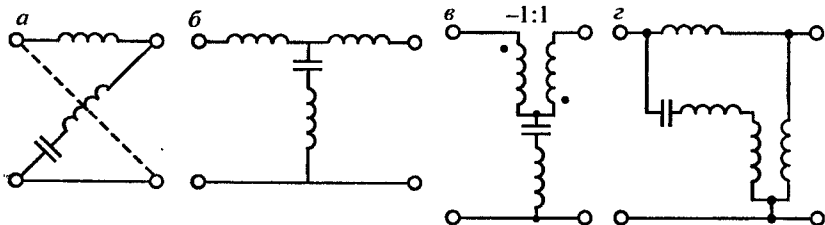


Рис. 4.29

уравновешивания моста, а в цепочечной схеме Т — в результате обращения Z_2 в нуль и закорачивания тем самым тракта передачи. Таким образом, мостовые фильтры ФНЧ имеют цепочечный эквивалент в виде производных звеньев типа m , которые при $m = 1$ преобразуются в звенья типа k .

Сравнение схем мостового ФНЧ и последовательно-производного звена типа m ФНЧ показывает, что они имеют одинаковые свойства, но содержат различное число сопротивлений: в схему моста входят четыре сопротивления, а в схему Т — только три. Это обстоятельство заставляет при изготовлении фильтров отказаться от схемы моста со сложными реактивными сопротивлениями в каждом плече и выполнять фильтры по другим эквивалентным схемам (рис. 4.29, *в* и *г*). Любую из схем (см. рис. 4.29) можно рассчитать как по формулам для звеньев типа m , так и по формулам, определяющим параметры передачи моста.

Выполнение фильтра по мостовой схеме требует более точного по сравнению с фильтром, построенным по цепочечной схеме, подбора индуктивностей и емкостей. Вследствие этого иногда отдают предпочтение цепочечным схемам.

Простейший фильтр верхних частот (рис. 4.30, *а*). Для этого

$$\text{фильтра } Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}; \quad Z_2 = \frac{jL_2}{\omega} (\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2).$$

На рис. 4.30, *б* и *в* приведены схемы расположения полюсов и нулей соответственно для Z_1 и Z_2 , зависимости их от частоты и характеристики фильтра.

Простейший мостовой ПФ. Схема фильтра и его характеристики приведены на рис. 4.31 (*а*, *в*). В отличие от простейших мостовых ФНЧ и ФВЧ простейший мостовой ПФ эквивалентен ПФ типа k . Его затухание не имеет всплесков. На практике мостовые полосовые фильтры строят по схеме, приведенной на рис. 4.31, *г*.

Построение мостовых фильтров с более совершенными характеристиками. Затухания ФНЧ, построенных по схемам (см. рис. 4.29), имеют один всплеск и затем уменьшаются. Для получения более постоянного затухания в какой-либо полосе частот в случае выполнения фильтра по цепочечной схеме следует последовательно первому звену включить второе с такой же частотой среза, но имеющего всплеск затухания

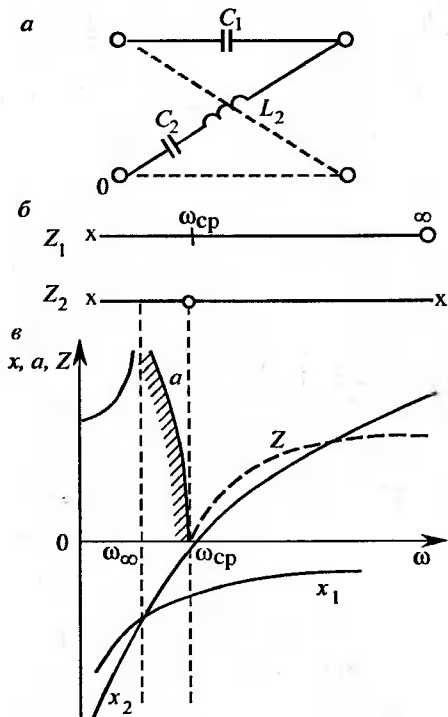


Рис. 4.30

хания на другой частоте. При выполнении фильтра по мостовым схемам тот же эффект увеличения затухания в полосе задерживания может быть достигнут усложнением сопротивлений Z_1 и Z_2 . Это является одной из особенностей мостовых схем.

Рассмотрим схему (рис. 4.32, а). Она является схемой ФНЧ, но с более сложными образующими его сопротивлениями. В данном случае

$$Z_1 = \frac{jL_1}{\omega} (\omega^2 - \omega_{\Pi}^2), \quad Z_2 = j\omega L_2 \frac{\omega^2 - \omega_{cp}^2}{\omega^2 - \omega_{\Pi}^2},$$

где ω_{Π} — резонансная угловая частота в полосе пропускания.

Распределение нулей и полюсов функции сопротивлений, а также зависимости $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$, $a(\omega)$, $Z_M(\omega)$ приведены на рис. 4.32, б, в и г.

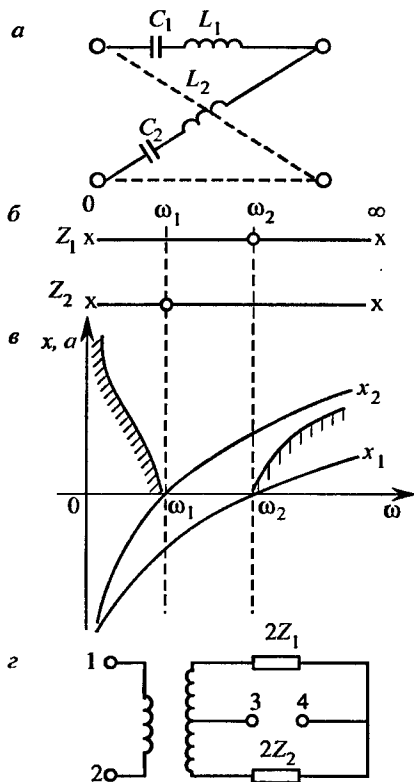


Рис. 4.31

Характеристики фильтра определяются выражениями:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{-L_1 L_2 (\omega^2 - \omega_{cp}^2)} = R \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad R = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}};$$

$$\text{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \frac{\omega^2 - \omega_{\pi}^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{cp}^2)}} = \frac{H_1 (\Omega^2 - a^2)}{\Omega \sqrt{\Omega^2 - 1}}; \quad (4.63)$$

$$H_1 = \omega_{cp} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}; \quad a = \frac{\omega_{\pi}}{\omega_{cp}}.$$

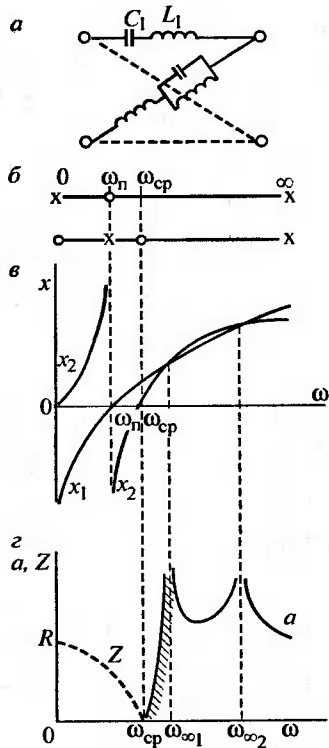


Рис. 4.32

Характеристика сопротивления этого фильтра по-прежнему подобна характеристике фильтра типа k , характеристика же его затухания соответствует двухзвенному фильтру типа m .

Таким образом, усложнение частотных зависимостей сопротивлений Z_1 и Z_2 введением в них резонанса на угловой частоте $\omega_{\text{п}}$, лежащей в полосе пропускания, эквивалентно добавлению в схему цепочечного фильтра звена типа m с другим значением коэффициента m , определяемым величиной a .

Для выявления возможности изменения свойств мостового фильтра по сопротивлению рассмотрим схему (рис. 4.33, а). Для нее

$$Z_1 = \frac{k_1 (\omega^2 - \omega_{\text{п}}^2)}{j\omega (\omega^2 - \omega_3^2)}; \quad Z_2 = \frac{k_2 \omega (\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2)}{j (\omega^2 - \omega_3^2)(\omega^2 - \omega_{\text{п}}^2)}.$$

Здесь зависимости сопротивлений Z_1 и Z_2 от частоты содержат резонансные частоты ω_n и ω_3 , где ω_3 — частота, лежащая в полосе задерживания (рис. 4.33, б). Зависимости $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$, $a(\omega)$, $Z_M(\omega)$ для этой схемы приведены на рис. 4.33, в и г.

Характеристики фильтра определяются выражениями:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{-k_1 k_2 \frac{\omega^2 - \omega_{cp}^2}{(\omega^2 - \omega_3^2)^2}} = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{H(\Omega^2 - \beta^2)} \quad (4.64)$$

где $H = \frac{\omega_{cp}}{j\sqrt{k_1 k_2}}$, $\beta = \frac{\omega_3}{\omega_{cp}}$.

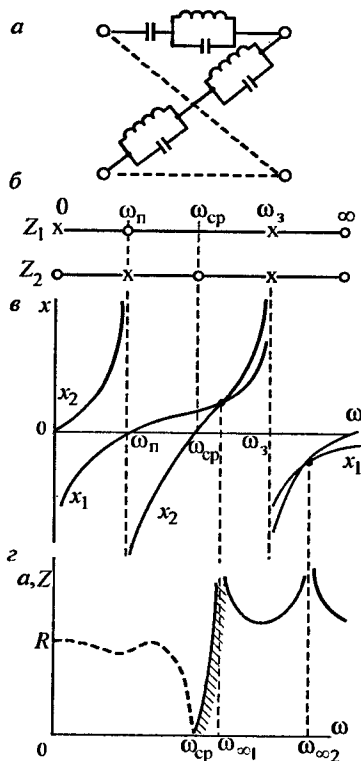


Рис. 4.33

Сравним с выражением (4.58), определяющим Z_{Tm} :

$$\operatorname{th} \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2} \frac{\omega^2 - \omega_{\Pi}^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{\text{ср}}^2)}} = \frac{H_1(\Omega^2 - \alpha^2)}{\Omega\sqrt{\Omega^2 - 1}};$$

$$H_1 = \omega_{\text{ср}} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}; \quad \alpha = \frac{\omega_{\Pi}}{\omega_{\text{ср}}}.$$

ФНЧ (см. рис. 4.33) имеет такую же характеристику затухания, что и фильтр (см. рис. 4.32). Усложнение сопротивлений Z_1 и Z_2 введением резонансов на угловой частоте ω_3 изменило характеристику этого фильтра по сопротивлению, превратив его в эквивалентное Z_{Tm} . В этом проявляется вторая особенность мостовых фильтров, заключающаяся в возможности изменения свойств фильтра по сопротивлению независимо от его свойств по затуханию, и наоборот. Для фильтров, выполненных по цепочечным схемам, это невозможно.

Как следует из формул (4.63) и (4.64), свойства фильтра по затуханию определяются резонансными угловыми частотами ω_{Π} для Z_1 и Z_2 , лежащими в полосе пропускания и называемыми контрольными частотами полосы пропускания, а свойства фильтра по сопротивлению — контрольными частотами ω_3 полосы задерживания.

Для получения необходимого затухания в полосе задерживания приходится строить многозвенные цепочечные схемы или мостовые схемы с многоэлементными сопротивлениями, для которых функция $\operatorname{th} \frac{g}{2}$ содержит несколько контрольных частот.

Все сказанное о мостовых ФНЧ при преобразовании частоты переносится на ФВЧ и ПФ. Например, для получения из схемы ФНЧ (см. рис. 4.24, б) равноценного по характеристикам ФВЧ следует во всех характеристических выражениях $\frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}$ заменить на $\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega}$, т. е. в качестве Z_1 вместо катушки применить конденсатор. Схема Z_2 при указанном преобразовании частот не меняется. ПФ можно получить, заменив в схеме (см. рис. 4.28, б) ω на $\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}$, т. е. включив в схему в качестве Z_1 вместо катушки колебательный контур и соответственно усложнив Z_2 . Совокупность схем полосовых мостовых фильтров не исчерпывается схемами, которые можно получить такими преобра-

зованиями из схем ФНЧ, однако установленные выше общие закономерности сохраняют силу для всех мостовых фильтров.

4.8. Полиномиальные фильтры LC

Полиномиальные фильтры LC строятся по цепочечным схемам двухсторонне нагруженных четырехполюсников.

Электрические фильтры с передаточными функциями вида

$$F(p) = \frac{1}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}, \quad (4.65)$$

где $p = j\omega$ называются полиномиальными.

При расчете электрических фильтров обычно задаются требованиями к амплитудно-частотной характеристике в виде требований к частотной зависимости рабочего затухания. Рабочее затухание в пределах полосы пропускания не должно превышать заданной величины $a_{p \max}$, а в пределах полосы задерживания фильтра не должны быть меньше заданного $a_{p \min}$. Нормированная характеристика рабочего затухания фильтра низких частот приведена на рис. 4.34.

При синтезе фильтров для упрощения вычислений широко используют нормирование сопротивлений по заданному нормирующему R_0 и частоты ω по нормирующей частоте ω_0 , т.е.

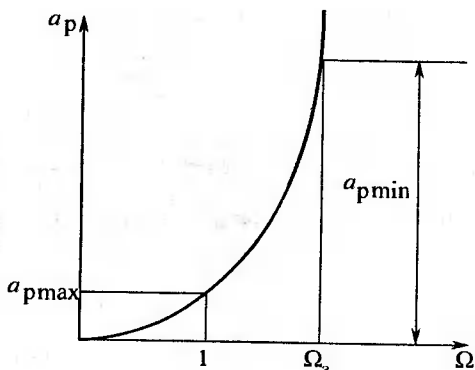


Рис. 4.34

$\frac{Z}{R_0} = Z_H$ — нормированное комплексное сопротивление;

$\frac{\omega}{\omega_0} = \Omega$ — нормированная частота;

$\frac{\omega_0 L}{R_0} = L_H$ — нормированная индуктивность; (4.66)

$\omega_0 C R_0 = C_H$ — нормированная емкость; (4.67)

$\frac{R}{R_0} = R_H$ — нормированное резистивное сопротивление. (4.68)

В качестве нормирующего сопротивления используется обычно сопротивление нагрузки, а в качестве нормирующей частоты — частота среза фильтра. Истинные значения элементов определяются из выражения (4.66 — 4.68) следующим образом:

$$L = \frac{R_0 L_H}{\omega_0}, \quad (4.69)$$

$$C = \frac{C_H}{\omega_0 R_0}, \quad (4.70)$$

$$R_H = R R_0. \quad (4.71)$$

Изменяя ω_0 и R_0 можно получить схемы устройств, работающих в различных диапазонах частот и различных нагрузках.

Виды аппроксимации, применяемые при синтезе фильтрующих цепей. Задачи реализации и аппроксимации. Определенную зависимость функции передачи цепи от частоты (параметра p) можно получить разными способами. Эти способы зависят от элементов, используемых для построения фильтра (*RL, LC, отрезки линий, усилители*), и их соединений между собой.

Построение цепи по заданной реализуемой функции $F(p)$ называют реализацией. Реализации должен предшествовать выбор соответствующей реализуемой функции, представляющей собой рациональную дробь с необходимыми свойствами. Определение вида функции передачи реальной электрической цепи с достаточной степенью точности, приближающейся к желаемой, называют *аппроксимацией*.

Рассмотрим решение задачи аппроксимации на примере ФНЧ. Функция передачи в общем виде может быть представлена выражением (4.65).

Чем выше порядок фильтра n , тем больше элементов в его схеме и более резко осуществляется переход от полосы пропускания к полосе задерживания. Однако ни одна реальная схема, содержащая конечное число элементов, не может дать желаемой характеристики (рис. 4.35, а). И таким образом, встает задача приближения указанной зависимости к функции вида (4.65) — задача аппроксимации. Способы приближения функции составляют особый раздел математики. Последняя располагает значительным числом решения задач подобного типа.

При расчете фильтров в зависимости от конкретных требований, предъявляемых к нему со стороны системы, элементом которой он является, применяют нескольких видов приближения функции передачи фильтра к идеальной. Эти виды аппроксимации показаны на рис. 4.35, б (максимально плоская), рис. 4.35, в (равноволновая), рис. 4.35, г (обратная Чебышевская), рис. 4.35, д (эллиптическая).

Максимально плоская аппроксимация. Фильтры Баттерворта. Передаточная функция фильтра является комплексной и характеризуется модулем и фазой. Свойства частотных фильтров пропускать или задерживать колебания с различными частотами определяется модулем функции передачи. При использовании максимально плоской аппроксимации модуль функции передачи фильтра аппроксимируется монотонной кривой в полосе пропускания и задерживания.

Для определения модуля функции передачи фильтра следует исключить из рассмотрения фазочастотную характеристику. Это можно осуществить, перейдя в формуле (4.65) к квадрату модуля функции передачи и учитывая, что $p = j\Omega$:

$$|F(\Omega)|^2 = F(j\Omega)F(-j\Omega) = \frac{1}{1 + k_2\Omega^2 + k_4\Omega^4 + \dots + k_{2n}\Omega^{2n}} \quad (4.72)$$

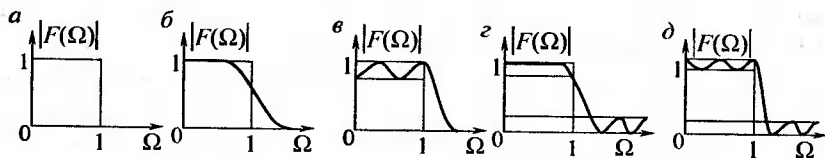


Рис. 4.35

Из выражения (4.72), следует, что при $\Omega < 1$ младшие степени вносят большой вклад в знаменатель, и, следовательно, приводят к существенному уменьшению коэффициента передачи фильтра. Поэтому для того, чтобы функция передачи была максимальна плоской на частотах, меньших частоты среза, необходима зависимость функции $|F(\Omega)|$ только от старшей степени Ω . Учитывая это, можно написать:

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + k_{2n}\Omega^{2n}}. \quad (4.73)$$

Для того чтобы на частоте среза ($\Omega = 1$) квадрат модуля функции передачи фильтра был равен $|F(\Omega)|^2 = 1/2$, следует выбрать $K_{2n} = 1$.

Таким образом, модуль функции передачи фильтра, имеющего свойство максимальной гладкости

$$|F(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}, \quad (4.74)$$

определяется выражением (4.74), которое называется *функцией Баттерворта*. Фильтры с функцией передачи, построенной на ее основе, называются *фильтрами Баттерворта*.

Рабочее затухание фильтра Баттерворта

$$a_p = 10 \lg(1 + \Omega^{2n}). \quad (4.75)$$

Крутизна частотной характеристики рабочего затухания зависит от степени n . Чем больше степень n , тем больше крутизна характеристики рабочего затухания. Таким образом для удовлетворения требований в полосе задержания необходимо выбрать необходимый порядок фильтра

из условий $\Omega_3 a_p(\Omega_3) \geq a_{\min}$, откуда $\Omega_3^{2n} \geq \frac{1}{10^{0,1a_{\min} - 1}}$. Логариф-

мируя обе части неравенства, получим

$$n \geq \frac{\lg(10^{0,1a_{\min} - 1})}{2 \lg(\Omega_3)}. \quad (4.76)$$

Нахождение коэффициентов функции передачи вида (4.75), модуль которой удовлетворяет выражению (4.74), приводит к многочленам,

называемым многочленами Баттерворта. Проиллюстрируем решение этой задачи на примере фильтра второго порядка. Нормированная функция передачи фильтра второго порядка имеет вид

$$F(j\Omega) = \frac{1}{1 + a_1 j\Omega - a_2 \Omega^2},$$

отсюда

$$|F(\Omega)|^2 = F(j\Omega)F(-j\Omega) = \frac{1}{1 + a_1^2 \Omega^2 - 2a_2 \Omega^2 + a_2^2 \Omega^4}.$$

Сравнивая полученные выражения с (4.73), видим, что $a_2 = 1$, а $a_1^2 \Omega^2 - 2\Omega^2 = 0$ и, следовательно, $a_1 = \sqrt{2} = 1,414$. Таким образом, комплексный коэффициент передачи фильтра Баттерворта второго порядка имеет вид

$$F(j\Omega) = \frac{1}{1 + 1,414 j\Omega - \Omega^2}.$$

Многочлены знаменателя функции передачи Баттерворта и соответствующие им коэффициенты приведены в справочной литературе.

Равноволновая аппроксимация. Фильтры Чебышева. Эту аппроксимацию осуществляют на основе использования полиномов Чебышева. Аппроксимирующая функция в полосе пропускания фильтра имеет колебательный характер с равными отклонениями от заданной функции и монотонный — в области задерживания, что определяется свойствами полиномов Чебышева. Нормированные полиномы Чебышева имеют вид

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\Omega)) & \text{при } 0 \leq \Omega \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch}(\Omega)) & \text{при } \Omega > 1 \end{cases}.$$

Функция $T_n(\Omega)$ колеблется в пределах ± 1 в интервале $|\Omega| \leq 1$ и монотонно возрастает при $|\Omega| > 1$. Приняв $\arccos(\Omega) = \varphi$, а $\Omega = \cos(\varphi)$ и выразив $\cos(n\varphi)$ через сумму членов, содержащих степень косинуса от $\cos(\varphi)$ до $\cos(n\varphi)$, можно получить алгебраическую формулу полиномов Чебышева:

$$T_n(\Omega) = \Omega^n + \operatorname{ch}^2 \Omega^{n-2} (\Omega^2 - 1) + \operatorname{ch}^4 \Omega^{n-4} (\Omega^2 - 1) + \dots$$

В алгебраической форме полиномы Чебышева имеют следующий вид:

$$T_1(\Omega) = \Omega; \quad T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1; \quad T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega; \quad T_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1.$$

Любой полином Чебышева при $n \geq 2$ можно вычислить по рекуррентной формуле $T_n(\Omega) = 2\Omega T_{n-1}(\Omega) - T_{n-2}(\Omega)$.

Любой полином Чебышева из всех многочленов степени n наименее уклоняется от нуля в отрезке $-1 \leq \Omega \leq 1$, что является важной их особенностью. Благодаря этому они вносят наименьшую максимальную ошибку аппроксимации в данном интервале.

Квадрат модуля функции передачи фильтра низких частот, построенный на основе полиномов Чебышева, имеет вид

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}; \quad a_p = 10 \lg(1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)). \quad (4.78)$$

Фильтры с функцией передачи, определяемой выражением (4.78), называются *фильтрами Чебышева*.

Функция передачи Чебышева достигает наибольшего значения в тех точках полосы пропускания, где значения $T_n(\Omega) = 0$. На частотах на которых $T_n(\Omega) = \pm 1$, рабочее затухание достигает величины $a_{p\max}$: $a_{p\max} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2)$.

Размах колебаний характеризуется коэффициентом неравномерности ε^2 :

$$\varepsilon^2 = 10^{0,1a_{\min}} - 1.$$

При $\varepsilon^2 = 1$ фильтр имеет наибольшую допустимую неравномерность затухания в полосе пропускания, равную 3 дБ.

С ростом значений полинома $T_n(\Omega)$ на частотах $\Omega > 1$ рабочее затухание монотонно растет. На рис. 4.36 приведена частотная зависимость рабочего фильтра Чебышева третьего порядка.

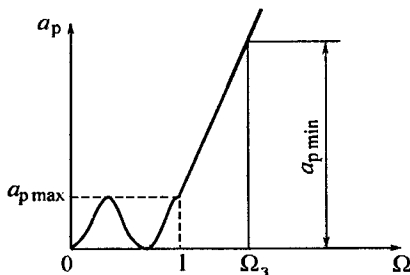


Рис. 4.36

Чтобы рабочее затухание фильтра в полосе задерживания отвечало требованиям, необходимо выбрать порядок фильтра n . Для полосы задерживания $T_n(\Omega) = \text{ch}(n \text{ arch}(\Omega))$, следовательно

$$1 + \varepsilon^2 \text{ch}^2 n \text{ arch}(\Omega_3) \geq 10^{0,1a_{\min}},$$

$$\text{отсюда } \text{ch}(n \text{ arch}(\Omega_3)) = \sqrt{\frac{10^{0,1a_{\min}} - 1}{\varepsilon^2}} = \left(\frac{10^{0,1a_{\min}} - 1}{10^{0,1a_{\max}} - 1} \right).$$

$$\text{Тогда } n \geq \frac{\text{arch} \left(\frac{10^{0,1a_{\min}} - 1}{10^{0,1a_{\max}} - 1} \right)^{1/2}}{\text{arch}(\Omega_3)},$$

$$\text{или } n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\sqrt{10^{0,1a_{\min}}} + \sqrt{10^{a_{\min}} - 10^{0,1a_{\max}}} \right) \right]}{\lg(\Omega_3 + \sqrt{\Omega_3^2 - 1})}.$$

Таким образом, фильтры Чебышева характеризуются двумя параметрами — порядком и допустимой неравномерностью затухания в полосе пропускания. Выражения для многочленов знаменателя комплексных функций передачи фильтров Чебышева при различных значениях неравномерности приводятся в справочниках.

Обратная Чебышевская аппроксимация. Этот вид аппроксимации характеризуется монотонностью аппроксимирующей функции в полосе пропускания и колебательным характером в области задерживания. Квадрат модуля функции передачи при этом имеет вид

$$|F(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\varepsilon^2 T_n^2 \frac{1}{\Omega}}} = \frac{\varepsilon^2 T_n^2 \frac{1}{\Omega}}{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \frac{1}{\Omega}}. \quad (4.79)$$

Функция передачи монотонна в полосе пропускания фильтра (т.е. $\Omega > 1$), если аргументы многочлена $T_n(\Omega)$ больше единицы. Последнее достигается заменой Ω на $1/\Omega$, где $\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$ — начальная частота области задерживания.

Фильтры, модуля функции передачи которых определяется выражением (4.79), называют *обратными (инверсными) фильтрами Чебышева*. Квадрат модуля функции передачи таких фильтров колеблется в области задерживания с амплитудой $|\Delta F|^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2}$. Выражения для функции передачи обратных фильтров Чебышева более сложные и приводятся в справочниках для различных значений неравномерности затухания в области задерживания.

Таким образом, использования полиномов Чебышева дает возможность получить равноволновое приближение аппроксимирующей функции к заданной в полосе пропускания или в области задерживания фильтра.

Эллиптическая аппроксимация. Она позволяет добиваться равноволнового характера приближения аппроксимирующей функции к заданной в полосе пропускания и в области задерживания фильтра, для чего используются эллиптические функции Якоби.

Выражение функции передачи фильтра, построенного на основе эллиптической аппроксимации, аналогично выражению для обратного чебышевского фильтра. Определение коэффициентов многочленов числителя и знаменателя является очень сложной задачей. Коэффициенты для фильтров различных порядков для некоторых значений неравномерности затухания в полосе пропускания и в области задерживания приводятся в справочниках. Аппроксимация функций передачи фильтров верхний частот и полосовых также может быть осуществлена на основе использования указанных выше функций соответствующим частотным преобразованием.

Разнообразие видов аппроксимации естественно приводит к вопросу о том, какому из них отдать предпочтение. Выбор того или иного вида аппроксимирующей функции зависит от конкретных требований, предъявляемых к фильтру со стороны системы, элементом которой он является. Можно однако, сделать несколько общих замечаний относи-

тельно различных видов аппроксимации. У фильтров Баттерворта меньшая, чем у фильтров Чебышева или эллиптических фильтров того же порядка, крутизна нарастания затухания в области задерживания, однако они имеют максимально плоскую характеристику в полосе пропускания. В тех случаях, когда можно допустить некоторую неравномерность затухания в полосе пропускания за счет увеличения крутизны нарастания затухания в переходной области, предпочтительны фильтры Чебышева или же эллиптические, обладающие лучшими свойствами, чем чебышевские, однако более сложные в реализации. Если необходимо обеспечить значительную крутизну нарастания затухания в переходной области и плоскую характеристику в полосе пропускания фильтра, то используют обратные фильтры Чебышева.

Помимо модуля функции передачи, важными характеристиками фильтра являются фазочастотная и переходная. Известно, что условием отсутствия фазочастотных искажений является линейность фазочастотной характеристики системы передачи. Фазочастотная характеристика фильтров, построенных на основе рассмотренных видов аппроксимации, тем больше отклоняется от линейной, чем ближе модуль функции передачи их к идеальной. С этой точки зрения, чем выше порядка фильтра, тем значительнее отличается его фазочастотная характеристика от линейной. С другой стороны, фильтры Чебышева имеют худшую фазочастотную характеристику, чем фильтры Баттерворта, при том же числе элементов, а эллиптические — худшую, чем фильтры Чебышева.

Временная переходная характеристика фильтра представляет собой реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Чем ближе модуль функции передачи к идеальной, тем больше время установления и колебательность процесса на выходе фильтра. Фильтры Баттерворта имеют меньшее время установления и амплитуду колебания переходной характеристики, чем фильтры Чебышева и эллиптические. С увеличением неравномерности затухания в полосе пропускания также возрастает время установления и колебательность процесса на выходе фильтра.

4.9. Активные RC-фильтры

4.9.1. Передаточные функции фильтров

До недавнего времени экономичность и эффективность обработки сигналов переменного тока с использованием LC-фильтров не вызывала сомнений. Однако наряду с известными достоинствами фильтры и корректоры, построенные на основе LC-цепей, имеют недостатки, которые вступают в противоречие с возможностью их широкого использования в современных электронных устройствах железнодорожной автоматики и связи. К ним, прежде всего, относят их большие массу и габаритные размеры, растущие на низких частотах, сложность и сравнительно высокую стоимость изготовления.

Достижения микроэлектроники обусловили интенсивную разработку и широкое использование активных RC-фильтров и корректоров. Эти устройства обеспечивают возможность формирования разнообразных частотных характеристик, имеют малые габаритные размеры, обладают невысокой стоимостью, хорошо вписываются в конструкцию современных устройств автоматики и связи, просты в реализации.

Активные RC-фильтры относятся к линейным схемам с сосредоточенными параметрами. С помощью активных RC-фильтров нельзя получить идеальные формы частотных характеристик со строго постоянным коэффициентом передачи в полосе пропускания, бесконечным ослаблением в полосе задерживания и бесконечной крутизной спада при переходе от полосы пропускания к полосе задерживания. Проектирование активного фильтра всегда представляет собой поиск компромисса между идеальной формой характеристики и сложностью ее реализации. Это называется «проблемой аппроксимации». Передаточная функция линейной цепи $F(p)$ порядка m , характеризуется рациональной дробью вида

$$F(p) = \frac{P(p)}{R(p)} = \frac{A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \dots + A_1 p + A_0}{B_m p^m + B_{m-1} p^{m-1} + \dots + B_1 p + B_0}, \quad (4.80)$$

где $P(p)$ — полином числителя;

$R(p)$ — полином знаменателя;

$p = j\omega$ — оператор Лапласа;

$A[n...0]$ и $B[m...0]$ — вещественные коэффициенты.

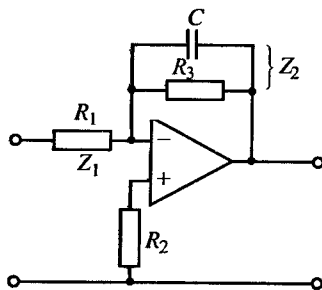


Рис. 4.37

Полиномы передаточной функции можно разложить на множители первого и второго порядков с вещественными коэффициентами. Следовательно, нужную характеристику можно получить, включив последовательно несколько фильтров первого и второго порядков. Во многих случаях требования к качеству фильтрации позволяют обойтись простейшими фильтрами первого или второго порядков.

4.9.2. Характеристика ФНЧ первого порядка

Отдельные звенья первого и второго порядков могут быть реализованы на операционных усилителях (ОУ). Например, для выделения низкочастотных составляющих сигнала или подавлении высокочастотных помех применяют фильтр нижних частот (рис. 4.37).

Он представляет собой простейший фильтр нижних частот, а при $R_3 = \infty$ (резистор отсутствует) осуществляет операцию интегрирования. Действительно

$$K_{oc}(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_3}{R_1} \frac{1}{1 + C R_3 p}. \quad (4.81)$$

При $\frac{1}{R_3 C} = \omega_c$ и $-\frac{R_3}{R_1} = k$, передаточная функция

$$K(p) = \frac{k \omega_c}{p + \omega_c}, \quad (4.82)$$

что соответствует амплитудно-частотной характеристике ФНЧ с частотой среза ω_c . На рис. 4.38 эта АЧХ приведена в двойном логарифмическом масштабе.

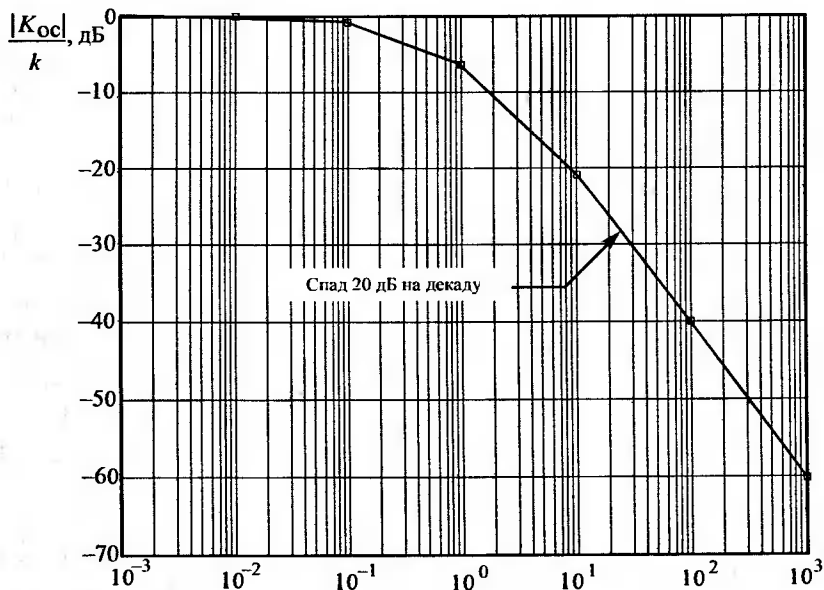


Рис. 4.38

Полагая в выражении (4.81) $R_3 = \infty$, находим

$$K(p) = -\frac{1}{R_1 C p}. \quad (4.83)$$

Следовательно, схема интегрирует входное напряжение с постоянной времени $\tau_1 = R_1 C$.

4.9.3. Характеристика ФВЧ первого порядка

Схема неинвертирующего усилителя, дополненная разделительным конденсатором для ослабления нижних частот, представляет собой фильтр верхних частот первого порядка (рис. 4.39).

Коэффициент передачи по напряжению

$$K_{oc}(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = -\frac{R_3}{R_1 + \frac{1}{pC}} = -\frac{R_3 pC}{R_1 pC + 1}. \quad (4.84)$$

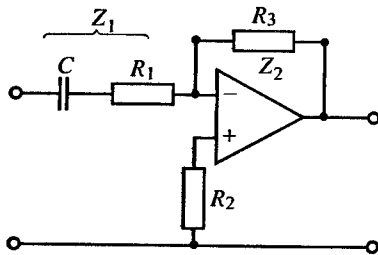


Рис. 4.39

При $\frac{1}{R_1 C} = \omega_c$ и $-\frac{R_3}{R_1} = k$, передаточная функция

$$K(p) = \frac{kp}{p + \omega_c}, \quad (4.85)$$

что соответствует амплитудно-частотной характеристике ФВЧ с частотой среза ω_c .

Операционный усилитель имеет весьма высокое входное и незначительное выходное сопротивления. Это значит, что в отличие от пассивных LC или RC звеньев, равноценное по АЧХ звено первого порядка, построенное на ОУ, допускает его сопряжение по входу и выходу с аналогичными звеньями или нагрузкой самого различного характера. При каскадном соединении звеньев, построенных на основе ОУ, характеристики отдельных звеньев не изменяются. Это дает возможность формировать частотную характеристику тракта передачи сигнала отдельными, заранее известными элементами. Наличие ОУ не только исключает появление дополнительных затуханий при сопряжении звеньев между собой, но и дает возможность в необходимых случаях получать требуемое усиление. И, наконец, безразличен в принципе порядок расположения звеньев при реализации полной схемы устройства. Его частотная характеристика в любом случае будет одной и той же.

4.9.4. Звенья второго порядка

Передаточные функции ФНЧ и ФВЧ первого порядка имеют одно общее свойство: в выражение их передаточной функции $K(p)$ оператор p входит в первой степени. Поэтому, эти схемы называют звеньями

первого порядка. Они характеризуются монотонностью изменения АЧХ (см. рис. 4.38). В тех случаях, когда требуется получить АЧХ более сложного вида, а также при необходимости в формировании относительно крутых характеристик среза АЧХ и ФЧХ, применяют звенья второго порядка.

В общем случае коэффициент передачи по напряжению звена второго порядка

$$K_{oc}(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}, \quad (4.86)$$

где a_i, b_i — вещественные постоянные коэффициенты, удовлетворяющие условию устойчивости

$$\operatorname{sig} n(b_2) = \operatorname{sig} n(b_1) = \operatorname{sig} n(b_0). \quad (4.87)$$

Передачная функция ФНЧ второго порядка имеет вид

$$K(p) = \frac{k \omega_{\Pi}^2}{p^2 + \frac{\omega_{\Pi}}{Q_F} p + \omega_{\Pi}^2}, \quad (4.88)$$

где k — коэффициент передачи на постоянном токе,

ω_{Π} — частота полюса,

Q_F — добротность фильтра.

При $Q_F > \frac{1}{2}$ на АЧХ появляется выброс на частоте

$$\omega_p = \omega_{\Pi} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right)} \approx \omega_{\Pi} \quad (4.89)$$

при больших Q_F .

Значение коэффициента передачи на этой частоте равно

$$K(p) = \frac{k Q_F}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q_F^2}\right)}} \approx k Q_F \quad (4.90)$$

при больших Q_F .

Причем частота среза по уровню -3 дБ составляет

$$\omega_{-3\text{дБ}} = \omega_{\Pi} \left[\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.91)$$

Для ФНЧ при малых Q_F , т.е. $Q_F < \frac{1}{2}$, полюса передаточной функции вещественные, и его АЧХ оказывается плоской. Выражение для характеристики второго порядка можно разложить на два сомножителя первого порядка. Когда же Q_F превышает $\frac{1}{2}$, на АЧХ появляется «всплеск». АЧХ схем с большой добротностью имеет значительный выброс.

Передаточная функция ФВЧ второго порядка имеет вид

$$K(p) = \frac{k p^2}{p^2 + \frac{\omega_{\Pi}}{Q_F} p + \omega_{\Pi}^2}, \quad (4.92)$$

где k — коэффициент передачи на высокой частоте.

При $Q_F > \frac{1}{2}$ на АЧХ как и у ФНЧ появляется выброс на частоте

$$\omega_p = \frac{\omega_{\Pi}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right)}} \approx \omega_{\Pi} \quad (4.93)$$

при больших Q_F

Значение коэффициента передачи на этой частоте равно

$$K(p) = \frac{k Q_F}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right)}} \approx k Q_F \quad (4.94)$$

при больших Q_F .

Частота среза по уровню -3 дБ составляет

$$\omega_{-3\text{дБ}} = \frac{\omega_{\Pi}}{\left[\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q_F^2}\right)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.95)$$

Фазовый фильтр первого порядка строят по схеме, представленной на рис. 4.40.

На низких частотах конденсатор C практически не влияет на работу схемы, и она работает как повторитель с единичным коэффициентом передачи. На высоких частотах конденсатор C представляет собой короткое замыкание, и схема выполняет роль инвертирующего усилителя

с коэффициентом усиления $\frac{R_3}{R_2}$. Из этого следует, что для получения одинакового коэффициента передачи на низких и высоких частотах резисторы R_2 и R_3 должны быть равными. Фазовый сдвиг изменяется от 0° на низких до -180° на высоких частотах. Если резистор R_1 сделать переменным, схема превращается в регулируемый фазовращатель.

Передаточная функция фазового фильтра первого порядка выглядит следующим образом:

$$K(p) = \frac{1 - p \frac{R_3}{R_2} R_1 C}{1 + p R_1 C}. \quad (4.96)$$

Фазовый сдвиг при $R_2 = R_3$ составляет:

$$\varphi = -2 \operatorname{arctg}(R_1 C \omega).$$

Для получения плоской АЧХ с постоянным и не зависящим от частоты коэффициентом передачи резисторы R_2 и R_3 должны быть равными. Лучше всего использовать для этого интегральную

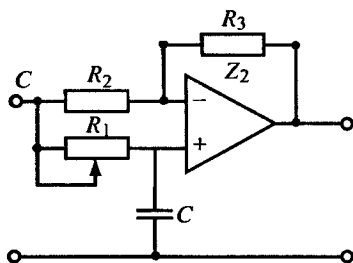


Рис. 4.40

согласованную пару резисторов. На высоких частотах появляется погрешность фазового сдвига, связанная с конечной шириной полосы пропускания ОУ. Для повышения точности фазового сдвига на высоких частотах следует применять быстродействующий ОУ с широкой полосой пропускания.

Схема обеспечивает изменение фазового сдвига от 0° до 180° при увеличении частоты или R_3 от нуля до бесконечности. Для получения обратной зависимости (от 180° до 0°) нужно поменять местами C и R_1 . В этом случае при $R_2=R_3$ фазовый сдвиг будет равен

$$\varphi = 180^\circ - 2 \operatorname{arctg}(R_1 C \omega).$$

Фазовый фильтр второго порядка строится на основе конвертеров полного сопротивления (рис. 4.41).

Передаточная функция фазового фильтра второго порядка составляет

$$K(p) = \frac{p^2 - p \frac{R_2}{R_5 R_8 C_7} + \frac{R_2}{R_1 R_4 R_5 C_3 C_7}}{p^2 + p \frac{1}{R_8 C_7} + \frac{R_2}{R_1 R_4 R_5 C_3 C_7}}. \quad (4.97)$$

Остальные параметры определяются следующим образом:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 R_4 R_5 C_3 C_7}},$$

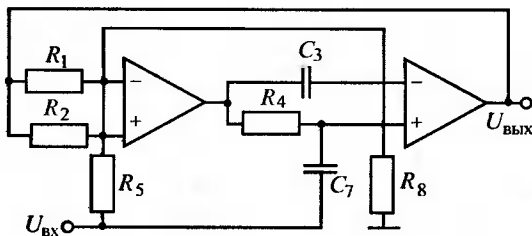


Рис. 4.41

$$Q = \omega_0 C_7 R_8, \quad (4.98)$$

$$K = 1.$$

Требуемое соотношение сопротивлений резисторов составляет $R_2 = R_5$.

Большие значения добротности Q (4.98) и невысокая чувствительность к отклонениям значений элементов от номиналов достигаются за счет введения второго ОУ. Для настройки схемы можно использовать следующую последовательность действий:

- установить ω_0 с помощью R_4 или R_5 ,
- установить Q с помощью R_8 .

4.9.5. Выбор элементов активных RC-фильтров

При выборе элементов для построения активных фильтров следует руководствоваться рядом рекомендаций. Для операционных усилителей данные рекомендации касаются следующих параметров.

1. Частотные свойства.

Используемый ОУ должен быть достаточно быстродействующим, т.е. иметь достаточно большое произведение коэффициента усиления на ширину полосы f_a , в противном случае качество фильтра будет зависеть от динамических свойств ОУ и частотная характеристика фильтра может быть искажена. Чем шире полоса пропускания ОУ, тем меньше вносимая и частотная погрешность. Для схем с многопетлевой обратной связью рекомендуется выбирать ОУ, у которого f_a более чем в $50 Q^2$ раз больше коэффициента передачи фильтра в полосе пропускания для всего диапазона частот выходных сигналов. Для других схем следует выбирать ОУ, у которого f_a более чем в $100 Q$ раз больше коэффициента передачи фильтра во всей полосе пропускания.

Основная проблема, связанная с динамической характеристикой ОУ, состоит в том, что фильтр может оказаться неустойчивым и склонным к самовозбуждению из-за недостаточного запаса по фазе. Некоторые ОУ, как правило, быстродействующие, требуют внешней частотной коррекции с помощью конденсатора небольшой емкости, значение которой подбирается для конкретной схемы. Для ОУ с внутренней коррекцией показателем хорошей устойчивости является его стабильная работа с замкнутой петлей обратной связи в наихудшем случае, т.е. при единичном коэффициенте передачи и емкостной нагрузке.

2. Входное и выходное сопротивления.

Выходное сопротивление ОУ должно быть достаточно малым. Как правило, для большинства из них оно не превышает 100 Ом. При работе на низкоомную или емкостную нагрузку, с чем приходится сталкиваться в некоторых схемах фильтров, может потребоваться дополнительный буфер.

К входному сопротивлению ОУ предъявляются более высокие требования. В некоторых случаях при использовании высокоомных резисторов (МОм и более) применяются ОУ с полевым транзистором на входе. При этом следует учитывать входную емкость ОУ, которая может достигать десятков пФ.

3. Напряжение смещения и входные токи ОУ.

Эти параметры не влияют на частотную характеристику фильтра, но приводят к появлению на его выходе постоянного смещения. Если фильтр не передает постоянной составляющей сигнала (ФВЧ или ПФ), то эти смещения не играют роли, при условии, что они не приводят к насыщению ОУ.

Минимальные значения резисторов ограничиваются либо максимальным выходным током ОУ (обычно около 30 мА), либо конечными сопротивлениями соединительных проводов, либо по соображениям рассеиваемой мощности. Максимальные значения резисторов ограничиваются входным сопротивлением ОУ, влиянием паразитных емкостей, сопротивлениями утечки и входными токами ОУ. При использовании ОУ с полевыми входами допускаются большие сопротивления резисторов. На высоких частотах (выше 10 кГц) следует избегать применения высокоомных резисторов (100 кОм и более) из-за влияния паразитных емкостей.

Если применяются дискретные элементы, лучше использовать металлопленочные резисторы и избегать применения угольных композитных резисторов. Это связано с тем, что металлопленочные резисторы имеют меньшие температурные коэффициенты (порядка $50 \cdot 10^{-6}$) и лучшую временную стабильность. В прецизионных схемах применяются металлофольговые или проволочные резисторы. Если для нормальной работы схемы важно отношение сопротивлений резисторов, следует выбирать резисторы в одном корпусе с тем, чтобы скомпенсировать их температурные дрейфы.

Наименьшие значения конденсаторов на высоких частотах ограничиваются паразитными емкостями схемы, которые достигают несколь-

ких пФ, а на низких частотах — сопротивлением изоляции и токами утечки. Максимальные значения конденсаторов обычно ограничиваются их физическими размерами и стоимостью. Обычно в фильтрах применяются конденсаторы следующих типов.

Керамические — небольшие по размерам, обладают невысокой стоимостью, имеют диапазон емкостей от 10 пФ до 10 нФ. Наиболее предпочтительны для применения конденсаторы типа NPO, поскольку они обладают малыми температурными коэффициентами емкости (ТКЕ) и высокой стабильностью.

Металлизированные поликарбонатные — используются при больших значениях номиналов от 0,001 мкФ до 10 мкФ и превосходят по своим характеристикам конденсаторы других типов с таким же диапазоном емкостей.

Слюдяные — емкостью от 10 пФ до 10 нФ. Превосходят по габаритам конденсаторы остальных типов. Прецизионные особо стабильные конденсаторы, более дорогие.

Полистирольные — емкостью до 10 нФ обладают очень малым ТКЕ, большим сопротивлением изоляции, но при этом чувствительны к перегреву (максимум 70 °С).

4.9.6. Фильтры высоких порядков

До сих пор рассматривались простые схемы фильтров первого и второго порядков, которые применяются в тех случаях, когда нет жестких требований к качеству фильтрации. Однако часто необходимы фильтры, характеристики которых напоминают «кирпичную стену»: с бесконечным ослаблением сигналов в полосе подавления и бесконечно резким переходом между полосами пропускания и подавления. Получить такую характеристику с помощью активных RC-фильтров невозможно, и передаточная функция может только приближаться к идеальной. Собственно, в этом и состоит проблема аппроксимации. Предъявляемые к фильтру требования обычно сводятся к обеспечению:

- а) приемлемой неравномерности коэффициента передачи в полосе пропускания;
- б) максимального ослабления в полосе подавления;
- в) минимальной ширины переходного интервала между полосами пропускания и подавления.

Эти параметры для случая ФНЧ показаны на рис. 4.42. Кроме амплитудной характеристики фильтра, могут оказаться важными его фазовая и переходная характеристики.

Для получения такой характеристики может потребоваться фильтр высокого порядка (выше второго). Чем выше порядок фильтра, тем точнее он аппроксимирует идеальную характеристику с резкими граница-

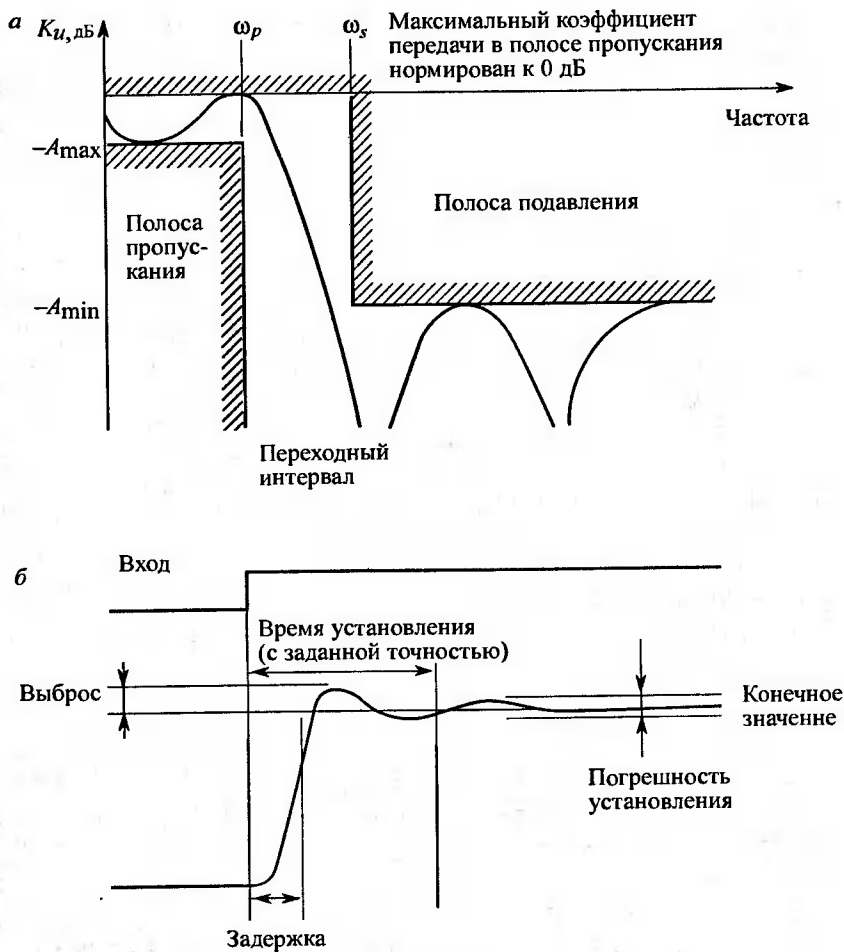


Рис. 4.42

ми. Однако с повышением порядка фильтра возрастают его сложность, размеры и стоимость. Поэтому часто приходится идти на компромисс между требуемой характеристикой и сложностью схемы.

Проектирование таких фильтров состоит из двух этапов:

- определение требуемой математической передаточной функции;
- проектирование схемы для реализации найденной математической функции.

Имеется несколько типов передаточных функций с различными свойствами, со своими достоинствами и недостатками. Наиболее известны следующие типы передаточных функций — Баттерворта, Чебышева и Бесселя.

Есть несколько способов определения наиболее подходящей передаточной функции. Можно выбрать передаточную функцию исходя из приведенного ниже описания фильтров различных типов. Можно также выбрать ее по графикам необходимой зависимости коэффициента передачи или фазы от частоты, или по переходной характеристике. Описание более формализованных подходов можно найти в специальной литературе.

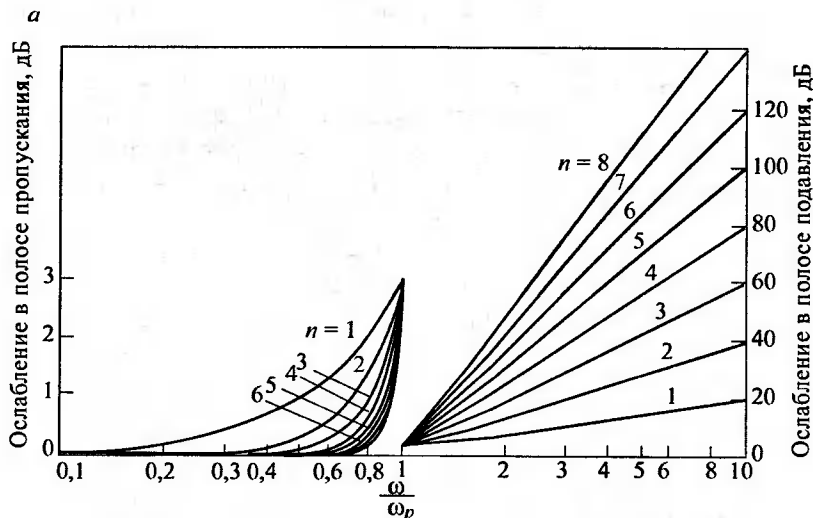
Рассматриваемые далее типы фильтров считаются нормированными, т.е. их коэффициент передачи в полосе пропускания равен 1 (0 дБ), а частота среза — 1 рад/с. Для расчетов других фильтров (полосовых, верхних частот и т.д.) необходимо провести операции преобразования частот и масштабирования.

Фильтры Баттерворта (с максимально плоской характеристикой)

Эти фильтры отличаются наибольшей равномерностью АЧХ как в полосе пропускания, так и в полосе подавления (рис. 4.43). Поскольку на АЧХ отсутствуют пульсации (максимумы и минимумы), каждое значение коэффициента передачи появляется на конкретной частоте только один раз. Такое свойство называется монотонностью характеристики фильтра.

Спад АЧХ за полосой пропускания составляет $20n$ дБ/декада, где n — порядок фильтра.

Максимально плоская АЧХ в полосе пропускания достигается за счет ухудшения линейности фазовой характеристики. Ее нелинейность приводит к фазовым искажениям, так как сигналы различных частот имеют разное время задержки. На переходной характеристике фильтра при этом



б

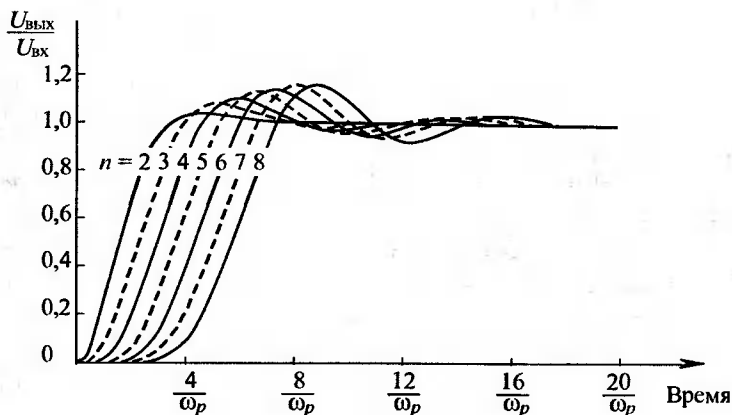


Рис. 4.43

появляется выброс и переходные процессы на вершине выходного импульса, величина которых возрастает при повышении порядка фильтра. Все корни передаточной функции ФНЧ Баттерворта являются полюсами, т.е. среди них нет нулей.

Фильтр Баттерворта можно использовать как хороший фильтр общего назначения, поскольку он имеет максимально плоскую АЧХ,

умеренную фазовую нелинейность, приемлемую переходную характеристику и достаточно крутой спад АЧХ вне полосы пропускания. Эти свойства делают его одним из наиболее широко применяемых фильтров.

При заданных значениях A_{\min} , A_{\max} , ω_s , ω_p необходимый порядок фильтра определяется из выражения:

$$n = \frac{\lg \left[\frac{10^{0,1 A_{\min}} - 1}{10^{0,1 A_{\max}} - 1} \right]}{2 \lg \left[\frac{\omega_s}{\omega_p} \right]}.$$

Поскольку A_{\min} и A_{\max} представляют из себя коэффициенты ослабления в децибелах, они всегда положительны. Так как n должно быть целым, полученное по формуле значение округляется до ближайшего целого числа.

Фильтры Чебышева (фильтр равных пульсаций)

Фильтр Чебышева характеризуется крутым спадом АЧХ и немонотонностью коэффициента передачи в полосе пропускания. Крутизна спада АЧХ достигается ценой появления существенных пульсаций на характеристике в полосе пропускания. Их величина лежит между уровнями 0,1 и 3 дБ.

Более крутой спад приводит и к увеличению нелинейности фазовой характеристики в полосе пропускания. Следовательно, возрастают и величина перерегулирования, и звоны на вершине выходного перепада. Фильтры Чебышева также не содержат нулей в передаточной функции.

Фильтры Чебышева используются в тех случаях, когда требуется наиболее крутой спад АЧХ за частотой среза. Фазовую характеристику можно сделать более линейной, дополнив фильтр фазовращателем, но при этом увеличивается общее время задержки.

Порядок фильтра Чебышева, необходимый для получения требуемой АЧХ, определяется выражением

$$n = \frac{\operatorname{arch} \left[\frac{10^{0,1 A_{\min}} - 1}{10^{0,1 A_{\max}} - 1} \right]}{\operatorname{arch} \left[\frac{\omega_s}{\omega_p} \right]}.$$

При одинаковых параметрах АЧХ порядок фильтра Чебышева обычно ниже порядка фильтра Баттерворта.

Фильтры Бесселя (фильтры с линейной фазовой характеристикой или фильтры Томсона)

Фильтры Бесселя имеют фазовую характеристику, максимально близкую к идеальной. Благодаря линейной фазовой характеристики, сигналы всех частот в полосе пропускания имеют одинаковые временные задержки. Однако это характерно только для фильтра Бесселя низших частот, другие фильтры Бесселя — ППФ, ПЗФ, ФВЧ — таким свойством не обладают (линейность фазовой характеристики ФНЧ Бесселя не сохраняется при операциях преобразования шкалы частот для получения фильтров с другими АЧХ).

Переходная характеристика фильтра Бесселя имеет малую величину перерегулирования. Это особенно важно при работе с импульсными сигналами, которые надо передавать с минимальными искажениями. Хорошая фазовая характеристика фильтров этого типа достигается ценой ухудшения амплитудной характеристики. АЧХ не является максимально плоской в полосе пропускания и не имеет крутого спада. При этом она монотонна (рис. 4.44). Передаточные функции фильтров Бесселя содержат только полюса.

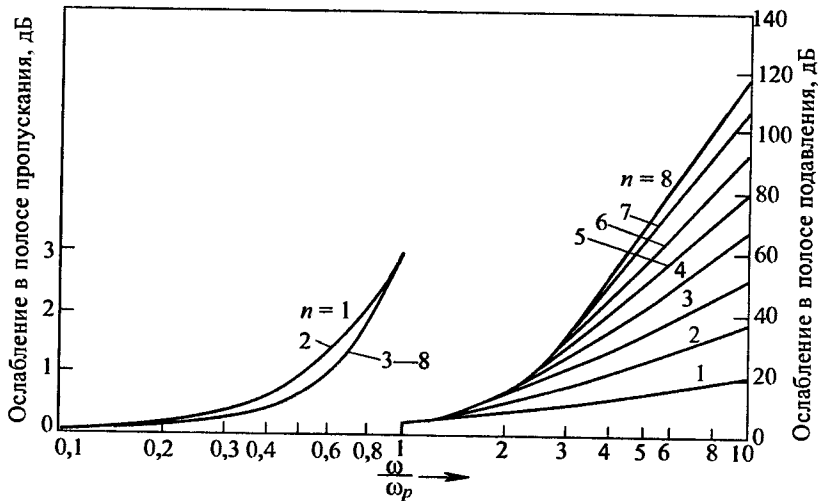
Фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя получили наибольшее распространение. Рассмотрим кратко еще четыре типа — фильтры Баттерворта-Бесселя, фильтры Лежандра, инверсные фильтры Чебышева и эллиптические фильтры.

Фильтры Баттерворта-Бесселя

Эти фильтры имеют промежуточную характеристику между максимально плоской АЧХ фильтра Баттерворта и линейной ФЧХ фильтра Бесселя, в результате чего получается фильтр с приемлемыми значениями равномерности амплитудной характеристики и линейности фазовой.

Фильтры Лежандра (или оптимально монотонные)

Они сочетают в себе свойства фильтров Баттерворта и Чебышева. Их АЧХ не столь равномерна, как у фильтра Баттерворта, но не содержит пульсаций, характерных для фильтров Чебышева. Характеристика оптимально монотонная; более крутой спад, чем у фильтра Баттерворта, достигается за счет ухудшения равномерности АЧХ.



б

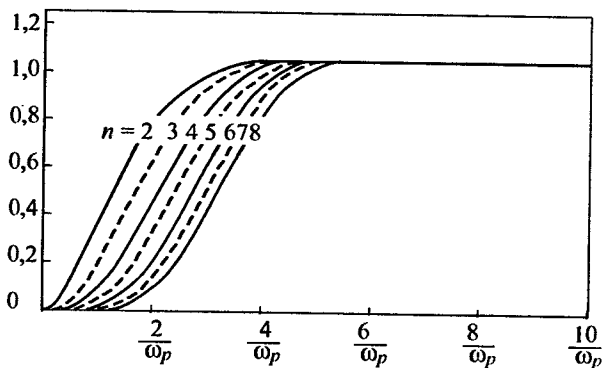


Рис. 4.44

Инверсные фильтры Чебышева

Этот тип фильтров является инверсией обычных фильтров Чебышева в том смысле, что их характеристики монотонны в полосе пропускания, но содержат равномерные пульсации в полосе подавления. Инверсный фильтр Чебышева применяется в случаях, когда нет необходимости в максимальном ослаблении сигналов вне полосы пропускания, но АЧХ в полосе пропускания должна быть плоской. Пульсации коэффициента передачи в полосе подавления возникают из-за появления нулей в передаточной функции.

Эллиптические фильтры (фильтры Чебышева-Кауэра)

АЧХ фильтров этого типа имеет пульсации как в полосе пропускания, так и в полосе подавления. При этом достигается максимальная крутизна спада АЧХ.

4.9.7. Определение требуемой передаточной функции

Преобразование и масштабирование. Соотношения, приведенные выше соответствовали «нормированным» фильтрам с коэффициентом передачи в полосе пропускания 0 дБ и граничной частотой 1 рад/с. На практике такая ситуация может возникнуть чисто теоретически.

Масштабирование коэффициента передачи в полосе пропускания производится умножением передаточной функции на требуемый коэффициент.

Масштабирование частоты производится заменой p на p/ω_M , где ω_M — требуемая частота. При этом передаточная функция «растягивается» или «сжимается» таким образом, что то, что происходило с ней при $\omega = 1$ рад/с, теперь происходит при $\omega/\omega_M = 1$ рад/с, т.е. когда $\omega = \omega_M$.

До сих пор рассматривались только фильтры нижних частот. Другие типы фильтров, например полосовые, верхних частот или режекторные, отдельно не рассматривались, так как их можно преобразовать к низкочастотным эквивалентам. Задача проектирования при этом сводится к расчету ФНЧ. После этого полученная передаточная функция вновь преобразуется к исходному типу фильтра (рис. 4.45).

Преобразование ФВЧ. Передаточную функцию ФВЧ можно получить из функции ФНЧ следующей подстановкой в передаточную функцию:

$$\frac{p}{\omega_{НЧ}} \rightarrow (\text{ФНЧ в ФВЧ}) \rightarrow \frac{\omega_{ВЧ}}{p} \quad (4.99)$$

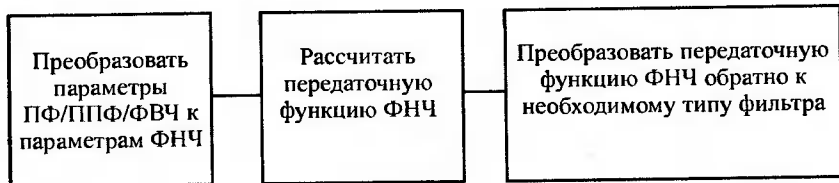


Рис. 4.45

При этом получается передаточная функция ФВЧ, имеющая такой же коэффициент передачи на $\omega_{\text{ВЧ}}$, что и ФНЧ на $\omega_{\text{НЧ}}$ (рис. 4.46, а). Чтобы избежать путаницы, принято сначала приводить требуемую передаточную функцию ФВЧ к нормированному виду, а затем применять вышеуказанное преобразование (рис. 4.45).

Преобразование ППФ. Передаточную функцию ППФ можно получить из функции ФНЧ, применяя следующее преобразование:

$$\frac{p}{\omega_{\text{НЧ}}} \rightarrow (\text{ФНЧ в ППФ}) \rightarrow \frac{(p^2 + \omega_{\text{рез}}^2)}{B_{\text{ПФ}}p}, \quad (4.100)$$

где $\omega_{\text{рез}}$ — центральная частота полосы пропускания.

Значение $B_{\text{ПФ}}$ есть ширина полосы пропускания ППФ, причем $B_{\text{ПФ}} = \omega_{p2} - \omega_{p1}$ и $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_{p1}\omega_{p2}}$, т.е. ω_{p1} и ω_{p2} расположены симметрично относительно $\omega_{\text{рез}}$. Преобразование фильтра нижних частот в полосовой фильтр удваивает его порядок.

Полученный фильтр будет иметь такой же коэффициент передачи в полосе пропускания на частотах ω_{p1} и ω_{p2} , как и ФНЧ на $\omega_{\text{НЧ}}$. Чтобы избежать путаницы, принято приводить требуемую передаточную функцию ППФ к нормированному виду так, чтобы $\omega_{\text{рез}} = 1$ рад/с. Кроме того, характеристика ППФ должна быть симметрична (рис. 4.46, б).

Преобразование ПЗФ. Передаточную функцию ПЗФ можно получить из передаточной функции ФНЧ, производя подстановку:

$$\frac{p}{\omega_{\text{НЧ}}} \rightarrow (\text{ФНЧ в ПЗФ}) \rightarrow \frac{B_{\text{ПЗФ}}p}{(p^2 + \omega_{\text{п}}^2)}, \quad (4.101)$$

где $\omega_{\text{п}}$ — центральная частота полосы задерживания

$$\omega_{\text{п}} = \sqrt{\omega_{\text{п1}}\omega_{\text{п2}}},$$

а $B_{\text{ПЗФ}}$ — ширина полосы задерживания

$$B_{\text{ПЗФ}} = \omega_{\text{п1}} - \omega_{\text{п2}}.$$

Как и в случае с ППФ, преобразование ПЗФ (4.101) удваивает порядок фильтра.

ПЗФ будет иметь такой же коэффициент передачи на частотах $\omega_{\text{п1}}$ и $\omega_{\text{п2}}$, как и ФНЧ на $\omega_{\text{НЧ}}$. По-прежнему, чтобы избежать путаницы, принято нормировать передаточную функцию ПЗФ так, чтобы $\omega_{\text{п}} = 1$ рад/с.

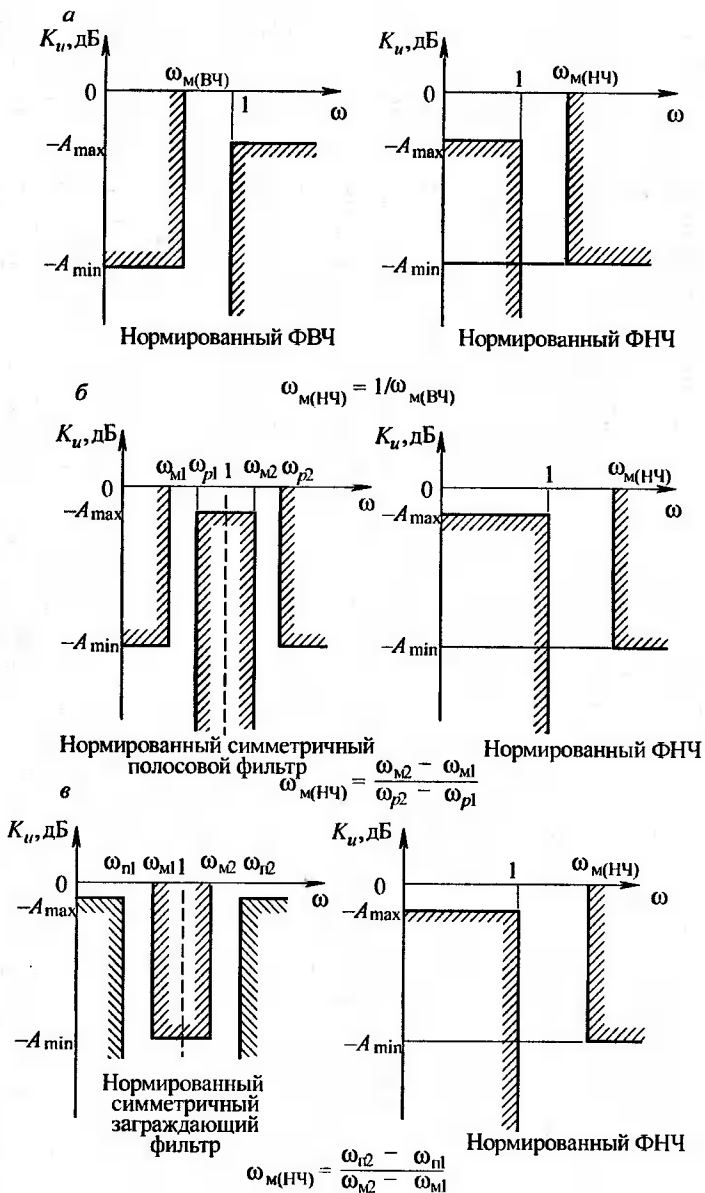


Рис. 4.46

Характеристика ПЗФ должна быть симметричной

$$\omega_{п} = \sqrt{\omega_{п1}\omega_{п2}} = \sqrt{\omega_{м1}\omega_{м2}}.$$

Если данное условие не выполняется, то характеристику необходимо превратить в симметричную тем же способом, что и в случае с ППФ. Преобразование ПЗФ в ФНЧ показано на рис. 4.46, в.

4.9.8. Переход от передаточной функции к схеме фильтра

После определения передаточной функции следующим шагом должна стать разработка схемы активного RC -фильтра, реализующего эту функцию.

Имеются два основных способа проектирования схемы для реализации передаточной функции. В первом из них проектируется многокаскадный фильтр, а второй основан на моделировании многозвенной RLC -цепи.

Моделирование многозвенной RLC -цепи. Этот способ заключается в моделировании многозвенной RLC -цепи с использованием активных элементов. RLC -четырёхполюсники можно имитировать прямой заменой индуктивностей активными схемами (гираторами) или используя многопетлевую обратную связь для реализации функций всей цепи.

Достоинства:

– частотные характеристики RLC -четырёхполюсников, как правило, не критичны к допускам элементов, поэтому можно добиться точной реализации требуемой частотной характеристики.

Недостатки:

- сложная процедура моделирования;
- требуется много ОУ;
- сложность настройки из-за взаимного влияния элементов.

Данный способ рекомендуется использовать при производстве большого числа фильтров, требующих высокой точности АЧХ. К сожалению, процедура проектирования фильтров такого типа довольно сложна, и рассмотреть ее в данном разделе не представляется возможным.

Многокаскадные фильтры. Этот способ основывается на разложении передаточной функции на сомножители первого и второго порядков. Передаточную функцию каждого из полученных сомножителей можно реализовать по отдельности каскадами первого или второго порядков, причем их взаимное влияние исключается.

Пусть задана передаточная функция вида (4.80), которую можно разложить на линейные (первого порядка) и квадратичные (второго порядка) сомножители

$$F(p) = K \frac{\left(p^2 + \frac{\omega_{011}}{Q_{11}} p + \omega_{011}^2 \right) \left(p^2 + \frac{\omega_{012}}{Q_{12}} p + \omega_{012}^2 \right) (p + \omega_{013}) \dots}{\left(p^2 + \frac{\omega_{021}}{Q_{21}} p + \omega_{021}^2 \right) \left(p^2 + \frac{\omega_{022}}{Q_{22}} p + \omega_{022}^2 \right) (p + \omega_{023})}, \quad (4.102)$$

первый сомножитель, второй сомножитель и т.д.

Достоинства:

- простота проектирования;
- простота настройки, так как каскады можно настраивать по отдельности;
- малая потребляемая мощность, поскольку каждый каскад можно построить на минимальном количестве ОУ.

Недостатки:

- трудно обеспечить точную форму частотной характеристики, так как погрешности всех каскадов суммируются.

Поскольку последовательность включения каскадов может быть произвольной, имеется возможность получения оптимальной комбинации полюсов и нулей передаточной функции (4.102). Оптимальная комбинация зависит от конкретных условий, но в большинстве случаев обычно требуются следующие свойства:

- наибольший динамический диапазон, т.е. гарантия того, что ни один из каскадов не войдет в насыщение раньше других;
- минимальная зависимость от параметров ОУ;
- простота настройки.

Общее правило заключается в том, что наибольший динамический диапазон фильтра достигается при максимально плоской АЧХ на каждом участке. Этого добиваются, объединяя в пары каскады с высокодобротными полюсами с каскадами, имеющими нули на максимально близких частотах.

Как и при сдвигании полюсов и нулей, в каждом конкретном случае можно найти оптимальную последовательность включения каскадов фильтра с разной частотой среза.

1. Для увеличения динамического диапазона добротность полюсов каскадов должна увеличиваться от входа к выходу.

2. При больших высокочастотных помехах каскад ФНЧ лучше включать на входе для того, чтобы избежать погрешностей, связанных с ограниченной скоростью нарастания сигнала ОУ.

3. Каскад ФВЧ или ППФ должен быть последним каскадом всего фильтра с тем, чтобы смещение по постоянному току определялось только смещением этого последнего каскада (касается только ФВЧ и ППФ).

4.10. Чувствительность фильтров к изменению параметров элементов

Стабильность (чувствительность) фильтра определяется тем, как скажутся на его характеристиках небольшие вариации параметров элементов схемы, возникающие из-за температурных дрейфов, погрешностей номиналов и старения. В некоторых случаях даже небольшое отклонение значения элемента фильтра от номинального может вызвать значительные изменения его характеристик.

Для рассмотренных ранее схем фильтров такие основные параметры, как частота полюса ω_0 , добротность Q и коэффициент передачи в полосе пропускания K , можно представить в виде функций значений элементов схемы:

$$\begin{aligned}K &= f_K(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m), \\Q &= f_Q(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m), \\ \omega_0 &= f_{\omega_0}(R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m),\end{aligned}$$

где $R_1, R_2, \dots, R_n, C_1, C_2, \dots, C_m$ — значения резисторов и конденсаторов.

Кроме того, в этих выражениях можно учесть такие побочные эффекты, как паразитные емкости и ограничения, накладываемые ОУ.

Чувствительность какого-либо параметра фильтра f к вариациям конкретного элемента x_i математически определяется выражением

$$S_{x_i}^f = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} \approx \frac{\delta f}{f} \frac{x_i}{f}, \quad (4.103)$$

где $S_{x_i}^f$ — чувствительность f к изменениям x_i .

Чувствительности параметров K , ω_0 и Q к вариациям элементов можно найти, беря частную производную соответствующего выражения по конкретному элементу, умножая ее на значение элемента, а затем деля результат на K , ω_0 и Q . Чувствительность равная 1 означает, что изменение значения элемента на 1 % вызывает 1 %-ное изменение параметра фильтра.

Общая погрешность параметра фильтра (в приведенном далее примере это Q — добротность) при вариациях значений всех элементов схемы находится суммированием чувствительностей по отдельным элементам:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx \left(\left| S_{R_1}^Q \right| \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) + \left(\left| S_{R_2}^Q \right| \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) + \dots + \left(\left| S_{R_n}^Q \right| \frac{\Delta R_n}{R_n} \right) + \left(\left| S_{C_1}^Q \right| \frac{\Delta C_1}{C_1} \right) + \left(\left| S_{C_2}^Q \right| \frac{\Delta C_2}{C_2} \right) + \dots + \left(\left| S_{C_n}^Q \right| \frac{\Delta C_n}{C_n} \right), \quad (4.104)$$

причем вместо Q можно подставить любой другой параметр. Здесь предполагается наихудший случай, когда погрешности, вносимые отдельными элементами, суммируются.

Анализ чувствительности фильтра к вариациям элементов (4.103) позволяет разработчику определить возможные для получения заданной характеристики допуски, выявляет те компоненты, погрешности которых сказываются на характеристиках фильтра в наибольшей степени, оценить необходимость введения подстроечных элементов.

Строго говоря, следовало бы определить в явном виде чувствительность всех параметров фильтра (K , ω_0 и Q) к вариациям каждого элемента схемы. Задача, в общем, несложная, так как обычно можно найти явные зависимости K , ω_0 и Q от значений элементов, но она оказывается достаточно трудоемкой из-за большого числа компонентов. Как правило, после приобретения некоторого опыта, по виду выражений для K , ω_0 и Q можно «на глаз» определить, вариации каких элементов в наибольшей степени сказываются на характеристиках фильтра.

4.11. Кварцевые, электромеханические фильтры и фильтры на поверхностных акустических волнах

Кварцевые фильтры. Многие кристаллы, такие как кварц, турмалин и др., обладают пьезоэлектрическим эффектом. Последний заключается в появлении на поверхности определенным образом вырезанной из кристалла пластины электрических зарядов одного знака при механическом ее сжатии и противоположного при растяжении. Пластина при заряде сжимается или расширяется в зависимости от знаков заряда.

Кварцевая пластина, помещенная между плоскими электродами (обкладками), к которым подведено переменное напряжение, совершает колебательные движения и ведет себя как электрическая колебательная система. Благодаря большой механической прочности и упругости кварца полученные таким образом колебательные системы оказываются надежными и высокодобротными.

На рис. 4.47, *а* приведены условное изображение кварцевой пластины с обкладками и ее эквивалентная схема. При подключении к зажимам 1-2 переменного напряжения кварц ведет себя как высокодобротный трехэлементный двухполюсник LC с двумя резонансными частотами.

Это свойство кварца привело к широкому использованию его для стабилизации частоты автоколебаний и при построении частотных электрических фильтров. Наибольшее распространение получили полосовые кварцевые фильтры, широко применяемые в аппаратуре связи и телемеханики. Пример схемы такого фильтра и его характеристика затухания приведены на рис. 4.47, *б*, *в* и *г*.

Кварцевые резонаторы с высокой добротностью характеризуются не только малым сопротивлением потерь, но и большой индуктивностью

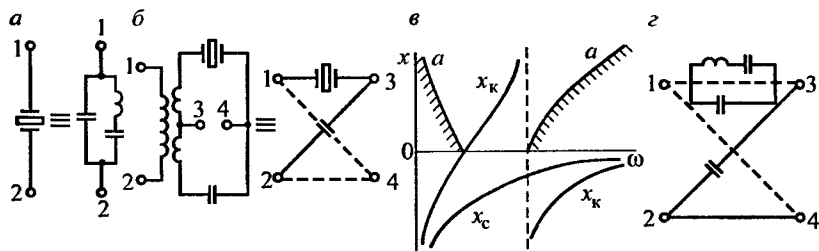


Рис. 4.47

L_1 при малой емкости C_1 , при этом резонансные частоты получаются близкими друг к другу.

Для расширения полосы пропускания кварцевых фильтров применяют расширительные катушки индуктивности.

На рис. 4.48, *а* изображена схема фильтра с расширительными катушками. На рис. 4.48, *б* и *в* приведены частотная зависимость сопротивления плеч этой схемы и характеристики затухания фильтра.

При подключении расширительных катушек полоса пропускания фильтра расширялась до частоты дополнительного резонанса в сопротивлении Z_1 .

Расчет фильтра по эквивалентной схеме кварцевого резонатора не отличается от расчета мостового фильтра LC .

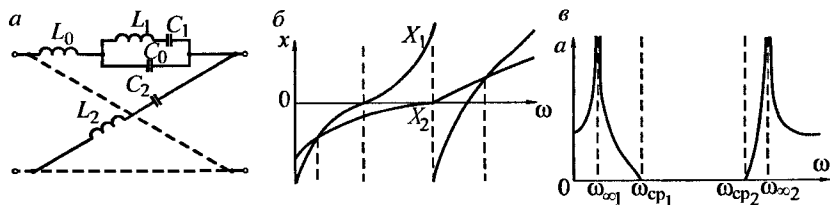


Рис. 4.48

Электромеханические фильтры. В последнее время в качестве резонаторов стали применять механические системы. Соответствующие фильтры получили название электромеханических (ЭМФ). Электромеханические фильтры с механическими резонаторами используются в диапазоне частот 50 Гц—1 мГц. Такие механические системы изготовляют в виде пластин и стержней, в которых возбуждаются механические колебания. Особо удобным оказалось использование металлических (из сплавов инварной группы) стержней, в которых возбуждаются крутильные колебания. Распространение крутильных колебаний в стержнях круглого сечения подчинено тем же законам, что и распространение электрических колебаний в линиях без потерь.

В качестве основных конструктивных элементов механических фильтров используют стержни двух разных диаметров, одни из которых представляют собой резонаторы, а другие — связки. Фильтр составляют из цепочки чередующихся резонаторов и связок с электромеханическими преобразователями на входе и выходе.

Пример построения звена такого фильтра и его эквивалентная схема приведены на рис. 4.49.

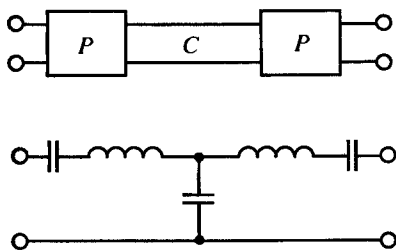


Рис. 4.49

Фильтры на поверхностных акустических волнах. Существуют разновидности ЭМФ, называемые фильтрами на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Эти волны являются разновидностью механических колебаний, которые распространяются в тонком поверхностном слое твердого тела, имеющего форму пластины или стержня. Возбуждение ПАВ в кварцевой пластине показано на рис. 4.50, *а*. Между дву-

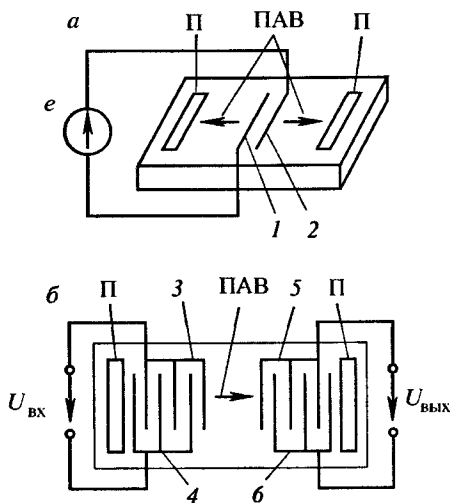


Рис. 4.50

мя тонкими электродами 1 и 2 в поверхностном слое пластины возникает деформация растяжения—сжатия, как и в обычном пьезоэлектрическом преобразователе. При этом возникают ПАВ, распространяющиеся к краям пластины. У этих краев размещаются поглотители П, предотвращающие отражение от них бегущих волн.

Возбудитель ПАВ в фильтре состоит из множества электродов, подключенных к общим шинам 3, 4 (рис. 4.50, б), и называется встречно-штыревым преобразователем (ВШП). На выходном конце фильтра также имеется ВШП с общими шинами 5 и 6. ПАВ, возбужденные во входном ВШП, распространяются к выходному ВШП, в котором они преобразуются вновь в электрические колебания. Таким образом, промежуток между входным и выходным ВШП является акустической (механической) линией связи между ними с некоторым волновым сопротивлением r .

ВШП имеют две конструктивные особенности. Во-первых, расстояния между любыми двумя смежными электродами равны половине длины волны. Поэтому любой междуэлектродный промежуток настроен в резонанс и образует вместе с электродами пьезоэлектрический резонатор (см. рис. 4.47). Во-вторых, любые смежные электроды ВШП подключены к противоположным шинам (см. рис. 4.50, б), которые имеют потенциалы противоположной полярности. Поэтому электрические поля в смежных пьезоэлектрических резонаторах имеют встречные направления. Следовательно, и механические колебания в смежных резонаторах происходят в противофазе. Таким образом, смежные резонаторы нельзя считать соединенными параллельно, хотя их электроды подключены к общим шинам, поскольку параллельно включенные резонаторы колебались бы в фазе.

Чтобы учесть противофазность колебаний смежных пьезоэлектрических резонаторов, их надо соединить полуволновыми отрезками линии с волновым сопротивлением r , которые являются продолжением акустической линии связи между ВШП. При этом образуется эквивалентная схема звена ВШП, показанная на рис. 4.51. Следует учесть, что в этой схеме проводимость B равна половине полной проводимости пьезоэлектрического резонатора, который соответственно делится при разбиении ВШП на звенья. Из таких цепочечно соединенных звеньев состоит как входной, так и выходной ВШП. Следовательно, оба они представляют собой многозвенные цепочечные пьезоэлектрические фильтры, соединенные акустической линией связи.

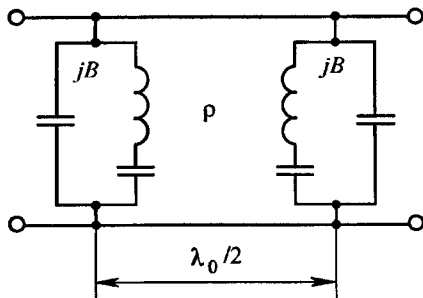


Рис. 4.51

Фильтры на ПАВ являются полосовыми фильтрами и используются в диапазоне частот 1 МГц — 3 ГГц.

4.12. Корректоры амплитудно-частотных характеристик в системах автоматики, телемеханики и связи

Корректорами амплитудно-частотных характеристик называют четырехполосники, включаемые в тракты передачи сигналов систем автоматики, телемеханики и связи для устранения амплитудно-частотных искажений (см. рис. 4.5). Эти четырехполосники могут быть и неполными. В частности, плавное уменьшение затухания с увеличением частоты можно получить по схеме, приведенной на рис. 4.52, если подобрать двухполосник так, чтобы его сопротивление $Z_1(\omega)$ уменьшалось с повышением частоты в заданном диапазоне.

В простейшем случае таким двухполосником может быть конденсатор. Увеличивая или уменьшая его емкость, можно регулировать крутизну кривой затухания. Лучшую кривую затухания можно получить, применив достаточно сложный многоэлементный двухполосник. Для

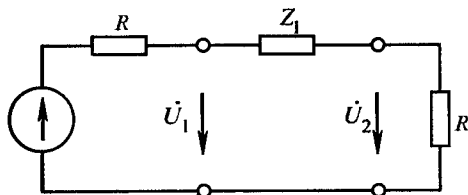


Рис. 4.52

выбора элементов двухполюсника следует задать ряд значений затухания на нескольких частотах $\omega_1, \omega_2, \dots$, определив соответствующие значения $Z_1(\omega_1), Z_1(\omega_2)$ и т. д.

Не исключено, что при попытках получить какую-либо зависимость $Z_1(\omega)$ для двухполюсника с конечным числом элементов выявится невозможность его реализации. Признаком этого являются отрицательные значения параметров двухполюсника. В подобных случаях необходимо увеличить число его элементов.

Недостаток корректоров, выполненных в виде неполных четырехполюсников, заключается в нарушении ими условия согласования нагрузки с системой передачи. Поэтому их применяют только в устройствах автоматики и связи, которые не соединены с линиями, преимущественно в усилителях.

Если цепь используют для корректировки частотной зависимости затухания линий и включают на ее входе или выходе, то должно быть по возможности выполнено условие согласованности нагрузки. Волновое сопротивление линий с малыми потерями в области достаточно высоких частот почти активно и мало зависит от частоты. Поэтому корректоры строят по четырехполюсным схемам с активным характеристическим сопротивлением. Таким сопротивлением обладают мостовые четырехполюсники, у которых в качестве $Z_1(\omega), Z_2(\omega)$ применены взаимнообратные двухполюсники, частотные зависимости сопротивления которых удовлетворяют условию $Z_1(\omega) Z_2(\omega) = R^2$. По формуле (4.62)

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2} = R.$$

Практически в последнее время корректоры амплитудно-частотных характеристик преимущественно строят по схеме, приведенной на рис. 4.53, а.

Постоянная передача такой цепи определяется выражениями

$$e^g = \frac{Z_1 + R}{R}, \quad a = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|, \quad 10^{0,05a} = \left| 1 + \frac{Z_1}{R} \right|. \quad (4.105)$$

Как видно, свойства указанной схемы определяются очень простыми выражениями. Из них следует, что зависимость затухания от частоты целиком характеризуется частотной зависимостью сопротивления $Z_1(\omega)$, так как $Z_2(\omega) = R/Z_1(\omega)$.

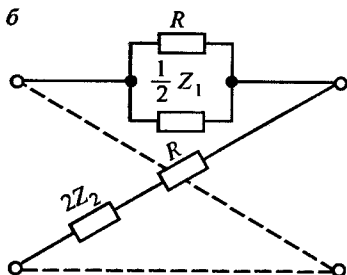
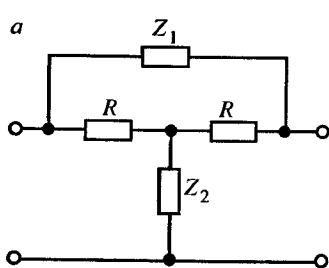


Рис. 4.53

Выбирая в качестве Z_1 двухполюсники с разными частотными зависимостями сопротивления, можно получать различные частотные характеристики затухания. Например, если в качестве Z_1 взять конденсатор, а в качестве Z_2 — катушку без потерь, то получим схему, затухание которой неограниченно велико при $Z_2 = 0$ и уменьшается с ростом частоты. Применив в качестве Z_1 катушку без потерь, а в качестве Z_2 конденсатор, получим схему, затухание которой на нулевой частоте равно нулю и растет с увеличением частоты.

Если желательно, чтобы затухание, оказываемое схемой постоянному току, не было неограниченно велико или равно нулю, то в схеме (см. рис. 4.53, а) Z_1 и Z_2 должны содержать также активные сопротивления, подключенные к конденсатору параллельно, а к катушке последовательно. Сопротивления $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$ и $Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{r_2} + j\omega C_2}$ будут

удовлетворять условию взаимной обратимости $Z_1 Z_2 = R^2$, если их элементы подобраны так, что $r_1 r_2 = R^2 = L_1 / C_2$. Действительно,

$$Z_1 Z_2 = \frac{r_1 + j\omega L_1}{(1/r_2) + j\omega C_2} = \frac{r_1 + j\omega C_2 R^2}{(r_1/R^2) + j\omega C_2} = R^2.$$

Два сопротивления: одно, образованное последовательным, а другое — параллельным соединением активного сопротивления с реактивным, оказываются взаимно обратными и в том случае, если реактивные сопротивления сколь угодно сложны, но удовлетворяют условию $r_1 r_2 = x_1 x_2 = R^2$.

При подборе элементов схемы корректора мы сталкиваемся с задачей аппроксимации, решаемой совместно с задачей реализации.

Для аппроксимации функции $10^{0,05a} = \left| 1 + \left(\frac{Z_1}{R} \right) \right|$ следует задать значения затухания на различных частотах и получить необходимое число уравнений для определения всех элементов двухполосника сопротивлением Z_1 . Чем точнее должна быть реализована кривая затухания, тем более сложными должны быть взяты сопротивления $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$. Корректоры амплитудно-частотных характеристик строят также по мостовой или скрещенной схеме.

Сопротивления плеч моста Z_{1M} и Z_{2M} , эквивалентного схеме, приведенной на рис. 4.53, б, с сопротивлениями Z_1 и Z_2 определяют по соотношениям

$$\frac{1}{Z_{1M}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{Z_1}; \quad Z_{2M} = R + 2Z_2. \quad (4.106)$$

Расчет корректора амплитудно-частотной характеристики.

Рассмотрим порядок расчета корректора на простом примере. Для определенности предположим, что исходя из заданной кривой затухания в качестве Z_1 выбрано параллельное соединение активного сопротивления и конденсатора (рис. 4.54, а). Затухание такой схемы уменьшается с частотой и конечно на частоте $\omega = 0$ (рис. 4.54, б). В этом случае

$$Z_1 = \frac{r_1}{1 + j\omega r_1 C_1} = \frac{r_1}{1 + j \frac{r_1}{x_1}}. \quad (4.107)$$

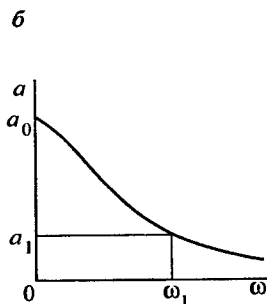
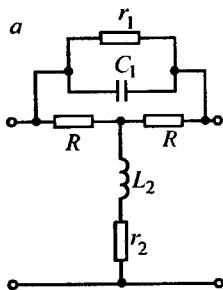


Рис. 4.54

Затухание определяется из формулы (4.105), используя для замены в ней выражение (4.107):

$$10^{0,05a} = \left| \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right) + j\omega r_1 C_1}{1 + j\omega r_1 C_1} \right| = \left| \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right) + j \frac{r_1}{x_1}}{1 + j \frac{r_1}{x_1}} \right|. \quad (4.108)$$

Для расчета требуемых значений элементов корректора следует, задавшись затуханиями на двух частотах, определить r_1 и C_1 схемы. Подставляя заданные значения затухания и частоты в выражение (4.108), можно получить два уравнения, необходимые для вычисления r_1 и C_1 . Уравнение (4.108) определяет модуль комплексного числа, что затрудняет вычисления.

Для решения задачи уравнение (4.108) перепишем в виде

$$10^{0,1a} = \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^2 + \omega^2 r_1^2 C_1^2}{1 + \omega^2 r_1^2 C_1^2} = \frac{\left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^2 + \frac{r_1^2}{x_1^2}}{1 + \frac{r_1^2}{x_1^2}}. \quad (4.109)$$

Наибольшее затухание корректор оказывает токам с нулевой частотой. Оно определяется соотношением

$$10^{0,1a_0} = \left(1 + \frac{r_1}{R}\right)^2, \quad (4.110)$$

где a_0 — затухание на частоте $\omega = 0$.

Затухание a_0 и сопротивление R следует считать заданными. Сопротивление r_1 определяется из уравнения

$$r_1 = R \left(10^{0,05a_0} - 1\right). \quad (4.111)$$

Теперь в выражении (4.109) неизвестным остается только C_1 .

Обозначим $\omega^2 r_1^2 C_1^2 = \frac{r_1^2}{x_1^2} = k^2 \omega^2$,

тогда

$$10^{0,1a} = \frac{10^{0,1a_0} + k^2 \omega^2}{1 + k^2 \omega^2}. \quad (4.112)$$

Задаваясь теперь одним значением a_1 на одной из частот рабочего диапазона, например ω_1 , найдем

$$k = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{10^{0,1a_0} - 10^{0,1a_1}}{10^{0,1a_1} - 1}}. \quad (4.113)$$

После определения $k = r_1 C_1$ элементы корректора рассчитывают по формулам

$$C_1 = k/r_1; \quad r_2 = R^2/r_1; \quad L_2 = C_1 R^2. \quad (4.114)$$

Строят кривую затухания по формуле (4.109) и сопоставляют ее с заданной. Если расхождения между этими кривыми в рабочем диапазоне частот превышают допустимые по условиям задачи, то выполняют новый расчет для более сложной схемы.

При проектировании корректоров имеются две возможности. Первая — построить однозвенный корректор с достаточно сложными многоэлементными сопротивлениями $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$, которые скорректировали бы амплитудно-частотную характеристику (частотную зависимость затухания) всего тракта передачи сигналов. Вторая — использовать несколько одинаковых звеньев невысокого порядка, каждый из которых корректирует часть тракта, и соединить их цепочечно.

Пример. Рассчитаем корректор амплитудно-частотной характеристики, предназначенных для устранения искажений сигналов в диапазоне частот от 300 до 3000 Гц в кабельной линии с точностью $\Delta a = \pm 0,5$ дБ, затухание которой зависит от частоты так, как это указано ниже.

Частота f , Гц	0	300	500	800	1000	2000	2400	3000
Затухание a , дБ	1,7	2,5	3,2	4,1	4,4	5,9	6,5	7,0

$|Z_B| = 400$ Ом на всех частотах.

Так как суммарная характеристика затухания линии и корректора $a_{\text{л}} + a_{\text{к}}$ в корректируемом диапазоне частот не должна зависеть от частоты, то на первом этапе расчета может быть определена характеристика затухания корректора $a_{\text{кТР}}$:

$$a_{\text{кТР}} = a_{\Sigma} - a_{\text{л}}.$$

Поскольку включение корректора неизбежно внесет некоторое дополнительное затухание током с самой высокой частотой, суммарное затухание должно лежать в пределах $a_{\Sigma} = (1,1 \dots 1,2) a_{л \max}$ ($a_{л \max}$ — максимальное затухание линии на верхней частоте корректируемого диапазона). Заданное суммарное затухание $a_{\Sigma} = 1,1 \times 7 = 7,7$ дБ. Тогда затухание корректора $a_{к \text{ ТР}}$ будет:

Частота f , Гц	0	300	500	800	1000	2000	2400	3000
Затухание $a_{к}$, дБ	5,7	5,2	4,5	3,6	3,3	1,8	1,2	0,7

По формуле (4.111) найдем

$$r_1 = R(10^{0,05a_0} - 1) = 600(1,027 - 1) = 556,5 \text{ Ом.}$$

Для определения C_1 через k по формулам (4.112) и (4.113) зададимся затуханием на одной из частот рабочего диапазона. Выберем в качестве f_1 частоту 1000 Гц. На этой частоте затухание (см. рис. 4.55) должно быть $a_{л} = 3,5$ дБ.

Подставляя эти данные в формулу (4.112), получим

$$k = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{10^{0,1a_0} - 10^{0,1a_1}}{10^{0,1a_1} - 1}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1000} \sqrt{\frac{3,715 - 2,138}{2,138 - 1}} = 1,87 \cdot 10^{-4};$$

$$C_1 = k/r_1 = \frac{1,87 \cdot 10^{-4}}{556,5} = 3,36 \cdot 10^{-7} \text{ Ф, } r_2 = R^2/r_1 = \frac{600^2}{556,5} = 647 \text{ Ом,}$$

$$L_2 = C_1 R^2 = 0,121 \text{ Гн}$$

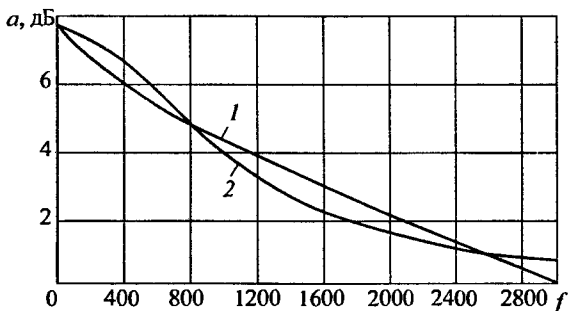


Рис. 4.55

Подставляя значения k^2 в формулу (4.112) получим следующие значения затухания:

Частота f , Гц	0	300	500	800	1000	2000	2400	3000
Затухание a_k , дБ	5,7	5,33	4,79	3,87	3,3	1,5	1,14	0,79
Отклонения затухания, Δa , дБ	0	0,13	0,29	0,27	0	-0,3	-0,06	0,09

По полученным данным строим зависимость затухания от частоты (см. рис. 4.55). На этом рисунке показаны расхождения между заданным ($a_{k\text{TP}}$ — кривая 1) и полученным (a_k — кривая 2) затуханиями. Поскольку эти расхождения менее заданных $\Delta a = \pm 0,5$ дБ, на этом варианте расчета можно остановиться. Если расхождения больше заданных, следует повторить расчет для другого варианта. Для уменьшения неточности корректировки можно увеличить число входящих в корректор звеньев или перейти к сложным схемам звеньев, например, содержащим двухэлементные реактивные сопротивления (рис. 4.56, а).

Порядок расчета корректора с двухэлементным и реактивными сопротивлениями. По формулам (4.107) и (4.108) можно рассчитать и более сложные схемы. Рассмотрим, например, схему корректора, частотная зависимость затухания которого приведена на рис. 4.56, б. Эту схему следует использовать для корректировки затухания линии, если рабочие частоты лежат в полосе ниже ω_0 .

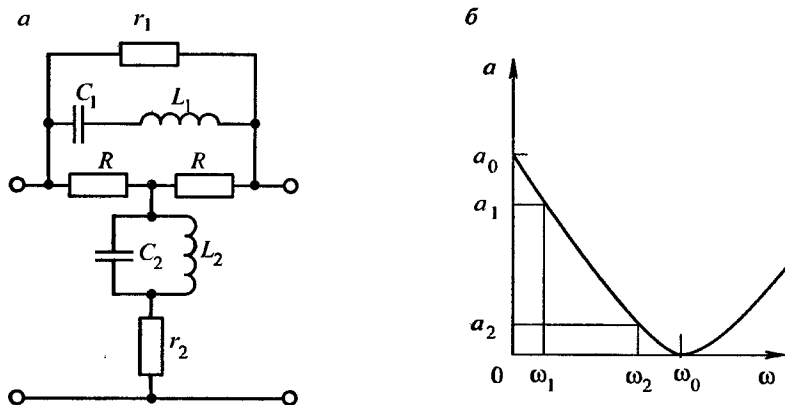


Рис. 4.56

Сопротивление r_1 рассматриваемой схемы рассчитывается по формуле (4.107) через затухание на нулевой частоте. По уравнению (4.108) по затуханиям a_1 и a_2 определяются два значения $k\omega$ на частотах f_1 и f_2 :

$$k_1\omega = \sqrt{\frac{10^{0,1a_0} - 10^{0,1a_1}}{10^{0,1a_1} - 1}}; \quad k_2\omega = \sqrt{\frac{10^{0,1a_0} - 10^{0,1a_2}}{10^{0,1a_2} - 1}}.$$

Для рассматриваемой схемы

$$k\omega = \frac{r_1}{x_1} = r_1 \frac{\omega}{L_1} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}; \quad k = \frac{r_1}{L_1} \frac{1}{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

Как видно, в этом случае k зависит от частоты. Эта зависимость определяется соотношением

$$k\omega^2 L_1 - k\omega_p^2 - k\omega_p^2 L_1 = r_1. \quad (4.115)$$

Подставляя в эту формулу два значения $k\omega$ и две частоты, получим систему из двух уравнений:

$$k_1\omega_1^2 L_1 - k_1\omega_p^2 L_1 = r_1; \quad k_2\omega_2^2 L_1 - k_2\omega_p^2 L_1 = r_1. \quad (4.116)$$

с двумя неизвестными L_1 и $\omega_p L_1$.

Решая систему уравнений (4.116), определяем L_1 и $\omega_p^2 L_1$, а по ним и остальные элементы схемы по формулам

$$C_1 = \frac{1}{\omega_p^2 L_1}; \quad r_2 = \frac{R^2}{r_1}; \quad C_2 = L_1 / R^2; \quad L_2 = C_1 R^2. \quad (4.117)$$

Применение корректоров, составленных из нескольких рассмотренных звеньев (см. рис. 4.56), позволяет решать многие практические задачи.

Более подробные сведения о расчете корректоров выходят за рамки данной книги и могут быть найдены в специальной и справочной литературе.

4.13. Корректоры фазочастотных характеристик трактов передачи сигналов

Тракты передачи сигналов в системах автоматики, телемеханики и связи включают в себя линии, трансформаторы, фильтры и другие устройства. Вследствие конечности фазовой скорости и изменения напряжения и тока на выходе тракта передачи отстает во времени от их изменения на входе. Это запаздывание характеризуется для каждой частотной составляющей сигнала фазовым сдвигом или фазовым временем прохождения.

Если фазовая скорость v для различных частотных составляющих неодинакова, то сигнал при передаче по тракту передачи подвергается фазочастотным искажениям. В этом случае время прохождения характеризуют величиной

$$t_{\text{гр.пр}} = db(\omega) / d\omega, \quad (4.118)$$

называемой групповым временем прохождения. Значения группового времени прохождения на определенной частоте $\omega_1 - t_{\text{гр.пр}}(\omega_1)$ характеризует время запаздывания огибающей группы частотных составляющих сигнала, лежащих в узкой полосе частот вблизи ω_1 .

Для корректирования фазочастотных искажений в тракты передачи сигналов включают корректоры группового времени прохождения, фазовые характеристики используемых в качестве корректоров четырехполосников подбирают так, чтобы время прохождения в откорректированном тракте с включенным корректором

$$t_{\text{гр.пр}} = t_{\text{гр.пр.тр}} + t_{\text{гр.пр.к}}$$

независимо от частоты тока, или, что то же самое, чтобы

$$b(\omega) = b_{\text{ГР}}(\omega) + b_{\text{к}}(\omega) = k_{\omega} + b_0. \quad (4.119)$$

Здесь $t_{\text{гр.пр.тр}}$ — время прохождения сигналов по тракту;

$t_{\text{гр.пр.к}}$ — время прохождения сигналов корректора;

$b(\omega)$ — фазовая характеристика откорректированного тракта;

$b_{\text{ГР}}(\omega)$ — фазовая характеристика тракта;

$b_{\text{к}}(\omega)$ — фазовая характеристика корректора.

В качестве фазовых корректоров применяют четырехполосники, пропускающие все частоты с малым затуханием и не оказывающие существенного влияния на характеристику тракта. Этому условию

удовлетворяют мостовые пассивные цепи и специально подобранные активные rC -цепи.

Мостовая схема пропускает все частоты, если входящие в схему сопротивления Z_1 и Z_2 — взаимнообратные реактивные двухполюсники. Для мостовой схемы с взаимнообратными сопротивлениями характеристическое сопротивление и постоянная передачи определяется выражениями

$$Z_M = R; \quad \operatorname{th} \frac{g}{2} = \frac{Z_1}{R}; \quad e^g = \frac{R + Z_1}{R - Z_1}, \quad (4.120)$$

Независимость Z_M от частоты позволяет хорошо согласовать эти схемы с нагрузками. При реактивных сопротивлениях Z_1 и Z_2 :

$$Z_1 = jx_1; \quad \operatorname{th} \frac{g}{2} = \frac{Z_1}{R} = j \frac{x_1}{R}, \quad (4.121)$$

следовательно,

$$a = 0; \quad g = jb; \quad \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{x_1}{R}; \quad (4.122)$$

$$e^{jb} = \frac{R + jx_1}{R - jx_1}, \quad (4.123)$$

откуда

$$b_k = \ln \frac{R + jx_1}{R - jx_1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{R}; \quad (4.124)$$

$$l_{\text{гр.пр.к}} = \frac{db_k}{d\omega} = \frac{2 \frac{dx_1}{d\omega}}{R \left(1 + \left(\frac{x_1}{R} \right)^2 \right)}. \quad (4.125)$$

Свойства такой схемы целиком определяются свойствами x_1 . Практически фазовые корректоры строят по схемам, эквивалентным мостовым, которые содержат меньшее число элементов.

Обычно для построения фазовых корректоров в сопротивлении Z_1 и Z_2 один или два элемента.

Такие схемы называются фазовыми звеньями первого и второго порядка соответственно. Если фазовые звенья первого или второго порядка не обеспечивают требуемую фазовую характеристику, соединяют цепочечно несколько звеньев.

Фазовый контур первого порядка. Сопротивления Z_1 и Z_2 звена первого порядка равны (рис. 4.57)

$$Z_1 = j\omega L_1 \quad \text{и} \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}; \quad \text{или} \quad Z_1 = pL_1, \quad Z_2 = \frac{1}{pC_2},$$

где p — в общем случае $p = \delta + j\omega$. Подставив значение Z_1 и Z_2 в выражение (4.120) получим

$$e^g = \frac{R + pL_1}{R - pL_1}. \quad (4.126)$$

Корни числителя и знаменателя (4.126) равны:

$$p_1 = -\frac{R}{L_1} = -\delta_1 \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{R}{L_1} = \delta_1. \quad (4.127)$$

Расположения нулей и полюсов показано на рис. 4.58, а. Учитывая (4.127),

$$e^g = \frac{p + \delta_1}{p - \delta_1} = \frac{1 + \frac{p}{\delta_1}}{1 - \frac{p}{\delta_1}}. \quad (4.128)$$

Из формулы (4.124)

$$b_k = \frac{1}{j} \ln \frac{1 + \frac{p}{\delta_1}}{1 - \frac{p}{\delta_1}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta_1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega L_1}{R} = 2 \operatorname{arctg}(k_1 \omega), \quad (4.129)$$

где $k_1 = \frac{L_1}{R}$.

Групповое время прохождения

$$t_{\text{гр.пр.к}} = \frac{2k}{1 + k^2 \omega^2}. \quad (4.130)$$

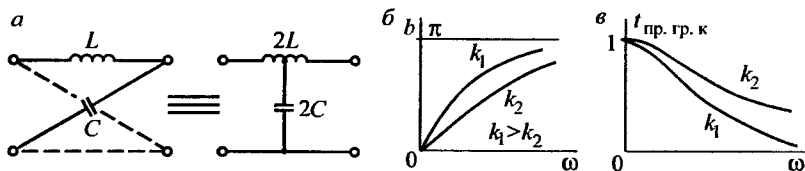


Рис. 4.57

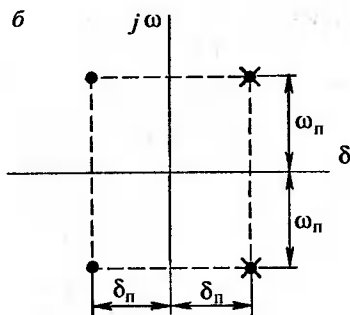
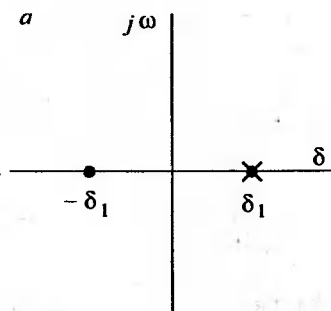


Рис. 4.58

Фазовый контур второго порядка. Сопротивления Z_1 и Z_2 фазового контура второго порядка (рис. 4.59, *a*) содержат два элемента

$$Z_1 = \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} = \frac{j\omega L_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2}$, или $Z_1 = \frac{pL_1}{1 - p^2 L_1 C_1}$.

Подставляя значение Z_1 в выражение (4.120) получим

$$e^g = \frac{R + p^2 L_1 C_1 R + pL_1}{R + p^2 L_1 C_1 R - pL}, \quad (4.131)$$

учитывая, что

$$L_1 C_1 = L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}; \quad R = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}},$$

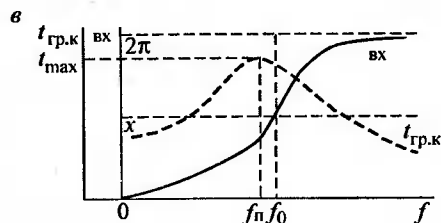
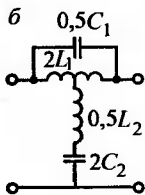
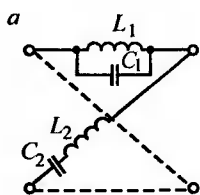


Рис. 4.59

получим

$$e^g = \frac{p^2 + p\omega_0 m + \omega_0^2}{p^2 - p\omega_0 m + \omega_0^2}, \quad (4.132)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \frac{\omega_0 L_1}{R}.$$

Корни многочлена числителя и знаменателя равны:

$$P_{1,3} = -\frac{m\omega_0}{2} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = -\delta_{\Pi} \pm j\omega_{\Pi};$$

$$P_{2,4} = \frac{m\omega_0}{2} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \delta_{\Pi} \pm j\omega_{\Pi}.$$

Функция коэффициента передачи (4.132) имеет два нуля (P_1, P_3) и два полюса (P_2, P_4). Нули и полюсы коэффициента передачи расположены симметрично относительно оси координат (рис. 4.58, б).

Для фазового сдвига и группового времени прохождения разложим многочлен числителя и знаменателя на множители:

$$e^g = \frac{(P - P_1)(P - P_3)}{(P - P_2)(P - P_4)};$$

$$e^g = \frac{1 + \frac{\omega - \omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}}{1 - \frac{\omega - \omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}} \frac{1 + \frac{\omega + \omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}}{1 - \frac{\omega + \omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}}. \quad (4.133)$$

Используя выражения (4.124) и (4.133) найдем фазовый сдвиг

$$b_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega - \omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega + \omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}, \quad (4.134)$$

где $\delta_{\Pi} = \frac{\omega_0^2 L_1}{2R}$, или $b_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{f - f_{\Pi}}{k} + 2 \operatorname{arctg} \frac{f + f_{\Pi}}{k}$, где $k = \frac{\pi f_0^2 L_1}{R}$.

Часто для расчета фазового сдвига контура второго порядка пользуются другой формулой. Ее можно получить, подставив в выражение (4.124) значение сопротивления x_1 :

$$b_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{x_1}{R} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega L_1}{R \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)} = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 f}{1 - b f^2}, \quad (4.135)$$

где $k_1 = \frac{2\pi L_1}{R}$; $b = \frac{1}{f_0^2}$.

Так как при частоте $\omega = \omega_0$ фазовый сдвиг равен 180° , а фазовый сдвиг контура второго порядка равен 360° (рис. 4.59, в), ввиду этого выражение (4.135) можно представить в виде

$$b_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 f}{1 - b f^2} + n\pi. \quad (4.136)$$

Коэффициент n в интервале частот $0 \dots \omega_0$ равен нулю, а при $\omega > \omega_0$ $n = 2$.

Групповое время прохождения корректора можно определить, используя выражения (4.125) и (4.134):

$$t_{\text{гр.пр.к}} = \frac{db_k}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{db_k}{df},$$

$$t_{\text{гр.пр.к}} = \frac{1}{\pi k} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{f - f_{\text{п}}}{k} \right)} + \frac{1}{1 + \left(\frac{f - f_{\text{п}}}{k} \right)^2} \right] \quad (4.137)$$

Пример расчета фазового корректора. В качестве примера рассмотрим порядок расчета фазового корректора второго порядка (см. рис. 4.59, а, б).

Пусть требуется рассчитать фазовый корректор для корректирования фазочастотной характеристики тракта передачи сигналов $b_{\text{тр.п}}$ (рис. 4.60) в интервале частот $f_{\text{н}} \dots f_{\text{в}}$.

Отклонение фазовой характеристики корректора b_k от требуемой $b_{\text{тр.к}}$ в заданном диапазоне частот не должна превышать Δb , т.е.

$$|b_{\text{тр.к}} - b_k| \leq \Delta b. \quad (4.138)$$

Сопrotивления нагрузок считаются заданными.

Задаются линейной зависимостью суммарной фазовой характеристикой тракта передачи $b_{\text{тр.п}}$ и корректора b_k в заданном диапазоне частот $f_H \dots f_B$,

$$b_k + b_{\text{тр.п}} = kf. \quad (4.139)$$

Производится расчет требуемой характеристики фазового сдвига корректора b_k по формуле

$$b_k = kf - b_{\text{тр.п}}. \quad (4.140)$$

Эта разность с увеличением частоты должна монотонно возрастать.

Рассчитываются коэффициенты k_1 и b в (4.135). Для нахождения коэффициентов k_1 и b составляем два уравнения. С этой целью на характеристике $b_{\text{тр.к}}$ выбираются два значения $b_{\text{тр.к}1}$ и $b_{\text{тр.к}2}$ на частотах f_1 и f_2 (см. рис. 4.60):

$$\frac{k_1 f_1}{1 - b f_1^2} = \text{tg} \frac{b_{\text{тр.к}1}}{2} = a_1;$$

$$\frac{k_1 f_2}{1 - b f_2^2} = \text{tg} \frac{b_{\text{тр.к}2}}{2} = a_2. \quad (4.141)$$

Решая уравнения (4.23) совместно определяют коэффициенты k_1 и b :

$$b = \frac{a_2 f_1 - a_1 f_2}{f_1 f_2 (a_2 f_2 - a_1 f_1)}; \quad (4.142)$$

$$k_1 = \frac{a_1 a_2 (f_2^2 - f_1^2)}{f_1 f_2 (a_2 f_2 - a_1 f_1)}. \quad (4.143)$$

Используя выражение (4.136) рассчитывают частотную характеристику фазового сдвига корректора b_k и проверяют, удовлетворяет ли b_k требуемой фазовой характеристике $b_{\text{тр.к}}$ с заданной точностью (см. рис. 4.60).

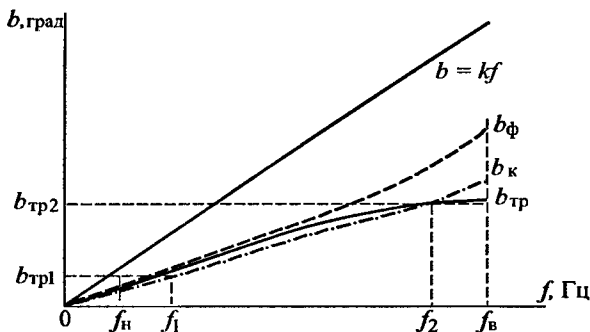


Рис. 4.60

Если разность $(b_{\text{тр.к}} - b_{\text{к}})$ на какой-либо частоте превышает заданную величину Δb , то необходимо изменить частоты f_1 и f_2 и повторить расчет. При невозможности обеспечить заданную точность одним корректором включают цепочечно два корректора.

После того как требуемая точность достигнута, рассчитываются элементы схемы корректора:

$$L_1 = \frac{k_1 R}{2\pi}, \text{ Гн}; \quad f_0 = \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_1}}, \text{ Гц} \quad (4.144)$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L_1}, \text{ Ф}; \quad L_2 = C_1 R^2, \text{ Гн}; \quad C_2 = \frac{L_1}{R^2}; \quad C_2 = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L_2}, \text{ Ф}.$$

Групповое время прохождения корректора $t_{\text{гр.пр.к}}$ рассчитывается, используя выражение (4.137).

Практически корректоры группового времени прохождения состоят из нескольких разных звеньев, представляющих собой фазовые контуры второго порядка, включаемые цепочечно. Необходимая частотная зависимость группового времени прохождения корректора получающаяся как сумма частотных зависимостей группового времени прохождения отдельных звеньев.

Активные корректоры фазочастотной характеристики рассмотрены в п. 4.10.

4.14. Принципы построения фильтрующих цепей на основе временных характеристик

Теория электрических фильтров представляет собой раздел ТЛЭЦ, рассматривающий задачу построения цепи по заданным частотным характеристикам. Свойства цепи можно отображать также временными характеристиками. Поэтому всякую цепь, например электрический фильтр, можно строить на основе заданной временной характеристики.

Пусть требуется построить электрическую цепь, в которой при воздействии на ее вход единичным скачком или импульсом напряжения возникает ток, изменяющийся во времени по закону $i = f(t)$. Здесь $f(t)$ произвольная функция времени, заданная уравнением или графиком. Она может быть характеристикой фильтра, выравнителя или другого устройства.

При построении цепи, ток в которой должен изменяться точно по заданному закону $i = f(t)$, в общем случае может появиться необходимость сделать эту цепь бесконечно сложной. Поэтому при проектировании электрической цепи с заданной временной характеристикой следует прежде всего определить допустимую погрешность в воспроизведении функции $f(t)$.

Точность воспроизведения заданной функции $f(t)$ в линейных цепях можно выразить различными способами в зависимости от способа представления самой функции. Например, если функция представлена рядом Фурье в виде суммы синусоидальных составляющих, точность воспроизведения ее вполне определяется числом и точностью воспроизведения отдельных гармонических составляющих. Если функция имеет вид ступенчатой линии, полученной суммированием отдельных прямоугольников, то точность воспроизведения функции определяется числом и точностью воспроизведения ординат. Оба способа представления функции вполне равноценны и могут быть использованы для решения поставленной задачи.

Рассмотрим построение цепи, переходная проводимость которой получается суммированием гармонических составляющих (рис. 4.61). Если все конденсаторы в цепи, представляющей собой сложный реактивный двухполюсник с сопротивлением $Z(\omega)$, заряжены до напряжения \dot{U} и затем разряжаются через индуктивности на сопротивление R ,

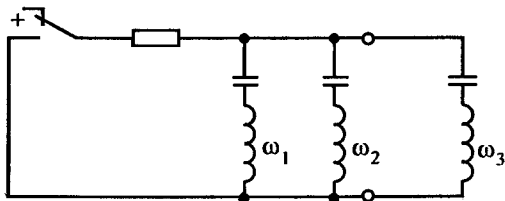


Рис. 4.61

то полный ток разряда $i(t)$ равен сумме токов отдельных ветвей. Ток каждой ветви изменяется по закону затухающих колебаний с частотой, равной частоте резонанса ветви.

При малых потерях и незначительном затухании колебаний ток в каждом резонансном контуре

$$i_k = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C_k \dot{U} = \omega_0 C_k \dot{U} = \frac{C_k \dot{U}}{\sqrt{L_k C_k}}$$

или

$$i_k = \dot{U} \sqrt{\frac{C_k}{L_k}} = \frac{\dot{U}}{\omega_0 L_k}.$$

Выбором сопротивлений отдельных ветвей $Z_k = \sqrt{\frac{L_k}{C_k}}$ можно изменять токи с отдельными частотами в соответствии со спектральным составом функции $f(t)$. Сумма всех синусоидальных токов приближенно дает требуемую функцию. Электрические колебания с теми же частотами и амплитудами возникают в ветвях цепи при подключении ее к постоянному напряжению и без предварительного заряда конденсатора.

Таким образом, цепь имеет необходимую переходную проводимость при единичном напряжении

$$A(t) = i(t) = \sum_{k=1}^N i_k \sin \omega_{0k} t. \quad (4.145)$$

Точность воспроизведения функции $f(t)$ зависит от числа слагаемых в разложении (4.145), т. е. от числа контуров в формирующей цепи. Очевидно, что в качестве формирующих цепей можно использовать также реактивные двухполосники других схем.

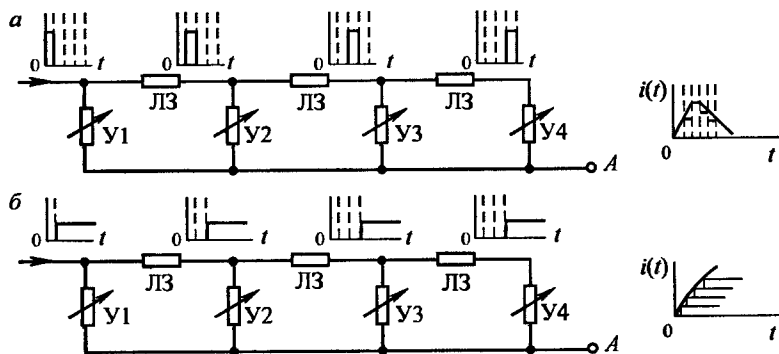


Рис. 4.62

Теперь обратимся к построению цепи, переходная проводимость которой получается способом суммирования ординат (рис. 4.62, а). На этом рисунке ЛЗ — линии задержки с временем задержки, равным длительности входного импульса t , У1—У4 — устройства, изменяющие значение напряжения импульса.

Если значения напряжения импульса на выходе каждого из устройств У1—У4 установить равным $f(kt)$, то полный ток, появляющийся на выходе всей системы в точке А, будет как раз представлять собой приближенно функцию $f(t)$. Чем больше число линий задержки и чем меньше длительность импульса, подаваемого на вход формирующей цепи, тем точнее будет воспроизведена функция $f(t)$.

Точно так же можно строить функции переходной проводимости при единичном напряжении (рис. 4.62, б).

Расчет временных характеристик фильтра по рабочему параметру передачи. Временные характеристики фильтров широко используют при исследовании условий передачи импульсных сигналов и вполне определяются их частотными или операторными характеристиками. Для простейших фильтров (рис. 4.63, а и б) временные характеристики определяют отысканием L - или F -преобразования соответствующих функций передачи, что является несложной задачей. Однако трудности быстро возрастают с усложнением схемы.

Рассмотрим для примера схему (рис. 4.63, в). Это звено ФНЧ типа m , нагруженное на постоянные активные сопротивления R .

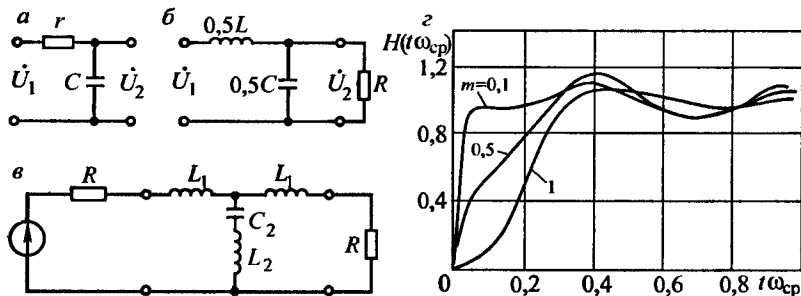


Рис. 4.63

Рабочий коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению

$$k_{pU} = \frac{E}{2\dot{U}_2} = \frac{Z_{\text{прив}}}{2R},$$

соответствующая функция передачи

$$k_{p\Gamma T} = \frac{1}{k_{pU}} = \frac{2\dot{U}_2}{E} = \frac{2R}{Z_{\text{прив}}},$$

где $Z_{\text{прив}} = \frac{(Z_{11} + R)(R + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}$.

Имея в виду, что в рассматриваемом случае

$$Z_{11} = Z_{22}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad Z_{11} = j\omega L_1 + Z_{12}; \quad Z_{12} = j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2};$$

найдем

$$Z_{\text{прив}} = (R + j\omega L_1) \left[2 + \frac{R + j\omega L_1}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \right];$$

$$F_{pU} = \frac{2R}{Z_{\text{прив}}} = \frac{2}{\left(1 + \frac{j\omega L_1}{R}\right) \left[2 + \frac{R\left(1 + \frac{j\omega L_1}{R}\right)}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}\right]}$$

Сопоставляя схемы, приведенные на рис. 4.63, в и 4.18, б, заметим, что

$$L_1 = \frac{mL}{2}; \quad C_2 = mC; \quad L_2 = L \frac{1-m^2}{4m}; \quad m^2 = \frac{L_1}{L_1 + 2L_2};$$

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2m^2}{L_1 C_1}} = \sqrt{\frac{2}{C_2(L_1 + 2L_2)}}; \quad Z_x(0) = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2L_1}{C_2}}.$$

Введем $\tau = \frac{\sqrt{L/C}}{\omega_{\text{ср}} R}$ и $v = \frac{Z_x(0)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, а также нормированную

частоту $\eta = \tau\omega$, $v = \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}}$. Тогда $\frac{\omega L_1}{R} = m\eta$, $\frac{2L_1}{C_2 R^2} = v^2$.

Имея в виду последние соотношения, представим F_{pU} в виде

$$F(\eta) = \frac{v^2 - \eta^2(1-m^2)}{(1+jm\eta)[v^2 - \eta^2(1-m^2) + jm\eta(1+jm\eta)]}$$

Вводя $p = j\eta$, получим

$$F(\eta) = \frac{v^2 + p^2(1-m^2)}{(1+mp)(v^2 + mp + p^2)}. \quad (4.146)$$

Выражение (4.146) есть нормированная рабочая функция передачи фильтра. Найдем корни многочлена знаменателя этого выражения и представим его в виде суммы простых дробей.

Знаменатель выражения (4.146) имеет нули при

$$p_1 = -\frac{1}{m}; \quad p_{2,3} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - v^2}.$$

Рабочую функцию передачи фильтра теперь можно представить в виде

$$F(p) = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \frac{C}{p-p_3}.$$

Если на вход фильтра воздействовать единичным напряжением $1(t)$, изображение которого по Лапласу $L[1(t)] \equiv \dot{U}(p) = \frac{1}{p}$, то выходное напряжение численно будет равно переходной проводимости при единичном напряжении: $H(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p} F(p)\right]$.

На рис. 4.63, *г* приведены зависимости нормированных значений функции $H(t\omega_{cp})$ для различных значений коэффициента m . Уменьшение значения m соответствует снижению индуктивности в схеме (см. рис. 4.63, *в*) и приводит к ускорению нарастания тока в сопротивлении R .

Для фильтра верхних частот (рис. 4.64, *а*) аналогичными рассуждениями получаем

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2m^2}{1-m^2}; \quad pC_1R = P; \quad \frac{Z_x(0)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}} = v;$$

$$F(p) = \frac{p}{v^2 + p} \frac{v^2(1-m^2) + m^2 p^2}{v^2 + m^2 p + m^2 p^2}. \quad (4.147)$$

Кривые, характеризующие соответствующую выражению (4.147) переходную проводимость $H(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p} F(p)\right]$, приведены на рис. 4.64, *б*.

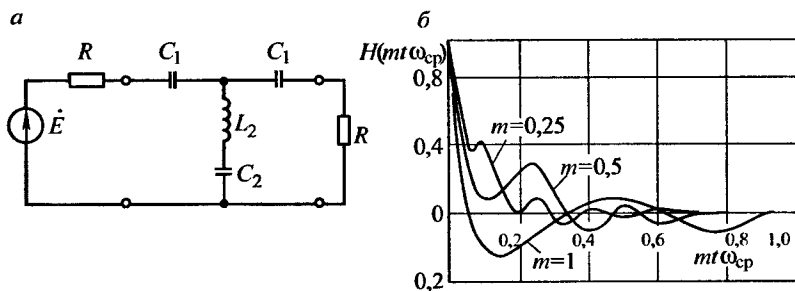


Рис. 4.64

Рассмотренные решения являются точными, вполне отражающими свойства исходных схем.

Расчет по характеристическим параметрам передачи. Если тот же способ решения — определение $F_{\text{раб}}(p)$ и $H(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p}F(p)\right]$ применить для многозвенных фильтров, то решение будет затруднено громоздкостью выражения для $F(p)$. Поэтому при определении временных характеристик многозвенных фильтров выгоднее предполагать согласованность нагрузки и пользоваться параметрами передачи g и Z_X . Для примера рассмотрим схему ФНЧ (рис. 4.65, а). Фильтр состоит из трех звеньев и предполагается нагруженным согласованно.

Для ФНЧ на основании выражения (4.18)

$$Z_X = Z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{\text{ср}}^2}},$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — угловая частота среза.

Изображение для тока на входе фильтра при действии единичного напряжения

$$i_1(t) = \frac{U(p)}{Z_X(p)} = \frac{U(p)}{\sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{\text{ср}}^2}}} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{p \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{p^2 + \omega_{\text{ср}}^2}}.$$

По таблице операционных соотношений находим

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}} \equiv J_0(at),$$

где J_0 — функция Бесселя.

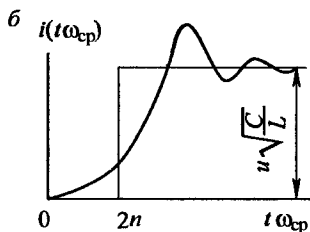
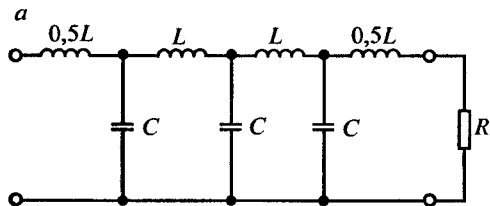


Рис. 4.65

Множитель $1/p$ в изображении соответствует интегрированию по t :

$$i_1(t) = \sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^{\omega_{cp} t} J_0(\omega_{cp} t) d(\omega_{cp} t).$$

Изображение тока на выходе фильтра

$$i_2(t) \equiv \frac{\omega_{cp}}{p \sqrt{\frac{L}{C} \sqrt{p^2 + \omega_{cp}^2}}} e^{-ng},$$

где n — число звеньев фильтра.

$$e^{-g} = \operatorname{ch} g - \operatorname{sh} g = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} - \sqrt{1 + \frac{Z_1}{2Z_2}} - 1 = 1 + 2 \frac{p^2}{\omega_{cp}^2} - 2 \frac{p}{\omega_{cp}} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{cp}^2}}.$$

Следовательно, e^{-g} можно представить так:

$$e^{-g} = \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{cp}^2}} - \frac{p}{\omega_{cp}} \right]^2; \quad e^{-ng} = \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega_{cp}^2}} - \frac{p}{\omega_{cp}} \right]^{2n}.$$

Тогда изображение тока на выходе фильтра

$$i_2(t) \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\left[\sqrt{p^2 + \omega_{cp}^2} - p \right]^{2n}}{p \sqrt{p^2 + \omega_{cp}^2}}.$$

По таблице операционных соотношений найдем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}} \left(\frac{\sqrt{p^2 + a^2} - p}{a} \right)^n \equiv J_n(at); \quad n > 1.$$

Отсюда

$$i_2(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^{\omega_{cp} t} J_{2n}(\omega_{cp} t) d(\omega_{cp} t).$$

Характер изменения тока на выходе ФНЧ тот же, что и тока на входе (рис. 4.65, б), однако с увеличением числа звеньев в фильтре повышается

порядок функции $u_1(t) = 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$. При этом удлиняется

промежуток времени до начала значительного роста тока и уменьшается частота его колебаний.

При $x < n$ функция Бесселя $J_n(\omega_{\text{ср}} t)$ весьма мала. Ее заметный рост начинается только при $x > n$. Это соответствует используемому при построении линий задержки свойству ФНЧ. Время, после которого начинается заметный рост тока на выходе, возрастает с увеличением числа звеньев.

Однако неправильно было бы считать, что ток на выходе фильтра имеет место только при $t > 2n/\omega_{\text{ср}}$. Так как фильтр составлен из сосредоточенных сопротивлений, то ток на его выходе появляется одновременно с током на входе, но нарастание его во времени идет сначала очень медленно и становится практически заметным только при $t > 2n/\omega_{\text{ср}}$.

Рассмотренное решение основано на известной идеализации — предположении согласованности нагрузки, а также идентичности всех звеньев фильтра. Сложность решения не зависит от числа последних.

Расчет по идеализированным характеристикам затухания α и фазы b , не учитывающим условия физической реализации. Практически фильтры содержат звенья типов k и m , различающиеся своими параметрами. Практически существующая схема фильтра и его характеристика приведены на рис. 4.66, а и б.

Совершенно очевидно, что в данном случае для расчета переходной функции оба рассмотренных выше способа не годятся. Здесь отказываются от исследования влияния каждого элемента схемы и аппроксимируют свойства передающей системы целиком.

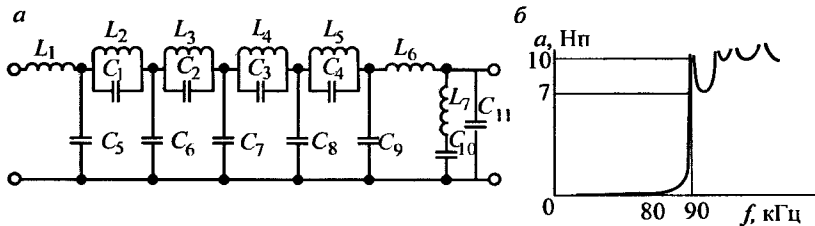


Рис. 4.66

Характеристика фильтра по затуханию показывает, что с известной степенью приближения можно считать, что

$$a = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega < \omega_{\text{ср}} \\ \infty & \text{при } \omega > \omega_{\text{ср}} \end{cases}, \quad b = \tau_3 \omega; \quad Z_X = R$$

(4.148)

Пусть на вход фильтра действует единичное напряжение. Представим его интегралом Фурье

$$u_1(t) = 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

Каждая частотная составляющая, лежащая в полосе $0 < \omega < \omega_{\text{ср}}$ будет передана через фильтр без изменения амплитуды, но со сдвигом по фазе на угол $b(\omega) = \tau_3 \omega$, что соответствует сдвигу соответствующей синусоиды по времени на $\frac{db}{d\omega} = \tau_3$. Все частотные составляющие, для которых $\omega > \omega_{\text{ср}}$ не будут переданы вовсе.

Таким образом, выражение для $\dot{U}_2(t) = H(t)$ будет иметь вид

$$u_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\text{ср}}} \frac{\sin \omega(t - \tau_3)}{\omega} d\omega. \quad (4.149)$$

Подстановкой $\omega(t - \tau_3) = x$, $\omega = \frac{x}{t - \tau_3}$ интеграл в выражении (4.149) сводится к интегральному синусу: $\int_0^Z \frac{\sin x}{x} dx = \text{sin} Z$, для которого

имеются таблицы. График $u_2(t) = H(t\omega_{\text{ср}})$ приведен на рис. 4.67.

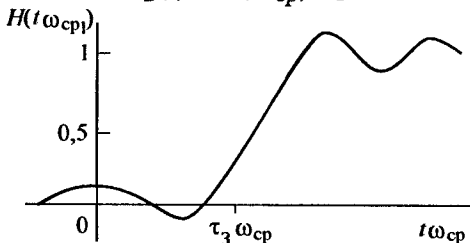


Рис. 4.67

Хотя полученное решение в ряде случаев и с достаточной точностью отображает процессы, оно имеет один существенный недостаток. Напряжение $u_2(t)$ не равно нулю для отрицательных значений t . Это значит, что оно появилось на выходе фильтра до включения напряжения $u_1(t)$ на его входе. Это несоответствие объясняется тем, что характеристики $a(\omega)$ и $b(\omega)$, которые мы приписали фильтру, являются характеристиками физически неосуществимой системы.

Несмотря на этот недостаток, решение (4.149) широко используют для оценки влияния ширины полосы пропускания фильтра на скорость нарастания сигнала, а также как первое приближение, на основе которого могут быть получены другие более точные решения.

Если на вход фильтра действует напряжение в виде единичного импульса

$$u_1(t) = \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega,$$

то на его выходе получим

$$\delta(t, \omega_{cp}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{cp}} \cos \omega t' d\omega = W(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_{cp} t'}{t'}; \quad t' = t - \tau_3. \quad (4.150)$$

Решение (4.150), полученное для идеального ФНЧ, можно использовать для построения соответствующей характеристики ПФ.

Перепишем соотношения (4.148) в виде $F(\omega) = 1$ при $0 < \omega < \omega_{cp}$; $F(\omega) = 0$ при $\omega > \omega_{cp}$.

Аналогичная характеристика для ПФ будет:

$F(\omega) = 0$ при $0 < \omega < \omega_1$; $F(\omega) = 1$ при $\omega_1 < \omega < \omega_2$; $F(\omega) = 0$ при $\omega > \omega_2$. Она может быть рассмотрена как разность двух функций $F_2(\omega)$ и $F_1(\omega)$, каждая из которых есть характеристика ФНЧ (рис. 4.68). На основании этого временная характеристика ПФ получается как разность временных характеристик ФНЧ.

Представление характеристики передачи фильтра в виде нескольких слагаемых можно использовать и для улучшения решения (4.145) более точным представлением характеристик ФНЧ.

Так, например, амплитудно-частотную характеристику фильтра с пологим срезом $F(\omega)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых $F_1 + F_2$ (рис. 4.69); F_1 — это характеристика идеального ФНЧ; $\omega_{cp} = \omega_1 - \Delta\omega$.

F_2 определяется соотношениями

$$F_2(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi(\omega - \omega_1)}{2\Delta\omega} \right) \text{ при } |\omega - \omega_1| < \Delta\omega;$$

$$F_2(\omega) = 0 \text{ при } |\omega - \omega_1| > \Delta\omega.$$

Это хорошая аппроксимация реальных характеристик, которая приводит к простым выражениям для $H(t)$ и $W(t)$. В частности, при $d(t)$ на входе получаем

$$W(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t' \cos \Delta\omega t'}{t' \left(1 - \left(\frac{2\Delta\omega t'}{\pi} \right)^2 \right)}.$$

Суммой двух слагаемых можно представить и фазовую характеристику фильтра. Так, на рис. 4.70 показано, как фазовая характеристика ФНЧ в полосе пропускания θ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых θ_1 и θ_2 , где $\theta_1 = \omega\tau_0$ и $\theta_2 = b \sin \omega\tau$.

Характеристика передачи в этом случае

$$\begin{aligned} F(\omega) &= |F(\omega)| e^{\omega\tau_0 - b \sin \omega\tau} = \\ &= |F(\omega)| e^{\omega\tau_0} e^{-b \sin \omega\tau} = \\ &= F(\omega_{ИД}) e^{-b \sin \omega\tau}. \end{aligned}$$

Интеграл Фурье с такой функцией может быть вычислен. Вычисление приводит к следующему выражению для $W(t)$:

$$\begin{aligned} W(t) &= J_0(b)W_0(t) + J_1(b)[W_0(t + \tau) - W_0(t - \tau)] + \\ &+ J_2(b)[W_0(t + 2\tau) + W(t - 2\tau)] + J_3(b) \\ &[W_0(t + 3\tau) - W_0(t - 3\tau)] + \dots, \end{aligned} \quad (4.151)$$

где J_i — функция Бесселя первого рода ($i = 1, 2, 3$ и т. д.);

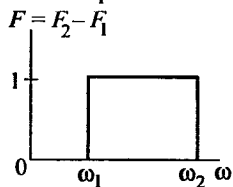
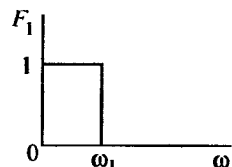
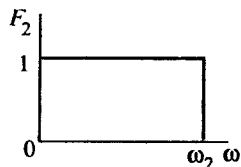


Рис. 4.68

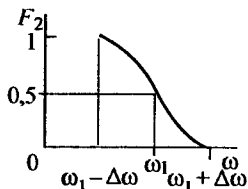
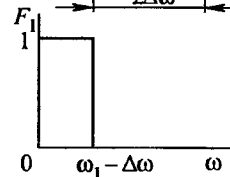
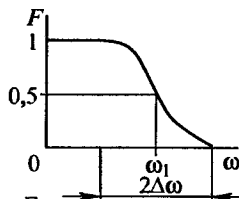


Рис. 4.69

$W_0(t)$ — импульсная переходная характеристика для идеализированной системы с характеристикой) $F(\omega)_{ид}$.

Таким образом, отклонение фазочастотной характеристики от линейной вызывает появление парных эхо-импульсов с амплитудами, определяемыми выражением (4.151).

Рассмотренные в этой главе приемы определения искажений сигналов при прохождении их через системы передачи с различными характеристиками являются основой специальной дисциплины, называемой обычно теорией систем.

В этом параграфе были рассмотрены приемы определения временных характеристик электрических фильтров. Эти приемы весьма разнообразны и в подавляющем большинстве достаточно сложны. Объем необходимых вычислений во всех случаях резко возрастает с усложнением схемы фильтра. Этим и объясняется наличие многих приемов, различающихся детальностью учета исходных данных.

Развитие автоматики, телемеханики и связи идет по пути использования все более и более сложных фильтров, в связи с чем возрастает роль методов, заключающихся в замене реальных амплитудно- и фазочастотных характеристик фильтров идеализированными, временные характеристики для которых определяются более просто.

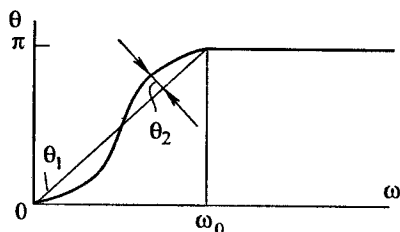


Рис. 4.70

Наряду с представлением характеристик в виде, показанном на рис. 4.46, 4.69, и 4.70, широко используют также метод, основанный на замене логарифмических амплитудно-частотных характеристик асимптотическими характеристиками, образованными отрезками прямых. Этот последний метод нашел особо широкое применение в теории автоматического регулирования

и хорошо разработан. В справочной литературе можно найти большое количество таблиц и графиков, позволяющих относительно просто и быстро получать приближенные временные характеристики фильтров и других четырехполюсных цепей, амплитудно-частотные характеристики которых представлены ломаными прямыми.

5.1. Цифровая обработка сигналов в линейных электрических цепях

Получение, передача и обработка непрерывных сигналов, например речевых сигналов в телефонии, сигналов ТУ-ТС в системах автоматики и т.д., может осуществляться в аналоговой форме. На рис. 5.1 показана RC -цепь, у которой импульсная характеристика равна

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Если задано напряжение на входе цепи $u_{\text{вх}}(t)$ и нужно найти напряжение на ее выходе $u_{\text{вых}}(t)$, то это можно сделать, воспользовавшись интегралом свертки:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (5.1)$$

При передаче аналоговых сигналов необходимо учитывать влияние помех и нестабильность параметров цепи, т.е. их зависимость от времени, температуры, влажности и т.д. Особенно сильно это влияние сказывается на очень низких частотах (меньше 1 Гц) и на частотах выше 20 кГц. В диапазоне сигналов звуковых частот характеристики аналоговых и дискретных цепей и сигналов сопоставимы, и выбор типа сигнала определяется прогрессом в технологии изготовления и применения современных средств микроэлектроники, а они, в свою очередь, ориентированы на цифровые устройства.

Заменим непрерывные сигналы в схеме рис. 5.1 и в выражении (5.1) их дискретными отсчетами. Чтобы не вносить путаницы, время t заменим дискретными значениями nT , а время τ — дискретными значениями mT . Тогда интеграл придется заменить суммой составляющих и выражение (5.1) запишется в виде

$$u_{\text{вых}}(nT) = \sum_{m=0}^n u_{\text{вх}}(mT) h[(n-m)T]. \quad (5.2)$$

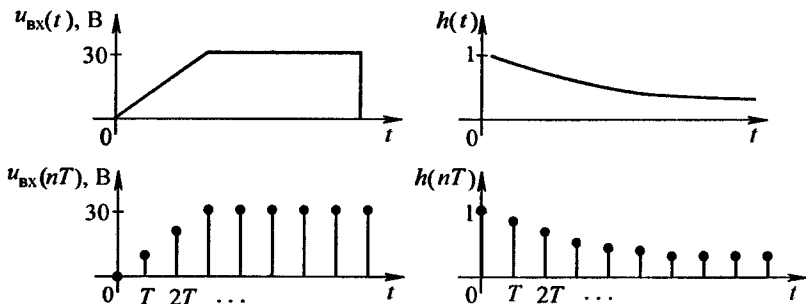
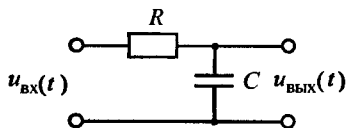


Рис. 5.1

Вместо непрерывного сигнала $u_{вх}(t)$ мы будем иметь дело с дискретным сигналом $u_{вх}(nT)$ и вместо непрерывной импульсной характеристики $h(t)$ — с дискретной импульсной характеристикой

$$h[(n-m)T] = \frac{1}{RC} e^{-\frac{(n-m)T}{RC}}.$$

Поскольку любой отсчет сигнала — это число, то выражение (5.2) можно запрограммировать на языке вычислений. Останется лишь ввести в цифровой вычислитель числа, соответствующие всем дискретным отсчетам $u_{вх}(mT)$ и $h[(n-m)T]$, и он вычислит отсчеты выходного напряжения $u_{вых}(nT)$. Выражение (5.2) на языке вычислительной техники называется алгоритмом вычисления выходного сигнала.

Пусть необходимо рассчитать отсчеты выходного напряжения $u_{вых}(nT)$ в цепи, приведенной на рис. 5.1. Для расчета воспользуемся формулой (5.2), подставляя в нее соответствующие дискретные отсчеты входного сигнала $u_{вх}(nT)$ и дискретные отсчеты импульсной характеристики $h[(n-m)T]$, графики которых приведены на рис. 5.1.

$$u_{вых}(0) = u_{вх}(0)h(0) = 0 \cdot 1 = 0;$$

$$u_{вых}(T) = u_{вх}(0)h(1) + u_{вх}(1)h(0) = 0 \cdot 0,8 + 10 \cdot 1 = 10;$$

$$u_{\text{ВЫХ}}(2T) = u_{\text{ВХ}}(0)h(2) + u_{\text{ВХ}}(1)h(1) + u_{\text{ВХ}}(2)h(0) = 0 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,8 + 20 \cdot 1 = 28;$$

$$u_{\text{ВЫХ}}(3T) = u_{\text{ВХ}}(0)h(3) + u_{\text{ВХ}}(1)h(2) + u_{\text{ВХ}}(2)h(1) + u_{\text{ВХ}}(3)h(0) = 0 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,8 + 30 \cdot 1 = 51.$$

Аналогичным образом рассчитываются $u_{\text{ВЫХ}}(4T) = 68$; $u_{\text{ВЫХ}}(5T) = 80,5$; $u_{\text{ВЫХ}}(6T) = 91$; $u_{\text{ВЫХ}}(7T) = 100,3$; $u_{\text{ВЫХ}}(8T) = 108,6$; $u_{\text{ВЫХ}}(9T) = 83,4$; $u_{\text{ВЫХ}}(10T) = 59$ и т.д.

График последовательности $u_{\text{ВЫХ}}(nT)$ приведен на рис. 5.2.

Таким образом, дискретные сигналы удобны тем, что их можно обрабатывать с помощью цифровых вычислителей. Однако не следует думать, что дискретные сигналы вносятся в память цифровых вычислителей с клавиатуры. Их можно вводить и выводить из нее непосредственно.

На рис. 5.3 показано, как это осуществляется. Непрерывный сигнал $u_{\text{ВХ}}(t)$ подается на ключ, на выходе которого образуются дискретные

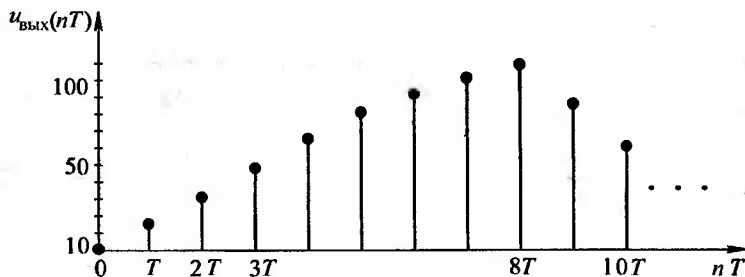


Рис. 5.2

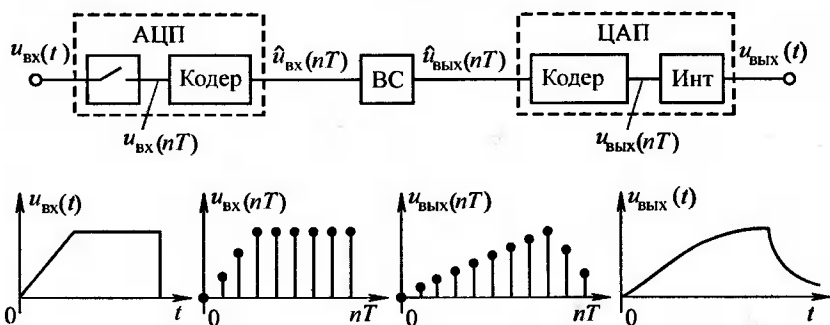


Рис. 5.3

отсчеты $u_{\text{вх}}(nT)$. Но их еще нельзя ввести в память. Сначала нужно перевести амплитуды отсчетов в двоичный код — ведь только такой код понимает цифровой вычислитель. Выполняет эту операцию кодер. Например, если отсчет имеет величину 30 В, то запись числа 30 в двоичном 8-разрядном коде будет такой: 00011110. Закодированные в двоичном коде отсчеты на рисунке обозначены $\hat{u}_{\text{вх}}(nT)$.

Цифровой вычислитель может представлять собой персональный компьютер на базе процессора или специализированное микропроцессорное устройство. Главное состоит в том, что в памяти цифрового вычислителя записана программа вычисления, например выражение (5.2), и отсчеты импульсной реакции, например RC -цепи. Следовательно, в результате работы программы процессор будет выдавать закодированные в двоичном коде отсчеты $\hat{u}_{\text{вых}}(nT)$. Декодер преобразует код в амплитуду, и на его выходе появляются дискретные отсчеты выходного напряжения $u_{\text{вых}}(nT)$. Интерполятор восстанавливает функцию между отсчетами. В итоге на выходе системы мы имеем аналоговый сигнал $u_{\text{вых}}(t)$.

Цифровой вычислитель может сыграть роль реальной цепи. И хотя физической цепи может и не быть в наличии, а задана она будет лишь в виде отсчетов импульсной реакции и программы вычислений, на выходе описанной системы можно будет видеть такое же выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$, как и на выходе реальной цепи.

Выражение (5.1) можно назвать математической моделью аналоговой цепи. При переходе к дискретным сигналам используют выражение дискретной свертки (5.2). Обозначим в этом выражении

$$y[n] = u_{\text{вых}}(nT), \quad x[m] = u_{\text{вх}}(mT) \quad \text{и} \quad h[n-m] = h[(n-m)T].$$

Тогда оно запишется в виде

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^n x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^n h[m]x[n-m] = \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \dots + h[n]x[0]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть необходимо рассчитать значения выходной последовательности $y[n]$ цепи, имеющей дискретную импульсную характеристику $h_1(n) = \{-1; 1; 2\}$, если входная последовательность имеет вид $x[n] = \{-2; 1; 2; -1\}$. Графики $x[n]$ и $h_1(n)$ приведены на рис. 5.4, а, б.

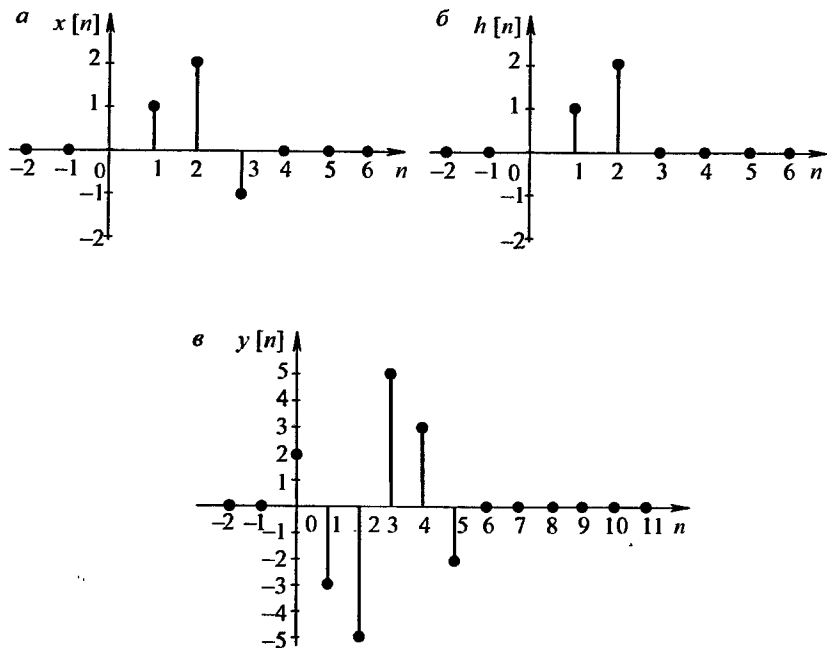


Рис. 5.4

С помощью выражения (5.3) рассчитаем значения выходной последовательности $y[n]$:

$$y[0] = h[0]x[0] = (-1) \cdot (-2) = 2,$$

$$y[1] = h[0]x[1] + h[1]x[0] = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -3,$$

$$\begin{aligned} y[4] &= h[0]x[4] + h[1]x[3] + h[2]x[2] + h[3]x[1] + h[4]x[0] = \\ &= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 3. \end{aligned}$$

График дискретного сигнала $y[n]$ приведен на рис. 5.4, в.

Вычисления по выражению (5.3) можно выполнить также с помощью простого устройства. Запишем последовательности чисел $x[n]$ и $h[-n]$ на отдельных полосках бумаги, как показано на рис. 5.5. На обеих полосках пометим маленькими стрелочками точки $n = 0$. Обратим внимание на то, что $h[-n]$ является обратной последовательностью относительно $h[n]$, так что она строится в обратном направлении от $n = 0$.

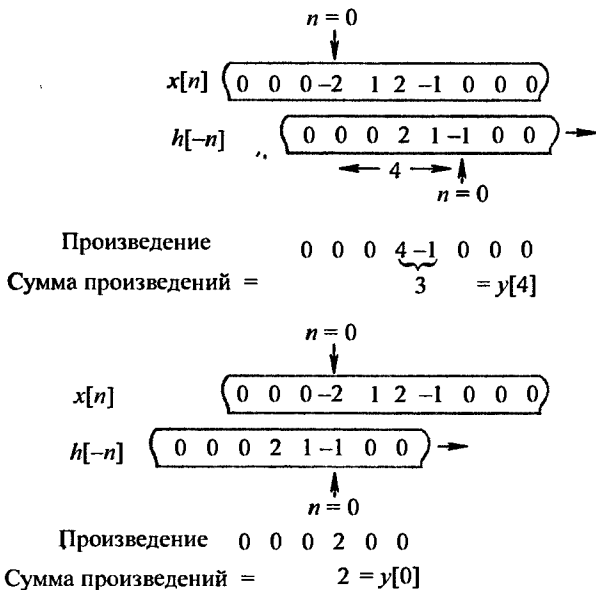


Рис. 5.5

Будем сдвигать нижнюю полосу относительно верхней в направлении стрелки. Вычисление суммы произведений стоящих друг против друга чисел при каждом сдвиге дает последовательность $y[n]$.

Если в качестве чисел $h[n]$ взять дискретные значения $a_1 = \frac{1}{RC} e^{-kT/RC}$, то выражение (5.3) будет являться дискретной математической моделью аналоговой RC-цепи, изображенной на рис. 5.1. Выбирая те или иные значения $h[n]$, можно получить дискретные модели различных цепей. Таким образом, формула дискретной свертки является универсальной, пригодной для описания любых цепей.

Пусть на вход цепи поступает сигнал в виде дискретной δ -функции. Рассчитаем выходные последовательности $y[n]$ цепей, имеющих дискретные импульсные характеристики:

- а) $h[n] = \{1; 1; 0; 0; \dots\}$;
- б) $h[n] = \{1; -1; 0; 0; \dots\}$;
- в) $h[n] = 2e^{-n/2}$.

Графики дискретной δ -функции $\delta[n]$ и импульсных характеристик a , b , $в$ приведены на рис. 5.6 и рис. 5.7 соответственно.

Значение $y[n]$ вычисляется с помощью выражения (5.2), где $x[n] = \delta[n] = \{1; 1; 0; 0; \dots\}$.

Для цепи, имеющей дискретную импульсную характеристику

$a) h[n] = \{1; 1; 0; 0; \dots\}$, получаем

$$y[0] = h[0]\delta[0] = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$y[1] = h[0]\delta[1] + h[1]\delta[0] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1,$$

$$y[2] = h[0]\delta[2] + h[1]\delta[1] + h[2]\delta[0] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$y[3] = h[0]\delta[3] + h[1]\delta[2] + h[2]\delta[1] + h[3]\delta[0] = 0.$$

Все остальные значения $y[n]$ будут также нулевыми.

Для цепи с импульсной характеристикой

$b) h[n] = \{1; -1; 0; 0; \dots\}$ получаем

$$y[0] = h[0]\delta[0] = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$y[1] = h[0]\delta[1] + h[1]\delta[0] = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$y[2] = h[0]\delta[2] + h[1]\delta[1] + h[2]\delta[0] = 0.$$

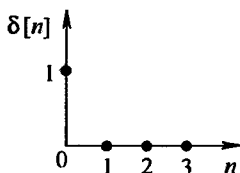


Рис. 5.6

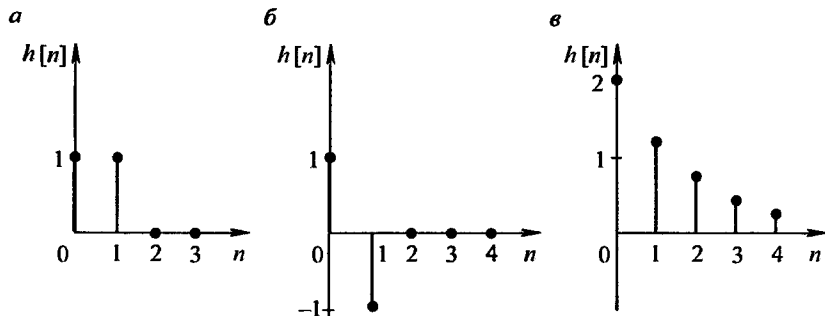


Рис. 5.7

Остальные значения $y[n]$ равны нулю.

Для цепи с импульсной характеристикой

в) $h[n] = 2e^{-n/2} = \{2; 1,22; 0,74; 0,45; 0,27; \dots\}$ получаем

$$y[0] = h[0]\delta[0] = 2,$$

$$y[1] = h[0]\delta[1] + h[1]\delta[0] = 1,22.$$

Все остальные отсчеты выходной последовательности $y[n]$ повторяют соответствующие отсчеты дискретной импульсной характеристики $h[n]$, так же как и в двух предыдущих случаях *a* и *б*. Этот вывод очевиден, так как импульсная характеристика — это реакция цепи на δ -импульс.

Графики $y[n]$ будут такими же, как графики $h[n]$ на рис. 5.7.

Анализ формулы (5.2) показывает, что в ней выполняется всего три действия: умножение, сложение и задержка. На рис. 5.8 эти действия представлены в виде элементов структурной схемы.

Операцию умножения дискретного сигнала $x[n]$ на число K можно представить в виде усилителя с коэффициентом усиления K . На его выходе может быть получен сигнал $y[n] = Kx[n]$. Сложение чисел естественно отобразить на схеме в виде сумматора. Получение отсчета $x[n-1] = x[nT - T]$ из $x[n] = x(nT)$ можно связать с задержкой последнего на время T , т.е. на один «такт». Действие элемента задержки поясняется на рис. 5.9.

Алгоритм вычислений дискретного сигнала $y[n]$, описываемый выражением (5.2), можно представить в виде структурной схемы. Подобные структурные схемы называют дискретными цепями.

Составим структурную схему цепи, дискретная импульсная характеристика которой $h[n] = \{-1; 1; 2\}$ (см. рис. 5.3).

В соответствии с алгоритмом (5.2) и с учетом заданных значений характеристики $h[n]$ структурная схема цепи приведена на рис. 5.10.

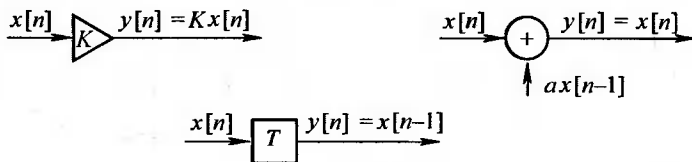


Рис. 5.8

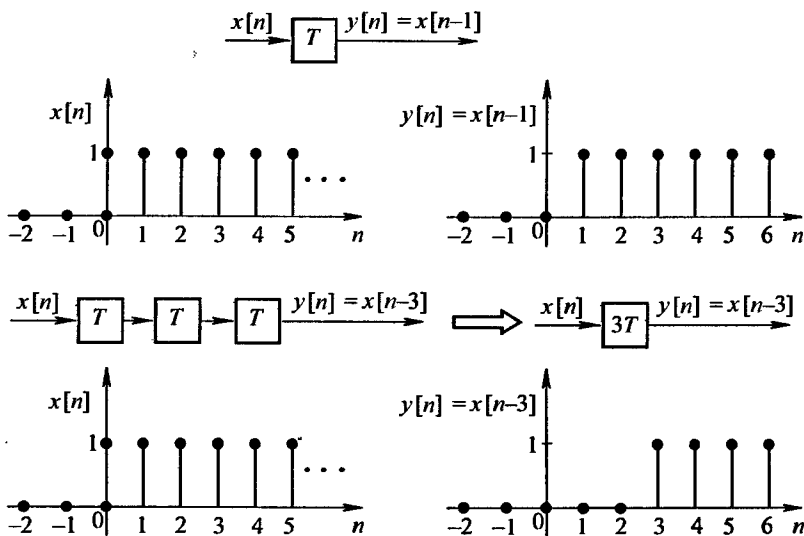


Рис. 5.9

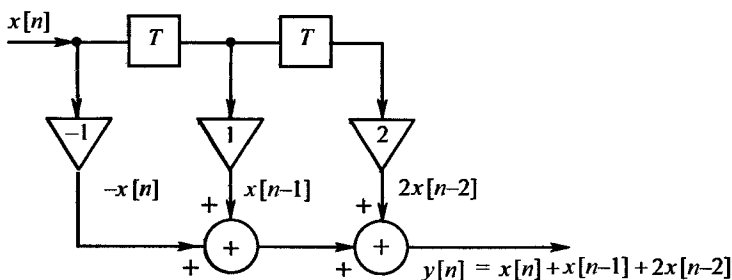


Рис. 5.10

По этой схеме несложно определить выражение для выходной последовательности:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 2x[n-2].$$

Следовательно, в отличие от аналоговых цепей, которые представляют собой соединение элементов, например R , L и C дискретная цепь — это структурная схема алгоритма вычисления выходной последовательности по входной. Она состоит из элементов задержки, сумматоров и усилителей (умножителей).

5.2. Области применения цифровых фильтров в устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи

По своей природе все сигналы являются аналоговыми, будь то сигнал постоянного или переменного тока, цифровой или импульсный. Тем не менее, принято делать различие между аналоговыми и цифровыми сигналами, которое выражается в том, что в природе все измеримые физические величины представляются аналоговыми сигналами. Аналоговые сигналы характеризуются электрическими переменными, скоростью их изменения и связанной с ними энергией и мощностью. Для преобразования других физических величин (температуры, давления и т.п.) в электрические сигналы используются датчики. Понятие нормализации сигнала означает подготовку физических сигналов к обработке посредством таких приборов, как датчики, измерительные и промежуточные усилители и т.д.

Некоторые сигналы представляют собой реакции на другие сигналы. Хорошим примером может служить отраженный сигнал, полученный при измерении неоднородностей кабеля с помощью измерителя неоднородностей. С другой стороны, по другой классификации все сигналы рассматриваются как цифровые, независимо от того, получены ли реальные сигналы в результате измерения или в результате преобразования в цифровую форму. Возможно, эти цифровые сигналы связаны с реальными аналоговыми сигналами, но возможно, что между ними и нет связи. В качестве примера можно привести передачу данных в локальных вычислительных сетях или в других высокоскоростных сетях.

В случае цифровой обработки сигнала (ЦОС) аналоговый сигнал преобразуется в двоичную форму с помощью АЦП. На выходе АЦП получается двоичное представление аналогового сигнала, которое затем обрабатывается арифметически цифровым сигнальным процессором (ЦСП). После обработки содержащаяся в сигнале информация может быть преобразована обратно в аналоговую форму с использованием ЦАП.

Другим важным моментом в определении сигнала является тот факт, что сигнал всегда несет некоторую информацию. Это ведет к ключевой проблеме обработки физических аналоговых сигналов — проблеме извлечения информации.

Первоначальная причина обработки физических сигналов заключается в необходимости получения содержащейся в них информации. Эта

информация обычно присутствует в амплитуде сигнала, в частоте или в спектральном составе, в фазе или в относительных временных зависимостях нескольких сигналов.

В некоторых случаях желательно переформатировать информацию, содержащуюся в сигнале. В частности, смена формата имеет место при передаче звукового сигнала в телефонной системе с многоканальным доступом и частотным разделением (FDMA — Frequency-Division Multiple Access). В этом случае аналоговые методы используются для создания «стека» голосовых каналов в частотном спектре для передачи через радиорелейную станцию микроволнового диапазона, коаксиальный или оптоволоконный кабель. В случае цифровой связи аналоговая звуковая информация сначала преобразуется в цифровую с использованием АЦП. Цифровая информация, представляющая индивидуальные звуковые каналы, мультиплексируется во времени (многоканальный доступ с временным разделением, TDMA — Time-Division Multiple Access) и передается по последовательной цифровой линии связи (как в системах ИКМ — импульсивно-кодовая модуляция).

Еще одна причина обработки сигналов заключается в сжатии полосы частот сигнала (без существенной потери информации) с последующим форматированием и передаче информации на пониженных скоростях, что позволяет сузить требуемую полосу пропускания канала. Высокоскоростные модемы и системы адаптивной импульсно-кодовой модуляции (АДИКМ) широко используют алгоритмы устранения избыточности данных (сжатия), так же как и цифровые системы мобильной связи, MPEG рекордеры и телевидение высокой четкости.

В устройствах автоматики системы сбора данных и системы управления используют информацию, полученную от датчиков, для выработки соответствующих сигналов обратной связи, которые, в свою очередь, непосредственно управляют процессом перевозок.

В некоторых случаях, в сигнале, содержащем информацию, присутствует шум, и основной целью является восстановление сигнала. Такие методы, как фильтрация, автокорреляция, свертка и т.д., часто используются для выполнения этой задачи и в аналоговой, и в цифровой областях на железной дороге. В качестве практического примера использования ЦСП можно рассмотреть аналоговый и цифровой фильтры нижних частот, каждый с частотой среза 1 кГц. Цифровой фильтр реализован в виде типичной дискретной системы, показанной на рис. 5.11.

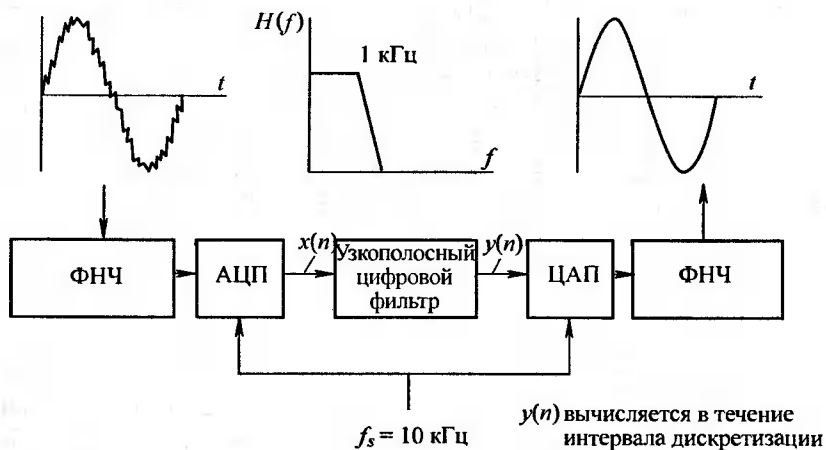


Рис. 5.11

Учтем ряд допущений, во-первых, достаточное значение частот дискретизации тракта АЦП/ЦАП, разрешающей способности и динамического диапазона. Во-вторых, для того чтобы закончить все свои вычисления в пределах интервала дискретизации $\frac{1}{f_d}$, устройство ЦОС должно иметь достаточное быстродействие. В-третьих, на входе АЦП и выходе сохраняется потребность в аналоговых фильтрах низкой частоты, хотя требования к их производительности невелики. Приняв эти допущения, можно сравнить цифровой и аналоговый фильтры.

Требуемая частота среза обоих фильтров — 1 кГц. Аналоговое преобразование реализуется фильтром Чебышева первого рода шестого порядка (характеризуется наличием неравномерности коэффициента передачи в полосе пропускания и отсутствием неравномерности коэффициента передачи вне полосы пропускания). Его характеристики представлены на рис. 5.12. На практике этот фильтр может быть представлен тремя фильтрами второго порядка, каждый из которых построен на операционном усилителе и нескольких резисторах и конденсаторах. С помощью современных систем автоматизированного проектирования (САПР) фильтров создать фильтр шестого порядка достаточно просто, но чтобы удовлетворить техническим требованиям по неравномерности характеристики 0,5 дБ, требуется точный подбор компонентов.

Аналоговый фильтр

Цифровой фильтр

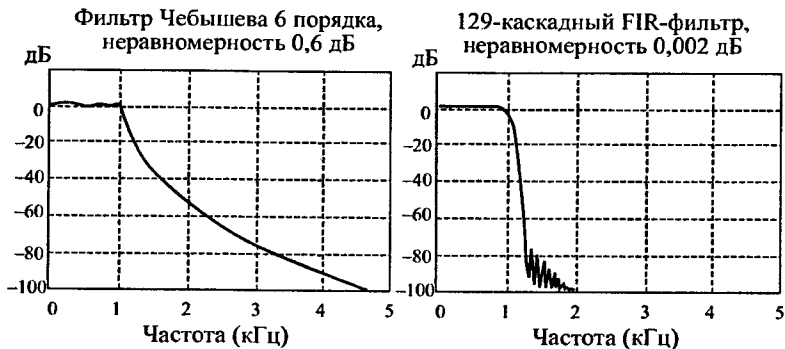


Рис. 5.12

Представлений же на рис. 5.11 129-каскадний цифровой фильтр с конечной импульсной характеристикой имеет неравномерность характеристики всего 0,002 дБ в полосе пропускания, линейную фазовую характеристику, намного более крутой спад. На практике такие характеристики невозможно реализовать с использованием одних только аналоговых методов. Другое очевидное преимущество схем состоит в том, что цифровой фильтр не требует подбора компонентов и не чувствителен к дрейфу частоты, так как частота стабилизирована с помощью кварцевого генератора. 129-каскадный фильтр требует 129 операций умножения с накоплением для вычисления выходной выборки. Эта обработка должна быть закончена в пределах интервала дискретизации $\frac{1}{f_d}$, чтобы обеспечить работу в реальном масштабе времени. В этом примере частота дискретизации равна 10 кГц, поэтому для обработки достаточно 100 мкс, если не требуется производить существенных дополнительных вычислений. Семейство ЦСП ADSP-21xxx (xxx — модель процессора) может закончить весь процесс умножения с накоплением (и другие функции, необходимые для реализации фильтра) за один или даже половину командного цикла. Поэтому, 129-каскадный фильтр требует быстродействия $\frac{129}{100\text{мкс}} = 1,3$ млн операций в секунду. Существующие ЦСП имеют намного большее быстродействие и, таким образом, не являются ограничивающим фактором для этих приложений.

5.3. Трансверсальные и рекурсивные цифровые фильтры

Электрические свойства элементов схем задаются линейными математическими операциями, совершаемыми над токами и напряжениями. При этом в соответствии с законами Кирхгофа получают системы линейных дифференциальных уравнений, характеризующих конкретную линейную цепь. Элементы, на основе которых строятся цифровые фильтры, выполняют не такие функции, как резисторы, индуктивности и емкости. Они, как правило, характеризуются зависимостью между входом и выходом, а не соотношением между токами и напряжениями. Так,

- для множителя $v_k = \alpha_i u_k$,
- для сумматора $v_k = u_1(k) + u_2(k) + \dots + u_n(k)$,
- для элемента задержки $v_k = u_{k-1}$ (рис. 5.13).

Соединение элементов цифрового фильтра определяет действия над сигналами, которые либо изменяются по величине, либо складываются с другими сигналами, либо задерживаются. Это значит, что для системы, состоящей из таких элементов, с одним входом и одним выходом можно составить линейное разностное уравнение, описывающее ее поведение.

Пусть u_k — k -й отсчет входного сигнала цифрового фильтра. Тогда u_{k-r} — отсчет того же сигнала в момент $t = (k-r)T$. Пусть требуется вычислить величину k -го выходного отсчета v_k . При этом расчете, т.е. в процессе обработки сигнала цифровым фильтром, используется линейная комбинация предшествующих выходных отсчетов с предшествующими и настоящими входными отсчетами. То есть,

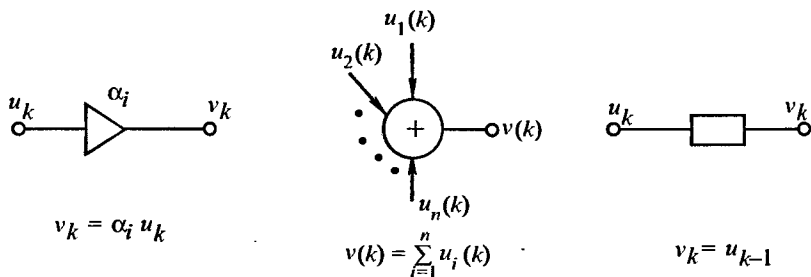


Рис. 5.13

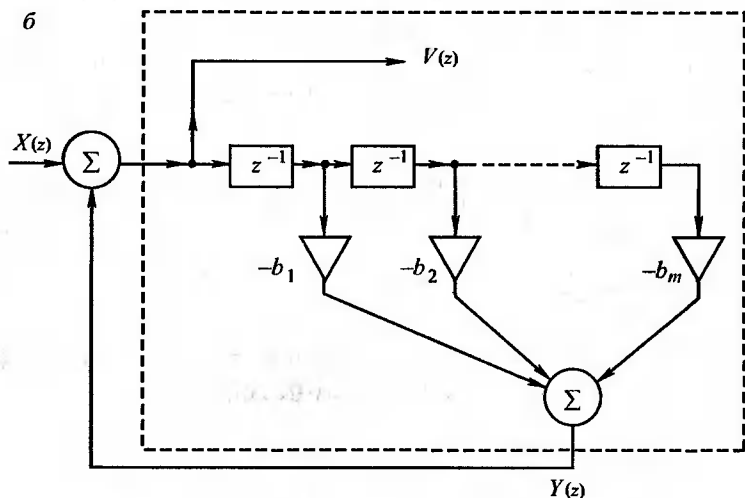
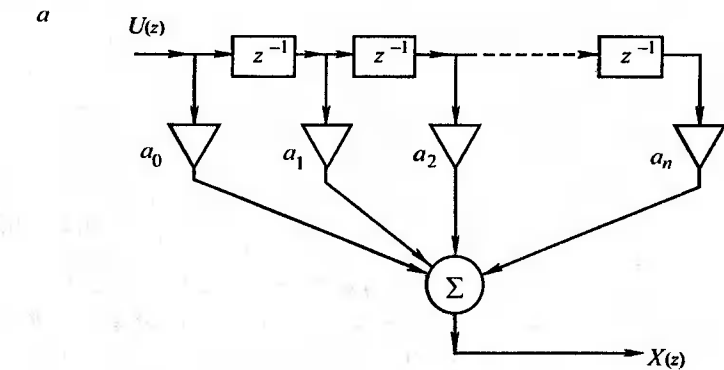


Рис. 5.14

если в линейной комбинации используется $(n + 1)$ входных отсчетов с m предшествующими выходными отсчетами, k -й отсчет выходного сигнала будет определяться выражением

$$v_k = a_0 u_k + a_1 u_{k-1} + \dots + a_n u_{k-n} - (b_1 v_{k-1} + \dots + b_m v_{k-m}), \quad (5.4)$$

где все коэффициенты являются действительными постоянными.

Линейное разностное уравнение (5.4) полностью описывает работу линейного цифрового фильтра. Для анализа передаточных функций

дискретных систем используется рассмотренное ранее Z -преобразование. Передаточная функция определяется как отношение Z -преобразований выходного и входного сигналов.

Передаточная функция, соответствующая соотношению (5.4), задается выражением

$$H(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}, \quad (5.5)$$

где $V(z)$ и $U(z)$ — Z -преобразования выходного и входного сигналов соответственно. Выражение (5.5) задает передаточную функцию линейного цифрового фильтра общего вида. Числитель и знаменатель передаточной функции в общем случае не равны нулю. По виду передаточной функции фильтры обычно классифицируют следующим образом.

Рекурсивные цифровые фильтры — фильтры с передаточной функцией типа (5.5), не содержащей общих множителей и имеющей ненулевые коэффициенты в знаменателе.

Нерекурсивные (трансверсальные) цифровые фильтры имеют передаточную функцию, которая принимает вид полинома по степеням z^{-1} после сокращения всех общих множителей в выражении (5.5) (рис. 5.14):

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_n z^{-n}. \quad (5.6)$$

5.4. Характеристики цифровых фильтров и их расчет. Оценка погрешностей

Частотная характеристика. Пусть на вход системы подается комплексный синусоидальный сигнал $e^{j\omega k T}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где

$$H(\omega) = e^{j\omega k T} = a_0 e^{j\omega k T} + a_1 e^{j\omega(k-1)T} + \dots + a_n e^{j\omega(k-n)T} - (b_1 H(\omega) e^{j\omega k T} + \dots + b_m H(\omega) e^{j\omega(k-m)T})$$

или

$$H(\omega) e^{j\omega k T} (1 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_m e^{-j\omega m T}) = e^{j\omega k T} (a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-j\omega n T}). \quad (5.7)$$

Сократив общий член $e^{j\omega kT}$ в обеих частях последнего равенства, получим выражение

$$H(\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-jn\omega T}}{1 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_m e^{-jm\omega T}}, \quad (5.8)$$

которое представляет собой частотную характеристику системы в комплексной форме. Модуль $H(\omega)$ является амплитудной характеристикой, а аргумент — фазовой характеристикой системы, заданной соотношением (5.4).

Выражение (5.8) идентично выражению (5.6) для передаточной функции, если в него вместо z^{-1} подставить $e^{-j\omega T}$. Это иллюстрирует сущность оператора z^{-1} и полезность передаточной функции.

5.5. Синтез цифровых фильтров

На основе сумматоров, умножителей и элементов задержки составляются блок-схемы реализации передаточных функций цифровых фильтров. Эти блок-схемы называют также формами реализации фильтров, поскольку для практического создания фильтра обычно используют одну из этих форм.

Простейшую форму реализации получают, используя выражение (5.5) для передаточной функции общего вида. Введение вспомогательного Z -преобразования $X(z)$ позволяет записать передаточную функцию $H(z)$ в виде

$$H(z) = \frac{V(z) X(z)}{X(z) U(z)} = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} (a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}). \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) теперь можно представить как произведение двух передаточных функций:

$$H_1(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} = \frac{X(z)}{U(z)};$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}} = \frac{V(z)}{X(z)}.$$

Результирующую передаточную функцию $H(z)$ получают при каскадном соединении двух форм реализации, приведенных на рис. 5.15.

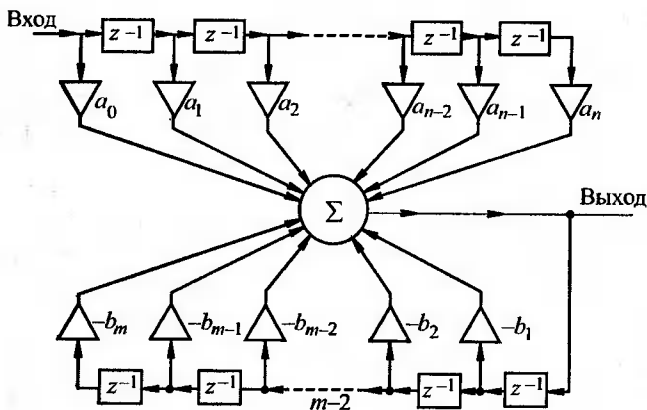


Рис. 5.15

Эта реализация ни в коем случае не является единственной, поскольку можно получить и другие формы, которые приводят к той же передаточной функции. Различные формы реализации заданной передаточной функции подразделяют на канонические и неканонические. Под канонической реализацией подразумеваются формы, при которых используемое число элементов задержки в точности равно порядку передаточной функции (т.е. наивысшей степени полиномов числителя и знаменателя).

Форма реализации, приведенная на рис. 5.15, требует $(m + n)$ элементов задержки и, следовательно, согласно определению, не является канонической.

Однако эту форму можно преобразовать к виду, показанному на рис. 5.16, где предполагается, что $n > m$. Можно показать, что эта форма реализации приводит к требуемой передаточной функции.

Особенно полезной разновидностью формы является такая, для которой $n = m = 2$ (рис. 5.17).

Данная форма реализации называется биквадратной, и, поскольку знаменатель ее передаточной функции является квадратным многочленом, она дает два действительных или комплексно-сопряженных полюса. Биквадратная форма используется для получения передаточных функций более высоких порядков в канонической форме.

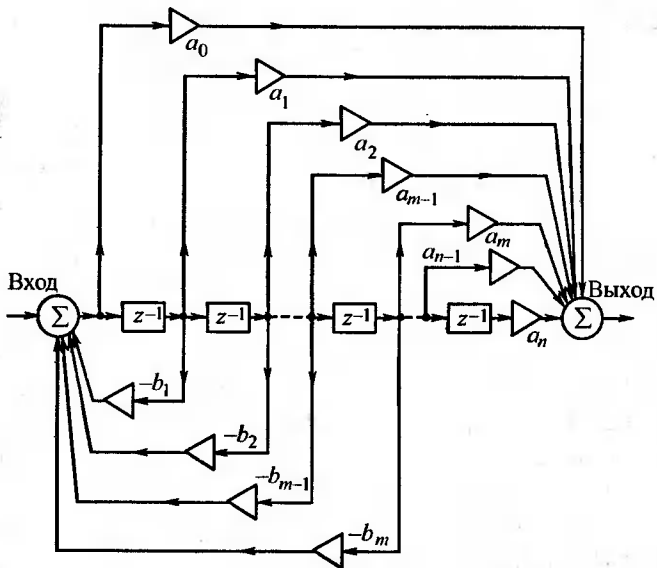


Рис. 5.16

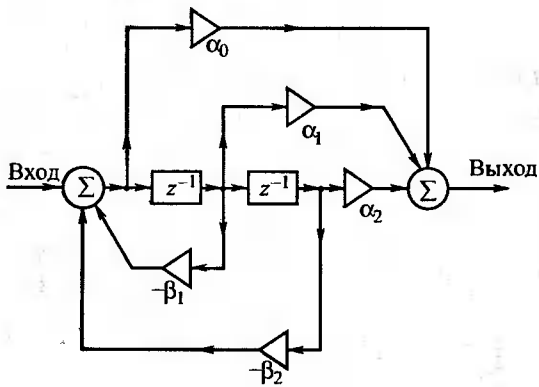


Рис. 5.17

Передаточная функция общего вида может быть представлена следующим образом:

$$H(z) = \left[\frac{\alpha_{01} + \alpha_{11}z^{-1} + \alpha_{21}z^{-2}}{1 + \beta_{11}z^{-1} + \beta_{21}z^{-2}} \right] \cdots \left[\frac{\alpha_{01} + \alpha_{11}z^{-1} + \alpha_{21}z^{-2}}{1 + \beta_{11}z^{-1} + \beta_{21}z^{-2}} \right], \quad (5.10)$$

где все коэффициенты являются действительными и постоянными. Нуль или полюс первого порядка можно получить, приравняв нулю коэффициенты квадратичных членов в соответствующих дробях. Отбирая дроби с квадратичными числителем и знаменателем и рассматривая их как отдельные передаточные функции, исходную передаточную функцию можно реализовать путем каскадного соединения биквадратных форм. Это соединение показано на рис. 5.18 и называется каскадной канонической формой.

Другая каноническая реализация может быть получена в случае, если передаточную функцию вида (5.5) разложить на элементарные дроби следующим образом

$$H(z) = \gamma_0 + \sum \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i}z^{-1}}{1 + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2}},$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_{1i}, i = 1, 2, 3, \dots, n$, является постоянными коэффициентами. Реализация для этого случая показана на рис. 5.19.

К примеру, необходимо найти передаточную функцию и построить график АЧХ звена 2-го порядка (см. рис. 5.18) при $\alpha_0 = \alpha_2 = 1, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 0,2$ и $\beta_2 = -0,4$.

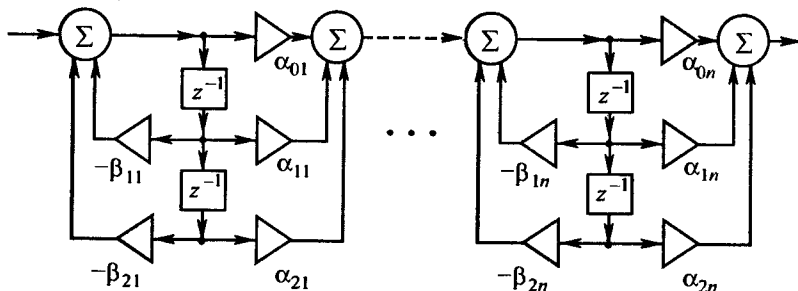


Рис. 5.18

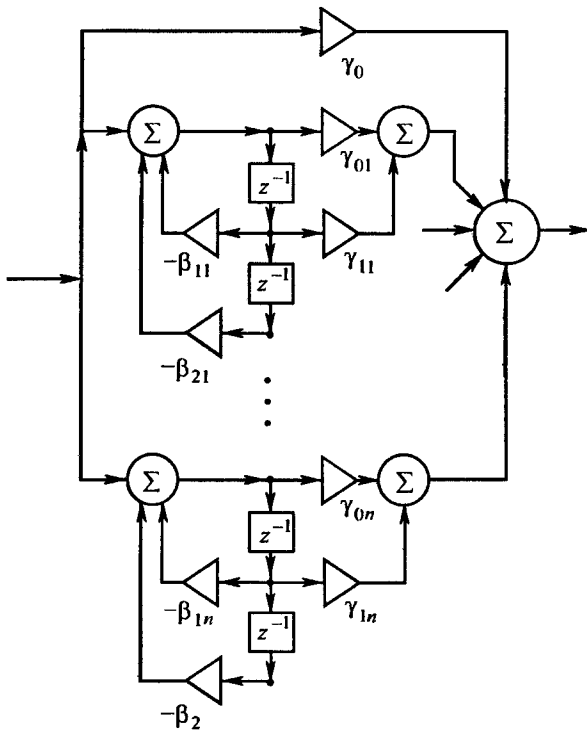


Рис. 5.19

Передаточная функция такого звена равна

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 0,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}.$$

Рекурсивную цепь с прямыми и обратными связями можно представить как каскадное соединение рекурсивного фильтра с передаточной функцией $H_1(z)$ и нерекурсивного фильтра с передаточной функцией $H_2(z)$. Для звена второго порядка

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0,2z^{-1} + 0,4z^{-2}};$$

$$H_2(z) = 1 - z^{-1} - 2z^{-2};$$

$$H(z) = H_1(z) H_2(z).$$

АЧХ для $H_2(z)$ нерекурсивного фильтра рассчитывается по формуле

$$H_2(\Omega) = \sqrt{(a_0 + a_1 \cos 2\pi\Omega + a_2 \cos 4\pi\Omega)^2 + (a_1 \sin 2\pi\Omega + a_2 \sin 4\pi\Omega)^2} = \\ = \sqrt{(1 + 2 \cos 2\pi\Omega + \cos 4\pi\Omega)^2 + (1 + 2 \sin 2\pi\Omega + \sin 4\pi\Omega)^2}.$$

График АЧХ для $H_2(z)$ приведен на рис. 5.20, а. АЧХ рекурсивного фильтра рассчитывается по формуле

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,2 \cos 2\pi\Omega + 0,4 \cos 4\pi\Omega)^2 + (-0,2 \sin 2\pi\Omega + 0,4 \sin 4\pi\Omega)^2}}.$$

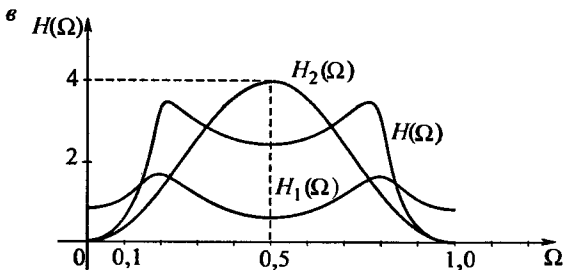
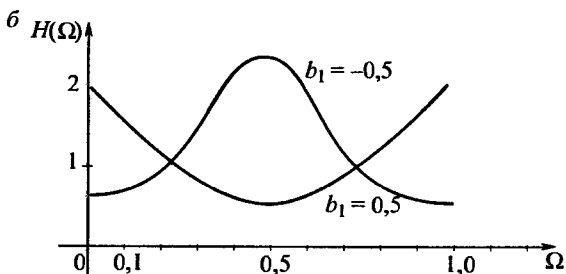
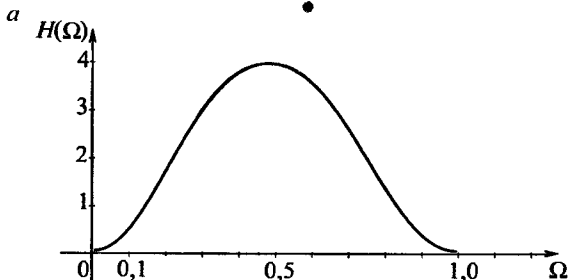


Рис. 5.20

Графики $H_1(\Omega)$, a_0 и $H(\Omega) = H_1(\Omega) H_2(\Omega)$ изображены на рис. 5.20, б, в. Цифровые фильтры могут быть синтезированы по данным аналоговых фильтров.

Дискретная цепь может осуществлять любые операции: фильтрацию сигнала, корректирование характеристик и т.п., т.е. выполнять функции любой аналоговой цепи.

В частности, при синтезе цифровых фильтров нужно найти такие коэффициенты передаточной функции (5.9), частотная характеристика которой удовлетворяла бы нормам ослабления фильтра в полосах пропускания и задерживания (рис. 5.21). Определение коэффициентов — это задача аппроксимации. Известен целый ряд методов ее решения. Наиболее распространенным является следующий метод. Сначала

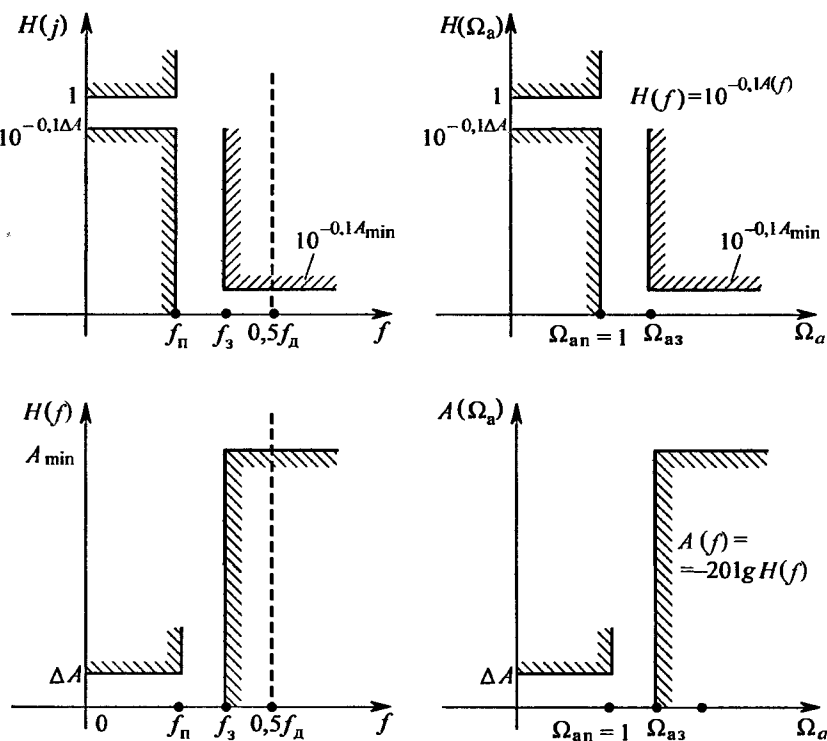


Рис. 5.21

рассчитывают аналоговый низкочастотный (НЧ)-прототип и получают его передаточную функцию $H(p)$, затем путем замены комплексной переменной $p = F\{z\}$ переходят от $H(p)$ к передаточной функции дискретной цепи $H(z)$. Использование стандартного преобразования

$z = e^{pT}$ или $p = \frac{1}{T} \ln z$ не приведет к дробно-рациональной функции.

Поэтому для ФНЧ применяют билинейное преобразование

$$p = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \gamma \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (5.11)$$

где γ — некоторый постоянный множитель, которое является первым приближением стандартного преобразования при разложении его в ряд Тейлора

$$p = \frac{1}{T} \ln z = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1(z-1)^3}{3(z+1)^3} + \frac{1(z-1)^5}{5(z+1)^5} + K \right]. \quad (5.12)$$

Из разложения (5.12) следует, что необходимо выбирать $\gamma = \frac{2}{T}$. Однако далее будет показано, что удобнее брать другие значения коэффициента γ .

Билинейное преобразование (5.11) переводит все точки из левой полуплоскости переменной p в точки на единичной окружности плоскости z . Так что, если была устойчива аналоговая цепь, будет устойчивой и дискретная. Это можно подтвердить на следующем примере.

Найдем положения точек на z -плоскости, соответствующих следующим значениям переменной p :

$$p_1 = -2; \quad p_2 = -2 + j2; \quad p_3 = j2.$$

Из формулы (5.11) можно определить выражение для расчета z :

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}.$$

Подставляя в эту формулу значение полюса $p = p_1 = -2$, лежащего в левой полуплоскости плоскости p , получаем

$$z = \frac{\gamma - 2}{\gamma + 2}.$$

Поскольку γ — число вещественное и положительное, то числитель $(\gamma - 2)$ меньше знаменателя $(\gamma + 2)$, и значит $z < 1$, т.е. точка z лежит внутри единичной окружности, что говорит об устойчивости цепи.

При $p = p_2 = -2 + j2$ получаем

$$z = \frac{\gamma - 2 + j2}{\gamma + 2 - j2}.$$

Найдем модуль z :

$$z = \frac{\sqrt{(\gamma - 2)^2 + 2^2}}{(\gamma + 2)^2 + 2^2}.$$

Он меньше единицы, поскольку модуль числителя меньше модуля знаменателя, т.е. точка z также лежит внутри единичной окружности.

При $p = p_3 = j2$ получаем

$$z = \frac{\gamma + j2}{\gamma - j2} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4}}{\sqrt{\gamma^2 + 4}} e^{j2 \arctg \frac{2}{\gamma}}.$$

Модуль z равен 1, т.е. точка $p = j2$, лежащая на мнимой оси плоскости p , переходит в точку на единичной окружности плоскости z при использовании билинейного преобразования.

Переход к аналоговому прототипу применяется обычно для дискретных фильтров, имеющих бесконечную импульсную характеристику $h[n]$, принимающую ненулевые значения на бесконечном множестве значений $n = 0, 1, \dots$.

Цифровые фильтры с конечной импульсной характеристикой, принимающей ненулевые значения лишь при $n = 0, 1, \dots, N - 1$, не имеют аналогов среди пассивных электрических фильтров, поэтому для их расчета применяются другие методы.

Нерекурсивные цифровые фильтры всегда имеют конечные импульсные характеристики. Рекурсивные фильтры могут иметь как конечные, так и бесконечные импульсные характеристики.

К примеру, найдем дискретные импульсные характеристики фильтров, имеющих передаточные функции:

$$H_1(z) = 2 + 0,5z^{-1} - 3z^{-2};$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}};$$

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}}.$$

Дискретная импульсная характеристика $h[n]$ — это обратное Z-преобразование передаточной функции $H_1(z)$, т.е. $h[n] = z^{-1} \{H(z)\}$. Нерекурсивной цепи с передаточной функцией $H_1(z)$ соответствует $h[n] = \{2; 0,5; -3\}$, т.е. это фильтр с конечной импульсной характеристикой.

Импульсная характеристика цепи с передаточной функцией $H_2(z)$ рассчитывается по формуле $h[n] = 0,5n$, т.е. это рекурсивный фильтр с бесконечной импульсной характеристикой.

Отсчеты импульсной характеристики рекурсивной цепи с передаточной функцией $H_3(z)$ будут конечными и равными 1 только для $n = 0, 1, 2, 3, 4$, а для $n = 5$ $h[n] = 0$. Значит, этот рекурсивный фильтр имеет конечную импульсную характеристику.

В цифровом фильтре хранение и обработка чисел осуществляется в устройствах (элементах памяти, умножителях, сумматорах) с конечным числом разрядов. Поэтому расчет цифрового фильтра, помимо определения передаточной функции $H(z)$ фильтра и его структурной схемы, включает в себя также расчет разрядностей АЦП и ЦАП и разрядностей регистров оперативной памяти (умножителей, сумматоров).

Кроме того, при расчете цифрового фильтра предусматривают расчет масштабных множителей, вводимых в схему для предотвращения переполнения регистров фильтра, а также проверку устойчивости фильтра.

Пусть требуется определить передаточную функцию дискретного полосового фильтра с параметрами: $f_d = 140$ Гц; $f_{п1} = 15,5$ Гц; $f_{п2} = 30$ Гц; $f_{31} = 7,75$ Гц; $f_{32} = 60$ Гц; $\Delta A = 0,5$ дБ; $A_{\min} = 40$ дБ.

Требования к любому типу фильтра преобразуются в требования к аналоговому ФНЧ-прототипу. Затем рассчитывается аналоговый прототип и с помощью замены переменных переходят от $H(p)$ к $H(z)$. Формулы замены переменных для разных типов фильтров даны в табл. 5.1. Требования к цифровым фильтрам приведены на рис. 5.22.

$$\Omega_{п1} = 15,5/140 = 0,110714; \quad \Omega_{п2} = 30/140 = 0,214286;$$

$$\Omega_{31} = 7,75/140 = 0,055357; \quad \Omega_{32} = 60/140 = 0,428571;$$

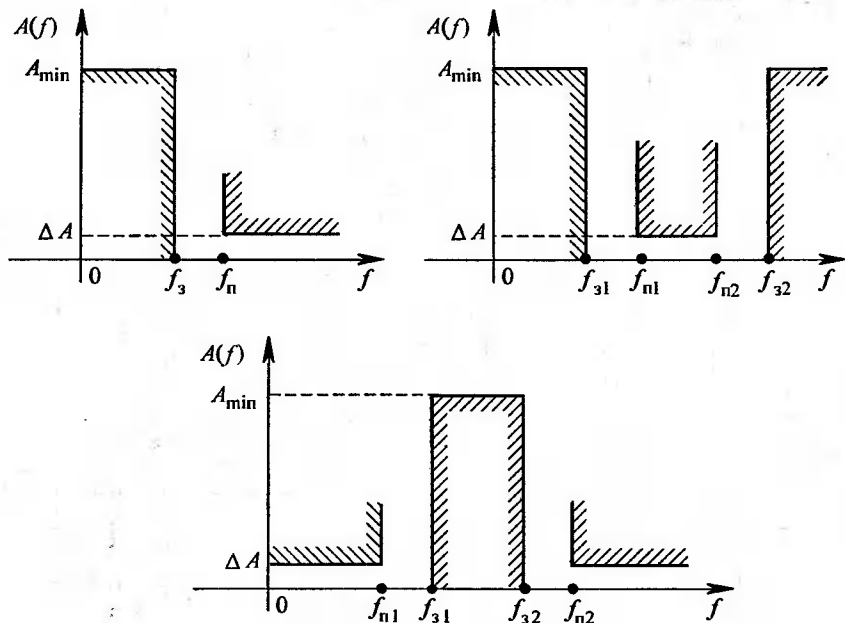


Рис. 5.22

$$\gamma = \operatorname{ctg}[\pi(0,214286 - 0,110714)] = 2,964087;$$

$$\alpha = \frac{\cos[\pi(0,214286 + 0,110714)]}{\cos[\pi(0,214286 - 0,110714)]} = 0,551433;$$

$$\Omega'_{\text{аз}} = 2,964087 \frac{0,551433 - \cos 2\pi \cdot 0,055357}{\sin 2\pi \cdot 0,055357} \approx -3,38;$$

$$\Omega''_{\text{аз}} = 2,964087 \frac{0,551433 - \cos 2\pi \cdot 0,428571}{\sin 2\pi \cdot 0,428571} \approx 9,92;$$

$$\Omega'_{\text{аз}} = \min(3,38; 9,92) \approx 3,38.$$

По данным $\Omega'_{\text{аз}} = 3,38$, $\Delta A = 0,5$ дБ и $A_{\text{мин}} = 40$ дБ из справочника находим

Формулы замены переменных для разных типов фильтров

Дискретный фильтр	Граничные частоты	Формула замены	Параметр	Связь между частотами	Граничные частоты аналогового фильтра
НЧ	$\Omega_{п} = f_{п} / f_{д}$ $\Omega_{з} = f_{з} / f_{д}$	$p = \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi \Omega_{п}$	$\Omega_{а} = \gamma \operatorname{tg} \pi \Omega$	$\Omega_{аз} = \gamma \operatorname{tg} \pi \Omega_{з}$
ВЧ	$\Omega_{п} = f_{п} / f_{д}$ $\Omega_{з} = f_{з} / f_{д}$	$p = \gamma \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi \Omega_{п}$	$\Omega_{а} = \gamma \operatorname{ctg} \pi \Omega$	$\Omega_{аз} = \gamma \operatorname{ctg} \pi \Omega_{з}$
ПФ	$\Omega_{п1} = f_{п1} / f_{д}$ $\Omega_{п2} = f_{п2} / f_{д}$ $\Omega_{з1} = f_{з1} / f_{д}$ $\Omega_{з2} = f_{з2} / f_{д}$	$p = \gamma \frac{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi (\Omega_{п2} - \Omega_{п1})$ $\alpha = \frac{\cos \pi (\Omega_{п2} + \Omega_{п1})}{\cos \pi (\Omega_{п2} - \Omega_{п1})}$	$\Omega_{а} = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \Omega}{\sin 2\pi \Omega}$	$\Omega_{аз} = \min(\Omega'_{аз} , \Omega''_{аз})$, где $\Omega'_{аз} = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{з1}}{\sin 2\pi \Omega_{з1}}$; $\Omega''_{аз} = \gamma \frac{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{з2}}{\sin 2\pi \Omega_{з2}}$
ЗФ	$\Omega_{п1} = f_{п1} / f_{д}$ $\Omega_{п2} = f_{п2} / f_{д}$ $\Omega_{з1} = f_{з1} / f_{д}$ $\Omega_{з2} = f_{з2} / f_{д}$	$p = \gamma \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}$	$\gamma = \operatorname{ctg} \pi (\Omega_{п2} - \Omega_{п1})$ $\alpha = \frac{\cos \pi (\Omega_{п2} + \Omega_{п1})}{\cos \pi (\Omega_{п2} - \Omega_{п1})}$	$\Omega_{а} = \gamma \frac{\sin 2\pi \Omega}{\alpha - \cos 2\pi \Omega}$	$\Omega_{аз} = \min(- \Omega'_{аз} , \Omega''_{аз})$, где $\Omega'_{аз} = \gamma \frac{\sin 2\pi \Omega_{з1}}{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{з1}}$; $\Omega''_{аз} = \gamma \frac{\sin 2\pi \Omega_{з2}}{\alpha - \cos 2\pi \Omega_{з2}}$

$$H(p) = 0,484123 \frac{1}{p^2 + 0,412569p + 1,144123} \times$$

$$\times \frac{1}{p^2 + 0,996024p + 0,437016}.$$

Передаточная функция $H(z)$ находится с помощью подстановки

$$p = 2,964087 \frac{1 - 2 \cdot 0,551433z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

и разлагая каждый из двух полиномов четвертой степени (в знаменателе $H(z)$) на множители (полиномы второй степени):

$$H(z) = 0,0035652 \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,703705z^{-1} + 0,68397z^{-2}} \times$$

$$\times \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,155395z^{-1} + 0,741638z^{-2}} \times$$

$$\times \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0,378998z^{-1} + 0,860199z^{-2}} \times$$

$$\times \frac{1 - z^{-2}}{1 - 1,479492z^{-1} + 0,907562z^{-2}}.$$

5.6. Методы анализа цифровых фильтров

Благодаря современным инструментам САПР, анализ и проектирование нерекурсивных фильтров выполняется относительно просто. Проектирование нерекурсивных фильтров базируется, в первую очередь, на том, что частотная характеристика фильтра определяется импульсной характеристикой, а во-вторых, на том, что коэффициенты фильтра определяются его квантованной импульсной характеристикой. На вход фильтра подается одиночный импульс, и по мере прохождения этого импульса через элементы задержки на выходе поочередно формируются коэффициенты фильтра. Таким образом, процесс

проектирования нерекурсивного фильтра состоит в определении его импульсной характеристики по желаемой частотной характеристике с последующим квантованием импульсной характеристики в ходе генерации коэффициентов фильтра.

Полезно сделать некоторое отступление и исследовать соотношения между временным и частотным представлениями для лучшего понимания принципов, лежащих в основе цифровых фильтров, в частности — нерекурсивных фильтров. В дискретной системе операция свертки может быть представлена рядом операций умножения с накоплением. Операция свертки во временной или частотной области эквивалентна умножению «точки на точку» в соответствующей дуальной области. Например, свертка во временной области эквивалентна умножению в частотной области. Это изображено графически на рис. 5.23.

Очевидно, что фильтрация в частотной области может быть выполнена умножением на 1 всех частотных компонентов в полосе пропускания и умножением на 0 всех частотных компонентов в полосе задержки. И наоборот, свертка в частотной области эквивалентна умножению «точки на точку» во временной области.

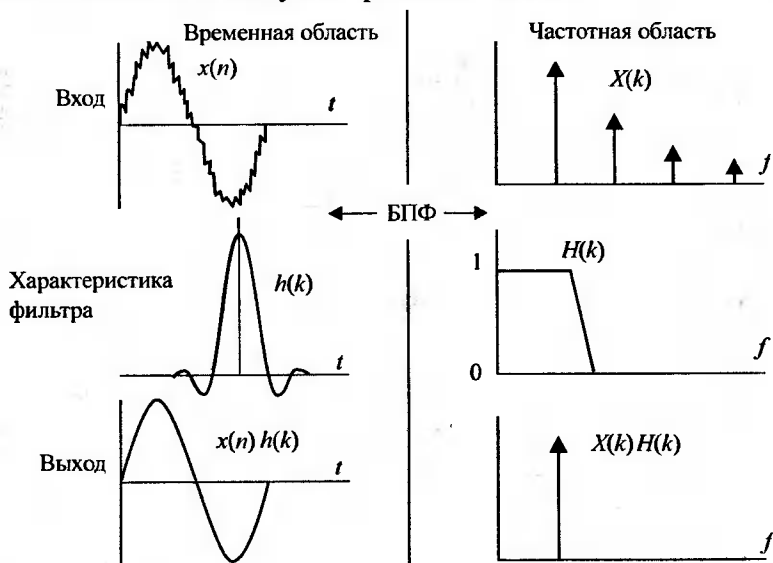


Рис. 5.23

Функция передачи в частотной области (1 или 0) может быть отображена во временную область с использованием дискретного преобразованием Фурье (ДПФ) (на практике используется БПФ). Во временной области это дает импульсную характеристику фильтра. Так как умножение в частотной области (спектр сигнала умножается на функцию передачи фильтра) эквивалентно свертке во временной области (сигнал свернут с импульсной характеристикой), то сигнал может быть отфильтрован путем вычисления его свертки с импульсной характеристикой фильтра. Задача фильтрации с использованием нерекурсивного фильтра является в точности таким процессом. Так как мы имеем дело с дискретной системой, сигнал и импульсная характеристика квантуются по времени и амплитуде, давая в результате набор дискретных отсчетов. Дискретные отсчеты, включающие желаемую импульсную характеристику, являются коэффициентами нерекурсивного фильтра.

Математический аппарат, применяемый при проектировании фильтров (аналоговых или цифровых), в основном базируется на преобразованиях Фурье. В непрерывных по времени системах в качестве обобщенного преобразования Фурье может рассматриваться преобразование Лапласа. Подобным способом можно обобщить преобразование Фурье для дискретных по времени систем, и результат такого обобщения известен как Z -преобразование.

Частотная характеристика идеального ФНЧ представлена на рис. 5.24, *а*. Соответствующая импульсная характеристика во временной области представлена на рис. 5.24, *б* и является функцией $\sin(x)/x$. Если для реализации этой частотной характеристики использовать нерекурсивный фильтр, то он должен иметь бесконечное число звеньев. Метод $\sin(x)/x$ со взвешиванием заключается в следующем. Сначала импульсная характеристика обрезается до разумного числа точек N , как на рис. 5.24, *в*. Частотная характеристика, соответствующая рис. 5.24, *в*, имеет слишком большое влияние боковых лепестков из-за разрывов в области конечных точек в обрезанной импульсной характеристике. Следующий шаг в процессе проектирования состоит в применении к обрезанному импульсу соответствующей весовой функции (Хэмминга, Блэкмана, Хеннинга и др.), как показано на рис. 5.24, *г*, обнуляющей конечные точки. Выбранная таким образом весовая функция определяет спад характеристики боковых лепестков фильтра. Как правило, существует несколько

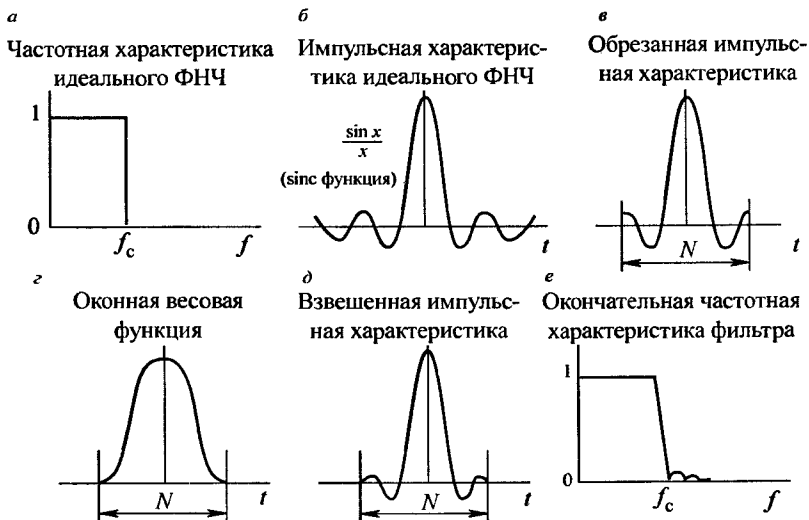


Рис. 5.24

приемлемых вариантов в зависимости от желаемой частотной характеристики. Частотная характеристика фильтра с обрезанной импульсной характеристикой $\sin(x)/x$ (рис. 5.24, д) представлена на рис. 5.24, е.

Метод рядов Фурье со взвешиванием заключается в начальном математическом определении функции передачи $H(f)$ и последующем разложении ее в ряд Фурье. Коэффициенты ряда Фурье определяют импульсную характеристику и, следовательно, коэффициенты нерекурсивного фильтра. Затем импульсная характеристика должна быть обрезана и подвергнута взвешиванию с использованием оконной функции, как в предыдущем случае. После обрезания и применения оконной функции используется БПФ для генерации соответствующей частотной характеристики. Частотная характеристика может быть изменена выбором различных оконных функций, хотя точное управление частотной характеристикой в полосе задерживания затруднено при любом методе, использующем взвешивание с функцией окна.

Проектирование по методу частотной дискретизации чрезвычайно полезно при генерации нерекурсивного фильтра с произвольной частотной характеристикой. $H(f)$ определяется как набор точек амплитудной и фазовой характеристик в частотной области. Затем точки преобразу-

ются в вещественные и мнимые составляющие комплексного спектра. Следующим шагом является получение импульсной характеристик путем взятия комплексного обратного БПФ от частотной характеристики. Далее импульсная характеристика обрезается до N точек и применяется взвешивание с функцией окна для минимизации эффекта обрезания. Затем результат проектирования фильтра должен быть проверен путем вычисления БПФ от импульсной характеристики и оценки получившейся частотной характеристики. Для получения желаемой характеристики может потребоваться несколько итераций.

Метод проектирования, основанный на использовании окон для обрезания импульсной характеристики и получения желаемой частотной характеристики, исторически был первым методом проектирования не рекурсивных фильтров. Метод частотной дискретизации был разработан в 70-х годах и до сих пор популярен в тех случаях, где частотная характеристика является произвольной функцией.

Сегодня доступны современные программы САПР, которые существенно упрощают проектирование НЧ, ВЧ, полосовых и режекторных не рекурсивных фильтров. Популярная программа была разработана Парксом и Макклилланом и использует алгоритм Ремеза. Проектирование фильтра начинается с определения параметров, представленных на рис. 5.25: неравномерности полосы пропускания, неравномерности полосы задерживания и области перехода. Специально для такого проектирования предназначена программа QED1000 фирмы Momentum Data Systems (демонстрационная версия свободно доступна по адресу <http://www.mds.com>).

Пусть необходимо спроектировать звуковой НЧ фильтр, который работает при частоте дискретизации 44,1 кГц. Фильтр определен согласно рис. 5.25. Граничная частота полос пропускания составляет 18 кГц. Полоса задерживания начинается при 21 кГц, неравномерность полосы пропускания равна 0,01 дБ, а неравномерность полосы задерживания — 96 дБ. Также необходимо определить длину слова (разрядность) коэффициентов, которая в данном случае составляет 16 разрядов, принимая во внимание, что используется 16-разрядный цифровой сигнальный процессор (ЦСП) с фиксированной точкой.

Программа позволяет выбирать между проектированием, основанным на взвешивании с использованием оконных функций, и проектированием фильтров с фиксированной неравномерностью Паркса-Мак-

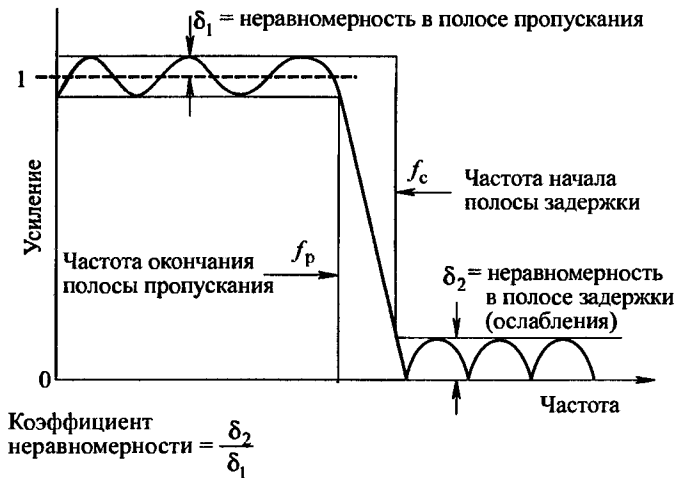


Рис. 5.25

клиллана. Если выбрать последний способ, то программа оценивает число звеньев фильтра, требуемое для его реализации с соблюдением сформулированных технических требований. В данном случае число звеньев равно 69. Можно принять это число и продолжить проектирование или уменьшить число звеньев посмотреть, можно ли с меньшим числом достичь требуемой спецификации.

Программа выдает частотную характеристику (рис. 5.26), реакцию фильтра на ступенчатое воздействие (рис. 5.27), данные анализа в s - и z - плоскостях и импульсную характеристику (рис. 5.28).

Затем программа QED1000 выдает квантованные коэффициенты фильтра, которые служат исходными данными для программы, генерирующей реальный ассемблерный код для ряда популярных ЦСП, например процессоров Analog Devices. Программа обладает достаточной степенью гибкости и позволяет пользователю выполнять ряд сценариев оптимизации проектируемого фильтра.

Нерекурсивный фильтр с 69 звеньями требует $69 + 5 = 74$ командного цикла процессора ADSP-2189 быстродействием 75 МИПС (MIPS — Million Instruction Per Second), дает полное время вычисления на отсчет $74 \cdot 13,3 \text{ нс} = 984 \text{ нс}$. Интервал дискретизации равен $1/44,1 \text{ кГц}$, или $22,7 \text{ мкс}$. Это дает $22,7 - 0,984 = 21 \text{ мкс}$ для различных дополнительных операций и реализации других алгоритмов.

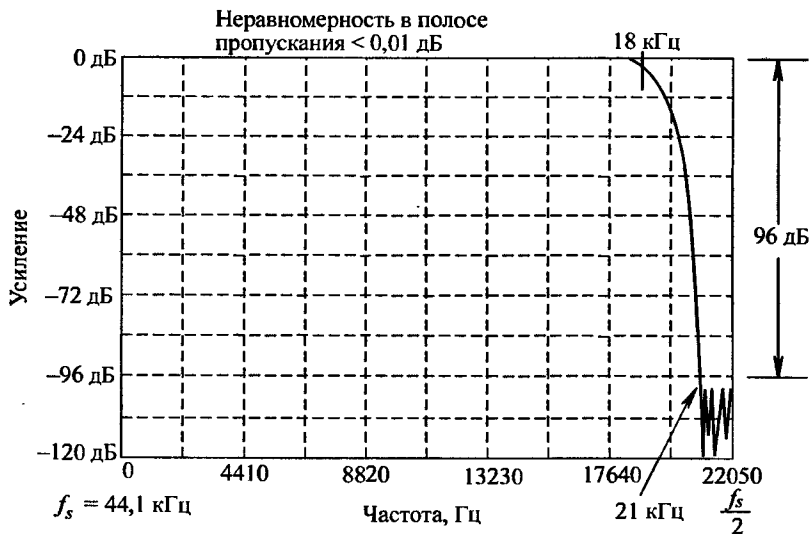


Рис. 5.26

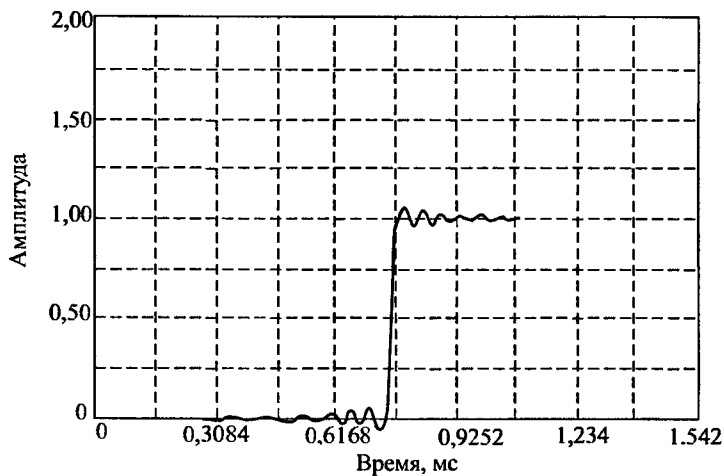


Рис. 5.27

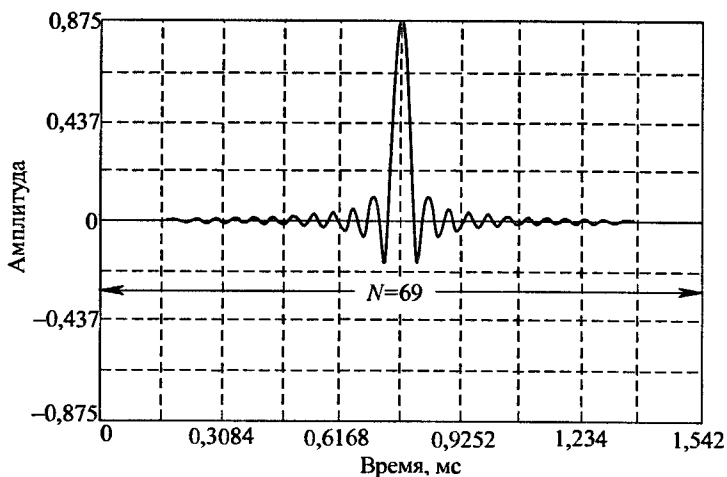


Рис. 5.28

Вследствие избыточности вычислительной мощности процессора в данном случае появляется целый ряд возможностей, которые включают использование более медленного процессора для этого приложения (3,3 МИПС), реализацию более сложного фильтра, который требует большего времени вычисления (до $N = 1700$) или увеличения частоты дискретизации до 1 МГц.

Преобразование спроектированной импульсной характеристики НЧ фильтра в импульсную характеристику ВЧ фильтра может быть выполнено одним из двух способов. По методу инверсии спектра знак каждого коэффициента фильтра в импульсной характеристике НЧ фильтра изменяется на противоположный. Затем к центральному коэффициенту прибавляется 1. По методу реверсирования спектра изменяется знак каждого второго коэффициента. Это приводит к изменению характеристик в частотной области. Другим словами, если частота среза НЧ фильтра равна $0,2f_s$, то результирующий ВЧ фильтр будет иметь частоту среза $0,5f_s - 0,2f_s = 0,3f_s$. Это должно приниматься во внимание при проектировании исходного НЧ фильтра.

Полосовой и режекторный фильтры можно спроектировать, комбинируя надлежащим образом соответствующие НЧ и ВЧ фильтры. Полосовые фильтры проектируются посредством каскадного соединения НЧ и ВЧ фильтров. Вычисляя свертку двух индивидуальных импульсных

характеристик, получают эквивалентную импульсную характеристику каскадных фильтров.

Режекторный фильтр проектируется посредством параллельного подключения НЧ и ВЧ фильтров и суммирования сигналов с их выходов. Суммируя индивидуальные импульсные характеристики, получают эквивалентную импульсную характеристику.

Как было упомянуто ранее, нерекурсивные фильтры не имеют реальных аналоговых эквивалентов. Самой близкой аналогией является фильтр скользящего среднего со взвешиванием. Кроме того, частотные характеристики нерекурсивных фильтров имеют только нули и не имеют полюсов. С другой стороны, рекурсивные фильтры имеют традиционные аналоговые эквиваленты (фильтр Баттерворта, Чебышева, эллиптический и Бесселя) и могут быть проанализированы и синтезированы с использованием традиционных методов проектирования фильтров.

Рекурсивные фильтры получили такое название, потому что их импульсные характеристики растянуты на бесконечном временном интервале. Это объясняется тем, что данные фильтры являются рекурсивными, то есть используют обратную связь. Хотя рекурсивные фильтры могут быть реализованы с меньшим, чем нерекурсивные фильтры количеством вычислений, рекурсивные фильтры не могут иметь таких характеристик, которыми обладают нерекурсивные фильтры. Более того, рекурсивные фильтры не имеют линейной фазовой характеристики. Но вычислительные преимущества рекурсивного фильтра теряются, когда выходной сигнал фильтра подвергается децимации (прореживанию), поскольку в этом случае всякий раз приходится вычислять заново значение выходной величины.

Рекурсивные фильтры обычно реализуются с помощью звеньев второго порядка, которые называются биквадратными фильтрами, потому что описываются биквадратным уравнениями в z -области. Фильтры высокого порядка проектируют, используя каскадирование биквадратных звеньев. Например, фильтр шестого порядка требует трех биквадратных звеньев.

Структура биквадратного рекурсивного фильтра представлена на рис. 5.18. Нули формируются коэффициентами прямой связи b_0 , b_1 и b_2 , а полюса (порядок) определяются коэффициентами обратной связи a_1 и a_2 .

Общее уравнение цифрового фильтра описывает обобщенную передаточную функцию $H(z)$ (5.9), которая содержит полиномы и в числителе, и в знаменателе. Корни знаменателя определяют располо-

жение полюсов фильтра, а корни числителя характеризуют расположение нулей. Хотя существует возможность создания непосредственно по этому уравнению рекурсивного фильтра более высокого порядка (так называемая прямая реализация), накапливающиеся ошибки квантования (из-за арифметики с фиксированной точкой и конечной длины слова) могут вызывать неустойчивость работ фильтра и большие ошибки. По этой причине правильнее расположить каскадно несколько биквадратных звеньев с соответствующими коэффициентами, чем использовать прямую форму реализации. Данные при вычислении биквадратных фильтров могут масштабироваться отдельно, а затем биквадратные звенья каскадируются для минимизации ошибок квантования коэффициентов и накапливающихся ошибок рекурсивного накопления. Каскадные биквадратные фильтры работают более медленно, чем их эквиваленты прямой формы реализации, но они более устойчивы и в них минимизируются эффекты, связанные с арифметическими ошибками конечной разрядности данных.

Первая прямая форма биквадратного звена, представленная на рис. 5.29, требует использования четырех регистров.

Эта конфигурация может быть заменена эквивалентно схемой, представленной на рис. 5.30, которая называется второй прямой формой реализации и требует использования только двух регистров.

Можно показать, что уравнения, описывающие биквадратный фильтр второй прямой формы реализации, такие же, как уравнения первой прямой формы реализации. Как и в случае нерекурсивного фильтра, система обозначений при изображении рекурсивного фильтра часто упрощается, как показано на рис. 5.31.

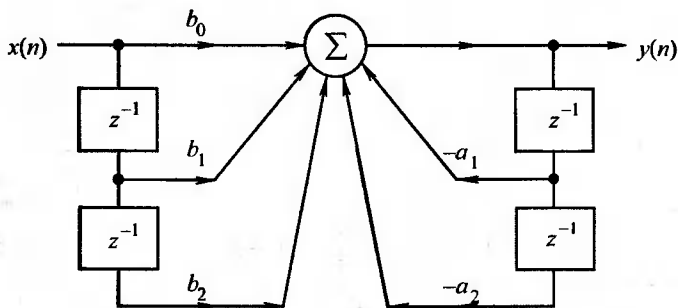


Рис. 5.29

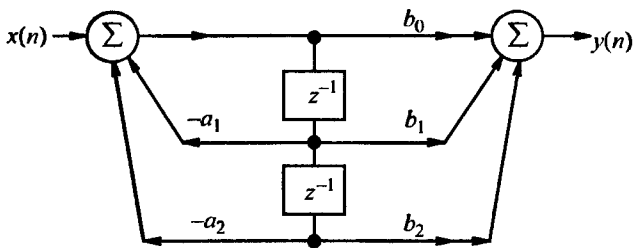


Рис. 5.30

Популярный метод проектирования фильтров с бесконечной импульсной характеристикой — БИХ фильтров сводится к тому, что сначала проектируется эквивалентный аналоговый фильтр, а затем функция передачи $H(s)$ преобразуется математически в z -область, $H(z)$. Проектирование фильтров более высоких порядков выполняется каскадированием биквадратных звеньев. Наиболее популярными и аналоговыми фильтрами являются фильтры Баттерворта, Чебышева, эллиптические и Бесселя. Существует множество программ САПР, способных генерировать функцию передачи фильтра, заданную с помощью преобразования Лапласа.

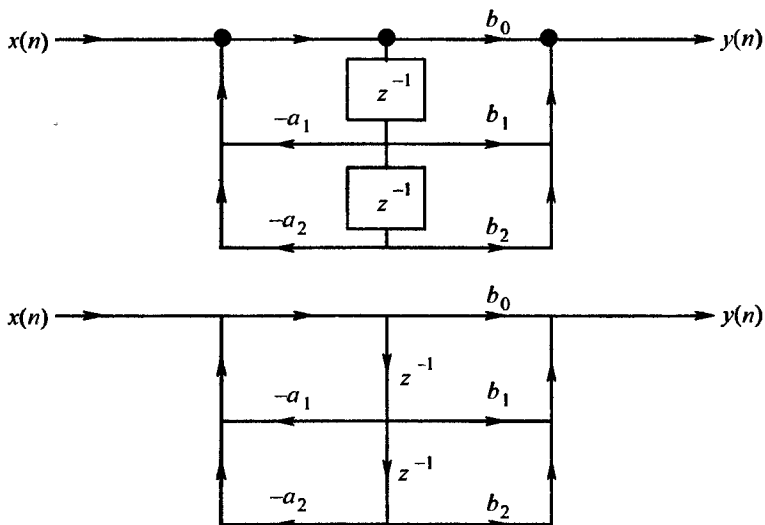


Рис. 5.31

Фильтр Баттерворта, не имеющий нулей частотной характеристики (также называемый фильтром с максимально плоской характеристикой), не создает пульсаций (неравномерности) в полосе пропускания и в полосе задержки, то есть обладает монотонной характеристикой в обеих полосах. Фильтр Чебышева 1-го рода имеет более быстрый спад частотной характеристики, чем фильтр Баттерворта (при равном порядке), и создает пульсации (неравномерность) в полосе пропускания. Реже используются фильтры Чебышева 2-го рода, имеющие пульсации (неравномерность) в полосе задержки, а не в полосе пропускания. Эллиптический фильтр (фильтр Кауэра) имеет полюса и нули частотной характеристики; создает пульсации (неравномерность) и в полосе пропускания, и в полосе задержки. Этот фильтр имеет более быстрый спад частотной характеристики, чем фильтр Чебышева при том же числе полюсов (порядке). Эллиптический фильтр часто используется там, где допускается несколько худшая фазовая характеристика. Наконец, фильтр Бесселя (Томпсона), который не имеет нулей частотной характеристики, обладает оптимальной импульсной характеристикой и линейной фазовой характеристикой, но имеет худший спад частотной характеристики из всех типов приведенных фильтров при том же числе полюсов (порядке).

Все вышеперечисленные типы аналоговых фильтров описаны в литературе, их преобразования по Лапласу $H(s)$ доступны либо из таблиц, либо могут быть получены с помощью средств САПР. Существует три метода преобразования изображения по Лапласу в Z -изображение: метод инвариантности импульсной характеристики, билинейное преобразование и согласованное Z -преобразование. Результирующее Z -изображение может быть преобразовано в коэффициенты биквадратного фильтра. Эти методы достаточно распространены в математике и в дальнейшем не будут обсуждаться.

Подход САПР при проектировании рекурсивного фильтра подобен программе Паркса-Макклиллана, используемой для нерекурсивных фильтров. Эта методика использует алгоритм Флетчера-Пауэла.

При вычислении производительности ЦСП, предназначенного для реализации рекурсивных фильтров, необходимо исследовать эталонные требования эффективности вычислений для биквадратного звена фильтра. Для получения выходного отсчета биквадратного фильтра при его реализации на базе семейства процессоров ADSP-21xx требуется семь командных циклов. Для DSP-процессора ADSP-2189, обладающего

быстродействием 75 МИПС, это соответствует $7 \cdot 13,3 \text{ нс} = 93 \text{ нс}$, что дает максимально возможную частоту дискретизации 10 МГц (в пренебрежении дополнительными операциями).

Выбор между нерекурсивными и рекурсивными фильтрами может быть своего рода состязанием в проектировании, но существует ряд руководящих принципов. Как правило, рекурсивные фильтры более эффективны, чем фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ фильтры), потому что они требуют меньшего количества памяти и меньшего количества операций умножения с накоплением. Рекурсивные фильтры могут быть разработаны, основываясь на предыдущем опыте проектирования аналоговых фильтров. Рекурсивные фильтры могут приносить проблемы неустойчивости, но это происходит реже, если проектируемые фильтры высокого порядка реализуются как системы, состоящие из каскадов второго порядка.

С другой стороны, нерекурсивные фильтры требуют большего количества звеньев и, соответственно, операций умножения с накоплением для реализации частотной характеристики с заданной частотой среза, но при этом имеют линейную фазовую характеристику. Нерекурсивный фильтр работает на конечном временном интервале данных, поэтому, если часть данных испорчена (например, в результате сбоя в работе АЦП), нерекурсивный фильтр будет «звенеть» только на временном интервале, соответствующем $N - 1$ отсчетам. Рекурсивный фильтр, из-за наличия обратной связи, будет «звенеть» значительно более длительный период времени.

Если необходимы фильтры с крутым спадом и испытывается дефицит во времени, отведенном для обработки, хорошим выбором являются эллиптические рекурсивные фильтры. Если число операций умножения с накоплением не является чрезмерным и требуется линейная фаза, то должен быть выбран нерекурсивный фильтр.

5.7. Аппаратная и программная реализация цифровых фильтров

Цифровая фильтрация является одним из наиболее мощных инструментальных средств ЦОС (цифровой обработки сигналов). Кроме очевидных преимуществ устранения ошибок в фильтре, связанных с флуктуациями параметров пассивных компонентов во времени и по температуре, дрейфом ОУ (в активных фильтрах) и т.д., цифровые фильтры

способны удовлетворять таким техническим требованиям по своим параметрам, которых, в лучшем случае, было бы чрезвычайно трудно или даже невозможно достичь в аналоговом исполнении. Кроме того, характеристики цифрового фильтра могут быть легко изменены программно. Поэтому, они широко используются в системах связи, в приложениях адаптивной фильтрации, таких как подавление эха в модемах, подавление шума и распознавание речи.

Процесс проектирования цифровых фильтров состоит из тех же этапов, что и процесс проектирования аналоговых фильтров. Сначала формулируются требования к желаемым характеристикам фильтра, по которым затем рассчитываются параметры фильтра. Амплитудная и фазовая характеристики формируются аналогично аналоговым фильтрам. Ключевое различие между аналоговым и цифровым фильтрами заключается в том, что, вместо вычисления величин сопротивлений, емкостей и индуктивностей для аналогового фильтра, рассчитываются значения коэффициентов для цифрового фильтра. Иными словами, в цифровом фильтре числа заменяют физические сопротивления и емкости аналогового фильтра. Эти числа, будучи коэффициентами фильтра, постоянно находятся в памяти и используются для обработки дискретных данных, поступающих от АЦП для фильтрации.

Цифровой фильтр, работающий в реальном масштабе времени, оперирует с дискретными по времени данными в противоположность непрерывному сигналу, обрабатываемому аналоговым фильтром. При этом очередной отсчет, соответствующий отклику фильтра, формируется по окончании каждого периода дискретизации. Вследствие дискретной природы обрабатываемого сигнала на отсчеты данных зачастую ссылаются по их номерам, например, отсчет 1, отсчет 2, отсчет 3 и т.д. На рис. 5.11 представлен низкочастотный сигнал, содержащий высокочастотный шум, который должен быть отфильтрован. Вначале сигнал должен быть оцифрован с помощью АЦП для получения выборки $x[n]$. Далее эта выборка поступает на цифровой фильтр, который в данном случае является фильтром НЧ. Отсчет выходных данных $y[n]$ используются для восстановления аналогового сигнала с использованием ЦАП с низким уровнем ложного сигнала.

Тем не менее, цифровые фильтры не могут являться решением всех возможных задач фильтрации, возникающих при обработке сигналов. Для работы в реальном масштабе времени, ЦСП должен быть расчи-

тан на выполнение всех шагов в программе фильтрации в пределах промежутка времени, соответствующего одному такту дискретизации, то есть $1/f_d$. Высокопроизводительный универсальный ЦСП с фиксированной точкой типа ADSP-2189, обладающий быстродействием 75 МИПС, способен выполнить операцию умножения с накоплением при реализации одного каскада фильтра за 13,3 нс. ЦСП ADSP-2189 затрачивает $N + 5$ инструкций при реализации фильтра с количеством каскадов N . Для 100-каскадного фильтра полное время вычисления составляет приблизительно 1,4 мкс. Это соответствует максимально возможной частоте дискретизации 714 кГц, ограничивая, таким образом, ширину полосы частот обрабатываемого сигнала несколькими сотнями килогерц.

Можно заменить ЦСП специализированным аппаратным цифровым фильтром, способным работать на частотах дискретизации, соответствующих видеосигналу. В других случаях ограничения по быстродействию могут быть преодолены сохранением выборки данных, поступающих с большой скоростью от АЦП, в буфер памяти. Затем буферная память читается со скоростью, совместимой с быстродействием цифрового фильтра, основанного на ЦСП. Используя данный метод, может осуществляться обработка сигнала в псевдореальном масштабе времени в таких системах, как радар, где обычно обрабатываются пакеты данных, накапливаемые после каждого излучаемого импульса.

Другой подход заключается в использовании специализированных микросхем цифровых фильтров, подобных фильтрам PulseDSP™ компании Systolix. 16-разрядный сигма-дельта-АЦП AD7725 имеет на своем кристалле фильтр PulseDSP, который может выполнять за секунду 125 млн операций умножения с накоплением.

В дискретных системах, даже с высокой степенью избыточной дискретизации, требуется наличие аналоговых ФНЧ перед АЦП и после ЦАП для устранения эффекта наложения спектра. Более того, с ростом частоты, сигналы выходят за рамки возможностей доступных АЦП, и цифровая фильтрация становится невозможной. Но на крайне высоких частотах активная аналоговая фильтрация тоже невозможна из-за ограничений, связанных с полосой пропускания и искажениями ОУ, и в этих случаях требования фильтрации удовлетворяются пассивными элементами. Дальнейшее изложение будет сфокусировано, в первую очередь, на фильтрах, которые могут работать в реальном масштабе времени и могут быть программно реализованы с использованием ЦСП.

В качестве примера сравним аналоговый и цифровой фильтры, показанные на рис. 5.12. Частота среза обоих фильтров равна 1 кГц. Аналоговый фильтр реализован в виде фильтра Чебышева первого рода 6 порядка. На практике этот фильтр может быть собран на трех фильтрах второго порядка, каждый из которых состоит из операционного усилителя и нескольких резисторов конденсаторов. Проектирование фильтра 6 порядка является непростой задачей, а удовлетворение техническим требованиям по неравномерности характеристики в 0,5 дБ требует точного подбора компонентов.

С другой стороны, представленный цифровой фильтр с конечной импульсной характеристикой имеет неравномерность характеристики всего 0,002 дБ в полосе пропускания, линейную фазовую характеристику и значительно более крутой спад частотной характеристики. Таких показателей невозможно достичь аналоговыми методами. На практике существует много других факторов, учитываемых при сравнительной оценке аналоговых и цифровых фильтров. В большинстве современных систем обработки сигналов используются комбинации аналоговых и цифровых методов для реализации желаемых функций и используются преимущества всех методов, как аналоговых, так и цифровых.

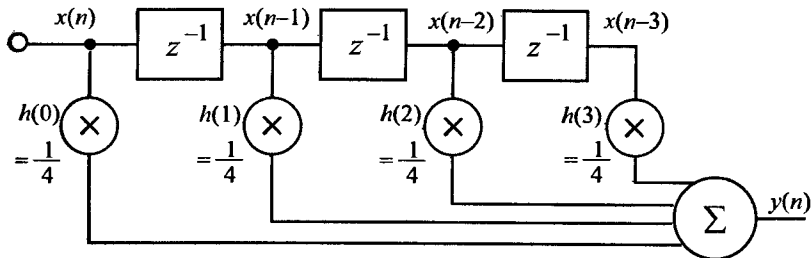
Существует много приложений, в которых цифровые фильтры должны работать в реальном масштабе времени. В них накладываются определенные требования на ЦСП в зависимости от частоты дискретизации и сложности фильтра. Ключевым моментом является то, что ЦСП должен проводить все вычисления в течение интервала дискретизации, чтобы быть готовым к обработке следующего отсчета данных. Пусть ширина полосы частот обрабатываемого сигнала равна f_a . Тогда частота дискретизации АЦП f_d должна быть, по крайней мере, в два раза больше, т.е. $2f_a$. Интервал дискретизации равен $1/f_d$. Все вычисления, связанные с реализацией фильтра (включая все дополнительные операции), должны быть закончены в течение этого интервала. Время вычислений зависит от числа звеньев фильтра и быстродействия и эффективности ЦСП. Каждое звено при реализации фильтра требует одной операции умножения и одной операции сложения (умножения с накоплением). ЦСП предназначен для быстрого выполнения операций умножения с накоплением. Кроме того, многие процессоры имеют дополнительные особенности, такие как реализация циклической адресации и организация программных циклов с автоматической проверкой усло-

вия продолжения цикла, минимизирующие количество дополнительных инструкций, которые в противном случае были бы необходимы.

Существует два основных типа цифровых фильтров: нерекурсивные — фильтры с конечной импульсной характеристикой и рекурсивные — фильтры с бесконечной импульсной характеристикой. Как следует из терминологии, эта классификация относится к импульсным характеристикам фильтров. Изменяя веса коэффициентов и число звеньев нерекурсивного фильтра, можно реализовать практически любую частотную характеристику. Нерекурсивные фильтры могут иметь такие свойства, которые невозможно достичь методами аналоговой фильтрации (в частности, совершенную линейную фазовую характеристику). Но высокоэффективные нерекурсивные фильтры строятся с большим числом операций умножения с накоплением и поэтому требуют использования быстрых и эффективных ЦСП. С другой стороны, рекурсивные фильтры имеют тенденцию имитировать принцип действия традиционных аналоговых фильтров с обратной связью. Поэтому их импульсная характеристика имеет бесконечную длительность. Благодаря использованию обратной связи, рекурсивные фильтры могут быть реализованы с меньшим количеством коэффициентов, чем нерекурсивные фильтры. Другим способом реализации КИХ или БИХ фильтрации являются решетчатые фильтры, которые часто используются в задачах обработки речи. Цифровые фильтры применяются в приложениях адаптивной фильтрации, благодаря своему быстродействию и простоте изменения характеристик воздействием на его коэффициенты.

Элементарной формой нерекурсивного фильтра является фильтр скользящего среднего, показанный на рис. 5.32.

Фильтры скользящего среднего популярны для сглаживания данных. Входные отсчеты $x(n)$ пропускаются через ряд регистров памяти (z^{-1} в соответствии с представлением элемента задержки при Z -преобразовании). В приведенном примере имеется четыре каскада соответствующих 4-точечному фильтру скользящего среднего. Каждый отсчет умножается на 0,25, и результаты умножения суммируются для получения значения скользящего среднего, которое подается на выход $y(n)$. На рисунке также представлено общее уравнение фильтра скользящего среднего на N точек. Необходимо обратить внимание на то, что N относится к числу точек при вычислении фильтра, а не к разрешающей способности АЦП или ЦАП.



$$\begin{aligned}
 y(n) &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + h(3)x(n-3) = \\
 &= \frac{1}{4}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) + \frac{1}{4}x(n-2) + \frac{1}{4}x(n-3) = \\
 &= \frac{1}{4}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]
 \end{aligned}$$

Для N -точечного

фильтра скользящего среднего

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

Рис. 5.32

С учетом равенства коэффициентов, наиболее простой путь исполнения фильтра скользящего среднего представлен на рис. 5.33.

Первым шагом является запоминание первых четырех отсчетов $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$ в регистрах. Эти величины суммируются и затем умножаются на 0,25 для получения первого значения выхода $y(3)$. Начальные значения выходов $y(0)$, $y(1)$ и $y(2)$ некорректны, потому что, пока отсчет $x(3)$ не получен, не все регистры заполнены.

Когда получен отсчет $x(4)$, он суммируется с результатом, а отсчет $x(0)$ вычитается из результата. Затем новый результат должен быть умножен на 0,25. Поэтому, вычисления, требуемые для получения нового значения на выходе, состоят из одного суммирования, одного вычитания и одного умножения, независимо от длины фильтра скользящего среднего.

Реакция 4-точечного фильтра скользящего среднего на ступенчатое воздействие представлена на рис. 5.34.

Обратите внимание, что фильтр скользящего среднего не имеет выброса по фронту входного сигнала. Это делает его полезным в приложениях обработки сигналов, где требуется фильтрация случайного белого шума при сохранении характера входного импульса. Из всех возможных линейных фильтров фильтр скользящего среднего дает самый низкий уровень шума при заданной крутизне фронта импульса. Это показано на рис. 5.35, где уровень шума понижается по мере увеличения числа точек.

$$y(3) = 0,25 [\quad \quad \quad x(3) + x(2) + x(1) + x(0)]$$

$$y(4) = 0,25 [\quad \quad \quad x(4) + x(3) + x(2) + x(1)]$$

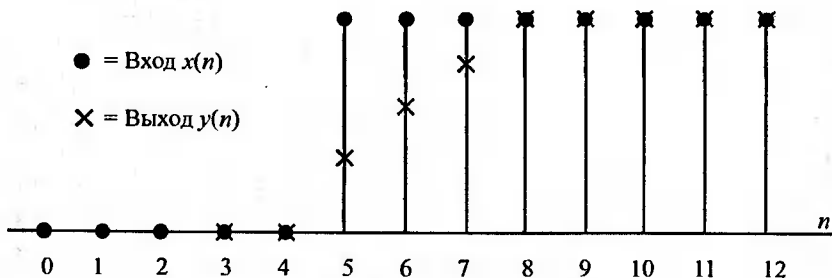
$$y(5) = 0,25 [\quad \quad \quad x(5) + x(4) + x(3) + x(2)]$$

$$y(6) = 0,25 [\quad \quad \quad x(6) + x(5) + x(4) + x(3)]$$

$$y(7) = 0,25 [x(7) + x(6) + x(5) + x(4)]$$

Вычисление каждого выходного значения требует 1 умножения, 1 сложения и 1 вычитания

Рис. 5.33



$$\text{В общем: } y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

$$\text{Для } N=4: y(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x(n-k)$$

Рис. 5.34

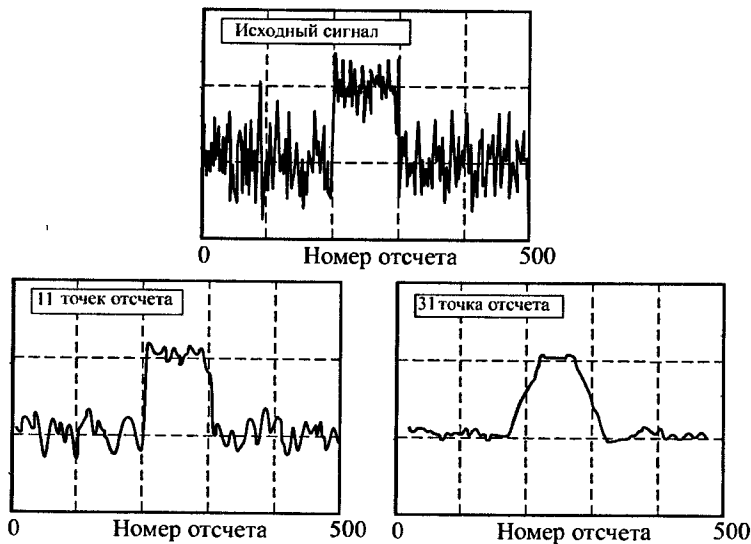


Рис. 5.35

Существенно, что время реакции фильтра на ступенчатое воздействие от 0 до 100 % равно произведению общего количества точек фильтра на период дискретизации.

Частотная характеристика простого фильтра скользящего среднего выражается функцией $\sin(x)/x$. Она представлена в линейном масштабе на рис. 5.36.

Увеличение числа точек при реализации фильтра сужает основной лепесток, но существенно не уменьшает амплитуду боковых лепестков частотной характеристики, которая равна приблизительно -14 дБ для фильтра с 11 и с 31 отводами. Естественно, эти фильтры не подходят в том случае, где требуется большое ослабление в полосе задержки.

Можно существенно улучшить эффективность простого нерекурсивного фильтра скользящего среднего, выбирая разные веса или значения коэффициентов вместо равных значений. Крутизна спада может быть увеличена добавлением большего количества звеньев в фильтр, а характеристик полосы затухания улучшаются выбором надлежащих коэффициентов фильтра. В отличие от фильтра скользящего среднего, для реализации каждой ступени обобщенного нерекурсивного фильтра требуется цикл умножения с накоплением.

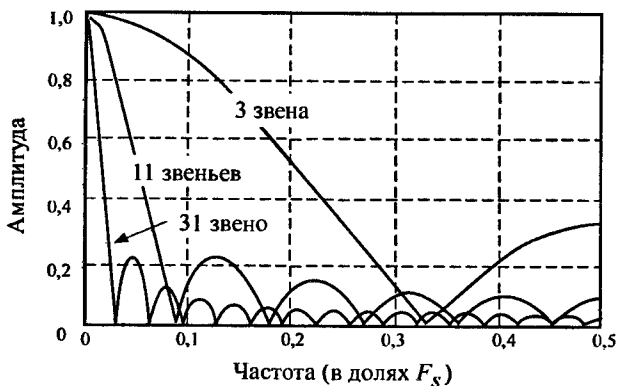


Рис. 5.36

Обобщенная форма нерекурсивного фильтра с числом звеньев N представлена на рис. 5.14, а. Нерекурсивный фильтр должен работать в соответствии с уравнением, задающим свертку:

$$Y(n) = h(k)x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k),$$

где $h(k)$ — массив коэффициентов фильтра и $x(n-k)$ — входной массив данных фильтра. Число N в уравнении представляет собой число звеньев и определяет эффективность фильтра, как было сказано выше. Нерекурсивный фильтр с числом звеньев N требует N циклов (операций) умножения с накоплением.

Согласно рис. 5.37, диаграммы КИХ-фильтров часто изображаются в упрощенном виде.

Операции суммирования представляются стрелками, указывающими в точки, а операции умножения обозначают, помещая коэффициенты $h(k)$ рядом со стрелками на линиях. Элемент задержки z^{-1} показывают, помещая его обозначение выше или рядом с соответствующей линией.

В рядах, задаваемых уравнениями нерекурсивных фильтров, предполагается последовательное обращение к N коэффициентам от $h(0)$ до $h(N-1)$. Соответствующие точки данных циркулируют в памяти. При этом добавляются новые отсчеты данных, заменяя самые старые, и каждый раз производится вычисление выходного значения фильтра. Для реализации циклического буфера может использоваться фиксированный

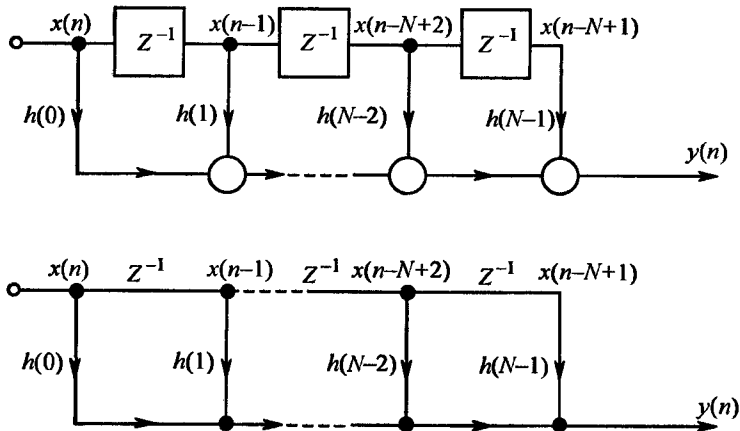


Рис. 5.37

объем оперативной памяти, как показано на рис. 5.38 для нерекурсивного фильтра с 4 звеньями.

Самый старый отсчет данных заменяется новым после каждой операции вычисления свертки. Выборка из четырех последних отсчетов данных всегда сохраняется в оперативной памяти.

Чтобы упростить адресацию, чтение из памяти старых значений начинается с адреса, который следует непосредственно за адресом только что записанного нового элемента выборки. Например, если значение $x(4)$ только что записано в ячейку памяти 0, то значения данных читаются из ячеек 1, 2, 3 и 0. Этот пример может быть расширен применительно к любому числу звеньев фильтра. Используя адресацию ячеек памяти таким способом, адресный генератор должен лишь вычислять последовательные адреса, независимо от того, является ли данная операция чтением памяти или записью. Такой буфер в памяти данных называется циклическим, потому что, когда достигается его последняя ячейка, указатель автоматически позиционируется на начало буфера. Выборка коэффициентов из памяти осуществляется одновременно с выборкой данных в соответствии с описанной схемой адресации, самый старый отсчет данных выбирается первым. Поэтому сначала должна осуществляться выборка из памяти последнего коэффициента. При использовании адресного генератора, поддерживающего инкрементную адресацию, коэффициенты могут быть сохранены в памяти в обратном

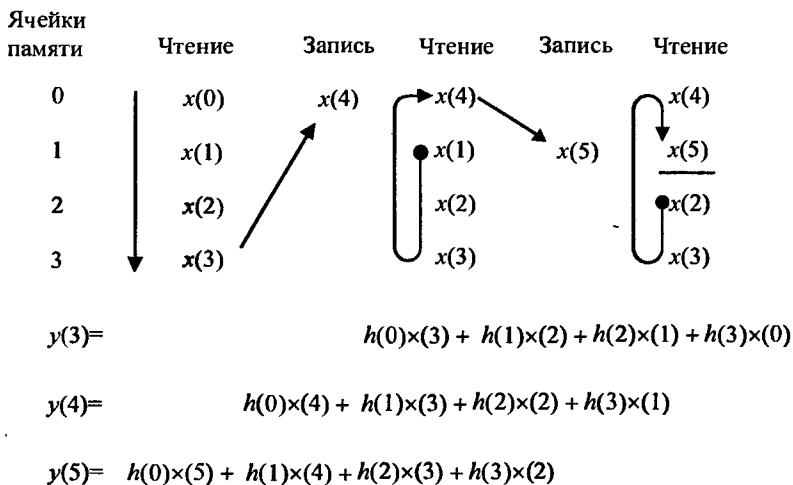


Рис. 5.38

порядке: $h(N-1)$ помещается в первую ячейку, а $h(0)$ — в последнюю. И наоборот, коэффициенты могут быть сохранены в порядке возрастания их номеров, если использовать адресный генератор, поддерживающий декрементную адресацию. В примере, показанном на рис. 5.38, коэффициенты сохранены в обратном порядке.

Простая итоговая блок-схема для этих операций представлена на рис. 5.39.

Для ЦСП компании Analog Devices все операции, выполняемые за один цикл фильтра, производятся за один командный цикл процессора (или половину командного цикла для ЦСП с архитектурой SIMD), благодаря чему существенно увеличивается эффективность вычислений. Данное преимущество известно как реализация циклов без дополнительных операций. Ассемблерный код нерекурсивного фильтра для семейства процессоров ЦОС ADSP-21xx с фиксированной точкой представлен на рис. 5.40.

Стрелкам в тексте помечены исполняемые команды, остальная часть кода — просто комментарии, добавленные для пояснения.

Первая команда (помеченная меткой `fir:`) иницирует вычисления, очищая регистр `MR` и заполняя регистры `MX0` и `MY0` первым значением данных и первым значением коэффициентов из памяти программ и

1. Получение отчета от АЦП (обычно по прерыванию)
2. Помещение отсчета в циклический буфер входного сигнала
3. Обновление указателя циклического буфера входного сигнала
4. Обнуление аккумулятора
5. Осуществление фильтрации (цикл по всем коэффициентам)
6. Выборка коэффициента из циклического буфера коэффициентов
7. Обновление указателя циклического буфера коэффициентов
8. Выборка отсчета из циклического буфера входного сигнала
9. Обновление указателя циклического буфера входного сигнала
10. Умножение коэффициентов на отсчет
11. Добавление нового слагаемого к промежуточному результату
12. Выдача отфильтрованного отсчета на ЦАП

ADSP-21xx Пример кода:

```

CNTR = N-
DO convolution UNTIL
convolution
MR = MR + MX0 * MY0(SS), MX0 = DM(IO, M1), MY0 =

```

Рис. 5.39

```

MODULE          fir_sub;
                FIR Filter Subroutine
                Calleng Parameters
                IO--> Oldest input data value in delay line
                I4--> Beginning of filter coefficient table
                L0 - Filter length (N)
                L4 - Filter length (N)
                M1,M5 - 1
                CNTR - Filter length - 1 (N-1)
                Return Values
                MR1 - Sum of products (rounded and saturated)
                IO--> Oldest input data value in delay line
                I4--> Beginning of filter coefficient table
                Altered REDisters
                MX0,MY0,MR
                Computation Time
                (N - 1) + 6 cycles - N + 5 cycles
                All coefficients are assumed be in 1.15 format. )
ENTRY
fir:            MR=0, MX0=DM(IO,M1),MY0=PM(I4,M5)
               CNTR = N-1;
               DO convolution UNTIL CE;
convolution:   MR=MR+MX0*MY0(SS), MX0=DM(IO,M1),MY0=PM(I4,M5)
               MR=MR+MX0*MY0(RND);
               IF MV SAT MR;
               RTS;
ENDMOD;

```

Рис. 5.40

памяти данных. Затем для вычисления суммы первых $N - 1$ слагаемых, $N - 1$ раз в N циклах выполняется операция умножения с накоплением, реализуя свертку выборки следующего набора данных и коэффициентов. Заключительная команда умножения с накоплением выполняется с включенным режимом округления для округления результата до старших 24 разрядов регистра MR. Затем регистр MR1 условно насыщается до своего наибольшего положительного или отрицательного значения, в зависимости от состояния флага переполнения в регистре MV. Благодаря такому подходу, при накоплении результата используются преимущества регистра MR 40-разрядной точности. Насыщение происходит только в том случае, если вычисление заключительного результата привело к переполнению 32 младших значащих разрядов регистра MR.

Ограничение на число звеньев фильтра, реализующего подпрограммы нерекурсивной фильтрации в реальном масштабе времени, определяется, прежде всего, длительностью процессорного цикла, частотой дискретизации и требуемым объемом других вычислений. Подпрограмма нерекурсивного фильтра, представленная в примере, требует общего количества циклов $N + 5$ для фильтра с числом звеньев N . Для ЦСП ADSP-2189, обладающего быстродействием 75 МИПС, один цикл команды выполняется за 13,3 нс, так что расчет фильтра с числом звеньев 100 требует

$$13,3 \text{ нс} \cdot 100 + 5 \cdot 13,3 \text{ нс} = 1330 \text{ нс} + 66,5 \text{ нс} = 1396,5 \text{ нс} = 1,4 \text{ мкс.}$$

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АДИКМ — адаптивная импульсно-кодовая модуляция
АЦП — аналого-цифровой преобразователь
АЧХ — амплитудно-частотная характеристика
БИХ фильтр — фильтр с бесконечной импульсной характеристикой
БПФ — быстрое преобразование Фурье
ВЧ канал — канал высокой частоты
ВШР — встречно-штыревые преобразователи
ГВЗ — групповое время задержки
ДК — декодирование (декодер)
ДМ — демодуляция (демодулятор)
ДПФ — дискретное преобразование Фурье
ИКМ — импульсно-кодовая модуляция
КИХ фильтр — фильтр с конечной импульсной характеристикой
НЧ канал — канал низкой частоты
ОФМ — относительно фазовая модуляция
ОЦ — операционный усилитель
П — поглотители
ПАВ — поверхностные акустические волны
ПЗФ — полосно-задерживающий фильтр
ППФ — полосно-пропускающий фильтр
ПФ — полосовой фильтр
Р — распределитель
РФ — режекторный фильтр
САПР — система автоматизированного проектирования
СВЧ — сверхвысокая частота
ТЛЭЦ — теория линейных электрических цепей
ТС — телесигнализация
ТУ — телеуправление
ТЧ канал — канал тональной частоты
ФВЧ — фильтр верхних частот
ФНЧ — фильтр нижних частот
ФЧХ — фазочастотная характеристика
ЦАП — цифроаналоговый преобразователь

ЦОС — цифровая обработка сигналов
ЦСП — цифровой сигнальный процессор
ЭВМ — электронно-вычислительная машина
ЭМФ — электромеханические фильтры
DSP — Digital Signal Processor
FDMA — Frequency Division Multiple Access
MPEG — Motion Picture Experts Group
TDMA — Time Division Multiple Access

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И.* Основы теории цепей: Учебник для вузов. — М.: Радио и связь, 2000.
2. *Бессонов П.А.* Линейные электрические цепи. — М.: Гардарики, 2002.
3. *Калугин Ю.Е., Меренков М.Б.* Основы теории цепей: Учебное пособие. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2001.
4. *Кудряшов В.А., Глушко В.П.* Системы передачи дискретной информации: Учебник для техникумов и колледжей ж.-д. транспорта. — М.: УМК МПС России, 2002.
5. *Пейтон А. Дж., Воли В.* Аналоговая электроника на операционных усилителях. — М.: Бинوم, 1994.
6. *Шебес М.Р., Каблукова М.В.* Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Глава 1. УСЛОВИЯ РАБОТЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНИКИ И СВЯЗИ	6
1.1. Электрические цепи в устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи	6
1.2. Классификация электрических цепей и задачи теории линейных электрических цепей	10
1.3. Модели линейных электрических цепей	17
1.4. Характеристики линейных электрических цепей	21
1.5. Операторное, частотное и временное представление непрерывных и импульсных воздействий и реакций цепей	35
Глава 2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	71
2.1. Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие методом преобразования Лапласа	71
2.2. Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие в частотной области	79
2.3. Расчет реакции линейной цепи на заданное воздействие во временной области	88
2.4. Расчет характеристик разветвленных линейных цепей.....	99
2.5. Моделирование электрических цепей на ЭВМ.....	123
2.6. Двухполюсники.....	146
2.7. Четырехполюсники	173
Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЛИНИИ)	231
3.1. Электрические линии железнодорожной автоматики, телемеханики и связи, рельсовые цепи	231
3.2. Уравнение однородной уединенной линии в установив- шемся режиме гармонического переменного тока	234
3.3. Однородная уединенная линия как четырехполюсник	258
3.4. Линия, возбуждаемая распределенными источниками	264

3.5. Волновые параметры линий автоматики, телемеханики и связи и их частотные зависимости.....	272
3.6. Передача по линии широкополосных сигналов. Искажения сигналов	283
3.7. Временные характеристики однородной линии	287
3.8. Рабочие параметры передачи однородной линии.....	291
3.9. Неоднородные электрические линии	304
3.10. Волновые процессы в несимметричных двухпроводных линиях и рельсовых цепях	306
3.11. Расчет условий передачи сигналов по неоднородным трактам автоматики, телемеханики и связи	318
Глава 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЧАСТОТНЫМИ И ВРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ИХ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ	328
4.1. Устройства железнодорожной автоматики, телемеханики и связи со специальными характеристиками	328
4.2. Электрические фильтры LC . Условия пропускания и задерживания цепочечных фильтров.....	334
4.3. Характеристики фильтров типа k	338
4.4. Влияние потерь и несогласованности нагрузок на характеристики фильтров	353
4.5. Фильтры типа m	358
4.6. Требования к электрическим фильтрам. Пример расчета.....	366
4.7. Мостовые фильтры	372
4.8. Полиномиальные фильтры LC	382
4.9. Активные RC -фильтры	391
4.10. Чувствительность фильтров к изменению параметров элементов.....	413
4.11. Кварцевые, электромеханические фильтры и фильтры на поверхностных акустических волнах	415
4.12. Корректоры амплитудно-частотных характеристик в системах автоматики, телемеханики и связи	419
4.13. Корректоры фазочастотных характеристик трактов передачи сигналов	428
4.14. Принципы построения фильтрующих цепей на основе временных характеристик	436

Глава 5. ДИСКРЕТНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ.....	449
5.1. Цифровая обработка сигналов в линейных электрических цепях	449
5.2. Области применения цифровых фильтров в устройствах железнодорожной автоматики, телемеханики и связи.....	458
5.3. Трансверсальные и рекурсивные цифровые фильтры.....	462
5.4. Характеристики цифровых фильтров и их расчет. Оценка погрешностей	464
5.5. Синтез цифровых фильтров	465
5.6. Методы анализа цифровых фильтров.....	477
5.7. Аппаратная и программная реализация цифровых фильтров	489
<i>ПРИЛОЖЕНИЕ. СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....</i>	<i>502</i>
<i>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА</i>	<i>504</i>

Евгений Арсентьевич Волков

Эдуард Иванович Санковский

Дмитрий Юрьевич Сидорович

**ТЕОРИЯ
ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ
АВТОМАТИКИ, ТЕЛЕМЕХАНИКИ
И СВЯЗИ**

*Под общей редакцией
профессора В.А. Кудряшова*

*Учебник для вузов
железнодорожного транспорта*

Редактор В.А. Быков
Корректор И.Ф. Солодкова
Компьютерная верстка Н.В. Звонова

Изд. лиц. ИД № 04598 от 24.04.2001 г.

Подписано в печать 13.12.2005 г.

Формат 60×84 1/16. Печ. л. 32. Тираж 2000 экз. Заказ № 5484

УМЦ по образованию на железнодорожном транспорте

Издательство «Маршрут»

107078, Москва, Басманный пер., д. 6

Отпечатано ООО «Прессиздат»
105094, г. Москва, ул. Золотая, д. 11, стр. 1

ISBN 5-89035-311-X



9 785890 353115