

Е. И. Юревич Теория автоматического управления

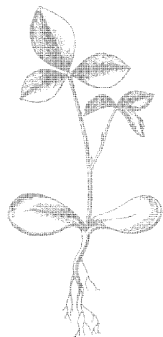
Е. И. Юревич  
Теория автоматического  
управления

**Е. И. Юревич**

# **Теория автоматического управления**

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов вузов,  
обучающихся по специальности «Автоматика  
и телемеханика»*

**ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ПЕРЕРАБОТАННОЕ  
И ДОПОЛНЕННОЕ**



**«ЭНЕРГИЯ»  
Ленинградское отделение 1975**

**6Ф6.5**

**Ю 68**

**УДК 62-523.8(075.8)**

**Рецензент — кафедра автоматики и телемеханики  
Северо-Западного заочного политехнического института**

**Ю  $\frac{30501-162}{051(01)-75}$  215-75**

**© Издательство «Э н е р г и я», 1975**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основное назначение этой книги — служить учебником по курсу «Теория автоматического управления и регулирования» для студентов специальностей «Автоматика и телемеханика» и «Информационно-измерительная техника» политехнических вузов. Этим определяются содержание и объем книги.

В соответствии с учебным планом курс подкрепляется практическими занятиями в виде упражнений и лабораторных работ.

Книга может быть рекомендована также в качестве учебного пособия по одноименному курсу для других специальностей политехнических и радиотехнических вузов.

В основу книги положен курс лекций, читаемых автором на электромеханическом факультете Ленинградского политехнического института имени М. И. Калинина.

Настоящее, второе, издание книги по сравнению с первым изданием 1969 г. дополнено новыми материалами по нелинейной коррекции (глава десятая) и оптимальным и адаптивным системам. Одновременно ряд материалов справочного характера вынесен в приложения.

Замечания и отзывы по книге просьба направлять по адресу: 192041, Ленинград, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение издательства «Энергия».

*Автор*



## ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$X$ — выходная величина объекта управления, в общем случае — переменная величина;	$x^0(t)$ — центрированная случайная функция времени;
$F$ — возмущающее воздействие;	$D_x$ — дисперсия случайной величины $x$ ;
$G$ — задающее воздействие;	$\sigma_x$ — среднеквадратичное отклонение случайной величины $x$ ;
$U$ — управляющее воздействие на входе объекта управления;	$R_x(\tau)$ — автокорреляционная функция случайного процесса $x(t)$ ;
$Y$ — выходная величина отдельного звена;	$R_{xy}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ ;
$X_0, F_0, \dots$ или $X_{ст}, F_{ст}, \dots$ — значения $X, F, \dots$ в статическом режиме;	$S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса $x(t)$ ;
$X_{уст}, F_{уст}, \dots$ — значения $X, F, \dots$ в установившемся режиме;	$S_{xy}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ ;
$\Delta X, \Delta F, \dots$ — приращения $X, F, \dots$ относительно их установившихся значений;	$1(t)$ — единичная ступенчатая функция;
$x, f, \dots$ — приращения $X, F, \dots$ в относительных единицах (отнесенные к их установившимся значениям);	$\delta(t)$ — единичная импульсная функция, дельта-функция;
$\bar{x}, m_x, M[x]$ — среднее значение по множеству (математическое ожидание) случайной величины $x$ ;	$h(t)$ — переходная (временная) характеристика;
$\bar{x}$ — среднее значение по времени случайной величины $x$ ;	$w(t)$ — импульсная переходная характеристика, весовая функция;
	$p \equiv \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования по времени;
	$s$ — комплексная переменная в преобразовании Лапласа;

$q = T_{\Pi} s$  — безразмерная комплексная переменная в дискретном преобразовании Лапласа;

$z = e^q$  — переменная в Z-преобразовании;

$\lambda = \alpha \pm j\beta$  — корень характеристического уравнения системы;

$\alpha$  — действительная часть корня  $\lambda$ ;

$\beta$  — мнимая часть корня  $\lambda$ ;  
 $T$  — постоянная времени звена;

$T_{\Pi}$  — период квантования по времени в импульсных системах;

$T_{\Pi}$  — ширина импульса;

$\gamma = \frac{T_{\Pi}}{T_{\Pi}}$  — относительная ширина импульса в импульсной системе;

$\bar{\omega} = T_{\Pi} \omega$  — относительная частота в импульсных системах;

$\omega_a$  — частота автоколебаний;

$\omega_c$  — частота среза л. а. х.;

$\omega_p$  — резонансная частота;

$k$  — коэффициент передачи (усиления) звена или разомкнутой системы;

$k_{\Pi}$  — коэффициент передачи импульсного звена;

$k_{c0}, k_{c1}$  — коэффициенты статистической линеаризации соответственно для средних значений и для центрированной случайной составляющей сигнала;

$k_{c1}^{(1)}, k_{c1}^{(2)}$  — последний коэффициент при первом и втором способах статистической линеаризации;

$k_{r0}, k_r, k_r'$  — коэффициенты гармонической линеаризации;

$k_{cF}, k_{cFI}$  — коэффициенты совместной статистической и гармонической линеаризации;

$k_v, k_a$  — добротность по скорости и по ускорению;

$X(s) = L[x(t)]$  — изображение Лапласа функции  $x(t)$ ;

$X^*(z) = Z\{x[n]\}$  — Z-преобразование решетчатой функции  $x[n]$ ;

$W(p), W_3(p)$  — передаточная функция разомкнутой системы, (или звена) и замкнутой системы;

$W^*(z), W_3^*(z)$  — дискретная передаточная функция разомкнутой и замкнутой систем;

$W(j\omega), W_3(j\omega)$  — амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой и замкнутой систем;

$A(\omega), A_3(\omega)$  — амплитудная частотная характеристика разомкнутой и замкнутой систем;

$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), L_3(\omega) = 20 \lg A_3(\omega)$  — логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой и замкнутой систем;

$\varphi(\omega), \varphi_3(\omega)$  — фазовая частотная характеристика разомкнутой и замкнутой систем;

$U(\omega), U_3(\omega)$  — действительная частотная характеристика разомкнутой и замкнутой систем;

$V(\omega)$ ,  $V_{\text{э}}(\omega)$  — мнимая частотная характеристика разомкнутой и замкнутой систем;

$t_{\text{п}}$  — время переходного процесса;

$\eta = |\alpha_{\text{мин}}|$  — степень устойчивости;

$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\text{макс}}$  — степень колебательности;

$I$  — интегральный критерий качества переходного процесса;

$J$  — критерий качества управления в адаптивных системах;

$Q$  — критерий оптимальности в оптимальных системах.

## ВВЕДЕНИЕ

### § В-1. ПОНЯТИЕ ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

Управление каким-либо объектом — это процесс воздействия на него с целью обеспечения требуемого течения процессов в объекте или требуемого изменения его состояния. Основой управления является получение и обработка информации о состоянии объекта и внешних условиях его работы для определения воздействий, которые необходимо приложить к объекту, чтобы обеспечить достижение цели управления.

Объект управления может принадлежать как к неживой природе, в частности, быть техническим устройством (самолет, станок и т. п.), так и к живой природе (коллектив людей, животное и т. п.). В свою очередь, само управление также может осуществляться как человеком (пилот управляет самолетом), так и техническим устройством (самолетом управляет автопилот).

Управление, осуществляемое без участия человека, называется автоматическим управлением. Предметом настоящей книги является теория автоматического управления техническими объектами. Общая теория управления, охватывающая как неживую, так и живую природу, является предметом науки кибернетики [14]. Теория автоматического управления — часть кибернетики.

Техническое устройство, с помощью которого осуществляется автоматическое управление объектом, называется управляющим устройством. В соответствии с конкретным техническим выполнением управляющее устройство может также именоваться управляющим прибором, системой или комплексом. Совокупность объекта управления и управляющего устройства образует систему автоматического управления (САУ) или автоматическую систему управления.

В общем виде система автоматического управления представлена на рис. В-1, а, где  $O$  — объект управления,  $УУ$  — управляющее устройство. Состояние объекта характеризуется выходной величиной  $X$ . В общем случае выходных величин

несколько, и тогда состояние объекта характеризуется вектором  $X$ , координатами которого являются отдельные выходные величины. От управляющего устройства на вход объекта поступает управляющее воздействие (управление)  $U$ . Помимо управляющего воздействия, к объекту приложено также возмущающее воздействие (возмущение, помеха)  $F$ , которое изменяет состояние объекта, т. е.  $X$ , препятствуя управлению. На вход управляющего устройства подается задающее воздействие (задание)  $G$ , содержащее информацию о требуемом значении  $X$ , т. е. о цели управления. Переменные  $U$ ,  $G$  и  $F$  в общем случае являются векторами, как и  $X$ .

Как показано на рис. В-1, а, в самом общем случае на вход управляющего устройства, помимо задающего воздействия  $G$ ,

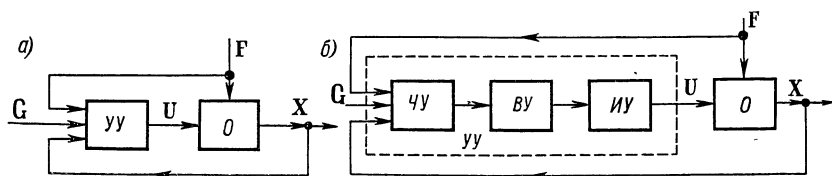


Рис. В-1. Блок-схема (а) и функциональная схема (б) системы автоматического управления

поступает также информация о текущем состоянии объекта в виде выходной величины  $X$  и о действующем на объект возмущении  $F$ . Управляющее устройство перерабатывает получаемую информацию по определенному заложенному в нем алгоритму (правилу). В результате на его выходе возникает управляющее воздействие.

На рис. В-1, б изображена функциональная схема САУ, на которой показаны основные составные части управляющего устройства: чувствительное устройство  $ЧУ$ , вычислительное устройство  $ВУ$  и исполнительное устройство  $ИУ$ .

Чувствительные устройства (измерительные устройства) служат для измерения переменных  $X$ ,  $G$  и  $F$ .

Вычислительное устройство реализует алгоритм работы управляющего устройства, соответствующим образом перерабатывая поступающую от чувствительных устройств входную информацию. В простейшем случае оно осуществляет простые математические операции, такие, как операция сравнения, определяющая разность  $X - G$ , операции интегрирования, дифференцирования, статического нелинейного преобразования и т. п. В более сложных случаях вычислительное устройство может представлять собой вычислительную машину и даже комплекс таких машин.

Исполнительные устройства предназначены для непосредственного управления объектом, т. е. изменения его состояния в соответствии с сигналом, выдаваемым вычислительным устройством.

Помимо перечисленных выше частей, в состав управляющего устройства могут входить различные специальные устройства, например преобразователи, служащие для согласования отдельных частей системы, устройства связи и т. п.

## § В-2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для ознакомления с основными видами систем автоматического управления и соответствующей терминологией рассмотрим классификацию САУ по ряду признаков, существенных с точки зрения теории автоматического управления.

### А. Разомкнутые, замкнутые и комбинированные системы

В схеме САУ, изображенной на рис. В-1, на управляющее устройство поступают три вида информации: информация о величине  $X$ , определяющей состояние объекта, информация о величине  $G$ , задающей цель управления, информация о  $F$  — возмущениях, нарушающих режим работы объекта. Однако возможны САУ, в которых используется лишь часть перечисленной информации. При этом в зависимости от видов используемой управляющим устройством информации различают два основных типа САУ — разомкнутые системы и замкнутые системы.

В разомкнутых САУ выходная величина объекта  $X$  не измеряется, т. е. нет контроля за состоянием объекта. Разомкнутыми такие системы называются потому, что вследствие этого в них отсутствует обратная связь между выходом объекта и входом управляющего устройства, при наличии которой объект и управляющее устройство образуют замкнутый контур.

Возможны разомкнутые САУ, в которых управляющее устройство измеряет только одно задающее воздействие  $G$ , одно возмущение  $F$  и, наконец, оба эти сигнала одновременно.

В первом варианте разомкнутой САУ управление осуществляется по задающему воздействию: поступающие извне команды  $G$  приводят путем изменения управляющего воздействия  $U$  к соответствующему изменению выходной величины объекта  $X$ . Точность обеспечиваемого при этом соответствия между  $X$  и  $G$  целиком определяется постоянством параметров системы и возмущений и никак не контролируется. Поэтому практически такие системы пригодны лишь при достаточно высокой стабильности указанных выше условий работы системы и невысоких требованиях к точности.

Примером системы этого типа служит разомкнутая система программного управления напряжением синхронного генератора, изображенная на рис. В-2, а. Объектом управления здесь является синхронный генератор  $G$ , вращаемый с постоянной скоростью двигателем  $D$ . Выходная величина объекта — напряжение генера-

тора — определяется напряжением возбуждения, подаваемым на обмотку возбуждения генератора  $ОВ$  от устройства задания графика напряжения  $УЗГ$ . Последнее является управляющим устройством. Напряжение возбуждения автоматически изменяется во времени в соответствии с заложенной в  $УЗГ$  программой, обеспечивая соответствующее изменение напряжения генератора.

В такой системе управления действительное напряжение может значительно отличаться от заданного, например, вследствие изменения величины нагрузки генератора, скорости вращения двигателя, температуры обмоток генератора.

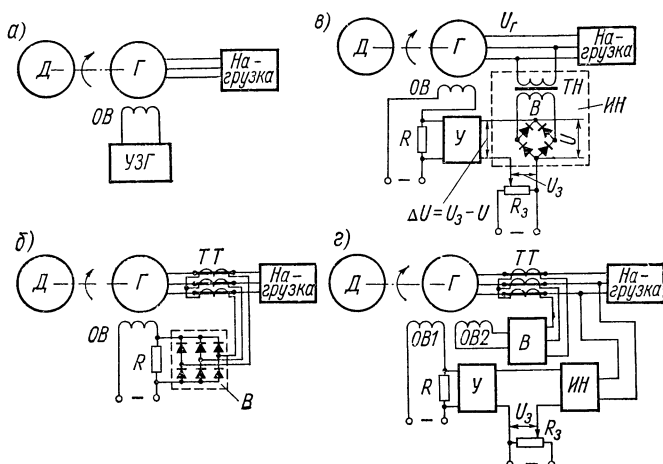


Рис. В-2. Системы управления напряжением синхронного генератора:  $a$  — разомкнутая система программного управления;  $б$  — разомкнутая система компенсации влияния нагрузки;  $в$  — замкнутая система управления по отклонению;  $г$  — комбинированная система управления по отклонению с компенсацией влияния нагрузки

Вторым вариантом разомкнутой САУ является система автоматического управления по возмущению, или, как ее еще называют, система автоматической компенсации. Такие системы находят применение, в частности, когда задача управления сводится к поддержанию постоянства выходной величины  $X$  объекта.

На рис. В-2,  $б$  в качестве примера такого типа системы показана система стабилизации напряжения синхронного генератора при переменной электрической нагрузке на его зажимах. Чувствительное устройство, состоящее из трех трансформаторов тока  $ТТ$  и выпрямителя  $В$ , выдает напряжение постоянного тока, пропорциональное току генератора. Это напряжение подается в цепь возбуждения генератора, изменяя ток возбуждения. При увеличении, например, нагрузки напряжение на зажимах генератора соответственно уменьшится за счет увеличившегося падения

напряжения на обмотке статора. Однако одновременно благодаря действию сигнала по току нагрузки генератора, создаваемого чувствительным элементом, ток возбуждения генератора увеличится настолько, что в результате напряжение генератора возвратится к своему исходному значению. Таким образом происходит компенсация влияния изменения нагрузки на напряжение генератора и обеспечивается поддержание напряжения на постоянном уровне в условиях переменной нагрузки.

Система управления по задающему и возмущающему воздействиям является наиболее полным видом разомкнутой САУ. В этом случае управление объектом осуществляется в функции двух величин  $G$  и  $F$ , т. е. здесь объединены оба предыдущих варианта разомкнутых систем.

Примером такой системы может быть система программного управления напряжением генератора, объединяющая схемы, изображенные на рис. В-2, а и б. (В этом случае в схеме рис. В-2, б напряжение питания цепи возбуждения должно подаваться от устройства задания графика напряжения  $УЗГ$ , показанного на рис. В-2, а.) В отличие от системы программного управления, изображенной на рис. В-2, а, в данной схеме устраняется основная ошибка по напряжению, вызванная непостоянством нагрузки генератора.

Принцип компенсации возмущения позволяет существенно повысить точность управления в разомкнутых САУ. Однако все же эта точность остается невысокой, во-первых, вследствие невозможности охватить компенсацией все возмущения, действующие на систему (в том числе и на управляющее устройство), и, во-вторых, из-за изменения во времени параметров объекта и управляющего устройства. Последнее в полной мере относится и к параметрам цепи компенсации. Неточность и изменение настройки цепи компенсации тоже вызывают изменение выходной величины объекта. В силу изложенного разомкнутые САУ нашли применение только при невысоких требованиях к точности управления.

В замкнутых САУ на вход управляющего устройства подаются задающее воздействие  $G$  и выходная величина объекта  $X$ . Исходя из величины  $G$ , управляющее устройство определяет соответствующее требуемое значение  $X$  и, имея информацию о текущем значении  $X$ , обеспечивает необходимое соответствие между  $X$  и  $G$  путем воздействия на объект.

В такой САУ управляющее устройство стремится ликвидировать все отклонения  $X$  от его значения, определяемого заданием  $G$ , независимо от причин, вызвавших эти отклонения, включая любые возмущения, внешние и внутренние помехи, а также изменения параметров системы.

Как видно из рис. В-4, САУ такого типа представляют собой замкнутый контур, образованный объектом и управляющим устройством. При этом управляющее устройство создает обратную связь вокруг объекта, связывая его выход со



входом. Замкнутые САУ называются поэтому еще системами с обратной связью или системами управления по отклонению.

Эти системы могут обеспечить принципиально неограниченную точность управления и представляют собой основной тип САУ. Основным содержанием настоящей книги является изучение именно замкнутых САУ. Безде ниже, где говорится о системах автоматического управления без уточнения их типа, будет подразумеваться замкнутая система.

На рис. В-2, в показана в качестве примера замкнутая система управления напряжением синхронного генератора. Управляющее устройство системы состоит из измерителя напряжения ИИ,

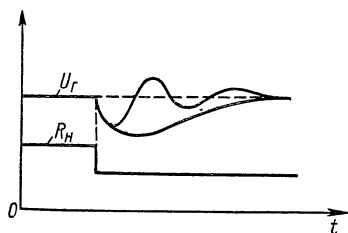


Рис. В-3. Переходный процесс изменения напряжения генератора в системе, показанной на рис. В-2, в

который включает в себя трансформатор напряжения ТН с выпрямителем В и является чувствительным устройством; устройства задания величины напряжения  $U_3$  в виде делителя напряжения  $R_3$ , питаемого стабилизированным напряжением, и усилителя У, являющегося одновременно и исполнительным устройством, воздействующим на объект. Вычислительное устройство в схеме на рис. В-2, в представляет собой простейшую схему сравнения напряжений  $U$  и  $U_3$  на входе усилителя, определяющую разность  $\Delta U = U_3 - U$ .

Напряжения  $U$  и  $U_3$  на входе усилителя, определяющую разность  $\Delta U = U_3 - U$ .

Напряжение  $U$  постоянного тока на выходе измерителя напряжения ИИ однозначно связано с напряжением генератора  $U_g$ . Когда  $U = U_3$ , сигнал  $\Delta U$  на входе усилителя У равен нулю и управляющее устройство не действует на генератор, являющийся объектом управления. Если по какой-либо причине, например вследствие изменения нагрузки генератора или скорости его вращения, напряжение генератора изменится, на входе усилителя появится напряжение  $\Delta U$  соответствующей величины и знака. В результате на выходе усилителя возникнет напряжение, которое изменит ток возбуждения генератора, что приведет к возврату напряжения генератора к исходному значению. Возможный вид процесса изменения напряжения генератора  $U_g$ , вызванного скачком сопротивления нагрузки  $R_n$ , показан на рис. В-3. Аналогично происходит процесс управления и при изменении задающего напряжения  $U_3$ . Возникшая при этом величина  $\Delta U$  вызовет путем изменения тока возбуждения генератора соответствующее изменение его напряжения.

Если в схеме на рис. В-2, в вместо делителя напряжения  $R_3$  поставить устройство задания графика напряжения, получится замкнутая система программного управления напряжением генератора.

**Комбинированные САУ** представляют собой объединение в одну систему замкнутой системы управления по отклонению и разомкнутой системы управления по внешнему воздействию. Показанная на рис. В-1 схема является схемой такой комбинированной САУ.

Добавление к замкнутой системе управления разомкнутой системы компенсации влияния на выходную величину объекта какого-либо возмущения облегчает задачу замкнутой САУ и тем самым позволяет упростить ее и повысить точность управления. Лучшее качество управления в комбинированных системах объясняется тем, что в них наиболее полно используется информация об объекте и внешней ситуации.

Примером комбинированной системы может служить система автоматического управления напряжением синхронного генератора, изображенная на рис. В-2, *г* и представляющая собой объединение схем рис. В-2, *б* и *в*.

### **Б. Системы автоматического регулирования — системы стабилизации, системы программного управления и следящие системы**

Частным, но широко распространенным видом систем автоматического управления являются системы автоматического регулирования (САР), или автоматические системы регулирования. Системой автоматического регулирования называется САУ, задача которой заключается в поддержании выходной величины объекта  $X$  на заданном уровне  $G$ , т. е. в поддержании равенства  $X = G$ .

В зависимости от характера задающего воздействия САР делятся на три вида: системы стабилизации, системы программного регулирования (управления) и следящие системы.

В системах стабилизации задающее воздействие постоянно, в системах программного регулирования оно изменяется по заранее заданному закону, в следящих системах оно тоже изменяется, но закон изменения заранее не известен. В последнем случае задающее воздействие поступает на систему извне и задачей системы является обеспечение слежения выходной величиной объекта за изменяющейся задающей величиной так, чтобы все время поддерживалось равенство  $X = G$ .

Управляющее устройство в системах автоматического регулирования называется регулятором, а выходная величина — регулируемой величиной.

Примерами систем автоматического регулирования служат системы, показанные на рис. В-2. Объектом регулирования здесь является синхронный генератор, регулируемой величиной — его напряжение.

Другим примером системы автоматического регулирования может служить автопилот, ведущий самолет по заданному курсу.

Однако, если автопилот дополнить вычислительным устройством, которое определяет необходимое направление движения самолета исходя из задачи достижения определенной точки пространства за минимальный промежуток времени или при минимальном расходе горючего и т. п., такую систему автоматического управления уже нельзя назвать системой регулирования.

## В. Одномерные и многомерные системы

В зависимости от количества выходных координат объекта управления, образующих вектор выходной величины  $X$ , САУ делятся на одномерные и многомерные (двухмерные и т. д.).

Рассмотренные выше системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора (см. рис. В-2) являются одномерными системами. Если наряду с напряжением регулировать частоту этого генератора путем воздействия на скорость вращающегося его двигателя, получится двухмерная система автоматического регулирования. Схема такой САУ приведена на рис. В-4. Здесь измеритель частоты  $ИЧ$  представляет собой схему, выходом которой является напряжение постоянного тока, пропорциональное частоте синхронного генератора. В остальной схеме регулятора частоты подобна схеме регулятора напряжения, приведенной на рис. В-2, в.

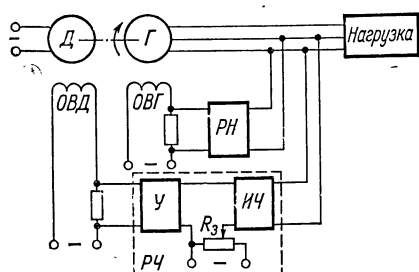


Рис. В-4. Система автоматического регулирования напряжения и частоты синхронного генератора

$РН$  — регулятор напряжения;  $РЧ$  — регулятор частоты;  $ИЧ$  — измеритель частоты;  $У$  — усилитель;  $РЗ$  — потенциометр задания установки частоты;  $ОВД$ ,  $ОВГ$  — обмотки возбуждения двигателя и генератора

Управление частотой осуществляется воздействием на скорость вращения двигателя путем изменения его тока возбуждения. (Разумеется, регулятор частоты тоже может быть комбинированным, как и регулятор напряжения, в результате введения воздействия по нагрузке на возбуждение двигателя.)

Многомерные САУ (и САР), в свою очередь, делятся на системы несвязанного и связанного управления (регулирования).

Система несвязанного управления имеет несколько управляющих устройств, каждое из которых осуществляет управление своей выходной координатой объекта. При этом все эти устройства не имеют взаимных связей. (Последнее, однако, не исключает возможности влияния управляющих устройств друг на друга через объект управления или, например, общий источник питания.)

В системе связанного управления отдельные управляющие устройства связаны друг с другом внешними связями.

Входящая в состав многомерной системы управления (как связанной, так и несвязанной) отдельная система управления называется **автономной**, если управляемая ею выходная координата объекта не зависит от значений остальных управляемых координат, так что изменение последних не вызывает изменения этой координаты. Часто с целью получения автономности (необходимой по какой-либо эксплуатационной причине) вводят внешние связи между отдельными управляющими устройствами.

Система автоматического регулирования напряжения и частоты синхронного генератора является несвязанной двухмерной системой, если между регуляторами напряжения и частоты нет внешних связей. Однако входящие в нее системы неавтономны, так как при изменении частоты происходит изменение напряжения генератора (вследствие изменения скорости его вращения) и наоборот (вследствие зависимости от напряжения величины нагрузки на валу двигателя). Эти системы принципиально можно сделать автономными путем наложения перекрестных связей между обоими регуляторами. При этом получится система связанного регулирования напряжения и частоты генератора.

## **Г. Системы линейные и нелинейные**

**Линейной** называется система, которая описывается линейными уравнениями. В противном случае система является **нелинейной**. Чтобы система была нелинейной, достаточно иметь в ее составе хотя бы одно нелинейное звено, т. е. звено, описываемое нелинейным уравнением. Например, причинами нелинейности системы автоматического регулирования напряжения, изображенной на рис. В-2, *в*, могут быть насыщение генератора, делающее нелинейной зависимость напряжения генератора от тока возбуждения, нелинейная зависимость величины нагрузки от напряжения, нелинейная зависимость выходной величины от входной у какой-либо части регулятора.

Для линейных систем справедлив **принцип суперпозиции**. Он заключается в том, что реакция системы на любую комбинацию внешних воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий, поданных на систему порознь. Принцип суперпозиции позволяет выразить реакцию системы на любое произвольное воздействие через реакцию системы на элементарное типовое воздействие, например, в виде ступеньки. Для этого достаточно представить данное входное воздействие в виде совокупности выбранных типовых воздействий. Благодаря принципу суперпозиции разработана общая теория линейных систем автоматического управления, описываемых линейными дифференциальными уравнениями любого порядка.

К нелинейным системам принцип суперпозиции не применим. Нет и общей теории нелинейных дифференциальных уравнений, на основе которой могла бы быть создана общая теория нелиней-

ных систем автоматического управления. Существует лишь ряд частных методов для решения некоторых видов нелинейных уравнений. Вместе с тем, если не ограничивать диапазона изменения входных воздействий, то все реальные системы автоматического управления оказываются нелинейными. Трудность исследования нелинейных систем заставляет упрощать их описание. Желательным пределом такого упрощения является приближенное описание их линейными уравнениями, хотя бы в некоторых из интересующих нас режимов. Это называется **линеаризацией нелинейных систем**.

#### **Д. Системы стационарные и нестационарные**

**Стационарной** называется система, все параметры которой не изменяются во времени. **Нестационарная** система — это система с переменными параметрами. При математическом описании нестационарной системы это проявляется в том, что некоторые коэффициенты дифференциального уравнения системы являются функциями времени. Пример нестационарной системы — система управления ракетой, масса которой изменяется вследствие расхода топлива.

В соответствии с данным определением, в отличие от нестационарной системы, реакция стационарной системы на одно и то же воздействие не зависит от момента приложения этого воздействия.

#### **Е. Системы непрерывного и дискретного действия**

САУ бывают непрерывного или дискретного действия в зависимости от характера действия составляющих систему звеньев.

**Система непрерывного действия**, или, короче, **непрерывная система**, состоит только из звеньев непрерывного действия, т. е. звеньев, выходная величина которых изменяется плавно при плавном изменении входной величины.

**Система дискретного действия**, или **дискретная система**, — это система, содержащая хотя бы одно звено дискретного действия. Звеном дискретного действия называется звено, выходная величина которого изменяется дискретно, т. е. скачками, даже при плавном изменении входной величины. (Скачки выходной величины могут происходить либо при прохождении входной величиной определенных пороговых значений — звено релейного действия, либо через определенный интервал времени — звено импульсного действия.)

#### **Ж. Адаптивные и неадаптивные системы**

**Адаптивные**, или **самоприспосабливающиеся**, системы обладают способностью приспосабливаться к изменению внешних условий работы, а также улучшать свою работу по мере накопления опыта. **Неадаптивные**, или,

как их еще называют, об ы к н о в е н н ы е, с и с т е м ы такой способностью не обладают. Они имеют постоянную настройку. Если вследствие какого-либо изменения условий работы обыкновенной системы ее настройку требуется изменить для того, чтобы сохранить заданное качество управления (например, точность, быстродействие), эту перенастройку должен сделать человек. В адаптивной системе это осуществляется автоматически самим управляющим устройством системы.

Область применения адаптивных САУ — это управление объектами, свойства или условия работы которых недостаточно известны или существенно непостоянны. В этих условиях обыкновенная, неадаптивная, система либо будет работать неудовлетворительно, либо потребует постоянного надзора.

В заключение остановимся на общей характеристике процессов, происходящих в системах автоматического управления. Как и у всякой динамической системы, процессы в САУ делятся на установившиеся и переходные. На рис. В-3 показаны два варианта переходного процесса в системе регулирования напряжения генератора, изображенной на рис. В-2, в. До момента изменения нагрузки генератора, вызвавшего переходный процесс регулирования напряжения, и по окончании этого процесса в системе имеет место у с т а н о в и в ш и й с я п р о ц е с с, характеризующийся постоянством внешних возмущений и других условий работы системы.

При рассмотрении процессов в САУ важное значение имеют следующие понятия: устойчивость системы, качество процесса управления и точность управления.

У с т о й ч и в о с т ь — это свойство системы возвращаться в установившееся состояние после того, как она была выведена из этого состояния каким-либо возмущением. Замкнутые САУ, как всякие замкнутые системы, весьма склонны к потере устойчивости, что чаще всего проявляется в возникновении расходящихся колебаний (генерации). Например, такая неустойчивость системы регулирования напряжения генератора, изображенной на рис. В-2, в, выразится в возникновении колебаний напряжения генератора со всевозрастающей амплитудой. Переходные процессы, показанные на рис. В-3, соответствуют устойчивой системе, поскольку отклонения напряжения со временем не возрастают, а уменьшаются, затухают. Если отбросить особые случаи, можно сказать, что устойчивость является необходимым условием работоспособности всякой САУ.

К а ч е с т в о п р о ц е с с а у п р а в л е н и я характеризуется тем, насколько процесс управления близок к желаемому. Количественно оно определяется критериями качества, которые выбираются в соответствии с целью управления. Например, для упомянутой выше системы регулирования напряжения генера-

тора качество может оцениваться такими критериями, как величина максимального отклонения напряжения генератора, вызванного скачком нагрузки, колебательность переходного процесса, его длительность.

Точность управления характеризуется погрешностью системы в установившихся режимах. Например, для системы регулирования напряжения генератора точность определяется величиной установившегося отклонения напряжения генератора от заданного значения по окончании переходного процесса.

С учетом рассмотренной классификации систем автоматического управления ниже принят такой порядок изложения.

В начале, в первой части, книги дается теория обыкновенных линейных САУ непрерывного действия. Во второй части излагаются общие вопросы теории нелинейных САУ. Третья часть посвящена теории дискретных систем, а в четвертой, последней, части описываются адаптивные системы. Основным объектом рассмотрения, связывающим все части книги, являются одномерные замкнутые системы автоматической стабилизации.

## Теория линейных систем автоматического управления непрерывного действия

---

### Глава первая

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

##### § 1-1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РАЗБИЕНИЕ СИСТЕМЫ НА ЗВЕНЬЯ

Целью рассмотрения системы автоматического управления может быть решение одной из двух задач — задачи а н а л и з а системы или задачи е е с и н т е з а. В первом случае дается система, включая значения параметров, и требуется определить ее свойства. Во втором случае, наоборот, задаются свойства, которыми должна обладать система, т. е. требования к ней, и необходимо создать систему, удовлетворяющую этим требованиям. Очевидно, что задача синтеза много сложнее задачи анализа уже из-за ее неоднозначности.

В самом общем виде порядок исследования САУ в обоих случаях включает математическое описание системы, исследование ее установившихся режимов и исследование переходных режимов.

Математическое описание системы, т. е. получение ее математической модели, начинается с разбиения ее на звенья и описания этих звеньев. Последнее может осуществляться либо аналитически в виде уравнений, связывающих входные и выходные величины звена, либо графически в виде характеристик, описывающих ту же связь. По уравнениям или характеристикам отдельных звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом, на основании которых и исследуется система.

Выше при рассмотрении принципа действия систем автоматического управления было дано понятие о функциональной схеме САУ (см. рис. В-1, б). В функциональной схеме система разбита на звенья исходя из выполняемых ими функций, т. е. назначения. Для математического описания систему разбивают на звенья по



другому принципу, а именно — исходя из удобства получения этого описания. Для этого систему следует разбивать на возможно более простые («мелкие») звенья, но вместе с тем необходимо, чтобы они обладали направленностью действия.

Звеном направленного действия называется звено, передающее воздействие только в одном направлении — со входа на выход, так что изменение состояния такого звена не влияет на состояние предшествующего звена, работающего на его вход. В результате при разбиении системы на звенья направленного действия математическое описание каждого такого звена может быть составлено без учета связей его с другими звеньями. Соответственно математическое описание всей системы в целом может быть получено как совокупность составленных независимо друг от друга уравнений или характеристик отдельных звеньев, образующих систему, дополненных уравнениями связи между звеньями.

В результате разбиения САУ на звенья направленного действия и получения математического описания звеньев составляется структурная схема системы, которая и является ее математической моделью. Структурная схема системы

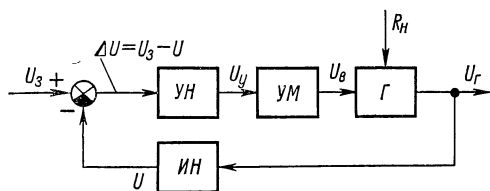


Рис. 1-1. Разбиение на звенья системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора

системы. Каждому звену структурной схемы придается описывающее его уравнение или характеристика. При этом уравнение обычно записывается прямо на схеме внутри изображающего звено прямоугольника в виде передаточной функции (см. § 1-2). Получение структурной схемы является конечной целью математического описания системы.

В качестве примера на рис. 1-1 показано разбиение на звенья системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора, изображенной на рис. В-2, в. При этом принято, что усилитель регулятора состоит из двух частей — усилителя напряжения УН и усилителя мощности УМ в виде, например, электромашинного усилителя. Каждый из этих усилителей обладает направленностью действия и поэтому может быть выделен в виде отдельного звена.

На рис. 1-1 стрелками показаны внешние воздействия — задающее воздействие  $U_3$  и возмущение в виде сопротивления нагрузки  $R_n$  на зажимах генератора. На этом же рисунке в виде кружочка, разделенного на секторы, дано условное изображение

элемента сравнения, т. е. суммирующего элемента, выявляющего разность  $\Delta U = U_3 - U$ . Рядом показаны знаки сигналов (плюс у  $U_3$  и минус у  $U$ ). Часто сектор, соответствующий вычитаемому сигналу, чернится, как показано на рис. 1-1.

## § 1-2. УРАВНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМЫ. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Основная сложность, которая существует при выводе уравнений звеньев системы, заключается в необходимости установления допустимой степени идеализации и упрощения звеньев. Главным упрощением, к которому следует стремиться при выводе уравнений звеньев системы, является их линеаризация, т. е. описание линейными дифференциальными уравнениями. Линеаризация нелинейности, содержащейся в уравнении звена, заключается в замене этой нелинейности приближенной линейной зависимостью.

Рассмотрим звено, описываемое нелинейной статической зависимостью  $Y = \varphi(X)$  (рис. 1-2, а). Пусть установившийся режим звена соответствует значениям входной и выходной величин  $X_0$  и  $Y_0$  (рис. 1-2, б) и отклонения  $X$  от  $X_0$  в процессе работы звена достаточно малы. В этом случае исходную нелинейную зависимость  $Y = \varphi(X)$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестностях точки установившегося режима и, отбросив члены ряда выше первого порядка малости, получить следующую приближенную зависимость:

$$Y \approx \varphi(X_0) + \left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_0 (X - X_0), \quad (1-1)$$

где  $\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_0$  — значение производной функции  $\varphi(X)$  по  $X$  при подстановке в выражение этой производной  $X = X_0$ .

Это уравнение можно переписать в таком окончательном виде:

$$\Delta Y \approx k \Delta X, \quad (1-2)$$

где

$$\Delta X = X - X_0; \quad \Delta Y = Y - Y_0; \quad k = \left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_0.$$

Проведенная линеаризация имеет простую графическую интерпретацию; она соответствует, как показано на рис. 1-2, б, замене действительной нелинейной характеристики касательной к ней в точке, соответствующей установившемуся режиму. Коэффициент  $k$  в уравнении (1-2) равен тангенсу угла наклона этой касательной относительно оси абсцисс. Поэтому его величина может быть найдена чисто графическим построением без нахождения

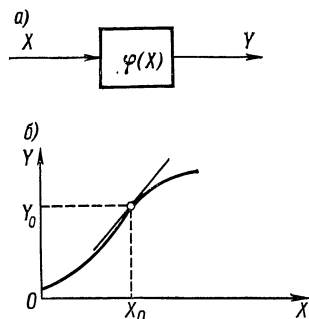


Рис. 1-2. Линеаризация статического звена

ния аналитического выражения для исходной нелинейной зависимости  $\varphi(X)$ .

Рассмотрим теперь более общий случай, когда звено описывается нелинейным уравнением, включающим производные по времени от входной и выходной величин:

$$\varphi(X, X', X'', \dots, Y, Y', Y'', \dots) = 0. \quad (1-3)$$

Разложив, как и прежде, нелинейную функцию, находящуюся в левой части уравнения, в ряд Тейлора в точке установившегося режима, получим следующее линейное дифференциальное уравнение для приращений переменных:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_0 \Delta X + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X'}\right)_0 \Delta X' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X''}\right)_0 \Delta X'' + \dots \\ & \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y'}\right)_0 \Delta Y' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y''}\right)_0 \Delta Y'' + \dots \approx 0. \end{aligned} \quad (1-4)$$

Здесь  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_0$ ,  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X'}\right)_0$  и т. д. — значения производных функции  $\varphi$ , получающиеся при подстановке значений  $X_0$ ,  $Y_0$  и нулевых значений производных, соответствующих установившемуся режиму.

Показанная процедура линеаризации нелинейных звеньев приводит к приближенному описанию их линейными дифференциальными уравнениями в отклонениях (в а р и а ц и я х).

Допустимость такой линеаризации ограничена следующими очевидными условиями. Во-первых, она применима только для малых отклонений, т. е. полученные в результате линеаризации уравнения пригодны для приближенного исследования только таких режимов в системах, при которых переменные величины на входе звеньев претерпевают достаточно малые отклонения от установившихся значений. При этом точность исследования растет с уменьшением отклонений.

Во-вторых, поскольку такая линеаризация основана на разложении в ряд Тейлора, она применима только к непрерывно дифференцируемым нелинейностям. Поэтому такие нелинейности называются л и н е а р и з у е м ы м и. Нелинейные звенья, не удовлетворяющие этому требованию, называются с у щ е с т в е н н о н е л и н е й н ы м и. К существенно нелинейным звеньям, например, относятся звенья с прерывистыми характеристиками типа релейных характеристик и с неоднозначными характеристиками типа петли гистерезиса.

В теории автоматического управления приняты определенные формы записи линеаризованных дифференциальных уравнений звеньев. При этом уравнение (1-4) (с учетом только приведенных там членов) должно записываться так:

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) y = (k_1 + k_2 p + k_3 p^2) x. \quad (1-5)$$

Здесь  $p \equiv \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования по времени;

$x = \frac{\Delta X}{X_0}$ ;  $y = \frac{\Delta Y}{Y_0}$  — приращения переменных в относительных единицах;

$$k_1 = - \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)_0} \cdot \frac{X_0}{Y_0}; \quad k_2 = - \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial X'} \right)_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)_0} \cdot \frac{X_0}{Y_0};$$

$$k_3 = - \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial X''} \right)_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)_0} \cdot \frac{X_0}{Y_0} \text{ — коэффициенты передачи;}$$

$$T_1^2 = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y'} \right)_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)_0}; \quad T_2 = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y'} \right)_0}{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)_0} \text{ — постоянные времени.}$$

Особенности приведенной формы записи заключаются в следующем. Выходная величина и ее производные находятся в левой части уравнения, а входная величина и ее производные — в правой. Коэффициент при приращении выходной величины равен единице [в результате деления обеих частей уравнения на  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)_0$ ]. Приращения переменных обозначаются строчными буквами и выражены в относительных единицах. Правда, иногда более удобно использовать абсолютные значения приращений переменных. В этом случае выражения для коэффициентов передачи, стоящих в правой части уравнения, соответственно изменяются.

Коэффициенты левой части уравнения — постоянные времени — в обоих случаях остаются без изменения. Размерность их — секунда в степени, равной порядку производной, перед которой стоит данный коэффициент.

Другой формой записи линейных уравнений звеньев является запись с помощью передаточной функции. Уравнение (1-5) при этом принимает вид:

$$y = \frac{k_1 + k_2 p + k_3 p^2}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} x \quad (1-6)$$

или

$$y = W(p) x, \quad (1-7)$$

где

$$W(p) = \frac{k_1 + k_2 p + k_3 p^2}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Дробь  $W(p)$  называется передаточной функцией звена. Пока будем рассматривать ее просто как удобный способ записи дифференциальных уравнений. Полное определение передаточной функции будет дано в следующем параграфе с помощью преобразования Лапласа.

Рассматривая выше формы записи уравнений, принятые в теории автоматического управления, мы оперировали для опреде-

ленности уравнением второго порядка с одной входной величиной  $x$ . Однако в результате линеаризации реальных звеньев могут быть получены уравнения любого порядка. В общем случае звено системы автоматического управления, имеющее  $n$  входов, описывается дифференциальным уравнением

$$Q(p)y = \sum_{i=1}^n R_i(p)x_i \quad (1-8)$$

или в другом виде

$$y = \sum_{i=1}^n W_i(p)x_i. \quad (1-9)$$

Здесь  $x_i$  — входные воздействия на звено ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $Q(p)$  и  $R_i(p)$  — полиномы относительно  $p$ ;  $W_i(p) = \frac{R_i(p)}{Q(p)}$  — передаточная функция звена для  $i$ -го входного воздействия.

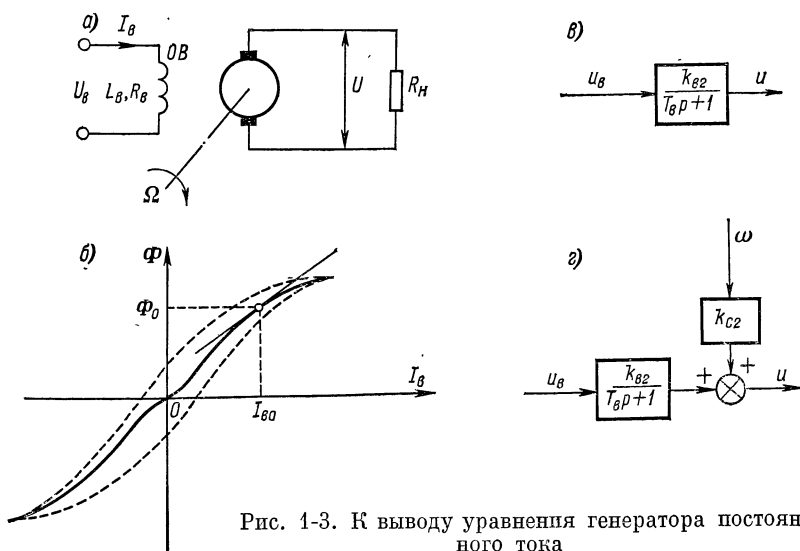


Рис. 1-3. К выводу уравнения генератора постоянного тока

Рассмотрим в качестве примера линеаризации вывод уравнения генератора постоянного тока, показанного на рис. 1-3, а. Такой генератор может, например, входить в состав системы регулирования напряжения, приведенной на рис. 1-1, в качестве электромашиного усилителя мощности.

Входной величиной генератора в данном случае является напряжение возбуждения  $U_b$ , а выходной — напряжение на его зажимах  $U$ . Скорость вращения якоря  $\Omega$  и величину сопротивления нагрузки  $R_n$  примем постоянными. Реакция якоря предполагается скомпенсированной и не учитывается.

Напряжение генератора

$$U = \frac{R_H}{R_a + R_H} E. \quad (1-10)$$

Здесь  $E$  — э. д. с. генератора;  $R_a$  — сопротивление цепи якоря генератора;  $R_H$  — сопротивление нагрузки (принято чисто активным).

Э. д. с. генератора пропорциональна скорости вращения якоря и магнитному потоку, т. е.

$$E = C_1 \Omega \Phi, \quad (1-11)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения якоря;  $\Phi$  — сцепляющаяся с якорем часть магнитного потока, создаваемого обмоткой возбуждения;  $C_1$  — коэффициент, постоянный для данной машины.

Поскольку скорость вращения якоря постоянна, перепишем выражение (1-11) в виде

$$E = C'_1 \Phi, \quad (1-12)$$

где  $C'_1 = C_1 \Omega$ .

Поток  $\Phi$  является функцией тока возбуждения, т. е.

$$\Phi = \varphi(I_B). \quad (1-13)$$

Эта зависимость нелинейна и показана на рис. 1-3, б.

В свою очередь, ток возбуждения зависит от напряжения возбуждения согласно следующему уравнению цепи возбуждения:

$$U_B = R_B I_B + w \sigma p \Phi, \quad (1-14)$$

где  $p \equiv d/dt$ ;  $U_B$  — напряжение возбуждения;  $I_B$  — ток возбуждения;  $R_B$  — сопротивление цепи возбуждения;  $w$  — число витков обмотки возбуждения;  $\sigma$  — коэффициент рассеяния магнитного потока, с помощью которого полный поток, создаваемый обмоткой возбуждения, выражается в виде  $\sigma \Phi$  ( $\sigma > 1$ ).

Уравнения (1-10), (1-12), (1-13) и (1-14) в совокупности определяют искомую зависимость  $U$  от  $U_B$  через промежуточные переменные  $E$ ,  $\Phi$  и  $I_B$ . Эта зависимость нелинейна из-за нелинейности характеристики намагничивания генератора (1-13). Эта нелинейность связана с насыщением магнитной цепи, а также с гистерезисом.

Линеаризовать такую нелинейность по вышеизложенной методике путем перехода к малым приращениям переменных можно только, если пренебречь гистерезисом, т. е. ограничиться учетом основной кривой намагничивания, показанной на рис. 1-3, б сплошной линией. Предположим, что петля гистерезиса узка и ею заведомо можно пренебречь. Тогда, переходя к приращениям переменных, получаем следующую систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= \frac{R_H}{R_a + R_H} \Delta E; \\ \Delta E &= C'_1 \Delta \Phi; \\ \Delta \Phi &= \left( \frac{d\Phi}{dI_B} \right)_0 \Delta I_B; \\ \Delta U_B &= R_B \Delta I_B + w \sigma p (\Delta \Phi). \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

Здесь  $\left(\frac{d\Phi}{dI_B}\right)_0$  определяется как тангенс угла наклона касательной к основной кривой намагничивания в точке установившегося режима (рис. 1-3, б).

Исключив из (1-15) промежуточные переменные  $\Delta E$ ,  $\Delta\Phi$  и  $\Delta I_B$ , получим искомое уравнение, связывающее  $\Delta U$  с  $\Delta U_B$ :

$$(T_B p + 1) \Delta U = k_{B1} \Delta U_B, \quad (1-16)$$

где  $T_B$  — постоянная времени цепи возбуждения:

$$T_B = \frac{w\sigma}{R_B} \left(\frac{d\Phi}{dI_B}\right)_0;$$

$k_{B1}$  — коэффициент передачи генератора по возбуждению:

$$k_{B1} = \frac{R_H C'_1}{R_B (R_a + R_H)} \left(\frac{d\Phi}{dI_B}\right)_0.$$

Обратим внимание на то, что как  $T_B$ , так и  $k_{B1}$  зависят от выбранной точки установившегося режима, в которой осуществляется линейаризация.

Если перейти к относительным единицам, уравнение (1-16) примет вид:

$$(T_B p + 1) u = k_{B2} u_B, \quad (1-17)$$

где

$$u = \frac{\Delta U}{U_0}; \quad u_B = \frac{\Delta U_B}{U_{B0}}; \quad k_{B2} = k_{B1} \frac{U_{B0}}{U_0}.$$

С введением передаточной функции получим следующее выражение:

$$u = W_B(p) u_B, \quad (1-18)$$

где

$$W_B(p) = \frac{k_{B2}}{T_B p + 1}.$$

В структурной схеме системы, в состав которой входит рассматриваемое звено, последнее должно быть изображено, как показано на рис. 1-3, в.

Выше при выводе уравнения генератора было принято, что скорость вращения якоря и нагрузка постоянны. Изменение этих величин является возмущением. Рассмотрим, как изменится уравнение генератора, если, например, учесть непостоянство скорости вращения якоря. В этом случае в систему исходных уравнений генератора вместо уравнения (1-12) надо ввести уравнение (1-11):

$$E = C_1 \Omega \Phi.$$

С учетом непостоянства скорости  $\Omega$  это уравнение оказывается нелинейным, поскольку включает в себя произведение переменных  $\Omega$  и  $\Phi$ . Произведя линейаризацию этой нелинейности разложением в ряд Тейлора, получим следующее линейное уравнение для при-

ращений переменных:

$$\Delta E = \left( \frac{\partial E}{\partial \Omega} \right)_0 \Delta \Omega + \left( \frac{\partial E}{\partial \Phi} \right)_0 \Delta \Phi = C_1 \Phi_0 \Delta \Omega + C_1 \Omega_0 \Delta \Phi = C_1'' \Delta \Omega + C_1' \Delta \Phi, \quad (1-19)$$

где

$$C_1'' = C_1 \Phi_0; \quad C_1' = C_1 \Omega_0.$$

Подставив уравнение (1-19) в систему (1-15) вместо уравнения  $\Delta E = C_1' \Delta \Phi$  и исключив, как и прежде, промежуточные переменные, получим следующее уравнение генератора вместо ранее выведенного (1-16):

$$(T_{вп} p + 1) \Delta U = k_{в1} \Delta U_{в} + (T_{вп} p + 1) k_{с1} \Delta \Omega, \quad (1-20)$$

где

$$k_{с1} = \frac{R_{п}}{R_{а} + R_{п}} C_1''.$$

Если перейти к относительным единицам, уравнение (1-20) примет вид:

$$(T_{вп} p + 1) u = k_{в2} u_{в} + (T_{вп} p + 1) k_{с2} \omega, \quad (1-21)$$

где

$$\omega = \frac{\Delta \Omega}{\Omega_0}; \quad k_{с2} = k_{с1} \frac{\Omega_0}{U_0}.$$

С использованием передаточной функции уравнение (1-21) можно представить так:

$$u = W_{в}(p) u_{в} + k_{с2} \omega. \quad (1-22)$$

Коэффициент  $k_{с2}$  является, таким образом, передаточной функцией генератора по скорости вращения якоря, в то время как  $W_{в}(p)$  — его передаточная функция по напряжению возбуждения.

На рис. 1-3, г показано соответствующее изображение данного звена в структурной схеме системы.

Если учесть еще одно возмущение — изменение сопротивления нагрузки генератора  $\Delta R_{н}$ , в правой части уравнения появится соответствующий третий член, а в структурной схеме — третье воздействие.

### § 1-3. ПЕРЕХОДНЫЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕНЬЕВ

Динамические свойства линейных звеньев и систем автоматического управления в целом могут быть описаны уравнениями, как показано выше, и графическими характеристиками. В теории автоматического управления применяются два типа таких характеристик — переходные и частотные.

Эти характеристики могут быть сняты экспериментально или построены по уравнению звена. Имеется и обратная возможность — по экспериментально полученным характеристикам составить уравнение звена. Кроме того, с помощью этих характеристик можно определить реакцию звена на любое возмущение произвольного вида. Все это будет рассмотрено ниже.



Таким образом, переходные и частотные характеристики однозначно связаны с уравнением звена и наряду с ним являются исчерпывающим описанием динамических свойств звена.

## А. Переходные характеристики

Переходная, или временная, характеристика (функция) звена представляет собой реакцию на выходе звена, вызванную подачей на его вход единичного ступенчатого воздействия. Единичное ступенчатое воздействие (единичная ступенчатая функция) — это воздействие, которое мгновенно возрастает от

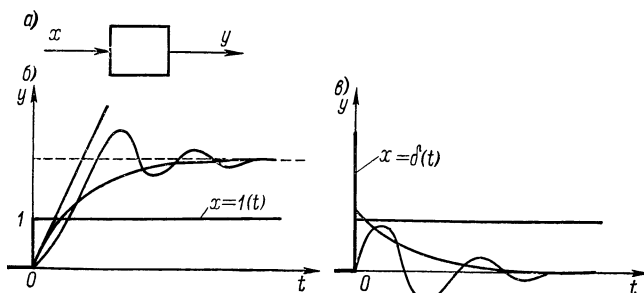


Рис. 1-4. Переходные характеристики

нуля до единицы и далее остается неизменным. Сказанное иллюстрируется рис. 1-4, а и б. На рис. 1-4, б показаны три различных вида переходных характеристик, соответствующих различным типам звеньев, которые будут подробно рассмотрены в следующем параграфе.

Переходная характеристика обозначается  $h(t)$ . Единичное ступенчатое воздействие обозначается  $1(t)$  и может быть описано следующим равенством:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (1-23)$$

Таким образом,  $h(t)$  — это выражение для  $y(t)$  при  $x(t) = 1(t)$ .

Наряду с переходной характеристикой применяется импульсная переходная (временная) характеристика или функция, называемая еще весовой функцией (функцией веса). Эта характеристика представляет собой реакцию звена на единичный импульс. Единичный импульс (единичная импульсная функция, или дельта-функция) — это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Единичный импульс — это импульс, площадь которого равна единице при длительности, равной нулю, и высоте, равной бесконечности. На рис. 1-4, в он условно показан в виде утолщения на оси ординат.

Там же изображены и типичные формы самих импульсных переходных характеристик.

Импульсная переходная характеристика обозначается  $w(t)$ ; единичный импульс обозначается  $\delta(t)$ . Таким образом,  $w(t)$  — это  $y(t)$  при  $x(t) = \delta(t)$ .

Математически дельта-функцию можно записать так:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0; \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (1-24)$$

При этом, согласно определению,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1-25)$$

Дельта-функция просто связана с единичной ступенчатой функцией:

$$\delta(t) = 1'(t). \quad (1-26)$$

Из (1-26) следует аналогичная связь между переходной и весовой функциями линейных звеньев:

$$w(t) = h'(t) \quad (1-27)$$

и наоборот

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt. \quad (1-28)$$

Учитывая это простое соотношение между переходной и весовой функциями, ниже будем применять главным образом первую из них, имея в виду, что вторую при необходимости всегда можно получить дифференцированием по формуле (1-27).

Зная переходную или весовую функцию, можно определить реакцию звена на произвольное входное воздействие при нулевых начальных условиях с помощью следующих формул:

$$y(t) = h(t) x(0) + \int_0^t h(t-\tau) x'(\tau) d\tau, \quad (1-29)$$

где  $x(0)$  — значение  $x(t)$  при  $t = 0$ ;

$$y(t) = h(0) x(t) + \int_0^t w(t-\tau) x(\tau) d\tau. \quad (1-30)$$

На рис. 1-5, *a* дана геометрическая интерпретация выражения (1-29). Реакция звена  $y(t)$  на произвольное воздействие  $x(t)$  определена как предел суммы реакций на ступенчатые воздействия высотой  $\Delta x = x' \cdot \Delta\tau$ , на которые можно разложить  $x(t)$ , при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ .

Выражение (1-30) для  $y(t)$  через весовую функцию  $w(t)$  геометрически интерпретируется на рис. 1-5, *б* как предел суммы

реакций на импульсы шириной  $\Delta\tau$  при  $\Delta\tau \rightarrow 0$ . Его можно представить еще в таком виде:

$$y(t) = h(0)x(t) + \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (1-30a)$$

Выражения (1-29) и (1-30) легко получаются друг из друга, являясь вариантами интеграла Дюамеля, или интеграла свертки. Заметим, что первое слагаемое  $h(0)x(t)$  в выражениях (1-30) и (1-30a) у реальных инерционных звеньев равно нулю, так как реакция на их выходе всегда отстает от входного воздействия, т. е.  $h(0) = 0$ . Поэтому в дальнейшем выражения (1-30) и (1-30a) приводятся без первого слагаемого.

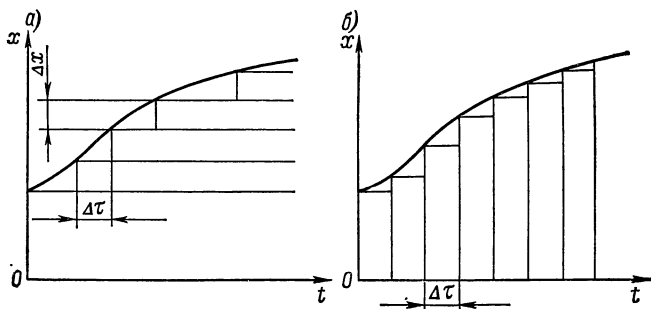


Рис. 1-5. Геометрическая интерпретация выражения для реакции звена на произвольное воздействие  $x(t)$  через  $h(t)$  и  $w(t)$ .

В выражениях (1-29), (1-30) и (1-30a) в качестве верхнего предела интеграла вместо  $t$  может стоять  $\infty$ , так как при  $\tau > t$ , т. е. при отрицательных значениях аргумента, функции  $h(t - \tau)$  и  $w(t - \tau)$  равны нулю.

Переходные характеристики могут быть выражены непосредственно через передаточную функцию звена с помощью преобразования Лапласа.

Осуществим прямое преобразование Лапласа (см. приложение 1, п. А) над уравнением звена, записанным в общем виде согласно (1-8):

$$Q(p)y = R(p)x. \quad (1-31)$$

Считая начальные условия нулевыми и учитывая, что обе части этого уравнения представляют собой сумму производных с постоянными коэффициентами, получим:

$$Q(s)Y(s) = R(s)X(s). \quad (1-32)$$

Здесь  $X(s) = L[x(t)]$ ,  $Y(s) = L[y(t)]$ , — изображения Лапласа функций  $x(t)$  и  $y(t)$ ;  $Q(s)$  и  $R(s)$  — полиномы, отличающиеся от исходных полиномов  $Q(p)$  и  $R(p)$  только заменой оператора

дифференцирования  $p$  на комплексную переменную  $s = c + j\omega$ . Отсюда

$$Y(s) = W(s) X(s), \quad (1-33)$$

где  $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$  — передаточная функция звена (с заменой  $p$  на  $s$ ).

В случае когда входное воздействие  $x(t)$  представляет собой единичный импульс  $\delta(t)$ , учитывая, что его изображение по Лапласу  $L[\delta(t)] = 1$ , из (1-33) получаем следующее выражение для изображения весовой функции звена:

$$L[w(t)] = W(s), \quad (1-34)$$

т. е.

$$w(t) = L^{-1}[W(s)]. \quad (1-35)$$

Таким образом, весовая функция определяется через передаточную функцию по формуле обратного преобразования Лапласа, т. е. является ее оригиналом.

В случае когда  $x(t) = 1(t)$ , учитывая, что  $L[1(t)] = 1/s$ , из (1-33) получаем выражение для изображения переходной характеристики:

$$L[h(t)] = \frac{W(s)}{s}. \quad (1-36)$$

Соответственно переходная характеристика звена

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]. \quad (1-37)$$

Выражения (1-33) и (1-34) можно трактовать как определения передаточной функции. Согласно (1-33), передаточная функция определяется как отношение изображений Лапласа выходной и входной величин при нулевых начальных условиях. Согласно (1-34), передаточная функция есть изображение Лапласа весовой функции.

## Б. Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, вызванные гармоническим воздействием на входе. Рассмотрим такой режим.

Пусть на вход звена (рис. 1-6, а) подано гармоническое воздействие

$$x = x_{\text{макс}} \sin \omega t,$$

где  $x_{\text{макс}}$  — амплитуда, а  $\omega$  — угловая частота этого воздействия.

По окончании переходного процесса на выходе звена будут существовать гармонические колебания с той же частотой, что и входные колебания, но отличающиеся в общем случае по амплитуде и фазе, т. е. в установившемся режиме выходная величина звена

$$y = y_{\text{макс}} \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $U_{\text{макс}}$  — амплитуда выходных установившихся колебаний;  $\varphi$  — фазовый сдвиг между входными и выходными колебаниями.

При фиксированной амплитуде входных колебаний амплитуда и фаза установившихся колебаний на выходе звена зависят от частоты колебаний. Если постепенно увеличивать от нуля частоту колебаний и определять установившиеся значения амплитуды и фазы выходных колебаний для разных частот, можно получить зависимость от частоты отношения амплитуд  $A = U_{\text{макс}}/x_{\text{макс}}$  и сдвига фаз  $\varphi$  выходных и входных установившихся колебаний. Эти зависимости называются соответственно  $A(\omega)$  — амплитудной частотной характеристикой (а. ч. х.)

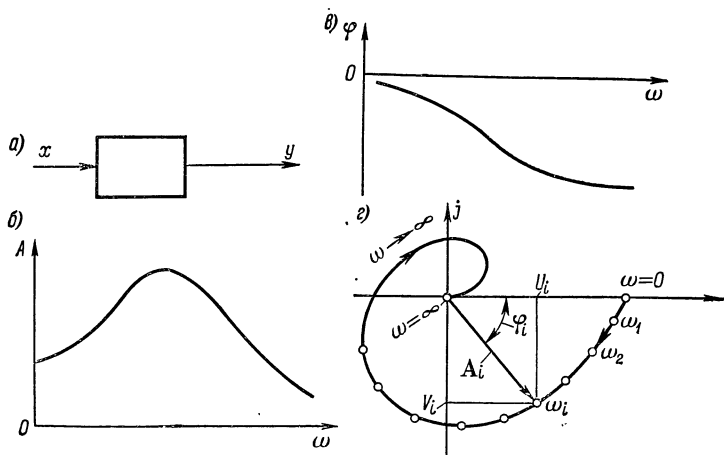


Рис. 1-6. Частотные характеристики

и  $\varphi(\omega)$  — фазовой частотной характеристикой (ф. ч. х.). Примерный вид этих характеристик у обычных инерционных звеньев изображен на рис. 1-6, б и в. Как показано на этих рисунках, у таких звеньев в силу их инерционности амплитудная частотная характеристика по мере увеличения частоты в конце концов спадает до нуля. При этом, чем менее инерционно звено, тем длиннее его амплитудная частотная характеристика, т. е. тем больше полоса пропускания звеном частот, или, просто, его пол о с а п р о п у с к а н и я.

Теоретически частотная характеристика продолжается до бесконечности, но практически полоса пропускания оценивается значением частоты, при котором отношение амплитуд  $A$  окончательно становится меньше определенного, достаточно малого конечного значения. Это значение обычно берут равным 0,05 (на этой частоте амплитуда выходных колебаний падает до 5% амплитуды входных колебаний).

Наличие максимума у амплитудной частотной характеристики говорит о резонансных свойствах звена. Частота, соответствующая

максимуму амплитудной характеристики, называется резонансной.

Фазовая характеристика у обычных инерционных звеньев, как показано на рис. 1-6,  $\varphi$ , отрицательна ( $\varphi < 0$ ), т. е. выходные колебания отстают по фазе от входных, и это отставание растет с частотой.

При исследовании систем автоматического управления амплитудную и фазовую частотные характеристики удобно строить в логарифмических координатах. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, в логарифмических координатах характеристики деформируются таким образом, что возникает возможность в подавляющем большинстве практических случаев упрощенно изображать амплитудные частотные характеристики ломаными линиями.

Второе удобство связано с построением амплитудных частотных характеристик цепочки последовательно соединенных звеньев. Из самого определения амплитудных частотных характеристик следует, что амплитудная частотная характеристика цепочки звеньев равна произведению амплитудных частотных характеристик составляющих ее звеньев, т. е.

$$A = \prod_{i=1}^n A_i, \quad (1-38)$$

где

$$A_i = \frac{x_{\max i}}{x_{\max (i-1)}}; \quad A = \frac{x_{\max n}}{x_{\max 0}},$$

а  $x_{\max 0}, \dots, x_{\max (i-1)}, x_{\max i}, \dots, x_{\max n}$  — амплитуды колебаний на входе цепочки, входе и выходе  $i$ -го звена, выходе последнего  $n$ -го звена цепочки.

Если прологарифмировать выражение (1-38), получим:

$$\lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i, \quad (1-39)$$

т. е. в логарифмическом масштабе амплитудная частотная характеристика цепочки звеньев равна сумме амплитудных характеристик отдельных звеньев.

Амплитудная частотная характеристика в логарифмических координатах строится в виде зависимости  $20 \lg A$  от  $\lg \omega$ , называемой логарифмической амплитудной характеристикой (л. а. х.), а фазовая — в виде зависимости  $\varphi$  от  $\lg \omega$ , называемой логарифмической фазовой характеристикой (л. ф. х.).

Величина  $20 \lg A$  обозначается  $L$ . В качестве единицы этой величины используется децибел, равный одной десятой бела. Бел — это единица десятичного логарифма коэффициента усиления мощности сигнала, т. е. 1 бел соответствует усилению мощности в 10 раз, 2 бела — в 100 раз, 3 бела — в 1000 раз и т. д.

Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а  $\lg A^2 = 2 \lg A$ , то усиление в белых, выраженное через отношение амплитуд  $A$ , равно  $2 \lg A$ . Соответственно в децибелах оно равно  $20 \lg A$ . При этом существуют следующие соотношения между значениями  $A$  и  $L$ :

$A$	0,001	0,01	0,1	0,316	0,89	1	1,12	3,16	10	100	1000
$L$ , дБ	−60	−40	−20	−10	−1	0	1	10	20	40	60

При применении л. а. х. логарифмическая фазовая характеристика строится в полулогарифмических координатах, т. е. в виде зависимости  $\varphi$  от  $\lg \omega$ , чтобы обе характеристики были связаны одним масштабом на оси абсцисс. Использование логарифмического масштаба на оси ординат фазовой характеристики не имеет смысла, так как фазовый сдвиг цепочки звеньев и так получается просто в виде суммы фазовых сдвигов на отдельных ее звеньях.

На оси абсцисс указываются либо прямо значения  $\lg \omega$ , либо, что практически более удобно, значения самой частоты  $\omega$ . В первом случае единицей приращения  $\lg \omega$  является декада, соответствующая изменению частоты в 10 раз. Применяется также деление оси абсцисс на октавы. Октава соответствует изменению частоты в два раза. (Одна октава равна 0,303 декады, так как  $\lg 2 = 0,303$ .)

Заметим также, что, так как при использовании логарифмического масштаба точка, соответствующая  $\omega = 0$ , находится слева в бесконечности, логарифмические характеристики строятся не от нулевой частоты, а от достаточно малого, но конечного значения  $\omega$ , которое и откладывается в точке пересечения координатных осей.

Обыкновенные амплитудная и фазовая частотные характеристики можно объединить в одну характеристику — амплитудно-фазовую частотную характеристику (а. ф. ч. х.), используя  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  в качестве полярных координат (рис. 1-6, з). Каждая точка амплитудно-фазовой частотной характеристики соответствует определенному значению частоты  $\omega$ . Значения  $\omega$  для конечного количества точек характеристики наносятся вдоль характеристики, как показано на рис. 1-6, з. Имея амплитудно-фазовую частотную характеристику, можно по этим точкам построить характеристики  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

Амплитудно-фазовую частотную характеристику можно строить и в прямоугольной системе координат — в комплексной плоскости. При этом координатами будут показанные на рис. 1-6, з проекции  $U$  и  $V$  вектора  $A$  на соответствующие оси. Зависимости

$U(\omega)$  и  $V(\omega)$  называются соответственно действительной (вещественной) и мнимой частотными характеристиками.

В дальнейшем для краткости будем в названии различных частотных характеристик опускать слово «частотная», говоря просто об амплитудной характеристике, фазовой характеристике.

Аналитические выражения для рассмотренных выше частотных характеристик могут быть легко получены по передаточной функции. Если в выражение передаточной функции звена  $W(p)$  подставить  $p = j\omega$ , то получится комплексная величина  $W(j\omega)$ , которая представляет собой функцию  $\omega$  и является амплитудно-фазовой частотной (или просто частотной) характеристикой звена. Ее модуль представляет собой амплитудную частотную характеристику  $A(\omega)$ , а аргумент — фазовую частотную характеристику  $\varphi(\omega)$ . Докажем это. Для удобства воспользуемся символической формой записи гармонических функций, т. е. представим установившиеся колебания на входе и выходе звена в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{\max} e^{j\omega t}; \\ y &= y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (1-40)$$

Согласно (1-8), уравнение звена в общем случае запишем так:

$$Q(p)y = R(p)x. \quad (1-41)$$

Поставим задачу найти параметры установившихся вынужденных колебаний на выходе звена, т. е. их амплитуду и фазу, если известно уравнение звена (1-41) и входное воздействие  $x$ . Для этого подставим в уравнение (1-41) выражения (1-40) для  $x$  и  $y$ . Полученное таким образом уравнение и определяет искомые значения амплитуды и фазы  $y$  как значения, удовлетворяющие этому уравнению. При подстановке учтем следующие очевидные выражения для  $k$ -й производной от  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} p^k (x_{\max} e^{j\omega t}) &= (j\omega)^k x_{\max} e^{j\omega t}; \\ p^k (y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}) &= (j\omega)^k y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)}. \end{aligned}$$

Так как слева и справа в уравнении (1-41) стоят суммы производных, то в результате подстановки (1-40) в (1-41) получим:

$$Q(j\omega) y_{\max} e^{j(\omega t + \varphi)} = R(j\omega) x_{\max} e^{j\omega t}.$$

Отсюда

$$\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{y_{\max}}{x_{\max}} e^{j\varphi}.$$

Но

$$\frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = W(j\omega), \text{ а } \frac{y_{\max}}{x_{\max}} = A,$$

поэтому окончательно имеем:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1-42)$$



Формула (1-42) определяет искомую связь передаточной функции с частотными характеристиками звена, указанную выше: модуль частотной функции  $W(j\omega)$  есть  $A(\omega)$ , а аргумент —  $\varphi(\omega)$ .

Если представить  $W(j\omega)$  не в показательной, как в (1-42), а в алгебраической форме, т. е.

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (1-43)$$

то здесь  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  будут введенными ранее действительной и мнимой частотными характеристиками, являющимися координатами амплитудно-фазовой характеристики в комплексной плоскости.

Согласно (1-42) и (1-43), связь между приведенными выше частотными характеристиками следующая:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

$$\left. \begin{aligned} U(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega); \\ V(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

Порядок получения выражения для перечисленных выше частотных характеристик по передаточной функции звена несложен. После подстановки в выражение для передаточной функции  $p = j\omega$  получаем:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)},$$

где индексами  $R$  и  $Q$  отмечены части соответствующих комплексных величин в числителе и знаменателе.

После освобождения от мнимости в знаменателе окончательно имеем:

$$W(j\omega) = \frac{[U_R(\omega) + jV_R(\omega)][U_Q(\omega) - jV_Q(\omega)]}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)};$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_Q(\omega) - U_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}.$$

Полученное выше выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики в виде  $W(p)|_{p=j\omega}$  формально может быть выведено и непосредственно из определения передаточной функции, согласно (1-33); как отношение изображений Лапласа выходной и входной величин. Если перейти в выражении (1-33) от изображения Лапласа к изображению Фурье (см. приложение 1, п. А), получим:

$$Y(j\omega) = W(j\omega) X(j\omega), \quad (1-46)$$

где  $X(j\omega)$  и  $Y(j\omega)$  — частотные характеристики входной и выходной величин, т. е. представления их в виде частотных спектров.

На основании выражения (1-46) амплитудно-фазовую частотную характеристику  $W(j\omega)$  можно определить в более общем виде как *отношение изображений Фурье выходной и входной величин при нулевых начальных условиях*.

Выше были выведены выражения для частотных характеристик через передаточную функцию. Рассмотрим теперь связь между частотными и переходными характеристиками. Наиболее просто она определяется для весовой функции. Если в выражениях (1-34) и (1-35) перейти от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье (см. приложение 1, п. А), получим соответственно выражения:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-47)$$

и

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1-48)$$

Первое выражение определяет частотные характеристики звена по его весовой функции, а второе, наоборот, — весовую функцию по амплитудно-фазовой характеристике.

По частотным характеристикам звена можно непосредственно определить его реакцию не только на импульсное воздействие, но и на входное воздействие любого вида. Это будет рассмотрено в § 6-2.

## **В. Особенности частотных характеристик устойчивых и минимально-фазовых звеньев**

В общем случае исчерпывающее описание звена с помощью частотных характеристик требует знания амплитудно-фазовой частотной характеристики  $W(j\omega)$  либо, согласно (1-42) и (1-43), любой пары характеристик:  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  или  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$ . Однако оказывается, что для некоторого класса звеньев существует однозначная связь между образующими эти пары функциями, и поэтому для полного описания таких звеньев достаточно иметь только одну из них.

Остановимся вначале на связи между действительной  $U(\omega)$  и мнимой  $V(\omega)$  частотными характеристиками. Доказано [4], что в случае устойчивых звеньев эти функции однозначно связаны, т. е. по любой из них можно найти другую. У с т о й ч и в ы м з в е н о м называется звено, все полюсы передаточной функции которого, т. е. нули ее знаменателя  $Q(p)$  или корни уравнения  $Q(p) = 0$ , имеют отрицательные действительные части. Смысл самого названия будет ясен из следующего параграфа. Таким обра-

зом, устойчивые звенья полностью описываются любой из двух характеристик:  $U(\omega)$  или  $V(\omega)$ .

Теперь обратимся к определению связи между амплитудной  $A(\omega)$  и фазовой  $\varphi(\omega)$  частотными характеристиками. Доказано [4], что эти функции однозначно связаны у минимально-фазовых звеньев. Минимально-фазовым звеном называется звено, у которого все полюсы и нули передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю действительные части. Свое название минимально-фазовые звенья получили в связи с тем, что они дают минимальный фазовый сдвиг  $\varphi$  при любом  $\omega$  по сравнению с любыми другими звеньями, имеющими такую же амплитудную характеристику  $A(\omega)$ , но у которых указанное выше условие в отношении полюсов и нулей передаточной функции не выполняется. Чтобы проиллюстрировать последнее, рассмотрим звено с уже знакомой нам передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{k}{T_p + 1}.$$

Согласно определению, это звено является минимально-фазовым, так как его единственный полюс равен  $-1/T$ , т. е. отрицательный действительный, а нулей вообще нет. Амплитудно-фазовая характеристика этого звена

$$W_1(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k - jkT\omega}{1 + T^2\omega^2},$$

и, следовательно, амплитудная характеристика

$$A_1(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}},$$

а фазовая

$$\varphi_1(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg T\omega.$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  значение  $\varphi_1$  изменяется от 0 до  $-\pi/2$ .

Возьмем теперь звено с передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{k}{T_p - 1}.$$

Это звено не является минимально-фазовым, так как его передаточная функция имеет положительный действительный полюс  $+1/T$ . (Заметим, что по этой причине данное звено является также и неустойчивым.) Амплитудно-фазовая характеристика этого звена

$$W_2(j\omega) = \frac{k}{-1 + jT\omega} = \frac{-k - jkT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Соответственно его амплитудная характеристика совпадает с амплитудной характеристикой первого звена, т. е.  $A_2(\omega) = A_1(\omega)$ , а фазовая функция  $\varphi_2(\omega) = \arctg T\omega - \pi = -[\varphi_1(\omega) + \pi]$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  значение  $\varphi_2$  изменяется от  $-\pi$  до  $-\pi/2$ . Таким образом,

второе звено создает большее фазовое запаздывание, чем первое — минимально-фазовое.

Для графического описания минимально-фазовых звеньев применяют амплитудную частотную характеристику. В случае необходимости по ней может быть построена фазовая характеристика [4]. Принципиально связь между этими характеристиками такова, что величина фазы  $\varphi$  растет с увеличением наклона амплитудной характеристики. При этом в случае применения логарифмической амплитудной характеристики можно приближенно считать, что участку л. а. х. с наклоном 20 дБ/дек соответствует фазовый сдвиг, близкий к  $\pi/2$ , а участку л. а. х. с наклоном 40 дБ/дек — сдвиг л. Конкретно взаимосвязь между амплитудной и фазовой характеристиками можно проследить на примере характеристик, приведенных на рис. 1-7, 1-8, 1-10, 1-11.

#### § 1-4. ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим уравнения, переходные и частотные характеристики наиболее часто встречающихся типовых звеньев.

##### А. Апериодическое звено

Уравнение этого звена имеет вид:

$$(Tp + 1)y = kx. \quad (1-49)$$

Соответственно передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (1-50)$$

В установившемся статическом режиме входная и выходная величины связаны уравнением

$$y_{ст} = kx_{ст}.$$

Примером аperiодического звена является рассмотренный в § 1-2 генератор постоянного тока, описываемый уравнением (1-17).

Переходная функция такого звена, являющаяся решением уравнения (1-49) при  $x = 1(t)$ , представляет собой экспоненту

$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (1-51)$$

Весовая функция

$$w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (1-52)$$

Соответствующие характеристики изображены на рис. 1-7, а и б. Если эти характеристики получены экспериментально, по ним можно определить значения  $T$  и  $k$ , как показано на рисунках, и, таким образом, получить уравнение звена.

Величина постоянной времени  $T$  определяет инерционность звена: чем она больше, тем длительнее переходный процесс в звене. Хотя теоретически время нарастания экспоненты  $h(t)$  равно бесконечности, практически за длительность переходного процесса принимают время, которое прошло от начала процесса до момента, когда выходная величина достигла 95% ее конечного установив-

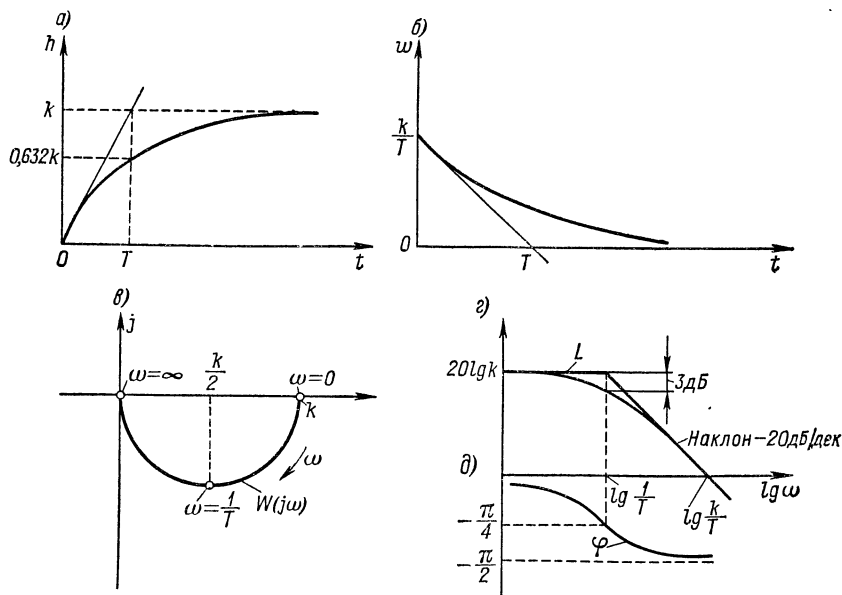


Рис. 1-7. Характеристики аперiodического звена первого порядка

шегося значения. В случае  $h(t)$  в виде экспоненты это время равно  $3T$ .

Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{1+jT\omega} = \frac{k-jkT\omega}{1+T^2\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (1-53)$$

где

$$U(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}.$$

Ее график показан на рис. 1-7, в. Эта характеристика представляет собой полуокружность с радиусом  $k/2$  и центром в точке  $(k/2, j0)$  на действительной оси.

Согласно (1-53),

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg T\omega. \end{aligned} \right\} \quad (1-54)$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}. \quad (1-55)$$

Она показана на рис. 1-7, *з*.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика рассматриваемого звена может быть приближенно представлена ломаной линией, которая показана на том же рисунке. Эта приближенная характеристика называется а с и м п т о т и ч е с к о й л. а. х. Такое название связано с тем, что эта характеристика составлена из двух асимптот, к которым стремится л. а. х. при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ . Найдем эти асимптоты.

При малых значениях  $\omega \ll 1/T$  в выражении (1-55).

$$\sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx 1, \text{ т. е. } L(\omega) \approx 20 \lg k.$$

Соответственно характеристика представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс и проходящую на уровне  $20 \lg k$ . Это есть первая асимптота, к которой стремится л. а. х. при  $\omega \rightarrow 0$ .

С другой стороны, на больших частотах, когда  $\omega \gg 1/T$  в (1-55)

$$\sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx T\omega, \text{ т. е. } L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega.$$

В этом случае характеристика представляет собой прямую, имеющую наклон  $-20$  дБ/дек. Действительно, при увеличении  $\omega$  на декаду, т. е. в 10 раз,

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T \cdot 10\omega = 20 \lg k - 20 \lg T\omega - 20 \lg 10.$$

Таким образом, величина  $L(\omega)$  уменьшилась на  $20 \lg 10$ , т. е. на 20 дБ. Эта линия является второй асимптотой, к которой стремится л. а. х. при  $\omega \rightarrow \infty$ . Обе асимптоты пересекаются в точке, соответствующей частоте  $\omega = 1/T$ . Поэтому эта частота называется с о п р я г а ю щ е й ч а с т о т о й.

При  $\omega = 1/T$ , согласно (1-55),

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{2} = 20 \lg k - 3 \text{ дБ}.$$

Таким образом, максимальное расхождение между истинной и асимптотической л. а. х. равно всего 3 дБ. Поэтому при практических построениях л. а. х. апериодических звеньев используют обычно асимптотическую л. а. х.

Фазовая частотная характеристика, соответствующая выражению (1-54), показана в логарифмическом масштабе на рис. 1-7, *д*: при  $\omega \rightarrow \infty$  значение  $\varphi$  изменяется от 0 до  $-\pi/2$ . При этом в точке  $\omega = 1/T$  имеем  $\varphi = -\pi/4$ .

Если частотные характеристики получены экспериментально, по ним нетрудно определить параметры звена  $T$  и  $k$ , пользуясь описанной выше зависимостью между этими характеристиками и передаточной функцией.

На примере рассмотренного звена можно проиллюстрировать сформулированное в предыдущем параграфе положение о том, что величина полосы пропускаемых звеном частот, т. е. ширина ча-

стотной характеристики, является мерой быстродействия звена: чем длиннее частотная характеристика звена, тем короче его переходная характеристика, т. е. меньше инерционность звена. В случае аperiodического звена инерционность определяется постоянной времени  $T$ . Выше было показано, что длительность переходной характеристики у этого звена пропорциональна  $T$ , в то время как сопрягающая частота его л. а. х., а следовательно, и длина всей этой характеристики обратно пропорциональны  $T$ .

Если можно пренебречь инерционностью аperiodического звена, т. е. принять в его уравнении (1-49)  $T = 0$ , получим идеальное статическое звено с уравнением

$$y = kx \quad (1-56)$$

и передаточной функцией

$$W(p) = k. \quad (1-57)$$

Это звено без искажения пропускает все сигналы и имеет, согласно (1-56),

$$h(t) = k \cdot 1(t) \text{ и } W(j\omega) = k.$$

## Б. Колебательное звено

Уравнение этого звена

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) y = kx, \quad (1-58)$$

причем  $T_1$  и  $T_2$  связаны условием

$$\zeta = \frac{T_2}{2T_1} < 1. \quad (1-59)$$

Это условие означает, что корни характеристического уравнения

$$T_1^2 \lambda^2 + T_2 \lambda + 1 = 0, \quad (1-60)$$

соответствующего дифференциальному уравнению (1-58), равные

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2T_1^2}, \quad (1-61)$$

являются комплексными.

Уравнение установившегося статического режима этого звена, согласно (1-58), имеет тот же вид, что и у аperiodического звена:

$$y_{ст} = kx_{ст}.$$

Передаточная функция, соответствующая уравнению (1-58),

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}. \quad (1-62)$$

Переходная функция, являющаяся решением уравнения (1-58) при  $x = 1(t)$ , имеет вид:

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin \left( \beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]. \quad (1-63)$$

Здесь  $\alpha = -\frac{T_2}{2T_1^2}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{4T_1^2 - T_2^2}}{2T_1^2}$  — соответственно действитель-

ная и мнимая части корней (1-61) характеристического уравнения (1-60).

На рис. 1-8, а показаны переходные характеристики колебательного звена для ряда значений  $\zeta = T_2/(2T_1)$ . Как видно из рисунка, с ростом значения  $\zeta$  колебательность переходного процесса уменьшается, исчезая совсем при  $\zeta \geq 1$ .

Дифференцируя выражение (1-63), можно найти весовую функцию звена. Возможный ее вид показан на рис. 1-8, б. Примерами колебательного звена являются электрический резонансный контур при достаточно малом активном сопротивлении и электрический двигатель при достаточно большой постоянной времени цепи якоря.

По экспериментально снятой переходной характеристике можно найти параметры  $T_1$ ,  $T_2$  и  $k$ , определяющие уравнение звена:

$$\left. \begin{aligned} k &= y_{\text{ст}} \quad \text{при} \quad x_{\text{ст}} = 1; \\ T_1^2 &= \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}; \\ T_2 &= -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-64)$$

Входящие сюда величины  $\alpha$  и  $\beta$  вычисляются непосредственно по переходной характеристике следующим образом. Согласно (1-63), величина  $\beta$ , являясь частотой колебаний, равна

$$\beta = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (1-65)$$

где  $\tau$  — период колебаний, определяемый по переходной характеристике (рис. 1-8, а). Величина  $\alpha$  в соответствии с (1-63) характеризует степень затухания колебаний и может быть найдена из выражения

$$\frac{\Delta y_{\text{макс } 2}}{\Delta y_{\text{макс } 1}} = e^{\alpha \tau},$$

где  $\Delta y_{\text{макс } 1}$  и  $\Delta y_{\text{макс } 2}$  — амплитуды колебания  $y$  относительно конечного установившегося его значения, отстоящие друг от друга на время, равное периоду колебаний  $\tau$  (рис. 1-8, а). Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\Delta y_{\text{макс } 2}}{\Delta y_{\text{макс } 1}} = \frac{1}{\tau} 2,3 \lg \frac{\Delta y_{\text{макс } 2}}{\Delta y_{\text{макс } 1}}. \quad (1-66)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика, согласно (1-62),

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T_1^2 \omega^2) + jT_2 \omega} = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2) - jkT_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}. \quad (1-67)$$

Соответствующая характеристика показана на рис. 1-8, в. Исходя из выражения (1-67)

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{k}{\sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}}; \\ \varphi(\omega) &= -\arctg \frac{T_2 \omega}{1 - T_1^2 \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-68)$$



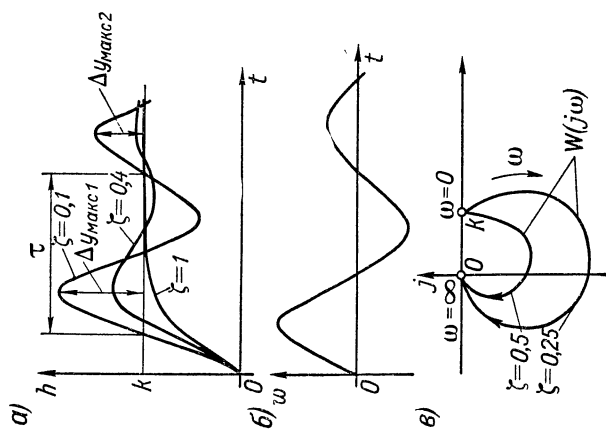
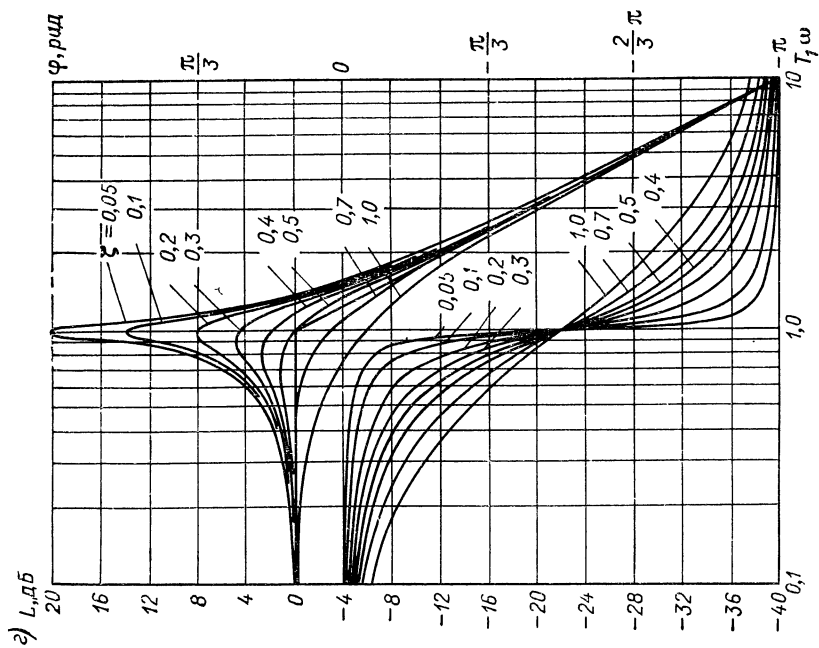


Рис. 1-8. Характеристики колебательного звена

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}. \quad (1-69)$$

На рис. 1-8, з приведены л. а. х. колебательного звена при  $k = 1$ . Там же показана асимптотическая л. а. х. Она представляет собой ломаную линию, состоящую из двух асимптот, к которым стремится л. а. х. при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ . Одна асимптота — ось абсцисс; в общем случае она идет вдоль оси абсцисс на расстоянии  $20 \lg k$ . Другая асимптота имеет наклон  $-40$  дБ/дек.

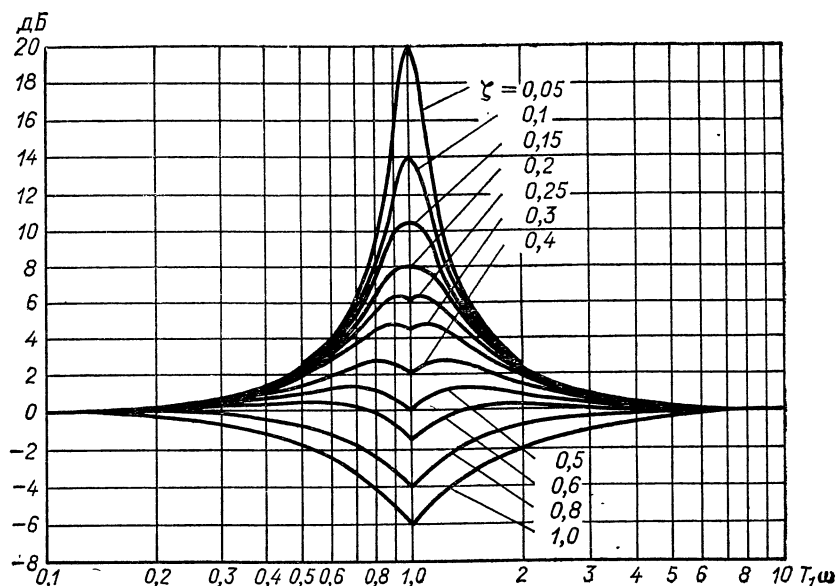


Рис. 1-9. Графики поправок к асимптотической л. а. х. колебательного звена

Точка пересечения асимптот соответствует  $\omega = 1/T_1$ . Уравнение первой асимптоты получается из (1-69) при  $\omega \ll 1/T_1$ :

$$L(\omega) \approx 20 \lg k.$$

Уравнение второй асимптоты соответствует  $\omega \gg 1/T_1$ . При этом

$$L(\omega) \approx 20 \lg k - 40 \lg T_1 \omega.$$

Из последнего выражения следует, что при увеличении частоты на декаду  $L(\omega)$  понижается на 40 дБ, что и определяет указанный выше наклон второй асимптоты  $-40$  дБ/дек.

При  $0,4 < \zeta < 0,7$  расхождение между асимптотической и истинными л. а. х. не превышает 3 дБ, как и в случае апериодического звена. Поэтому для звеньев с таким значением  $\zeta$  можно пользоваться асимптотическими л. а. х. При других значениях  $\zeta$  асимптотическую л. а. х. корректируют с помощью готовых

графиков поправок, дающих разность между истинной и асимптотической л. а. х. Эти графики приведены на рис. 1-9.

Фазовая частотная характеристика (ф. ч. х.) колебательного звена показана на рис. 1-8, з вместе с л. а. х.

Исходя из рассмотренной выше связи между параметрами колебательного звена и частотными характеристиками, по экспериментально полученным частотным характеристикам всегда можно определить эти параметры и, таким образом, составить уравнение звена.

Остановимся теперь на звене, описываемом уравнением (1-58)

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1) y = kx,$$

но при  $\zeta = T_2/(2T_1) \geq 1$ , т. е. при невыполненном условии (1-59).

В этом случае, согласно (1-61), характеристическое уравнение, соответствующее данному дифференциальному уравнению, имеет не комплексные, а отрицательные действительные корни. Поэтому такое звено уже не является колебательным. Оно называется аperiodическим звеном второго порядка. Левая часть уравнения (1-58) может быть разложена на два множителя, а уравнение представлено в виде

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1) y = kx, \quad (1-70)$$

где

$$T_{3,4} = \frac{T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1^2}}{2}.$$

Действительно, если раскрыть скобки в (1-70), получим исходное уравнение (1-58). Такое разложение имеет смысл только при  $T_2/(2T_1) \geq 1$ , так как только в этом случае  $T_3$  и  $T_4$  являются действительными величинами. Дифференциальное уравнение второго порядка (1-70) может быть заменено двумя дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} (T_3 p + 1) z &= kx; \\ (T_4 p + 1) y &= z, \end{aligned} \right\}$$

где  $z$  — новая промежуточная переменная. Это означает, что рассматриваемое аperiodическое звено второго порядка может быть заменено в структурной схеме двумя звеньями первого порядка, описываемыми этими уравнениями, и, следовательно, его нельзя считать элементарным звеном.

Еще одним частным случаем звена, описываемого уравнением (1-58), является так называемое *к о н с е р в а т и в н о е з в е н о*. У этого звена  $T_2 = 0$  и, следовательно, уравнение имеет вид:

$$(T^2 p^2 + 1) y = kx. \quad (1-71)$$

Переходная характеристика такого звена представляет собой незатухающие колебания.

Все рассмотренные выше звенья описываются в статике одинаковым уравнением

$$y_{ст} = kx_{ст}$$

и называются статическими.

## В. Интегрирующее звено

Это звено называют еще а с т а т и ч е с к и м. Его уравнение

$$py = kx \quad (1-72)$$

или в интегральной форме

$$y = \frac{k}{p} x = k \int_0^t x dt + x_0.$$

Таким образом, выходная величина этого звена пропорциональна интегралу от входной величины, чем и объясняется название звена.

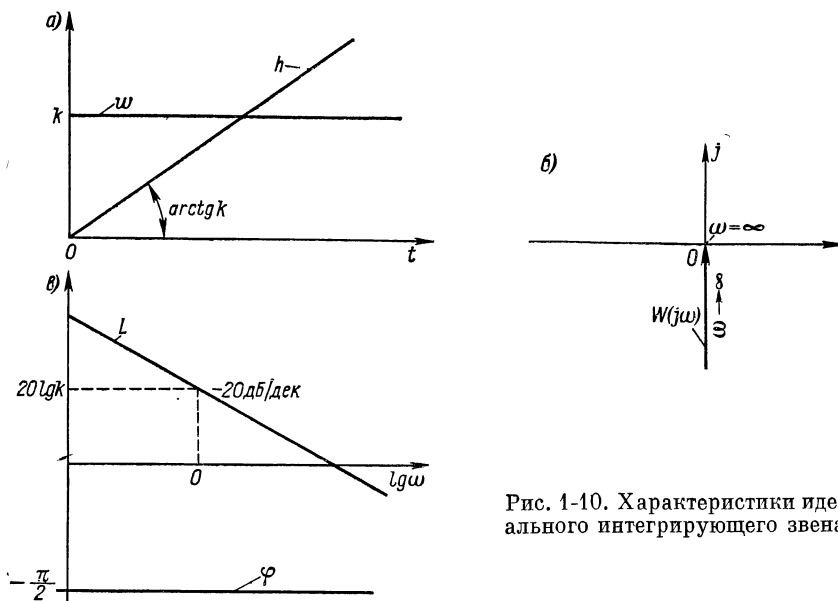


Рис. 1-10. Характеристики идеального интегрирующего звена

Примером интегрирующего звена может служить гидравлический сервомотор, выходом которого является перемещение поршня, а входом — давление жидкости, подаваемой в его цилиндр.

Отметим, что коэффициент передачи интегрирующего звена имеет размерность  $1/\text{с}$ .

Переходная функция интегрирующего звена

$$h(t) = kt, \quad (1-73)$$

а весовая функция

$$w(t) = h'(t) = k. \quad (1-74)$$

Соответствующие характеристики приведены на рис. 1-10, а.

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{p}. \quad (1-75)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}, \quad (1-76)$$

т. е. она, как показано на рис. 1-10, б, проходит по отрицательной мнимой оси. Согласно (1-76),

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{k}{\omega}; \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \left( \frac{-\frac{k}{\omega}}{0} \right) = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-77)$$

Л. а. х.

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (1-78)$$

Соответствующие амплитудная и фазовая характеристики изображены на рис. 1-10, в. Л. а. х. представляет собой прямую, имеющую наклон к оси абсцисс  $-20$  дБ/дек. Ордината ее при  $\omega = 1$  ( $\lg \omega = 0$ ) равна  $20 \lg k$ .

Иногда применяется другая форма записи уравнения интегрирующего звена:

$$Tpy = x,$$

где  $T = 1/k$  измеряется в секундах и называется постоянной времени интегрирующего звена.

Реальные интегрирующие звенья обычно обладают определенной инерционностью, вследствие чего их выходная величина не равна точно интегралу от входной величины. Соответственно уравнение реального (инерционного) интегрирующего звена имеет вид:

$$(Tp + 1)py = kx. \quad (1-79)$$

Это уравнение второго порядка можно заменить следующей системой двух уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} pz &= kx; \\ (Tp + 1)y &= z, \end{aligned} \right\}$$

где  $z$  — новая промежуточная переменная.

Эта система соответствует последовательному соединению идеального интегрирующего звена и апериодического звена первого порядка. Таким образом, реальное интегрирующее звено не является элементарным типовым звеном, так как его можно представить в виде последовательного соединения уже известных нам типовых звеньев — идеального интегрирующего и апериодического первого порядка.

## Г. Дифференцирующее звено

Уравнение этого звена

$$y = kpx, \quad (1-80)$$

т. е. в соответствии с названием выходная величина такого звена пропорциональна производной от входной величины. Коэффициент передачи дифференцирующего звена  $k$  измеряется в секундах.

Переходная функция, согласно (1-80), равна

$$h(t) = k\delta(t). \quad (1-81)$$

Передающая функция

$$W(p) = kp. \quad (1-82)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = jk\omega, \quad (1-83)$$

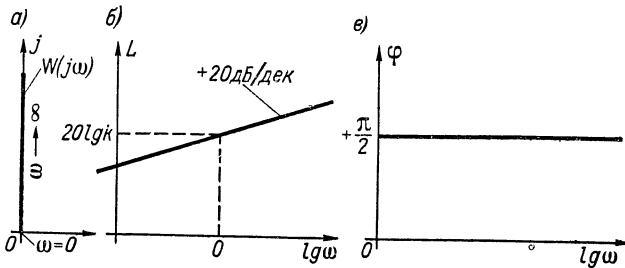


Рис. 1-11. Характеристики идеального дифференцирующего звена

т. е. она, как показано на рис. 1-11, а, совпадает с положительной мнимой полуосью. Согласно (1-83),

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= k\omega; \\ \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg} \left( \frac{k\omega}{0} \right) = + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1-84)$$

Соответственно

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (1-85)$$

Амплитудная и фазовая характеристики звена приведены на рис. 1-11, б и в.

Передающая функция и соответственно характеристики дифференцирующего звена обратны передаточной функции и характеристикам интегрирующего звена.

Реальные дифференцирующие звенья обладают конечной инерционностью, вследствие чего осуществляемое ими дифференцирование не является точным. Уравнение реального дифференцирующего звена имеет вид:

$$(Tp + 1)y = kpx. \quad (1-86)$$

Его можно заменить системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} z &= kpx; \\ (Tp + 1)y &= z. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому, как и реальное интегрирующее звено, реальное дифференцирующее звено не является типовым: его можно заменить последовательным соединением идеального дифференцирующего звена и аperiodического звена первого порядка.

#### Д. Звено с постоянным запаздыванием

Это звено без искажения воспроизводит на выходе входную величину, как идеальное статическое звено, но с той разницей,

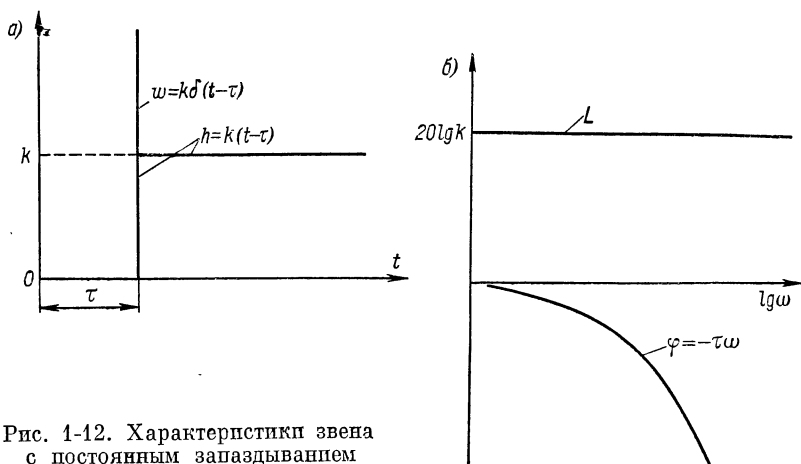


Рис. 1-12. Характеристики звена с постоянным запаздыванием

что выходная величина запаздывает относительно входной на постоянное время. Уравнение такого звена имеет вид:

$$y = k \cdot 1(t - \tau), \quad (1-87)$$

причем  $y = 0$  при  $t < \tau$ . Здесь  $\tau$  — время запаздывания.

Характеристики звена приведены на рис. 1-12, а и б. При этом, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= k; \\ \varphi(\omega) &= -\tau\omega. \end{aligned} \right\} \quad (1-88)$$

Поэтому амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = ke^{-j\tau\omega}, \quad (1-89)$$

а передаточная функция

$$W(p) = ke^{-\tau p}. \quad (1-90)$$

Таким образом, с применением оператора  $p$  в символическом виде уравнение (1-87) звена с постоянным запаздыванием может быть представлено так:

$$y = ke^{-\tau p}x. \quad (1-91)$$

### Е. Неустойчивые звенья

Рассмотренные выше звенья, кроме интегрирующего, устойчивые, так как все полюсы их передаточных функций имеют отрицательные действительные части. Они являются также, кроме звена с постоянным запаздыванием, и минимально-фазовыми, так как их передаточные функции не имеют еще и нулей с положительной действительной частью.

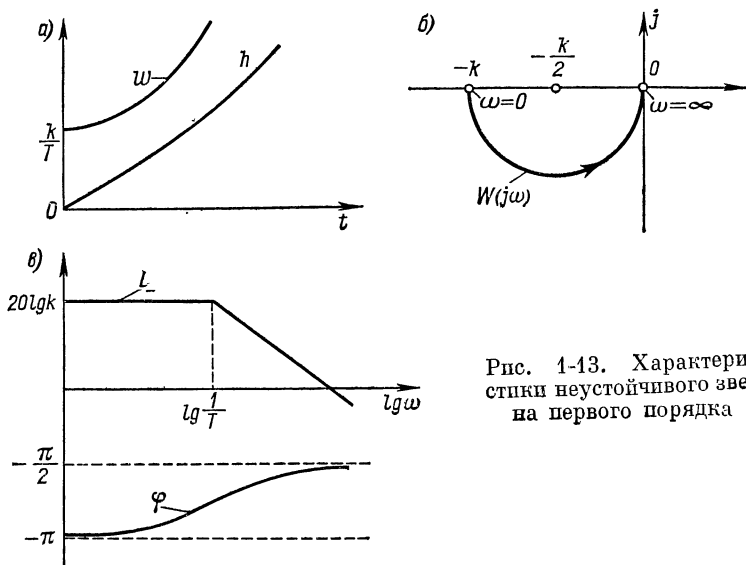


Рис. 1-13. Характеристики неустойчивого звена первого порядка

Примером неустойчивого звена является звено с передаточной функцией

$$\frac{k}{Tp-1},$$

которая отличается от передаточной функции аperiodического звена первого порядка другим знаком перед единицей. Это звено мы уже рассматривали в предыдущем параграфе в качестве примера неминимально-фазового звена. Его переходная характеристика

$$h(t) = k \left( e^{\frac{t}{T}} - 1 \right), \quad (1-92)$$

весовая функция

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{\frac{t}{T}}, \quad (1-93)$$



а амплитудно-фазовая характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k + jk\omega}{1 + T^2\omega^2}. \quad (1-94)$$

Соответствующие характеристики приведены на рис. 1-13, а, б, в.

Неустойчивыми являются также все звенья, передаточные функции которых отличаются от передаточных функций рассмотренных выше статических звеньев изменением знака любого из членов знаменателя на отрицательный. Примерами неустойчивых звеньев служат звенья со следующими передаточными функциями:

$$\begin{aligned} & -\frac{k}{T_p + 1}; \quad \frac{k}{T_p - 1}; \quad -\frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}; \\ & \frac{k}{T_1^2 p^2 - T_2 p + 1}; \quad \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p - 1}. \end{aligned}$$

Физический смысл термина «неустойчивость» в самом общем виде был раскрыт во введении и детально будет рассмотрен в четвертой главе. Пока же отметим только, что переходные характеристики неустойчивых звеньев неограниченно растут со временем. Кроме того, напомним, что все неустойчивые звенья являются и неминимально-фазовыми.

#### **§ 1-5. ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ПЕРЕДАТОЧНЫМ ФУНКЦИЯМ И ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ЗВЕНЬЕВ**

В результате разбиения САУ на звенья направленного действия и получения математического описания звеньев в виде передаточных функций, частотных или переходных характеристик составляется структурная схема системы. По структурной схеме можно затем получить передаточные функции или характеристики системы в целом. Рассмотрим этот последний этап математического описания САУ.

#### **А. Получение передаточных функций одномерной системы по передаточным функциям звеньев**

Если имеются уравнения всех звеньев системы, то описанием последней является система этих уравнений. Исключив из нее обычным порядком промежуточные переменные, можно получить одно дифференциальное уравнение высокого порядка, связывающее интересующую нас выходную величину системы с определенной входной величиной — каким-либо возмущением или задающим воздействием. Наиболее просто эту процедуру можно выполнить,

если оперировать передаточными функциями звеньев. Начнем с простейших случаев.

**Передаточная функция цепочки последовательно соединенных звеньев направленного действия** (рис. 1-14, а). В этом случае имеем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W_1(p) x; \\ y_2 &= W_2(p) y_1; \\ &\vdots \\ y &= W_n(p) y_{n-1}. \end{aligned} \right\}$$

Исключив отсюда промежуточные переменные, получим:

$$y = [W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p)] x = W(p) x.$$

Здесь

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p), \quad (1-95)$$

т. е. *передаточная функция цепочки последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций звеньев*. Это

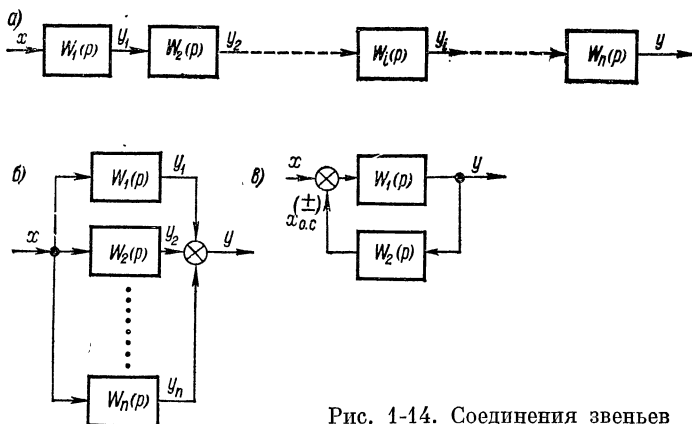


Рис. 1-14. Соединения звеньев

значит, что такую цепочку можно заменить в структурной схеме одним эквивалентным звеном с передаточной функцией  $W(p)$ .

В качестве примера можно вспомнить рассмотренное в предыдущем параграфе реальное интегрирующее звено с передаточной функцией  $\frac{k}{p(Tp+1)}$ . Как было показано, это звено эквивалентно последовательному соединению звеньев с передаточными функциями  $\frac{k}{p}$  и  $\frac{1}{Tp+1}$ . Этот же результат следует и из общей формулы (1-95).

**Параллельное соединение звеньев направленного действия** (рис. 1-14, б). Здесь

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)]x = W(p)x,$$

где

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (1-96)$$

Таким образом, *передаточная функция группы параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев*. В структурной схеме такую группу звеньев можно заменить одним эквивалентным звеном с соответствующей передаточной функцией  $W(p)$ .

**Звено, охваченное обратной связью** (рис. 1-14, в). Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи  $x_{o.c}$  складывается со входным сигналом  $x$  (плюс у суммирующего элемента на рис. 1-14, в), или отрицательной, если  $x_{o.c}$  вычитается из  $x$  (минус на рис. 1-14, в). Схема описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} y &= W_1(p)(x \pm x_{o.c}); \\ x_{o.c} &= W_2(p)y. \end{aligned} \right\}$$

Здесь в первом уравнении знак плюс соответствует положительной обратной связи, а знак минус — отрицательной. Исключив отсюда  $x_{o.c}$ , получим:

$$y = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)} x$$

или

$$y = W_3(p)x,$$

где

$$W_3(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W(p)}, \quad (1-97)$$

а

$$W(p) = W_1(p)W_2(p).$$

Здесь положительной обратной связи соответствует минус, а отрицательной — плюс.

Функция  $W_3(p)$  называется *передаточной функцией замкнутой системы*, а  $W(p)$  — *передаточной функцией разомкнутой системы*, т. е. цепочки из всех звеньев системы, получающейся после разрыва обратной связи.

В качестве примера рассмотрим интегрирующее звено с передаточной функцией  $W_1(p) = k_1/p$ , охваченное отрицательной обратной связью через идеальное статическое звено с передаточной функцией  $W_2(p) = k_2$ . Заметим попутно, что обратная связь, осуществляемая через статическое звено, называется жесткой

обратной связью. (О ней подробнее будет говориться в § 7-3.) Согласно (1-97),

$$W_3(p) = \frac{\frac{k_1}{p}}{1 + k_2 \frac{k_1}{p}} = \frac{\frac{1}{k_2}}{\frac{1}{k_1 k_2} p + 1} = \frac{k}{Tp + 1},$$

где введены следующие обозначения:

$$k = \frac{1}{k_2}; \quad T = \frac{1}{k_1 k_2}.$$

Таким образом, интегрирующее звено, охваченное жесткой обратной связью, эквивалентно аperiodическому звену, т. е. не является уже интегрирующим.

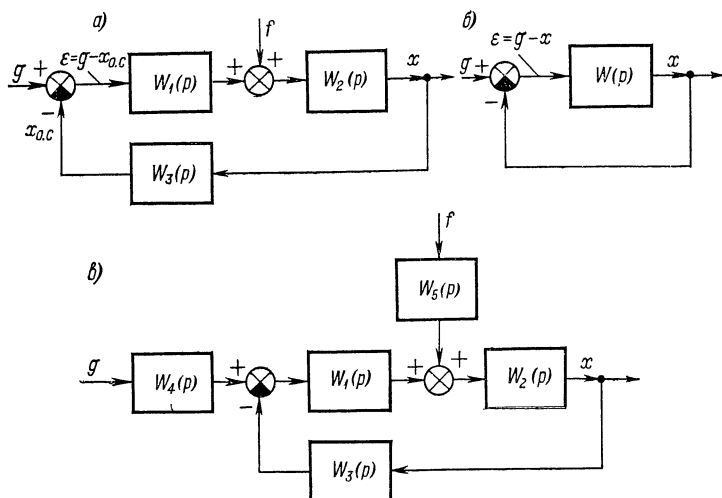


Рис. 1-15. Структурные схемы одноконтурной САУ

**Одноконтурная САУ** (рис. 1-15, а). На рис. 1-15, а  $x$  — интересующая нас выходная величина,  $f$  — возмущение, а  $g$  — задающее воздействие. Выведем выражение для передаточных функций, связывающих  $x$  с  $f$  и  $g$ . Для этого достаточно воспользоваться формулой (1-97), учитывая при этом, что в САУ общая обратная связь, создающая замкнутый контур системы, всегда отрицательная. Это определяется самим принципом действия САУ, управляющее устройство которых осуществляет управление объектом в функции отклонения  $x$  от его значения, определяемого заданием  $g$ . При этом именно за счет того, что управляющее устройство осуществляет отрицательную обратную связь, все изменения выходной величины объекта, вызванные каким-либо возмущением, будут ликвидироваться в результате противоположного действия управляющего устройства.

Итак, с учетом сказанного, согласно (1-97), в общем случае одноконтурной САУ

$$x = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} f,$$

т. е. передаточная функция замкнутой САУ, связывающая выходную величину  $x$  с внешним воздействием  $f$ , приложенным в произвольной точке системы,

$$W_{3f}(p) = \frac{x}{f} = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)}. \quad (1-98)$$

Здесь числитель представляет собой передаточную функцию  $W_{xf}(p)$ , определяющую, как показывают индексы, зависимость  $x$  от  $f$  при отсутствии обратной связи. Эта передаточная функция зависит от места нахождения  $x$  и  $f$  в системе. Знаменатель  $W_{3f}(p)$  включает в себя передаточную функцию разомкнутой системы  $W(p)$  и не зависит от места нахождения  $x$  и  $f$ .

Для схемы, изображенной на рис. 1-15, а,

$$W_{xf}(p) = W_2(p), \quad \text{а} \quad W(p) = W_1(p) W_2(p) W_3(p).$$

Индекс  $f$  у передаточной функции замкнутой системы  $W_{3f}(p)$  показывает, к какому внешнему воздействию она относится. В дальнейшем, когда это не может вызвать недоразумения, этот индекс будет опускаться.

В соответствии с (1-98) передаточная функция, связывающая  $x$  с задающим воздействием  $g$ ,

$$W_{3g}(p) = \frac{x}{g} = \frac{W_{xg}(p)}{1 + W(p)}, \quad (1-98a)$$

где для схемы, показанной на рис. 1-15, а,

$$W_{xg}(p) = W_1(p) W_2(p).$$

В распространенном частном случае систем автоматического регулирования — в следящих системах, задачей которых является обеспечение слежения величиной  $x$  за величиной  $g$  (см. введение), обычно  $W_{xg}(p) = W(p)$ , т. е. структурная схема системы соответствует рис. 1-15, б. Такая система называется системой с единичной обратной связью. В этом случае выражение (1-98a) принимает вид:

$$W_{3g}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (1-99)$$

При исследовании систем автоматического регулирования часто, помимо выходной величины  $x$ , интерес представляет величина ошибки

$$\varepsilon = g - x_{0,c},$$

где  $x_{0,c}$  показано на рис. 1-15, а. Подставив сюда полученное согласно (1-98) выражение

$$x_{0,c} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} g,$$

будем иметь:

$$W_{\varepsilon}(p) = \frac{\varepsilon}{g} = \frac{1}{1+W(p)}. \quad (1-100)$$

В частности, величина  $\varepsilon$ , определяемая по этой формуле, широко используется при исследовании точности следящих систем (рис. 1-15, б).

В общем случае, когда на систему действует одновременно несколько возмущений, на основе принципа суперпозиции получаем:

$$x = \sum_i W_{\varepsilon f_i}(p) f_i = \frac{\sum_i W_{\varepsilon f_i}(p) f_i}{1+W(p)}. \quad (1-101)$$

В частности, для системы, изображенной на рис. 1-15, а, при одновременном действии на нее  $f$  и  $g$

$$x = \frac{W_{xf}(p) f + W_{xg}(p) g}{1+W(p)}. \quad (1-102)$$

К схеме, представленной на рис. 1-15, а, сводятся все одно-контурные САУ, структурные схемы которых содержат вместо показанных на этой схеме звеньев с передаточными функциями  $W_1(p)$ ,  $W_2(p)$  и  $W_3(p)$  любое число последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звеньев, охваченных местными обратными связями. Действительно, на основании выведенных выше формул каждая такая группа звеньев может быть заменена одним эквивалентным звеном, в результате чего схема примет вид, изображенный на рис. 1-15, а.

Дело не усложняется и в более общем случае, когда внешние воздействия подаются на суммирующие элементы не непосредственно, как в схеме на рис. 1-15, а, а через звенья с передаточными функциями  $W_4(p)$  и  $W_5(p)$ , как показано на рис. 1-15, в. Поскольку эти новые звенья не входят в замкнутый контур системы, а включены с ним последовательно, их наличие не изменяет передаточной функции разомкнутой системы  $W(p)$  и, следовательно, знаменателей передаточных функций замкнутой системы. Изменяются только числители этих функций, поскольку туда войдут передаточные функции новых звеньев. Для схемы на рис. 1-15, в, в частности,

$$W_{xf}(p) = W_5(p) W_2(p),$$

а

$$W_{xg}(p) = W_4(p) W_1(p) W_2(p).$$

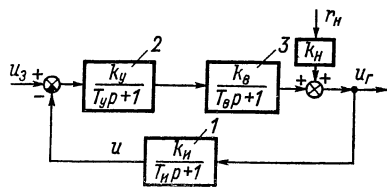


Рис. 1-16. Структурная схема системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора

В качестве примера напишем выражение для передаточной функции системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора, изображенной на рис. 1-1 (см. также рис. В-2, е). Структурная схема системы приведена на рис. 1-16. В схему входят три аperiodических звена: звено 1 — измеритель напряжения, звено 2 — усилитель и звено 3 — генератор, являющийся объектом регулирования. В качестве внешних воздействий на схеме указаны изменение задающего воздействия  $u_z$ , определяющего регулируемое значение напряжения, и изменение активного сопротивления нагрузки  $r_H$ . (Аналогично может быть учтено изменение скорости вращения генератора и другие возможные возмущения.)

Согласно формуле (1-98),

$$W_3(p) = \frac{u_r}{r_H} = \frac{k_H}{1 + W(p)},$$

где

$$W(p) = \frac{k_H k_Y k_B}{(T_{иp} + 1)(T_{yp} + 1)(T_{Bp} + 1)} = \frac{k}{(T_{иp} + 1)(T_{yp} + 1)(T_{Bp} + 1)},$$

а  $k = k_H k_Y k_B$ .

После освобождения от дроби в знаменателе

$$W_3(p) = \frac{u_r}{r_H} = \frac{k_H (T_{иp} + 1)(T_{yp} + 1)(T_{Bp} + 1)}{(T_{иp} + 1)(T_{yp} + 1)(T_{Bp} + 1) + k}. \quad (1-103)$$

Если раскрыть скобки в числителе и знаменателе, получим многочлен третьего порядка.

Передаточная функция для задающего воздействия

$$W_3(p) = \frac{u_r}{u_z} = \frac{\frac{k_Y k_B}{(T_{yp} + 1)(T_{Bp} + 1)}}{1 + W(p)} = \frac{k_Y k_B (T_{иp} + 1)}{(T_{иp} + 1)(T_{yp} + 1)(T_{Bp} + 1) + k}. \quad (1-104)$$

Таким образом, числитель второй передаточной функции имеет первый порядок.

**Многоконтурная одномерная САУ.** Рассмотрим теперь общий случай одномерной системы, когда она содержит произвольное число связанных друг с другом контуров. Здесь возможны два пути. Первый — это преобразование многоконтурной схемы в эквивалентную одноконтурную, а второй — применение готовых формул для передаточной функции замкнутой системы произвольной сложности.

Рассмотрим вначале первый путь. При проведении указанного преобразования структурной схемы системы руководствуются рядом правил. В их число входят прежде всего уже изложенные выше правила замены групп последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звена с обратной связью одним эквивалентным звеном. Кроме того, применяются правила переноса воздействий из одной точки системы в другую, приведенные

на рис. 1-17. Эти правила очевидны и вытекают из условия сохранения неизменными сигналов на выходе схемы при выполнении соответствующих преобразований.

Как показано на рис. 1-17, *а*, при перенесении суммирующего элемента, т. е. выхода параллельной ветви, вперед (по стрелке основного контура) в ветвь добавляется фиктивное звено с пере-

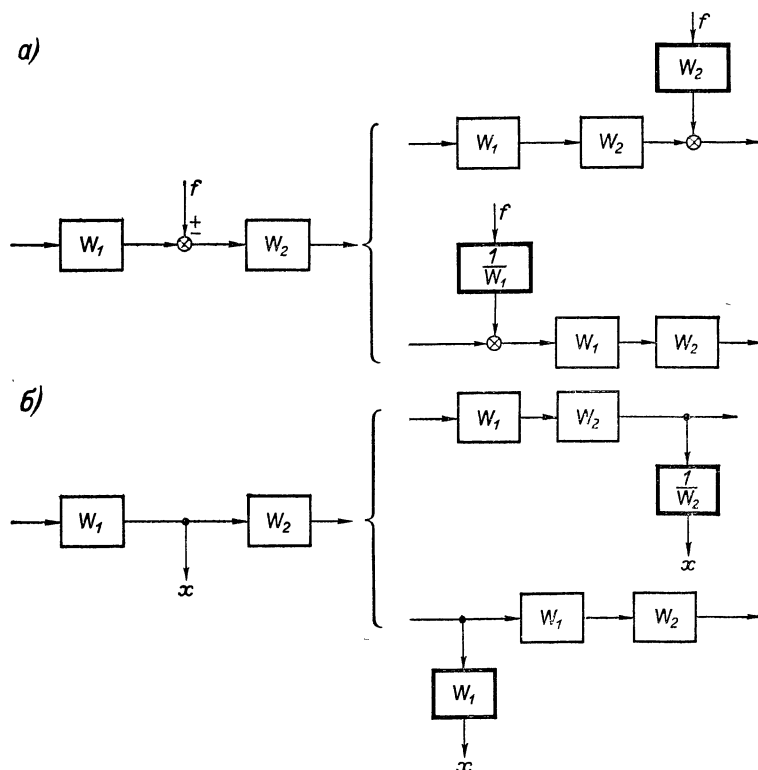


Рис. 1-17. Правила переноса входных и выходных сигналов в структурных схемах

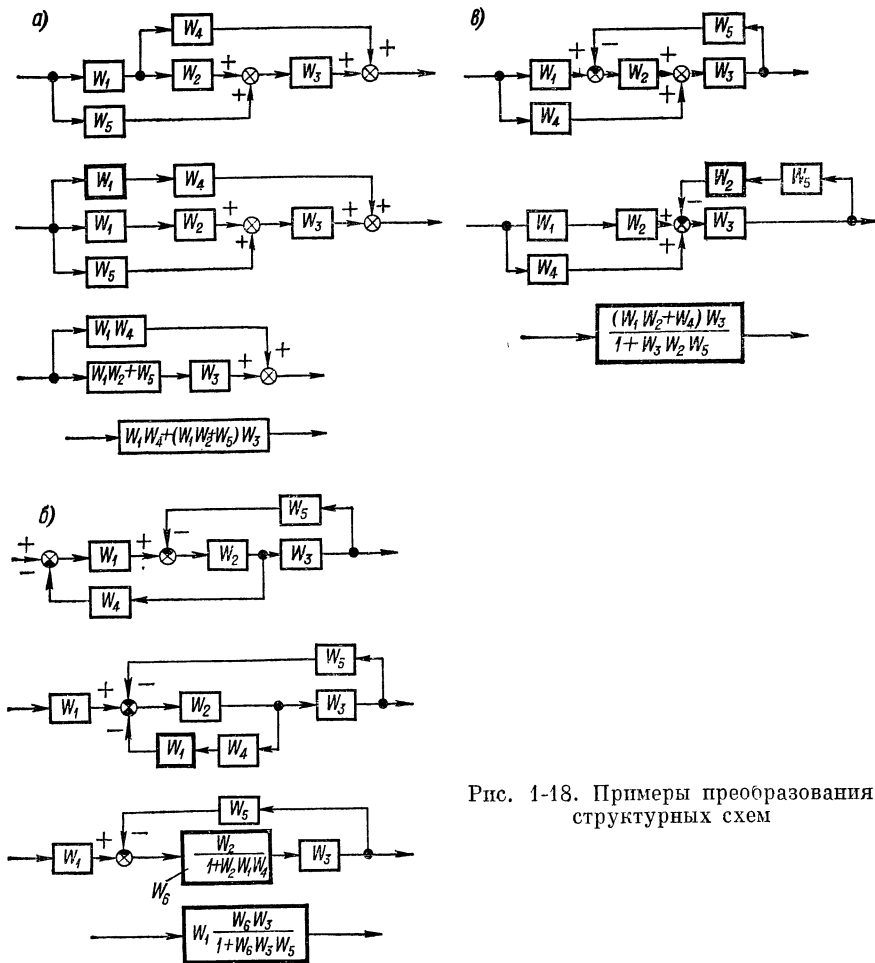
даточной функцией  $W_2$  обойденного при этом звена основного контура. При перенесении суммирующего элемента назад добавляется звено с обратной передаточной функцией  $1/W_1$ . Нетрудно видеть, что в обоих случаях сигнал на выходе рассматриваемой части основного контура сохраняется неизменным.

При перенесении точки разветвления, т. е. входа параллельной ветви (рис. 1-17, *б*), правило преобразования обратное: при переносе этой точки вперед в ветвь добавляется звено с обратной передаточной функцией  $1/W_2$  обойденного звена, а при переносе назад — звено с передаточной функцией  $W_1$ .

Основной задачей преобразования многоконтурной структурной схемы является приведение ее к схеме с **н е п е р е к р е щ и**



вающимися связями, когда отдельные контуры схемы не сцепляются друг с другом. После этого каждый из этих контуров может быть заменен одним эквивалентным звеном с передаточной функцией, определенной по формуле (1-97). В результате исходная схема приводится к одноконтурной.



На рис. 1-18 даны примеры преобразований структурных схем, устраняющих перекрещивающиеся обратные связи. На рис. 1-18, а показано преобразование участка схемы с прямыми перекрещивающимися связями, на рис. 1-18, б — с обратными перекрещивающимися связями, т. е. с перекрещивающимися замкнутыми контурами, а на рис. 1-18, в — преобразование схемы с перекрещиванием прямой связи с обратной.

Изображенное на рис. 1-18, *а* последовательное преобразование схемы начинается с переноса назад входа верхней параллельной ветви. В результате перекрещивание связей пропадает. Далее объединяются в одно звено звенья  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_5$ . После этого уже может быть написано выражение для общей передаточной функции. Тот же результат можно получить и путем переноса вперед входа нижней параллельной ветви с добавлением в нее нового звена с передаточной функцией  $1/W_1$ . Показанные на рис. 1-18, *б*, *в* преобразования также могут быть выполнены по-другому, путем переноса других воздействий.

Второй путь получения выражения для передаточной функции сложной многоконтурной системы заключается в применении следующей формулы Мейсона [36], которая дается без доказательства:

$$W_a(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \sum_i W_{\text{пр}i}(p) \Delta_i(p). \quad (1-105)$$

Здесь  $W_{\text{пр}i}(p)$  — передаточные функции отдельных прямых путей от входа к выходу схемы, т. е. от входного воздействия к выходной величине;

$$\Delta(p) = 1 - \sum W_i(p) + \sum W_i(p) W_j(p) - \sum W_i(p) W_j(p) W_k(p) + \dots,$$

где  $\sum W_i(p)$  — сумма передаточных функций всех контуров;  $\sum W_j(p) W_i(p)$  и  $\sum W_i(p) W_j(p) W_k(p)$  — суммы произведений двух, трех и т. д. передаточных функций контуров, не соприкасающихся друг с другом;  $\Delta_i(p)$  — это  $\Delta(p)$  после изъятия из схемы  $i$ -го прямого пути (при этом пропадают параллельные другие пути, начинающиеся или заканчивающиеся в общих с этим путем точках).

Все передаточные функции в (1-105) должны писаться со знаком плюс или минус в зависимости от знака сигналов на выходе соответствующих звеньев в структурной схеме.

Продemonстрируем применение формулы Мейсона на примере схемы, показанной на рис. 1-19, *а*. Здесь имеются три контура, обозначенных *I*, *II* и *III*, и шесть прямых путей. Передаточные функций контуров (обратите внимание на знаки):

$$W_I = -W_3W_{10}; \quad W_{II} = -W_9W_6; \quad W_{III} = -W_2W_3W_4W_9.$$

Передаточные функции прямых путей:

$$\begin{aligned} W_{\text{пр}1} &= W_1W_6W_5; & W_{\text{пр}2} &= -W_7W_{10}W_8; & W_{\text{пр}3} &= W_1W_2W_3W_4W_5; \\ W_{\text{пр}4} &= W_7W_4W_5; & W_{\text{пр}5} &= W_1W_2W_8; & W_{\text{пр}6} &= -W_7W_4W_9W_2W_8. \end{aligned}$$

Знаменатель искомой передаточной функции, согласно (1-103),

$$\Delta(p) = 1 - W_I - W_{II} - W_{III} + W_I W_{II} = 1 + W_3W_{10} + W_9W_6 + \\ + W_2W_3W_4W_9 + W_3W_{10}W_9W_6.$$

Соответственно

$$\Delta_1(p) = 1 - W_I = 1 + W_3W_{10}$$

(с изъятим первым путем не соприкасается только контур

$I$ , и поэтому только его передаточная функция остается в этом выражении);

$$\Delta_2(p) = 1 - W_{II} = 1 + W_9 W_6$$

(со вторым прямым путем не соприкасается только контур  $II$ );

$$\Delta_3(p) = \Delta_4(p) = \Delta_5(p) = \Delta_6(p) = 1$$

(с соответствующими прямыми путями соприкасаются все три контура схемы).

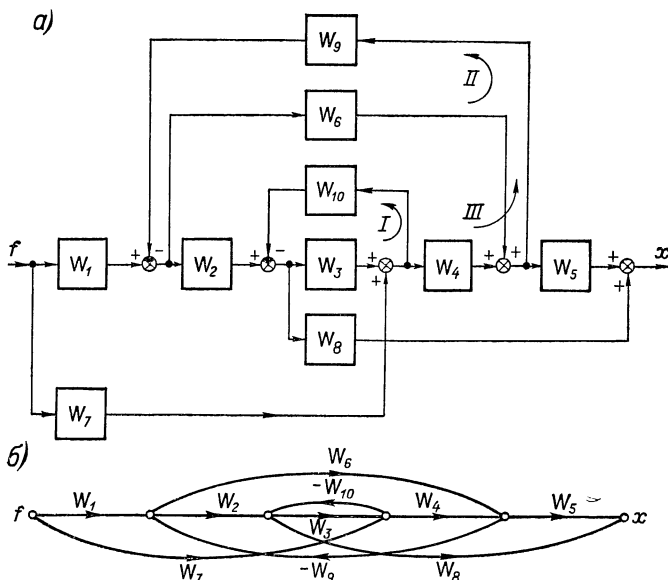


Рис. 1-19. Пример сложной многоконтурной схемы

Для получения искомого выражения для  $W_3$  остается подставить приведенные выше выражения в формулу (1-105).

Кроме структурной схемы, САУ можно также изображать графически в виде диаграммы прохождения сигналов [5,36]. На рис. 1-19, б показана диаграмма прохождения сигналов, соответствующая структурной схеме, представленной на рис. 1-19, а. Диаграмма состоит из узлов и соединяющих их направленных ветвей. Как видно из сравнения рис. 1-19, а и б, ветвь диаграммы соответствует звену структурной схемы, а узел — стрелке, изображающей переменную. У каждой ветви пишется соответствующая передаточная функция, а у каждого узла — переменная (сигнал). Изложенные выше правила преобразования структурных схем полностью применимы и к диаграммам прохождения сигналов.

Диаграммы прохождения сигналов удобны в сложных многоконтурных системах и особенно при применении формулы Мейсона, так как на них более просто прослеживаются взаимосвязи отдель-

ных контуров. Кроме того, их использование оказывается естественным, когда при выводе уравнений отдельных звеньев применяется теория графов, откуда диаграмма прохождения сигналов и заимствована. Поэтому ее называют также **г р а ф о м п р о х о ж д е н и я с и г н а л о в**.

По найденной передаточной функции одномерной замкнутой системы, в общем виде имеющей вид выражения (1-101), легко получить записанное в обычной форме дифференциальное уравнение системы. Для этого надо предварительно освободиться в числителе и знаменателе этого выражения от дробей  $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$

и  $W_{xf_i}(p) = \frac{R_{xf_i}(p)}{Q_{xf_i}(p)}$ . В результате получим уравнение

$$D(p)x = \sum_{i=1}^n M_i(p)f_i, \quad (1-106)$$

где  $D(p) = R(p) + Q(p)$ , а  $M_i(p)$  зависят от места приложения воздействий  $f_i$ .

**Многомерная САУ.** В общем случае многомерная система, содержащая произвольное число  $m$  выходных величин и  $l$  входных воздействий, описывается  $ml$  передаточными функциями:

$$x_k = \sum_{i=1}^l W_{zki}(p)f_i, \quad k=1, 2, \dots, m. \quad (1-107)$$

Здесь  $W_{zki} = \frac{W_{x_k f_i}(p)}{1 + W_k(p)}$  — передаточная функция замкнутой системы, определяющая зависимость  $k$ -й выходной величины  $x_k$  от  $i$ -го входного воздействия.

Систему уравнений (1-107) удобно представить векторным уравнением

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_3(p)\mathbf{f}, \quad (1-108)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец } (m\text{-мерный вектор});$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец } (l\text{-мерный вектор});$$

$$\mathbf{W}_3(p) = \begin{pmatrix} W_{311}(p) & W_{312}(p) & \dots & W_{31l}(p) \\ W_{321}(p) & W_{322}(p) & \dots & W_{32l}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{3m1}(p) & W_{3m2}(p) & \dots & W_{3ml}(p) \end{pmatrix}$$

— матрица типа  $m \times l$  передаточных функций замкнутой системы  $W_{zhi}(p) = \frac{x_h}{f_i}$  — матричная передаточная функция замкнутой системы.

Матричная передаточная функция замкнутой системы  $W_z(p)$  определяется по формулам, аналогичным формулам, выражающим передаточную функцию замкнутой одномерной системы по структурной схеме и передаточным функциям звеньев, с той только разницей, что вместо передаточных функций в данном случае фигурируют матрицы. В частности, аналогично формуле (1-98) для одномерной системы

$$W_z(p) = [E_m + W(p)]^{-1} W_{xf}(p), \quad (1-109)$$

где 
$$W(p) = \begin{vmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \dots & W_{1m}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \dots & W_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \dots & W_{mm}(p) \end{vmatrix}$$

— матрица типа  $m \times m$  передаточных функций  $W_{hi}(p)$  разомкнутой системы — матричная передаточная функция разомкнутой системы;

$$W_{xf}(p) = \begin{vmatrix} W_{x_1 f_1}(p) & W_{x_1 f_2}(p) & \dots & W_{x_1 f_l}(p) \\ W_{x_2 f_1}(p) & W_{x_2 f_2}(p) & \dots & W_{x_2 f_l}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{x_m f_1}(p) & W_{x_m f_2}(p) & \dots & W_{x_m f_l}(p) \end{vmatrix}$$

— матрица типа  $m \times l$  передаточных функций  $W_{x_h f_i}(p) = \frac{x_h}{f_i}$ , определяющая зависимость  $x$  от  $f$  для разомкнутой системы;  $E_m$  — единичная матрица типа  $m \times m$  (элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные — нулю);  $[E_m + W(p)]^{-1}$  — обратная матрица.

Выражение (1-109) выводится аналогично выражению (1-98) для одноконтурной системы, если оперировать вместо переменных и передаточных функций матрицами [3].

## Б. Построение частотных характеристик системы по частотным характеристикам звеньев

Связь между частотными характеристиками системы и составляющих ее звеньев определяется выражением для передаточной функции, если подставить в него  $p = j\omega$  (см. § 1-3, п. Б).

Соответственно амплитудно-фазовая частотная характеристика цепочки последовательно соединенных звеньев разомкнутой системы, согласно (1-95),

$$W(j\omega) = \prod_i W_i(j\omega), \quad (1-110)$$

где  $W_i(j\omega)$  — амплитудно-фазовая частотная характеристика  $i$ -го звена цепочки. Отсюда

$$Ae^{j\varphi} = \prod_i A_i e^{j\varphi_i},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \prod_i A_i(\omega); \\ \varphi(\omega) &= \sum_i \varphi_i(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (1-111)$$

где  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  — амплитудная и фазовая характеристики цепочки звеньев, а  $A_i(\omega)$  и  $\varphi_i(\omega)$  — эти характеристики  $i$ -го звена.

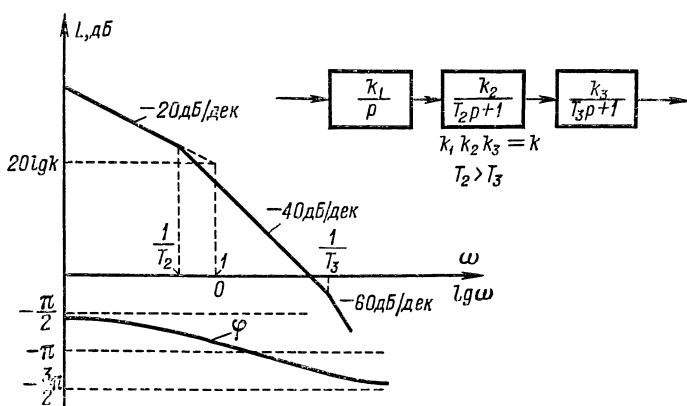


Рис. 1-20. Л. а. х. и л. ф. х. цепочки последовательно соединенных одного интегрирующего и двух апериодических звеньев первого порядка

Логарифмирование первого равенства (1-111) дает следующее выражение для л. а. х. цепочки звеньев:

$$L(\omega) = \sum_i L_i(\omega), \quad (1-112)$$

где  $L_i(\omega)$  — л. а. х. отдельного звена.

Как следует из выражений (1-111) и (1-112), наиболее просто строятся частотные характеристики цепочки звеньев в виде л. а. х. и л. ф. х.: они получаются путем суммирования ординат характеристик отдельных звеньев, как об этом уже упоминалось в § 1-3. На рис. 1-20 в качестве примера приведены л. а. х. и л. ф. х. цепочки последовательно соединенных одного интегрирующего и двух апериодических звеньев.

Л. а. х. цепочки звеньев строится сразу без построения л. а. х. отдельных звеньев. Вначале откладывается ордината общей л. а. х. при  $\omega = 1$ , равная  $20 \lg k$ , где  $k$  — коэффициент передачи

всей цепочки звеньев, равный произведению коэффициентов передачи звеньев. (См. выражения для л. а. х. отдельных звеньев, выведенные ранее в § 1-4.) Затем через найденную точку проводится асимптота с наклоном  $20(m - r)$  дБ/дек, где  $m$  — число дифференцирующих, а  $r$  — число интегрирующих звеньев. После этого на оси абсцисс откладываются значения сопрягающих частот, равных  $1/T_i$ , где  $T_i$  — постоянные времени звеньев. (В случае колебательного звена это  $T_{1i}$ .) Напомним, что на оси абсцисс удобно указывать наряду с  $\lg \omega$  непосредственно и значения  $\omega$ . Далее первая асимптота проводится от оси ординат до наименьшей сопрягающей частоты. В этой точке производится ее излом с изменением наклона в соответствии с типом звена, которому

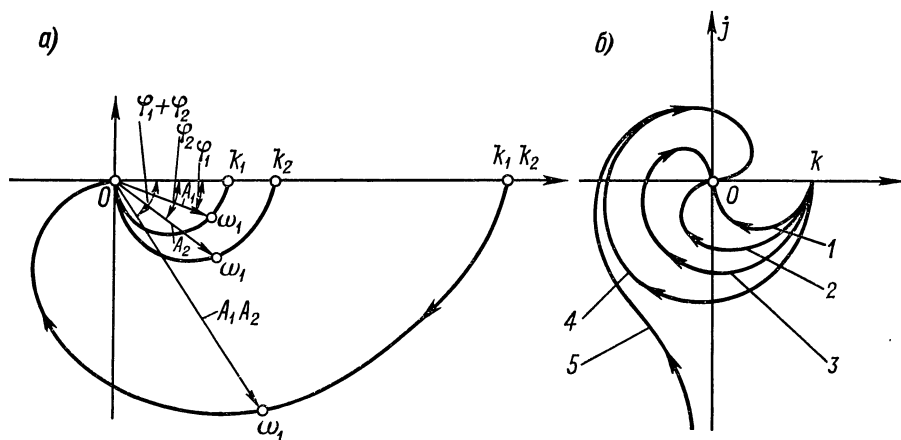


Рис. 1-21. А. ф. ч. х. цепочки последовательно соединенных звеньев: а — построение а. ф. ч. х. двух последовательно соединенных аperiodических звеньев; б — а. ф. ч. х. последовательно соединенных звеньев, где 1, 2, 3 и 4 — соответственно для одного, двух, трех и четырех аperiodических звеньев, а 5 — для трех аperiodических звеньев и одного идеального интегрирующего звена

принадлежит данная сопрягающая частота. (В случае, изображенном на рис. 1-20, при  $\omega = 1/T_2$  наклон увеличивается на 20 дБ/дек.) Таким же образом характеристика продолжается в сторону увеличения частоты, претерпевая последовательно изломы на каждой сопрягающей частоте. При необходимости построенная л. а. х. уточняется путем учета поправок для колебательных звеньев, как указано в предыдущем параграфе.

Ординаты л. ф. х. звеньев суммируются обычным способом. В результате предельное значение ф цепочки звеньев, получаемое при  $\omega \rightarrow \infty$ , будет равно  $-(n - m)\pi/2$ , где  $n$  — порядок дифференциального уравнения цепочки, а  $m$  — число идеальных дифференцирующих звеньев.

Построение амплитудно-фазовой характеристики цепочки звеньев непосредственно по амплитудно-фазовым характеристикам

отдельных звеньев осуществляется в соответствии с выражением (1-110) путем перемножения векторов  $W_i(j\omega)$  при одинаковых значениях частоты. (Модули  $A_i$  перемножаются, а фазы  $\varphi_i$  складываются). На рис. 1-21 приведены примеры амплитудно-фазовых характеристик последовательно соединенных звеньев.

Амплитудно-фазовая характеристика группы параллельно соединенных звеньев, согласно (1-96),

$$W(j\omega) = \sum_i W_i(j\omega). \quad (1-113)$$

Соответственно она строится путем геометрического суммирования векторов  $W_i(j\omega)$  при одинаковых частотах.

Амплитудно-фазовая характеристика звена с обратной связью (см. рис. 1-14, в), согласно (1-97),

$$W_3(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 \mp W(j\omega)}. \quad (1-114)$$

Оперируя векторами  $W_1(j\omega)$  и  $W(j\omega)$  при одинаковых значениях  $\omega$  в соответствии с этим выражением, можно графически построить амплитудно-фазовую характеристику звена с обратной связью  $W_3(j\omega)$  по амплитудно-фазовым характеристикам звена без обратной связи  $W_1(j\omega)$  и разомкнутого контура  $W(j\omega)$ . Последняя характеристика предварительно строится как характеристика цепочки последовательно соединенных звеньев, входящих в контур и описываемых функциями  $W_1(j\omega)$  и  $W_2(j\omega)$ .

Для графического построения амплитудной и фазовой характеристик соответственно используют получаемые из (1-114) следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_3(\omega) &= |W_3(j\omega)| = \frac{|W_1(j\omega)|}{|1 \mp W(j\omega)|}; \\ \varphi_3(\omega) &= \arg W_3(j\omega) = \arg W_1(j\omega) - \arg [1 \mp W(j\omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (1-115)$$

На основании выражений (1-115) могут быть получены соотношения, связывающие логарифмические частотные характеристики звена с обратной связью с теми же характеристиками входящих в схему звеньев  $W_1(j\omega)$  и  $W_2(j\omega)$ .

Практически в большинстве случаев задача построения логарифмических частотных характеристик звена с обратной связью существенно упрощается благодаря наличию номограмм, позволяющих по известным логарифмическим характеристикам разомкнутого контура  $W(j\omega)$  получить логарифмические характеристики замкнутого контура  $W_3(j\omega)$  для случая, когда

$$W_3(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}, \quad (1-116)$$

т. е. когда на рис. 1-14, в  $W_2(p) = 1$  и обратная связь отрицательна.



Для того чтобы использовать эти номограммы в более общем случае отрицательной обратной связи через звено с произвольной передаточной функцией, выражение

$$W_3(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W(j\omega)},$$

где

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega),$$

надо предварительно привести к следующему виду:

$$W_3(j\omega) = \left[ \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} \right] W_1(j\omega), \quad (1-117)$$

где

$$W_p(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)}.$$

По номограммам могут быть найдены логарифмические характеристики для выражения, стоящего в квадратных скобках. После этого искомые характеристики легко определяются по только что найденным характеристикам и характеристикам, соответствующим  $W_1(j\omega)$ , как в случае последовательно соединенных звеньев.

Кроме указанных номограмм, имеются еще номограммы, позволяющие находить любые виды частотных характеристик звена с отрицательной обратной связью, т. е. замкнутого контура, по любым частотным характеристикам разомкнутого контура [12, 33]. Некоторые из этих номограмм приведены в приложении 2.

Все эти номограммы также составлены для частного случая, соответствующего выражению (1-116). Однако с помощью формулы (1-117) их нетрудно применить и в более общем случае, охватываемом этой формулой.

Ч а с т о т н ы е х а р а к т е р и с т и к и з а м к н у т о й с и с т е м ы определяются согласно формуле (1-98):

$$W_3(j\omega) = \frac{W_{xf}(j\omega)}{1 + W(j\omega)}. \quad (1-118)$$

Порядок построения при этом совпадает с рассмотренным выше случаем для звена, охваченного обратной связью. Однако здесь в зависимости от сложности структурной схемы предварительный этап построения характеристик  $W(j\omega)$  и  $W_{xf}(j\omega)$  может оказаться существенно более сложным. В частности, если система многоконтурная, необходимо вначале преобразовать ее, устранив перекрещивающиеся связи, затем построить частотные характеристики отдельных контуров и после этого строить характеристику разомкнутой в основном контуре системы, как в случае цепочки последовательно соединенных звеньев.

## **В. О построении переходных характеристик замкнутой системы**

Переходную характеристику замкнутой системы можно построить по переходным характеристикам отдельных звеньев, о чем еще будет говориться в § 6-2. Однако для получения математического описания системы такой путь не используется, так как более удобным описанием системы в целом являются передаточные функции и частотные характеристики. Поэтому, когда отдельные звенья системы описаны экспериментально полученными переходными характеристиками, от последних следует переходить к передаточным функциям, как было показано ранее.

В связи с тем, однако, что переходные характеристики являются все-таки наиболее наглядным описанием динамических свойств системы, в ходе исследования систем построение этих характеристик всегда производится хотя бы в заключение исследования, но строятся они, как правило, не по переходным характеристикам звеньев, а, что более просто, по передаточной функции системы или по ее частотным характеристикам. Методика построения будет рассмотрена в шестой главе.

В заключение настоящей главы, посвященной математическому описанию звеньев и САУ в целом, отметим, что принятое выше описание их с помощью передаточных функций и частотных и переходных характеристик является достаточно полным только с точки зрения исследования процессов управления, т. е. при абстрагировании не только физической природы входных и выходных величин звеньев, но и их энергетических характеристик и учете только информационной стороны процессов. При таком подходе, например, транзисторный усилитель напряжения и мощный электромашинный усилитель могут иметь совершенно одинаковое математическое описание.

Однако при решении задачи реализации определенной структурной схемы в виде соответствующей аппаратуры такого одностороннего описания недостаточно. Здесь уже необходимо учитывать физическую природу сигналов и ряд других их свойств, в том числе и мощность. Без этого невозможно осуществить сочленение входящих в систему звеньев. Однако этот аспект выходит за рамки настоящего курса и относится к задаче расчета и проектирования аппаратуры.

### **Глава вторая**

## **СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

### **§ 2-1. ВВЕДЕНИЕ**

Рассмотрев математическое описание САУ, перейдем теперь к их исследованию. Начнем с более простого — с установившихся режимов.

Как всякая динамическая система, система автоматического управления может находиться в одном из двух режимов — стационарном (установившемся) и переходном. В настоящей и следующей главах будут рассмотрены стационарные режимы. Существуют два вида таких режимов САУ — статические и динамические.

**Статический режим (статика)** — это режим, при котором система находится в состоянии покоя вследствие того, что все внешние воздействия и параметры самой системы не меняются во времени.

**Динамический стационарный режим** возникает, когда приложенные к системе внешние воздействия изменяются по какому-либо установившемуся закону, в результате чего система приходит в режим установившегося вынужденного движения.

Стационарные динамические режимы, в свою очередь, бывают двух типов. **Детерминированный динамический стационарный режим** — это режим, при котором на систему действует детерминированное (регулярное) стационарное воздействие. Примером такого режима является установившийся гармонический режим, описываемый рассмотренными выше частотными характеристиками.

**Случайный стационарный режим** является установившимся в статистическом смысле и имеет место, когда приложенные к системе воздействия представляют собой случайные, но стационарные функции времени.

В этой главе будут рассмотрены **детерминированные стационарные режимы САУ** — статический и динамические.

## **§ 2-2. СТАТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ (СТАТИКА) СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

### **А. Статический режим статических систем**

Уравнение статики САУ получается из уравнения динамики

$$x = W_3(p) f,$$

где

$$W_3(p) = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)},$$

если подставить в него  $p = 0$ , что соответствует постоянству всех переменных, т. е. равенству нулю их производных.

В результате имеем следующее уравнение:

$$x_{ст} := W_3(0) f_{ст} = \frac{W_{xf}(0)}{1 + W(0)} f_{ст}. \quad (2-1)$$

Здесь  $x_{ст}$  — статическое приращение выходной величины САУ, вызванное приращением внешнего воздействия  $f_{ст}$ .

Вид  $W(0)$  и  $W_{xf}(0)$  в (2-1) зависит от того, содержатся ли в системе интегрирующие звенья или нет. Рассмотрим вначале

САУ, которая после приведения к одноконтурной схеме содержит только статические звенья. Такие системы называются статическими.

Сделанное уточнение по поводу предварительного преобразования системы в одноконтурную связано с тем, что статическая система может содержать интегрирующие звенья, охваченные жесткой обратной связью, т. е. обратной связью через статическое звено. Дело в том, что, как уже было показано в предыдущей главе, интегрирующее звено, охваченное жесткой обратной связью, эквивалентно статическому звену, т. е. заменяется им при приведении схемы САУ к одноконтурной.

В случае статической системы в выражении (2-1)

$$W(0) = k \quad \text{и} \quad W_{xf}(0) = k_{xf},$$

так как знаменатели передаточных функций всех звеньев, входящих сомножителями в выражения  $W(p)$  и  $W_{xf}(p)$ , при  $p = 0$  обращаются в единицу.

В результате выражение (2-1) принимает вид:

$$x_{ст} = \frac{k_{xf}}{1+k} f_{ст}. \quad (2-2)$$

Здесь  $k = W(0) = \prod_{i=1}^n k_i$  — коэффициент передачи разомкнутой системы, предварительно приведенной к одноконтурному виду; он равен произведению коэффициентов передачи всех ее звеньев;  $k_{xf} = W_{xf}(0)$  — коэффициент передачи участка системы от места приложения воздействия  $f$  до места нахождения выходной величины  $x$ . Величина  $k_{xf}$ , следовательно, определяет статическую зависимость между  $x$  и  $f$  при разомкнутом контуре системы, т. е. при отсутствии управления.

Выражение (2-2) определяет статическое отклонение выходной величины САУ, вызванное установившимся приращением внешнего воздействия  $f$  в произвольной точке системы. Из этого выражения следует, что замыкание системы автоматического управления приводит к уменьшению статической зависимости  $x$  от  $f$  в  $(1+k)$  раз. Таким образом, для уменьшения этой зависимости надо увеличивать коэффициент передачи системы  $k$ .

Из выражения (2-2) можно определить величину статического отклонения  $x$ , приходящуюся на единицу воздействия  $f$ :

$$\delta_{ст} = \frac{x_{ст}}{f_{ст}} = W_s(0) = \frac{k_{xf}}{1+k}. \quad (2-3)$$

Эта величина является мерой статической точности системы и называется статизмом. Кроме принятого в (2-3) обозначения  $\delta_{ст}$ , статизм иногда обозначают через  $S$ .

В частном случае следящей системы, согласно (1-100), статическая ошибка слежения за  $g$

$$\varepsilon_{ст} = \frac{1}{1+W(0)} g_{ст} = \frac{1}{1+k} g_{ст}. \quad (2-4)$$

В общем случае нескольких внешних воздействий в соответствии с (1-101) суммарное статическое отклонение

$$x_{ст} = \frac{\sum_i k_{xf_i} f_{ист}}{1+k} = \sum_i \delta_{сти} f_{ист}, \quad (2-5)$$

где  $\delta_{сти} = \frac{k_{xf_i}}{1+k}$  — статизм системы по возмущению  $f_i$ .

В качестве примера рассмотрим статический режим уже знакомой нам системы автоматического регулирования напряжения генератора (см. рис. 1-16). Передаточная функция этой системы по возмущению в виде изменения нагрузки  $r_H$  имеет вид (1-103):

$$W_3(p) = \frac{u_r}{r_H} = \frac{k_H (T_{иP} + 1) (T_{yP} + 1) (T_{вP} + 1)}{(T_{иP} + 1) (T_{yP} + 1) (T_{вP} + 1) + k},$$

где  $k = k_H k_y k_b$ . Отсюда статизм системы регулирования напряжения генератора

$$\delta_{ст} = W_3(0) = \frac{k_H}{1+k}.$$

Пусть, например, при отсутствии регулирования напряжения естественная зависимость напряжения от нагрузки в статике определяется значением  $k_H = 0,2$ . Это значит, что при изменении сопротивления нагрузки на 100% изменение напряжения генератора  $u_r = k_H r_H$  будет равно 20%.

Если коэффициент передачи разомкнутой системы  $k = 100$ , то при этом  $\delta_{ст} = \frac{0,2}{1+100} \approx 0,002$ . Это значит, что при наличии замкнутой системы автоматического регулирования изменение нагрузки на 100% приводит к изменению напряжения генератора  $u_r = \delta_{ст} f$  всего на  $\sim 0,2\%$ .

Таким образом, применение автоматического регулирования привело к повышению статической точности поддержания напряжения в  $(1+k)$  раз, т. е. в 101 раз.

Для того чтобы еще больше повысить точность, необходимо увеличить коэффициент передачи системы  $k$  путем, например, соответствующего увеличения коэффициента усиления  $k_y$  усилителя, входящего в состав регулятора. Повышение статической точности системы при увеличении коэффициента передачи регулятора физически связано с тем, что при этом то же изменение выходной величины регулятора, т. е. тока возбуждения генератора, происходит при меньшем отклонении выходной величины объекта, т. е. напряжения генератора.

## Б. Способы устранения статического отклонения

В ряду САУ для их правильной работы необходимо иметь вполне определенное значение статизма. При этом как увеличение его, так и уменьшение одинаково недопустимы. Это относится, например, к системам регулирования напряжения параллельно работающих на общую нагрузку электрических генераторов и системам регулирования ряда других параллельно работающих объектов. Однако в большинстве случаев наличие статической зависимости выходной величины от внешних воздействий является нежелательным, создавая погрешность управления. Поэтому статизм надо уменьшать.

Из ранее изложенного следует, что статическое отклонение уменьшается при увеличении коэффициента передачи системы. Однако, как видно из выражения (2-2), для полного устранения статического отклонения при этом требуется увеличивать коэффициент передачи до бесконечности.

Вместе с тем имеются другие пути полного устранения статического отклонения в системе при конечном значении коэффициента передачи. Для того чтобы выяснить эти пути, обратимся вновь к общему выражению для  $x_{ст}$ , получаемому через передаточную функцию путем подстановки в нее  $p = 0$ :

$$x_{ст} = W_z(p) \Big|_{p=0} f_{ст} = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} \Big|_{p=0} f_{ст}. \quad (2-6)$$

При наличии  $f_{ст}$  статическое отклонение  $x_{ст}$  будет отсутствовать, если при  $p = 0$  выражение  $W_z(p)$  обратится в нуль. Согласно выражению (2-6), принципиально это возможно в двух случаях: если  $W(0) = \infty$  или если  $W_{xf}(0) = 0$ . Оба пути практически могут быть реализованы. При этом, как будет показано ниже, первый путь реализуется введением в систему интегрирующего звена, т. е. переходом к так называемой астатической системе управления, а второй — введением компенсирующего воздействия по возмущению.

**Применение астатической системы управления.** Введем в рассматриваемую статическую САУ интегрирующее звено, причем так, чтобы оно находилось вне участка системы от места приложения  $f$  до  $x$ , т. е. чтобы его передаточная функция не входила в  $W_{xf}(p)$ . В этом случае, как следует из (2-6), статическое отклонение  $x_{ст}$  будет равно нулю, так как при конечном значении  $W_{xf}(0) = k_{xf}$  имеем  $W(0) = \infty$  из-за наличия в знаменателе  $W(p)$  множителя  $p$ , обязанного своим появлением передаточной функции  $k/p$  интегрирующего звена.

Наличие интегрирующего звена между точками нахождения  $f$  и  $x$ , т. е. в составе передаточной функции  $W_{xf}(p)$ , не устра-

няет  $x_{ст}$ . Чтобы показать это, приведем выражение (2-6) к следующему виду:

$$x_{ст} = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} \Big|_{p=0} f_{ст} = \frac{\frac{1}{p} W'_{xf}(p)}{1 + \frac{1}{p} W'(p)} \Big|_{p=0} f_{ст}.$$

Здесь  $W'(p)$  и  $W'_{xf}(p)$  — передаточные функции  $W(p)$  и  $W_{xf}(p)$  после выделения из их знаменателей множителя  $p$ , обязанного своим появлением интегрирующему звену, т. е.  $W(p) = \frac{1}{p} W'(p)$  и  $W_{xf}(p) = \frac{1}{p} W'_{xf}(p)$ , причем  $W'(0) = k$ , а  $W'_{xf}(0) = k_{xf}$ . Отсюда

$$x_{ст} = \frac{W'_{xf}(p)}{p + W'(p)} \Big|_{p=0} f_{ст} = \frac{k_{xf}}{k} f_{ст}, \quad (2-7)$$

т. е. в данном случае существует статизм

$$\delta_{ст} = \frac{x_{ст}}{f_{ст}} = \frac{k_{xf}}{k}. \quad (2-8)$$

Обратим внимание на то, что выражение (2-8) отличается от выражения (2-3), выведенного для статической системы, отсутствием единицы в знаменателе.

Таким образом, условием устранения статического отклонения  $x_{ст}$  от возмущения  $f_{ст}$  является наличие интегрирующего звена в системе вне участка, описываемого передаточной функцией  $W_{xf}(p)$ .

Система автоматического управления, структурная схема которой после приведения ее к одноконтурному виду содержит интегрирующее звено, называется астатической системой. Астатической система может быть благодаря наличию астатического управляющего устройства или астатического объекта. В первом случае интегрирующее звено имеется в составе управляющего устройства, а во втором — в составе объекта.

Если астатическим является управляющее устройство, все возмущения, приложенные к объекту управления, не будут создавать статического отклонения его выходной величины  $x$ . Если астатическим является объект управления, все возмущения, приложенные ко входу объекта, будут вызывать статическое отклонение  $x_{ст}$ , определяемое выражением (2-8). Однако в характерном, например, для следящих систем случае, когда интерес представляет статическая ошибка  $\varepsilon_{ст}$ , вызванная задающим воздействием, она устраняется и за счет астатизма объекта. Действительно, при этом

$$\varepsilon_{ст} = \frac{1}{1 + W(0)} g = 0,$$

поскольку передаточная функция интегрирующего звена не входит в числитель последнего выражения.

Вывод о том, что для устранения  $x_{ст}$  надо в системе иметь интегрирующее звено, передаточная функция которого не входит

в  $W_{xf}(p)$ , был сделан выше в предположении, что  $W_{xf}(p)$  не содержит передаточных функций интегрирующих звеньев, т. е.  $W_{xf}(0)$  конечно и равно  $k_{xf}$ . Покажем, что этот вывод справедлив при любом  $W_{xf}(p)$ , в том числе и при наличии в  $W_{xf}(p)$  передаточных функций интегрирующих звеньев. Итак, пусть в выражении

$$x_{ст} = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} \Big|_{p=0} f_{ст}$$

в  $W_{xf}(p)$  входит  $l$  интегрирующих звеньев, а в  $W(p)$  входит  $r$  таких звеньев. Тогда это выражение можно представить в виде

$$x_{ст} = \frac{p^{-l} W'_{xf}(p)}{1 + p^{-r} W'(p)} \Big|_{p=0} f_{ст} = \frac{p^{r-l} W'_{xf}(p)}{p^r + W'(p)} \Big|_{p=0} f_{ст}.$$

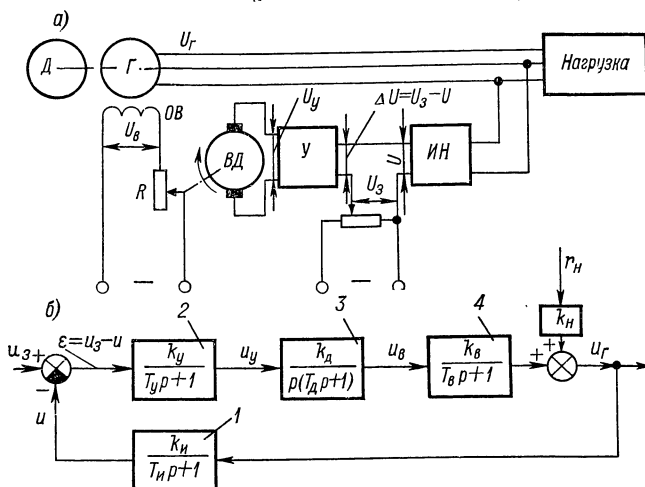


Рис. 2-1. Астатическая система регулирования напряжения синхронного генератора

Здесь, как и прежде, сделана подстановка:

$$W(p) = p^{-r} W'(p); \quad W_{xf}(p) = p^{-l} W'_{xf}(p),$$

причем  $W'(0) = k$ , а  $W'_{xf}(0) = k_{xf}$ .

Из этого выражения следует, что  $x_{ст} = 0$ , если  $r > l$ , т. е. если в системе имеется хотя бы одно интегрирующее звено, передаточная функция которого не входит в  $W_{xf}(p)$ .

В качестве примера на рис. 2-1, а показана астатическая система регулирования напряжения генератора, которая отличается от статической системы, изображенной на рис. В-2, в, наличием интегрирующего звена в регуляторе. Роль интегрирующего звена играет электрический двигатель постоянного тока ВД. Изменение тока возбуждения генератора производится в этой системе путем изменения сопротивления реостата  $R$ . Это осуществляется перемещением его движка вспомогательным двигателем



*ВД*. Этот двигатель в данной схеме служит интегрирующим звеном, поскольку угол поворота его вала является интегралом от скорости вращения, которая, в свою очередь, пропорциональна подаваемому на якорь двигателя напряжению. При всяком изменении напряжения генератора  $U_r$  возникает сигнал  $\Delta U = U_a - U$ , который, будучи усилен усилителем  $У$ , приводит во вращение двигатель *ВД*. Это вызывает изменение тока возбуждения генератора, а следовательно, и его напряжения  $U_r$ . Двигатель остановится, и система вернется в состояние покоя только после того, как исчезнет сигнал  $\Delta U$ , т. е. когда напряжение генератора вернется к своему первоначальному значению.

На рис. 2-1, б изображена структурная схема рассмотренной системы регулирования, где двигатель *ВД* представлен как реальное интегрирующее звено с передаточной функцией

$$\frac{k_d}{p(T_d p + 1)}.$$

В соответствии с изложенным выше в данной системе статическое отклонение  $u_r$  должно отсутствовать не только при изменении нагрузки  $I_n$ , но и при изменении других возмущений, приложенных к системе на участке от точки  $u_r$  до выхода интегрирующего звена, т. е. до точки  $u_b$ , если идти против направления передачи сигнала. Таким образом, статическое отклонение регулируемой величины  $u_r$  будет отсутствовать при изменении напряжения питания цепи возбуждения, параметров этой цепи, а также скорости вращения генератора (рис. 2-1, а). Вместе с тем возмущения, действующие на все элементы регулятора — усилитель, измеритель напряжения и сам двигатель *ВД*, — будут вызывать статическое отклонение  $u_r$ , поскольку интегрирующее звено находится между этими точками системы и регулируемой величиной  $u_r$ .

Для устранения статического отклонения  $x_{ст}$  от возможно большего числа возмущений, действующих на систему, желательно, вводя интегрирующее звено в управляющее устройство, помещать его возможно ближе ко входу последнего, т. е. дальше от  $x$ . В частности, например, если в рассмотренную систему регулирования напряжения (см. рис. В-2, в) включить вместо двигателя *ВД* в качестве интегрирующего звена электронный интегратор на входе усилителя  $У$ , будет исключено статическое отклонение регулируемого напряжения, вызванное возмущениями, действующими на этот усилитель и проявляющимися в виде дрейфа его нуля.

Заканчивая рассмотрение первого способа ликвидации статического отклонения  $x_{ст}$  путем применения астатического управляющего устройства, укажем, что практическое применение этого способа всегда связано с определенным усложнением системы. (Это видно и из сравнения статической системы регулирования напряжения, изображенной на рис. В-2, в, с астатической, показанной на рис. 2-1, а). Поэтому переход к астатической системе

целесообразен только в случае, когда для получения заданной статической точности требуется достаточно большой коэффициент передачи статической системы, что тоже затруднительно. Подробнее об этом будет сказано в § 7-5.

**Компенсация возмущений.** Рассмотрим теперь второй путь устранения статического отклонения выходной величины  $x_{ст}$  системы, который заключается в обращении в нуль числителя выражения (2-6) для  $x_{ст}$ , т. е. в получении

$$W_{xf}(0) = 0.$$

Такой результат может быть получен применением управления по возмущению. Суть способа заключается в том, что на основе

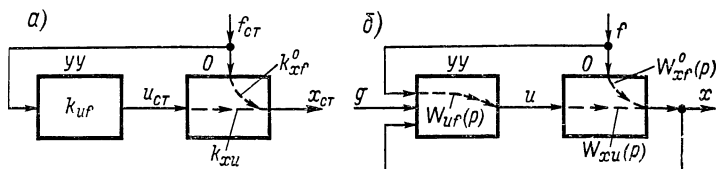


Рис. 2-2. Система компенсации статического отклонения на выходе объекта

измерения внешнего возмущения управляющее устройство осуществляет такое воздействие на объект управления, чтобы компенсировать естественное влияние данного возмущения на выходную величину объекта.

Схема компенсации показана на рис. 2-2, а. С учетом приведенных на этом рисунке обозначений коэффициентов передачи, соответствующих статическому режиму системы, условие компенсации влияния  $f_{ст}$  на  $x_{ст}$  имеет вид:

$$x_{ст} = (k_{xf}^0 + k_{uf}k_{xu}) f_{ст} = 0.$$

Отсюда коэффициент передачи управляющего устройства по возмущению  $f$  должен быть равен

$$k_{uf} = -\frac{k_{xf}^0}{k_{xu}}. \quad (2-9)$$

Выражение (2-9) определяет коэффициент передачи управляющего устройства УУ в зависимости от параметров объекта управления О, при котором  $x_{ст}$  не зависит от  $f_{ст}$ .

На рис. 2-2, б изображена комбинарованная система автоматического управления. В ней замкнутая САУ, которую мы рассматривали ранее, дополнена разомкнутой системой компенсации влияния возмущения  $f_{ст}$  на  $x_{ст}$ . В этой системе

$$x_{ст} = \frac{W_{xf}(0)}{1 + W(0)} f_{ст},$$

где  $W_{xf}(0) = W_{xf}^0(0) + W_{uf}(0) W_{xu}(0) = k_{xf}^0 + k_{uf}k_{xu}$ .

При выполнении условия (2-9)  $W_{xf}(0) = 0$  и с точки зрения статики система освобождается от влияния возмущения  $f$ .

На рис. В-2, б и г приведен пример системы компенсации и комбинированной системы регулирования напряжения синхронного генератора.

Разумеется, компенсация с равным успехом может быть применена к возмущениям, действующим не только на объект, но и на любое звено управляющего устройства. Компенсация не делает систему астатической, так как другие, некомпенсированные возмущения по-прежнему создают статическое отклонение  $x_{ст}$ . Однако она позволяет резко снизить суммарное статическое отклонение  $x_{ст}$ , вызванное всеми возмущениями и определяемое формулой (2-5)

$$x_{ст} = \frac{\sum_i k_{xf_i} f_{ист}}{1+k},$$

благодаря исключению из числителя этого выражения одного из слагаемых. При этом, так как компенсацию осуществляют, естественно, по наиболее сильно влияющему на  $x_{ст}$  основному возмущению, введение ее часто позволяет при неизменном коэффициенте передачи системы  $k$  снизить величину  $x_{ст}$  на целый порядок или наоборот — при неизменном значении  $x_{ст}$  снизить коэффициент передачи системы  $k$  и тем самым упростить ее. (В частности, последнее может позволить ограничиться статическим управлением вместо перехода к астатическому.)

### § 2-3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как было сказано в § 2-1, стационарные (установившиеся) режимы в системах автоматического управления возникают в результате приложения к ним внешних воздействий, изменяющихся во времени по определенному установившемуся закону. Типовыми воздействиями такого вида являются гармоническое воздействие и воздействия, изменяющиеся с постоянной производной — скоростью или ускорением. Рассмотрим последовательно соответствующие стационарные режимы.

#### А. Стационарный режим САУ при гармоническом воздействии

В этом режиме выходная величина системы  $x$  приходит в вынужденное колебание с частотой, равной частоте внешнего воздействия. Амплитуда и фаза колебаний  $x$  определяются известными нам частотными характеристиками замкнутой системы, т. е. в стационарном режиме, вызванном воздействием

$$f = f_{\max} \sin \omega t,$$

выходная величина системы

$$x = x_{\text{макс}} \sin(\omega t + \varphi_3),$$

где  $x_{\text{макс}} = |W_3(j\omega)| f_{\text{макс}}$ ;  $\varphi_3 = \arg W_3(j\omega)$ .

Таким образом, гармонический стационарный режим САУ определяется ее частотными характеристиками, которые были рассмотрены в первой главе.

### **Б. Стационарный динамический режим САУ при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной**

В этом случае практически имеются в виду воздействия, изменяющиеся с постоянной скоростью  $v$ , когда  $f = vt$ , и с постоянным ускорением  $a$ , когда  $f = at^2/2$ .

Для общности рассмотрения будем считать, что воздействие изменяется с постоянной  $m$ -й производной  $f_{\text{уст}}^m = p^m f$ . Выходная величина системы

$$x = W_3(p) f = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} f = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} \cdot \frac{f_{\text{уст}}^{(m)}}{p^m}.$$

Установившееся значение  $x_{\text{уст}}$  найдем по-прежнему подстановкой в это выражение для  $x$  значения  $p = 0$ , т. е.

$$x_{\text{уст}} = \left. \frac{W_{xf}(p)}{[1 + W(p)] p^m} \right|_{p=0} f_{\text{уст}}^{(m)}. \quad (2-10)$$

Из выражения (2-10) видно, что в статической системе, у которой  $W(0) = k$ , а  $W_{xf}(0) = k_{xf}$ ,  $x_{\text{уст}} = \infty$  при любом  $k \neq 0$  из-за наличия множителя  $p^m$  в знаменателе, т. е. в статической системе при непрерывно возрастающем воздействии выходная величина  $x$  тоже непрерывно возрастает. Этот результат очевиден и из ранее полученного соотношения (2-2), согласно которому в статической системе установившееся отклонение  $x$  пропорционально воздействию.

Рассмотрим средства, с помощью которых можно ограничить и даже ликвидировать установившееся отклонение  $x_{\text{уст}}$  при непрерывно изменяющемся воздействии. Как и в случае рассмотрения условий устранения установившегося отклонения в статическом режиме, здесь принципиально возможны два пути. Первый путь связан с выбором определенной передаточной функции разомкнутой системы  $W(p)$ , стоящей в знаменателе выражения (2-10) для  $x_{\text{уст}}$ , а второй — с выбором  $W_{xf}(p)$  в числителе этого выражения. Как будет показано ниже, первый путь по-прежнему сводится к введению в систему интегрирующих звеньев, а второй — к компенсации влияния возмущений. Рассмотрим последовательно эти пути.

**Применение астатической системы управления.** Пусть в общем случае в передаточную функцию разомкнутой системы  $W(p)$  входят передаточные функции  $r$  интегрирующих звеньев, а в пере-

даточную функцию  $W_{xf}(p)$  части этой системы —  $l$  таких звеньев. Тогда выражение (2-10) для установившегося отклонения  $x$  можно переписать так:

$$x_{уст} = \frac{p^{-l} W'_{xf}(p)}{[1 + p^{-r} W'(p)] p^m} \Big|_{p=0} f_{уст}^{(m)} = \frac{p^{(r-l)-m} W'_{xf}(p)}{p^r + W'(p)} \Big|_{p=0} f_{уст}^{(m)}.$$

Здесь, как и раньше, использована подстановка:  $W(p) = p^{-r} W'(p)$  и  $W_{xf}(p) = p^{-l} W'_{xf}(p)$ , причем  $W'(0) = k$ , а  $W'_{xf}(0) = k_{xf}$ .

Из приведенного выражения для  $x_{уст}$  следует, что при  $(r-l) > m$  значение  $x_{уст} = 0$ , при  $(r-l) < m$  величина  $x$  неограниченно возрастает со временем, а если  $(r-l) = m$ , установившееся отклонение  $x$  будет иметь конечное значение

$$x_{уст} = \frac{k_{xf}}{k} f_{уст}^{(m)}. \quad (2-11)$$

Для оценки точности системы в последнем случае вводя понятие **добротности**, которая равна  $k/k_{xf}$ .

Если значение  $x_{уст}$  конечно при изменении воздействия с постоянной скоростью, т. е. когда  $f_{уст}^{(m)} = pf = v$ , соответствующая добротность называется **добротностью по скорости** и обозначается

$$k_v = \frac{v}{x_{уст}} = \frac{k}{k_{xf}}, \quad 1/\text{с}. \quad (2-12)$$

Добротность по скорости имеет размерность  $1/\text{с}$  и численно равна скорости изменения воздействия, дающей единичное значение  $x_{уст}$ .

Если  $x_{уст}$  конечно при изменении воздействия с постоянным ускорением, т. е. когда  $f_{уст}^{(m)} = p^2 f = a$ , соответствующая добротность называется **добротностью по ускорению**:

$$k_a = \frac{a}{x_{уст}} = \frac{k}{k_{xf}}, \quad 1/\text{с}^2. \quad (2-13)$$

Эта добротность измеряется в  $1/\text{с}^2$  и равна постоянному ускорению, соответствующему  $x_{уст} = 1$ .

Как видно из приведенных формул, добротность системы пропорциональна коэффициенту передачи  $k$ .

Рассматриваемый установившийся динамический режим характерен для изменения задающего воздействия в следящих системах и системах программного управления. В этом случае интерес представляет величина установившейся ошибки  $\varepsilon_{уст}$ . В соответствии с выражением (1-100) для передаточной функции ошибки

$$\varepsilon_{уст} = \frac{1}{k} f_{уст}^{(m)}, \quad (2-14)$$

т. е. для ошибки добротность равна коэффициенту передачи разомкнутой системы  $k$ .

Система, имеющая конечную добротность по скорости, является астатической, т. е. ее статизм равен нулю. В свою очередь,

система, имеющая конечную добротность по ускорению, не имеет установившегося отклонения при изменении воздействия с постоянной скоростью, т. е. у нее  $k_v = \infty$ .

Количество интегрирующих звеньев в системе называется порядком астатизма системы. Если ввести еще понятие порядка воздействия, под которым надо понимать порядок фиксированной производной воздействия, то полученный результат можно кратко сформулировать так:

*Если в  $W_{xf}(p)$  не имеется передаточных функций интегрирующих звеньев, установившееся отклонение  $x_{уст} = 0$ , когда порядок астатизма системы выше порядка воздействия, и  $x_{уст}$  конечно и равно (2-11) в случае равенства этих порядков. Если  $W_{xf}(p)$  содержит передаточные функции  $l$  интегрирующих звеньев, для получения тех же результатов надо порядок астатизма увеличить на  $l$ .*

Таким образом, введение в систему определенного количества интегрирующих звеньев позволяет ограничить или совсем ликвидировать установившееся отклонение  $x$  при наличии воздействия, непрерывно изменяющегося с постоянной производной.

**Компенсация влияния возмущений, изменяющихся с постоянной производной.** Выше при рассмотрении статического режима работы САУ был изложен способ устранения статического отклонения выходной величины объекта путем применения управляющего воздействия по возмущению с целью компенсации естественного влияния этого возмущения на выход объекта.

Такая же компенсация может быть осуществлена и в стационарном динамическом режиме в отношении возмущений, изменяющихся с постоянной производной. Однако в отличие от компенсации в статическом режиме здесь управляющее устройство должно действовать на объект в функции не только самого возмущения, но и его производных.

В результате получается комбинированная система управления, показанная на рис. 2-2, б. У этой системы

$$x_{уст} = \frac{[W_{xf}^0(p) + W_{uf}(p)W_{xu}(p)]p^{-m}}{1 + W(p)} \Big|_{p=0} f_{уст}^{(m)}. \quad (2-15)$$

Определим вид передаточной функции управляющего устройства  $W_{uf}(p)$  по возмущению, при котором  $x_{уст}$  обращается в нуль. Для этого рассмотрим числитель выражения (2-15), приведя его к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} [W_{xf}^0(p) + W_{uf}(p)W_{xu}(p)]p^{-m} = \\ = \frac{1}{Q_{xf}^0(p)Q_{uf}(p)Q_{xu}(p)} [R_{xf}^0(p)Q_{uf}(p)Q_{xu}(p) + R_{uf}(p)R_{xu}(p)Q_{xf}^0(p)]p^{-m}. \end{aligned}$$

Здесь через  $R(p)$  и  $Q(p)$  с соответствующими индексами обозначены числитель и знаменатель соответствующих передаточных функций.

Если рассматриваемая система является статической, все полиномы  $Q(p)$  при  $p = 0$  обращаются в единицу. Чтобы все полученное выражение при  $p = 0$  обратилось в нуль, в выражении, стоящем в квадратных скобках, все слагаемые должны иметь  $p$  в степени выше порядка возмущения  $m$ . Это может быть обеспечено, если полином  $R_{uf}(p)$  имеет вид:

$$R_{uf}(p) = k_{uf_0} + k_{uf_1}p + k_{uf_2}p^2 + \dots + k_{uf_m}p^m. \quad (2-16)$$

Действительно, полином  $R_{xf}^0(p) Q_{uf}(p) Q_{xu}(p)$  и полином  $R_{xu}(p) Q_{xf}^0(p)$ , являющийся множителем у  $R_{uf}(p)$ , включают в себя члены с  $p$  в степени от 0 до величины, определяемой порядком этих полиномов. Если коэффициенты полинома  $R_{uf}(p)$  сделать отрицательными, то несложно найти выражения для них через коэффициенты остальных полиномов, стоящих в квадратных скобках, по условию, чтобы все слагаемые полиномов  $R_{xf}^0(p) Q_{uf}(p) Q_{xu}(p)$  и  $R_{uf}(p) R_{xu}(p) Q_{xf}^0(p)$ , имеющие степень  $p$  от 0 до  $m$ , взаимно уничтожились.

Полином  $R_{uf}(p)$  вида (2-16) означает, что управляющее устройство воздействует на объект в функции возмущения  $f$  и его  $m$  последовательных производных.

Таким образом, в статической системе при наличии возмущения, изменяющегося с постоянной скоростью, можно обеспечить  $x_{уст} = 0$  применением компенсирующих воздействий по этому возмущению и его первой производной. Для получения того же эффекта при возмущении, изменяющемся с постоянным ускорением, необходимо добавить воздействие по второй производной.

В астатической системе в зависимости от порядка астатизма и количества передаточных функций интегрирующих звеньев в  $W_{xf}(p)$  порядок производных от возмущения, которые должны измеряться управляющим устройством, соответственно увеличивается.

## Глава третья

# СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

## § 3-1. ВВЕДЕНИЕ

Для того чтобы наиболее точно исследовать поведение системы автоматического управления, необходимо прежде всего располагать как можно более точными данными о приложенных к системе воздействиях. Предельно точным описанием этих воздействий является задание их в виде детерминированных функций времени. Однако последнее далеко не всегда возможно либо по недостатку сведений, либо в связи с самой природой воздействия. В этих случаях воздействия на систему следует рассматривать как случай-

ные функции времени и, соответственно, описывать их статистически.

Обратимся, например, к рассмотренной ранее системе автоматического регулирования напряжения генератора (см. рис. В-2). Основным внешним воздействием здесь является изменение нагрузки. Если нагрузка представляет собой достаточно большое число отдельных потребителей, время работы и мощность которых не могут быть заранее точно определены, будущее изменение такой нагрузки во времени может быть описано только статистически на основе обработки ранее полученных опытных записей. Аналогичный случайный характер в этой же системе регулирования может иметь изменение напряжения питания цепи возбуждения генератора. Принципиально случайным по своей природе является возмущение в виде шума в усилителе регулятора.

Другими примерами случайных воздействий являются для автопилота воздействие ветра на самолет, колебания тяги двигателей или для следящей системы радиолокационной станции сопровождения — перемещение цели.

При наличии случайных воздействий на САУ ее выходная величина будет также изменяться случайным образом, т. е. тоже будет случайной функцией времени.

Математическим аппаратом, применяемым для исследования систем, находящихся в условиях случайных воздействий, является теория вероятностей. Некоторые ее понятия, которые будут использоваться в дальнейшем, приведены в приложении 3.

### § 3-2. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ СИСТЕМУ

Стационарные случайные воздействия  $f(t)$  вызывают соответственно стационарные случайные изменения выходной величины  $x(t)$  системы автоматического управления (если последняя, разумеется, тоже стационарна). Найдем связь между характеристиками процессов  $f(t)$  и  $x(t)$  на входе и выходе системы.

В общем случае случайное воздействие  $f(t)$  состоит из среднего значения  $m_f(t)$  и центрированной случайной части  $f^0(t)$ , т. е.

$$f(t) = m_f(t) + f^0(t).$$

Соответственно может быть представлена и выходная величина системы:

$$x(t) = m_x(t) + x^0(t).$$

Для линейной системы на основании принципа суперпозиции каждая из этих двух составляющих  $x(t)$  может быть определена порознь:  $m_x(t)$  — как реакция на  $m_f(t)$ , а  $x^0(t)$  — как реакция на  $f^0(t)$ .

Средние значения  $m_f(t)$  и  $m_x(t)$  являются неслучайными величинами и связаны через передаточную функцию системы:

$$m_x(t) = W_3(p) m_f(t). \quad (3-1)$$



В частности, для стационарного случайного процесса  $m_f(t)$  и соответственно  $m_x(t)$  представляют собой постоянные величины. Поэтому связь между ними определяется по уравнению статистики системы, как показано в § 2-2, т. е.

$$m_x = W_z(0) m_f. \quad (3-2)$$

Перейдем теперь к определению центрированной стационарной случайной величины  $x^0(t)$  по  $f^0(t)$ .

Входное воздействие  $f^0(t)$  может быть задано либо корреляционной функцией  $R_f(\tau)$ , либо спектральной плотностью  $S_f(\omega)$ . Эти характеристики могут быть получены, в частности, в результате обработки экспериментально снятых кривых  $f(t)$ .

Выходная величина  $x^0(t)$  также может быть охарактеризована функциями  $R_{x^0}(\tau)$  или  $S_{x^0}(\omega)$ .

Определим связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями на входе и выходе системы. Начнем с корреляционных функций.

Чтобы получить искомое выражение для корреляционной функции выходной величины

$$R_x(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)]$$

по корреляционной функции входного воздействия, воспользуемся связью между входной и выходной величинами системы через ее весовую функцию  $w(t)$ . Согласно (1-30а),

$$x(t) = \int_0^{\infty} w(\tau_1) f(t - \tau_1) d\tau_1. \quad (3-3)$$

Перепишем это выражение для  $x(t+\tau)$ , введя новую независимую переменную  $\tau_2$ :

$$x(t+\tau) = \int_0^{\infty} w(\tau_2) f(t+\tau-\tau_2) d\tau_2.$$

Тогда входящее в  $R_x(\tau)$  произведение

$$\begin{aligned} x(t)x(t+\tau) &= \int_0^{\infty} w(\tau_1) f(t-\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} w(\tau_2) f(t+\tau-\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau_1) w(\tau_2) f(t-\tau_1) f(t+\tau-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Отсюда корреляционная функция как среднее значение этого выражения

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau_1) w(\tau_2) R_f(\tau+\tau_1-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3-4)$$

Получили искомое выражение, связывающее  $R_x(\tau)$  с  $R_f(\tau)$  через весовую функцию  $w(t)$  системы. Чтобы пояснить смысл

этого выражения, представим его в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_0^{\infty} w(\tau_2) y(\tau - \tau_2) d\tau_2; \\ y(\tau) &= \int_0^{\infty} w(\tau_1) R_f(\tau + \tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

Отсюда видно, что корреляционная функция  $R_x(\tau)$  процесса на выходе системы получается двукратным взятием интеграла Дюамеля (интеграла свертки) от корреляционной функции  $R_f(\tau)$  входного воздействия.

Выражения (3-4) и (3-5) определяют связь между  $R_f(\tau)$  и  $R_x(\tau)$  в интегральной форме. Ее можно представить и в дифференциальной форме через передаточную функцию системы в следующем виде:

$$R_x(\tau) = W_s(p) W_s(-p) R_f(\tau). \quad (3-6)$$

Это выражение непосредственно вытекает из (3-5), так как интегральной зависимости (3-3) между входом и выходом системы эквивалентна зависимость через передаточную функцию:

$$x(t) = W_s(p) f(t).$$

Соответственно двукратной зависимости (3-5) эквивалентно произведение передаточных функций в выражении (3-6). Передаточная функция  $W_s(-p)$  соответствует второму уравнению (3-5), где по сравнению с выражением (3-3) вместо  $\tau_1$  стоит  $-\tau_1$ . Формально это означает изменение направления течения времени и, следовательно, изменение знака у производных, т. е. знака оператора  $p$  в соответствующей передаточной функции.

Выведем теперь выражение, связывающее спектральные плотности входной и выходной величин системы, т. е. рассмотрим связь между частотными характеристиками этих сигналов.

Функция спектральной плотности является изображением Фурье корреляционной функции [см. приложение 3, формулу (П-64)], т. е.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3-7)$$

Подставив сюда найденное выше выражение (3-6) для  $R_x(\tau)$ , получим:

$$S_x(\omega) = W_s(j\omega) W_s(-j\omega) S_f(\omega) = |W_s(j\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (3-8)$$

т. е.

$$S_x(\omega) = A_s^2(\omega) S_f(\omega).$$

Таким образом, спектральная плотность стационарного случайного процесса на выходе системы равна спектральной плотности входного воздействия, умноженной на квадрат амплитудной частотной характеристики системы.

Собственно, формула (3-8) очевидна и из чисто физических представлений, если учесть, что амплитудная частотная характеристика определяет отношение амплитуд колебаний на выходе и входе системы, а спектральная плотность есть частотная характеристика для средних значений квадратов амплитуд гармоник.

Рассмотрим простой пример. Пусть  $W_3(p) = \frac{k}{Tp+1}$ , а  $S_f(\omega) = S_f = \text{const}$ , т. е. входное воздействие — белый шум. По формуле (3-8) спектральная плотность на выходе будет

$$S_x(\omega) = \left| \frac{k}{1+jT\omega} \right|^2 S_f = \frac{k^2 S_f}{1+T^2\omega^2}.$$

Таким образом, в результате прохождения через инерционную систему бесконечный спектр входного воздействия ограничивается в соответствии с амплитудной частотной характеристикой системы.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда к системе одновременно приложены в разных точках два стационарных случайных сигнала  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ .

На основе принципа суперпозиции в этом случае вместо (3-3) имеем:

$$x(t) = \int_0^\infty w_1(\tau_1) f_1(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^\infty w_2(\tau_1) f_2(t - \tau_1) d\tau_1.$$

Здесь  $w_1$  и  $w_2$  — весовые функции системы для воздействий  $f_1$  и  $f_2$  соответственно.

Написав, как и ранее, выражение для произведения  $x(t) \times x(t + \tau)$  и усреднив его, получим следующее выражение для корреляционной функции выходной величины:

$$R_x(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty [w_1(\tau_1) w_1(\tau_2) R_{f_1}(\tau + \tau_1 - \tau_2) + \\ + w_1(\tau_2) w_2(\tau_1) R_{f_1 f_2}(\tau + \tau_1 - \tau_2) + w_1(\tau_1) w_2(\tau_2) R_{f_2 f_1}(\tau + \tau_1 - \tau_2) + \\ + w_2(\tau_1) w_2(\tau_2) R_{f_2}(\tau + \tau_1 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (3-9)$$

Здесь  $R_{f_1 f_2}$  и  $R_{f_2 f_1}$  — взаимные корреляционные функции; в общем случае они не равны друг другу.

Совершив над полученным выражением преобразование Фурье, получим в соответствии с (3-6) следующее выражение для спектральной плотности на выходе системы:

$$S_x(\omega) = W_{31}(j\omega) W_{31}(-j\omega) S_{f_1}(\omega) + W_{31}(j\omega) W_{32}(-j\omega) S_{f_1 f_2}(\omega) + \\ + W_{32}(j\omega) W_{31}(-j\omega) S_{f_2 f_1}(\omega) + W_{32}(j\omega) W_{32}(-j\omega) S_{f_2}(\omega). \quad (3-10)$$

Здесь  $W_{31}$  и  $W_{32}$  — передаточные функции системы для воздействий  $f_1$  и  $f_2$ , а  $S_{f_1 f_2}(\omega)$  и  $S_{f_2 f_1}(\omega)$  — взаимные спектральные плотности.

Если случайные функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  взаимно независимы и хотя бы одна из них является центрированной, их взаимные корреляционные функции и взаимные спектральные плотности

обращаются в нуль, и формулы (3-9) и (3-10) принимают более простой вид:

$$R_x(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty w_1(\tau_1) w_1(\tau_2) R_{f_1}(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty w_2(\tau_1) w_2(\tau_2) R_{f_2}(\tau + \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2; \quad (3-9a)$$

$$S_x(\omega) = A_{31}^2(\omega) S_{f_1}(\omega) + A_{32}^2(\omega) S_{f_2}(\omega). \quad (3-10a)$$

Здесь

$$A_{31}(\omega) = |W_{31}(j\omega)|; \quad A_{32}(\omega) = |W_{32}(j\omega)|.$$

Выше мы рассмотрели, как изменяется при прохождении стационарного случайного сигнала через линейную систему его корреляционная функция и спектральная плотность. Одновременно происходит изменение и закона распределения плотности вероятности. Можно показать [22], что если входной сигнал имеет нормальное распределение, то сигнал на выходе линейной системы будет тоже распределен нормально, но с другими значениями математического ожидания и дисперсии (см. § 3-3). В случае произвольного распределения входного сигнала при прохождении его через инерционную линейную систему происходит его нормализация, т. е. приближение к нормальному закону, и тем сильнее, чем уже полоса пропускания системы по сравнению со спектром входного сигнала.

### § 3-3. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

При стационарном случайном воздействии

$$f(t) = m_f + f^0(t)$$

выходная величина системы

$$x(t) = m_x + x^0(t).$$

Точность системы в этом режиме определяется средним значением  $m_x$  выходной величины  $x(t)$  и дисперсией центрированной ее части  $x^0(t)$  или средним значением и дисперсией ошибки  $\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$ . В последнем случае обе составляющие могут быть объединены в одну оценку точности в виде среднего квадрата ошибки системы

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = M[\varepsilon^2(t)] = m_\varepsilon^2 + D_\varepsilon. \quad (3-11)$$

Среднее значение выходной величины определяется по формуле (3-2). Дисперсия выходной величины может быть определена по корреляционной функции и функции спектральной плотности центрированной части выходной величины.

В первом случае (см. приложение 3)

$$D_x = R_{x^0}(0). \quad (3-12)$$

Во втором случае надо воспользоваться выражением для корреляционной функции как оригиналом преобразования Фурье функции спектральной плотности [см. приложение 3, формулу (П-66)]:

$$R_{x^0}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x^0}(\omega) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (3-13)$$

Отсюда с учетом (3-12)

$$D_x = R_{x^0}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x^0}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{x^0}(\omega) d\omega. \quad (3-14)$$

Формула (3-14) означает, что дисперсия случайного процесса пропорциональна площади между кривой спектральной плотности и осью абсцисс.

Средний квадрат ошибки  $\overline{\varepsilon^2(t)}$  в соответствии с выражением (3-11) может быть сразу определен по формуле (3-12) или (3-14), т. е.

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = m_{\varepsilon}^2 + D_{\varepsilon} = R_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) d\omega, \quad (3-15)$$

если использовать корреляционную функцию или функцию спектральной плотности для всей нецентрированной величины ошибки  $\varepsilon(t)$ .

В свою очередь, входящие в приведенные формулы корреляционная функция и функция спектральной плотности выходной величины могут быть найдены по известным корреляционным функциям и функциям спектральной плотности входных воздействий по формулам (3-4), (3-9) или (3-8), (3-10).

Таким образом, с помощью последних формул может быть решена задача анализа точности системы автоматического управления при стационарных случайных воздействиях на нее. Эти соотношения дают возможность решать и задачу синтеза САУ на заданную точность при статистически заданных внешних воздействиях.

При решении обеих задач в качестве характеристики стационарной случайной функции более просто брать спектральную плотность, поскольку это позволяет использовать графические методы исследования, основанные на применении частотных характеристик. Входящий в формулу (3-14) интеграл от спектральной плотности определяют графически или численным интегрированием. Для облегчения последнего процесса в приложении 4 приведены готовые формулы [34]. При применении этих формул выражение для спектральной плотности выходной величины  $x$  предварительно приводится к следующему виду:

$$S_x(\omega) = h \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2}, \quad (3-16)$$

где  $h$  — постоянный множитель, а полином  $G(\omega)$  имеет степень ниже  $2n$ , если  $n$  — степень полинома  $H(j\omega)$ .

Представление  $S_x(\omega)$  в виде выражения (3-16) возможно практически для любой реальной устойчивой системы.

Рассмотрим пример. Пусть к системе с простой передаточной функцией  $\frac{k}{Tp+1}$  приложено воздействие в виде белого шума соответственно со спектральной плотностью  $S_f(\omega) = S_f = \text{const.}$

По формуле (3-14) с учетом (3-8) дисперсия

$$D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_s^2(\omega) S_{f^*}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{k}{1+jT\omega} \right|^2 S_f d\omega = \\ = \frac{k^2 S_f}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1+\omega^2 T^2} = \frac{k^2}{2T} S_f.$$

(Здесь интеграл может быть определен по формуле приложения 4.) Дисперсия входного воздействия в виде белого шума равна бесконечности [см. формулу (3-14)]. Согласно полученному выражению, после прохождения случайного процесса через инерционную систему его дисперсия становится конечной и тем меньше по величине, чем больше инерционность (постоянная времени) системы. Аналогично происходит сглаживание случайного процесса при прохождении его через инерционную систему любого порядка.

Задача синтеза САУ по условию обеспечения требуемой точности в стационарном случайном режиме сводится к определению передаточной функции системы, при которой выполняется неравенство

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \leq D_{x \text{ доп}},$$

где  $D_{x \text{ доп}}$  — предельно допустимое значение дисперсии выходной величины системы, а  $S_x(\omega)$  определяется амплитудной частотной характеристикой системы и спектральной плотностью воздействия согласно (3-8) или в более общем случае согласно (3-10).

Если при синтезе системы по условию обеспечения требуемой точности в детерминированном стационарном режиме задача сводится к определению порядка астатизма и коэффициента передачи, то в рассматриваемом случае стационарного случайного режима точность системы определяется всей передаточной функцией системы. Задача синтеза поэтому существенно усложняется, требуя определения амплитудной частотной характеристики системы, при которой выполняется неравенство  $D_x \leq D_{x \text{ доп}}$ .

Общий порядок синтеза частотной характеристики системы сводится к следующему. Прежде всего находится частотная характеристика известной части системы, которая включает

в себя объект управления, а также связанные с ним звенья управляющего устройства. Затем с помощью выведенных выше выражений, связывающих амплитудную частотную характеристику системы с заданной дисперсией  $D_x$  доп и спектральной плотностью  $S_f$ , определяется, как надо скорректировать частотную характеристику известной части системы, чтобы обеспечить требуемую точность. В результате находится частотная характеристика неизвестной части управляющего устройства, по которой далее определяется соответствующая передаточная функция.

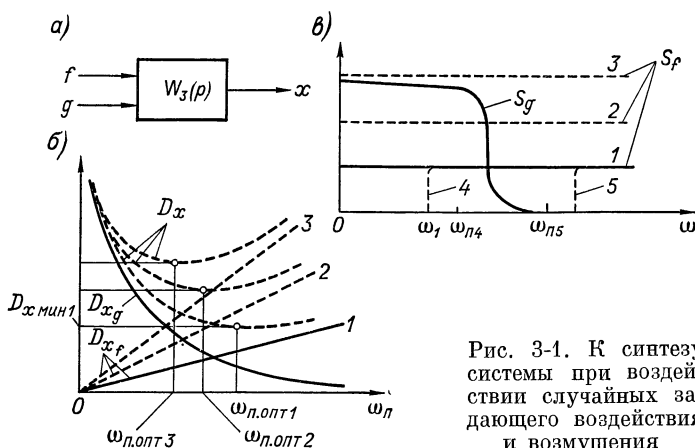


Рис. 3-1. К синтезу системы при воздействии случайных задающего воздействия и возмущения

Подробно методы синтеза САУ будут изложены в седьмой главе. Здесь же особо остановимся только на одном специфическом вопросе, связанном с синтезом САУ по требованию к точности в стационарных случайных режимах.

Когда все случайные воздействия, приложенные к системе, являются либо возмущениями, т. е. помехами, либо задающими воздействиями, теоретически соответствующим выбором передаточной функции можно обеспечить любую точность системы.

Однако в случае, когда к системе одновременно приложены оба вида воздействий, т. е. как возмущение, так и задающее воздействие, существует оптимальное выражение для передаточной функции системы, однозначно определяемое спектральными плотностями внешних воздействий и обеспечивающее минимум дисперсии  $D_x$ , меньше которого она не может быть сделана, если не выходить из рамок линейных систем. Таким образом, в этом случае не всякие требования по точности могут быть практически реализованы в линейной САУ. Поэтому, если эти требования достаточно жестки, задача синтеза системы должна решаться как задача обеспечения минимума дисперсии выходной величины и определения соответствующей оптимальной передаточной функции системы.

Покажем вначале, что в рассматриваемом случае действительно существует минимум  $D_x$ . Если привести возмущение  $f$  к точке приложения задающего сигнала  $g$ , система примет вид, изображенный на рис. 3-1, *а*. Дисперсия выходной величины соответственно с принципом суперпозиции при взаимной независимости  $g$  и  $f$

$$D_x = D_{x_g} + D_{x_f}.$$

Здесь первая составляющая  $D_{x_g}$  определяет погрешность изменения величины  $x$  в соответствии с заданием  $g$  при отсутствии  $f$ , а вторая составляющая  $D_{x_f}$  — погрешность, вызванную отклонением  $x$  от задания под действием возмущения  $f$ .

На рис. 3-1, *б* приведены в качестве иллюстрации примерные графики обеих составляющих и полной дисперсии  $D_x$  в функции полосы пропускания системы  $\omega_{\text{п}}$  для случая, когда спектр возмущения является белым (рис. 3-1, *а*), т. е. мощность равномерно распределена по всем частотам. (Кривые 1, 2, 3 на рис. 3-1, *б* соответствуют аналогичным кривым на рис. 3-1, *а*.) С увеличением полосы пропускания  $\omega_{\text{п}}$  системы величина  $D_{x_g}$  уменьшается вследствие улучшения условий прохождения сигнала  $g$ . При этом особенно существенно уменьшается  $D_{x_g}$ , пока еще полоса пропускания системы уже полосы частот, занимаемой спектром  $S_g(\omega)$ . Дисперсия  $D_{x_f}$  при этом, наоборот, возрастает, так как увеличивается та часть спектра возмущения, которая проходит на выход системы. Полная дисперсия  $D_x$  имеет минимум при определенной полосе пропускания  $\omega_{\text{п, опт}}$  системы. Величина  $\omega_{\text{п, опт}}$  уменьшается при увеличении уровня возмущения  $S_f$  (см. штриховые кривые 2 и 3 на рис. 3-1, *б*). Соответственно при этом возрастает минимум  $D_x$ .

Если спектр  $S_f(\omega)$  начинается не с нулевой, а с некоторой конечной частоты  $\omega_1$  (штриховая линия 4 на рис. 3-1, *а*), кривая  $D_{x_f}$  на рис. 3-1, *б* будет начинаться не с начала координат, а с этой частоты и оптимальное значение  $\omega_{\text{п}}$  (точка  $\omega_{\text{п4}}$  на рис. 3-1, *а*) будет лежать между этим значением  $\omega_1$  и максимальной частотой спектра  $S_g(\omega)$ , причем тем ближе к последней, чем ниже уровень возмущения.

Также между концом спектра  $S_g(\omega)$  и началом спектра  $S_f(\omega)$  будет находиться оптимальное значение  $\omega_{\text{п}}$  (точка  $\omega_{\text{п5}}$  на рис. 3-1, *а*), если последний спектр начинается правее конца спектра  $S_g(\omega)$  (штриховая линия 5 на рис. 3-1, *а*), т. е. если оба спектра не имеют общей части.

Изложенное можно доказать строго, выразив дисперсию через спектральные плотности воздействий и амплитудную частотную характеристику системы согласно (3-10а) или (3-10), если существует взаимная корреляция между  $g(t)$  и  $f(t)$ . Исходя из этих выражений, можно в общем виде вывести выражение для оптимальной передаточной функции системы через спектральные плотности  $g(t)$  и  $f(t)$ , обеспечивающее минимум  $D_x$ . Эта задача была решена



А. Н. Колмогоровым и Н. Винером. При этом задача системы формулировалась в общем виде как задача преобразования входного задающего воздействия согласно уравнению

$$x_0 = W_0(p) g,$$

где  $W_0(p)$  — заданная (желаемая) передаточная функция. Для возмущения  $f(t)$ , приведенного в точку приложения  $g(t)$ , было получено выражение для оптимальной амплитудно-фазовой частотной характеристики, обеспечивающей минимум дисперсии для  $(x - x_0)$ , т. е. минимум  $M[(x - x_0)^2]$ . При отсутствии корреляции между  $g(t)$  и  $f(t)$  и при условии, что хотя бы одна из этих функций является центрированной, это выражение имеет вид:

$$W_{з. опт}(j\omega) = \frac{W_0(j\omega) S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_f(\omega)}. \quad (3-16)$$

В частном случае, когда  $W_0(p) = 1$  (например, для следящей системы, задачей которой является воспроизведение на выходе системы входного воздействия  $g$ ),

$$x_0 = g$$

и

$$W_{з. опт}(j\omega) = \frac{S_g(\omega)}{S_g(\omega) + S_f(\omega)}. \quad (3-17)$$

Если, например, в последнем случае возмущение  $f(t)$  представляет собой белый шум, т. е.  $S_f(\omega) = S_f = \text{const}$ , причем его уровень много больше полезного сигнала  $g$ , т. е.  $S_f \gg S_g(\omega)$ ,

$$W_{з. опт}(j\omega) \approx \frac{S_g(\omega)}{S_f}.$$

Таким образом, в данном случае оптимальная частотная характеристика в первом приближении пропорциональна спектральной плотности задающего воздействия, т. е. повторяет его кривую. Такой вывод при очень высоком уровне возмущающего воздействия физически очевиден.

Следует отметить, что в большинстве практических задач формула (3-16) дает физически не реализуемые выражения для оптимальной передаточной функции. В этих случаях из полученного выражения выделяют физически реализуемое слагаемое и далее практически рассматривают только его.

Более подробно об определении оптимальной передаточной функции линейных САУ в стационарных случайных режимах можно прочесть в работе [21].

Отметим, что нахождение оптимальной передаточной функции не следует рассматривать как полное решение задачи синтеза системы. Во-первых, найденная теоретически оптимальная передаточная функция чаще всего не может быть реализована в силу своей сложности, и поэтому результаты такого синтеза надо рас-

смаатривать как теоретически возможный предел, к которому следует стремиться и знание которого позволяет оценить степень совершенства практически реализованной системы.

Во-вторых, при синтезе системы, помимо точности в режимах со стационарными случайными воздействиями, необходимо принимать во внимание и другие требования, а именно: требования к точности в стационарных детерминированных режимах и к качеству переходных процессов. Кроме того, к системе предъявляется и ряд других требований и ограничений, связанных с энергетическими соображениями, условиями эксплуатации и т. п. Поэтому синтез САУ — это всегда комплексная задача, при решении которой надо учитывать целый ряд требований. Как уже отмечалось, основные методы и порядок синтеза САУ будут рассмотрены в седьмой главе.

## Глава четвертая

# УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 4-1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

В предыдущих двух главах исследовались установившиеся процессы в САУ. В настоящей главе переходим к рассмотрению переходных процессов. В этой главе будет рассмотрено общее

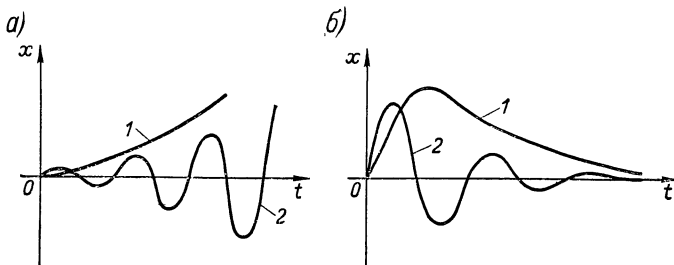


Рис. 4-1. К понятию устойчивости системы

свойство переходных процессов в САУ, связанное с понятием устойчивости. Исследованию более детальных свойств переходных процессов, связанных с понятием их качества, будет посвящена следующая, пятая, глава.

**Устойчивость** — это свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия.

На рис. 4-1 показаны типичные кривые переходных процессов в неустойчивой (рис. 4-1, а) и устойчивой (рис. 4-1, б) системах. Если система неустойчива, то достаточно любого толчка, чтобы в ней начался расходящийся процесс ухода из исходного

установившегося состояния. Этот процесс может быть аperiodическим (кривая 1 на рис. 4-1, а) или колебательным (кривая 2 на рис. 4-1, а).

Аperiodический расходящийся процесс может, например, возникнуть в САУ, если в ее управляющем устройстве ошибочно переключить полярность воздействия на объект, в результате чего управляющее устройство будет осуществлять не отрицательную, а положительную обратную связь вокруг объекта. При этом управляющее устройство будет не устранять отклонение  $x$ , а действовать в обратном направлении, вызывая лавинообразное его изменение.

Колебательный расходящийся процесс, как будет показано далее, может наступить, например, при неограниченном увеличении коэффициента передачи системы, вследствие чего управляющее устройство станет излишне энергично воздействовать на объект, стремясь ликвидировать первоначально возникшие отклонения  $x$ . В этом случае при каждом очередном возврате  $x$  к нулю под действием управляющего устройства кривая  $x$  будет пересекать ось абсцисс все с большей скоростью и процесс в целом будет расходящимся.

В случае устойчивой системы (рис. 4-1, б) переходный процесс, вызванный каким-либо воздействием, со временем затухает аperiodически (кривая 1) или колебательно (кривая 2), и система вновь возвращается в установившееся состояние.

Таким образом, устойчивую систему можно определить также как систему, переходные процессы в которой являются затухающими.

Приведенное понятие устойчивости определяет *устойчивость установившегося режима* системы. Однако система может работать в условиях непрерывно изменяющихся воздействий, когда установившийся режим вообще отсутствует. С учетом таких условий работы можно дать следующее, более общее определение устойчивости: *система устойчива, если ее выходная величина остается ограниченной в условиях действия на систему ограниченных по величине возмущений.*

Нетрудно показать, что если переходный процесс в системе является затухающим, то система будет удовлетворять и последнему определению. Формальное доказательство этого будет дано в следующей главе.

Рассмотрим, от чего зависит устойчивость системы, чем она определяется. Обратимся для этого к уравнению динамики системы

$$x = W_a(p) f,$$

где

$$W_a(p) = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)};$$

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}; \quad W_{xf}(p) = \frac{R_{xf}(p)}{Q_{xf}(p)}.$$

Освободившись от дробей в числителе и знаменателе передаточной функции, можно представить ее так:

$$W_3(p) = \frac{M(p)}{D(p)}$$

и соответственно перейти к обычной форме записи в виде дифференциального уравнения

$$D(p)x = M(p)f. \quad (4-1)$$

Решение этого линейного неоднородного уравнения в общем виде состоит, как известно, из двух составляющих:

$$x(t) = x_{\text{уст}}(t) + x_{\text{п}}(t). \quad (4-2)$$

Здесь  $x_{\text{уст}}(t)$  — частное решение неоднородного уравнения (4-1) с правой частью, описывающее вынужденный режим системы, устанавливающийся по окончании переходного процесса; такие режимы были рассмотрены ранее;  $x_{\text{п}}(t)$  — общее решение однородного уравнения

$$D(p)x = 0,$$

описывающее переходный процесс в системе, вызванный данным возмущением.

Как показано выше, система будет устойчива, если переходные процессы  $x_{\text{п}}(t)$ , вызванные любыми возмущениями, будут затухающими, т. е. если с течением времени  $x_{\text{п}}(t)$  будет стремиться к нулю.

Решение  $x_{\text{п}}(t)$  однородного дифференциального уравнения, как известно, имеет вид:

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}. \quad (4-3)$$

Здесь  $C_i$  — постоянные интегрирования, определяющиеся начальными условиями и возмущением,  $\lambda_i$  — корни характеристического уравнения

$$D(\lambda) = 0, \quad (4-4)$$

где полином  $D(\lambda)$ , называемый характеристическим, есть левая часть уравнения (4-1) динамики системы после замены оператора дифференцирования  $p$  на комплексную переменную  $\lambda$ .

Полином  $D(\lambda)$  является знаменателем передаточной функции  $W_3(p)$  системы после освобождения в нем от дроби и замены  $p$  на  $\lambda$ , т. е.

$$D(\lambda) = R(\lambda) + Q(\lambda), \quad (4-5)$$

где  $R(\lambda)$  и  $Q(\lambda)$  — числитель и знаменатель передаточной функции  $W(p)$  разомкнутой системы при замене  $p$  на  $\lambda$ .

Таким образом, переходный процесс  $x_{\text{п}}(t)$  представляет собой сумму составляющих, число которых определяется числом корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения (4-4), т. е. порядком уравнения системы.

В общем случае корни  $\lambda_i$  являются комплексными. При этом они образуют пары сопряженных корней:

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i,$$

где  $\alpha_i$  может быть положительной или отрицательной величиной.

Каждая такая пара корней дает в выражении (4-3) составляющую переходного процесса, равную

$$C_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} = e^{\alpha_i t} (C_i e^{j\beta_i t} + C_{i+1} e^{-j\beta_i t}) = C_i' e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i),$$

где  $C_i'$  и  $\varphi_i$  определяются через  $C_i$  и  $C_{i+1}$ .

Как видим, эта составляющая представляет собой синусоиду с амплитудой, изменяющейся во времени по экспоненте. При

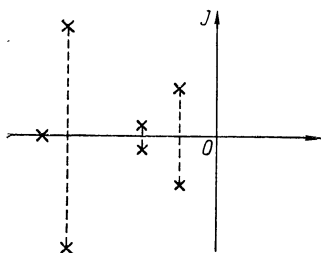


Рис. 4-2. Корни характеристического уравнения системы на комплексной плоскости

этом, если  $\alpha_i < 0$ , эта составляющая будет затухать. Наоборот, при  $\alpha_i > 0$  получаются расходящиеся колебания. Если  $\alpha_i = 0$ , что соответствует паре мнимых корней, будут незатухающие синусоидальные колебания.

Таким образом, условием затухания данной составляющей переходного процесса является отрицательность действительной части  $\alpha_i$  соответствующей пары сопряженных корней характеристического уравнения.

В частном случае, когда  $\beta_i = 0$ , имеем действительный корень  $\lambda_i = \alpha_i$ . Соответствующая ему составляющая переходного процесса  $C_i e^{\alpha_i t}$  представляет собой экспоненту, которая будет затухать или увеличиваться тоже в зависимости от знака  $\alpha_i$ .

Итак, в общем случае переходный процесс в системе состоит из колебательных и аperiодических составляющих. Каждая колебательная составляющая обязана своим появлением паре комплексных сопряжений корней, а каждая аperiодическая — действительному корню. Отсюда следует, что общим условием затухания всех составляющих, а значит, и всего переходного процесса в целом является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения системы, т. е. всех полюсов (нулей знаменателя) передаточной функции системы.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, он даст расходящуюся составляющую переходного процесса и система будет неустойчивой. Наличие пары сопряженных чисто мнимых корней  $\lambda_{i,i+1} = \pm j\beta_i$  даст незатухающую гармоническую составляющую переходного процесса. При этом в системе установятся незатухающие колебания с частотой, равной  $\beta_i$ . Этот случай является граничным между устойчивостью и неустойчивостью — система при этом находится на г р а н и ц е

устойчивости. Такая система, очевидно, также неработоспособна, как и неустойчивая.

Если изобразить корни характеристического уравнения системы точками на комплексной плоскости (рис. 4-2), то найденное выше общее условие устойчивости линейной системы можно сформулировать еще так: *условием устойчивости системы является расположение всех корней характеристического уравнения, т. е. полюсов передаточной функции системы, в левой комплексной полуплоскости или, короче, все они должны быть левыми.*

Наличие корня на мнимой оси означает, что система находится на границе устойчивости.

Для суждения об устойчивости системы практически не требуется находить корней ее характеристического уравнения в связи с тем, что разработаны косвенные признаки, по которым можно судить о знаках действительных частей этих корней и тем самым об устойчивости системы, не решая самого характеристического уравнения. Эти косвенные признаки называются критериями устойчивости.

Существуют три основных критерия устойчивости: критерий Рауса — Гурвица, критерий Михайлова и критерий Найквиста. Рассмотрим их последовательно.

#### § 4-2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА — ГУРВИЦА

Это алгебраический критерий, по которому условия устойчивости сводятся к выполнению ряда неравенств, связывающих коэффициенты уравнения системы. В разной форме этот критерий был предложен английским математиком Е. Раусом и затем швейцарским математиком А. Гурвицем в конце прошлого века. Приведем без доказательства этот критерий в форме Гурвица.

Возьмем характеристический полином, определяющий левую часть уравнения (4-1) системы,

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad (4-6)$$

где полагаем  $a_0 > 0$ , что всегда можно обеспечить умножением при необходимости полинома на  $-1$ . Составим из коэффициентов этого полинома определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad (4-7)$$

Этот определитель называется определителем Гурвица. Он имеет  $n$  строк и  $n$  столбцов. Первая строка содержит все нечетные коэффициенты до последнего, после чего строка заполняется до положенного числа  $n$  элементов нулями. Вторая строка включает все четные коэффициенты и тоже заканчивается нулями. Третья строка получается из первой, а четвертая — из второй сдвигом вправо на один элемент. На освободившееся при этом слева место ставится нуль. Аналогично сдвигом вправо на элемент получают все последующие нечетные и четные строки из предыдущих одноименных строк.

В результате в главной диагонали определителя оказываются последовательно все коэффициенты, кроме  $a_0$ .

Условие устойчивости заключается в требовании положительности определителя Гурвица и всех его диагональных миноров.

Эти миноры отчерчены в выражении (4-7) штриховыми линиями.

Развернем критерий Гурвица для нескольких конкретных значений  $n$ .

Для  $n = 1$

$$D(\lambda) = a_0\lambda + a_1$$

и условия устойчивости сводятся к неравенствам:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0.$$

Отсюда, например, звено первого порядка с передаточной функцией  $\frac{k}{T_p+1}$  является устойчивым, а звено с передаточной функцией  $\frac{k}{T_p-1}$  — неустойчивым.

Для  $n = 2$

$$D(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2.$$

Условия устойчивости:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0$$

(к последнему неравенству сводится неравенство  $\Delta_2 > 0$ , если учесть предыдущее неравенство  $a_1 > 0$ ).

Например, звено с передаточной функцией  $\frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$  устойчиво, если перед всеми членами в знаменателе стоит знак плюс.

Для  $n = 3$

$$D(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости:

$$\begin{aligned} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство с учетом предпоследнего условия  $\Delta_2 > 0$  сводится к требованию  $a_3 > 0$ . Таким образом, в целом эти условия устойчивости заключаются в положительности всех коэффициентов и предпоследнего минора  $\Delta_2$ . (Необходимость положительности  $a_2$  вытекает из условия  $\Delta_2 > 0$  и положительности всех остальных коэффициентов.)

Для  $n = 4$

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости:

$$\begin{aligned} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_4 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 - a_1 a_4 > 0; \\ \Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что условия устойчивости опять сводятся к требованию положительности всех коэффициентов и предпоследнего минора  $\Delta_3$ . (Условие  $\Delta_2 > 0$  при этом вытекает из неравенства  $\Delta_3 > 0$  с учетом того, что  $a_4 > 0$ .)

Для  $n = 5$

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5.$$

Условия устойчивости, если действовать аналогично, сведутся здесь к положительности всех коэффициентов и двух миноров:  $\Delta_2$  и предпоследнего  $\Delta_4$ .

Можно показать в общем случае системы  $n$ -го порядка, что в условия устойчивости в качестве их части входит требование положительности всех коэффициентов уравнения. Анализ устойчивости надо начинать с проверки этого простого необходимого, но недостаточного условия устойчивости. При его невыполнении, естественно, отпадает надобность в составлении и проверке остальных неравенств.

Условия устойчивости, получаемые из критерия Рауса — Гурвица, как видно из изложенного, усложняются с ростом порядка системы. При этом для систем достаточно высокого порядка оказывается затруднительным выяснять влияние на устой-



чивость системы значений отдельных параметров звеньев, входящих в состав коэффициентов уравнения. Это связано с тем, что, как правило, одни и те же параметры одновременно входят в несколько коэффициентов уравнения системы. Поэтому критерий Рауса — Гурвица применяют только для систем невысокого порядка и прежде всего для анализа устойчивости, когда надо определить, устойчива ли система при известных значениях всех ее параметров. При решении задачи синтеза системы, когда требуется выбрать значения отдельных параметров системы, критерий Рауса — Гурвица становится неудобным уже для систем выше четвертого порядка.

Рассмотрим в качестве примера систему третьего порядка, состоящую из трех статических звеньев первого порядка. Передаточная функция этой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} \quad (4-8)$$

(см., например, систему на рис. 1-16).

В этом случае

$$D(\lambda) = R(\lambda) + Q(\lambda) = k_1 k_2 k_3 + (T_1 \lambda + 1)(T_2 \lambda + 1)(T_3 \lambda + 1),$$

т. е.

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 T_3; & a_1 &= T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1; \\ a_2 &= T_1 + T_2 + T_3; & a_3 &= k_1 k_2 k_3 + 1 = k + 1, \end{aligned}$$

где

$$k = k_1 k_2 k_3.$$

Условие устойчивости, как показано выше, для  $n = 3$  сводится к следующим неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} T_1 T_2 T_3 &> 0; & T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1 &> 0; & T_1 + T_2 + T_3 &> 0; \\ k + 1 &> 0; \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 &= (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1)(T_1 + T_2 + T_3) - \\ &\quad - T_1 T_2 T_3 (1 + k) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-8a)$$

Первые три неравенства не представляют интереса, если мы ограничиваем рассмотрение положительными значениями постоянных времени.

Следующее, четвертое, неравенство налагает ограничение на отрицательное значение коэффициента передачи  $k$ . Абсолютное значение  $k$  при этом должно быть меньше единицы. Практически это неравенство тоже не имеет значения, показывая только, что система теряет устойчивость при неправильном замыкании обратной связи, когда она будет положительной, а не отрицательной, т. е. когда  $k < 1$ . (В § 1-5 показано, что изменение знака обратной связи приводит к изменению знака  $W(p)$  в знаменателе  $W_3(p)$ ,

что и соответствует изменению знака свободного члена полинома  $D(\lambda)$ .

Реальные ограничения на значения параметров системы налагает последнее неравенство (4-8а). Его удобно переписать в таком виде:

$$k < (T_1 + T_2 + T_3) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1. \quad (4-8б)$$

Это неравенство показывает, что устойчивость системы в конце концов нарушится при неограниченном увеличении коэффициента передачи  $k$  при любых значениях постоянных времени. Предельное по устойчивости значение  $k$  определяется постоянными времени системы. Согласно (4-8б), это критическое значение

$$k_{кр} = (T_1 + T_2 + T_3) \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1. \quad (4-8в)$$

### § 4-3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

Это графический критерий. Он предложен в 1938 г. советским ученым А. В. Михайловым и тоже основан на рассмотрении полинома  $D(\lambda)$ .

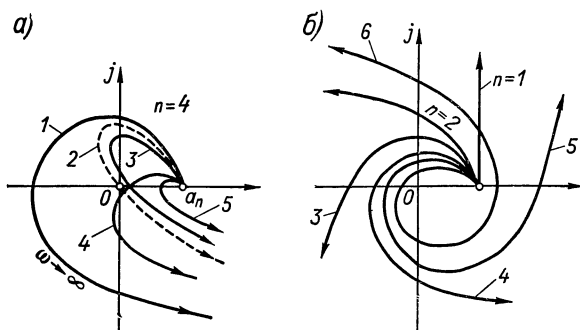


Рис. 4-3. К критерию устойчивости А. В. Михайлова

Подставим в этот полином вместо  $\lambda$  мнимую переменную  $j\omega$ . В результате получим комплексную функцию

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega).$$

Здесь  $U_D(\omega)$  — действительная часть, полученная из членов  $D(\lambda)$ , содержащих четные степени  $\lambda$ , а  $V_D(\omega)$  — мнимая часть, полученная из членов  $D(\lambda)$  с нечетными степенями  $\lambda$ .

Изобразим  $D(j\omega)$  в виде годографа в комплексной плоскости (кривая 1 на рис. 4-3, а). Этот годограф называется годографом Михайлова. Каждому значению  $\omega$  соответствуют определенные значения  $U_D(\omega)$  и  $V_D(\omega)$  и определенная точка на плоскости. При  $\omega = 0$  функция  $D(j\omega) = a_n$ , т. е. годограф начинается на действительной оси. При  $\omega \rightarrow \infty$  функция  $D(j\omega)$  тоже неограниченно возрастает.

Критерий Михайлова формулируется так: *система устойчива, если годограф  $D(j\omega)$ , начинаясь на действительной положительной полуоси, огибает против часовой стрелки начало координат, проходя последовательно  $n$  квадрантов, где  $n$  — порядок системы.* Доказательство критерия см. в работах [3, 11, 33].

На рис. 4-3, *а* годограф 1 относится к устойчивой, а годографы 3, 4 и 5 — к неустойчивым системам.

Условием нахождения системы на границе устойчивости является прохождение годографа Михайлова через начало координат (штриховая кривая 2 на рис. 4-3, *а*). Действительно, в этом случае существует значение  $\omega$ , при котором  $D(j\omega) = 0$ , т. е. характеристическое уравнение системы имеет пару сопряженных мнимых корней  $\lambda = \pm j\omega$ . Последнее и означает наличие в системе незатухающих колебаний, т. е. нахождение ее на границе устойчивости. Незначительное изменение параметров системы, в результате чего годограф  $D(j\omega)$  на рис. 4-3, *а* отойдет влево или вниз от начала координат, делает систему устойчивой, а изменение параметров в другую сторону — неустойчивой.

На рис. 4-3, *б* приведены годографы устойчивых систем разных порядков до  $n = 6$ .

При практическом построении годографа  $D(j\omega)$  прежде всего находят точки его пересечения с координатными осями. Для этого, определив из уравнения

$$U_D(\omega) = 0$$

значения частот, соответствующих точкам пересечения годографа  $D(j\omega)$  с мнимой осью, подставляют их в выражение  $V_D(\omega)$ . В результате получают соответствующие ординаты. Аналогично находят точки пересечения  $D(j\omega)$  с действительной осью, приравнявая нулю мнимую часть  $V_D(\omega)$  и подставляя затем найденные при этом значения  $\omega$  в выражение для  $U_D(\omega)$ .

Собственно, после того как найдены значения  $\omega$ , при которых годограф  $D(j\omega)$  пересекает оси координат, т. е. найдены нули  $U_D(\omega)$  и  $V_D(\omega)$ , для суждения об устойчивости системы нет необходимости строить сам годограф. Из формулировки критерия Михайлова следует, что устойчивость имеет место, если нули  $U_D(\omega)$  и  $V_D(\omega)$  чередуются с ростом  $\omega$ , начиная с  $\omega = 0$ , когда  $V_D(\omega) = 0$ , а  $U_D(\omega) > 0$ .

Чтобы не иметь дело с высокими степенями  $\omega$ , построение годографа  $D(j\omega)$  можно производить по звеньям системы. Представим  $D(j\omega)$  таким образом:

$$D(j\omega) = R(j\omega) + Q(j\omega) = \prod_i R_i(j\omega) + \prod_i Q_i(j\omega), \quad (4-9)$$

где  $R_i(j\omega)$  и  $Q_i(j\omega)$  — числитель и знаменатель амплитудно-фазовой частотной характеристики  $i$ -го звена приведенной одно-контурной системы.

Согласно выражению (4-9), построение годографа  $D(j\omega)$  начинают с построения годографов  $R_i(j\omega)$  и  $Q_i(j\omega)$  отдельных звеньев. Затем строят годографы  $R(j\omega)$  и  $Q(j\omega)$  путем перемножения соответственно годографов  $R_i(j\omega)$  и  $Q_i(j\omega)$ . Годографы перемножают по обычным правилам перемножения векторов, как и при построении частотных характеристик цепочки звеньев по характеристикам отдельных звеньев (см. § 1-5). Для каждого значения  $\omega$  модули (величины векторов, проведенных из начала координат в соответствующую точку годографов) перемножают, а аргументы (фазы этих векторов) складывают.

Заметим при этом, что для обычных типовых звеньев, исключая дифференцирующие,  $R_i(j\omega)$  равны просто коэффициенту передачи звена  $k_i$  и соответственно у системы, состоящей из таких звеньев, годограф  $R(j\omega) = k$ , т. е. вместо его построения для получения годографа  $D(j\omega)$  достаточно просто сдвинуть ранее построенный годограф  $Q(j\omega)$  вправо на величину  $k$ .

#### § 4-4. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Этот критерий, предложенный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом, позволяет судить об устойчивости замкнутой

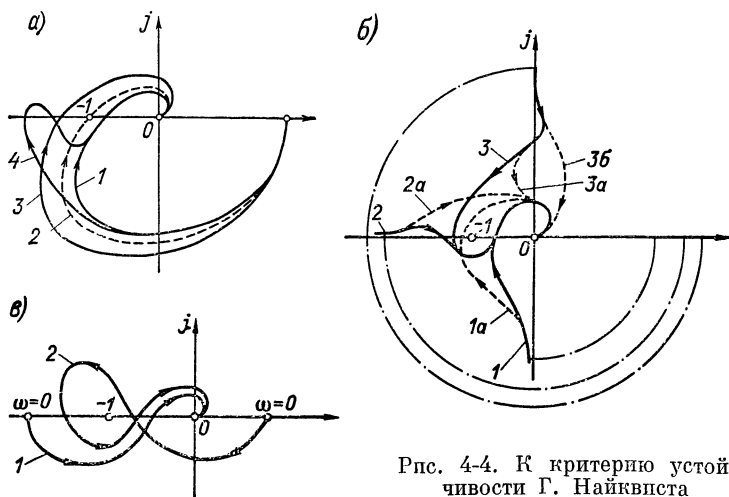


Рис. 4-4. К критерию устойчивости Г. Найквиста

системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике (а. ф. ч. х.)  $W(j\omega)$  разомкнутой системы (рис. 4-4, а).

Рассмотрим сперва этот критерий для случая, когда известно, что система в разомкнутом состоянии устойчива. Условие устойчивости замкнутой системы тогда сводится к требованию, чтобы а. ф. ч. х. разомкнутой системы не охватывала точку  $(-1, j0)$ .

На рис. 4-4, а характеристики 1 и 4 соответствуют устойчивым системам, характеристика 3 — неустойчивой, а характеристика

2 — нахождению системы на границе устойчивости. Если, например, уменьшать коэффициент передачи в неустойчивой системе, ее а. ф. ч. х. будет сжиматься к началу координат, в результате чего система станет в конце концов устойчивой. Наоборот, при увеличении коэффициента передачи характеристика ранее устойчивой системы в конце концов охватит точку  $(-1, j0)$ , и система потеряет устойчивость.

Нахождение системы на границе устойчивости при прохождении характеристики  $W(j\omega)$  через точку  $(-1, j0)$  очевидно, так как в этом случае существует значение  $\omega$ , при котором  $W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = -1$ , т. е., согласно (4-5),  $D(j\omega) = R(j\omega) + Q(j\omega) = 0$  и характеристическое уравнение системы имеет пару сопряженных мнимых корней  $\pm j\omega$ .

Амплитудно-фазовые характеристики, показанные на рис. 4-4, а, принадлежат статическим системам. На рис. 4-4, б приведены а. ф. ч. х. астатических систем с разным порядком астатизма. Кривые 1, 2 и 3 относятся к системам соответственно с астатизмом 1, 2 и 3-го порядков. А. ф. ч. х. астатических систем при  $\omega = 0$  уходят в бесконечность, так как в знаменателе амплитудно-фазовой функции  $W(j\omega)$  имеется множитель  $(j\omega)^r$ , где  $r$  — порядок астатизма. Соответственно, как показано на рис. 4-4, б, при  $r = 1$  характеристика  $W(j\omega)$  при  $\omega = 0$  уходит в бесконечность вдоль отрицательной мнимой полуоси, при  $r = 2$  — вдоль отрицательной действительной полуоси, а при  $r = 3$  — вдоль положительной мнимой полуоси. Для суждения об устойчивости астатической системы находящейся в бесконечности начало ее а. ф. ч. х., соответствующее  $\omega = 0$ , надо мысленно соединить с положительной действительной полуосью против часовой стрелки дугой бесконечного радиуса, как условно изображено на рис. 4-4, б штрих-пунктирными линиями. В случае устойчивой системы точка  $(-1, j0)$  не должна охватываться а. ф. ч. х., мысленно дополненной дугой, соединяющей ее с положительной действительной полуосью. Сказанное иллюстрируется на рис. 4-4, б. Здесь сплошные кривые 1, 2, 3 относятся к устойчивым, а штриховые кривые 1а, 2а и 3а (3б) — к неустойчивым системам с астатизмом соответственно 1, 2 и 3-го порядков.

Как было указано, данная выше формулировка критерия Найквиста относится к системам, которые являются устойчивыми в разомкнутом состоянии. В случае одноконтурной системы устойчивость в разомкнутом состоянии всегда обеспечивается, если система состоит только из устойчивых звеньев. При наличии местных обратных связей должна быть еще проверена устойчивость образованных этими связями контуров. Для этого, в свою очередь, может быть применен критерий Найквиста или любой другой.

Для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, критерий Найквиста имеет такую формулировку: *для устойчивости системы*

в замкнутом состоянии а. ф. ч. х. разомкнутой системы должна охватывать точку  $(-1, j0)$ . При этом число пересечений ею отрицательной действительной полуоси левее точки  $(-1, j0)$  сверху вниз должно быть на  $k/2$  больше числа пересечений в обратном направлении, где  $k$  — число правых полюсов передаточной функции  $W(p)$  разомкнутой системы, т. е. число полюсов с положительной действительной частью.

Доказательство критерия Найквиста можно найти, например, в работах [3, 11, 21, 33].

На рис. 4-4, в в качестве примера показаны две а. ф. ч. х. разомкнутой системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии вследствие наличия правых корней, но устойчивой в замкнутом состоянии. Характеристика 1 соответствует  $k = 1$ , а характеристика 2 — значению  $k = 2$ . (В первом случае имеем «половину» пересечения действительной оси левее точки  $(-1, j0)$ .)

Таким образом, в общем случае при применении критерия Найквиста необходимо предварительно определить число правых полюсов  $W(p)$ . Для одноконтурной системы, когда знаменатель  $W(p)$  представляет собой произведение знаменателей передаточных функций отдельных звеньев, это число находится легко, поскольку полюсами  $W(p)$  являются полюсы передаточных функций отдельных звеньев. У многоконтурных систем, особенно с перекрестными связями, задача определения числа  $k$  усложняется, и поэтому в этих случаях целесообразно отказаться от применения критерия Найквиста. В соответствии с критерием Найквиста об устойчивости можно судить не только по а. ф. ч. х., но и совместно по а. ч. х. и ф. ч. х. разомкнутой системы. Обычно при этом пользуются логарифмическими характеристиками, что представляет большое удобство в силу простоты их построения.

Согласно критерию Найквиста, для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, условием устойчивости ее в замкнутом состоянии является нехват а. ф. ч. х.  $W(j\omega)$  точки  $(-1, j0)$ . Последнее имеет место, если при частоте, на которой  $A(\omega) = 1$ , абсолютное значение фазы меньше  $\pi$ .

Сказанное непосредственно следует из рис. 4-4, а.

Таким образом, применительно к логарифмическим характеристикам, если учесть при этом, что значению  $A = 1$  соответствует  $L = 20 \lg A = 0$ , критерий устойчивости Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, сводится к тому, что л. а. х. должна пересечь ось абсцисс раньше, чем фаза, спадая, окончательно перейдет за значение  $-\pi$ . Или иными словами: на частоте среза  $\omega_c$  величина фазы должна быть меньше  $\pi$ .

Изложенное иллюстрируется рис. 4-5. Здесь изображены л. а. х.  $L(\omega)$  и четыре варианта л. ф. х.  $\varphi(\omega)$ . В случае л. ф. х. 1 и 4 замкнутая система устойчива, причем характеристика 4 соответствует а. ф. ч. х. 4 на рис. 4-4, а. Л. ф. х. 2 соответствует нахождению замкнутой системы на границе устойчивости, л. ф. х. 3 — неустойчивой замкнутой системе,

Для астатических систем и систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, требования к л. а. х. и л. ф. х. в отношении устойчивости можно сформулировать, исходя из соответствующих требований к а. ф. ч. х. В частности, для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, условием устойчивости в замкнутом состоянии является следующее: при положительной л. а. х. число пересечений л. ф. х. уровня  $-\pi$  снизу вверх должно быть на  $k/2$  раз больше числа пересечений в обратном направлении.

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценить величину запаса устойчивости, т. е. степени удаленности системы от границы устойчивости. Система, которая теоретически является устойчивой, но находится очень близко к границе устойчивости,

практически при ее реализации может оказаться неустойчивой как вследствие неточности математического описания системы, использованного при оценке устойчивости, так и из-за изменения во времени параметров системы.

В случае применения критерия Рауса — Гурвица о запасе устойчивости можно судить по тому запасу, с которым выполняются входящие в этот критерий неравенства. При использовании графических критериев Михайлова

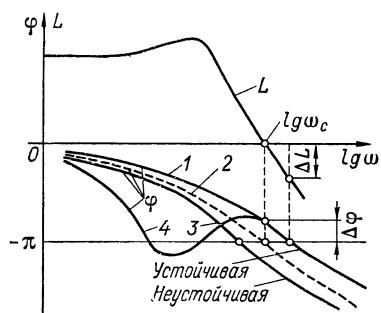


Рис. 4-5. Логарифмический критерий устойчивости Г. Найквиста

и Найквиста запас устойчивости определяется удаленностью соответствующих характеристик от критического положения, при котором система находится на границе устойчивости. Для критерия Михайлова это будет, удаленность годографа  $D(j\omega)$  от начала координат, а для критерия Найквиста — удаленность характеристики  $W(j\omega)$  от точки  $(-1, j0)$ .

Основное распространение в качестве меры запаса устойчивости получили вытекающие из критерия Найквиста две величины — запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$  и запас устойчивости по амплитуде  $\Delta L$ . Эти величины показаны на рис. 4-5 для системы с л. ф. х., представленной кривой 1. Аналогично они могут быть найдены и по а. ф. ч. х.

Запас устойчивости по фазе определяется величиной  $\Delta\varphi$ , на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза  $\omega_c$ , чтобы система оказалась на границе устойчивости.

Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной  $\Delta L$  допустимого подъема л. а. х., при котором система окажется на границе устойчивости. Таким образом, запас

по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту передачи  $k$  разомкнутой системы по отношению к его критическому по устойчивости значению.

При проектировании САУ рекомендуется выбирать  $\Delta\varphi \geq 30^\circ$ , а  $\Delta L \geq 6$  дБ. Последнее соответствует примерно двойному запасу коэффициента передачи по устойчивости.

#### § 4-5. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При синтезе САУ, когда требуется определить влияние значений каких-либо варьируемых параметров на устойчивость, строят область устойчивости системы в пространстве этих варьируемых параметров.

Область устойчивости определяет совокупность значений параметров системы, при которых система устойчива.

В случае если варьируемых параметров два, область устойчивости изображается на плоскости, как показано на рис. 4-6, а. Здесь  $A$  и  $B$  — варьируемые параметры. (Это могут быть постоянные времени, коэффициенты передачи звеньев и любые их комбинации.) На рисунке линией изображена граница устойчивости. Для указания, с какой стороны границы находится область устойчивости, вдоль границы наносится штриховка, которая обращена в сторону области устойчивости. В данном случае область устойчивости является замкнутой, что, однако, не обязательно. Каждая точка внутри области устойчивости (рис. 4-6, а) определяет комбинацию варьируемых параметров  $A_i$  и  $B_i$ , при которых система устойчива.

Все пространство вне области устойчивости называется областью неустойчивости. Все точки ее соответствуют значениям параметров, при которых система неустойчива.

При трех варьируемых параметрах область устойчивости получается трехмерной, как показано на рис. 4-6, б, где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — варьируемые параметры. Граница устойчивости при этом представляет собой трехмерную поверхность. При практических расчетах в этом случае область устойчивости изображается, как показано на рис. 4-6, в, тоже в плоскости двух параметров в виде границ устойчивости, соответствующих нескольким фиксированным значениям третьего параметра. Это соответствует сечениям исходной области устойчивости рядом плоскостей, определяемых фиксированными значениями одного параметра (см. штриховые линии на рис. 4-6, б).

В общем случае  $n$  варьируемых параметров область устойчивости представляет собой гиперповерхность в  $n$ -мерном пространстве.

Если система в пространстве всех своих параметров не имеет области устойчивости, она называется структурно неустойчивой. Структурно неустойчивая система не может



быть сделана устойчивой путем выбора значений ее параметров. Для получения устойчивости в этом случае необходимо изменить структурную схему системы.

Построение границы устойчивости осуществляется с помощью критериев устойчивости. В качестве примера на рис. 4-6, а с помощью критерия Гурвица построена граница области устойчивости для системы третьего порядка с передаточной функцией (4-8),

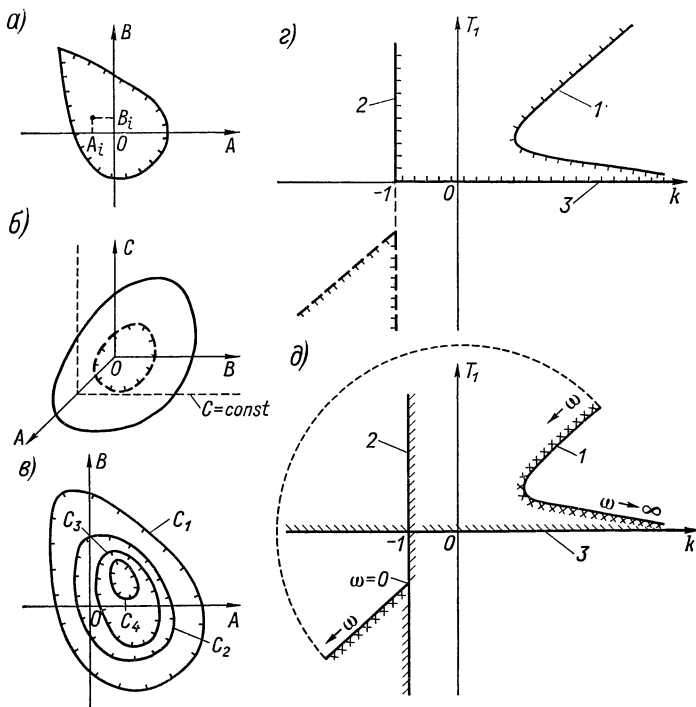


Рис. 4-6. Области устойчивости САУ

рассмотренной выше при изложении этого критерия устойчивости. Граница устойчивости построена в плоскости коэффициента передачи  $k$  разомкнутой системы и одной из постоянных времени  $T_1$ . Область устойчивости получилась незамкнутой. Она ограничена тремя линиями 1, 2 и 3. Уравнения этих границ области устойчивости получаются из условий устойчивости Гурвица (4-8а) для этой системы, если заменить в них неравенства равенствами, что соответствует нахождению системы на границе устойчивости. Граница 1 соответствует последнему условию (4-8а), которое дает уравнение границы в виде (4-8в). По этому уравнению можно построить границу 1, задаваясь, например, значениями варьируемого параметра  $T_1$  и находя соответствующие критические по устойчивости значения  $k$ , при которых система оказывается на границе устойчивости.

Граница 2 соответствует предпоследнему условию (4-8а), которое дает уравнение этой границы в виде

$$k = -1.$$

Граница 3 определяется первым условием (4-8а), которое дает уравнение

$$T_1 = 0.$$

Выше мы полагали, что постоянная времени  $T_1$  — величина положительная. Интересно отметить, что если ввести в рассмотрение отрицательные значения  $T_1$ , то, согласно условиям устойчивости (4-8а), в плоскости параметров  $k$ ,  $T_1$  появится новая часть области устойчивости в третьем квадранте, которая показана на рис. 4-6, 2 штриховой линией.

В общем случае границы области устойчивости по критерию Рауса — Гурвица строятся по следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{n-1} &= 0; \\ a_n &= 0; \\ a_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

Как известно из алгебры, здесь первое уравнение, т. е. равенство нулю предпоследнего минора Гурвица, соответствует наличию у характеристического уравнения (4-6)

$$D(\lambda) = 0$$

пары сопряженных мнимых корней; второе равенство соответствует наличию нулевого корня, а третье — наличию бесконечного корня.

Эти три уравнения охватывают три возможных случая попадания системы на границу устойчивости, т. е., иными словами, три принципиально возможных пути перехода какого-либо корня характеристического уравнения из левой комплексной полуплоскости в правую. Первый путь соответствует превращению какой-либо пары комплексных корней в чисто мнимые, т. е. переходу этих корней из левой полуплоскости на мнимую ось и, соответственно, возникновению в системе незатухающих колебаний. Второй путь соответствует превращению одного из действительных корней в нулевой, т. е. переходу его в начало координат, а третий — превращению этого корня в бесконечный корень, т. е. переходу его из левой полуплоскости в бесконечность. Последние два случая учитывают возможность перехода корня из левой полуплоскости в правую, минуя превращение его в мнимый корень, через начало координат или бесконечность.

Варьируемые параметры  $A$  и  $B$ , в плоскости которых строится область устойчивости, входят в выражения для  $\Delta_{n-1}(A, B)$ ,  $a_n(A, B)$  и  $a_0(A, B)$  в (4-10).

После построения линий, соответствующих уравнениям (4-10), плоскость варьируемых параметров оказывается разделенной

этими линиями на ряд областей, из числа которых надо найти область устойчивости. Обычно она бывает очевидной по чисто физическим соображениям. Однако в общем случае для этого требуется прибегнуть к какому-либо критерию устойчивости, проверив условия устойчивости в произвольной точке каждой из этих областей, пока не найдется область устойчивости.

У приведенной на рис. 4-6, *г* области устойчивости линия 1, линия 2 ( $k = -1$ ) и линия 3 ( $T_1 = 0$ ) соответствуют первому, второму и третьему уравнениям (4-10). Эти линии разбивают плоскость  $k, T_1$  на ряд областей, из которых в данном случае, несомненно, областью устойчивости является область, включающая в себя положительную полуось  $T_1$ , поскольку точки этой полуоси соответствуют коэффициенту передачи системы  $k = 0$ . Последнее предопределяет устойчивость системы, так как она состоит из устойчивых звеньев.

По критерию Михайлова система находится на границе устойчивости, когда годограф  $D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega)$  проходит через начало координат. Таким образом, уравнения границы устойчивости в пространстве варьируемых параметров  $A$  и  $B$ , согласно этому критерию, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} U_D(A, B, \omega) &= 0; \\ V_D(A, B, \omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

Эти уравнения, разумеется, включают все три названных выше случая попадания системы на границу устойчивости. Нулевой корень при этом соответствует  $\omega = 0$ , а бесконечный  $\omega = \infty$ .

Исключив из уравнений (4-11) параметр  $\omega$ , можно получить уравнение границы устойчивости, связывающее входящие в выражения  $U_D(A, B, \omega)$  и  $V_D(A, B, \omega)$  варьируемые параметры  $A$  и  $B$ . Однако практически проще строить границу устойчивости, используя  $\omega$  как параметр, который изменяют от 0 до  $\infty$ . Каждому значению  $\omega$  при этом соответствует определенная точка границы устойчивости.

При некоторых значениях  $\omega$  может оказаться, что система (4-11) превращается в одно уравнение, которое даст на плоскости  $A, B$  линию. Такие линии называются особыми линиями. В случае построения области устойчивости, изображенной на рис. 4-6, *г*, с помощью критерия Михайлова такими особыми линиями являются прямые 2 и 3. Первая из них соответствует  $\omega = 0$ , а вторая  $\omega = \infty$ . Линия 1 соответствует конечным значениям  $\omega$ , причем вдоль нее  $\omega$  увеличивается при движении в сторону уменьшения  $T_1$ .

После построения линий, соответствующих уравнениям (4-11), надо по-прежнему из всех областей, на которые они разбивают пространство варьируемых параметров, найти область устойчивости.

В случае применения критерия Михайлова последнюю операцию можно упростить, воспользовавшись специальной мето-

дикой, позволяющей сразу указать ту единственную область, которая может претендовать быть областью устойчивости. Если проверка на устойчивость в произвольной точке этой области дает отрицательный результат, это означает, что во всем рассматриваемом пространстве варьируемых параметров область устойчивости вообще отсутствует.

Упомянутая методика заключается в следующем правиле нанесения штриховки на построенные по уравнению (4-11) линии. Составляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_D}{\partial A} & \frac{\partial U_D}{\partial B} \\ \frac{\partial V_D}{\partial A} & \frac{\partial V_D}{\partial B} \end{vmatrix}.$$

Каждая линия штрихуется слева при движении по ней в сторону увеличения  $\omega$ , если знак определителя  $\Delta$  при значениях варьируемых параметров, соответствующих точкам этой линии, положителен, и справа — в противном случае.

После нанесения таким образом штриховки на все линии областью, претендующей быть областью устойчивости, будет область, в сторону которой обращены штриховкой все ограничивающие ее линии. При этом, поскольку вдоль особых линий величина  $\omega$  не меняется, эти линии штрихуются в зависимости от направления штриховки основных, т. е. неособых, линий, с которыми они имеют общие точки, включая схождение их в бесконечности. Особые линии штрихуются только в случае, если в таких общих точках определитель  $\Delta$  меняет знак. Они штрихуются тогда навстречу основным линиям. (В результате, в зависимости от направления штриховки основных линий, штриховки особых и основных линий получаются направленными либо друг к другу, либо, наоборот, в противоположные стороны.) Для иллюстрации на рис. 4-6,  $\partial$  показано нанесение штриховки по этому правилу для приведенного на рис. 4-6,  $z$  примера. Как видно из рис. 4-6,  $\partial$ , основные линии, на которых  $\omega$  изменяется, штрихуют двойной штриховкой.

Методика построения областей устойчивости на основе критерия Михайлова, включая описанный выше метод штриховки, разработана советским ученым Ю. И. Неймарком и получила название метода *Д - разбегения*.

Согласно критерию Найквиста, уравнения, определяющие границу устойчивости, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} U_W(A, B, \omega) &= -1; \\ V_W(A, B, \omega) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

где  $U_W$  и  $V_W$  — действительная и мнимая части  $W(j\omega)$ . Эти уравнения соответствуют прохождению а. ф. ч.  $W(j\omega)$  через точку  $(-1, j0)$ .

Уравнения (4-12) приводят к тем же параметрическим выражениям, что и уравнения (4-10), полученные из критерия Михайлова.

# КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 5-1. ПОНЯТИЕ О КАЧЕСТВЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

К процессам управления предъявляются следующие три основных требования: по точности в установившихся режимах, по устойчивости и по качеству переходных процессов. Точность в установившихся режимах и устойчивость САУ рассмотрены выше.

Перейдем теперь к рассмотрению качества переходных процессов в САУ.

Устойчивость САУ, т. е. затухание переходных процессов в ней, является необходимым, но далеко не достаточным условием практической пригодности системы. Существенно еще качество переходных процессов, т. е. сам характер протекания переходных процессов, и прежде всего их длительность и колебательность.

На рис. 5-1 приведены примеры переходных характеристик САУ, представляющих собой переходные процессы на выходе системы, вызванные воздействием в виде единичного скачка (см. § 1-3). Характеристики на рис. 5-1, а

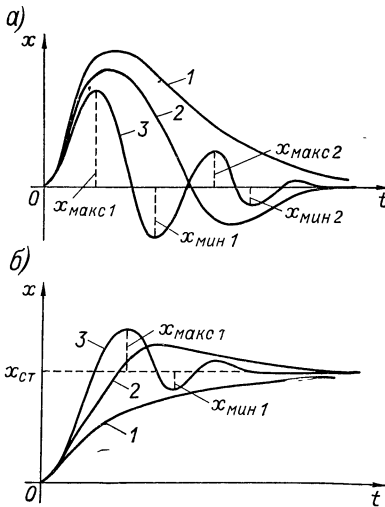


Рис. 5-1. Переходные характеристики САУ

соответствуют внешнему воздействию в виде возмущения, а на рис. 5-1, б — в виде изменения задающего воздействия, в соответствии с которым выходная величина  $x$  системы по окончании переходного процесса управления получает приращение  $x_{ст}$ .

Качество переходных процессов численно характеризуется следующими показателями качества.

**Время переходного процесса  $t_{п}$ .** Оно характеризует быстроту действия системы и определяется как интервал времени от начала переходного процесса до момента, когда отклонение выходной величины от ее нового установившегося значения становится меньше определенной достаточно малой величины. Обычно в качестве последней берут 5% максимального отклонения в переходный период для процессов типа изображенных на рис. 5-1, а или 5% от нового установившегося значения для процессов, подобных изображенным на рис. 5-1, б.

**Максимальное отклонение в переходный период.** В случае переходных процессов, вызванных возмущением (рис. 5-1, а), максимальное отклонение определяется величиной  $x_{\text{макс1}}$ , приходящейся на единицу возмущения  $f = 1(t)$ . В случае переходных процессов, вызванных изменением задающего воздействия (рис. 5-1, б), максимальное отклонение определяется относительно нового установившегося значения  $x_{\text{ст}}$  и равно в процентах

$$\sigma = \frac{x_{\text{макс}} - x_{\text{ст}}}{x_{\text{ст}}} 100. \quad (5-1)$$

Заметим, что эта величина аналогична предыдущей, поскольку здесь  $x_{\text{ст}}$  пропорционально задающему воздействию.

Величина  $\sigma$  часто называется **п е р е р е г у л и р о в а н и е м**.

**Колебательность переходного процесса.** Эта характеристика переходного процесса обычно определяется числом колебаний, равным числу минимумов кривой переходного процесса в интервале времени  $t_{\text{п}}$ , или для кривых, как на рис. 5-1, б, — **ч и с л о м п е р е р е г у л и р о в а н и й** за этот же интервал.

Часто колебательность переходного процесса оценивают отношением соседних максимумов  $x_{\text{макс2}}/x_{\text{макс1}}$ . Эта величина так и называется **к о л е б а т е л ь н о с т ь ю** и выражается в процентах. Незатухающие колебания при этом соответствуют колебательности 100%. Колебательность стремится к нулю при уменьшении до нуля второго максимума переходной характеристики, когда получается неколебательный процесс.

Обычно приемлемым числом колебаний в САУ считается 1—2. Однако бывают системы, в которых колебательность не допускается совсем. С другой стороны, в ряде систем иногда допускаются три и более колебаний.

При выборе структурной схемы и значений параметров САУ в процессе ее синтеза выполнение требований в отношении перечисленных показателей качества переходного процесса заставляет искать компромисса в связи с противоречивостью этих требований.

Так, например, если в рассмотренной в предыдущей главе системе, состоящей из трех статических звеньев первого порядка (область устойчивости системы показана на рис. 4-6, з), установить достаточный малый коэффициент передачи, переходная характеристика системы будет неколебательной и плавной вроде характеристик 1 на рис. 5-1, а и б. При увеличении коэффициента передачи переходные характеристики сперва примут вид характеристик 2, а затем характеристик 3 (рис. 5-1, а и б), т. е. при этом будет увеличиваться быстродействие системы (уменьшаться  $t_{\text{п}}$ ), но одновременно с этим появится и будет нарастать колебательность. При дальнейшем увеличении коэффициента передачи вплоть до его критического по устойчивости значения, соответствующего границе устойчивости, колебательность постепенно возрастет до 100%. Вследствие этого одновременно и длительность переходного процесса  $t_{\text{п}}$ , которая вначале уменьшалась, начнет

вновь нарастать до бесконечности. Максимальное отклонение  $x$  в переходном процессе, вызванном возмущением (рис. 5-1, а), уменьшается с ростом коэффициента передачи. Зато при этом по мере роста колебательности возникает и увеличивается перерегулирование переходного процесса, вызванного изменением задающего воздействия (рис. 5-1, б).

Выше мы говорили о качестве переходного процесса применительно к воздействию в виде скачка. В общем случае произвольного внешнего воздействия переходный процесс  $x(t)$  в системе, обусловленный этим воздействием, представляет собой решение уравнения (4-1):

$$D(p)x = M(p)f,$$

т. е. имеет вид (4-2):

$$x(t) = x_{\text{уст}}(t) + x_{\text{п}}(t),$$

где по (4-3)

$$x_{\text{п}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}.$$

При этом, очевидно, качество переходного процесса будет зависеть не только от собственных свойств системы, но и от самого внешнего воздействия (от места его приложения, величины, характера изменения во времени), что определяет правую часть уравнения (4-1). Кроме того, качество переходного процесса будет зависеть также от начальных условий, т. е. от состояния системы в момент приложения воздействия. Это сказывается на постоянных интегрирования  $C_i$  в решении (4-3).

В одной и той же системе переходный процесс при одном воздействии может быть совсем неколебательным, а при другом — иметь недопустимо большую колебательность. Более того, переходный процесс, вызванный одним и тем же воздействием, может в широких пределах изменять свои показатели при изменении начальных условий. Например, может оказаться, что при нулевых начальных условиях единственная колебательная составляющая переходного процесса, входящая в  $\sum C_i e^{\lambda_i t}$  решения для  $x_{\text{п}}(t)$ , имеет очень малую постоянную интегрирования  $C_i$  и поэтому практически не сказывается на кривой переходного процесса, который получается монотонным. И вместе с этим при некоторых других начальных условиях эта составляющая может возрасти и оказаться доминирующей в общей сумме составляющих, делая весь процесс существенно колебательным.

Таким образом, при оценке качества переходных процессов в САУ необходимо оговаривать воздействие и начальные условия, при которых имеет место данное качество. *При общей характеристике качества переходных процессов в системе его обычно оценивают для единичного ступенчатого воздействия при нулевых начальных условиях, т. е. для переходной характеристики, причем это делается для основного внешнего воздействия (или для*

нескольких основных воздействий, например одного основного возмущения и задающего воздействия).

Исчерпывающее представление о качестве переходных процессов дает, естественно, сама кривая процесса  $x(t)$ . Однако при синтезе систем необходимо иметь возможность судить об основных показателях качества переходных процессов в системе без построения их кривых, по каким-либо косвенным признакам, которые определяются более просто, чем кривая  $x(t)$ , и, кроме того, позволяют связать показатели качества непосредственно со значениями параметров системы. Такие косвенные признаки разработаны и называются критериями качества переходных процессов. При исследовании качества переходных процессов они играют ту же роль, что и критерии устойчивости при исследовании устойчивости САУ.

Существуют три группы критериев качества — частотные, корневые и интегральные. Ниже они будут рассмотрены последовательно.

## § 5.2. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Эти критерии позволяют судить о качестве переходных процессов по частотным характеристикам системы. При этом могут использоваться разные частотные характеристики замкнутой системы.

Для минимально-фазовых систем качество переходных процессов может быть оценено по одной амплитудной характеристике замкнутой системы  $A_3(\omega)$  (рис. 5-2, а). Как известно (см. § 1-3), у таких систем а. ч. х. и ф. ч. х. однозначно связаны, и, следовательно, по одной а. ч. х. можно полностью определить все свойства системы, в том числе и качество переходных процессов.

По а. ч. х. можно оценить колебательность и длительность переходной характеристики системы.

Колебательность определяется по величине относительного максимума характеристики, который поэтому называется показателем колебательности:

$$M = \frac{A_{3, \text{макс}}}{A_3(0)} = \frac{A_3(\omega_p)}{A_3(0)}.$$

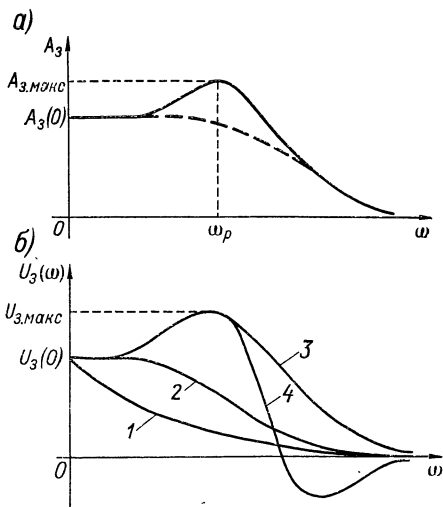


Рис. 5-2. Частотные критерии качества переходных процессов



При  $M < 1$  переходная характеристика системы неколебательна (штриховая кривая на рис. 5-2, а.) Чем больше  $M$ , тем больше колебательность. При  $M \rightarrow \infty$  колебательность возрастает до получения незатухающих колебаний, соответствующих нахождению системы на границе устойчивости.

Действительно, поскольку  $A_3(\omega)$  представляет собой модуль  $W_3(j\omega)$ , тот факт, что  $A_3(\omega) \rightarrow \infty$ , означает, что передаточная функция замкнутой системы имеет пару сопряженных мнимых полюсов  $\pm j\omega_p$ , и, следовательно, в системе существуют незатухающие колебания с частотой  $\omega_p$ .

С такой связью колебательности с относительным максимумом а. ч. х. мы уже познакомились ранее на примере типового колебательного звена (см. § 1-4, рис. 1-8).

Оптимальным обычно считается  $M = 1,1 \div 1,5$ . При этом переходная характеристика имеет слабую колебательность с частотой, близкой к частоте  $\omega_p$  резонансного пика а. ч. х.

Для более точной численной оценки колебательности надо учитывать помимо величины  $M$  еще и другие свойства характеристики  $A_3(\omega)$ . Соответствующие формулы можно найти в работе [12].

Длительность  $t_n$  переходной характеристики определяется шириной частотной характеристики  $A_3(\omega)$ . При этом зависимость здесь такая: чем шире частотная характеристика системы, тем короче ее переходная (временная) характеристика, т. е. тем меньше  $t_n$ .

С такой обратной зависимостью мы уже знакомы по типовым звеньям (см. § 1-4). Так, в случае аperiodического звена с передаточной функцией  $\frac{k}{Tp+1}$  ширина а. ч. х. обратно пропорциональна постоянной времени  $T$  звена. (Вспомним, что сопрягающая частота, соответствующая началу спада л. а. х., равна  $1/T$  — см. рис. 1-7.) В то же время длительность переходной характеристики  $t_n \approx 3T$ , т. е. прямо пропорциональна  $T$ .

У колебательного звена второго порядка с передаточной функцией  $\frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$  длительность частотной характеристики и  $t_n$  аналогично связаны через постоянную времени  $T_1$ , определяющую инерционность звена.

В первом приближении длительность переходной характеристики может быть оценена по величине резонансной частоты  $\omega_p$ . Так как частота колебаний переходной характеристики примерно равна  $\omega_p$ , время  $t_{\max}$  достижения первого максимума переходной характеристикой близко половине периода колебаний этой частоты, т. е.

$$t_{\max} \approx \frac{\pi}{\omega_p}. \quad (5-2)$$

Если при этом предположим, что переходная характеристика системы в течение  $t_n$  имеет 1—2 колебания,

$$t_n \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_p}. \quad (5-3)$$

Формулы для более точной оценки длительности переходной характеристики по  $A_3(\omega)$  имеются в работе [12].

Хотя приведенные выше численные оценки качества переходных характеристик относятся к минимально-фазовым системам, однако в первом приближении они могут быть применены и к неминимально-фазовым системам. При этом возможная погрешность тем больше, чем больше фазовая характеристика системы отличается от минимально-фазовой характеристики, соответствующей данной а. ч. х.

Показатель колебательности  $M$  и резонансная частота  $\omega_p$  а. ч. х. замкнутой системы могут быть определены и непосредственно по частотным характеристикам разомкнутой системы исходя из известной связи между характеристиками замкнутой и разомкнутой систем, определяемой следующим выражением для амплитудно-частотной функции:

$$W_3(j\omega) = \frac{W_{xf}(j\omega)}{1 + W(j\omega)}.$$

На основании этой связи предложены графические приемы и составлены номограммы для определения указанных выше показателей а. ч. х. замкнутой системы по а. ф. ч. х. или л. а. х. разомкнутой системы [12, 33].

При использовании этих приемов и номограмм необходимо учитывать, для какой передаточной функции  $W_{xf}(p)$  они рассчитаны. Как правило, принимается  $W_{xf}(p) = W(p)$ . В приложении 5 дан ряд номограмм для определения качества переходной характеристики по л. а. х. разомкнутой системы.

В первом приближении длительность и колебательность переходной характеристики замкнутой системы могут быть оценены непосредственно по частоте среза и величинам запасов по фазе и по амплитуде, определенным по л. а. х. разомкнутой системы. При этом в случае колебательной переходной характеристики резонансная частота  $\omega_p$  а. ч. х. замкнутой системы близка к частоте среза  $\omega_c$  л. а. х. разомкнутой системы. Поэтому значения  $t_{\max}$  и  $t_n$  могут быть определены по формулам (5-2) и (5-3) при подстановке в них  $\omega_p \approx \omega_c$ .

В случае неколебательной переходной характеристики

$$t_n \approx \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (5-4)$$

Что касается колебательности, то, как уже указывалось в § 4-5, можно считать, что переходная характеристика имеет достаточно малую колебательность, если запас по фазе не менее  $30^\circ$ , а запас по амплитуде не менее 6 дБ, что соответствует 2 в линейном масштабе.

Для оценки колебательности минимально-фазовой системы достаточно иметь одну л. а. х. Колебательность считается допустимой, если на частоте среза, т. е. в точке пересечения с осью абсцисс, л. а. х. имеет наклон не более 20 дБ/дек. При этом, чем шире

участок с таким наклоном, тем меньше колебательность. В частности, при ширине этого участка около одной декады и нахождении частоты среза ближе к его концу перерегулирование в системе не будет превышать 20—30%.

Приведенные оценки качества переходных процессов в замкнутой системе по л. а. х. разомкнутой системы справедливы для случая  $W_{xf}(p) = W(p)$ , характерного, в частности, для следящих систем. В общем случае произвольной передаточной функции  $W_{xf}(p)$ , и особенно при ненулевых начальных условиях, этими оценками можно пользоваться только как сугубо ориентировочными. При этом погрешность будет тем больше, чем значительнее  $W_{xf}(p)$  отличается от  $W(p)$ .

Однако для минимально-фазовых систем при  $W_{xf}(p) = W(p)$  с помощью л. а. х. разомкнутой системы наиболее просто выполняется как анализ качества переходных процессов, так и синтез САУ на заданное качество. Общий порядок синтеза при этом следующий.

1. Определение т р е б у е м о й л. а. х. САУ, то есть л. а. х., при которой выполняются заданные требования к качеству переходных процессов. Собственно, качество, как и устойчивость, определяется не всей, а среднечастотной частью л. а. х., расположенной в районе частоты среза. Как было сказано, наклон л. а. х. в районе частоты среза должен быть не более 20 дБ/дек, а ширина участка с таким наклоном и величина частоты среза определяются заданными значениями колебательности и длительности переходной характеристики системы (см. приложение 5).

Высокочастотный конец л. а. х. не имеет существенного значения для качества переходного процесса, сказываясь только в самой начальной его части. Поэтому эту часть л. а. х. при синтезе регламентировать не следует — она уточняется в ходе реализации требуемой л. а. х. соответствующей структурной схемой.

Низкочастотная часть л. а. х., прилегающая к нулевой частоте, которая сама в логарифмических координатах отсутствует, определяет установившиеся детерминированные режимы САУ. Поэтому эту часть л. а. х. выбирают, руководствуясь требованиями к точности в этих режимах. Порядок астатизма системы определяет наклон низкочастотной части л. а. х.: у статических систем он равен нулю, при первом порядке астатизма наклон — 20 дБ/дек, при втором порядке — 40 дБ/дек и т. д. Уровень этой части л. а. х. определяется требуемым коэффициентом передачи: он равен  $20 \lg k$  у статических систем и той же величине при  $\omega = 1$  у астатических. (Действительно, у интегрирующего звена  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$ , т. е.  $L(1) = 20 \lg k$ .)

Соединяя ранее полученную среднечастотную часть л. а. х. с низкочастотной частью прямой с наклоном —  $(40 \div 60)$  дБ/дек, получают требуемую л. а. х. разомкнутой САУ.

2. Определение л. а. х. в а р ь и р у е м о й ч а с т и С А У. Как правило, при синтезе САУ мы не имеем полной свободы

в выборе всей ее структурной схемы. Часть системы, и прежде всего объект управления, оказывается заданной или однозначно выбирается по другим соображениям.

Вычитая из требуемой л. а. х., найденной выше, л. а. х. известной части системы, находят л. а. х. неизвестной пока, т. е. варьируемой, части системы. Добавка ее к л. а. х. известной части САУ обеспечит получение в целом требуемой л. а. х., а следовательно, и требуемой переходной характеристики.

3. Определение передаточной функции варьируемой части САУ. Эта функция определяется по найденной л. а. х. с помощью известных методов теории цепей [36].

Колебательность и длительность переходной характеристики могут быть определены и по действительной  $U_3(\omega)$  или мнимой  $V_3(\omega)$  частотным характеристикам замкнутой системы. При этом, поскольку эти характеристики однозначно связаны не только у минимально-фазовых, но и у всех устойчивых систем (см. § 2-3), точная оценка качества переходных процессов в любой устойчивой системе может быть осуществлена по любой из этих характеристик.

Как и в случае использования а. ч. х.  $A_3(\omega)$ , колебательность и длительность переходного процесса зависят здесь от относительного максимума и ширины частотной характеристики.

На рис. 5-2, б приведены различные формы характеристики  $U_3(\omega)$ . В случае вогнутой характеристики 1 переходная характеристика не имеет перерегулирования. В случае кривой 2 (относительный максимум  $U_{3, \text{макс}}/U_3(0) = 1$ ) величина перерегулирования  $\sigma \leq 18\%$ . Кривые 3 и 4 соответствуют колебательной переходной характеристике, причем величина перерегулирования растет с увеличением относительного максимума  $U_{3, \text{макс}}/U_3(0)$ . При  $U_{3, \text{макс}}/U_3(0) \rightarrow \infty$  колебания возрастают до незатухающих, т. е. система приходит на границу устойчивости. В случае кривой 3 при  $U_{3, \text{макс}}/U_3(0) = 1,2$  величина  $\sigma \leq 50\%$ , при  $U_{3, \text{макс}}/U_3(0) = 1,5$  величина  $\sigma \leq 80\%$ . Наличие минимума у характеристики (кривая 4 на рис. 5-2, б) также увеличивает колебательность переходной характеристики.

Длительность переходной характеристики в первом приближении оценивается шириной характеристики  $U_3(\omega)$ , определяемой значением частоты  $\omega_n$ , при котором положительная часть  $U_3(\omega)$  становится меньше  $0,2 U_3(0)$ . Величину  $\omega_n$  называют интервалом положительности  $U_3(\omega)$ . При этом всегда длительность переходной характеристики

$$t_n > \frac{\pi}{\omega_n}. \quad (5-5)$$

Для характеристики  $U_3(\omega)$  в виде кривой 1 на рис. 5-2, б

$$t_n \geq \frac{4\pi}{\omega_n}. \quad (5-6)$$

Для кривой 2 на рис. 5-2, б

$$t_{\pi} = (1 \div 4) \frac{\pi}{\omega_{\pi}}. \quad (5-7)$$

Для кривых 3 и 4 на рис. 5-2, б  $t_{\pi}$  тоже связано с  $\omega_{\pi}$  обратно пропорциональной зависимостью, аналогичной (5-7). Однако значение коэффициента пропорциональности в этом случае зависит от величины относительного максимума характеристики  $U_3(\omega)$ , увеличиваясь вместе с ним. При этом оно может быть значительно больше величины, стоящей в (5-7).

Более детальные и точные зависимости, связывающие показатели переходной характеристики системы с ее характеристикой  $U_3(\omega)$ , а также с  $V_3(\omega)$ , имеются в работах [12, 33].

В целом характеристики  $U_3(\omega)$  и  $V_3(\omega)$  позволяют наиболее точно оценить качество переходного процесса, хотя при этом и требуется ббльший труд, чем, например, при применении л. а. х. С их помощью можно также графическим способом построить весь переходный процесс  $x(t)$ . Последнее будет показано в следующей главе.

Решение задачи синтеза САУ на заданное качество переходного процесса с помощью действительной или мнимой характеристик начинается, как и в случае применения л. а. х., с построения требуемой характеристики. После этого выбирают передаточную функцию варьируемой части системы, которая обеспечивает получение требуемой в целом характеристики. Для нахождения варьируемой части системы, особенно в случае минимально-фазовых систем, удобно использовать л. а. х., переходя к ним с помощью номограмм (см. § 1-5).

Выше рассматривалась связь частотных характеристик системы с качеством ее переходной характеристики. Изложенные методы можно распространить на случай оценки качества переходного процесса, вызванного не единичным ступенчатым, а произвольным воздействием, путем предварительного преобразования структурной схемы системы с произвольным воздействием в эквивалентную ей схему с воздействием в виде единичной ступеньки. При нулевых начальных условиях преобразование сводится к введению перед входом схемы, куда приложено внешнее воздействие, фиктивного звена с передаточной функцией  $W_{\phi}(s) = sL[f(t)]$ . Выход такого звена при воздействии на него единичной ступеньки  $1(t)$  равен, согласно (1-37),  $L^{-1}\left[\frac{W_{\phi}(s)}{s}\right]$ , т. е. заданному произвольному воздействию  $f(t)$ . В общем случае, включая произвольные начальные условия, такое преобразование для частотных характеристик сводится к переходу к так называемым обобщенным частотным характеристикам, которые будут рассмотрены в § 6-2.

### § 5-3. КОРНЕВЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Эта группа критериев основана на оценке качества переходных процессов по значениям полюсов и нулей передаточной функции системы.

Передаточная функция системы, связывающая выходную величину  $x$  с каким-либо воздействием  $f$ ,

$$W_3(p) = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} = \frac{M(p)}{D(p)}, \quad (5-8)$$

где

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n;$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m.$$

Разложив многочлены в числителе и знаменателе на множители, передаточную функцию системы можно представить в виде

$$W_3(p) = \frac{b_0 \prod_j (p - \lambda_{0j})}{a_0 \prod_i (p - \lambda_i)}, \quad (5-9)$$

где  $\lambda_i$  — полюсы передаточной функции;  $\lambda_{0j}$  — нули передаточной функции, зависящие от места приложения воздействия. Отсюда видно, что полюсы и нули с точностью до постоянного коэффициента  $b_0/a_0$  определяют передаточную функцию системы. Следовательно, изучая их расположение в комплексной плоскости, можно судить о качестве переходных процессов в системе.

Заметим попутно, что при исследовании устойчивости нас интересовали только полюсы передаточной функции, а здесь при рассмотрении качества оказывается необходимым учитывать и ее нули. Только в частном случае, когда передаточная функция не имеет нулей, т. е.

$$W_3(p) = \frac{b_0}{a_0 \prod_i (p - \lambda_i)}, \quad (5-9a)$$

качество переходных процессов тоже определяется только полюсами передаточной функции.

Начнем с этого частного случая, т. е. рассмотрим, как качество переходных процессов в системе зависит от полюсов ее передаточной функции.

В общем виде переходный процесс в системе, описываемой передаточной функцией (5-8), имеет вид (4-3):

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (5-10)$$

где по-прежнему  $\lambda_i$  — корни характеристического уравнения, т. е. полюсы передаточной функции, а  $C_i$  — постоянные интегриро-

вания, зависящие для данной системы от воздействия  $f$ , места его приложения, а также от начальных условий.

Согласно выражению (5-10), как уже было показано в § 4-1, переходный процесс в устойчивой системе распадается на затухающие аperiodические и колебательные составляющие. Первые определяются действительными корнями характеристического уравнения, а вторые — парами сопряженных комплексных корней.

Если найти длительность самой длительной составляющей и величину колебательности самой колебательной составляющей, то по ним можно оценить верхние пределы величин длительности и колебательности всего переходного процесса.

Покажем, как можно найти указанные величины.

**Критерий длительности — степень устойчивости  $\eta$ .** Время затухания отдельной составляющей переходного процесса в (5-10)

определяется величиной  $e^{a_i t}$ , т. е.  $e^{-\frac{t}{T_i}}$ , где  $T_i = \frac{1}{|\alpha_i|}$  — постоянная времени затухания, а  $\alpha_i$  — действительная часть  $i$ -го корня характеристического уравнения (см. § 4-1). Можно считать, что длительность данной составляющей  $t_{pi} \approx 3T_i$ . (Вспомним, например, переходные характеристики звеньев первого и второго порядков, рассмотренные в § 1-4.) Таким образом, длительность отдельных составляющих переходного процесса пропорциональна их постоянным времени затухания, т. е. обратно пропорциональна абсолютному значению действительной части определяющих их корней характеристического уравнения. Наиболее длительной составляющей является, следовательно, составляющая, соответствующая корню с минимальной величиной действительной части  $|\alpha|_{\min}$ .

Абсолютная величина  $|\alpha|_{\min}$  называется **степенью устойчивости** и обозначается

$$\eta = |\alpha|_{\min}.$$

При этом длительность всего переходного процесса будет

$$t_p \leq \frac{3}{\eta}. \quad (5-11)$$

Название «степень устойчивости» связано не с рассматриваемым здесь вопросом, а с тем, что эта величина  $|\alpha|_{\min}$  геометрически представляет собой расстояние от мнимой оси до ближайшего корня и, таким образом, служит мерой удаления системы от границы устойчивости, которой в комплексной плоскости является мнимая ось.

На рис. 5-3, а дана соответствующая иллюстрация для случая, когда ближайшим к мнимой оси является действительный корень. В равной мере это может быть и пара сопряженных комплексных корней.

**Критерий колебательности** — степень колебательности  $\mu$ . Колебательность колебательной составляющей переходного процесса (см. § 4-1)

$$C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i)$$

определяется отношением соседних максимумов (рис. 5-3, б):

$$\frac{x_{i\text{макс}2}}{x_{i\text{макс}1}} = \frac{C_i e^{\alpha_i(t_1 + \tau_i)}}{C_i e^{\alpha_i t_1}} = e^{\alpha_i \tau_i}.$$

Здесь, согласно рис. 5-3, б,  $\tau_i = 2\pi/\beta_i$  — период колебаний данной составляющей.

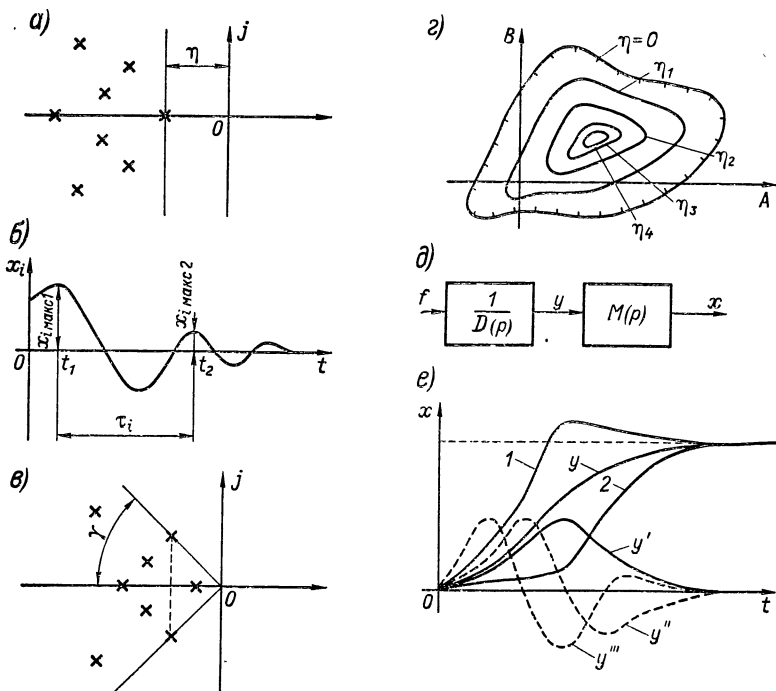


Рис. 5-3. Корневые критерии качества переходных процессов

Таким образом, колебательность равна  $e^{2\pi \frac{\alpha_i}{\beta_i}}$  или, так как  $\alpha_i < 0$ ,  $e^{-2\pi \frac{|\alpha_i|}{\beta_i}}$ . Следовательно, мерой колебательности является отношение  $\frac{\beta_i}{|\alpha_i|}$ : чем оно больше, тем больше колебательность составляющей переходного процесса. Наиболее колебательной является составляющая, у которой это отношение максимально. Соответствующая величина обозначается

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\text{макс}}$$



и называется степенью колебательности. Она является оценкой сверху колебательности всего переходного процесса, т. е. его колебательность

$$\frac{x_{\text{п. макс}}}{x_{\text{п. макс1}}} \leq e^{-\frac{2\pi}{\mu}}. \quad (5-12)$$

В комплексной плоскости корень, определяющий наиболее колебательную составляющую, соответствует наибольшему значению угла  $\gamma = \arctg \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$  между лучом, направленным через корень из начала координат, и действительной осью (рис. 5-3, в).

Значения степени устойчивости  $\eta$  и степени колебательности  $\mu$  можно определить через параметры системы с помощью критериев устойчивости. Покажем, например, как это делается с помощью критериев, использующих многочлен

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

(критерии Рауса — Гурвица и Михайлова).

Введем новую переменную  $q$  подстановкой в  $D(\lambda)$

$$\lambda = q - \eta, \quad (5-13)$$

где  $\eta$  — пока неизвестная положительная действительная величина.

Раскрыв скобки двучленов  $(q - \eta)^i$  по формуле бинома Ньютона, получим новый многочлен

$$D(q) = b_0 q^n + b_1 q^{n-1} + \dots + b_{n-1} q + b_n,$$

коэффициенты  $b_i$  которого определены через коэффициенты  $a_i$  многочлена  $D(\lambda)$  и неизвестный параметр  $\eta$ .

Нули  $D(q)$

$$q_{i, i+1} = (\alpha_i + \eta) \pm j\beta_i = -(|\alpha_i| - \eta) \pm j\beta_i.$$

Они отличаются от нулей  $D(\lambda)$

$$\lambda_{i, i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$$

только уменьшением действительной части на величину  $\eta$ , так как, согласно (5-13), переход от  $D(\lambda)$  к  $D(q)$  соответствует в комплексной плоскости смещению мнимой оси влево на  $\eta$ .

Применив критерий Рауса — Гурвица или критерий Михайлова, можно аналогично, например, тому, как в § 4-5 находилось критическое по устойчивости значение коэффициента передачи системы, определить критическое значение  $\eta$  как варьируемого параметра, при котором многочлен  $D(q)$  окажется «на границе устойчивости», т. е. приобретет корень на смещенной влево мнимой оси (рис. 5-3, а). Очевидно, это значение и будет искомой величиной степени устойчивости  $\eta = |\alpha|_{\text{мин.}}$ .

Если стоит задача синтеза, когда надо выбрать какой-либо варьируемый параметр системы с учетом его влияния на степень устойчивости  $\eta$ , следует по обычной методике построения границы

устойчивости построить по многочлену  $D(q)$  зависимость предельного по устойчивости значения  $\eta$  от этого варьируемого параметра в виде «границы устойчивости» в плоскости  $\eta$  и данного варьируемого параметра.

В случае двух варьируемых параметров строятся «границы устойчивости» в их плоскости для ряда значений  $\eta$  по многочлену  $D(q)$ . Граница, соответствующая  $\eta = 0$ , очевидно, является границей устойчивости реальной системы, соответствующей многочлену  $D(\lambda)$ . В результате внутри действительной области устойчивости системы получаем линии равной степени устойчивости  $\eta$  (см. рис. 5-3,  $z$ , где  $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \eta_4$ ). Таким образом, для любой точки внутри области устойчивости можно, интерполируя, указать величину  $\eta$  и соответственно максимально возможную длительность переходного процесса.

Аналогично находится степень колебательности  $\mu$  и строятся линии равных значений  $\mu$ . При этом делается следующая замена переменной:

$$\lambda = -jqe^{j\gamma}, \quad (5-14)$$

где  $\gamma = \arctg \mu$ .

Если подстановка  $\lambda = q - \eta$  означает параллельное смещение влево мнимой оси, то подстановка (5-14) соответствует повороту мнимой оси против часовой стрелки на угол  $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ .

Искомое значение  $\mu$  при анализе определяется значением параметра  $\gamma$ , при котором полученный после подстановки (5-14) многочлен  $D(q)$  окажется «на границе устойчивости», т. е. один из его корней попадает на мнимую ось в результате поворота последней.

Как было отмечено выше, оценка длительности и колебательности переходных процессов в системе по значениям  $\eta$  и  $\mu$  является оценкой сверху, т. е. действительный переходный процесс может иметь значительно лучшее качество. Это будет в том случае, когда составляющие процесса, по которым определяются значения  $\eta$  и  $\mu$ , малы по сравнению с другими составляющими, т. е. соответствующие им постоянные интегрирования в сумме (5-10) малы по сравнению с постоянными интегрирования других составляющих.

Рассмотренная методика оценки качества переходных процессов по расположению корней характеристического уравнения, т. е. полюсов передаточной функции, в комплексной плоскости пригодна только для систем, передаточные функции которых не имеют нулей, т. е. имеют вид (5-9а) (и при этом только для нулевых начальных условий). В общем случае, когда передаточная функция (5-8) имеет нули, т. е. может быть представлена в виде (5-9), при оценке качества необходимо учитывать и эти нули или, другими словами, правую часть  $M(p)$  уравнения системы. Оценка качества только по полюсам передаточной функции в этом случае может дать большую ошибку, причем в любую сторону, т. е.

действительный переходный процесс может быть как лучше, так и хуже.

Вместе с тем, при прочих равных условиях и в этом случае качество переходного процесса будет тем лучше, чем больше  $\eta$  и меньше  $\mu$ . Таким образом, при выборе варьируемых параметров в общем случае системы учет значений  $\eta$  и  $\mu$  имеет определенный смысл.

Чтобы пояснить характер влияния нулей передаточной функции на качество переходного процесса, представим формально систему с передаточной функцией  $\frac{M(p)}{D(p)}$ , как показано на рис. 5-3,  $\partial$ , в виде последовательного соединения звена с передаточной функцией  $\frac{1}{D(p)}$ , не имеющей нулей, и звена с передаточной функцией

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m,$$

дающего на выходе сумму входного воздействия и его  $m$  производных. Оценка качества переходного процесса с помощью  $\eta$  и  $\mu$  справедлива для кривой переходного процесса величины  $y$  на выходе первого звена. На выходе второго звена кривая  $y(t)$  будет дополнена составляющими, представляющими собой производные  $y(t)$ . В результате члены  $M(p)$  с положительными коэффициентами  $b_i$  приведут к повышению колебательности и ускорению переходного процесса, а отрицательные члены, наоборот, — к затягиванию процесса  $x(t)$  на выходе по сравнению с процессом  $y(t)$ .

Сказанное иллюстрируется на рис. 5-3,  $e$  на примере производной кривой  $y(t)$  для  $M(p) = b_0 p + b_1$ . Кривая 1 соответствует  $b_0 > 0$ , а кривая 2 —  $b_0 < 0$  (принято  $b_1 = 1$ ). На том же рис. 5-3,  $e$  приведены вторая  $y''$  и третья  $y'''$  производные  $y$ , которые следует прибавить к кривой  $y(t)$  (или вычесть из нее) при  $M(p)$  соответственно второго и третьего порядков.

Таким образом, действительно, наличие нулей у передаточной функции, т. е. наличие в ее числителе  $M(p)$  членов с  $p$ , может существенно влиять на качество переходного процесса в направлении, определяемом знаками этих членов.

Например, для системы автоматического регулирования, изображенной на рис. 1-16, переходный процесс, вызванный возмущением в виде изменения нагрузки, описывается передаточной функцией (1-103), имеющей три левых нуля, а переходный процесс при изменении уставки регулятора определяется передаточной функцией (1-104) с одним левым нулем. Соответственно процесс регулирования при изменении нагрузки будет существенно более колебательным, чем при изменении уставки.

Заметим, что аналогично влияют на переходный процесс и ненулевые начальные условия, т. е. ненулевые значения производных выходной величины  $x$  в начале переходного процесса.

Это очевидно, если вспомнить, что решение неоднородного дифференциального уравнения, т. е. уравнения с правой частью, эквивалентно решению однородного уравнения при соответственно измененных начальных условиях.

Рассмотрим теперь другой корневой метод, предназначенный для синтеза САУ на заданное качество переходного процесса и основанный на использовании формул Виетта, которые выражают корни уравнения через его коэффициенты [23]. Все сказанное выше об ограниченности корневых критериев относится и к этому методу.

Пусть имеем характеристическое уравнение системы

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Коэффициенты уравнения определяются параметрами системы, которые надо выбрать по условию обеспечения требуемого качества переходного процесса.

Разделив это уравнение на  $a_0$ , перепишем его в другой форме:

$$\lambda^n + a'_1\lambda^{n-1} + a'_2\lambda^{n-2} + \dots + a'_{n-1}\lambda + a'_n = 0. \quad (5-15)$$

Как известно, по формулам Виетта коэффициенты уравнения (5-15) можно выразить через его корни:  $a'_1 = \Sigma \lambda_i$ ;  $a'_2 = \Sigma \lambda_i \lambda_{i+1}$ ,  $a'_3$  равен сумме произведений трех корней и т. д.,  $a'_n = \Pi \lambda_i$ .

Если теперь, исходя из требуемого качества переходного процесса, задаться расположением корней характеристического уравнения в комплексной плоскости, т. е. действительными частями корней, определяющими длительность составляющих переходного процесса, и отношениями мнимых и действительных частей, определяющих колебательность этих составляющих, то по формулам Виетта можно найти значения коэффициентов характеристического уравнения или соотношения между ними, из которых определятся искоемые значения варьируемых параметров системы.

Обратим прежде всего особое внимание на последний коэффициент  $a'_n$ . Так как он равен произведению всех корней характеристического уравнения, то чем больше его величина, тем при прочих равных условиях будут больше действительные части корней и, следовательно, короче переходный процесс в системе. В частности, если все корни действительные и кратные, то они равны

$$\alpha = -\sqrt[n]{a'_n}.$$

Уравнение (5-15) удобно привести к такому виду:

$$\lambda^n + A_1\Omega_0\lambda^{n-1} + A_2\Omega_0^2\lambda^{n-2} + \dots + A_{n-1}\Omega_0^{n-1}\lambda + \Omega_0^n = 0. \quad (5-16)$$

Здесь коэффициент  $\Omega_0 = \sqrt[n]{a'_n}$  — так называемый среднегеометрический корень. В комплексной плоскости он определяет точку на действительной оси, являющуюся геометрическим центром всех корней характеристического уравне-

ния. В случае кратных действительных корней  $\Omega_0 = -\alpha$ , т. е.  $\Omega_0$  определяет этот корень.

Таким образом,  $\Omega_0$  характеризует среднюю длительность всех составляющих переходного процесса, т. е. является мерой длительности всего переходного процесса.

Если задаться отношением мнимой и действительной частей корней, что определит колебательность соответствующих составляющих переходного процесса, а также отношением действительных частей, что определит отношение длительностей соответствующих составляющих переходного процесса, это однозначно определит безразмерные коэффициенты  $A_i$  уравнения (5-16). Выбор же коэффициента  $\Omega_0$  при этом дает абсолютные значения действительных корней и, следовательно, длительность процесса. Иными словами, коэффициенты  $A_i$  определяют взаимное расположение корней в комплексной плоскости, а коэффициент  $\Omega_0$  — расстояние всей группы корней от мнимой оси. При этом коэффициенты  $A_i$  определяют кривую переходного процесса в относительном времени  $\Omega_0 t$ , а величина  $\Omega_0$  — масштаб времени.

В связи с введением величины  $\Omega_0$  попутно заметим, что в  $a'_n = a_n/a_0$  входит коэффициент  $a_n$ , который зависит от коэффициента передачи системы: у статических систем он равен  $1 + k$ , а у астатических — просто  $k$ . Отсюда следует уже известный нам факт, что с ростом коэффициента передачи системы должно расти ее быстродействие. Таким образом, через коэффициент  $\Omega_0$  связывается быстродействие системы с зависящей от коэффициента передачи точностью в установившихся режимах.

В приложении 6 даны оптимальные расположения корней в комплексной плоскости и соответствующие значения коэффициентов характеристического уравнения (5-16), обеспечивающие максимально быстрый неколебательный (с одним перерегулированием) переходный процесс для различных типов передаточных функций системы.

Задавать любое желаемое расположение всех корней характеристического уравнения и соответственно выбирать все коэффициенты уравнения (5-16), как предполагалось выше и рекомендуется в приложении 6, можно только при наличии достаточно большого количества независимых варьируемых параметров. Однако очень часто при синтезе САУ получается так, что только часть коэффициентов характеристического уравнения может быть изменена. Остальные коэффициенты оказываются фиксированными, т. е. не содержат варьируемых параметров. В этом случае свобода выбора расположения корней в комплексной плоскости ограничивается и приходится располагать их следующим образом. Из всех корней характеристического уравнения выделяют два или три основных корня, которые должны определять качество переходного процесса. Остальные корни «задвигаются» в глубь левой комплексной полуплоскости путем наложения соответствующего требования на величины их действительных частей по

сравнению с действительными частями основных корней. Отношение мнимой и действительной частей этих корней не регламентируется, поскольку в силу быстроты затухания определяемых ими составляющих переходного процесса они скажутся только на самом начале процесса.

Основные корни выбираются в зависимости от желаемого вида переходной характеристики. Для получения аperiodического процесса, а также при наличии нулей у передаточной функции замкнутой системы основные корни берутся действительными кратными. Однако чаще в качестве оптимальной переходной характеристики принимают характеристику с одним перерегулированием. В этом случае выбирают пару комплексных сопряженных основных корней и для снижения перерегулирования еще один действительный корень, равный действительной части комплексных корней. Отношение мнимой и действительной частей комплексного корня рекомендуется брать равным  $\pi/2$ , что соответствует колебательности данной составляющей в 2% (за один период колебаний амплитуда затухает на 98%). Удалить остальные корни от мнимой оси можно, располагая действительные части всех корней по геометрической или арифметической прогрессии, начиная с основных корней, или любым другим способом.

Если задать такие требования к расположению корней характеристического уравнения, то этим определится только часть коэффициентов уравнения (5-16), остальные же могут иметь любое значение, т. е. не быть варьируемыми. Так решается задача определения значений коэффициентов характеристического уравнения, содержащих варьируемые параметры. Разумеется, качество переходного процесса при этом получается хуже, чем в случае свободного выбора всех коэффициентов характеристического уравнения.

Таким образом, общий порядок синтеза изложенным способом состоит в задании распределения корней характеристического уравнения в комплексной плоскости, определении соответствующих значений коэффициентов характеристического уравнения (5-16) и, далее, в выборе значений входящих в эти коэффициенты варьируемых параметров системы (коэффициенты передачи и постоянные времени отдельных звеньев), обеспечивающих требуемые значения коэффициентов характеристического уравнения.

Описанная методика синтеза с выделением двух или трех основных корней основана, как мы видим, на общей идее оценки качества переходного процесса по степени устойчивости  $\eta$  и степени колебательности  $\mu$ . Подробнее об этом варианте синтеза при ограниченном числе варьируемых параметров см. в работе [29].

Кроме описанных аналитических корневых критериев качества переходного процесса, существует графо-аналитический метод корневого годографа [36], который заключается в построении в комплексной плоскости траекторий (годографов) корней характеристического уравнения при изменении каких-

либо варьируемых параметров системы и, таким образом, связывает значения этих параметров с качеством переходных процессов.

#### § 5-4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Косвенной оценкой качества могут служить следующие интегралы:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \Delta x(t) dt; \quad (5-17)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\Delta x)^2 dt; \quad (5-18)$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \left[ (\Delta x)^2 + T^2 \left( \frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 \right] dt. \quad (5-19)$$

Здесь  $\Delta(x) = x(\infty) - x(t)$  — отклонение выходной величины  $x$  от нового установившегося значения  $x(\infty)$ , которое будет после окончания переходного процесса.

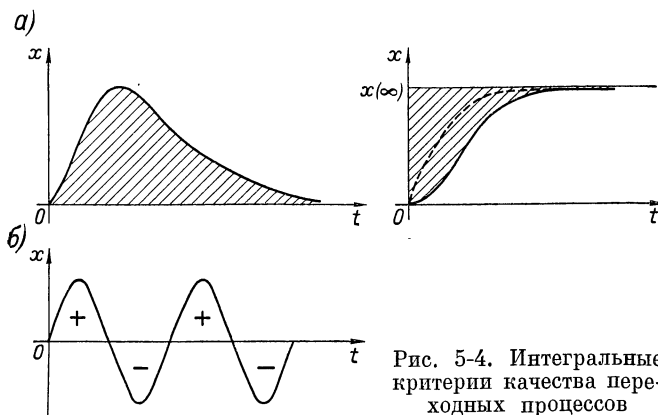


Рис. 5-4. Интегральные критерии качества переходных процессов

Целесообразность применения этих критериев заключается в том, что существуют готовые формулы, выражающие их через коэффициенты передаточной функции системы [11, 35].

Первый интеграл  $I_1$  геометрически представляет собой заштрихованную на рис. 5-4, а площадь. (Первый переходный процесс на рис. 5-4, а вызван возмущением, второй — изменением задающего воздействия.) Чем меньше эта площадь, тем предпочтительнее переходный процесс.

Этот и все остальные интегральные критерии качества используются для определения оптимальных значений варьируемых

параметров. Само по себе абсолютное значение интеграла  $I_1$  при этом роли не играет. Используя готовые выражения для  $I_1$  через коэффициенты передаточной функции системы, в конечном счете получают выражение для этого интеграла через варьируемые параметры системы. Затем обычным образом можно найти оптимальные значения этих варьируемых параметров, соответствующие минимуму  $I_1$ .

Интегральный критерий  $I_1$  применим только к системам, о которых заведомо известно, что у них переходные процессы монотонны, т. е.  $x(\infty) - x(t)$  не меняет знака. Это резко ограничивает возможность данного критерия. Если переходный процесс колебателен, то величина  $I_1$  не может служить мерой его качества, так как площади разного знака под кривой переходного процесса будут вычитаться друг из друга. Например, ухудшение качества переходного процесса при переходе к незатухающим колебаниям (рис. 5-4, б) будет сопровождаться уменьшением  $I_1$  до нуля. Поэтому в случае возможности колебательного переходного процесса следует применять квадратичный интегральный критерий  $I_2$  (5-18), в котором знаки площади не принимаются во внимание.

Этот критерий является наиболее широко используемым интегральным критерием. Однако, как показывает опыт, выбор варьируемых параметров по минимуму  $I_2$  дает колебательный переходный процесс обычно с довольно большой колебательностью. Поэтому в тех случаях, когда такой процесс не приемлем, переходят к интегральному критерию  $I_3$  (5-19).

Интеграл  $I_3$  состоит из двух частей, т. е. может быть представлен в виде двух интегралов. Первый является прежним интегралом  $I_2$  от  $(\Delta x)^2$ , а второй — интегралом от  $\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)^2$ . Если при одном и том же значении площади переходного процесса, т. е. неизменной величине первого интеграла, замедлить (растянуть) переходный процесс во времени, то соответственно уменьшится второй интеграл от квадрата скорости изменения  $x$ . Поэтому при вариации какого-либо параметра системы минимум интеграла  $I_3$  по сравнению с интегралом  $I_2$  будет при более медленном, а следовательно, и менее колебательном переходном процессе. При этом замедление процесса будет тем больше, чем больше взята величина  $T$ , определяющая относительный вес составляющих интеграла  $I_3$  от  $\Delta x$  и  $\frac{d\Delta x}{dt}$ .

Разницу между критериями  $I_2$  и  $I_3$  можно пояснить еще следующим образом. В случае переходного процесса, показанного на втором рис. 5-4, а, идеалом, при стремлении к которому  $I_2 \rightarrow 0$ , является ступенька высотой  $x(\infty)$ . В случае же использования критерия  $I_3$  идеальным переходным процессом, к которому мы стремимся, минимизируя  $I_3$ , является экспонента  $\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)x(\infty)$



(штриховая кривая на втором рис. 5-4, а). Действительно,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} \left[ (\Delta x)^2 + T^2 \left( \frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \Delta x + T \frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 dt - \int_0^{\infty} 2T \Delta x \frac{d\Delta x}{dt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \Delta x + T \frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 dt - T [\Delta x(0)]^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $I_3$  будет минимален при

$$\Delta x + T \frac{d\Delta x}{dt} = 0,$$

т. е. когда  $\Delta x(t) = \Delta x(0) e^{-\frac{t}{T}}$  или, так как  $\Delta x(t) = x(\infty) - x(t)$ ,  
когда  $x(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) x(\infty)$ .

Имеются еще более сложные интегральные критерии качества, содержащие вторую и следующие производные от  $\Delta x$ . Их применение приближает переходный процесс соответственно к кривой второго и следующих порядков.

В заключение укажем основные области применения всех рассмотренных критериев качества переходных процессов.

1. Частотные и интегральные критерии используются при исследовании качества переходных процессов, вызванных основными (главными) воздействиями. Эти критерии позволяют учесть конкретную форму воздействия и начальные условия.

2. Интегральные критерии применяются в этом же случае для определения оптимального значения какого-либо варьируемого параметра; численной оценки показателей качества они не дают.

3. Корневые критерии используются главным образом для оценки в среднем качества переходных процессов при всевозможных воздействиях и начальных условиях.

4. Для систем выше пятого порядка применяются в основном частотные критерии, как графические.

## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 6.1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Построение переходных процессов в САУ, вызванных основными для данной системы воздействиями, является завершающим этапом исследования системы.

Существуют три группы методов построения переходных процессов: аналитические методы, графические методы, использующие частотные и переходные характеристики, и построение переходных процессов с помощью вычислительных машин.

Основным путем получения кривых переходного процесса является применение вычислительных машин непрерывного действия и цифровых. В наиболее сложных случаях используют цифровые машины. В тех же случаях, когда может быть применена вычислительная машина непрерывного действия, стремятся использовать именно ее, поскольку здесь метод решения задачи заключается, по существу, в моделировании исследуемой САУ и поэтому как по форме, так и в методическом отношении весьма близок к экспериментальному исследованию реальной системы вплоть до возможности подключения к машине отдельных частей реальной системы.

Другие методы (аналитические и графические) построения переходных процессов являются вспомогательными и применяются в случае простых систем, а также на этапе предварительного исследования при существенном упрощении системы.

Аналитические методы основаны на решении дифференциального уравнения (4-1) системы

$$D(p)x = M(p)f. \quad (6-1)$$

Искомое решение состоит из установившейся, т. е. вынужденной, и переходной составляющих и имеет вид (4-2):

$$x(t) = x_{уст}(t) + x_n(t), \quad (6-2)$$

где

$$x_n(t) = \sum_i C_i e^{\lambda_i t}.$$

Основная трудность нахождения этого решения заключается в определении постоянных интегрирования  $C_i$  и корней характеристического уравнения  $\lambda_i$ . Задача облегчается, если использовать для решения этого уравнения преобразование Лапласа (см. приложение 1, п. А). В этом случае постоянные интегрирования находятся по готовым формулам (П-14а), в то время как при непосредственном решении дифференциального

уравнения (6-1) они определяются из системы алгебраических уравнений, полученных путем многократного дифференцирования выражения (6-2) и подстановки туда начальных условий для  $x$  и его производных.

В частном случае, когда требуется найти реакцию системы на единичный импульс, т. е. найти весовую функцию системы, она определяется, согласно формуле (П-17), просто как оригинал Лапласа передаточной функции системы. Аналогично переходная характеристика определяется по формуле (П-18) как оригинал Лапласа передаточной функции, деленной на  $s$ .

В случае если в результате решения дифференциального уравнения системы или другим способом мы получим весовую функцию системы или ее переходную характеристику, то реакцию системы на воздействие, по-другому изменяющееся во времени, можно далее найти с помощью интеграла Дюамеля согласно формулам (1-29) или (1-30).

Эту операцию можно выполнить и приближенным графическим построением, заменив истинную функцию  $f(t)$  ступенчатой и построив искомый процесс как сумму реакций на эти ступеньки.

Если известна переходная функция системы для воздействия, приложенного в такой точке системы, что соответствующая передаточная функция не имеет нулей, т. е. в уравнении (6-1)  $M(p) = b_0$ , по этой переходной функции легко получить переходную функцию для воздействия, приложенного в любой другой точке. Действительно, положим, что нам известна переходная функция  $h_0(t)$ , соответствующая уравнению

$$D(p)x = b_0 1(t), \quad (6-3)$$

и требуется определить переходную функцию  $h(t)$  для уравнения с другой правой частью, содержащей нули:

$$D(p)x = (b'_0 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots) 1(t) \quad (6-4)$$

или

$$D(p)x = b'_0 1(t) + b'_1 1'(t) + b'_2 1''(t) + \dots \quad (6-4a)$$

Решение (6-4a) в этом случае можно выразить через  $h_0(t)$  следующим образом:

$$h(t) = \frac{b'_0}{b_0} h_0(t) + \frac{b'_1}{b_0} h'_0(t) + \frac{b'_2}{b_0} h''_0(t) + \dots, \quad (6-5)$$

т. е. оно получается как сумма функции  $h_0(t)$  и ее производных.

Решение (6-5) может быть легко получено, в частности, путем графического дифференцирования характеристики  $h_0(t)$ .

В случае если к системе одновременно приложено несколько воздействий, соответствующий переходный процесс надо строить на основании принципа суперпозиции по составляющим, вызванным каждым воздействием в отдельности, с последующим суммированием.

## § 6-2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Графические методы построения переходных процессов основаны на применении частотных и переходных характеристик. Основное применение для линейных систем получили частотные методы построения переходных процессов.

По формуле (II-6) обратного преобразования Фурье (см. приложение 1, п. А)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6-6)$$

где, согласно (II-12),

$$X(j\omega) = W_3(j\omega) F(j\omega) + W_n(j\omega).$$

Это выражение определяет переходный процесс через частотные характеристики системы и внешнего воздействия.

Однако область применения выражения (6-6) ограничена случаями, когда  $x(t)$  является абсолютно интегрируемой функцией, т. е. удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Это условие выполняется у всех устойчивых систем для переходной составляющей  $x_n(t)$  процесса, которая является затухающей функцией времени, и, следовательно, интеграл от нее всегда конечен.

Рассмотрим задачу построения с помощью частотных характеристик по (6-6) переходной характеристики

$$h(t) = h_{\text{уст}}(t) + h_n(t),$$

где в общем случае  $h_{\text{уст}}(t) = h(\infty) \neq 0$ .

Согласно вышеизложенному, формулой (6-6) можно выразить только переходную составляющую

$$h_n(t) = h(t) - h(\infty)$$

функции  $h(t)$ , так как в общем случае функция  $h(t)$  не является абсолютно интегрируемой.

В соответствии с (II-18) изображение Лапласа  $h(t)$  равно  $\frac{W_3(s)}{s}$ . Поэтому изображение Лапласа  $h_n(t) = h(t) - h(\infty)$  равно  $\frac{W_3(s) - W_3(0)}{s}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} h_n(t) = h(t) - h(\infty) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_3(j\omega) - W_3(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_3(j\omega) - U_3(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

где  $W_3(0) = U_3(0)$ , так как  $V_3(0) = 0$ .

Принимая во внимание, что  $h(\infty) = W_3(0) = U_3(0)$ , находим следующее выражение для переходной функции:

$$h(t) = U_3(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_3(j\omega) - U_3(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (6-7)$$

Подставив в (6-7) выражения

$$W_3(j\omega) = U_3(\omega) + jV_3(\omega);$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

получим:

$$\begin{aligned} h(t) = U_3(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[U_3(\omega) - U_3(0)] \sin \omega t + V_3(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega - \\ - \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[U_3(\omega) - U_3(0)] \cos \omega t - V_3(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Второй интеграл равен нулю, что следует уже из того факта, что  $h(t)$  является действительной функцией. Часть первого интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_3(0) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} U_3(0).$$

Кроме того, вся подынтегральная функция первого интеграла представляет собой четную функцию  $\omega$ , и поэтому нижний предел этого интеграла можно взять равным нулю, одновременно удвоив значение интеграла. В результате имеем:

$$h(t) = \frac{1}{2} U_3(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_3(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V_3(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-8)$$

Если изменить в (6-8) знак у времени  $t$ , то, учитывая, что  $h(-t) = 0$ , получим уравнение

$$0 = \frac{1}{2} U_3(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_3(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V_3(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-9)$$

Вычтя (6-9) из (6-8), найдем следующее окончательное выражение переходной функции через действительную частотную характеристику системы:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_3(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6-10)$$

Сложив (6-8) и (6-9), получим другое выражение переходной функции через мнимую частотную характеристику:

$$h(t) = U_3(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V_3(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega, \quad (6-11)$$

где, напомним,  $U_3(0)$  представляет собой значение  $h(\infty)$ .

Рассмотренные в § 5-2 критерии качества переходного процесса по действительной или мнимой частотным характеристикам системы получены из анализа именно этих выражений.

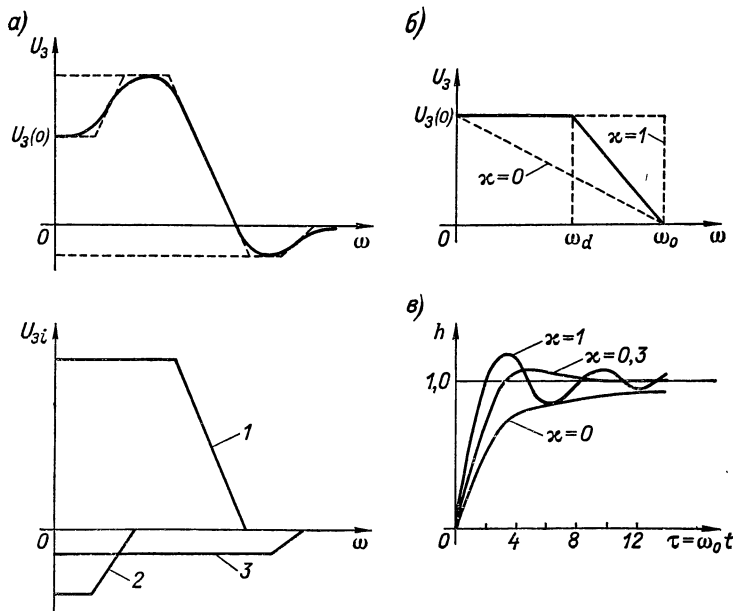


Рис. 6-1. Построение переходной характеристики по действительной частотной характеристике системы

С помощью выражений (6-10) и (6-14) можно построить искомую переходную функцию  $h(t)$  путем графического нахождения входящих в них интегралов по заданному графику соответствующей частотной характеристики  $U_3(\omega)$  или  $V_3(\omega)$ .

Рассмотрим разработанную В. В. Солодовниковым методику такого построения по действительной характеристике  $U_3(\omega)$ , т. е. используя выражение (6-10). Для этого, как показано на рис. 6-1, а, действительную характеристику  $U_3(\omega)$  заменяем ломаной линией. В результате  $U_3(\omega)$  представляем алгебраической суммой нескольких трапеций  $U_{3i}(\omega)$  (трапеции 1, 2, 3 на рис. 6-1, а). Соответственно искомую переходную характеристику  $h(t)$  можно, согласно (6-10), записать в виде алгебраической суммы нескольких

составляющих, каждая из которых определяется одной из трапеций, т. е.

$$h(t) = \sum h_i(t), \quad (6-12)$$

где

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_{zi}(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

(Для характеристики, изображенной на рис. 6-1, а, получаются три трапеции: трапеция 1 входит в сумму (6-12) со знаком плюс, а трапеции 2 и 3 вычитаются из нее.)

Построение отдельных составляющих  $h_i(t)$  легко осуществляется с помощью приведенных в приложении 7 таблиц переходных функций  $h(\tau)$ , рассчитанных для нормированных трапеций. Нормированные трапеции имеют (рис. 6-1, б)  $U_z(0) = 1$ ,  $\omega_0 = 1$ , и, таким образом, каждая характеризуется одним варьируемым параметром  $\kappa = \omega_d/\omega_0$ , который может иметь значение от нуля (трапеция превращается в треугольник) до единицы (трапеция превращается в прямоугольник). В качестве примера на рис. 6-1, в приведены переходные функции, соответствующие нормированным трапециям со значениями  $\kappa$ , равными 0; 0,3 и 1.

Для каждой составляющей характеристики  $U_z(\omega)$  — трапеции (рис. 6-1, а) — находим три определяющих ее параметра: высоту  $U_{zi}(0)$  и частоты  $\omega_{oi}$  и  $\omega_{di}$  (рис. 6-1, б). По значениям  $\omega_{oi}$  и  $\omega_{di}$  вычисляем коэффициент  $\kappa_i = \omega_{di}/\omega_{ci}$  и в таблице находим соответствующую ему функцию  $h_i(\tau)$ . Искомую составляющую  $h_i(t)$  получаем из этой функции путем умножения ординат  $h_i(\tau)$  на величину  $U_{zi}(0)$ , поскольку  $h_i(\tau)$  соответствует высоте, равной единице, и деления абсцисс, т. е. времени  $\tau$ , на величину  $\omega_0$ , так как длительность переходной характеристики обратно пропорциональна ширине частотной характеристики. С последним положением мы уже встречались в предыдущей главе. Физически оно очевидно, а формально определяется общим свойством преобразования Лапласа (см. четвертую строку табл. П-1), непосредственно следующим из выражения прямого или обратного преобразования.

Описанный метод построения переходного процесса по действительной частотной характеристике системы применим для построения не только переходной характеристики  $h(t)$ , т. е. реакции системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, но, как было показано ранее, и переходной составляющей  $x_n(t)$  любого затухающего процесса, вызванного другими воздействиями и при любых начальных условиях.

Если повторить проведенное выше преобразование выражения (6-6) в общем случае произвольной подынтегральной частотной функции  $X(j\omega)$ , получим вместо выражений (6-10) и (6-11) анало-

гичные выражения, в которых вместо действительной  $U_3(\omega)$  и мнимой  $V_3(\omega)$  частотных характеристик системы будут стоять действительная и мнимая части выражения  $j\omega X(j\omega)$ , т. е. соответственно характеристики  $-\omega V_x(\omega)$  и  $\omega U_x(\omega)$ , где  $U_x(\omega)$  и  $V_x(\omega)$  — действительная и мнимая части функции

$$X(j\omega) = W_3(j\omega)F(j\omega) + W_n(j\omega), \quad (6-13)$$

определяемой по формуле (П-12) при подстановке  $s = j\omega$ . Частотные характеристики  $X(j\omega)$ ,  $U_x(\omega)$  и  $V_x(\omega)$  называются о б о б щ е н н ы м и ч а с т о т н ы м и х а р а к т е р и с т и к а м и.

Таким образом, в рассмотренной выше методике построения переходного процесса с помощью трапецеидальных частотных характеристик при произвольном воздействии и ненулевых начальных условиях вместо действительной частотной характеристики системы надо использовать график функции  $-\omega V_x(\omega)$ . Если при этом заранее неизвестно, что результат построения представляет собой абсолютно интегрируемую функцию, формальным признаком применимости описанного метода построения переходного процесса по частотным характеристикам является нахождение всех полюсов подынтегральной функции  $X(s)$  [см. выражение (П-12)] левее мнимой оси.

Наряду с графическими методами построения кривых переходного процесса с помощью частотных характеристик имеются методы, использующие переходные характеристики отдельных звеньев системы. Время процесса в этом случае делится на достаточно малые интервалы. Кривая внешнего воздействия заменяется ступенчатой линией. В результате этого в пределах каждого интервала воздействие принимается постоянным. Выходная величина первого звена, на которое подано воздействие, определяется как сумма реакций на постоянные в течение каждого интервала ступенчатые воздействия. Полученная в результате кривая, которая является входным воздействием для следующего звена, в свою очередь, заменяется ступенчатой линией, и по ней аналогичным образом строится выходная величина второго звена. Далее последовательно определяются выходные величины следующих звеньев вплоть до последнего. В случае замкнутой системы выходная величина последнего звена прибавляется к внешнему воздействию, поданному на вход первого звена. Имеющееся при этом чистое временное запаздывание рассчитанного таким образом сигнала обратной связи относится к погрешности метода и уменьшается с уменьшением длины интервалов, т. е. шагов, на которые разбит процесс.

Такое построение переходного процесса можно вести по переходным характеристикам отдельных звеньев и по их уравнениям. В последнем случае речь идет о численно-графическом решении дифференциального уравнения системы путем интегрирования его по шагам. Вместо графического построения это решение можно



выполнить и чисто аналитически, т. е. методом численного интегрирования.

В случае использования цифровых вычислительных машин для решения дифференциальных уравнений САУ применяется по существу то же численное интегрирование, но осуществляемое уже автоматически вычислительной машиной.

Главным достоинством этих графических и численных методов построения переходных процессов является применимость их к нелинейным и нестационарным системам [23, 33]. Для линейных систем в большинстве случаев проще методы, основанные на использовании частотных характеристик.

## Глава седьмая

# КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И ПОРЯДОК СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 7-1. НАЗНАЧЕНИЕ И ВИДЫ КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Коррекция динамических свойств САУ осуществляется для выполнения рассмотренных выше требований по точности, устойчивости и качеству переходных процессов.

С точки зрения требований к точности САУ в установившихся режимах коррекция динамических свойств САУ может потребоваться для увеличения коэффициента передачи или порядка астатизма при сохранении устойчивости и определенного качества переходных процессов.

Коррекция применяется также как средство обеспечения устойчивости неустойчивой системы или расширения области устойчивости и повышения качества переходных процессов.

Осуществляется коррекция с помощью введения в систему специальных корректирующих звеньев с особо подобранной передаточной функцией. Принципиально корректирующие звенья могут включаться либо последовательно с основными звеньями САУ, либо параллельно им. Соответственно по способу включения в систему корректирующие звенья делятся на последовательные корректирующие звенья и параллельные.

Сказанное иллюстрируется рис. 7-1. Здесь  $W_o(p)$  — передаточная функция основных звеньев системы, а  $W_k(p)$  и  $W_{o.c}(p)$  — передаточные функции корректирующих звеньев. На рис. 7-1, а показано включение последовательного корректирующего звена. На рис. 7-1, б и в приведены два возможных способа включения параллельных корректирующих звеньев. В дальнейшем, однако, будем рассматривать только последний вариант включения параллельного корректирующего звена (рис. 7-1, в), когда это звено

$W_{o.c}(p)$  образует местную обратную связь в системе. Это связано с тем, что в замкнутом контуре САУ корректирующее звено, изображенное на рис. 7-1, б, тоже может рассматриваться как обратная связь, но относительно другой части системы, показанной штриховыми линиями. С другой стороны, схему на рис. 7-1, а можно свести и к последовательной коррекции (рис. 7-1, в), приняв за передаточную функцию корректирующего звена сумму  $W_o(p) + W_k(p)$ , включающую в себя передаточную функцию  $W_o(p)$  основного звена системы.

Действие корректирующих звеньев сводится к следующему:

1) введение в контур САУ воздействий по производным и интегралам;

2) введение корректирующих обратных связей вокруг отдельных частей системы;

3) введение корректирующих воздействий в функции внешних воздействий и их производных.

Дополнительные воздействия по производным и интегралам в контуре САУ или в функции внешних воздействий и их производных осуществляются с помощью последовательных корректирующих звеньев, корректирующие обратные связи — с помощью параллельных корректирующих звеньев.

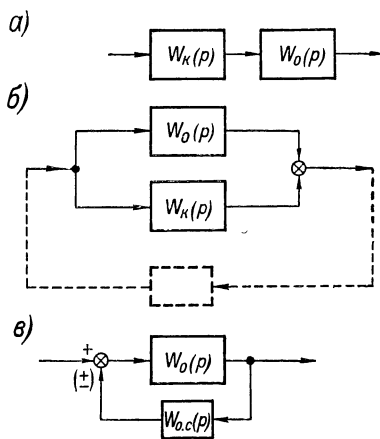


Рис. 7-1. Способы включения корректирующих звеньев в систему

## § 7-2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ В КОНТУРЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Наибольшее применение получили следующие последовательные корректирующие звенья: пропорционально-дифференцирующее, пропорционально-интегрирующее, пропорционально-интегро-дифференцирующее.

### А. Пропорционально-дифференцирующее звено

Идеальное пропорционально-дифференцирующее звено имеет следующую передаточную функцию:

$$W_{\text{ид}}(p) = k_{\text{п}} \pm k_{\text{д}} p. \quad (7-1)$$

Отсюда видно, что в соответствии с назначением этого звена его выходная величина содержит две составляющие — пропорциональную входной величине и определяемую коэффициентом  $k_{\text{п}}$

и пропорциональную ее первой производной, определяемую коэффициентом  $k_d$ . Последняя составляющая может быть положительной или отрицательной.

Существуют еще пропорционально-дифференцирующие звенья, дающие на выходе составляющую, пропорциональную и второй производной. Однако значительно чаще такую составляющую получают последовательным включением двух звеньев с передаточной функцией (7-1).

Включение пропорционально-дифференцирующего звена в САУ приводит к тому, что передаточная функция  $W(p) = R(p)/Q(p)$  разомкнутой системы умножается на передаточную функцию  $W_{\text{пд}}(p)$  этого звена, т. е. принимает вид:

$$W(p) W_{\text{пд}}(p) = \frac{R(p) (k_p \pm k_d p)}{Q(p)}.$$

В результате левая часть дифференциального уравнения системы получается такой:

$$D(p) = R(p) (k_p \pm k_d p) + Q(p), \quad (7-2)$$

где

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Так как обычно  $R(p) = k$ , видно, что введение дополнительного воздействия по производной с помощью пропорционально-дифференцирующего звена позволяет изменить величину коэффициента при  $p$  в первой степени в многочлене  $D(p)$ . Применение пропорционально-дифференцирующего звена со второй производной или двух последовательных звеньев с передаточной функцией (7-1) приводит к изменению коэффициента и у  $p^2$  и т. д. Изменение этих коэффициентов изменяет условия устойчивости и качество переходных процессов в системе.

Рассмотрим в качестве примера применение пропорционально-дифференцирующих звеньев для стабилизации, т. е. обеспечения устойчивости САУ с астатизмом выше первого порядка.

Передаточную функцию разомкнутой системы с порядком астатизма, равным  $r$ , можно представить в таком виде (см. § 2-2 и 2-3):

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{R(p)}{p^r Q'(p)},$$

где  $Q'(p) = 1$  при  $p = 0$ .

Соответственно левая часть дифференциального уравнения замкнутой системы

$$D(p) = R(p) + p^r Q'(p). \quad (7-3)$$

Вспомним полученное в § 4-2 следствие из критерия устойчивости Рауса — Гурвица, по которому необходимым условием устойчивости является положительность коэффициентов при  $p$  всех степеней от 0 до  $n$ , где  $n$  — порядок уравнения системы.

Если  $R(p) = k$ , т. е. нет воздействий по производным, то из общего вида выражения (7-3) следует важный вывод о том, что такие САУ с порядком астатизма  $r > 1$  являются структурно неустойчивыми, поскольку при этом в  $D(p)$  отсутствуют члены с  $p$  в степени от 1 до  $r - 1$ .

Введем теперь в систему пропорционально-дифференцирующие звенья, дающие положительные дополнительные воздействия по производным от первого до  $(r - 1)$ -го порядка. При этом в многочлене  $D(p)$  появятся недостающие члены, так как теперь

$$D(p) = k(k_0 + k_1 p + \dots + k_{r-1} p^{r-1}) + p^r Q'(p). \quad (7-4)$$

Следовательно, САУ становится структурно устойчивой.

Таким образом, система с астатизмом порядка  $r$  может быть сделана структурно устойчивой при введении положительных воздействий по производным от первого до  $(r - 1)$ -го порядка.

Аналогично можно показать, что с помощью дополнительных воздействий по производным можно сделать устойчивой систему, структурно неустойчивую из-за наличия в ней неустойчивых звеньев, которые создают в многочлене  $D(p)$  члены с отрицательными коэффициентами. Применение дополнительных воздействий по производным соответствующего порядка позволяет изменить знак этих коэффициентов добавлением в них положительных слагаемых.

Влияние пропорционально-дифференцирующего звена на качество переходных процессов продемонстрируем на примере последовательного соединения этого звена с апериодическим звеном с передаточной функцией

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1}.$$

Передаточная функция такой цепочки (рис. 7-1, а)

$$W_0(p)W_{\text{зд}}(p) = \frac{(k_0 \pm k_{\text{д}} p) k_0}{T_0 p + 1}. \quad (7-5)$$

Соответствующая переходная функция, согласно (6-5),

$$h(t) = k_{\text{д}} h_0(t) \pm k_{\text{д}} h'_0(t), \quad (7-6)$$

где  $h_0(t)$  — переходная функция одного апериодического звена при отсутствии пропорционально-дифференцирующего.

На рис. 7-2 приведены переходные характеристики для нескольких значений коэффициента  $k_{\text{д}}$  воздействия по производной. Характеристика 1 соответствует отрицательному воздействию по производной, а характеристика 2 — такому же, но положительному воздействию. Характеристика 3 получена при увеличенном вдвое положительном коэффициенте  $k_{\text{д}}$ . Отсюда видно, что отрицательное дополнительное воздействие по производной снижает воздействие, а положительное, наоборот, повышает его.

В рассматриваемой схеме по мере увеличения этого воздействия инерционность основного звена компенсируется во все боль-

шей степени и, наконец, при  $k_d/k_n = T_o$ , чему соответствует характеристика 4 на рис. 7-2, получается идеальное безынерционное звено. Это следует непосредственно из выражения (7-5). Действительно, согласно (7-5), при  $k_d/k_n = T_o$

$$W_o(p) W_{нд}(p) = \frac{\left(1 + \frac{k_d}{k_n} p\right) k_n k_o}{T_o p + 1} = k_n k_o.$$

В соответствии с выражением (7-6) аналогично влияет пропорционально-дифференцирующее звено и на переходную характеристику любого инерционного звена произвольного порядка. При этом, чем выше порядок инерционного звена  $W_o(p)$ , тем до

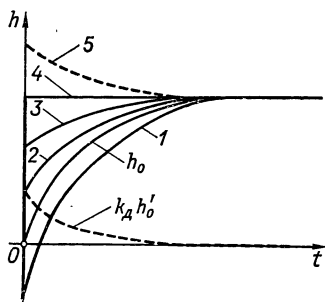


Рис. 7-2. Переходные характеристики последовательного соединения аperiodического и пропорционально-дифференцирующего звеньев

более высокого порядка целесообразно использовать дополнительные производные. Так, например, для полной компенсации инерционности звена второго порядка требуются дополнительные воздействия по первой и второй производным. (При этом числитель произведения  $W_o(p)W_{нд}(p)$  будет иметь тот же порядок, что и знаменатель.) Практически применение нашли главным образом дополнительные воздействия по производным первого и второго порядков. Более высокие производные используются редко в связи со сложностью их получения.

Описанное выше влияние дополнительных воздействий по производным на быстроедействие понятно из чисто физических представлений. Положительное воздействие по производной, т. е. по скорости изменения входного сигнала, увеличивает этот сигнал, складываясь с ним, когда он растет, и, наоборот, уменьшает сигнал, вычитаясь из него, когда он начинает уменьшаться. Таким образом, это воздействие форсирует течение переходного процесса, убыстряет его. Отрицательное воздействие действует наоборот, замедляя течение переходного процесса.

Повышение быстрогодействия при введении положительных воздействий по производным хорошо видно и из частотных характеристик. На рис. 7-3 показаны л. а. х. и л. ф. х. пропорционально-дифференцирующего звена при положительном воздействии по первой производной. Так как передаточная функция этого звена обратна передаточной функции аperiodического звена, то, соответственно, обратны и частотные характеристики. Пропорционально-дифференцирующее звено является фильтром верхних частот, т. е. его л. а. х. (рис. 7-3, а) растет с увеличением частоты. Поэтому введение этого звена в систему расширяет ее полосу пропускания, т. е. повышает быстроедействие.

Фазовая характеристика такого звена (рис. 7-3, б) положительна, т. е. это звено уменьшает суммарное запаздывание по фазе в системе в режиме установившегося гармонического воздействия.

Аналогично можно объяснить с помощью частотных характеристик и описанное выше влияние пропорционально-дифференцирующего звена на устойчивость САУ.

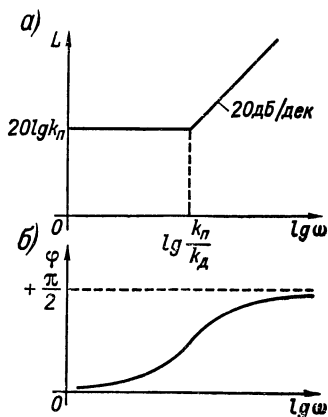


Рис. 7-3. Логарифмические частотные характеристики пропорционально-дифференцирующего звена

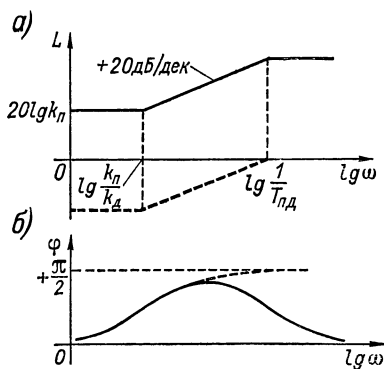


Рис. 7-4. Логарифмические частотные характеристики инерционного пропорционально-дифференцирующего звена

**Инерционное (реальное) пропорционально-дифференцирующее звено.** Практически в большинстве случаев пропорционально-дифференцирующие звенья имеют существенную инерционность, и тогда их передаточная функция приобретает вид:

$$W_{пд}(p) = \frac{k_{\pi} \pm k_{\pi} p}{T_{пд} p + 1}, \quad (7-7)$$

где  $T_{пд} \ll k_d/k_{\pi}$ , т. е. достаточно мало.

Инерционное пропорционально-дифференцирующее звено можно представить как последовательное соединение идеального пропорционально-дифференцирующего звена и обычного апериодического звена. Поэтому все сказанное выше о влиянии идеального пропорционально-дифференцирующего звена на устойчивость и качество переходного процесса справедливо и для инерционного звена такого типа с той только разницей, что последнее звено влияет слабее на быстродействие системы и соответственно на ее область устойчивости. Это влияние уменьшается до нуля с ростом постоянной времени  $T_{пд}$ , когда  $T_{пд} \rightarrow k_d/k_{\pi}$ .

Если переходная характеристика идеального пропорционально-дифференцирующего звена представляет собой наложение идеального импульса  $k_{\pi} \delta(t)$  на ступеньку  $k_d 1(t)$ , то в случае инерционного пропорционально-дифференцирующего звена переходная

характеристика при положительном воздействии по производной имеет вид кривой 5 на рис. 7-2. Форсирующее действие звена происходит за счет начального всплеска этой характеристики над уровнем ступеньки 4. С уменьшением  $T_{\text{пд}}$  этот всплеск увеличивается, стремясь к идеальному импульсу  $\delta(t)$ . Соответственно растет и форсировка переходного процесса.

В рассмотренном выше примере последовательного соединения пропорционально-дифференцирующего звена с апериодическим звеном в случае реального, т. е. инерционного, пропорционально-дифференцирующего звена невозможно получить полную компенсацию инерционности, так как дробь

$$W_o(p) W_{\text{пд}}(p) = \frac{\left(1 + \frac{k_{\text{д}}}{k_{\text{п}}} p\right) k_{\text{п}} k_o}{(T_o p + 1)(T_{\text{пд}} p + 1)} \quad (7-8)$$

имеет знаменатель второго порядка. При  $k_{\text{д}}/k_{\text{п}} = T_o$  будет скомпенсирована постоянная времени  $T_o$ , но сохранится  $T_{\text{пд}}$ .

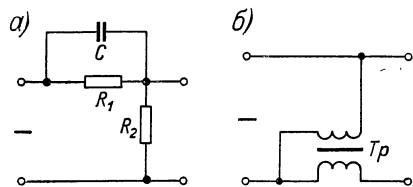


Рис. 7-5. Электрические пассивные пропорционально-дифференцирующие четырехполюсники на постоянном токе

На рис. 7-4, а и б построены соответственно л. а. х. и л. ф. х. инерционного пропорционально-дифференцирующего звена. Они получены как сумма характеристик идеального пропорционально дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка.

Практически наиболее просто пропорционально-дифференцирующие звенья реализуются в электрических системах постоянного тока, где они представляют собой пассивные  $RC$  и  $RL$ -цепочки. На рис. 7-5 в качестве примера приведены принципиальные схемы таких инерционных пропорционально-дифференцирующих звеньев. На рис. 7-5, а изображена схема с дифференцирующей емкостью  $C$ . В этом случае в выражении (7-7) для передаточной функции

$$k_{\text{п}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad k_{\text{д}} = T_{\text{пд}} = k_{\text{п}} R_1 C.$$

Л. а. х. такого звена показана на рис. 7-4, а штриховой линией. Она лежит ниже оси абсцисс, так как здесь  $k_{\text{п}} < 1$ , и при  $\omega \rightarrow \infty$  функция  $W_{\text{пд}}(j\omega) \rightarrow 1$ . На рис. 7-5, б дана схема пропорционально-дифференцирующего звена с дифференцирующим трансформатором  $T_p$ .

## Б. Пропорционально-интегрирующее звено

Передаточная функция такого звена

$$W_{\text{пи}}(p) = \frac{k_{\text{и}} \frac{1}{p} \pm k_{\text{п}}}{T_{\text{пи}} p + 1}. \quad (7-9)$$

В случае  $T_{\text{пи}} = 0$  получаем идеальное пропорционально-интегрирующее звено.

Выражение (7-9) можно представить так:

$$W_{\text{пи}}(p) = \frac{k_{\text{и}} \frac{1}{p} \pm k_{\text{п}}}{T_{\text{пи}} p + 1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{k_{\text{и}} \pm k_{\text{п}} p}{T_{\text{пи}} p + 1}. \quad (7-10)$$

Таким образом, пропорционально-интегрирующее звено эквивалентно последовательному соединению интегрирующего звена и пропорционально-дифференцирующего звена. Такое звено применяется вместо простого интегрирующего звена для повышения порядка астатизма в тех случаях, когда введение интегрирующего звена требует дополнительной коррекции для сохранения устойчивости или необходимого качества переходных процессов.

Заметим, что знак при коэффициенте  $k_{\text{п}}$  воздействия по интегралу всегда должен быть положительным, в то время как перед коэффициентом  $k_{\text{п}}$  он может быть любым. Это очевидно из выражения (7-10): коэффициент  $k_{\text{и}}$  входит в коэффициент передачи системы по интегралу в статике, а коэффициент  $k_{\text{п}}$  определяет воздействие по производной от него. По своим частотным свойствам пропорционально-интегрирующее звено противоположно пропорционально-дифференцирующему, являясь *фильтром нижних частот*. Л. а. х. идеального пропорционально-интегрирующего звена (при положительном  $k_{\text{п}}$ ) приведена на рис. 7-6. Штриховой линией показано ее изменение при наличии инерционности.

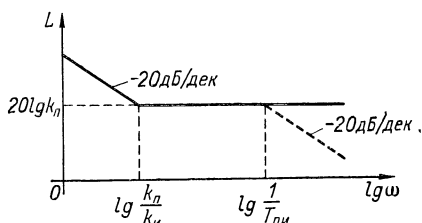


Рис. 7-6. Л. а. х. пропорционально-интегрирующего звена

## В. Пропорционально-интегро-дифференцирующее звено

Его передаточная функция

$$W_{\text{пид}}(p) = \frac{k_{\text{и}} \frac{1}{p} \pm k_{\text{п}} \pm k_{\text{д}} p}{T_{\text{пид}} p + 1}. \quad (7-11)$$

Нетрудно показать (вынеся перед дробью множитель  $1/p$ ), что это звено эквивалентно последовательному соединению интегрирующего звена и пропорционально-дифференцирующего с воздействием по двум производным или, что то же самое, последовательному соединению пропорционально-интегрирующего звена и пропорционально-дифференцирующего с одной производной. Таким образом, пропорционально-интегро-дифференцирующее звено повышает порядок астатизма, как и пропорционально-интегрирующее, но при этом одновременно дает более сильную коррекцию динамических свойств САУ.



Частотные характеристики этого звена получаются сложением характеристик пропорционально-интегрирующего и пропорционально-дифференцирующего звеньев. Соответственно такое звено подчеркивает как нижние, так и верхние частоты, подавляя средние. На рис. 7-7, а изображена л. а. х. рассматриваемого звена. Штриховой линией показано изменение характеристики при учете инерционности звена. В связи с видом этих л. а. х. часто интегро-дифференцирующими звеньями называют не только звенья с передаточной функцией (7-11), но и любые другие звенья, а. ч. х. которых имеет минимум на средних частотах и растет в сторону как низких, так и высоких частот. Такую характеристику имеет, например, звено с передаточной функцией

$$\frac{k(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

л. а. х. которого приведена на рис. 7-7, б. Вообще указанные выше наименования типов последовательных корректирующих

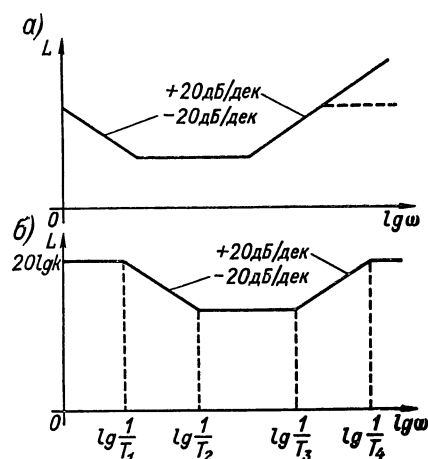


Рис. 7-7. Л. а. х. пропорционально-интегро-дифференцирующего звена

звеньев в значительной степени условны прежде всего из-за инерционности реальных корректирующих звеньев.

Рассмотренные выше корректирующие звенья имеют в числителе передаточной функции сумму пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего слагаемых. Поэтому эти звенья можно представить в виде параллельного соединения звеньев соответствующего действия. Часто именно в виде совокупности таких простейших звеньев они и реализуются. Это иллюстрируется на рис. 7-8, а на примере пропорционально-интегро-дифференцирующего звена. (Здесь  $k_n = 1$ , что, разу-

меется, не уменьшает общности этой схемы, так как существенны соотношения между имеющимися тремя воздействиями, а не абсолютные их значения.)

Иногда в роли дифференцирующих звеньев можно применить отдельные чувствительные звенья, как это показано на рис. 7-8, б на примере, когда величина  $x$  представляет собой скорость вращения какого-либо вала. В обычном порядке здесь следует поставить после измерителя скорости ИС звено с передаточной функцией  $W_{\text{пид}}(p)$ , возможно, и в виде варианта, изображенного на рис. 7-8, а, с параллельным присоединением дифференцирующего и интегрирующего устройств. Однако на рис. 7-8, б принят

другой путь. Здесь параллельно измерителю скорости *ИС* включены отдельные измерители ускорения *ИУ* и угла поворота *ИП*. В результате исключения промежуточных операций дифференцирования и интегрирования точность получения суммарного выходного сигнала повышается при одновременном снижении инерционности. При этом возникает возможность, в свою очередь, путем введения после *ИУ* пропорционально-дифференцирующего звена получить дополнительное воздействие по второй производной, а включением после *ИП* пропорционально-интегрирующего звена повысить порядок астатизма.

Указанный способ коррекции с помощью отдельных чувствительных звеньев применим, к сожалению, далеко не всегда из-за физической невозможности или сложности непосредственного выявления необходимых корректирующих сигналов.

В системах автоматического регулирования в зависимости от вида примененной коррекции регуляторы классифицируются на следующие типы: пропорциональный (П-регулятор), пропорционально-дифференцирующий (ПД-регулятор), пропорционально-интегрирующий (ПИ-регулятор) и пропорционально-интегро-дифференцирующий (ПИД-регулятор). Соответственно говорят об одноименных алгоритмах или законах регулирования.

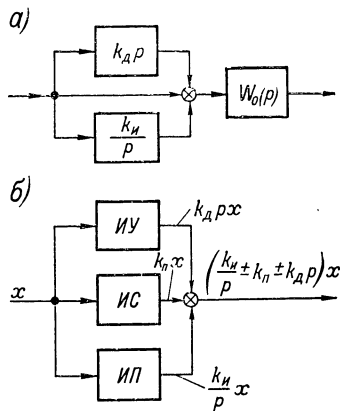


Рис. 7-8. Варианты получения пропорционально-интегро-дифференцирующего звена

### § 7.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ — ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ

Рассмотрим коррекцию динамических свойств САУ, осуществляемую с помощью дополнительных обратных связей вокруг отдельных частей системы (рис. 7-9).

При охвате звена с передаточной функцией  $W_o(p)$  обратной связью через корректирующее звено с передаточной функцией  $W_{o.c}(p)$  получим, согласно (1-97), передаточную функцию

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 \pm W_{o.c}(p) W_o(p)}, \quad (7-12)$$

где плюс в знаменателе соответствует отрицательной, а минус — положительной обратной связям.

Корректирующие обратные связи, помимо классификации на отрицательные и положительные, делятся на жесткие и гибкие. Жесткая обратная связь осуществляется статическим звеном, т. е. когда

$W_{o.c}(0) \neq 0$ , гибкая обратная связь — дифференцирующим звеном. В последнем случае  $W_{o.c}(0) = 0$ , и, следовательно, в статике сигнал обратной связи отсутствует, т. е. гибкая обратная связь действует только в динамике, с чем и связано ее наименование.

### А. Жесткие корректирующие обратные связи

Рассмотрим вначале действие идеальной жесткой обратной связи. Ее передаточная функция  $W_{o.c}(p) =$

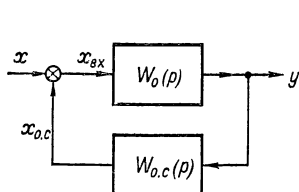


Рис. 7-9. Корректирующая обратная связь

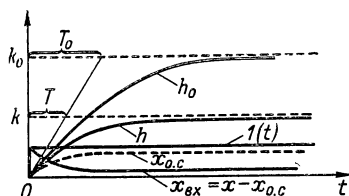


Рис. 7-10. Переходные характеристики аperiodического звена без обратной связи  $h_0(t)$  и охваченного отрицательной жесткой обратной связью  $h(t)$

$= k_{o.c}$ . В случае если эта обратная связь охватывает простое аperiodическое звено, когда  $W_o(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1}$ , согласно (7-12),

$$W(p) = \frac{\frac{k_o}{T_o p + 1}}{1 \pm \frac{k_o k_{o.c}}{T_o p + 1}} = \frac{k_o}{T_o p + 1 \pm k_o k_{o.c}}$$

или

$$W(p) = \frac{k}{T p + 1}, \quad (7-13)$$

где

$$k = \frac{k_o}{1 \pm k_o k_{o.c}}; \quad T = \frac{T_o}{1 \pm k_o k_{o.c}}$$

Таким образом, в результате охвата аperiodического звена жесткой обратной связью его постоянная времени и коэффициент передачи изменяются в  $(1 \pm k_o k_{o.c})$  раз, т. е. они уменьшаются в случае отрицательной обратной связи и увеличиваются при положительной обратной связи. На рис. 7-10 показаны переходные характеристики звена при отсутствии  $h_0(t)$  и при наличии  $h(t)$  отрицательной обратной связи. Здесь же приведены кривые  $x_{o.c}$  и результирующего сигнала  $x_{вх}$  на входе звена. Последняя кривая имеет всплеск вначале. За счет его происходит форсировка на входе по сравнению с окончательным установившимся значением  $x_{вх}$ , которая и дает ускорение переходного процесса.

В качестве корректирующей обратной связи применяется в основном отрицательная обратная связь для уменьшения инерционности.

Заметим попутно, что отрицательная обратная связь имеет и другие достоинства: она уменьшает остающуюся пока вне рассмотрения нелинейность статической характеристики звена, неустойчивость его параметров во времени, а также при наличии шумов (помех) на входе или внутри звена уменьшает уровень шумов на выходе.

Влияние положительной обратной связи противоположно и в отношении перечисленных выше дополнительных факторов.

Нетрудно показать, что при охвате жесткой обратной связью статического звена любого порядка, т. е. когда  $W_0(p) = k_0/Q(p)$ , где  $Q_0(0) = 1$ , происходит такое же изменение в  $(1 \pm k_0 k_{0,c})$  раз коэффициента передачи звена  $k_0$  и всех коэффициентов полинома  $Q_0(p)$ . В частности, для звена второго порядка, когда  $W_0(p) = \frac{k_0}{T_{10}^2 p^2 + T_{20} p + 1}$ , жесткая обратная связь приводит к передаточной функции

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}, \quad (7-14)$$

где

$$k = \frac{k_0}{1 \pm k_0 k_{0,c}}; \quad T_1 = \frac{T_{10}}{\sqrt{1 \pm k_0 k_{0,c}}}; \quad T_2 = \frac{T_{20}}{1 \pm k_0 k_{0,c}}.$$

При этом величина, определяющая колебательность переходной характеристики этого звена (см. § 1-4),

$$\xi = \frac{T_2}{2T_1} = \frac{T_{20}}{2T_{10} \sqrt{1 \pm k_0 k_{0,c}}}.$$

Из последнего выражения следует, что отрицательная обратная связь, снижая инерционность звена второго порядка, одновременно увеличивает его колебательность. В случае неколебательного звена с  $\xi \gg 1$  это полезно, однако для колебательного звена с  $\xi < 1$  нежелательно, так как может способствовать росту колебательности САУ в целом.

При охвате жесткой обратной связью интегрирующего звена с  $W_0(p) = k_0/p$  имеем:

$$W(p) = \frac{\frac{k_0}{p}}{1 \pm \frac{k_0 k_{0,c}}{p}} = \frac{k_0}{p \pm k_0 k_{0,c}} = \frac{k}{T p \pm 1}, \quad (7-15)$$

где

$$k = \frac{1}{k_{0,c}}; \quad T = \frac{1}{k_0 k_{0,c}}.$$

Таким образом, получили важный результат, который ранее в качестве примера был нами найден в § 1-5: *при охвате интегрирующего звена жесткой обратной связью оно превращается в статическое звено*. Практический интерес при этом представляет

только отрицательная обратная связь, так как, согласно (7-15), при положительной обратной связи получается неустойчивое звено. Отрицательная обратная связь вокруг интегрирующего звена широко применяется для снижения порядка астатизма системы и соответственно для улучшения ее устойчивости и качества переходных процессов в тех случаях, когда у системы оказывается излишний порядок астатизма. С этой целью, например, часто охватывают жесткой обратной связью электрические и гидравлические двигатели, используемые в качестве исполнительных звеньев управляющих устройств для перемещения органов управления объектами. Без обратной связи эти двигатели представляют

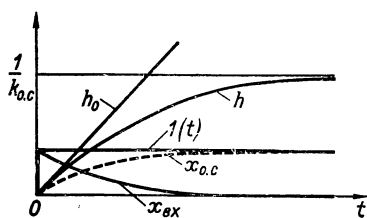


Рис. 7-11. Переходные характеристики интегрирующего звена, охваченного отрицательной жесткой обратной связью

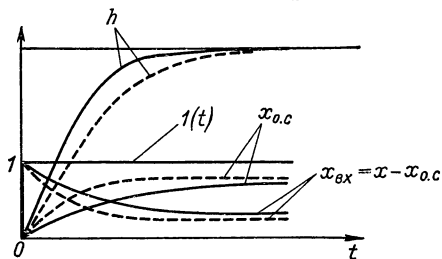


Рис. 7-12. Влияние инерционности обратной связи на переходную характеристику аperiodического звена

собой интегрирующие звенья, если выходной величиной является перемещение (или угол поворота вала).

Для пояснения физической картины превращения интегрирующего звена в статическое введением жесткой обратной связи на рис. 7-11 показаны переходные характеристики этого звена без обратной связи  $h_0(t)$  и при наличии обратной связи  $h(t)$ . Обратная связь приводит к постепенному замедлению роста выходного сигнала вследствие уменьшения результирующего сигнала  $x_{вх} = 1(t) - x_{o.c.}$  на входе звена, которому пропорциональна скорость изменения выходного сигнала интегрирующего звена. В окончательно установившемся режиме  $h(\infty) = 1/k_{o.c.}$ , так как при этом  $x_{o.c.} = k_{o.c.} h(\infty) = 1$  и, следовательно,  $x_{вх} = 0$ .

В случае инерционной жесткой обратной связи

$$W_{o.c.} = \frac{k_{o.c.}}{T_{o.c.p} + 1}. \quad (7-16)$$

Соответственно при этом порядок знаменателя передаточной функции  $W(p)$  повышается на единицу против порядка охватываемого обратной связью звена. Инерционность обратной связи при сохранении принципиальных выводов, сделанных выше, следующим образом сказывается на динамике охватываемого звена. Инерционность отрицательной обратной связи приводит к увеличению бездействия за счет замедления роста сигнала  $x_{o.c.}$  обратной

связи и, следовательно, удлинения форсировки на входе звена. Это иллюстрирует рис. 7-12, где штриховыми линиями даны кривые при идеальной обратной связи, а сплошными линиями — при инерционной.

Изложенное можно показать и с помощью передаточной функции.

Если, например,

$$W_o(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1},$$

то с учетом выражения (7-16) в случае отрицательной обратной связи

$$W(p) = \frac{\frac{k_o}{T_o p + 1}}{1 + \frac{k_o k_{o.c}}{(T_o p + 1)(T_{o.c} p + 1)}} = \frac{\frac{k_o}{1 + k_o k_{o.c}} (T_{o.c} p + 1)}{\frac{T_o T_{o.c}}{1 + k_o k_{o.c}} p^2 + \frac{T_o + T_{o.c}}{1 + k_o k_{o.c}} p + 1}.$$

При  $T_{o.c} \ll 1$  и  $T_{o.c} \ll T_o$

$$W(p) \approx \frac{\frac{k_o}{1 + k_o k_{o.c}} (T_{o.c} p + 1)}{\frac{T_o}{1 + k_o k_{o.c}} p + 1} = \frac{k (T_{o.c} p + 1)}{T p + 1},$$

где выражения для  $k$  и  $T$  прежние, как в (7-13).

Таким образом, инерционность отрицательной обратной связи привела к появлению в числителе передаточной функции дополнительного форсирующего воздействия по производной, как в случае применения пропорционально-дифференцирующего звена.

*Инерционность положительной обратной связи, наоборот, затягивает переходный процесс.*

## Б. Гибкие корректирующие обратные связи

Идеальная гибкая обратная связь имеет место, когда звено в цепи обратной связи представляет собой идеальное дифференцирующее звено. Когда это звено дает первую производную, т. е. когда

$$W_{o.c}(p) = k_{o.c} p, \quad (7-17)$$

такая обратная связь называется обратной связью по скорости. В этом случае для звена с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{k_o}{Q_o(p)}$$

имеем:

$$W(p) = \frac{\frac{k_o}{Q_o(p)}}{1 \pm \frac{k_o k_{o.c} p}{Q_o(p)}} = \frac{k_o}{Q_o(p) \pm k_o k_{o.c} p}. \quad (7-18)$$

Таким образом, гибкая обратная связь, не влияя на коэффициент передачи охватываемого звена, изменяет коэффициент при  $p$  в знаменателе его передаточной функции.

В случае аperiodического звена первого порядка, когда

$$W_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1},$$

имеем:

$$W(p) = \frac{k_0}{(T_0 \pm k_0 k_{0.c}) p + 1},$$

т. е. постоянная времени звена изменяется на величину  $k_0 k_{0.c}$ , пропорциональную коэффициенту обратной связи, причем отри-

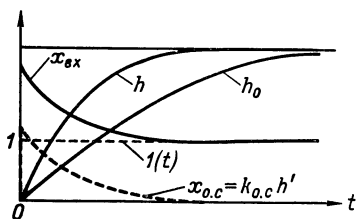


Рис. 7-13. Переходная характеристика аperiodического звена, охваченного положительной гибкой обратной связью

цательная обратная связь увеличивает постоянную времени, а положительная — уменьшает. При этом в отличие от отрицательной жесткой обратной связи применение положительной гибкой обратной связи позволяет повышать быстродействие без снижения коэффициента передачи звена. На рис. 7-13 приведены переходные характеристики и кривые  $x_{0.c}$  и  $x_{вх}$  аperiodического звена, охваченного положительной гибкой обратной связью. Из рисунка видно, что положительная гибкая обратная связь форсирует входной сигнал  $x_{вх}$ . Отрицательная обратная связь, наоборот, уменьшает  $x_{вх}$  в начале переходного процесса и этим затягивает процесс.

В случае звена второго порядка гибкая обратная связь изменяет постоянную времени  $T_2$ , стоящую в знаменателе передаточной функции при  $p$  в первой степени. При этом отрицательная обратная связь, увеличивая  $T_2$ , а с ней и величину  $\zeta = T_2 / (2T_1)$ , является эффективным средством уменьшения колебательности рассматриваемого звена.

Для интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_0(p) = \frac{k_0}{p}$  имеем:

$$W(p) = \frac{k_0}{(1 \pm k_0 k_{0.c}) p} = \frac{k}{p}, \quad (7-19)$$

где  $k = \frac{k_0}{1 \pm k_0 k_{0.c}}$ , т. е. гибкая обратная связь изменяет коэффициент передачи, не изменяя типа звена, как это делает жесткая обратная связь.

Гибкая обратная связь по ускорению, т. е. по второй производной, когда  $W_{0.c}(p) = k_{0.c} p^2$ , дает

$$W(p) = \frac{k_0}{Q(p) \pm k_0 k_{0.c} p^2}, \quad (7-20)$$

т. е. она изменяет коэффициент при  $p^2$  в знаменателе передаточной функции. Такую обратную связь имеет смысл применять для звеньев второго и более высокого порядка.

Инерционность гибкой обратной связи сказывается на динамике охватываемого звена таким же образом, как и в случае жесткой обратной связи, т. е. при отрицательной обратной связи инерционность повышает быстродействие, а при положительной — снижает его.

Благодаря простоте реализации инерционные обратные связи широко применяются для повышения быстродействия (форсирования переходных процессов). Особенно широкое распространение получила инерционная гибкая обратная связь вокруг интегрирующего звена, которая называется *з о д р о м н о й о б р а т н о й с в я з ь ю*. В этом случае

$$W_{o.c}(p) = \frac{k_{o.c}p}{T_{o.c}p + 1}. \quad (7-21)$$

Действие такой обратной связи в переходном процессе, вызванном ступенчатым воздействием на входе охваченного ею интегрирующего звена, можно пояснить так. В начале переходного процесса, когда скорость изменения переменных на входе и выходе звена велика, единицей в знаменателе  $W_{o.c}(p)$  по сравнению с членами с  $p$  можно пренебречь, т. е. принять  $W_{o.c}(p) \approx k_{o.c}/T_{o.c}$ . Поэтому в первой половине переходного процесса инерционная гибкая обратная связь ведет себя, как жесткая обратная связь, превращая, следовательно, охваченное ею интегрирующее звено в статическое. В результате облегчаются условия стабилизации САУ в целом и возникает возможность увеличить коэффициент передачи системы и тем самым повысить быстродействие в начале переходного процесса. Во второй половине переходного процесса постепенно, по мере его замедления сигнал обратной связи  $x_{o.c}$  спадает до нуля, в результате чего интегрирующее звено начинает вести себя, как звено без обратной связи, обеспечивая астатизм САУ в целом, т. е. устраняя установившуюся погрешность.

Рассмотрим интересный случай охвата обратной связью идеального звена с большим коэффициентом передачи  $k_o$ , т. е. практически усилителя. Здесь

$$W(p) = \frac{k_o}{1 + k_o W_{o.c}(p)} = \frac{1}{\frac{1}{k_o} + W_{o.c}(p)} \approx \frac{1}{W_{o.c}(p)}, \quad (7-22)$$

так как  $k_o \gg 1$ .

Таким образом, с помощью практически безынерционного усилителя можно получить звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена обратной связи. В частности, если  $W_{o.c}(p) = k_{o.c}p$ , то  $W(p) \approx \frac{1}{k_{o.c}p}$ , т. е. с помощью дифференцирующего звена в цепи обратной связи получается интегрирующее звено. Можно создать и обратный эффект. Аналогично



с помощью обычного статического звена, когда  $W_{o.c}(p) = \frac{1}{T_{o.c}p + 1}$ , получается пропорционально-дифференцирующее звено с передаточной функцией  $(T_{o.c}p + 1)$ .

Этот способ создания более трудных в реализации передаточных функций с помощью более простых обратных им передаточных функций нашел, в частности, широкое применение в вычислительных машинах непрерывного действия.

## В. Сравнение последовательных и параллельных корректирующих звеньев

В линейных системах оба рассмотренных типа коррекции эквивалентны, т. е. последовательное звено может быть заменено параллельным и наоборот при сохранении неизменными динамических свойств САУ.

Приравняем результирующие передаточные функции, полученные при применении обоих типов коррекции:

$$W_o(p) W_k(p) = \frac{W_o(p)}{1 \pm W_o(p) W_{o.c}(p)}. \quad (7-23)$$

Отсюда вытекают следующие выражения для передаточных функций последовательного корректирующего звена, эквивалентного данной обратной связи, и, наоборот, параллельного корректирующего звена, эквивалентного данному последовательному корректирующему звену:

$$W_k(p) = \frac{1}{1 \pm W_o(p) W_{o.c}(p)}; \quad (7-24)$$

$$W_{o.c} = \pm \frac{1 - W_k(p)}{W_o(p) W_k(p)}. \quad (7-25)$$

С помощью этих формул можно, например, показать, что последовательное инерционное пропорционально-дифференцирующее звено эквивалентно для интегрирующего звена с передаточной функцией  $W_o(p) = k_o/p$  инерционной гибкой обратной связи, а для апериодического звена — идеальной гибкой обратной связи. Последовательное идеальное пропорционально-дифференцирующее звено эквивалентно для интегрирующего звена инерционной гибкой обратной связи по двум производным, а для апериодического звена — этой же обратной связи, дополненной инерционной жесткой обратной связью.

Однако, несмотря на эквивалентность обоих способов коррекции с точки зрения влияния их на передаточную функцию системы, обратные связи получили несколько большее распространение благодаря главным образом следующим двум обстоятельствам.

Во-первых, обратную связь, как правило, легче реализовать из-за того, что на ее вход поступает более мощный сигнал, чем уровень мощности в той точке системы, куда подключен выход цепи обратной связи.

Второе преимущество обратных связей относится к отрицательным обратным связям, вследствие чего этот вариант обратных связей получил основное применение. Речь идет об уже упомянутом свойстве отрицательных обратных связей уменьшать отрицательное влияние нелинейностей, имеющих в охваченной части системы, а также нестабильность ее параметров.

Последовательные корректирующие звенья наиболее удобны в электрических САУ, особенно постоянного тока. В этом случае последовательные корректирующие звенья осуществляются в виде пассивных четырехполюсников, передаточные функции которых можно просто и плавно изменять в очень широких пределах, ограниченных лишь достаточно свободными условиями физической реализуемости.

#### § 7.4. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ В ФУНКЦИИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

В § 2-2 говорилось о способе повышения точности САУ путем применения компенсирующих сигналов по внешнему воздействию и его производным. Однако такие воздействия влияют не только на точность, но и на качество переходных процессов, форсируя процесс управления.

На рис. 7-14 показана уже известная нам схема САУ с компенсирующим воздействием по внешнему возмущению  $f$ . Для осуществления дополнительных форсирующих воздействий по производным  $\dot{f}$ , а также по производным задающего воздействия  $g$  в управляющее устройство системы должны быть введены пропорционально-дифференцирующие звенья, передаточные функции которых войдут в виде сомножителей в передаточные функции  $W_{uf}(p)$  и  $W_{ug}(p)$ .

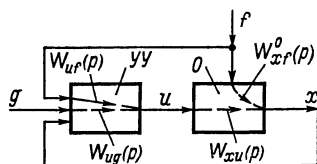


Рис. 7-14. Коррекция по внешним воздействиям

Если представить всю САУ по отношению к внешнему воздействию  $f$  в виде одного звена, а компенсирующие воздействия по  $\dot{f}$  через управляющее устройство УУ как параллельные дополнительные корректирующие воздействия, то становится очевидным, что влияние этих корректирующих воздействий на переходную характеристику системы принципиально ничем не отличается от рассмотренного ранее их влияния на переходную характеристику отдельного звена.

Вместе с тем между коррекцией с помощью последовательных корректирующих звеньев в контуре САУ и рассматриваемой коррекцией по внешним воздействиям существуют следующие два различия. Первое состоит в том, что коррекция по внешним воздействиям принципиально не влияет на устойчивость системы. Это объясняется тем, что корректирующие звенья в цепи внешних воздействий не входят в замкнутый контур САУ, и, соответственно,

не влияют на левую часть  $D(p)$  уравнения системы. Данное обстоятельство позволяет, применяя рассматриваемый способ коррекции с целью повышения точности и качества переходных процессов, не бояться ухудшения при этом условий устойчивости САУ, т. е. здесь нет противоречия между требованиями устойчивости и качества, как в случае ранее рассмотренных способов коррекции.

Вторым существенным отличием рассматриваемого способа коррекции является то, что эта коррекция влияет на качество переходных процессов, вызванных только тем воздействием, по которому она осуществлена. Качество переходных процессов от других воздействий при этом, разумеется, остается без изменения и определяется только коррекцией, имеющейся в замкнутом контуре САУ. Ниже рассматривается случай внешнего воздействия в виде возмущения  $f$ . Однако все результаты в равной мере справедливы и для случая, когда внешним воздействием является задающее воздействие  $g$ .

В соответствии с рис. 7-14

$$x = \frac{W_{xf}(p)}{1 + W(p)} f, \quad (7-26)$$

где

$$W_{xf}(p) = W_{xf}^0(p) + W_{uf}(p)W_{xu}(p). \quad (7-27)$$

Первое слагаемое в выражении (7-27) определяет естественную связь выходной величины  $x$  с возмущением  $f$ , а второе — компенсационное воздействие по  $f$ , осуществляемое через управляющее устройство.

Переходя к дифференциальному уравнению, имеем:

$$D(p)x = [M(p) + M_K(p)]f, \quad (7-28)$$

где  $M(p)$  обязано своим происхождением первому члену (7-27), а  $M_K(p)$  — второму. Отсюда изображение Лапласа выходной величины, определяющее переходный процесс в системе,

$$X(s) = \frac{[M(s) + M_K(s)] F(s) + M_H(s)}{D(s)}. \quad (7-29)$$

Здесь по-прежнему  $F(s)$  — изображение Лапласа для возмущения, а  $M_H(s)$  — многочлен, определяемый ненулевыми начальными условиями [ср. с уравнением (II-11)].

Из (7-29) следует, что если выбором коррекции получить

$$M_K(s) = -M(s), \quad (7-30)$$

то при нулевых начальных условиях, когда  $M_H(s) = 0$ , будет иметь место полная независимость или, как говорят, инвариантность выходной величины от внешнего воздействия. В этом случае любое изменение данного воздействия вообще не будет вызывать отклонения выходной величины  $x$  от заданного значения.

Условие (7-30) инвариантности при нулевых начальных условиях можно получить также в другой форме и из (7-27) путем приравливания нулю этого выражения:

$$W_{uf}(p) = - \frac{W_{xf}^0(p)}{W_{xu}(p)}. \quad (7-31)$$

Реализация условия (7-30) или (7-31) была бы идеальным решением проблемы повышения качества переходных процессов при нулевых начальных условиях, однако практически можно ставить вопрос только об известном приближении к этому идеалу. Основной причиной этого является то обстоятельство, что выполнение равенства (7-30) или (7-31) требует применения дополнительных воздействий по идеальным производным  $f$ , как правило, достаточно высоких порядков. Действительно, передаточная функция  $W_{xf}^0(p)$  в выражении (7-31) является частью передаточной функции  $W_{xu}(p)$  объекта. Поэтому порядок знаменателя у первой передаточной функции ниже, чем у второй. Следовательно, правую часть выражения (7-31), определяющую искомую передаточную функцию корректирующего звена  $W_{uf}(p)$ , можно представить в виде такого ряда:

$$W_{uf}(p) = k_n + k_{д1}p + k_{д2}p^2 + k_{д3}p^3 + \dots \quad (7-32)$$

Рассмотрим в качестве примера систему автоматического регулирования напряжения, изображенную на рис. 1-16. В случае возмущения в виде изменения нагрузки  $W_{xf}^0(p) = k_n$ . Компенсационное воздействие по нагрузке должно подаваться на вход усилителя (звено 2 на рис. 1-16), поэтому

$$W_{xu}(p) = \frac{k_y}{T_y p + 1} \cdot \frac{k_b}{T_b p + 1}.$$

Таким образом, согласно (7-31), передаточная функция корректирующего звена в цепи компенсации

$$W_{uf}(p) = - \frac{W_{xf}^0(p)}{W_{xu}(p)} = - \frac{(T_y p + 1)(T_b p + 1)}{k_n k_y k_b} = - (k_n + k_{д1}p + k_{д2}p^2), \quad (7-32a)$$

т. е. в данном случае для обеспечения инвариантности напряжения генератора от изменения нагрузки требуется применение воздействий по величине нагрузки и идеальным первой и второй производным от нее.

Помимо большой практической сложности осуществления точного многократного дифференцирования, невозможность полной инвариантности выходной величины от возмущения вызвана также пока не учитываемыми нами, но всегда существующими ограничениями переменных в системе. Например, в случае рассмотренной системы регулирования напряжения скачкообразное изменение нагрузки вызовет, согласно выражению (7-32a), бесконечно большое импульсное воздействие на входе усилителя регулятора,

которое, однако, не может быть пропущено усилителем, и, тем более, целью возбуждения генератора в силу неизбежного насыщения обоих звеньев, т. е. из-за нелинейности их статических характеристик. Особенности компенсирующих воздействий по внешним возмущениям с учетом ограничений переменных будут рассмотрены позднее в тринадцатой главе.

В практическом плане можно говорить, таким образом, не о полной инвариантности от внешних воздействий, а о возможности существенного повышения качества переходных процессов путем применения форсирующих воздействий по производным от этих возмущений.

С учетом произвольных ненулевых начальных условий, когда в правой части уравнения (7-29) появляется определяемый ими член  $M_n(s)$ , задача получения полной инвариантности от  $f$  еще более усложняется. В этом случае практически можно говорить о целесообразности некоторого отхода от условий инвариантности (7-30) или (7-31) и учитывать некоторые средние начальные условия, наиболее типичные для определенных условий работы данной системы.

Подробнее о теории инвариантности выходных величин САУ от внешних воздействий см. в работе [9].

#### **§ 7-5. ПОРЯДОК СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Изложенные выше методы исследования системы позволяют осуществить как анализ, так и синтез простейших линейных САУ.

Остановимся подробнее на общем порядке синтеза. Задача синтеза САУ в рамках рассматриваемых в настоящем курсе вопросов заключается в определении управляющего устройства в виде его математического описания для заданных объектов управления, требований к точности и качеству управления и условий работы, включая характеристики внешних воздействий, требования к надежности, весу, габаритам, потребляемой мощности и т. д.

Задача синтеза есть всегда задача на оптимум, поскольку требуется создать устройство, наилучшим образом удовлетворяющее всем требованиям, т. е. являющееся оптимальным. Однако большое число требований и их разнообразие не дают, как правило, возможности объединить всех их в одном сложном критерии оптимальности и решить задачу синтеза как строго математическую вариационную задачу на экстремум этого критерия.

Поэтому практически синтез САУ разбивается путем известного упрощения на ряд этапов, на каждом из которых решается какая-то часть задачи синтеза, т. е. рассматривается какой-то один ее аспект. При решении некоторых из этих отдельных задач часто удастся сформулировать численный критерий оптимальности и, таким образом, решить задачу средствами вариационного исчисления (см. об этом тринадцатую главу).

Поскольку общий критерий оптимальности отсутствует, для нахождения наилучшего решения обычно приходится производить расчет нескольких вариантов управляющего устройства и только в результате их сравнения выявлять оптимальный вариант.

Рассмотрим общий порядок поэтапного синтеза линейной САУ. При этом ограничим пока свое рассмотрение синтезом простейших САУ — систем автоматического регулирования. Особенности синтеза систем с более сложным алгоритмом, а также нелинейных систем будут рассмотрены позднее.

## **А. Определение порядка астатизма и коэффициента передачи системы**

Эти параметры находятся исходя из требований к точности в установившихся режимах при детерминированных воздействиях, как показано во второй главе. При этом, если коэффициент передачи системы, определенный по требуемой величине статизма или добротности (в случае астатических САУ), оказывается настолько большим, что существенно затрудняет даже просто стабилизацию системы, целесообразно повысить порядок астатизма и этим свести до нуля заданную установившуюся ошибку вне зависимости от значения коэффициента передачи системы. В результате становится возможным величину этого коэффициента выбирать, исходя только из соображений устойчивости и качества переходных процессов.

На этом же этапе решается вопрос о применении воздействий по основному возмущению (или по нескольким основным возмущениям), т. е. о переходе к комбинированной САУ. Это целесообразно если, во-первых, имеется возможность достаточно просто измерить данное возмущение и, во-вторых, когда в результате введения компенсации этого возмущения существенно упрощается замкнутый контур САУ. Последнее будет иметь место, если при отсутствии компенсации для получения нужной точности требуется достаточно большой коэффициент передачи в контуре, а введение компенсации позволяет его значительно уменьшить.

Кроме того, следует помнить, что воздействия по внешним возмущениям повышают и качество переходных процессов, что рассмотрим на следующих этапах синтеза.

## **Б. Определение основной, т. е. неварьируемой, части системы**

Часть звеньев САУ обычно однозначно определяется сразу непосредственно по заданию на разработку системы. Сюда относятся прежде всего объект управления и смежные с объектом и поэтому определяемые им исполнительные и чувствительные звенья управляющего устройства. Разумеется, при выборе этих звеньев необходимо исходить из предъявляемых к САУ требова-

ний, в том числе и по точности и быстродействию. Часто однозначно определяемыми или даже заданными оказываются и другие звенья управляющего устройства (преобразователи, усилители, вычислительные устройства).

В результате составляется костяк структурной схемы системы, которая должна быть дополнена корректирующими звеньями, а также звеньями, выбор которых требует учета устойчивости и качества переходных процессов. Кроме того, некоторые из параметров основных звеньев системы тоже могут оказаться неопределенными, т. е. варьiruемыми, и, следовательно, подлежащими определению.

## **В. Выбор коррекции и составление структурной схемы САУ**

При невысоких требованиях к качеству переходных процессов и точности в стационарных случайных режимах выбор корректирующих звеньев, а также варьiruемых параметров всех других звеньев системы осуществляется по условию обеспечения устойчивости с получением достаточно большой области устойчивости в пространстве варьiruемых параметров системы (см. четвертую главу).

После этого выбираются значения варьiruемых параметров (рабочая точка в области устойчивости), обеспечивающие выполнение требований к качеству переходных процессов и точности в стационарных случайных режимах.

При достаточно высоких требованиях к качеству переходных процессов или точности в стационарных случайных режимах может оказаться, что эти требования нельзя будет удовлетворить путем выбора значений параметров корректирующих звеньев, которые ранее были выбраны только по условию устойчивости, и потребуются дополнительная коррекция. Поэтому в таких случаях следует синтезировать коррекцию, сразу исходя из требований к качеству переходных процессов (см. пятую главу) или к точности при стационарных случайных воздействиях (см. третью главу) в зависимости от того, какие из этих двух требований наиболее жесткие.

После выбора коррекции проверяется выполнение другой группы требований. При этом в случае необходимости уточняется коррекция. Например, в результате синтеза корректирующих звеньев на минимум среднеквадратичного отклонения выходной величины при заданном стационарном случайном воздействии переходная характеристика САУ обычно получается с повышенной колебательностью в два-три периода. Поэтому при наличии более жестких требований к колебательности переходных процессов приходится изменять настройку корректирующего звена в сторону снижения колебательности САУ за счет некоторого снижения точности в стационарном случайном режиме.

В каком случае какие методы синтеза следует применять, было определено при изложении этих методов. Напомним только, что при

синтезе САУ на заданное качество переходных процессов использование корневых и интегральных методов синтеза требует предварительного выбора корректирующих звеньев. Сами же названные методы позволяют лишь определять числовые значения параметров этих звеньев, а также значения варьируемых параметров основных звеньев системы.

При использовании частотных методов синтеза находится частотная характеристика варьируемой части системы. Эту часть системы затем следует синтезировать с помощью любых корректирующих звеньев.

Если применяется последовательное корректирующее звено, найденная частотная характеристика варьируемой части системы и будет являться непосредственно частотной характеристикой этого корректирующего звена. По ней затем определяется передаточная функция этого звена. Если предполагается применить корректирующую обратную связь, ее передаточную функцию можно легко найти по ранее полученной передаточной функции последовательного корректирующего звена с помощью формулы (7-25). Если используется одновременно последовательная и параллельная коррекция, то из полученной передаточной функции варьируемой части системы выделяется сперва передаточная функция последовательного корректирующего звена, а затем по оставшейся части этой передаточной функции находится согласно (7-25) передаточная функция звена обратной связи.

Что же касается того, какой способ коррекции в каком случае выбирать, то об этом говорилось в двух предыдущих параграфах. При прочих равных условиях следует останавливаться на наиболее простом варианте коррекции.

Мощным методом синтеза САУ является синтез с помощью вычислительных машин. Применение вычислительных машин позволяет, варьируя передаточные функции корректирующих звеньев и значения их параметров в широких пределах, быстро получить большое количество соответствующих кривых переходных процессов и значений среднеквадратичных отклонений выходной величины при случайных воздействиях. Поэтому выбор коррекции и значений варьируемых параметров может быть выполнен простым перебором возможных вариантов. Для этого по каждому варианту коррекции строятся области устойчивости в пространстве варьируемых параметров. Внутри этих областей наносятся линии равных значений выбранных показателей качества (длительность переходного процесса, перерегулирование или колебательность и т. д.). Иногда просто для достаточно большого количества точек в области устойчивости приводятся непосредственно переходные характеристики. Полученная картина позволяет выбрать оптимальную коррекцию. Аналогично определяется значение среднеквадратичного отклонения в разных точках области устойчивости при наличии случайного воздействия.



## Г. Построение переходных процессов

Это завершающий этап синтеза (см. шестую главу). При построении переходных процессов необходимо по возможности учесть все те упрощения, которые были сделаны при математическом описании звеньев системы и в процессе ее синтеза.

При этом одновременно уже в порядке анализа должна быть количественно подтверждена допустимость принятых ранее упрощений.

### § 7-6. ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СИСТЕМ

#### А. Особенности синтеза систем с постоянным запаздыванием

До сих пор, рассматривая линейные САУ, мы не учитывали возможности наличия в них звеньев с запаздыванием. Вместе с тем в последнем случае возникает известная специфика, требующая внесения определенных изменений в описанные ранее методы исследования САУ.

Передаточная функция идеального звена с запаздыванием, согласно (1-90), имеет вид  $ke^{-\tau p}$ . При наличии в САУ такого звена передаточная функция разомкнутой системы может быть представлена так:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} e^{-\tau p} = W_o(p) e^{-\tau p}, \quad (7-33)$$

где

$$W_o(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Соответственно характеристическое уравнение замкнутой системы будет таким:

$$Q(\lambda) + R(\lambda) e^{-\tau \lambda} = 0. \quad (7-34)$$

Это трансцендентное уравнение с бесконечным числом корней.

В связи с последним обстоятельством при исследовании систем с запаздыванием наиболее удобны графические частотные методы. Устойчивость при этом проще всего исследовать с помощью критерия Найквиста, качество оценивать по показателю колебательности и полосе пропускания, а переходные процессы строить по действительной или мнимой частотным характеристикам.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика идеального звена с запаздыванием равна  $ke^{-j\tau\omega}$ . Таким образом, его амплитудная характеристика постоянна и равна  $k$ , а фазовая характеристика равна  $-\tau\omega$ , т. е. запаздывание по фазе растет пропорционально частоте. В соответствии с этим на рис. 7-15, а показано

построение а. ф. ч. х. разомкнутой системы, содержащей звено с запаздыванием и описываемой частотной функцией

$$W(j\omega) = W_0(j\omega) e^{-j\tau\omega}. \quad (7-35)$$

Эта характеристика получается из а. ф. ч. х.  $W_0(j\omega)$  путем поворота по часовой стрелке вокруг начала координат всех ее точек на угол, пропорциональный текущему значению частоты и равный  $\tau\omega_i$ . Таким образом, запаздывание приводит к «закручиванию» а. ф. ч. х. системы вокруг начала координат. Обычно это ухудшает устойчивость, уменьшая запас по фазе (см. рис. 7-15, а). Однако в отдельных случаях запаздывание может улучшить устойчивость и качество переходных процессов. Это иллюстрирует рис. 7-15, б, где введение запаздывания удаляет а. ф. ч. х. от точки  $(-1, j0)$ .

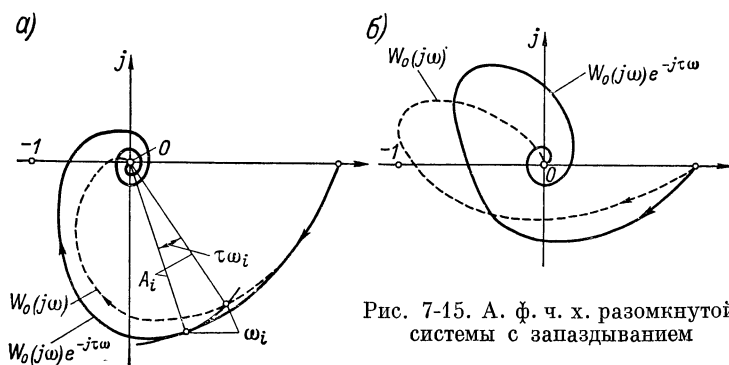


Рис. 7-15. А. ф. ч. х. разомкнутой системы с запаздыванием

Все изложенное выше в равной мере относится не только к системам с запаздыванием, но и к системам с распределенными параметрами. Это системы, в состав которых входят звенья с распределенными параметрами, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных типа волнового уравнения.

Примерами таких звеньев являются длинные электрические линии и трубопроводы, при описании которых надо учитывать гидравлический удар. Уравнения таких звеньев приводятся к линейным дифференциальным уравнениям, содержащим функцию  $e^{-\tau p}$ , как и в случае систем с запаздыванием. (Параметр  $\tau$  при этом характеризует время распространения волнового процесса в звене.)

## Б. Особенности синтеза нестационарных систем

В отличие от рассмотренных выше линейных стационарных систем нестационарные линейные системы — это системы с переменными параметрами, описываемые линей-

ными дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых являются функциями времени:

$$[a_0(t)p^n + a_1(t)p^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)p + a_n(t)]x = \\ = [b_0(t)p^m + b_1(t)p^{m-1} + \dots + b_{m-1}(t)p + b_m(t)]f. \quad (7-36)$$

Зависимости  $a_i(t)$  и  $b_i(t)$  могут задаваться либо аналитически, либо в виде графиков.

Непостоянство коэффициентов уравнения возникает вследствие изменения во времени параметров отдельных звеньев системы. Примером звена с переменными параметрами является самолет или ракета, масса, а следовательно, и постоянные времени которых изменяются по мере сгорания топлива.

Параметры звеньев могут изменяться также из-за изменения во времени внешних условий работы — температуры, напряжения питания и т. п.

Переменность коэффициентов дифференциального уравнения САУ приводит к тому, что функциями времени оказываются также передаточная функция  $W_z(p, t)$  и частотная функция  $W_z(j\omega, t)$  системы. Переходная функция будет зависеть от момента времени приложения входного воздействия, и соответственно ее обозначают  $h(t - \nu, \nu)$ , где  $\nu$  — момент подачи на САУ ступенчатого воздействия. Поскольку все эти функции содержат в качестве параметра время  $t$ , они называются п а р а м е т р и ч е с к и м и (параметрическая передаточная функция и т. д.)

Непостоянство коэффициентов уравнения во времени усложняет задачу исследования динамики подобных систем. Только уравнения с переменными параметрами первого и второго порядков могут быть решены в общем виде. Уравнения более высоких порядков решаются методами численного интегрирования, а также на вычислительных машинах.

Синтез САУ с переменными параметрами наиболее удобно осуществлять с помощью вычислительных машин, строя области устойчивости и линии равных значений показателей качества переходного процесса или среднеквадратичного отклонения выходной переменной при случайном воздействии на систему.

Синтез, как и анализ нестационарной системы с переменными параметрами, резко упрощается и появляется возможность использовать все методы, разработанные для стационарных систем, если система может рассматриваться как квазистационарная.

К в а з и с т а ц и о н а р н а я с и с т е м а — это система, параметры которой изменяются настолько медленно по сравнению с быстродействием системы, т. е. длительностью переходных процессов, что при рассмотрении последних можно приближенно считать параметры системы постоянными.

Квазистационарные системы могут исследоваться с помощью двух приближенных методов — метода замороженных коэффициентов и метода замороженных реакций. В обоих случаях задача

сводится к многократному исследованию системы с постоянными коэффициентами всеми известными нам способами.

Метод замороженных коэффициентов является более простым, но менее точным. Во всем интервале времени работы САУ выбирается ряд последовательных моментов времени, в которые переменные параметры принимают предельные или другие наиболее критические по влиянию на динамику системы значения. В каждой из этих точек производится исследование системы, причем параметры ее принимаются постоянными, т. е. «замороженными». Если точность и качество переходных процессов во всех выбранных точках удовлетворяют предъявляемым к системе требованиям, считается, что и исходная система с переменными параметрами тоже будет удовлетворять этим требованиям.

Метод замороженных реакций более точен, но соответственно сложнее. Применяется он в тех случаях, когда в рассматриваемой САУ можно выделить одно звено с переменными параметрами, в то время как остальная часть системы является стационарной. Как и в предыдущем методе замороженных коэффициентов, выбирается последовательный ряд наиболее характерных по значениям переменных параметров моментов времени  $t = v_i$ . Для каждого из этих моментов определяется переходная характеристика  $h(t - v_i, v_i)$  звена с переменными параметрами. Это осуществляется точно с учетом изменения параметров во времени (проще всего с помощью вычислительных машин или аналитически [11]). По каждой найденной переходной функции определяется эквивалентная передаточная функция  $W_i(p)$ , т. е. передаточная функция звена с постоянными параметрами, имеющего такую же переходную функцию. Согласно формуле (П-18), передаточная функция легко находится по переходной функции с помощью формулы прямого преобразования Лапласа:

$$W_i(p) = p \int_0^{\infty} h_i(\tau, v_i) e^{-\tau p} d\tau, \quad (7-37)$$

где  $\tau = t - v$ .

Аналогично можно использовать весовую функцию  $w(t - v_i, v_i)$ . Тогда, согласно (П-16),

$$W_i(p) = \int_0^{\infty} w(\tau, v_i) e^{-\tau p} d\tau. \quad (7-38)$$

В результате в каждый выбранный момент времени рассматриваемая система заменяется эквивалентной стационарной системой, описываемой передаточной функцией с постоянными коэффициентами. К этой системе, таким образом, применимы все известные нам методы исследования стационарных систем. Однако в отличие от действительно стационарной системы такое исследование необходимо провести для всех выбранных точек, как и в случае метода замороженных коэффициентов.

## В. Особенности синтеза многомерных систем

В многомерных САУ выходная величина является вектором  $\mathbf{X}$ , т. е. представляет собой совокупность нескольких выходных переменных  $x_i$ . Поэтому многомерная система является многоконтурной. Как показано в § 1-5, п. А, математическое описание сложных многоконтурных систем в общем виде осуществляется с помощью матричных передаточных функций.

На рис. 7-16 приведена схема двухмерной САУ, состоящей из объекта  $O$  с двумя выходными переменными  $x_1$  и  $x_2$  и двух управляющих устройств  $УУ1$  и  $УУ2$ . Такую схему может иметь изображенная на рис. В-4 система регулирования напряжения и частоты синхронного генератора, включающая в себя регулятор напряжения и регулятор частоты.

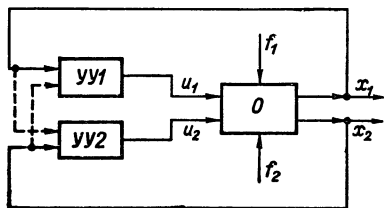


Рис. 7-16. Пример двухмерной системы

Анализ многомерной системы не имеет принципиальных особенностей по сравнению с анализом одномерной системы, хотя, как правило, и более трудоемок.

Устойчивость исследуется по полной многоконтурной структурной схеме системы. Определение точности системы, качества переходных процессов и их построение осуществляются отдельно для каждой выходной переменной  $x_i$  с помощью написанной для нее передаточной функции системы или соответствующих частотных характеристик. При этом знаменатель передаточных функций для всех переменных, очевидно, одинаков.

Устойчивость исследуется по полной многоконтурной структурной схеме системы. Определение

Например, для системы, изображенной на рис. 7-16, входящие в нее два контура описываются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} D_1(p) x_1 &= M_{11}(p) f_1 + N_{12}(p) x_2; \\ D_2(p) x_2 &= M_{22}(p) f_2 + N_{21}(p) x_1. \end{aligned} \right\} \quad (7-39)$$

Здесь  $f_1$  и  $f_2$  — основные учитываемые соответственно для  $x_1$  и  $x_2$  внешние воздействия. Член  $N_{12}(p) x_2$  учитывает влияние на  $x_1$  изменения  $x_2$ , которое воспринимается первой переменной как возмущение. Аналогично во втором уравнении член  $N_{21}(p) x_1$  отражает обратное влияние  $x_1$  на  $x_2$ .

Если исключить из каждого уравнения вторую переменную, уравнения можно записать в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} D(p) x_1 &= M_1(p) f_1 + M_{12}(p) f_2; \\ D(p) x_2 &= M_2(p) f_2 + M_{21}(p) f_1. \end{aligned} \right\} \quad (7-40)$$

Здесь  $D(p)$  — характеристический полином, определяющий устойчивость системы. Второй член в правой части каждого уравнения по-прежнему учитывает взаимное влияние контуров.

Точность и показатели качества переходных характеристик для каждой из выходных переменных определяются независимо по своему уравнению. При этом, как видим, анализ статистики и динамики для каждой из выходных переменных ничем не отличается от анализа одномерной системы с несколькими внешними воздействиями.

Другое дело — задача синтеза многомерной системы. Решение ее имеет существенную особенность, заключающуюся в необходимости одновременного удовлетворения требований по точности и качеству переходных процессов для нескольких выходных переменных, которые в общем случае взаимно связаны и часто нуждаются в противоположных мерах коррекции. Поэтому здесь необходимо компромиссное решение, при котором удовлетворяются требования, предъявляемые ко всем выходным переменным.

Рассмотрим связанные с этим особенности синтеза, переходя от простых случаев к более сложным.

Самый простой случай многомерной САУ — когда она состоит из автономных одномерных САУ. Здесь, хотя контуры управления отдельными выходными переменными  $x_i$  физически в системе связаны друг с другом, изменение любой из этих переменных не вызывает изменения остальных, т. е. с точки зрения динамики управления они являются независимыми. Применительно к уравнениям (7-39) и (7-40) это означает, что в их правых частях отсутствуют вторые члены.

Таким образом, при наличии автономности многомерная система просто распадается на ряд самостоятельно синтезируемых одномерных систем управления отдельными выходными переменными.

Иногда для упрощения синтеза неавтономные контуры можно в первом приближении принять автономными. Это, очевидно, возможно, когда связи между выходными переменными  $x_i$  достаточно слабы. Такие системы называются квазиавтономными.

Синтез таких систем осуществляется в два этапа. Вначале он ведется в предположении о полной автономности. Затем исследуется уже в порядке анализа влияние взаимных связей и при необходимости осуществляется уточнение коррекции.

Возможность применения идеи квазиавтономности определяется по относительной малости вторых членов в уравнениях (7-39) или (7-40). Оценку их часто удобно производить с помощью частотных характеристик (в том числе и для внешних воздействий). Может, например, оказаться, что с точки зрения статического режима переменные существенно взаимосвязаны, а при исследовании динамики их можно принять квазиавтономными вследствие резкой разницы в быстродействии (частотных спектрах). Действительно, если длительность переходного процесса для одной переменной на порядок больше, чем для другой, каждый из процессов

можно исследовать независимо, предполагая при этом постоянство другой переменной.

Многомерная САУ с неавтономными, т. е. связанными, выходными переменными может быть сделана автономной или квазиавтономной с возможностью независимого синтеза отдельных контуров путем введения специальных перекрестных связей между этими контурами, т. е. речь идет о применении здесь упомянутой ранее идеи инвариантности к каждой из выходных переменных системы относительно остальных переменных с помощью введения компенсирующих связей между ними. Применительно к двухмерной системе, описываемой уравнениями (7-39), для получения автономности надо ввести дополнительные корректирующие воздействия по  $x_2$  в первое управляющее устройство и по  $x_1$  — во второе, как показано штриховыми линиями на рис. 7-16. При этом уравнения (7-39) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} D_1(p) x_1 &= M_{11}(p) f_1 + [N_{12}(p) + N_{K1}(p)] x_2; \\ D_2(p) x_2 &= M_{22}(p) f_2 + [N_{21}(p) + N_{K2}(p)] x_1. \end{aligned} \right\} \quad (7-41)$$

Здесь  $N_{K1}(p)$  и  $N_{K2}(p)$  — полиномы, определяющие корректирующие связи между контурами. Условие автономности сводится к следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} N_{K1}(p) &= -N_{12}(p); \\ N_{K2}(p) &= -N_{21}(p). \end{aligned} \right\} \quad (7-42)$$

Отсюда можно найти передаточные функции корректирующих звеньев, которые осуществляют указанные перекрестные связи между контурами.

Как и в общем случае инвариантности, для получения автономности обычно необходимы корректирующие воздействия по идеальным производным различного порядка. Поэтому практически можно ставить вопрос лишь о достаточно приближенном выполнении условий автономности.

Обеспечение автономного управления отдельными выходными переменными, при котором изменение любой из них не вызывает изменения других, иногда выставляется в качестве обязательного требования к САУ, выполнение которого необходимо для правильной эксплуатации системы. Часто, особенно в сложных многомерных САУ, к автономности прибегают также с целью получения возможности независимой настройки и перенастройки отдельных каналов управляющего устройства по отдельным выходным переменным и тем самым упрощения условий наладки и эксплуатации системы в целом. Однако переходить к автономному управлению исключительно из соображений упрощения синтеза системы, разумеется, недопустимо. Другое дело, если автономность получается в результате синтеза многомерной системы на заданные точность и качество переходных процессов. Но, к сожалению, чаще всего переход к автономному управлению сопровождается ухудшением

качества по сравнению с оптимальной многомерной системой связанного управления.

Если связи между выходными переменными настолько сильны, что ими нельзя пренебречь даже для проведения синтеза в первом приближении с последующим уточнением, как предполагалось выше, возможны, в свою очередь, следующие методы синтеза. Из всех переменных выделяется одна, требования к динамике управления которой значительно жестче, чем у остальных переменных, и синтез коррекции осуществляется вначале исходя только из требований по этой переменной. После этого определяются точность и качество переходных процессов для остальных выходных переменных и при необходимости методом последовательных приближений осуществляется уточнение коррекции, так чтобы удовлетворялись требования к динамике всех переменных.

Если требования ко всем выходным переменным одного порядка, можно вначале провести общий синтез коррекции САУ без учета нулей передаточных функций соответствующих контуров. В случае уравнений (7-40) это означает синтез без учета правых частей уравнений, т. е. по общей левой части  $D(p)$ . Для этого могут быть использованы любые методы синтеза. Затем опять методом последовательных приближений производится синтез дополнительных корректирующих звеньев в отдельных контурах (в том числе и корректирующих воздействий по возмущениям) и дополнительных перекрестных корректирующих связей между контурами, обеспечивающих все требования к динамике каждой выходной величины в отдельности.

При невысоких требованиях к качеству переходных процессов первоначальный общий синтез САУ целесообразно осуществлять на устойчивость с получением достаточно большой области устойчивости в пространстве такого числа варьируемых параметров, чтобы их могло хватить для последующего обеспечения требований к качеству переходных процессов или точности в режимах со случайными воздействиями.

Заметим здесь, что при слабых связях между выходными переменными исследование устойчивости всей сложной многоконтурной системы иногда можно свести, как и исследование качества, к исследованию контуров отдельных переменных. Формально эта возможность проявляется в том, что многочлен  $D(p)$  может быть представлен в виде произведения нескольких многочленов, описывающих отдельные контуры системы. В этом случае корни характеристического уравнения всей системы представляют собой нули этих многочленов и, следовательно, условия устойчивости определяются в виде суммы независимых условий, налагаемых на эти отдельные многочлены.

Во всех описанных выше случаях синтеза путем последовательных приближений особенно удобно применение вычислительных машин.



## Теория нелинейных систем автоматического управления

---

### Глава восьмая

### ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ИХ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ

#### § 8-1. ВВЕДЕНИЕ

С точки зрения математического описания системы автоматического управления делятся на линейные и нелинейные. Нелинейная система — это система, содержащая хотя бы одно нелинейное звено, т. е. звено, описываемое нелинейным уравнением (см. § В-2, п. Г).

Все реальные САУ нелинейны, однако часто имеется возможность, ограничившись рассмотрением малых отклонений от установившегося режима, свести задачу к исследованию линейной модели реальной системы путем линеаризации последней. Как было показано в § 1-2, это возможно для систем, содержащих только несущественно нелинейные звенья.

Условия линеаризации звеньев определяют область применения рассмотренной в первой части книги теории линейных САУ. Кроме того, эта теория может быть использована для приближенного исследования САУ, содержащих и существенно нелинейные звенья, если эти нелинейности достаточно малы и ими в первом приближении можно пренебречь. Так, например, часто можно не учитывать имеющуюся у какого-либо звена зону нечувствительности, если она мала по сравнению с установившимися отклонениями в системе, определяемыми без ее учета. Также может быть отброшена петля гистерезиса (например, в статической характеристике электромашиного усилителя), если она достаточно узка. Примером существенной нелинейности, которой никогда нельзя пренебречь, является релейная характеристика. Включение в сис-

тему звена с такой характеристикой придает системе качественно новые свойства.

В приложении 8 приведены характеристики и уравнения некоторых типовых существенно нелинейных звеньев. В частности, показаны следующие нелинейности: насыщение (ограничение), нечувствительность, неоднозначность в виде мертвого хода (люфта) и релейные характеристики. Все эти нелинейности симметричны. Аналогично можно составить описание и для несимметричных нелинейностей, а также нелинейностей, представляющих собой комбинации указанных простых нелинейностей, например мертвого хода с насыщением и т. п.

В результате математического описания нелинейной САУ составляется структурная схема, состоящая из линейных, т. е. линеаризованных, и существенно нелинейных звеньев. При описании последних, в свою очередь, осуществляется идеализация с целью упрощения этого описания вплоть до перехода в большинстве случаев к типовым нелинейностям (см. приложение 8).

Нелинейности существенно усложняют исследование систем, так как нет общих методов решения описывающих их нелинейных дифференциальных уравнений. Однако в настоящее время имеется ряд методов решения отдельных классов нелинейных задач. Эти методы достаточно просты и позволяют путем их совместного применения успешно решать задачи анализа нелинейных САУ.

Хотя нелинейности затрудняют исследование САУ, их нельзя рассматривать как обязательно нежелательное явление. Нелинейности в равной степени могут оказывать как вредное, так и полезное влияние на работу системы. Более того, наряду с нелинейностями, присутствующими в САУ помимо нашего желания, например, в объекте управления, широко применяются нелинейности, специально вводимые в управляющее устройство системы с целью получения определенного положительного эффекта в работе САУ. К таким нелинейностям относятся, в частности, релейные управляющие устройства (см. одиннадцатую главу) и нелинейные корректирующие звенья в системах непрерывного действия.

Нелинейности придают САУ ряд качественно новых свойств, невозможных в линейных САУ. Нелинейные системы неизмеримо богаче по своим возможностям, чем линейные. Последние образуют, собственно говоря, довольно узкий класс систем, представляющих собой результат предельного упрощения реальных нелинейных систем.

## **§ 8-2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

Все основные результаты, полученные ранее во второй главе при рассмотрении точности линейных САУ в стационарных режимах, остаются справедливыми и для нелинейных систем. Сюда относятся, в частности, положения о влиянии на точность САУ

величины коэффициента передачи системы, порядка астатизма, компенсирующих воздействий по внешним возмущениям.

Вместе с тем наличие нелинейностей в системе создает определенные особенности в стационарных режимах.

Рассмотрим вначале статический режим нелинейных статических САУ. Статический режим САУ определяется зависимостью статического значения выходной величины  $X_{ст}$  системы от статического значения внешнего воздействия  $F_{ст}$ .<sup>1</sup> Для линейной САУ эта зависимость линейна и характеризуется величиной статизма (см. § 2-2). В нелинейных системах наличие нелинейных статических характеристик у отдельных звеньев приводит к тому, что зависимость  $X_{ст}$  от  $F_{ст}$  получается также нелинейной. Сказанное иллюстрирует рис. 8-1, а, где приведена эта зависимость

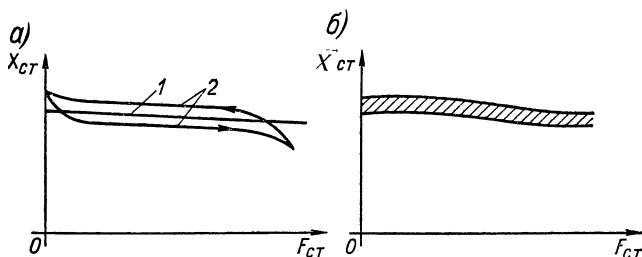


Рис. 8-1. Статические характеристики нелинейных САУ

для линейной системы (кривая 1) и возможный ее вид для нелинейной системы (кривая 2). В последнем случае зависимость может быть неоднозначной, как и показано на рисунке, если в систему входит звено с соответственно неоднозначной характеристикой.

Если в систему входит звено с зоной нечувствительности, то такую зону может иметь и статическая характеристика всей системы (рис. 8-1, б).

Таким образом, для оценки точности нелинейных САУ в статических режимах необходимо иметь статическую характеристику системы, связывающую  $X_{ст}$  и  $F_{ст}$ . Для приближенной оценки можно оперировать максимальным отклонением выходной величины, соответствующим максимально возможному изменению внешнего воздействия, а также диапазоном изменения крутизны  $\Delta X_{ст}/\Delta F_{ст}$  статической характеристики системы, т. е. ее статизма, который здесь получается переменным. Последняя величина, как и в случае линейных систем, обычно выражается в относительных единицах (см. § 2-2).

Статическая характеристика нелинейной системы строится по статическим характеристикам составляющих ее звеньев исходя из их соединения, определяемого структурной схемой.

<sup>1</sup> Здесь переменные обозначены заглавными буквами, поскольку это не приращения, а полные значения (см. § 1-1).

Построение производится графически. Общая его последовательность такая же, что и при выводе передаточной функции линейной САУ (см. § 1-5). Вначале по характеристикам отдельных звеньев строим характеристики групп последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звеньев, охваченных местными обратными связями. Способ построения показан на рис. 8-2. Для последовательно соединенных звеньев (рис. 8-2, а) задаемся рядом дискретных значений входной величины  $X$ . Для каждого из этих значений  $X_i$  определяем соответствующее значение выходной величины  $Y_{1i}$  первого звена, по последнему значению

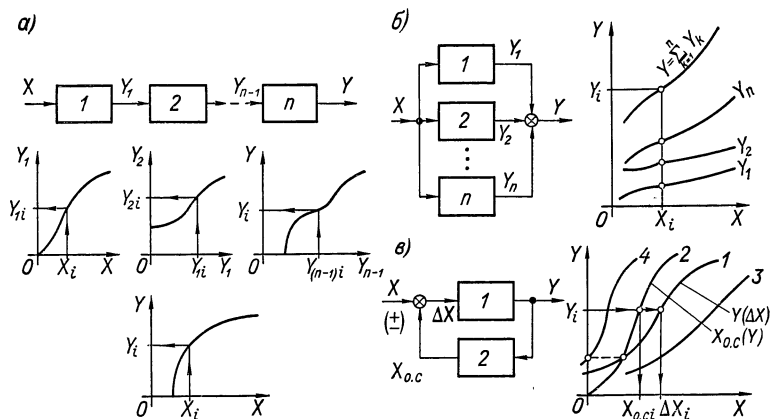


Рис. 8-2. Построение статической характеристики нелинейной САУ

находим значение выходной величины  $Y_{2i}$  следующего звена и т. д. до получения значения выходной величины всей цепочки  $Y_i$ .

При параллельном соединении звеньев (рис. 8-2, б) ординаты искомой зависимости  $Y$  от  $X$  определяем как сумму ординат характеристик отдельных звеньев, т. е.

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Построение статической характеристики звена, охваченного обратной связью, показано на рис. 8-2, в. Здесь кривая 1 — это статическая характеристика основного звена 1, т. е. статическая зависимость  $Y$  от  $\Delta X$ , а кривая 2 — статическая характеристика звена 2 в цепи обратной связи, т. е. статическая зависимость  $X_{o.c}$  от  $Y$ . Из уравнения

$$\Delta X = X \pm X_{o.c}, \quad (8-1)$$

где верхний знак (плюс) соответствует положительной обратной связи, а нижний (минус) — отрицательной, получаем выражение для входного сигнала

$$X = \Delta X \mp X_{o.c},$$

где по-прежнему верхний знак соответствует положительной обратной связи, а нижний — отрицательной.

Для каждого конкретного значения выходной величины  $Y$  соответствующее значение входной величины  $X$  определяется по этому выражению, где  $\Delta X$  и  $X_{0,c}$  находятся для данного  $Y$  по соответствующим характеристикам 1 и 2. Соответственно при положительной обратной связи искомая характеристика получается вычитанием абсцисс характеристик 1 и 2, а при отрицательной — их суммированием. Таким образом получена характеристика 3 — результирующая характеристика при отрицательной обратной связи и характеристика 4 — при положительной обратной связи.

Как видим, отрицательная обратная связь уменьшает, а положительная увеличивает крутизну результирующей характеристики. Это соответствует уже известной нам зависимости коэффициента передачи охваченного обратной связью звена от знака и величины обратной связи (см. § 7-3). Приведенное на рис. 8-2, в построение иллюстрирует также указанное ранее положение о том, что в случае линейной обратной связи отрицательная обратная связь уменьшает, а положительная увеличивает нелинейность результирующей статической характеристики. Это объясняется тем, что происходящее при этом пропорциональное изменение абсцисс соответственно изменяет влияние нелинейности исходной характеристики звена на результирующую характеристику звена с обратной связью.

Построения на рис. 8-2 для простоты выполнены в первом квадранте. Разумеется, все изложенное справедливо при любом расположении характеристик относительно координатных осей.

С помощью указанных построений многоконтурная САУ может быть приведена к одноконтурной схеме, состоящей из объекта управления  $O$  и управляющего устройства  $УУ$ , каждый из которых характеризуется своей статической характеристикой (рис. 8-3, а).

Если исходная схема имеет перекрещивающиеся ветви, они должны быть предварительно устранены путем преобразования схемы в соответствии с правилами, изложенными в § 4-5. Оперировать надо при этом не передаточными функциями, как там говорилось, а статическими характеристиками.

Объект управления  $O$  (рис. 8-3, а) имеет две входные величины — управляющее воздействие  $U$  и внешнее возмущение  $F$ . Поэтому он описывается показанным на рис. 8-3, б семейством статических зависимостей  $X$  от  $U$ , каждая из которых соответствует определенному значению  $F$ .

На рис. 8-3, б приведено построение искомой статической зависимости  $X$  от  $F$  замкнутой системы по статическим характеристикам объекта и статической характеристике управляющего устройства (кривая 1). Последняя характеристика строится в той же системе координат, что и характеристика объекта, только

для нее  $X$  является входной, а  $U$  — выходной величиной. Точки пересечения характеристик объекта с характеристикой управляющего устройства определяют значения переменных, удовлетворяющие характеристикам обоих звеньев и, следовательно, дают значения  $X$  и  $F$ , по которым может быть построена искомая статическая характеристика системы, приведенная на рис. 8-3, в (кривая 1). На этом же рисунке показана характеристика объекта при постоянстве  $U$ , т. е. при отсутствии управления (кривая 2). Эта характеристика соответствует точкам пересечения характеристик объекта на рис. 8-3, б с вертикальной линией 2, уравнение которой

$$U = U_1 = \text{const.}$$

Штриховой кривой на рис. 8-3, в показана характеристика замкнутой системы, получающаяся при увеличении коэффициента передачи управляющего устройства и соответственно при более пологой характеристике управляющего устройства (штриховая кривая на рис. 8-3, б).

Характеристика 3 на рис. 8-3, в соответствует характеристике 3 управляющего устройства на рис. 8-3, б и получается при увеличении до бесконечности коэффициента передачи управляющего устройства, т. е. при введении в это устройство интегрирующего звена с переходом, следовательно, к астатической САУ.

Если САУ комбинированная, на ее управляющее устройство помимо  $X$  подается еще сигнал от внешнего возмущения  $F$ . В этом случае управляющее устройство описывается, как и объект управления, семейством статических характеристик, каждая из которых соответствует определенному значению  $F$ . Характеристики замкнутой системы при этом строятся по точкам пересечения характеристик объекта и управляющего устройства, соответствующим одинаковому значению  $F$ .

Например, если в качестве конкретной системы взять систему автоматического регулирования напряжения генератора, приведенную на рис. В-2, в, то для нее у изображенных на рис. 8-3 характеристик переменные  $X$ ,  $U$  и  $F$  соответственно означают регулируемое напряжение генератора, напряжение его возбуждения и нагрузку.

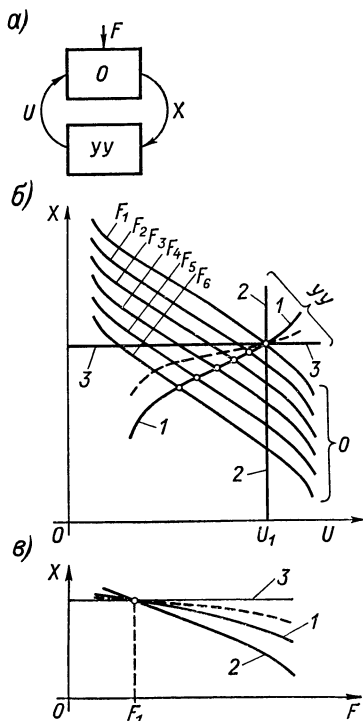


Рис. 8-3. Статические характеристики нелинейной САУ

Аналогично строится статическая зависимость выходной величины  $X$  от внешнего воздействия в виде задающего воздействия  $G$ . В этом случае управляющее устройство характеризуется семейством зависимостей  $U$  от  $X$  при ряде заданных значений  $G$ .

Таким же образом можно строить характеристики САУ для стационарных динамических режимов, рассмотренных во второй главе.

Описанная методика построения статических характеристик позволяет оценивать влияние нелинейности и неустойчивости отдельных звеньев на характеристику всей системы, а также взаимно согласовывать характеристики звеньев с целью получения желаемой результирующей характеристики САУ.

### § 8-3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

#### А. Прохождение случайного сигнала через нелинейное звено

Стационарные случайные режимы САУ возникают при действии на систему стационарных случайных воздействий. Предметом исследования САУ в таких режимах является точность системы, оцениваемая средним значением (математическим ожиданием) и дисперсией или среднеквадратичным отклонением выходной величины.

Методика исследования стационарных случайных режимов для линейных систем была рассмотрена в третьей главе.

В случае нелинейных систем задача существенно усложняется вследствие неприменимости здесь принципа суперпозиции. В связи с этим был создан метод приближенного исследования точности нелинейных САУ в стационарных случайных режимах, называемый методом статистической линейаризации. Этот метод разработан И. Е. Казаковым и Бутоном в 1954 г. и заключается в замене нелинейной системы линейной, эквивалентной исходной системе в отношении реакции на заданное случайное воздействие. В

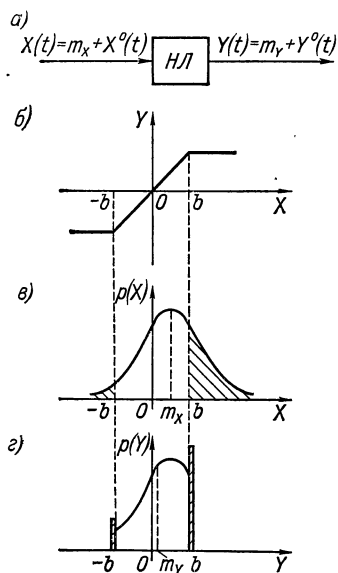


Рис. 8-4. Искажение кривой распределения сигнала при прохождении через нелинейное звено

результате возникает возможность применить для исследования нелинейных систем описанный в третьей главе аппарат исследования линейных систем.

Прежде чем перейти к изложению метода статистической линеаризации, рассмотрим особенности прохождения стационарного случайного сигнала через нелинейное звено. В качестве примера возьмем нелинейное звено *НЛ* (рис. 8-4, *а*) со статической характеристикой с насыщением (рис. 8-4, *б*). Для простоты примем коэффициент передачи звена, соответствующий линейному участку характеристики, равным единице. Пусть на вход звена поступает случайная величина  $X(t) = m_X + X^0(t)$  с нормальным распределением, график плотности вероятности  $p(X)$  которой показан на рис. 8-4, *в*.

На рис. 8-4, *г* изображен график плотности вероятности выходной величины  $Y(t) = m_Y + Y^0(t)$ , построенный по графику  $p(X)$  и статической характеристике звена. Значения  $X$ , лежащие внутри линейной зоны характеристики звена, т. е. по абсолютному значению не выходящие за уровень ограничения  $b$ , проходят через звено без искажения. Поэтому часть кривой  $p(Y)$ , лежащая в пределах  $Y = \pm b$ , совпадает с соответствующей частью кривой  $p(X)$ .

Все значения  $X$ , превышающие по абсолютной величине уровень  $b$ , дают на выходе звена одну и ту же величину  $Y$ , равную  $b$ , знак которой определяется знаком  $X$ . Вероятность появления сигнала  $Y$ , по величине большего  $b$ , равна нулю. В результате участкам кривой  $p(X)$  при  $|X| > b$  соответствуют в кривой  $p(Y)$  бесконечно узкие импульсы при  $Y = \pm b$ , площадь каждого из которых равна заштрихованной на рис. 8-4, *в* площади под кривой  $p(X)$ . На рис. 8-4, *г* для наглядности эти импульсы показаны условно конечной ширины и высоты.

Если изменять среднее значение  $m_X$  входной величины, то соответственно будет изменяться как среднее значение  $m_Y$  выходной величины, так и ее дисперсия. В частности, при увеличении  $m_X$  величина  $m_Y$  будет возрастать, стремясь к значению  $b$ , а дисперсия уменьшаться, стремясь в конце концов к нулю, когда  $m_X$  станет много больше  $b$ . Если при неизменном  $m_X$  сужать или расширять кривую  $p(X)$ , изменяя дисперсию входной величины, будут изменяться тоже как среднее значение выходной величины, так и ее дисперсия. При этом в случае сужения кривой  $p(X)$  величина  $m_Y$  будет увеличиваться, стремясь к  $m_X$  по мере того, как кривая  $p(X)$  будет все больше входить внутрь диапазона  $\pm b$ , а дисперсия выходной величины будет стремиться к нулю одновременно с дисперсией входной величины.

Таким образом, при прохождении случайного сигнала через нелинейное звено закон распределения плотности вероятности его искажается. При этом среднее значение величины на выходе звена и ее дисперсия зависят каждая как от среднего значения, так и от дисперсии входной величины. В этом проявляется непригодность к нелинейным звеньям принципа суперпозиции в отличие от линейных систем, где возможно независимое определение реакции системы на среднее значение, т. е. на детерминированную



часть внешнего воздействия, и на его центрированную случайную составляющую (см. третью главу).

На рис. 8-5, *a* и *б* приведены зависимости  $m_Y$  и  $\sigma_Y$  от  $m_X$  и  $\sigma_X$ , построенные для рассмотренного звена со статической характеристикой с насыщением (см. рис. 8-4, *б*) при  $b = 1$  в случае нормального распределения входного сигнала.

Как видно из рис. 8-5, *a*, наличие случайной составляющей сигнала сглаживает нелинейную зависимость между выходом и входом для среднего значения, т. е. для детерминированной составляющей сигнала. При отсутствии случайной составляющей, т. е. при  $\sigma_X = 0$ , эта зависимость, естественно, совпадает с нелинейной

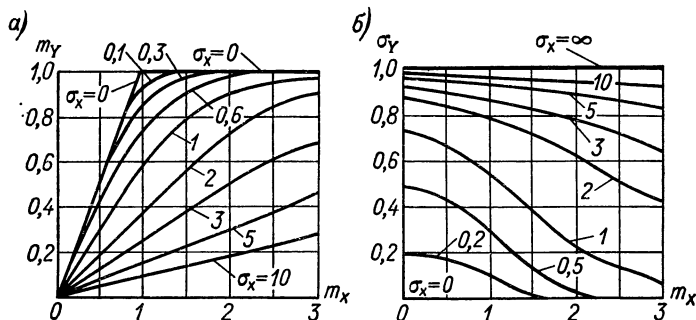


Рис. 8-5. Прохождение случайного сигнала через нелинейное звено с насыщением

статической характеристикой звена, а по мере роста  $\sigma_X$  ее наклон уменьшается, все более усредняясь, т. е. случайная, составляющая входного сигнала создает эффект линейаризации нелинейного звена для детерминированной составляющей сигнала.

Такая же линейаризация нелинейной характеристики под действием случайной составляющей сигнала с получением зависимостей  $m_Y$  от  $m_X$  и  $\sigma_Y$  от  $\sigma_X$ , подобных приведенным на рис. 8-5, *a*, будет, например, и в случае релейной характеристики. При этом возникает любопытное положение, когда за счет действия случайной составляющей релейное звено ведет себя по отношению к детерминированной составляющей сигнала как звено непрерывного действия.

Зависимости, показанные на рис. 8-5, *б*, иллюстрируют обратное влияние детерминированной составляющей сигнала на прохождение случайной составляющей. Здесь с ростом  $m_X$  передача звеном случайной составляющей тоже ослабляется за счет того, что звено насыщается детерминированной составляющей сигнала.

## Б. Идея статистической линейаризации

Рассмотрим нелинейное звено, характеристика которого показана на рис. 8-4, *б*. При наличии на его входе стационарного случайного сигнала

$$X(t) = m_X + X^0(t) \quad (8-2)$$

установившаяся реакция на выходе звена тоже представляет собой стационарный случайный сигнал

$$Y(t) = m_Y + Y^0(t). \quad (8-3)$$

Как показано выше, каждая из составляющих последнего сигнала зависит от обеих составляющих входного воздействия.

Задача статистической линеаризации заключается в том, чтобы найти линейное звено, дающее при том же входном сигнале  $X(t)$  выходной сигнал

$$Y_0(t) = m_{Y_0} + Y_0^0(t), \quad (8-4)$$

с достаточной точностью приближающийся к сигналу  $Y(t)$  на выходе нелинейного звена.

Точность линеаризации зависит от того, какой выбран критерий для сравнения  $Y_0$  с  $Y$ . Наиболее распространенными критериями статистической линеаризации являются следующие два. Первый состоит в том, что уравнение эквивалентного линейного звена определяется по условию сохранения неизменными среднего значения и дисперсии выходного сигнала, т. е. исходя из следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} m_{Y_0} &= m_Y; \\ D_{Y_0} &= D_Y; \end{aligned} \right\} \quad (8-5)$$

Второй критерий заключается в определении уравнения эквивалентного линейного звена по условию минимума среднеквадратичного отклонения  $Y_0(t)$  от  $Y(t)$ .

Рассмотрим вначале статистическую линеаризацию на основе первого критерия, т. е. по условию (8-5). При выполнении первого условия (8-5) линейное звено будет полностью эквивалентно исходному нелинейному звену в отношении пропускания заданной детерминированной составляющей входного сигнала. Второе условие (8-5) является условием эквивалентности в отношении пропускания центрированной случайной составляющей входного сигнала. В связи с тем что дисперсия не определяет полностью закона распределения случайной величины, выбор уравнения эквивалентного линейного звена исходя только из дисперсии случайной составляющей входного воздействия определяет погрешность данной статистической линеаризации.

Например, при статистической линеаризации нелинейного звена с насыщением (см. рис. 8-4) на выходе эквивалентного линейного звена вместо случайной величины с законом распределения, изображенным на рис. 8-4, г, будет случайная величина с тем же законом распределения, что и входная величина (см. рис. 8-4, в), но со средним значением и дисперсией, совпадающими с их значениями для истинной кривой на рис. 8-4, г. Т. е. приближенность статистической линеаризации заключается в пренебрежении искажением закона распределения случайного сигнала, осуществляе-

мым нелинейным звеном. Эта приближенность, в свою очередь, приводит к тому, что оценка точности замкнутых САУ, выполняемая с помощью этого метода, является принципиально приближенной.

Ограничим пока свое рассмотрение безынерционными нелинейными звеньями, описываемыми однозначной нечетной статической характеристикой (позиции 1, 2, 3, 6 приложения 8). В этом случае исходя из условия (8-5) нелинейное звено может быть заменено тоже безынерционным эквивалентным линейным звеном, описываемым уравнением

$$Y_9(t) = m_{Y_9} + Y_9^0(t) = k_{c0}m_X + k_{c1}X^0(t), \quad (8-6)$$

т. е. идеальным статическим звеном с разными коэффициентами передачи для детерминированной (коэффициент  $k_{c0}$ ) и случайной

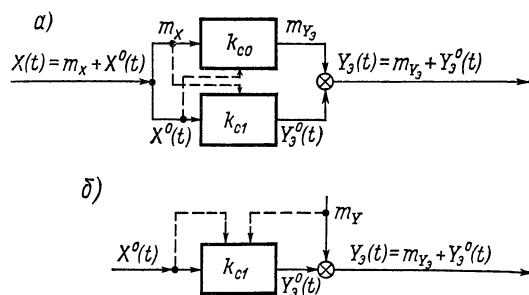


Рис. 8-6. Эквивалентное линейное звено, полученное в результате статистической линейаризации

(коэффициент  $k_{c1}$ ) составляющих сигнала. На рис. 8-6, а условно изображена схема этого звена, состоящая из двух параллельных звеньев. Одно звено ( $k_{c0}$ ) пропускает среднее значение, а другое ( $k_{c1}$ ) — только центрированную случайную составляющую сигнала. Штриховыми стрелками условно показана зависимость каждого коэффициента  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  от обеих составляющих входного сигнала.

Уравнение (8-6) непосредственно вытекает из условий (8-5). Согласно первому из них, коэффициент передачи эквивалентного линейного звена для среднего значения сигнала

$$k_{c0} = \frac{m_Y}{m_X}. \quad (8-7)$$

В соответствии со вторым равенством (8-5) коэффициент передачи центрированной случайной составляющей сигнала

$$k_{c1} = \pm \sqrt{\frac{\overline{D_Y}}{D_X}} = \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}. \quad (8-8)$$

Действительно, возведя в квадрат уравнение

$$Y_9^0(t) = k_{c1}X^0(t)$$

и осуществив усреднение, чтобы перейти к дисперсии, получим равенство

$$D_{Y_g} = k_{c1}^2 D_X,$$

соответствующее выражению (8-8). Знак  $k_{c1}$  в этом выражении определяется линеаризуемой функцией: если она возрастает в точке  $X = m_X$ , то  $k_{c1} > 0$ , если убывает, то  $k_{c1} < 0$ .

Коэффициенты  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  называются коэффициентами статистической линеаризации или статистическими коэффициентами передачи соответственно для математического ожидания и для центрированной случайной составляющей.

Коэффициенты  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  однозначно определяются статической характеристикой  $Y = \varphi(X)$  нелинейного звена и законом распределения  $p(X)$  входной величины. Покажем это. В соответствии с формулой (П-49) среднее значение  $Y$  как неслучайной функции  $\varphi(X)$  случайной величины  $X$  равно

$$m_Y = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X) p(X) dX. \quad (8-9)$$

Поэтому, согласно (8-7), получаем окончательное выражение для  $k_{c0}$  через  $\varphi(X)$  и  $p(X)$ :

$$k_{c0} = \frac{1}{m_X} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X) p(X) dX. \quad (8-10)$$

Аналогично в соответствии с определением дисперсии [см. формулу (П-53)]

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(X) p(X) dX - m_Y^2. \quad (8-11)$$

Поэтому, согласно (8-8), имеем выражение

$$k_{c1} = \pm \frac{1}{\sigma_X} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(X) p(X) dX - m_Y^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8-12)$$

Формулы (8-10) и (8-12) позволяют определить коэффициенты статистической линеаризации  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  для заданной нелинейности  $\varphi(X)$  при известном законе распределения  $p(X)$  входной величины. В приложении 9 приведены готовые выражения для  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  для ряда типовых нелинейностей в случае нормального распределения входной величины.

Функция распределения плотности вероятности для нормального закона

$$p(X) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Поскольку, как видим, она полностью определяется значениями  $m_X$  и  $\sigma_X$ , в случае нормального распределения коэффициенты статистической линеаризации  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  тоже однозначно определяются через  $m_X$  и  $\delta_X$  (см. приложение 9).

При статистической линеаризации нелинейных звеньев, входящих в замкнутую систему, закон распределения случайной величины на входе этих звеньев заранее неизвестен. Поэтому его приближенно принимают нормальным и используют выражения для коэффициентов  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ , приведенные в приложении 9. Допустимость этого связана с двумя обстоятельствами. Во-первых, как говорилось в § 3-2, при прохождении случайного сигнала через инерционную систему, какой является реальная САУ, закон распределения его приближается к нормальному и тем больше, чем уже полоса пропускания линейной части системы по сравнению со спектром внешнего воздействия. Поэтому даже тогда, когда приложенное к САУ внешнее воздействие имеет распределение, далекое от нормального, распределение случайной величины, попадающей на входящее в систему нелинейное звено, будет значительно ближе к нормальному. Таким же образом нормализуется искаженный нелинейностью закон распределения плотности вероятности сигнала на выходе нелинейного звена при прохождении по контуру замкнутой системы, прежде чем вновь попасть на вход этого звена. Во-вторых, расчеты показывают [16, 21, 22], что при изменении в широких пределах закона распределения величины на входе нелинейного звена значения  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  изменяются незначительно.

Таким образом, в целом *приближенность расчетов методом статистической линеаризации связана с допущением, что величина на входе нелинейного звена имеет нормальное распределение, и, далее, с учетом искажения этого закона нелинейным звеном*. При этом действительный закон распределения величины на выходе нелинейного звена заменяется тоже нормальным с сохранением прежних среднего значения и дисперсии. Погрешность расчетов, основанных на статистической линеаризации, будет тем меньше, чем ближе распределение внешнего воздействия к нормальному и чем шире его частотный спектр по сравнению с полосой пропускания линейной части системы.

Выше была изложена идея статистической линеаризации, основанная на условиях (8-5), т. е. равенстве средних значений и дисперсий величин  $Y$  и  $Y_0$ .

Остановимся теперь на другой возможной форме статистической линеаризации, основанной на критерии минимизации средне-

квадратичного отклонения  $Y_9$  от  $Y$ . В этом случае уравнение эквивалентного линейного звена определяется исходя из условия  $M[(Y - Y_9)^2] = \min$ .

Подставив сюда выражение (8-6) для  $Y_9$ , получаем:

$$M\{[Y - k_{c0}m_X - k_{c1}X^0(t)]^2\} = k_{c0}^2m_X^2 + k_{c1}^2D_X + M[Y^2] - \\ - 2k_{c0}m_Xm_Y - 2k_{c1}M[X^0Y] = \min.$$

Приравняв нулю частные производные от этого выражения по  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ , получим следующее уравнение для определения искомых формул для  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ :

$$\begin{aligned} -2m_Xm_Y + 2k_{c0}m_X^2 &= 0; \\ -2M[X^0Y] + 2k_{c1}D_X &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} k_{c0} &= \frac{m_Y}{m_X}; \\ k_{c1} &= \frac{1}{D_X} M[YX^0]. \end{aligned} \quad (8-13)$$

Из выражения (8-13)

$$k_{c1} = \frac{1}{D_X} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(X) X^0 p(X) dX. \quad (8-14)$$

Таким образом, и здесь статистическая линеаризация безынерционного нелинейного звена тоже сводится к замене нелинейного звена идеальным линейным с разными коэффициентами передачи для среднего значения и центрированной случайной составляющей. При этом значение первого коэффициента статистической линеаризации совпадает с ранее найденным по первому условию (8-5) коэффициентом  $k_{c0}$ . Выражение для второго коэффициента статистической линеаризации получается другим.

В приложении 9 приведены также выражения и для этого коэффициента  $k_{c1}$ . Как видно, этот способ линеаризации дает более простые выражения для  $k_{c1}$  и поэтому более предпочтителен.

Погрешность расчетов точности САУ, основанных на последней и ранее изложенной идеях статистической линеаризации, как показывает опыт, в обоих случаях получается примерно одинаковой по величине, хотя, как правило, разных знаков. В связи с этим рекомендуется для повышения точности расчетов использовать в качестве коэффициента  $k_{c1}$  среднее арифметическое значение этого коэффициента, полученного обоими способами, т. е. брать

$$k_{c1} = \frac{k_{c1}^{(1)} + k_{c1}^{(2)}}{2}, \quad (8-15)$$

где  $k_{c1}^{(1)}$  и  $k_{c1}^{(2)}$  — значения  $k_{c1}$ , соответствующие первому и второму способам статистической линеаризации.

Как было сказано, все изложенное выше относится к нелинейному звену с однозначной нечетной характеристикой. Остановимся теперь на особенностях статистической линейаризации других типов нелинейных звеньев.

Если статическая характеристика  $\varphi(X)$  нелинейного звена неоднозначна, его уравнение включает, помимо входной переменной  $X$ , еще и ее производную  $\dot{X}$  (см. позиции 3, 5, 7 приложения 8). В этом случае формулы (8-9) — (8-12) и (8-14) уже не применимы. Они должны быть усложнены учетом производной  $X$ . Выражения для  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  в приложении 9 получены по этим уточненным формулам, которые, однако, мы приводить не будем, поскольку сами по себе они нам не требуются.

Если характеристика  $\varphi(X)$  нелинейного звена не является нечетной, т. е. не симметрична относительно начала координат (см. позиции 8—11 приложения 8), искажение левой и правой частей кривой плотности вероятности входного сигнала при прохождении его через нелинейное звено будет неодинаковым и при  $m_X = 0$ . В этом легко убедиться, выполнив мысленно соответствующее построение кривой плотности вероятности  $p(Y)$ , аналогичное приведенному на рис. 8-4, для любой характеристики указанного вида. Поэтому в данном случае среднее значение  $m_{Y_9}$  нельзя выражать через  $m_X$  с помощью коэффициента статистической линейаризации  $k_{c0}$ , т. е. в виде

$$m_{Y_9} = k_{c0} m_X,$$

так как здесь  $m_{Y_9} \neq 0$  при  $m_X = 0$ . В связи с этим эквивалентное линейное звено для такого вида нелинейных звеньев следует представить в виде схемы, изображенной на рис. 8-6, б. Соответственно вместо (8-6) получаем уравнение

$$Y_9(t) = m_{Y_9} + Y_9^0(t) = m_Y + k_{c1} X^0(t). \quad (8-16)$$

Здесь  $k_{c1}$  — определяемый по-прежнему коэффициент статистической линейаризации для центрированной случайной составляющей, а  $m_Y$  находится для однозначной нелинейности по формуле (8-9) без перехода к  $k_{c0}$  с помощью формулы (8-10).

В соответствии с изложенным для рассмотренных нелинейностей в приложении 9 вместо  $k_{c0}$  даны выражения для  $m_Y$ .

## В. Методика исследования точности нелинейных САУ с помощью статистической линейаризации

Рассмотрим замкнутую САУ, изображенную на рис. 8-7. В произвольной точке системы приложено стационарное случайное воздействие

$$F(t) = m_F + F^0(t), \quad (8-17)$$

создающее в системе стационарный случайный режим. Звено — 1 на входе линейного звена  $W_{\text{л}}(p)$  показывает, что обратная связь в системе отрицательна. Наша задача заключается в том, чтобы определить среднее значение и дисперсию выходной величины САУ, которая в общем случае тоже находится в произвольной точке системы.

Начнем рассмотрение с систем с одной нелинейностью в виде однозначной нечетной характеристики.

Первым этапом решения является выполнение статистической линеаризации нелинейного звена. Полагая, что  $X(t)$  имеет нормальное распределение, осуществляем статистическую линеаризацию нелинейного звена, заменив его идеальным статическим звеном, показанным на рис. 8-6, а, с коэффициентом передачи  $k_{c0}$  для среднего значения и коэффициентом передачи  $k_{c1}$  для центрированной случайной составляющей  $X(t)$ . Эти коэффициенты находятся по приложению 9 в виде функций пока неизвестных величин  $m_X$  и  $\sigma_X$ , которые, таким образом, нам необходимо найти, чтобы определить значения  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ .

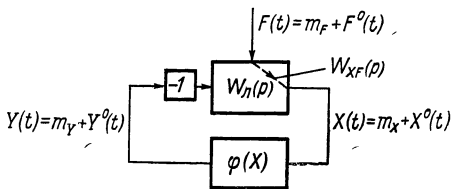


Рис. 8-7. Статистическая линеаризация нелинейной замкнутой системы

Заметим, что полученная в результате линеаризации САУ является линейной только при фиксированных  $m_X$  и  $\sigma_X$ , т. е. при стационарном воздействии на систему, но при изменении этого воздействия она по-прежнему нелинейна, так как содержит коэффициенты, зависящие от  $m_X$  и  $\sigma_X$ .

Для нахождения  $m_X$  и  $\sigma_X$  можем применить известные нам методы теории линейных САУ. В соответствии с проведенной линеаризацией для полученной линейной системы находим две передаточные функции — одну для детерминированной составляющей

$$W_{z0}(p) = \frac{m_X}{m_F} = \frac{W_{XF}(p)}{1 + k_{c0}(m_X, \sigma_X) W_{\text{л}}(p)} \quad (8-18)$$

и вторую для центрированной случайной составляющей процесса

$$W_{z1}(p) = \frac{X^0(t)}{F^0(t)} = \frac{W_{XF}(p)}{1 + k_{c1}(m_X, \sigma_X) W_{\text{л}}(p)}. \quad (8-19)$$

Эти передаточные функции отличаются только коэффициентами передачи эквивалентного линейного звена. У этих коэффициентов в скобках указаны переменные, функциями которых они являются.

Из (8-18) получаем следующее выражение для  $m_X$ :

$$m_X = W_{z0}(0) m_F = \frac{W_{XF}(0)}{1 + k_{c0}(m_X, \sigma_X) W_{\text{л}}(0)}. \quad (8-20)$$



Здесь принято  $p = 0$ , поскольку  $m_F$  постоянно, и, следовательно, для детерминированной составляющей процесса имеет место статический режим (см. § 2-2).

С помощью передаточной функции (8-19) находим выражение для  $\sigma_X$ , пользуясь формулами (3-14) и (3-8), выведенными в третьей главе для линейных систем:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_{\Sigma 1}^2(\omega) S_{F^0}(\omega) d\omega}. \quad (8-21)$$

Здесь  $A_{\Sigma 1}(\omega) = |W_{\Sigma 1}(j\omega)|$  — амплитудная частотная характеристика, соответствующая передаточной функции  $W_{\Sigma 1}(p)$ ;  $S_{F^0}(\omega)$  — спектральная плотность централизованной части  $F^0(t)$  внешнего воздействия.

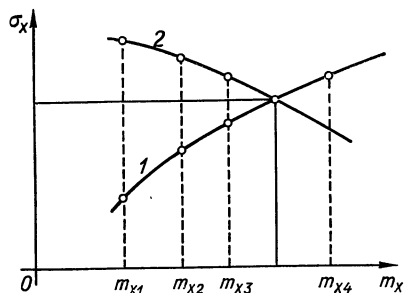


Рис. 8-8. Графическое определение  $m_X$  и  $\sigma_X$  при статистической линеаризации

Полученные уравнения (8-20) для  $m_X$  и (8-21) для  $\sigma_X$  содержат в правых частях обе искомые величины  $m_X$  и  $\sigma_X$  в выражениях для коэффициентов  $k_{c0}(m_X, \sigma_X)$  и  $k_{c1}(m_X, \sigma_X)$ . Поэтому найти значения  $m_X$  и  $\sigma_X$  можно только путем совместного решения уравнений (8-20) и (8-21). Их решают либо методом последовательных приближений, либо графически. В первом случае

вначале задаются грубо приближенными значениями  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  и по формулам (8-20) и (8-21) находят  $m_X$  и  $\sigma_X$  в первом приближении. По найденным значениям  $m_X$  и  $\sigma_X$  уточняют величины  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ . Затем вновь определяют  $m_X$  и  $\sigma_X$  во втором приближении и т. д. вплоть до момента, когда полученные значения  $m_X$  и  $\sigma_X$  окажутся достаточно близкими.

Решение уравнений (8-20) и (8-21) графическим методом выполняют, как показано на рис. 8-8. Вначале, задаваясь значениями  $m_X$ , строят зависимость  $\sigma_X$  от  $m_X$ , определяемую уравнением (8-20) (кривая 1 на рис. 8-8). Затем строят в тех же координатах зависимость  $\sigma_X$  от  $m_X$ , находя  $\sigma_X$  по уравнению (8-21) путем подстановки в его правую часть значений  $m_X$  и  $\sigma_X$ , определенных кривой 1 (кривая 2 на рис. 8-8). Точка пересечения обеих кривых дает искомые значения  $m_X$  и  $\sigma_X$ , удовлетворяющие обоим уравнениям. По этим значениям определяют искомые величины коэффициентов  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ , чем и завершается первый этап исследования нелинейной САУ, т. е. линеаризация системы с определением параметров эквивалентного линейного звена.

Вторым этапом исследования является определение среднего значения и среднеквадратичного отклонения выходной величины системы, находящейся в ее произвольной точке, т. е. где-то внутри

линейной части  $W_{\text{л}}(p)$  в схеме на рис. 8-7. Эта задача не составляет труда, поскольку мы имеем дело уже с линейной системой с известными параметрами  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ . Искомые величины среднего значения и среднеквадратичного отклонения находятся по прежним формулам (8-20) и (8-21) с тем только изменением, что в числителях соответствующих передаточных функций замкнутой системы  $W_{z0}(p)$  и  $W_{z1}(p)$  ставятся другие передаточные функции, связывающие  $F$  не с  $X$ , а с точкой нахождения интересующей нас выходной переменной системы.

Мы рассмотрели методику применения статистической линеаризации для систем с одной однозначной нечетной нелинейностью. Если характеристика нелинейного звена не является нечетной, т. е. несимметрична относительно начала координат, в результате статистической линеаризации такого звена получается эквивалентное линейное звено, которое описывается уравнением (8-16) и схема которого приведена на рис. 8-6, б. Согласно такому представлению эквивалентного линейного звена, оно в явном виде не замыкает систему для среднего значения, т. е. постоянной составляющей сигнала, и поэтому при исследовании точности САУ вместо уравнения (8-20) для  $m_X$  следует пользоваться таким уравнением:

$$m_X = W_{XF}(0) m_F - W_{\text{л}}(0) m_Y(m_X, \sigma_X). \quad (8-22)$$

Здесь выражение для  $m_Y(m_X, \sigma_X)$  в виде функции  $m_X$  и  $\sigma_X$  берется из приложения 9.

Совместное решение этого уравнения с уравнением (8-21) для  $\sigma_X$  дает значения  $m_X$ ,  $\sigma_X$ . По ним находятся значения  $k_{c1}(m_X, \sigma_X)$  и  $m_Y(m_X, \sigma_X)$ , т. е. определяются неизвестные параметры эквивалентной линейной САУ.

Среднеквадратичное отклонение центрированной составляющей искомой выходной величины замкнутой системы определяется далее по-прежнему. Среднее значение в соответствии с новым представлением линейного эквивалентного звена определяется по уравнению, аналогичному (8-22), но с другими передаточными функциями, связывающими  $F$  и  $Y$  на входе линейной части не с  $X$ , а с точкой нахождения выходной величины системы.

Заметим, что представление эквивалентного линейного звена в виде схемы на рис. 8-6, б с введением в рассмотрение  $m_Y$  вместо  $k_{c0}m_X$  в равной мере возможно и при нечетных нелинейных характеристиках. Однако в этом случае получается менее наглядным взаимное влияние детерминированной и центрированной случайной составляющих сигнала, проходящего через нелинейное звено.

Описанная методика применима и к системам с несколькими нелинейными звеньями. Каждое из них заменяется эквивалентным линейным звеном, параметры которого выражаются через среднее значение и дисперсию сигнала на его входе. В результате получается система, состоящая уже не из двух, а из стольких пар уравнений, сколько нелинейных звеньев входит в САУ. совме-

стное решение этих уравнений, естественно, значительно сложнее, чем в случае одной нелинейности.

Заметим, однако, что сказанное относится к случаю, когда нелинейные звенья разделены инерционными линейными звеньями. Если же нелинейные звенья включены непосредственно друг за другом, они все сводятся к одному нелинейному звену, характеристика которого строится по характеристикам отдельных звеньев, как это описано в предыдущем параграфе.

### **Г. Применение статистической линеаризации для исследования нестационарных процессов с высокочастотной случайной составляющей**

В заключение настоящего параграфа укажем на возможность применения статистической линеаризации для исследования нестационарных процессов, если внешнее воздействие

$$F(t) = m_F(t) + F^0(t)$$

имеет медленно изменяющуюся во времени детерминированную составляющую  $m_F(t)$  и высокочастотную стационарную случайную составляющую  $F^0(t)$ , т. е. речь идет о режиме, когда спектры детерминированной и случайной составляющих разнесены по частоте относительно друг друга.

В более общем случае случайная и детерминированная составляющие могут представлять собой самостоятельные внешние воздействия, приложенные в разных точках системы. В частности, сюда относится практически часто встречающийся случай, когда медленно изменяющаяся детерминированная составляющая представляет собой задающее воздействие, а высокочастотная случайная составляющая — внешнюю помеху (шум). Задача при этом сводится к исследованию процесса отработки задающего воздействия в присутствии помех. Применив статистическую линеаризацию, по-прежнему получим два уравнения: одно для среднеквадратичного отклонения  $\sigma_X$  централизованной случайной составляющей, а другое — для среднего значения  $m_X$  детерминированной составляющей. Первое уравнение является прежним уравнением (8-21). Однако в качестве второго уравнения уже нельзя использовать уравнение статики (8-20) [или (8-22)], полученное из (8-18) подстановкой  $p = 0$ , так как теперь среднее значение сигнала непостоянно. Поэтому надо брать соответствующее ему исходное дифференциальное уравнение

$$m_X(t) = W_{30}(p)m_F(t) = \frac{W_{XF}(p)}{1 + k_{c0}(m_X, \sigma_X)W_{\pi}(p)} m_F(t). \quad (8-23)$$

Совместное решение этих двух уравнений существенно сложнее, чем в случае стационарного режима, по двум причинам. Во-первых, входящие в эти уравнения коэффициенты  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$

теперь не постоянны, а медленно изменяются во времени вместе с  $m_F(t)$ . Во-вторых, второе уравнение для детерминированной составляющей из алгебраического стало дифференциальным (8-23).

Однако благодаря тому, что детерминированная составляющая является медленно изменяющейся по сравнению со случайной, задача облегчается возможностью при решении уравнения (8-21) для случайной составляющей сигнала считать процесс квазистационарным и применить известный нам по § 7-6, п. Б метод «замораживания» коэффициента  $k_{c1}$ , т. е. решать это уравнение по-старому, полагая этот коэффициент постоянным.

Графическое решение уравнения (8-21) дает определяемую им зависимость  $\sigma_X$  от  $m_X$ . Подставив эту зависимость в выражение для  $k_{c0}(m_X, \sigma_X)$ , получим нелинейную зависимость  $k_{c0}$  только от  $m_X$ . Подставив ее в уравнение (8-23) для детерминированной составляющей, получим нелинейное уравнение, содержащее только детерминированную составляющую:

$$m_X(t) = \frac{W_{XF}(p)}{1 + k_{c0}(m_X) W_n(p)} m_F(t). \quad (8-24)$$

Решение этого уравнения дает искомый процесс  $m_X(t)$ . В дальнейшем по найденным значениям  $m_X$  и  $\sigma_X$  можно описанным ранее способом найти детерминированную и случайную составляющие процесса в любой точке системы.

Решение нелинейного дифференциального уравнения (8-24) облегчается тем, что входящая в него нелинейная зависимость  $k_{c0}$  от  $m_X$  обычно, во всяком случае при достаточно большой случайной составляющей, очень слаба, т. е. в широком диапазоне изменения  $m_X$  можно считать  $k_{c0}$  постоянным. При этом уравнение (8-24) становится линеаризуемым и его решение не представляет труда.

Слабая зависимость  $k_{c0}$  от  $m_X$  объясняется описанным выше явлением сглаживания нелинейностей случайным сигналом. Например, как следует из рис. 8-5, а, в случае нелинейности типа насыщения с ростом  $\sigma_X$ , т. е. случайной составляющей сигнала, зависимость  $m_Y$  от  $m_X$  все более сглаживается и соответственно статистический коэффициент передачи  $k_{c0} = m_Y/m_X$ , уменьшаясь, все более стабилизируется относительно  $m_X$ .

Описанное влияние высокочастотной случайной составляющей на коэффициент передачи нелинейного звена для детерминированной составляющей создает характерные особенности динамики нелинейных систем, отсутствующие в линейных системах. В частности, если высокочастотная случайная составляющая представляет собой помеху, то при изменении уровня помехи будут изменяться точность и качество реакции САУ на детерминированные воздействия. Например, если, как в рассмотренном выше случае, с ростом уровня случайной помехи величина коэффициента  $k_{c0}$  уменьшается, это значит, что одновременно падают точность и быстроедействие детерминированных процессов управления.

Более того, за счет изменения уровня случайной помехи нелинейная САУ может из устойчивой превратиться в неустойчивую и наоборот. Например, нелинейная САУ с линеаризуемой нелинейностью в виде насыщения, неустойчивая вследствие того, что ее коэффициент передачи выше критического по условию устойчивости, может быть сделана устойчивой путем приложения к ней случайного сигнала. Обратное превращение устойчивой САУ в неустойчивую под влиянием случайной помехи возможно, в частности, если ту же характеристику с насыщением имеет корректирующее звено, которое стабилизирует систему.

Рассмотренное влияние случайной помехи на устойчивость нелинейной САУ представляет собой совершенно новое явление, не укладывающееся во введенное ранее применительно к линейным системам понятие об устойчивости. Там мы привыкли, что устойчивость есть внутреннее свойство системы, не зависящее от внешних воздействий. В случае же нелинейных систем, оказывается, устойчивая система, имеющая затухающую переходную характеристику, может начать раскачиваться при приложении к ней ограниченной по величине случайной помехи или при возникновении ее внутри самой системы.

В ходе рассмотрения статистической линеаризации мы перешли к вопросу об особенностях динамики нелинейных систем, являющемуся предметом следующего параграфа. Однако, прежде чем окончательно остановиться на рассмотрении этого вопроса, в заключение отметим еще одно важное обстоятельство в отношении применимости статистической линеаризации. Использование статистической линеаризации предполагает, что исследуемая система устойчива и в ней отсутствуют незатухающие колебания. В противном случае вследствие неприменимости к нелинейным системам принципа суперпозиции необходимо при статистической линеаризации учесть прохождение через нелинейное звено этих колебаний. Для этого применяется метод совместной статистической и гармонической линеаризации, о котором будет сказано позднее в § 9-3.

Более подробно о статистической линеаризации см. в работах [16, 21, 22].

#### **§ 8-4. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Выше при рассмотрении установившихся режимов нелинейных САУ было выяснено, что в отличие от линейных систем точность нелинейных систем зависит от величины внешних воздействий. Такая же зависимость существует и в отношении устойчивости и качества переходных процессов в нелинейных системах.

У линейных систем, как было показано в первой части книги, точность, устойчивость и качество переходных процессов не зависят от величины внешних воздействий. Благодаря применимости к линейным системам принципа суперпозиции изменение величины

внешнего воздействия вызывает в них только пропорциональное изменение абсолютного отклонения выходной величины, не сказываясь на качестве переходного процесса (его колебательности, длительности). Последнее иллюстрируется рис. 8-9, а, где приведены переходные характеристики для трех значений внешнего воздействия, пропорциональных числам, которыми отмечены характеристики.

Устойчивость линейных САУ вообще не зависит от внешних воздействий и определяется параметрами самой системы. Если линейная система устойчива, то это значит, что она устойчива относительно любого установившегося режима и переходная составляющая любого процесса всегда будет сходящейся.

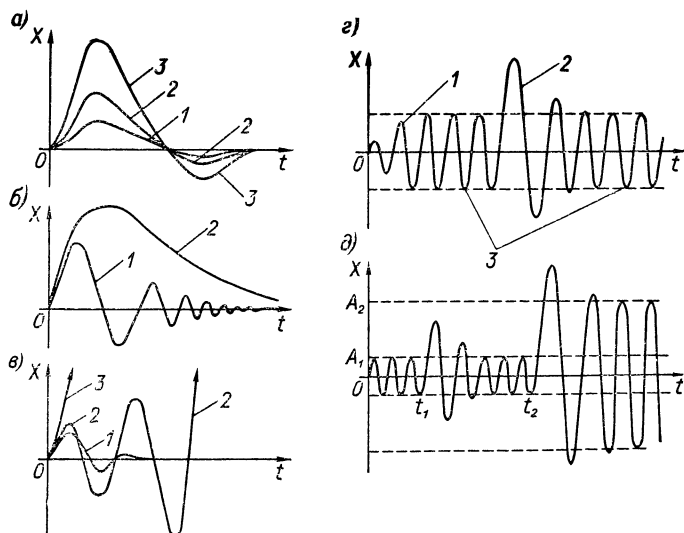


Рис. 8-9. К особенностям динамики нелинейных систем

В нелинейных системах дело обстоит сложнее. Качество переходных процессов в них изменяется при изменении величины внешнего воздействия, например, как показано на рис. 8-9, б. При этом в отличие от линейных систем период колебаний процесса не постояен, а изменяется по мере изменения отклонения. (Чаще всего он уменьшается с уменьшением отклонения — см. рис. 8-9, б.) Более того, как мы уже видели в предыдущем параграфе при рассмотрении случайных процессов в нелинейных системах, нелинейная система, устойчивая при одних значениях внешних воздействий, может оказаться неустойчивой с возникновением расходящегося переходного процесса при других значениях этого воздействия или при других внешних воздействиях. Такая же зависимость условий устойчивости от внешних воздействий существует и для одних детерминированных воздействий. Последнее иллюстрируется рис. 8-9, в и г.

На рис. 8-9, а показан случай, когда система, устойчивая при малых воздействиях (кривая 1), неустойчива при больших воздействиях с получением колебательного (кривая 2) или монотонного (кривая 3) расходящегося переходного процесса. На рис. 8-9, б представлен другой случай, когда, наоборот, при малых возмущениях переходный процесс является расходящимся (кривая 1), а при больших — затухающим (кривая 2). В этом случае, очевидно, установившимся режимом при отсутствии внешних воздействий будут незатухающие колебания (кривые 3). После всякого воздействия, сбивающего эти колебания к нулю, в системе будет возникать расходящийся процесс их восстановления, а после всякого воздействия, создающего большое отклонение выходной величины, будет возникать процесс, сходящийся опять к этим колебаниям.

Возможной причиной получения случая, показанного на рис. 8-9, а, может быть, например, наличие насыщения в корректирующем звене, обеспечивающем устойчивость системы, а причиной второго случая, показанного на рис. 8-9, б, — наличие зоны нечувствительности у этого же звена. Здесь в первом случае неустойчивость возникает при больших отклонениях от установившегося режима вследствие ослабления действия корректирующего звена из-за его насыщения. Во втором случае неустойчивость будет в точке покоя, поскольку при малых отклонениях относительно этой точки коррекция не действует из-за наличия зоны нечувствительности. При больших отклонениях корректирующее звено выходит из зоны нечувствительности и обеспечивает затухающий переходный процесс вхождения обратно в эту зону. В установившемся состоянии, следовательно, в системе будут существовать незатухающие колебания, амплитуда которых ограничена зоной нечувствительности, несколько превышая ее.

Такие устойчивые собственные колебания с постоянной амплитудой, определяемой нелинейностями системы, называются **автоколебаниями**. Автоколебания представляют собой новый вид установившегося режима, возможного при отсутствии внешних воздействий наряду со статическим установившимся режимом и характерного только для нелинейных систем. В линейных системах, как мы знаем, собственные незатухающие колебания могут быть при нахождении системы на границе устойчивости, однако амплитуда этих колебаний определяется внешними воздействиями, будучи пропорциональна им. При этом такая линейная САУ является неработоспособной.

Если же в нелинейной САУ возможны автоколебания, то это еще не означает, что она непригодна к эксплуатации. Во-первых, эти автоколебания могут быть настолько малы по амплитуде, что не будут оказывать заметного влияния на работу системы. Это часто относится, например, к автоколебаниям, вызываемым наличием зоны нечувствительности. Во-вторых, может быть другой случай, когда в системе принципиально возможны автоколебания

с большой амплитудой, однако, для того, чтобы они возникли, требуется соответственно очень большой внешний толчок. В результате может оказаться, что при всех практически возможных воздействиях на систему в ней могут быть только устойчивые переходные процессы. Этот случай соответствует кривым 1 и 2 на рис. 8-9, в, если предположить, что кривая 2 расходится не до бесконечности, а до автоколебаний с определенной амплитудой. Подобный случай может быть, например, если наряду с насыщением корректирующего звена, приводящим при больших воздействиях к нарушению устойчивости с переходом от кривой 1 к кривой 2, в системе имеется еще другое последовательное звено с насыщением на значительно большем уровне, которое и ограничивает амплитуду колебаний кривой 2.

Возможны нелинейные системы, в которых в зависимости от величины внешних воздействий возникают разные автоколебания, с разными амплитудами и частотами. Это иллюстрируется рис. 8-9, д. Здесь при малых воздействиях переходные процессы стягиваются к автоколебаниям с амплитудой  $A_1$ , а при больших — к автоколебаниям с амплитудой  $A_2$  (моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  — начала соответствующих переходных процессов).

Описанные особенности устойчивости нелинейных систем требуют при рассмотрении устойчивости таких систем оговаривать начальные условия и внешние воздействия, как это делалось ранее при рассмотрении качества линейных систем. В результате в случае нелинейных систем надо говорить не об устойчивости системы вообще, а об устойчивости определенного ее статического или динамического режима, т. е. определенного ее состояния или движения при определенных отклонениях от него. В связи с этим при изучении нелинейных систем употребляются понятия устойчивости в малом, в большом и в целом.

Устойчивость в малом — это устойчивость при бесконечно малых отклонениях от исходного режима. Устойчивость в большом — это устойчивость при конечных отклонениях, возможных в данной системе по условиям ее работы. Устойчивость в целом — это устойчивость при неограниченных отклонениях, т. е. при отсутствии каких-либо ограничений их. Нелинейная система может быть устойчива в малом, но неустойчива в большом (рис. 8-9, в). В линейных системах таких градаций устойчивости не существует, там система либо неустойчива, либо устойчива в целом. При этом в последнем случае будут устойчивы не только положения равновесия системы, но и любые вынужденные процессы.

При качественном рассмотрении процессов в нелинейных системах удобно использовать геометрическое представление, основанное на понятии фазового пространства<sup>1</sup>. Фазовое

<sup>1</sup> Термин «фаза» означает стадию, состояние рассматриваемого процесса. Вместо фазового пространства можно говорить о пространстве состояний.



**пространство** — это пространство в прямоугольной системе координат  $X_i$ , которыми являются величины, определяющие состояние системы. В общем случае у системы  $n$ -го порядка таких координат будет  $n$ . Ими могут быть, например, выходная величина системы и ее  $(n - 1)$  производных,  $n$  выходных величин отдельных звеньев системы или других связанных с ними переменных, которые в совокупности полностью определяют состояние системы. Для системы второго порядка фазовое пространство двумерное, т. е. представляет собой **ф а з о в у ю п л о с к о с т ь**, а для систем третьего порядка фазовое пространство представляет собой трехмерное геометрическое пространство. При более высоком порядке  $n$  это соответственно  $n$ -мерное пространство.

Состоянию системы в каждый момент времени, определяемому значениями ее  $n$  координат, соответствует определенная точка фазового пространства. Эта точка называется **и з о б р а ж а ю щ е й т о ч к о й**. На рис. 8-10, где для наглядности показано трехмерное фазовое пространство, она обозначена  $M$ . При изменении состояния системы изображающая точка будет перемещаться, описывая траекторию, которая называется **ф а з о в о й т р а е к т о р и е й**. Фазовая траектория дает полное представление о характере процесса в системе, кроме его временной оценки, поскольку время здесь из рассмотрения исключено.

Если в качестве координат взять отклонения  $x_i = X_i - X_{i\text{уст}}$  величин  $X_i$  от их значений  $X_{i\text{уст}}$ , соответствующих некоторому установившемуся режиму системы, то этому режиму будет соответствовать равенство нулю всех  $x_i$ , т. е. начало координат фазового пространства. В этом случае для оценки устойчивости системы надо знать, как при  $t \rightarrow \infty$  перемещается изображающая точка относительно начала координат. Для линейных систем в случае устойчивой системы все фазовые траектории асимптотически стягиваются в начало координат, а в случае неустойчивой — уходят в бесконечность.

На рис. 8-11 показаны примеры фазовых траекторий в фазовой плоскости, т. е. применительно к нелинейной системе второго порядка. Для определенности будем полагать, что  $x_1$  и  $x_2$  — это отклонения соответственно выходной величины и ее производной от их установившихся значений. Эти фазовые траектории описывают поведение системы после того, как она выведена из установившегося режима каким-либо воздействием, в результате чего изображающая точка оказалась в произвольном месте фазовой плоскости. Изображенные на рис. 8-11 картины фазовых траекторий называются **ф а з о в ы м и п о р т р е т а м и с и с т е м ы**. Фазовые портреты, показанные на рис. 8-11, *а* и *б*, соответствуют нелинейной системе, устойчивой в малом, но неустойчивой в большом. Этим случаям отвечают переходные процессы на рис. 8-9, *в*. При наличии устойчивости фазовые траектории стягиваются к началу координат, а при неустойчивости — расходятся в бесконеч-

ность. Между этими траекториями в качестве водораздела находится замкнутая траектория, показанная толстой линией.

При колебательном переходном процессе (кривые 1 и 2 на рис. 8-9, в) фазовые траектории вьются вокруг начала координат вследствие периодического характера изменения координат (рис. 8-11, б и область внутри замкнутой траектории на рис. 8-11, б). Неколебательному переходному процессу (кривая 3 на рис. 8-9, в) соответствуют фазовые траектории, подобные изображенным на рис. 8-11, б вне замкнутой траектории. В случае устойчивых процессов с одним перерегулированием (рис. 8-9, а) фазовые траектории имеют вид, изображенный на рис. 8-11, в. На этом рисунке одновременно продемонстрирован случай, когда в системе имеется зона нечувствительности по переменной  $X_1$ . В этом случае установившееся состояние системы определяется не началом координат, а отрезком, равным зоне нечувствительности.

На рис. 8-11, г показаны фазовые траектории системы, неустойчивой в малом и имеющей устойчивый автоколебательный режим. Переходные характеристики такой системы приведены на рис. 8-9, г.

Незатухающим колебаниям соответствует замкнутая траектория, поскольку при этом переменные колеблются с постоянной амплитудой и, следовательно, изображающая точка бесконечно движется по одной и той же замкнутой траектории.

Замкнутые фазовые траектории называются предельными циклами. Они бывают устойчивыми и неустойчивыми. Устойчивый предельный цикл (рис. 8-11, г) соответствует автоколебаниям. Он характерен тем, что соседние фазовые траектории с обеих сторон от устойчивого предельного цикла наматываются на него. Неустойчивого предельного цикла (рис. 8-11, а) соседние фазовые траектории отходят с обеих сторон. Неустойчивый предельный цикл соответствует неустойчивым колебаниям, которые практически в системах не существуют, являясь промежуточным состоянием при переходе от одного установившегося режима к другому.

На рис. 8-11, д показан случай с двумя предельными циклами 1 и 2. Цикл 1 неустойчивый, а цикл 2 устойчивый. Этот случай отличается от рис. 8-11, а тем, что при больших отклонениях от установившегося режима возникают колебания, которые не расходятся бесконечно, а стягиваются к установившимся автоколебаниям.

На рис. 8-11, е и ж представлены фазовые портреты неустойчивых систем с аperiodической неустойчивостью. Здесь же приведены соответствующие им переходные характеристики.

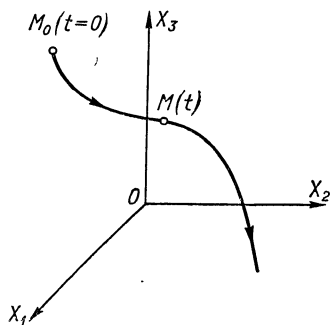


Рис. 8-10. Фазовое пространство

На рис. 8-11, з для сравнения изображен фазовый портрет линейной системы, находящейся на границе устойчивости вследствие того, что ее характеристическое уравнение имеет пару сопряженных мнимых корней. Здесь каждому начальному отклонению от

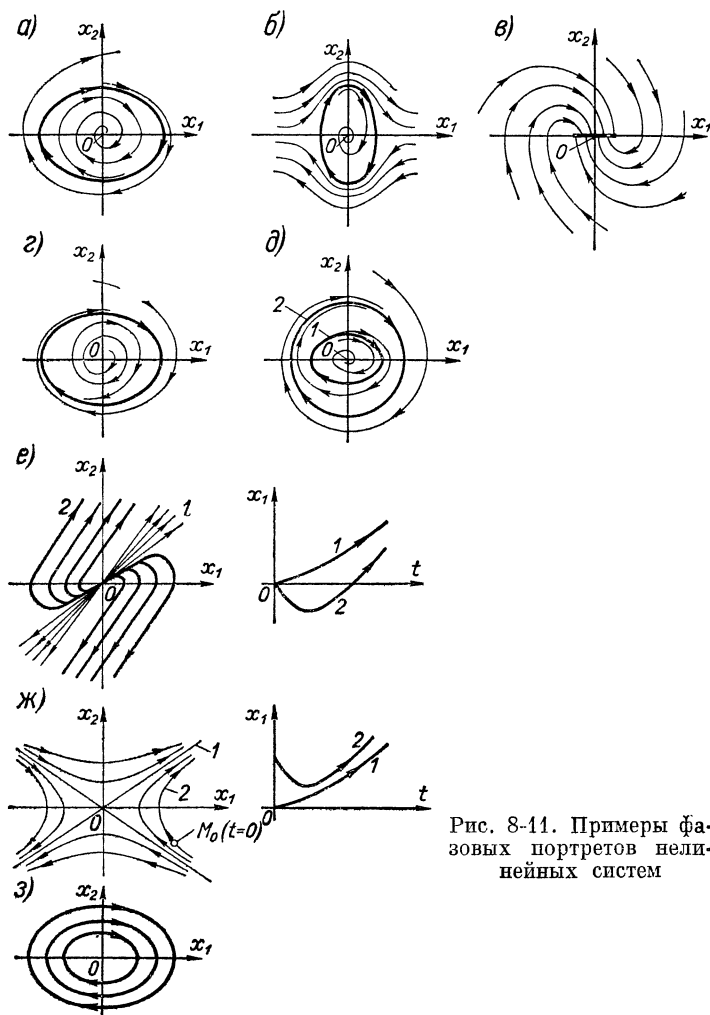


Рис. 8-11. Примеры фазовых портретов нелинейных систем

установившегося состояния соответствует своя амплитуда незатухающих колебаний.

Если  $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$ , то все фазовые траектории в верхней полуплоскости идут слева направо (так как  $x_2 > 0$ ), а в нижней — в обратном направлении ( $x_2 < 0$ ). Ось абсцисс они пересекают под прямым углом ( $x_2 = 0$ ). Между собой фазовые траектории пересекаются

только в особых точках. **О с о б ы м и т о ч к а м** и называются точки, соответствующие состоянию равновесия системы. На всех рис. 8-11, кроме рис. 8-11, *в*, такой особой точкой является начало координат. На рис. 8-11, *в* особые точки образуют целый **о с о б ы й о т р е з о к**.

Особые точки бывают четырех видов — центр, фокус, узел и седло. **Ц е н т р о м** называется особая точка в начале координат, изображенная на рис. 8-11, *з*. **Ф о к у с** может быть устойчивым (начало координат на рис. 8-11, *а, б и д*) и неустойчивым, т. е. соответствующим неустойчивому состоянию равновесия (начало координат на рис. 8-11, *е*). Начало координат на рис. 8-11, *е* является особой точкой, называемой **н е у с т о й ч и в ы м у з л о м**.

Если подобные фазовые траектории будут входить в начало координат, что соответствует устойчивой системе, начало координат будет называться **у с т о й ч и в ы м у з л о м**. **С е д л о** — это особая точка в виде начала координат на рис. 8-11, *ж*. Седло всегда неустойчиво, т. е. соответствует неустойчивому состоянию равновесия.

Системы с фазовым портретом, представленным на рис. 8-11, *г*, называются **с и с т е м а м и с м я г к и м р е ж и м о м в о з б у ж д е н и я к о л е б а н и й**. В таких системах после их включения всегда устанавливаются автоколебания при любых начальных условиях и внешних воздействиях.

Системы с фазовым портретом на рис. 8-11, *д* называются **с и с т е м а м и с ж е с т к и м р е ж и м о м в о з б у ж д е н и я к о л е б а н и й**. Для того чтобы в этих системах возникли автоколебания, соответствующие устойчивому циклу, необходимо создать достаточно большое начальное отклонение приложением, например, возмущения, при котором изображающая точка окажется вне устойчивого предельного цикла *1*. Если после установления автоколебаний какое-либо возмущение сместит изображающую точку в сторону начала координат внутрь неустойчивого цикла *1*, колебания в системе опять затухнут.

При рассмотрении устойчивости нелинейных систем в дополнение к ранее введенным понятиям устойчивости в малом, в большом и в целом используется еще понятие **а с и м п т о т и ч е с к о й у с т о й ч и в о с т и**. Асимптотическая устойчивость имеет место, если фазовые траектории вблизи начала координат асимптотически стягиваются к нему. Данное в § 4-1 определение устойчивости линейных систем означает именно асимптотическую устойчивость.

Примером неасимптотически устойчивой нелинейной системы является система с зоной нечувствительности и фазовым портретом, показанным на рис. 8-11, *в*. Системы с фазовыми портретами на рис. 8-11, *а, б и д* асимптотически устойчивы в малом, т. е. при воздействиях, при которых изображающая точка не выходит за предельный неустойчивый цикл.

Напомним еще раз, что, говоря здесь об устойчивости нелинейной системы, мы должны всегда иметь в виду устойчивость ее определенного установившегося режима, соответствующего началу координат фазового пространства.

## § 8.5. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Фазовый портрет дает полное представление о динамике нелинейной системы второго порядка при детерминированных воздействиях, включая точность, устойчивость и качество процессов. В связи с тем что на фазовой плоскости в явном виде отсутствует время, из фазового портрета непосредственно нельзя определить только быстроедействие системы. Однако приблизительную оценку его все же дать можно по величине скорости  $dx/dt$  выходной переменной, которая обычно используется в качестве второй координаты, откладываемой по оси ординат.

Действительно, в этом случае время перехода изображающей точки из одного положения в достаточно близкое последующее может быть приблизительно определено по формуле

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}_{\text{ср}}},$$

где  $\Delta x$  — приращение  $x$ , соответствующее данному перемещению изображающей точки, а  $\dot{x}_{\text{ср}}$  — среднее значение скорости  $dx/dt$  этого перемещения, определяемое как ордината середины отрезка фазовой траектории между данными точками. Пользуясь этой формулой, можно по фазовой траектории приближенно построить соответствующую ей кривую переходного процесса  $x(t)$ . В случае автоколебательного процесса можно таким же образом определить величину периода колебаний.

Фазовая плоскость является основным методом исследования нелинейных систем второго порядка. Это связано с тем, что для этих систем построение фазового портрета можно выполнить непосредственно по дифференциальному уравнению системы, не решая его. Рассмотрим методику построения фазового портрета нелинейной системы второго порядка. В качестве координат примем отклонение  $x$  выходной величины системы от ее значения, соответствующего установившемуся режиму системы, и ее первую производную  $y = dx/dt$ . Предварительно описание системы должно быть приведено к системе двух уравнений первого порядка следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Q(x, y); \\ \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

где  $y = dx/dt$ , а  $Q$  и  $P$  — нелинейные функции от выходной величины  $x$  и ее производной  $y$ .

Если, например, математическое описание системы представляет собой уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (8-26)$$

то, введя обозначение  $y = dx/dt$ , из (8-26) непосредственно получим систему (8-25) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(x, y); \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\}$$

Разделив первое уравнение (8-25) на второе, получим уравнение фазовых траекторий в виде нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = R(x, y). \quad (8-27)$$

Таким образом, путем исключения времени мы упростили задачу, перейдя от уравнения второго порядка (или, что то же самое, от двух уравнений первого порядка) к одному уравнению первого порядка. Однако построение траекторий в общем случае не требует решения и этого уравнения и может быть выполнено так называемым методом изоклин. Для этого вначале на фазовой плоскости строятся линии, соответствующие алгебраическому уравнению

$$R(x, y) = C, \quad (8-28)$$

где  $C$  — постоянная величина, для которой задается ряд произвольных значений от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Каждому значению  $C$  соответствует своя линия. Эти линии называются *изоклинами*. Как следует из уравнения (8-27), для каждой изоклины имеется равенство  $dy/dx = C$ , т. е. изоклина — это геометрическое место точек с одинаковым наклоном фазовых траекторий, проходящих через эти точки. Величина  $C$  при этом определяет тангенс угла наклона фазовой траектории относительно оси абсцисс.

На рис. 8-12, а дан пример построения изоклин. Стрелочками на них показано направление фазовых траекторий. Здесь же цифрами обозначены соответствующие величины  $C$ .

По изоклинам нетрудно построить сами фазовые траектории, руководствуясь стрелочками. На рис. 8-12, б дается пояснение этой операции. Из произвольно выбранной начальной точки  $M_0$  проводятся два луча до пересечения со следующей изоклиной. Один луч имеет наклон, соответствующий стрелке на данной изоклине, а другой — стрелке на следующей изоклине. Точка  $M_1$  данной фазовой траектории на следующей изоклине определяется как середина отрезка между точками пересечения лучей с этой

изоклиной. Таким же образом находится следующая точка  $M_2$  и т. д.

Точность построения фазовой траектории может быть существенно повышена, если имеется возможность решить уравнение (8-27). В этом случае изоклины не строятся, а непосредственно путем интегрирования уравнения (8-27) находится зависимость между  $y$  и  $x$ , определяющая выражение для фазовых траекторий. В частности, такая возможность существует для широко распространенных нелинейностей, которые могут быть представлены кусочно-линейными характеристиками. К таким нелинейностям, например, относятся все типовые нелинейности, приведенные в приложении 8, кроме нелинейностей 8 и 10. Впрочем, и последние нелинейности тоже могут быть аппроксимированы ломаной линией.

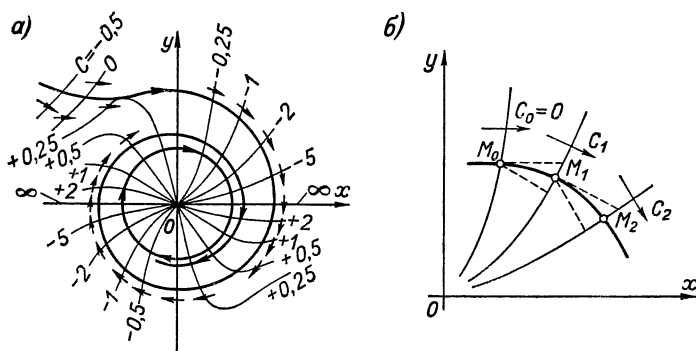


Рис. 8-12. Построение фазовых траекторий с помощью изоклин

В случае таких кусочно-линейных характеристик нелинейных звеньев правая часть уравнения (8-27) системы представляет собой набор нескольких линейных функций, соответствующих отдельным линейным участкам характеристики нелинейного звена. В процессе изменения  $x$  и  $y$  происходит замена одной такой функции на другую в моменты прохождения через точки излома нелинейной характеристики. В результате фазовая характеристика разбивается соответственно на ряд участков, в пределах каждого из которых уравнение (8-27) является линейным и, следовательно, легко интегрируемым. Такой метод интегрирования по участкам уравнения с кусочно-линейной нелинейностью называется методом припасовывания (или сшивания).

На фазовой плоскости точкам излома кусочно-линейной характеристики соответствуют так называемые линии переключения. При пересечении фазовой траекторией этих линий происходит излом траекторий вследствие изменения правой части описывающего их уравнения (8-27).

Рассмотрим для примера фазовый портрет нелинейной системы, структурная схема которой приведена на рис. 8-13. Здесь  $\varphi(\epsilon)$  —

кусочно-линейная статическая характеристика. В качестве этой характеристики возьмем некоторые релейные характеристики, приведенные в приложении 8. Такую структурную схему может иметь, например, релейная следящая система. В этом случае  $X$  — это угол поворота вала исполнительного двигателя,  $G$  — подлежащее обработке заданное значение  $X$ , а  $T$  — постоянная времени двигателя.

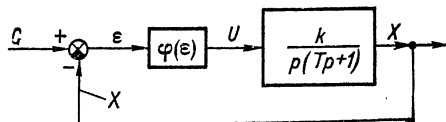


Рис. 8-13. Структурная схема нелинейной САУ

Изображенная на рис. 8-13 схема описывается следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p(Tp+1)X &= kU; \\ U &= \varphi(\varepsilon); \\ \varepsilon &= G - X. \end{aligned} \right\} \quad (8-29)$$

Исключив промежуточные переменные, получим одно уравнение:

$$p(Tp+1)X = k\varphi(G - X). \quad (8-30)$$

Ограничим свое рассмотрение поведением системы при отклонениях от установившегося режима, соответствующего постоянному значению задающего сигнала  $G$ . В этом случае, введя обозначения  $x = X - G$  и  $y = px$ , будем иметь систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} T \frac{dy}{dt} &= -y - k\varphi(x); \\ \frac{dx}{dt} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

Разделив первое уравнение на второе и исключив таким образом время, получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$T \frac{dy}{dx} = -k \frac{\varphi(x)}{y} - 1. \quad (8-32)$$

Здесь релейная функция  $\varphi(x)$  может принимать только постоянные значения  $+B$ ,  $-B$ , а при трехпозиционном реле еще и 0 (см. приложение 8) в зависимости от значения  $x$ . При каждом из этих значений  $\varphi(x)$  уравнение (8-32) является линейным и поэтому легко интегрируется. Его решение имеет вид:

$$x = -T[y + k\varphi_c \ln(y - k\varphi_c)] + C_1, \quad (8-33)$$

где  $C_1 = T[y_0 + k\varphi_c \ln(y_0 - k\varphi_c)] + x_0$ ;  $x_0, y_0$  — начальные значения  $x$  и  $y$ , а  $\varphi_c$  может быть равно  $+B$ ,  $-B$  или 0. При  $\varphi_c = 0$ , в частности, уравнение (8-33) принимает вид:

$$x = T(y_0 - y) + x_0. \quad (8-34)$$



Таким образом, фазовые траектории рассматриваемой системы описываются тремя друг друга сменяющими по ходу изображающей точки линейными уравнениями. Моменты перехода от одного уравнения к другому, т. е. моменты изменения величины  $\varphi_c$  в уравнении (8-33), соответствуют переключениям реле и определяются его характеристикой. По ней легко строятся на фазовой плоскости линии переключения, представляющие собой геометрическое место точек, в которых происходит переключение реле.

На рис. 8-14 приведены построенные по уравнению (8-33) фазовые траектории рассматриваемой системы для трех вариантов релейных характеристик  $\varphi(x)$ , изображенных здесь же. Жирными линиями показаны линии переключения. В первом случае

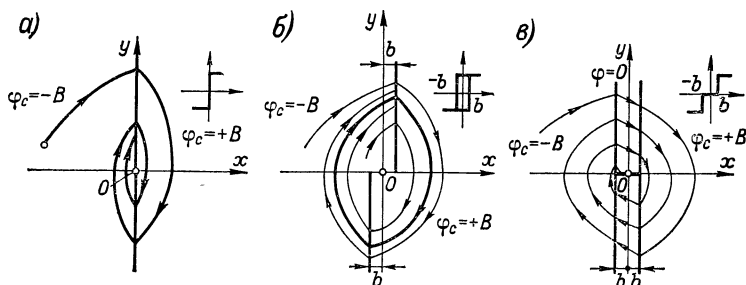


Рис. 8-14. Фазовые портреты нелинейных систем

(рис. 8-14, а) эта линия совпадает с осью ординат, поскольку ее уравнение, определяющее момент переключения реле, в соответствии с его характеристикой имеет вид:

$$x=0.$$

Во втором случае (рис. 8-14, б) уравнение линий переключения (их здесь две) будет

$$x=\begin{cases} b & \text{при } y > 0; \\ -b & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

а в третьем случае (рис. 8-14, в) оно имеет вид:

$$x=\pm b.$$

В последнем случае отрезок оси абсцисс между этими линиями представляет собой особый отрезок, определяющий зону застоя системы из-за нечувствительности реле.

Справа от линий переключения фазовые траектории описываются уравнением (8-33) при  $\varphi_c = +B$ , слева — при  $\varphi_c = -B$ , а между линиями переключения (в случае трехпозиционного реле — рис. 8-14, в) — при  $\varphi_c = 0$ .

Построение фазовой траектории, начатое в произвольно выбранной точке с координатами  $x_0, y_0$ , ведется по уравнению (8-33) при соответствующем значении  $\varphi_c$  вплоть до линии переключения.

Здесь происходит изменение  $\varphi_c$ , т. е. переход к другому уравнению. В качестве начальных значений  $x_0$  и  $y_0$  для этого очередного участка траектории берутся конечные значения переменных предыдущего участка. При следующем переходе через линию переключения вновь изменяется  $\varphi_c$  и т. д.

Фазовый портрет на рис. 8-14, а соответствует устойчивой в целом системе. (Для такой двухпозиционной релейной системы в начале координат теоретически должны существовать автоколебания бесконечно малой амплитуды с бесконечно большой частотой — см. одиннадцатую главу.) На следующем фазовом портрете (рис. 8-14, б) имеется устойчивый предельный цикл и, следовательно, существует неустойчивость в малом. Физически последний факт очевиден. В данном случае двухпозиционное реле с зоной неоднозначности в отличие от такого же реле без этой зоны (рис. 8-14, а) не имеет состояния покоя при  $x = 0$ . Установившийся режим системы с таким реле представляет собой автоколебания относительно точки  $x = 0$ . Система с фазовым портретом на рис. 8-14, в устойчива в целом, но неасимптотически из-за наличия зоны нечувствительности у реле.

Чтобы продемонстрировать, как может изменяться фазовый портрет системы при изменении ее схемы, рассмотрим систему, структурная схема которой приведена на рис. 8-15. Эта система отличается от предыдущей введением корректирующей гибкой обратной связи (по скорости) через дифференцирующее звено с передаточной функцией  $k_{o.c.p}$ .

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий получается таким:

$$T \frac{dy}{dx} = -k \frac{\varphi(x + k_{o.c.p} y)}{y} - 1. \quad (8-35)$$

В связи с введением на входе реле дополнительного сигнала по производной в этом уравнении в отличие от уравнения (8-32) функция  $\varphi$  определяется не только  $x$ , но и ее производной  $y$ .

На рис. 8-16 показаны фазовые портреты данной системы при двух вариантах релейной характеристики.

Уравнение линии переключения на рис. 8-16, а

$$x + k_{o.c.p} y = 0. \quad (8-36)$$

Переключение реле на рис. 8-16, б происходит, когда сумма  $x + k_{o.c.p} y$  равняется  $+b$  при  $y > 0$  или  $-b$  при  $y < 0$ . Соот-

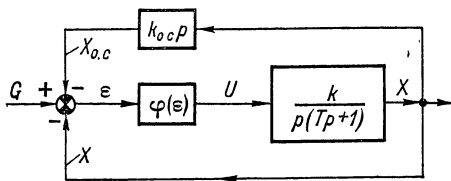


Рис. 8-15. Структурная схема нелинейной системы с гибкой обратной связью

ветственно уравнение линий переключения здесь следующее:

$$x = \begin{cases} b - k_{0.c}y & \text{при } y > 0; \\ -b - k_{0.c}y & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (8-37)$$

Введение дополнительного воздействия по скорости привело к наклону линий переключения, т. е. к зависимости значений  $x$ , при которых происходит переключение реле, от скорости изменения  $x$ . (Направление наклона линий переключения определяется при этом знаком сигнала по скорости, т. е. знаком обратной связи. Соответственно при положительной обратной связи линии повернутся в противоположную сторону.)

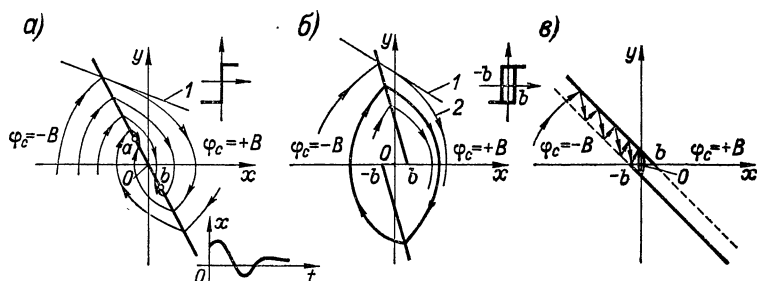


Рис. 8-16. Фазовые портреты системы, изображенной на рис. 8-15

Сравнение рис. 8-16, а и 8-14, а показывает, что введение воздействия по производной привело к принципиально новому типу переходного процесса. Колебательность процесса уменьшилась, причем число колебаний стало конечным в связи с тем, что на линии переключения появился участок  $ab$ , к которому фазовые траектории подходят с обеих сторон, а отходящих траекторий нет. Изображающая точка, попав на этот участок, движется по нему в начало координат со скоростью, определяемой текущей координатой  $y$ . В соответствии с уравнением (8-36) линии переключения уравнение движения при этом будет

$$x = x_0 e^{-\frac{t}{k_{0.c}}}. \quad (8-38)$$

Таким образом, будучи вначале колебательным, переходный процесс заканчивается аperiодическим хвостом. (См. внизу справа на рис. 8-16, а.)

Для пояснения причины появления участка  $ab$  на рис. 8-16, а показана касательная 1 к фазовой траектории в точке ее отхода от линии переключения. Чем ближе эта точка к началу координат, тем круче идет касательная. Когда ее наклон станет равным наклону линии переключения, изображающая точка пойдет по линии переключения, т. е. будет «скользить» по этой линии к началу координат.

Описанный режим, соответствующий участку  $ab$ , называется поэтому скользящим режимом. В этом режиме переходный процесс в релейной системе протекает, как в системе непрерывного действия [см. уравнение (8-38)].

При значениях  $x$  и  $y$ , соответствующих линии переключения, реле должно переключаться. Поэтому физически скользящий режим заключается в бесконечно быстрых переключениях реле, вызывающих соответственно колебания  $x$  с бесконечно малой амплитудой относительно постепенно спадающего к нулю среднего значения  $x$ . В реальных системах частота и амплитуда колебаний конечны, т. е. изображающая точка движется к началу координат, колеблясь относительно линии переключения. Поэтому в действительности хвост переходной характеристики на рис. 8-16,  $a$  представляет собой высокочастотные колебания, а изображенная на рисунке кривая является постоянной составляющей величины  $x$ .

Скользящий режим является одним из возможных способов осуществления так называемой в и б р а ц и о н н о й л и н е - а р и з а ц и и, о которой мы будем говорить в следующей главе (см. § 9-3) и позднее при рассмотрении релейных систем автоматического управления в одиннадцатой главе (см. § 11-3). Пока отметим только, что природа этой линеаризации та же, что и у рассмотренной в § 8-3, п. Г линеаризации нелинейных звеньев случайным сигналом.

На рис. 8-16,  $b$  и  $c$  показаны фазовые портреты рассматриваемой системы с двухпозиционным реле, имеющим зону нечувствительности. При малом значении  $k_{0,c}$  и соответственно малом наклоне линий переключения относительно оси ординат (рис. 8-16,  $b$ ) фазовый портрет мало отличается от случая при  $k_{0,c} = 0$  (рис. 8-14,  $b$ ). Однако при достаточно сильной обратной связи в этой системе тоже возможен скользящий режим. Он показан на рис. 8-16,  $c$ . Как и в предыдущем случае, скользящий режим начинается в точке линии переключения, в которой наклон касательной (прямая 1 на рис. 8-16,  $b$ ) к фазовой траектории (линия 2 на том же рисунке) становится больше наклона линии переключения. В результате фазовая траектория не пересекает линию переключения, а «отражается» от нее обратно, совершая колебания между двумя линиями переключения, соответствующими ширине петли статической характеристики реле. Показанные на рис. 8-16,  $c$  штрихами линии переключения относятся к «отраженным» от сплошных линий переключения траекториям, соответствующим  $\varphi_c = +B$  в верхней полуплоскости и  $\varphi_c = -B$  в нижней. На рис. 8-16,  $b$  и 8-14,  $b$  эти линии не даны, так как там нет «отраженных» траекторий. Переходный процесс заканчивается установлением автоколебаний, амплитуда которых определяется шириной петли характеристики реле.

Таким образом, с ростом  $k_{0,c}$  амплитуда устойчивых автоколебаний в системе уменьшается вплоть до величины, определяемой шириной петли характеристики реле.

Скользкий режим возможен и при трехпозиционном реле. В последнем случае изображенные на рис. 8-14, в линии переключения тоже наклоняются против часовой стрелки, а скользкий режим происходит путем движения изображающей точки по одной линии переключения до особой линии застоя на оси абсцисс. Это соответствует быстрым отключениям и включениям реле все время в одну и ту же сторону.

Линии переключения не обязательно являются прямыми линиями, как на рис. 8-14 и 8-16. Если, например, в системе, изображенной на рис. 8-15, измеритель скорости имеет нелинейную

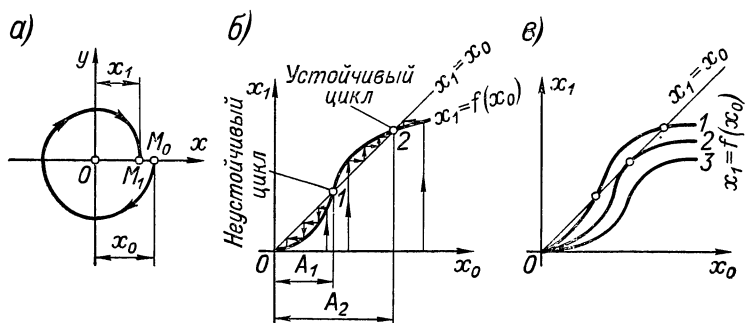


Рис. 8-17. Метод точечных преобразований

характеристику  $\varphi_{0,c}(y)$ , уравнение (8-36) линии переключения для случая, соответствующего рис. 8-16, а, примет вид:

$$x + \varphi_{0,c}(y) = 0. \quad (8-39)$$

Соответственно линия переключения будет непрямой. Аналогичное искривление этой линии произойдет, если имеется нелинейность в канале основной обратной связи по  $x$ .

Для получения более точных количественных оценок фазовых траекторий и, в частности, значений частоты и амплитуды возможных автоколебаний А. А. Андроновым разработан метод точечных преобразований. Сущность его состоит в следующем.

Возьмем начальное положение изображающей точки  $M_0$  в произвольном месте положительной полуоси  $x$  с абсциссой  $x_0$  (рис. 8-17, а). Обойдя один раз вокруг начала координат, изображающая точка окажется в некоторой другой точке  $M_1$  этой оси с абсциссой  $x_1$ . Значение  $x_1$  может быть выражено как функция значения  $x_0$  через уравнение фазовых траекторий. Возможный вид этой функции  $x_1 = f(x_0)$  показан на рис. 8-17, б. По виду этой функции можно судить о характере поведения системы. Если  $x_1 < x_0$  (рис. 8-17, а), процесс является затухающим, а если  $x_1 > x_0$  — расходящимся. При  $x_1 = x_0$  имеет место предельный цикл (автоколебания).

Проведем на рис. 8-17, б биссектрису координатного угла, которая соответствует уравнению  $x_1 = x_0$ . Тогда значения  $x_0$ , соответствующие затухающим процессам, определяются участками зависимости  $f(x_0)$ , лежащими ниже биссектрисы (на рис. 8-17, б это участки левее точки 1 и правее точки 2), а расходящимся процессам будут соответствовать участки зависимости  $f(x_0)$  выше биссектрисы (на рис. 8-17, б это участок между точками 1 и 2). Точка пересечения зависимости  $f(x_0)$  с биссектрисой определяет амплитуду  $A$  возможных автоколебаний в системе. При этом, если кривая  $f(x_0)$  пересекает биссектрису сверху вниз (точка 2 на рис. 8-17, б), колебания устойчивы, а если снизу вверх (точка 1 на рис. 8-17, б) — неустойчивы.

Для пояснения последнего утверждения на рис. 8-17, б тонкими линиями со стрелками показана последовательность изменения  $x$  во времени на разных участках зависимости  $f(x_0)$ . Здесь, начиная с произвольного исходного значения  $x_0$ , вначале определяют соответствующее ему значение  $x_1$  путем проведения вертикальной линии с выбранной абсциссой  $x_0$  до пересечения с кривой  $f(x_0)$ . Далее, принимая это значение  $x_1$  за новое  $x_0$ , определяют соответствующее ему новое значение  $x_1$ . Для этого от первой точки кривой  $f(x_0)$  проводят вначале горизонтальную линию до биссектрисы (перевод  $x_1$  в  $x_0$ ), а затем — вертикальную линию от нее до кривой  $f(x_0)$ . Из этой точки вновь проводят горизонтальную, затем вертикальную линии и т. д.

График на рис. 8-17, б соответствует устойчивости в малом системы, имеющей фазовый портрет, приведенный на рис. 8-11, д.

Определение  $x_1$  по  $x_0$ , т. е. нахождение точки  $M_1$  по точке  $M_0$ , называется точечным преобразованием. В результате обхода изображающей точкой начала координат точка  $M_0$  преобразуется в точку  $M_1$ . Зависимость  $x_1 = f(x_0)$  определяет такое точечное преобразование всех точек положительной полуоси  $x$  в соответствующие другие точки этой же полуоси, т. е. зависимость  $x_1 = f(x_0)$  описывает точечное преобразование положительной полуоси  $x$  в саму себя, происходящее при обходе изображающей точкой начала координат. График  $x_1 = f(x_0)$  называется диаграммой точечного преобразования.

С помощью точечного преобразования, которое осуществляется по уравнению фазовых траекторий, можно, таким образом, исследовать характер возможных режимов в системе, не строя фазового портрета. Метод точечных преобразований удобен, в частности, для определения влияния изменения разных параметров системы на характер переходных процессов в ней. При этом могут быть определены критические, так называемые бифуркационные значения параметров, переход через которые качественно меняет фазовый портрет системы.

Для иллюстрации на рис. 8-17, в показано возможное изменение диаграммы точечного преобразования системы при вариации

ее параметров. Кривая 1 повторяет диаграмму на рис. 8-17, б. Кривая 3 соответствует устойчивости в целом. Кривая 2 касается биссектрисы в точке, соответствующей полуустойчивому циклу. Эта кривая определяет бифуркационные значения параметров системы, при которых система находится на границе между качественно различными типами фазового портрета. При бесконечно малом отклонении параметров в одну сторону система становится устойчивой в целом (кривая 3 на рис. 8-17, в), а в другую — устойчивой только в малом с переходом к устойчивым автоколебаниям при больших отклонениях от установившегося режима (кривая 1 на рис. 8-17, в.)

Точечное преобразование можно осуществлять не обязательно для действительной полуоси  $x$ . Иногда, например, проще строить диаграмму точечного преобразования для полуоси  $y$ . В тех случаях, когда фазовый портрет симметричен относительно одной из координатных осей, как, например, на рис. 8-14, достаточно находить точечное преобразование для половины оборота изображающей точки вокруг начала координат, т. е. точечное преобразование положительной полуоси в отрицательную.

Если на фазовом портрете есть линии переключения, то обычно вместо координатных полуосей удобнее находить точечное преобразование для этих линий.

## Глава девятая

# УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 9-1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

А. М. ЛЯПУНОВА

Единственным общим методом точного исследования динамики, в том числе и устойчивости, нелинейных систем является рассмотренный в § 8-5 метод фазовых траекторий. Однако область его применения практически ограничена системами второго порядка.

Разумеется, мощным средством исследования нелинейных систем автоматического управления являются вычислительные машины.

Трудности точного исследования нелинейных систем привели к разработке, во-первых, методов, дающих достаточные критерии устойчивости, т. е. критерии, позволяющие определить часть полной области устойчивости системы, и, во-вторых, приближенных методов исследования. В первом случае нам заранее известен знак погрешности в определении предела устойчивости — предел всегда будет занижен, т. е. погрешность идет в запас устойчивости. Однако величина этой погрешности неизвестна и может быть сколь угодно большой. Во втором случае

знак погрешности неизвестен, но зато часто имеется возможность как-то оценить сверху абсолютную величину погрешности.

В настоящей главе рассмотрим вначале наиболее общие методы исследования устойчивости нелинейных систем, созданные А. М. Ляпуновым и составляющие основу общей теории устойчивости. Затем будут изложены представляющие большой практический интерес достаточный критерий устойчивости В. М. Попова и метод гармонической линеаризации, являющийся приближенным методом исследования автоколебаний и устойчивости.

В § 8-4 было дано понятие об устойчивости нелинейных систем с использованием фазового пространства.

Впервые строгая теория устойчивости нелинейных систем была предложена в 1892 г. А. М. Ляпуновым, который дал такое определение устойчивости (устойчивость по Ляпунову): *невозмущенное движение устойчиво, если при достаточно малых начальных возмущениях вызванное ими возмущенное движение сколь угодно мало отличается от невозмущенного; при этом движение асимптотически устойчиво, если при  $t \rightarrow \infty$  возмущенное движение стремится к невозмущенному.*

Под невозмущенным движением Ляпунов понимал любой интересующий нас в отношении устойчивости режим системы. В фазовом пространстве, описанном в § 8-4, ему соответствует начало координат. Этим режимом в общем случае может быть как установившийся статический или динамический режим, так и неустановившийся режим. В качестве возмущений Ляпунов рассматривал только ненулевые начальные условия, соответствующие начальному смещению изображающей точки из начала координат в определенную точку фазового пространства при неизменных внешних воздействиях, соответствующих невозмущенному движению. Это практически неудобное ограничение понятия возмущения. Однако можно показать, что при достаточно общих условиях режим, асимптотически устойчивый по Ляпунову, будет оставаться устойчивым и при включении в понятие возмущения отклонений внешних воздействий [42].

Ляпунов разработал два общих метода исследования устойчивости нелинейных систем. Первый метод применим только для исследования устойчивости в малом линеаризуемых систем. (Методика линеаризации была описана в § 1-2). Поскольку к таким системам полностью применима описанная в первой части книги линейная теория, включая и все существующие критерии устойчивости (см. главу четвертую), не будем останавливаться на этом методе. Отметим только, что Ляпунов при этом впервые доказал допустимость суждения об устойчивости в малом нелинейной системы по устойчивости линейной системы, полученной путем линеаризации исходной нелинейной системы. Далее, он доказал также, что в критических случаях, когда линеаризованная система находится на границе устойчивости, об устойчивости исходной нелинейной системы ничего нельзя сказать: она может быть



устойчива или неустойчива в зависимости от конкретного вида нелинейностей.

Второй метод Ляпунова, называемый прямым методом, является наиболее общим методом исследования устойчивости любых нелинейных систем. Он дает достаточные условия устойчивости, т. е. определяет часть области устойчивости. Идея метода проста, и ее удобно объяснить с помощью фазового пространства (рис. 9-1). Рассмотрим в этом пространстве некоторую замкнутую поверхность произвольной формы, описываемую уравнением

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C. \quad (9-1)$$

Здесь  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция координат системы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $C$  — параметр, определяющий величину функции. Каждому его значению соответствует определенная поверхность. С уменьшением  $C$  поверхность сжимается так, что поверхность, соответствующая меньшему  $C$ , находится целиком внутри поверхности, соответствующей большему  $C$ . При  $C \rightarrow 0$  поверхность стягивается в начало координат.

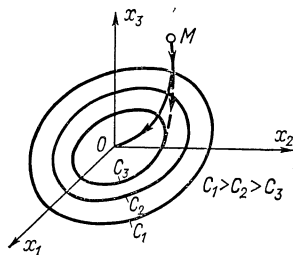


Рис. 9-1. К прямому методу Ляпунова

Предположим, нам известно, что при всех возможных траекториях движения изображающей точки  $M$  она все время движется только внутрь поверхности (9-1), т. е. переходит с поверхности, соответствующей большему значению  $C$  функции

$V$ , на поверхность с меньшим значением функции  $V$ . Очевидно, что этот факт является достаточным признаком устойчивости системы, поскольку в этом случае все фазовые траектории должны неизбежно кончаться в начале координат.

Аналитически такой характер движения изображающей точки означает, что вдоль фазовых траекторий производная  $dV/dt$  функции  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  отрицательна. На основании изложенного можно, пользуясь терминологией Ляпунова, сформулировать следующее достаточное условие устойчивости: *возмущенное движение асимптотически устойчиво, если можно указать такую знакоопределенную функцию  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , производная которой по времени  $dV/dt$ , определенная на основании дифференциальных уравнений системы, тоже является знакоопределенной функцией, но противоположного знака.*

Знакоопределенной функцией называется функция, которая при всех значениях переменных имеет один знак, а в начале координат обращается в нуль.

Если в приведенном определении ослабить требование к производной  $dV/dt$ , допустив обращение ее в нуль и вне начала координат, получим соответственно более слабое условие устойчивости, включающее и неасимптотическую устойчивость. Действи-

тельно, в этом случае изображающая точка может застрять на определенной поверхности (9-1) с получением  $dV/dt = 0$ , не дойдя до начала координат (штриховая траектория на рис. 9-1).

Сформулированное выше условие устойчивости составляет основу прямого метода Ляпунова. Он заключается в отыскании для исследуемой нелинейной системы функции  $V$ , удовлетворяющей указанному выше требованию. Такие функции называются функциями Ляпунова.

Смысл прямого метода Ляпунова состоит в том, что для определения знака производной  $dV/dt$  вдоль фазовых траекторий, которые определяются уравнениями системы, не требуется решать эти уравнения, а достаточно лишь представить их в форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  и  $b$  — положительные постоянные коэффициенты. Предложим для этой системы следующую функцию Ляпунова:

$$V = \alpha x^2 + \beta y^2. \quad (9-4)$$

Ее производная

$$\frac{dV}{dt} = 2\alpha x \frac{dx}{ds} + 2\beta y \frac{dy}{dt}.$$

Подставив сюда выражения (9-3), получим:

$$\frac{dV}{dt} = -2(1 - ax^2 - by^2)(\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Производная  $dV/dt < 0$  при

$$ax^2 + by^2 < 1. \quad (9-4a)$$

Это значит, что при выполнении условия (9-4a) функция (9-4) является функцией Ляпунова, т. е. условие (9-4a) представляет собой достаточное условие устойчивости системы. Границей устойчивости в фазовой плоскости является, следовательно, неустойчивый предельный цикл в виде эллипса

$$ax^2 + by^2 = 1.$$

В заключение подчеркнем еще раз, что прямой метод Ляпунова дает только достаточные условия устойчивости. Если для конкретной нелинейной системы удалось найти функцию Ляпунова и с ее помощью определить условия, т. е. границы, устойчивости системы, то вне этих границ мы ничего не можем сказать об устойчивости системы. Иными словами, мы ничего не знаем о том, какая часть полной области устойчивости нами найдена. Это целиком зависит от того, насколько удачную функцию Ляпунова удалось найти. При этом, выбирая разные функции Ляпунова, будем находить для одной и той же системы разные по величине части полной области устойчивости.

## § 9-2. КРИТЕРИЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В. М. ПОПОВА

**А б с о л ю т н а я   у с т о й ч и в о с т ь** — это асимптотическая устойчивость в целом при задании нелинейностей системы принадлежностью к определенному классу. Под этим понимается задание нелинейности не конкретной характеристикой, а в более общем виде — с точностью только до определения ее класса. Основным случаем такого определения нелинейности, которое в дальнейшем и будем рассматривать, является задание статической нелинейной характеристики тем, что она должна находиться в определенном угле между осью абсцисс и некоторой прямой, как показано на рис. 9-2. При этом конкретная форма характеристики может быть любой, в том числе и нестационарной. При таком определении характеристики говорят, что характеристика задана в угле  $(0, k)$ . Здесь  $0$  и  $k$  — тангенсы углов наклона

линий, ограничивающих этот угол. При этом нуль соответствует оси абсцисс. Условия абсолютной устойчивости нелинейных систем исследованы в основном применительно к нелинейностям, заданным именно таким образом, т. е. в угле.

Исследование устойчивости систем при таком неконкретном задании нелинейностей, т. е. исследование абсолютной устойчивости, вызвано не только чисто математическими соображениями в смысле упрощения задачи, но имеет и практический смысл в тех случаях, когда нелинейности известны неточно или могут изменяться.

Критерий абсолютной устойчивости В. М. Пóпова, предложенный в 1959 г., относится к системам, которые можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 9-3, а. Она состоит из линейной части с передаточной функцией  $W_{\text{л}}(p)$  и безынерционного нелинейного звена НЛ: Характеристика  $\varphi(X)$  этого звена должна быть однозначной и лежать в угле  $(0, k)$  (см. рис. 9-2). Звено с коэффициентом передачи — 1 показывает, что обратная связь в системе отрицательна. Для определения устойчивости по этому критерию используется частотная характеристика

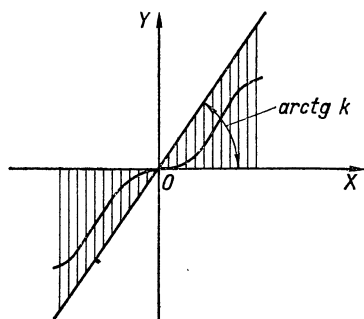


Рис. 9-2. К понятию абсолютной устойчивости

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\text{л}}(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W_{\text{л}}(j\omega). \quad (9-5)$$

Эта характеристика получается из а. ф. ч. х.  $W_{\text{л}}(j\omega)$  линейной части системы путем умножения ординат последней характеристики на текущее значение  $\omega$  (рис. 9-3, б).

Рассмотрим вначале критерий В. М. Пóпова, когда линейная часть системы устойчива. В этом случае критерий заключается в следующем: *система абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части системы через точку  $(-1/k, j0)$  можно провести хотя бы одну прямую, не пересекающуюся с характеристикой  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$* . Такая линия называется *линией Пóпова*. На рис. 9-3, б показан пример, когда имеет место абсолютная устойчивость.

В случае сплошной характеристики на рис. 9-3, в критерий абсолютной устойчивости не выполняется. Разумеется, тем более он не выполняется, если характеристика  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$  охватывает точку  $(-1/k, j0)$  (штриховая кривая на рис. 9-3, в).

Критерий В. М. Пóпова является достаточным, т. е. он дает часть области абсолютной устойчивости и его невыполнение не означает еще неустойчивость.

Интересно сравнить условия абсолютной устойчивости В. М. Пóпова с условиями устойчивости линейной системы, получаемой

при предположении, что характеристика  $\varphi(X)$  в угле  $(0, k)$  является линейной. Это значит, что нелинейное звено *НЛ* заменяется идеальным линейным звеном с коэффициентом передачи  $k_0$ , лежащим в пределах  $0 \leq k_0 \leq k$ .

Передаточная функция для такой разомкнутой системы равна  $k_0 W_{\text{л}}(p)$ . Согласно критерию Найквиста (см. § 4-4), условие устойчивости рассматриваемой линейной системы заключается в том, что а. ф. ч. х.  $k_0 W_{\text{л}}(j\omega)$  не должна охватывать точку  $(-1, j0)$ . Последнее эквивалентно условию, чтобы а. ф. ч. х.  $W_{\text{л}}(j\omega)$  линейной части системы не охватывала точку  $(-1/k, j0)$ .

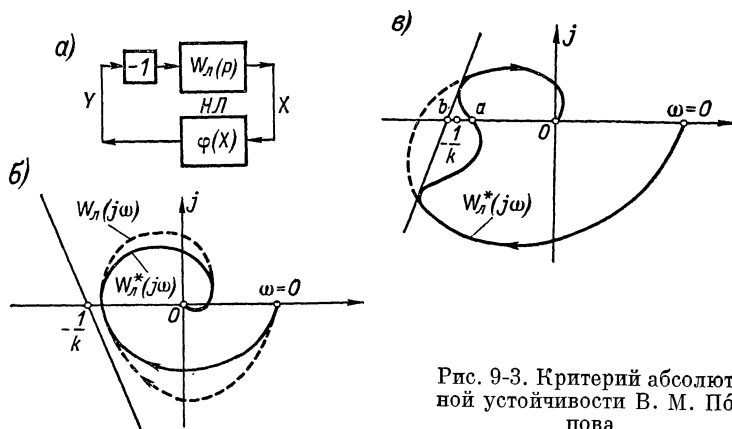


Рис. 9-3. Критерий абсолютной устойчивости В. М. Пóпова

(Действительно, граница устойчивости по Найквисту соответствует равенству  $k_0 W_{\text{л}}(j\omega) = -1$  или  $W_{\text{л}}(j\omega) = -1/k_0$ .) При изменении величины  $k_0$  в диапазоне от 0 до  $k$  точка  $(-1/k_0, j0)$  перемещается по действительной оси от  $-\infty$  до  $-1/k$ . Поэтому условием устойчивости линейной системы при  $k_0 = 0 \div k$  является прохождение характеристики  $W_{\text{л}}(j\omega)$  правее точки  $(-1/k, j0)$ , т. е. непересечение ею действительной оси левее этой точки.

Характеристики  $W_{\text{л}}(j\omega)$  и  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$  имеют одинаковые действительные части и, следовательно, пересекают действительную ось в одних и тех же точках. Поэтому сформулированное условие устойчивости линейной системы полностью относится и к характеристике  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ .

Таким образом, достаточное условие устойчивости при произвольной форме однозначной нелинейной характеристики  $\varphi(X)$  в угле  $(0, k)$  оказывается строже необходимого и достаточного условия устойчивости в случае линейной характеристики  $\varphi(X)$  в этом угле тем, что помимо необходимости нахождения характеристики  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$  правее точки  $(-1/k, j0)$ , требует еще возможности проведения через эту точку линии Пóпова. Например, в случае характеристики  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ , изображенной на рис. 9-3, в сплошной линией, система устойчива при линейной характеристике в угле

$(0, k)$ , но не обладает абсолютной устойчивостью. Точка  $a$  на действительной оси определяет критический по устойчивости коэффициент передачи  $k_0$  для линейной системы, а точка  $b$  — критическое значение  $k$  по условию абсолютной устойчивости в случае произвольной нелинейной характеристики  $\varphi(X)$ . Таким образом, при произвольной форме а. ф. ч. х.  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$  абсолютная устойчивость обеспечивается в меньшем угле по сравнению с устойчивостью в случае линейной системы.

Если же характеристика  $W_{\text{л}}^*(j\omega)$  слева выпукла, достаточное условие устойчивости совпадает с условием устойчивости линейной системы в том же угле.

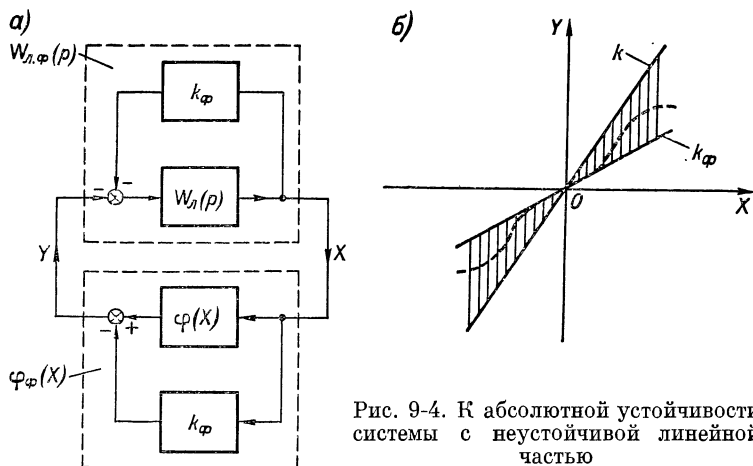


Рис. 9-4. К абсолютной устойчивости системы с неустойчивой линейной частью

Приведенная выше формулировка критерия В. М. Попова относится к системам с устойчивой линейной частью, т. е. когда все полюсы передаточной функции  $W_{\text{л}}(p)$  левые. Чтобы распространить этот критерий на системы с неустойчивой линейной частью, преобразуем предварительно схему системы, как это показано на рис. 9-4, а. Здесь в схему введены два фиктивных звена с коэффициентом передачи  $k_{\phi}$ . (Они, очевидно, ничего не изменяют в системе, так как их выходные сигналы взаимно компенсируют друг друга на входе линейной части системы.) В результате получаем систему, состоящую из линейной части с передаточной функцией

$$W_{\text{л. ф}}(p) = \frac{W_{\text{л}}(p)}{1 + k_{\phi} W_{\text{л}}(p)} \quad (9-6)$$

и нелинейной части с характеристикой

$$\varphi_{\phi}(X) = \varphi(X) - k_{\phi} X. \quad (9-7)$$

Выберем величину коэффициента передачи  $k_{\phi}$  такой, чтобы за счет введенной отрицательной жесткой обратной связи вокруг

звена  $W_{\text{л}}(p)$  новая линейная часть оказалась устойчивой, т. е. все полюсы передаточной функции  $W_{\text{л.ф}}(p)$  были левыми.

Заметим, что если последнее не может быть осуществлено, то это уже означает отрицательный ответ на вопрос об абсолютной устойчивости исходной системы, так как при этом она оказывается неустойчивой даже при линейной характеристике  $\varphi(X)$  произвольного наклона.

Применив к преобразованной согласно рис. 9-4, а системе с устойчивой линейной частью критерий абсолютной устойчивости В. М. Пбпова, получим следующее условие абсолютной устойчивости исходной системы с неустойчивой линейной частью: *система абсолютно устойчива, если через точку  $\left(-\frac{1}{k-k_{\text{ф}}}, j0\right)$  можно провести прямую линию, проходящую слева от характеристики  $W_{\text{л.ф}}^*(j\omega)$* . Абсцисса указанной точки определена в соответствии с соотношением (9-7). При этом  $k$  определяется углом, в котором задана характеристика  $\varphi(X)$ .

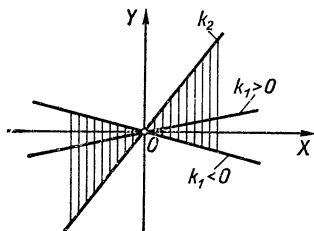


Рис. 9-5. Нелинейная характеристика в угле  $(k_1, k_2)$

В соответствии с критерием В. М. Пбпова характеристика  $\varphi_{\text{ф}}(X)$  должна лежать в угле, ограниченном с одной стороны осью абсцисс. С учетом (9-7) это означает, что характеристика  $\varphi(X)$  должна лежать вне угла  $(0, k_{\text{ф}})$ . Таким образом, сформулированный критерий

должен быть дополнен требованием, чтобы характеристика  $\varphi(X)$  лежала в угле  $(k_{\text{ф}}, k)$ , как показано на рис. 9-4, б. Характеристика  $\varphi_{\text{ф}}(X)$  при этом будет лежать в угле  $[0, (k - k_{\text{ф}})]$ .

Из этого, в частности, нетрудно видеть, что когда передаточная функция  $W_{\text{л}}(p)$  линейной части системы имеет мнимые или нулевые полюсы при остальных левых полюсах, изложенный критерий абсолютной устойчивости совпадает с ранее сформулированным критерием для системы с устойчивой линейной частью, который, однако, дополняется двумя следующими условиями.

Во-первых, должна обеспечиваться так называемая *предельная устойчивость*, под которой понимается устойчивость линейной системы с передаточной функцией  $kW_{\text{л}}(p)$  при  $k \rightarrow 0$ .

Во-вторых, исключается касание характеристикой нелинейного звена оси абсцисс, т. е. абсолютная устойчивость рассматривается в угле  $(\varepsilon, k)$ , где  $\varepsilon$  — бесконечно малая величина.

Критерий В. М. Пбпова несложно распространить на более общий случай нелинейности, когда характеристика  $\varphi(X)$  лежит в угле  $(k_1, k_2)$ , где  $k_1$  может быть как положительным, так и отрицательным (рис. 9-5). Этот случай сводится к основ-

ному случаю с характеристикой  $\varphi(X)$  в угле  $(0, k)$ , если преобразовать схему системы, как показано на рис. 9-4, а, приняв  $k_\Phi = k_1$ . В результате получаем схему, которая содержит нелинейность с характеристикой

$$\varphi_\Phi(X) = \varphi(X) - k_1 X, \quad (9-8)$$

лежащей в угле  $(0, k)$ , где  $k = k_2 - k_1$ , и линейную часть с передаточной функцией

$$W_{\text{л.}\Phi}(p) = \frac{W_{\text{л}}(p)}{1 + k_1 W_{\text{л}}(p)}. \quad (9-9)$$

Выше, изучая критерий устойчивости В. М. Попова, мы имели в виду устойчивость установившегося режима системы в точке  $X = 0$ . Однако этот критерий может быть применен и для исследования устойчивости любых динамических режимов. В этом случае, как это делалось ранее, необходимо перейти к приращениям переменных  $X$  и  $Y$  относительно рассматриваемого режима и соответственно определить угол, в котором лежит нелинейность, для текущего значения переменной. В результате критерий абсолютной устойчивости процесса, вызванного ограниченным воздействием, в случае нелинейности в угле  $(0, k)$  и устойчивой линейной части системы сведется к следующим условиям: 1) существованию линии Попова, параллельной мнимой оси, и 2) нахождению производной характеристики  $\varphi(X)$  в пределах  $0 - k$ .

В случае неустойчивой линейной части этот критерий изменяется, как указано выше (см. рис. 9-4), введением коэффициента  $k_\Phi$  [5].

### § 9-3. ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

#### А. Назначение метода гармонической линеаризации

Идея метода гармонической линеаризации была предложена в 1934 г. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Применительно к системам автоматического управления этот метод разработан Л. С. Гольдфарбом и Е. П. Поповым. Другие названия этого метода и его модификаций — метод гармонического баланса, метод описывающих функций, метод эквивалентной линеаризации.

Метод гармонической линеаризации — это метод исследования автоколебаний. Он позволяет определять условия существования и параметры возможных автоколебаний в нелинейных системах.

Автоколебания определяют предельные циклы в фазовом пространстве системы, которые разделяют его на области затухающих и расходящихся процессов. Поэтому знание параметров автоколебаний позволяет представить картину возможных процессов в системе и, в частности, определить условия устойчивости.



Предположим, например, что в результате исследования автоколебаний в некоторой нелинейной системе мы получили зависимость амплитуды этих автоколебаний  $A$  от коэффициента передачи  $k$  линейной части системы, показанную на рис. 9-6, и знаем, что автоколебания устойчивы. Из графика следует, что при большом значении коэффициента передачи  $k$ , когда  $k > k_{кр}$ , в системе существуют автоколебания. Их амплитуда уменьшается до нуля

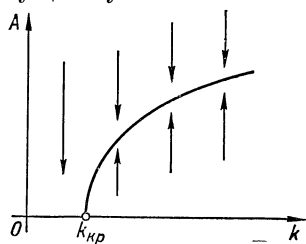


Рис. 9-6. Зависимость амплитуды  $A$  автоколебаний от коэффициента передачи  $k$  системы

при уменьшении коэффициента передачи  $k$  до  $k_{кр}$ . На рис. 9-6 стрелками условно показан характер переходных процессов при разных значениях  $k$ : при  $k > k_{кр}$  переходный процесс, вызванный начальным отклонением, стягивается к автоколебаниям. Из рисунка видно, что при  $k < k_{кр}$  система оказывается устойчивой. Таким образом,  $k_{кр}$  — это критическое по условию устойчивости значение коэффициента передачи. Его превышение приводит к тому, что исходный режим системы становится неустойчивым и в ней

возникают автоколебания. Следовательно, знание условий существования автоколебаний в системе позволяет определить и условия устойчивости.

Метод гармонической линеаризации может быть применен и для исследования вынужденных колебательных режимов, а также для приближенной оценки качества переходных процессов в системе (см. десятую главу).

## Б. Идея гармонической линеаризации

Рассмотрим нелинейную систему, схема которой представлена на рис. 9-7, *а*. Система состоит из линейной части с передаточной функцией  $W_d(p)$  и нелинейного звена  $НЛ$  с конкретно заданной характеристикой  $\varphi(X)$ . По-прежнему звено с коэффициентом — 1 показывает, что обратная связь в системе отрицательна. Полагая, что в системе существуют автоколебания, амплитуду и частоту которых мы хотим найти. В рассматриваемом режиме входная величина  $X$  нелинейного звена и выходная  $Y$  являются периодическими функциями времени.

Метод гармонической линеаризации основан на предположении, что колебания на входе нелинейного звена являются синусоидальными, т. е. что

$$X = X_0 + A \sin \omega_a t, \quad (9-10)$$

где  $A$  — амплитуда и  $\omega_a$  — частота этих автоколебаний, а  $X_0$  — возможная в общем случае постоянная составляющая, когда автоколебания несимметричны.

В действительности автоколебания в нелинейных системах всегда несинусоидальны вследствие искажения их формы нелинейным звеном. Поэтому указанное исходное предположение означает, что метод гармонической линеаризации является **п р и н ц и п и а л ь н о п р и б л и ж е н н ы м** и область его применения ограничена случаями, когда автоколебания на входе нелинейного звена достаточно близки к синусоидальным. Для того чтобы это имело место, линейная часть системы должна не пропускать высших гармоник автоколебаний, т. е. являться **ф и л ь т р о м н и ж н и х ч а с т о т**. Последнее иллюстрируется рис. 9-7, б. Если, например, частота автоколебаний равна  $\omega_{a1}$ , то линейная часть с показанной на рис. 9-7, б а. ч. х.  $A_L(\omega)$  будет играть роль фильтра нижних частот для этих колебаний, так как уже вторая гармоника, частота которой равна  $2\omega_{a1}$ , практически не пройдет на вход нелинейного звена. Следовательно, в этом случае метод гармонической линеаризации применим.

Если частота автоколебаний равна  $\omega_{a2}$ , линейная часть будет свободно пропускать вторую, третью и другие гармоники автоколебаний. В этом случае нельзя утверждать, что колебания на

входе нелинейного звена будут достаточно близки к синусоидальным, т. е. необходимая для применения метода гармонической линеаризации предпосылка не выполняется. Заметим, что не всегда следующей после первой гармоники будет вторая гармоника, как предположено было выше. При нечетных нелинейных характеристиках второй гармоники на выходе нелинейного звена не будет, и условие фильтра следует проверять по третьей гармонике.

Для того чтобы установить, является ли линейная часть системы фильтром нижних частот и тем самым определить применимость метода гармонической линеаризации, необходимо знать частоту автоколебаний. Однако ее можно узнать только в результате использования этого метода. Таким образом, *применимость метода гармонической линеаризации приходится определять уже в конце исследования в порядке проверки.*

Заметим при этом, что если в результате этой проверки гипотеза о том, что линейная часть системы играет роль фильтра нижних частот, не подтверждается, это не означает еще неверности полученных результатов, хотя, разумеется, ставит их под сомнение и требует дополнительной проверки каким-либо другим методом.

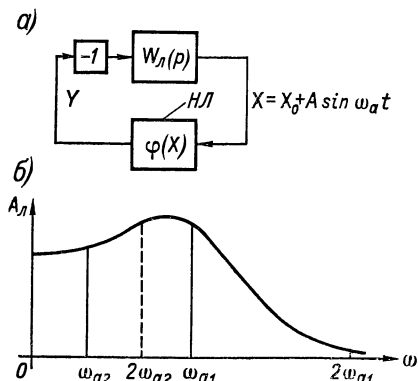


Рис. 9-7. К идее гармонической линеаризации

Итак, предположив, что линейная часть системы есть фильтр нижних частот, считаем, что автоколебания на входе нелинейного

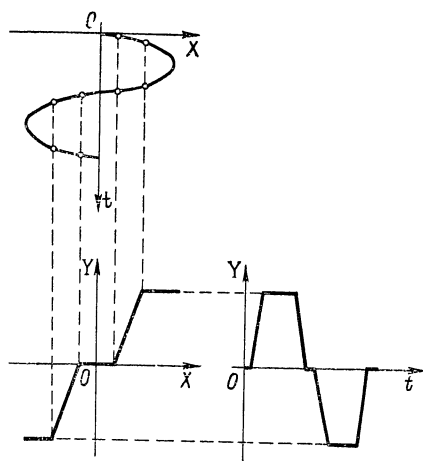


Рис. 9-8. Прохождение гармонического колебания через нелинейное звено

звена синусоидальны, т. е. имеют вид (9-10). Колебания на выходе этого звена будут при этом уже несинусоидальны вследствие их искажения нелинейностью. В качестве примера на рис. 9-8 построена кривая на выходе нелинейного звена для определенной амплитуды входного чисто синусоидального сигнала по характеристике звена, приведенной там же.

Однако, поскольку мы считаем, что линейная часть системы пропускает только основную гармонику автоколебаний, имеет смысл интересоваться только этой гармоникой на выходе нелинейного звена. Поэтому разложим выходные колебания  $Y(t)$  в ряд Фурье и отбросим высшие гармоники. В результате получим:

$$Y(t) = \varphi(X) = Y_0 + C_1 \sin \omega_a t + C_2 \cos \omega_a t. \quad (9-11)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(X) d(\omega_a t); \\ C_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(X) \sin \omega_a t d(\omega_a t); \\ C_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(X) \cos \omega_a t d(\omega_a t); \\ X &= X_0 + A \sin \omega_a t. \end{aligned} \right\} \quad (9-12)$$

Перепишем выражение (9-11) в более удобном для последующего использования виде, подставив в него получающиеся из (9-10) следующие выражения для  $\sin \omega_a t$  и  $\cos \omega_a t$ :

$$\sin \omega_a t = \frac{X}{A} \quad \text{и} \quad \cos \omega_a t = \frac{pX}{A\omega_a}.$$

Подставив эти выражения в (9-11), будем иметь:

$$Y = Y_0 + \left( k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p \right) (X - X_0) \quad (9-13)$$

или

$$Y = k_{r0} X_0 + \left( k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p \right) (X - X_0). \quad (9-14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_{r0} &= \frac{Y_0}{X_0}; \\ k_r &= \frac{C_1}{A}; \\ k'_r &= \frac{C_2}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (9-15)$$

Дифференциальное уравнение (9-14) справедливо для синусоидального входного сигнала (9-10) и определяет выходной сигнал нелинейного звена без учета высших гармоник.

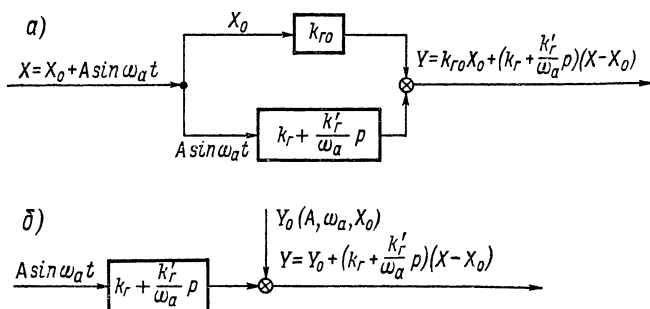


Рис. 9-9. Эквивалентное линейное звено, полученное в результате гармонической линеаризации

Коэффициенты  $k_{r0}$ ,  $k_r$  и  $k'_r$  в соответствии с выражениями (9-12) для коэффициентов Фурье являются функциями постоянной составляющей  $X_0$ , амплитуды  $A$  и частоты  $\omega_a$  автоколебаний на входе нелинейного звена. При фиксированных  $A$ ,  $\omega_a$  и  $X_0$  уравнение (9-14) является линейным. Таким образом, если отбросить высшие гармоники, то для фиксированного гармонического сигнала исходное нелинейное звено может быть заменено эквивалентным линейным, описываемым уравнением (9-14). Эта замена и называется гармонической линеаризацией.

На рис. 9-9, а условно изображена схема этого звена, состоящая из двух параллельных звеньев. Одно звено ( $k_{r0}$ ) пропускает постоянную составляющую, а другое — только синусоидальную составляющую автоколебаний.

Коэффициенты  $k_{r0}$ ,  $k_r$  и  $k'_r$  называются коэффициентами гармонической линеаризации или гар-

моническими коэффициентами передачи:  $k_{r0}$  — коэффициент передачи постоянной составляющей, а  $k_r$  и  $k'_r$  — два коэффициента передачи синусоидальной составляющей автоколебаний. Эти коэффициенты определяются нелинейностью  $\varphi(X)$  и значениями  $A$ ,  $\omega_a$  и  $X_0$  по формулам (9-12). В приложении 9 приведены определенные по этим формулам готовые выражения для  $k_{r0}$ ,  $k_r$  и  $k'_r$  для ряда типовых нелинейных звеньев. Для этих и вообще всех безынерционных нелинейных звеньев величины  $k_{r0}$ ,  $k_r$  и  $k'_r$  не зависят от  $\omega_a$  и являются функциями только амплитуды  $A$  и  $X_0$ .

Постоянная составляющая  $Y_0$  на выходе нелинейного звена [см. уравнения (9-11), (9-13)] появляется по одной из двух причин: если к системе приложено внешнее постоянное воздействие, создающее  $X_0$  [см. уравнение (9-10)], или если характеристика нелинейного звена несимметрична относительно начала координат, вследствие чего происходит явление выпрямления входного синусоидального сигнала (см. нелинейности 8—11 в приложении 8).

При гармонической линеаризации нелинейных звеньев с такими характеристиками нельзя выражать  $Y_0$  через  $X_0$  с помощью коэффициента гармонической линеаризации  $k_{r0}$ , т. е. в виде

$$Y_0 = k_{r0} X_0,$$

так как здесь  $Y_0 \neq 0$  и при  $X_0 = 0$ . Поэтому для несимметричных нелинейностей нельзя пользоваться уравнением (9-14), а следует применять уравнение (9-13). Соответствующая схема представлена на рис. 9-9, б. В связи с этим для таких нелинейностей в приложении 9 вместо  $k_{r0}$  даны выражения непосредственно для  $Y_0$ .

При отсутствии внешнего воздействия и симметричной характеристике  $\varphi(X)$  постоянная составляющая  $Y_0 = 0$  и уравнение (9-13) принимает вид:

$$Y = \left( k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p \right) X \quad (9-16)$$

или

$$Y = W_{\text{нл}}(p) X, \quad (9-17)$$

где  $W_{\text{нл}}(p) = k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p$  — передаточная функция эквивалентного линейного звена, которую можно назвать гармонической передаточной функцией нелинейного звена.

В соответствии с (9-14) и (9-15) коэффициент  $k_r$  определяет выходную гармоническую составляющую, совпадающую по фазе с входным гармоническим сигналом, а коэффициент  $k'_r$  — выходную составляющую, сдвинутую по фазе относительно входного сигнала на  $\pi/2$  вперед или назад в зависимости от знака  $k'_r$ , т. е. знака  $C_2$ .

Коэффициент  $k'_r$  появляется в уравнении (9-14) в случае неоднозначных характеристик  $\varphi(X)$  (в приложении 9 это нелинейности 3, 5, 7).

Неоднозначность характеристики приводит к тому, что при изменении знака входного сигнала происходит запаздывание в изменении выходного сигнала в связи с переходом на другую ветвь характеристики  $\varphi(X)$ . В результате при гармоническом входном воздействии возникает запаздывание по фазе первой гармоники на выходе относительно входного сигнала. Поэтому в данном случае в выражении (9-11) коэффициент  $C_2$  при косинусоидальной составляющей не равен нулю и отрицателен. Соответственно отрицательным получится и  $k'_r$  в уравнении (9-14).

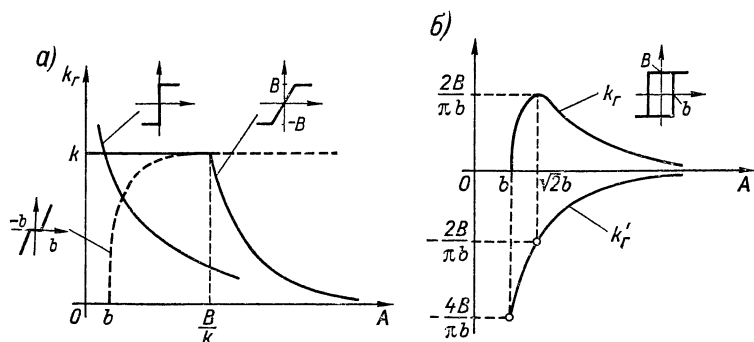


Рис. 9-10. Графики коэффициентов гармонической линеаризации

В случае безынерционной однозначной нелинейности первая гармоника на выходе нелинейного звена обязательно совпадает по фазе с входным сигналом (см., например, рис. 9-8). Поэтому уравнение (9-14) принимает вид:

$$Y = k_{r0}(A, X_0) X_0 + k_r(A, X_0)(X - X_0). \quad (9-18)$$

Здесь в скобках показано, что величины  $k_{r0}$  и  $k_r$  являются функциями  $A$  и  $X_0$ .

При нечетной однозначной характеристике и отсутствии постоянного внешнего воздействия уравнение (9-18) предельно упрощается:

$$Y = k_r(A) X. \quad (9-19)$$

На рис. 9-10, а и б в качестве примера приведены графики  $k_r(A)$  и  $k'_r(A)$  для трех нечетных нелинейностей, построенные по формулам приложения 9. Эти графики имеют ясный физический смысл, и их можно получить экспериментально подобно частотным характеристикам. Во всех случаях, когда характеристика нелинейного звена имеет насыщение, коэффициенты гармонической линеаризации стремятся к нулю при  $A \rightarrow \infty$ , поскольку при этом амплитуда выходного сигнала остается ограниченной. Если характеристика имеет зону нечувствительности, наоборот, влияние нелинейности падает с ростом  $A$  и коэффициент  $k_r$  стремится к значению коэффициента передачи  $k$  линейного участка характеристики. При неоднозначной релейной характеристике влияние

неоднозначности проявляется в запаздывании по фазе, и соответственно величина коэффициента  $k'_r$  уменьшается по мере увеличения  $A$  по сравнению с шириной петли.

При изучении гармонической линеаризации уместно вспомнить о рассмотренной ранее в восьмой главе статистической линеаризации. При статистической линеаризации нелинейное звено заменяется линейным, эквивалентным для постоянной составляющей входного сигнала и приближенно эквивалентным для его случайной составляющей. При этом в отношении последней составляющей приближенно принимается, что входной сигнал имеет нормальное распределение, и пренебрегается его искажением в результате прохождения через нелинейное звено.

При гармонической линеаризации нелинейное звено заменяется линейным, эквивалентным для постоянной составляющей входного сигнала и приближенно эквивалентным для его колебательной составляющей. При этом приближенно принимается, что спектр колебательной составляющей входного сигнала состоит из одной гармоники, и пренебрегается ее искажением в нелинейном звене.

Условием применимости обоих методов линеаризации к замкнутой системе является выполнение линейной частью системы роли фильтра нижних частот. При статистической линеаризации ее полоса пропускания должна быть мала по сравнению со спектром случайного сигнала, а при гармонической линеаризации — по сравнению с высшими гармониками автоколебаний.

## **В. Методика исследования автоколебаний с помощью гармонической линеаризации**

Рассмотрим замкнутую САУ, изображенную на рис. 9-7, *а*. Наша задача — найти параметры возможных автоколебаний в определенной, интересующей нас точке системы.

Первым этапом решения является осуществление гармонической линеаризации и с ее помощью определение параметров возможных автоколебаний на входе нелинейного звена.

Рассмотрим вначале более простой случай, когда отыскиваются автоколебания в виде

$$X = A \sin \omega_a t,$$

т. е. без постоянной составляющей. Это будет, если нелинейное звено имеет нечетную характеристику и нет внешнего постоянного воздействия, создающего  $X_0$ . Применив гармоническую линеаризацию, заменим нелинейное звено линейным, описываемым уравнением (9-17):

$$Y = W_{нл}(p) X.$$

В результате получим линейную САУ с передаточной функцией

$$W(p) = W_{л}(p) W_{нл}(p). \quad (9-20)$$

Входящие в  $W_{\text{нл}}(p)$  величины  $k_r(A, \omega_a)$  и  $k'_r(A, \omega_a)$  выражаем как нелинейные функции искомых неизвестных  $A$  и  $\omega_a$ . В случае типовых нелинейностей используем готовые формулы приложения 9.

Заметим еще раз, что получаемая система является линейной только при фиксированных величинах  $A$  и  $\omega_a$ . При их изменении система по-прежнему нелинейна, так как содержит коэффициенты  $k_r$  и  $k'_r$ , являющиеся функциями этих величин.

Искомые значения параметров  $A$  и  $\omega_a$ , входящих в передаточную функцию (9-20) линейной САУ, соответствуют наличию в этой системе незатухающих колебаний, т. е. нахождению ее на границе устойчивости из-за наличия у характеристического уравнения пары сопряженных мнимых корней. Иными словами, значения  $A$  и  $\omega_a$  могут быть найдены с помощью известных критериев устойчивости линейных систем как значения варьируемых параметров, при которых система оказывается на границе устойчивости, соответствующей незатухающим колебаниям.

Таким образом, дело сводится к применению известных методов определения границы устойчивости линейных систем (см. § 4-5).

Так, по критерию Гурвица условие наличия у характеристического уравнения мнимых корней сводится к равенству

$$\Delta_{n-1} = 0,$$

где  $\Delta_{n-1}$  — предпоследний минор определителя Гурвица, составленного из коэффициентов левой части  $D(p)$  уравнения замкнутой системы. Левая часть  $D(p)$ , как известно, равна сумме числителя и знаменателя передаточной функции  $W(p)$ .

По критерию Найквиста то же условие имеет вид:

$$W(j\omega) = -1,$$

т. е. с учетом (9-20)

$$W_{\text{л}}(j\omega) W_{\text{нл}}(j\omega) = -1. \quad (9-21)$$

Из критерия Михайлова это условие получаем в виде

$$D(j\omega) = 0. \quad (9-22)$$

Выбор того или иного критерия устойчивости для нахождения значений  $A$  и  $\omega_a$  зависит от конкретной схемы системы и определяется общими рекомендациями, данными в § 4-5.

В результате находятся параметры возможных автоколебаний в системе, например, в виде зависимости  $A(\omega_a)$ . Если при синтезе САУ требуется исследовать зависимость автоколебаний от какого-либо параметра системы, получаются уже три неизвестных параметра и решение находится в виде зависимостей  $A$  и  $\omega_a$  от варьируемого параметра системы. Примером для этого случая может служить зависимость  $A$  от коэффициента передачи  $k$  линейной части системы, изображенная на рис. 9-6. (Она должна быть дополнена еще зависимостью  $\omega_a$  от  $k$ .) При двух варьируемых



параметрах системы решение получается в виде линий фиксированных значений  $A$  и  $\omega_a$  в плоскости этих параметров.

Нелинейный характер зависимостей входящих в  $W_{нл}(p)$  коэффициентов  $k_r$  и  $k'_r$  гармонической линейаризации от  $A$  и  $\omega_a$  делает задачу нахождения искомых значений  $A$  и  $\omega_a$  значительно более сложной, чем в случае определения границ устойчивости линейных систем. Поэтому обычно прибегают к методу последовательных приближений или графическим методам (как и в случае решения аналогичных уравнений при статистической линейаризации).

В частности, при использовании уравнения (9-21) можно рекомендовать следующий графический способ, предложенный Л. С. Гольдфарбом. В комплексной плоскости строится годограф  $W_{л}(j\omega)$ , то есть а. ф. ч. х. линейной части, и годограф  $-\frac{1}{W_{нл}(j\omega)}$ . При этом значения  $A$  указываются как параметр на текущих точках последнего годографа. В соответствии с (9-21) точки пересечения годографов определяют искомые значения амплитуды  $A$  и частоты  $\omega_a$  автоколебаний. (Значение  $A$  берется с годографа нелинейного звена, а  $\omega_a$  — с годографа линейной части.) Можно, наоборот, находить точку пересечения годографов  $\frac{1}{W_{л}(j\omega)}$  и  $-W_{нл}(j\omega)$ , как предложил Коченбургер.

При применении логарифмического критерия устойчивости условие (9-21) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} L_{л}(\omega) + L_{нл}(\omega) &= 0; \\ \varphi_{л}(\omega) + \varphi_{нл}(\omega) &= -\pi. \end{aligned} \right\} \quad (9-23)$$

В этом случае строится серия л. а. х. и л. ф. х. системы для ряда значений  $A$ . Искомыми значениями  $A$  будут те, при которых л. ф. х. пересечет уровень  $-\pi$  на частоте среза. В свою очередь, частота среза определяет значение частоты  $\omega_a$ .

В тех случаях, когда входящие в  $W_{нл}$  коэффициенты  $k_r$  и  $k'_r$  достаточно сложно зависят от  $A$  и  $\omega_a$ , так что вычислить  $W_{нл}$  по  $A$  и  $\omega_a$  затруднительно, рекомендуется следующий способ. На основе (9-21) или (9-22) находятся сперва зависимости  $k_r(\omega)$  и  $k'_r(\omega)$ . Затем берутся зависимости  $k_r(A, \omega_a)$ ,  $k'_r(A, \omega_a)$ , определяемые по (9-15) или из приложения 9, и совместно с первыми зависимостями графическим решением находятся значения  $A$  и  $\omega_a$ , удовлетворяющие обоим парам зависимостей. При этом приравнивается  $\omega = \omega_a$ .

Наконец, в наиболее сложных случаях приходится прибегать к методу последовательных приближений. Например, при применении условия (9-22) по критерию Михайлова последовательно задаются рядом значений  $A$  и, строя каждый раз годограф  $D(j\omega)$ , ищут значение  $A$ , при котором годограф пройдет через начало координат.

После того как найдены возможные автоколебательные режимы, необходимо исследовать их на устойчивость. Реально существо-

вать в системе могут только устойчивые колебания. Для исследования устойчивости осуществляют линеаризацию системы переходом к приращениям относительно рассматриваемого колебательного режима и применяют обычные критерии устойчивости линейных САУ. Существуют также более простые необходимые критерии устойчивости колебаний [24]. Часто вопрос об устойчивости найденного периодического решения оказывается ясным и из чисто физических соображений.

Наконец, как уже отмечалось, необходимо осуществить проверку гипотезы о том, что линейная часть системы в достаточной мере является фильтром нижних частот для найденных значений частот  $\omega_a$  автоколебаний.

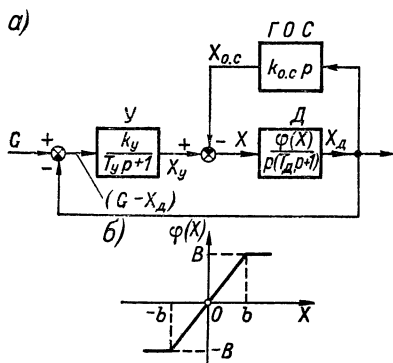


Рис. 9-11. Структурная схема следящей системы

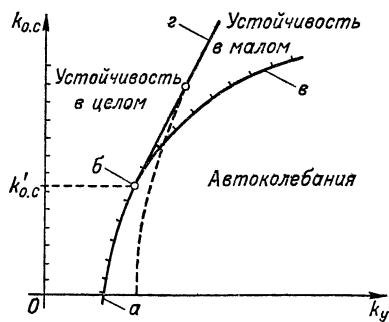


Рис. 9-12. Область устойчивости системы, изображенной на рис. 9-11

В результате применения гармонической линеаризации определяются значения амплитуды  $A$  автоколебаний на входе нелинейного звена. Если нам надо знать амплитуду колебаний в другом месте системы, ее легко найти обычным путем по а. ч. х. участка линейной части системы, заключенного между входом нелинейного звена и интересующим нас местом системы.

Рассмотрим пример применения метода гармонической линеаризации для исследования условий устойчивости и автоколебаний следящей системы, структурная схема которой показана на рис. 9-11, а [24]. Система состоит из двигателя  $D$  с постоянной времени  $T_d$ , усилителя  $U$  с постоянной времени  $T_y$  и коэффициентом передачи  $k_y$  и корректирующей гибкой обратной связи ГОС с коэффициентом передачи  $k_{o.c.}$ . Выходной величиной системы является угол поворота  $X_d$  вала двигателя, а входной величиной, которая отслеживается системой, — задающее воздействие  $G$ . Двигатель представляет собой целинейное звено вследствие ограничения скорости вращения  $pX_d$  его вала. Согласно схеме, уравнение двигателя имеет вид:

$$(T_d p + 1) p X_d = \varphi(X),$$

где  $\varphi(X)$  — однозначная нечетная характеристика с насыщением, приведенная на рис. 9-11, б.

Ограничим рассмотрение случаем, когда  $G = 0$ . Тогда гармоническая линеаризация нелинейности  $\varphi(X)$  дает уравнение

$$\varphi(X) = k_r(A) X.$$

Здесь, согласно приложению 9, коэффициент  $k_r$  гармонической линеаризации является функцией только амплитуды  $A$  автоколебаний и равен

$$k_r = \begin{cases} k_d & \text{при } A \leq b; \\ \frac{2k_d}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 + \frac{b^2}{A^2}} \right) & \text{при } A \geq b, \end{cases} \quad (9-24)$$

где  $k_d = B/b$  — коэффициент передачи двигателя на линейном участке его характеристики  $\varphi(X)$ .

Соответствующий график характеристики  $k_r(A)$  для такой нелинейности показан на рис. 9-10, а. В результате передаточная функция разомкнутой гармонически линеаризованной системы имеет вид:

$$W(p) = W_y(p) \frac{W_d(p)}{1 + W_{o.c}(p) W_d(p)},$$

где

$$W_y(p) = \frac{k_y}{T_y p + 1}; \quad W_d(p) = \frac{k_r(A)}{(T_d p + 1)p}; \\ W_{o.c}(p) = k_{o.c} p.$$

Отсюда левая часть уравнения замкнутой системы, равная сумме числителя и знаменателя  $W(p)$ ,

$$D(p) = (T_y p + 1)(T_d p + 1)p + [k_{o.c} p (T_y p + 1) + k_y] k_r(A) = \\ = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3, \quad (9-25)$$

где

$$a_0 = T_y T_d; \\ a_1 = T_y [1 + k_{o.c} k_r(A)] + T_d; \\ a_2 = 1 + k_{o.c} k_r(A); \\ a_3 = k_y k_r(A).$$

При малых отклонениях от установившегося режима, соответствующего  $X = 0$ , когда  $X < b$ , рассматриваемая система является линейной. В этом случае в (9-25) надо заменить  $k_r(A)$  на  $k_d$ . Условие устойчивости такой линейной системы, согласно критерию Гурвица (см. § 4-2), имеет вид:

$$\Delta_{n-1} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (9-26)$$

при положительности всех коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .

На рис. 9-12 построена область устойчивости этой системы в первом квадранте плоскости коэффициентов  $k_y$  и  $k_{o.c}$ , которые

приняты в качестве варьируемых параметров системы. Область устойчивости ограничена слева осью  $k_{o.c.}$ , на которой  $a_3 = 0$ , а справа — параболой  $abv$ , уравнение которой находится из равенства  $\Delta_{n-1} = 0$  и имеет вид:

$$k_y = \frac{1}{T_d} \left( \frac{T_y + T_d}{k_d T_y} + k_{o.c.} \right) (1 + k_{o.c.} k_d). \quad (9-27)$$

Определим теперь с помощью гармонической линеаризации, как влияет нелинейность  $\varphi(X)$  на устойчивость системы. Из чисто физических соображений можно предположить, что эта нелинейность характеристики двигателя должна ухудшить условия устойчивости вследствие того, что при выходе скорости двигателя из линейной зоны  $\pm B$  характеристики  $\varphi(X)$  ее величина фиксируется на уровне  $B$  и поэтому перестает действовать корректирующая гибкая обратная связь.

Возможные автоколебания в нелинейной системе определяются из условия наличия мнимых корней у характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (9-25). Если по-прежнему воспользоваться критерием Гурвица, то это условие сведется к равенству

$$\Delta_{n-1} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,$$

составленному из коэффициентов многочлена (9-25). Отсюда получаем уравнение, определяющее условия появления автоколебаний и совпадающее с уравнением (9-27), но с заменой  $k_d$  на  $k_r(A)$ :

$$k_y = \frac{1}{T_d} \left[ \frac{T_y + T_d}{k_r(A) T_y} + k_{o.c.} \right] [1 + k_{o.c.} k_r(A)]. \quad (9-28)$$

Из уравнения (9-28) можно, задаваясь значениями  $k_y$  и  $k_{o.c.}$ , найти вначале величину  $k_r$ , а затем из (9-24) определить соответствующее значение амплитуды  $A$  автоколебаний. В соответствии с (9-24) автоколебания, очевидно, будут возможны при данных значениях  $k_y$  и  $k_{o.c.}$  только в случае, если найденная величина коэффициента  $k_r$  будет лежать в пределах от  $k_d$  до 0. В противном случае автоколебания в системе при взятых значениях  $k_y$  и  $k_{o.c.}$  оказываются невозможными.

Из (9-28) видим, что при  $k_y \rightarrow \infty$  амплитуда  $A \rightarrow \infty$  и, наоборот, чем меньше коэффициент передачи  $k_y$ , тем при неизменном значении  $k_{o.c.}$  будет меньше и амплитуда  $A$  возможных автоколебаний. Нас интересует граница автоколебаний в плоскости коэффициентов  $k_y$  и  $k_{o.c.}$ . Она определяет для каждого значения  $k_{o.c.}$  то минимальное, т. е. критическое, значение  $k_y$ , при котором еще удовлетворяется уравнение (9-28) с учетом (9-24) и при переходе за которое в сторону меньших  $k_y$  решение (9-28) при  $0 \leq k_r \leq k_d$  отсутствует и, следовательно, автоколебания в системе уже невозможны.

Для нахождения указанного минимального значения  $k_y$  надо приравнять нулю производную  $dk_y/dA$ , определив ее из (9-28)

с учетом (9-24). Однако, поскольку

$$\frac{\partial k_y}{\partial A} = \frac{dk_y}{dk_r} \cdot \frac{dk_r}{dA}$$

и производная  $dk_r/dA$  на рассматриваемом нелинейном участке зависимости  $k_r(A)$ , т. е. при  $A > b$ , везде отлична от нуля, иско-  
мое значение  $k_y$  находится из равенства нулю производной  $dk_y/dk_r$ ,  
определяемой по (9-28). В результате получаем:

$$k_{y, \text{мин}} = \frac{k_{0, \text{с}}}{T_d} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{T_d}{T_y}} \right)^2 \quad (9-29)$$

при

$$k_{0, \text{с}} \geq k'_{0, \text{с}} = \frac{1}{k_d} \sqrt{1 + \frac{T_d}{T_y}}.$$

При  $k_{0, \text{с}} < k'_{0, \text{с}}$  минимума  $k_y$  не существует во всем диапазоне  $k_r$  от 0 до  $k_d$ . Это означает, что при любом  $k_{0, \text{с}} < k'_{0, \text{с}}$  при уменьшении  $k_y$  вплоть до значения, соответствующего границе устойчивости линейной системы, амплитуда  $A$  уменьшается до нуля. Следовательно, при таких малых значениях  $k_{0, \text{с}}$  граница автоколебаний совпадает с границей устойчивости линейной системы. При этом на самой границе амплитуда  $A$  автоколебаний равна нулю. На рис. 9-12 этим участком границы автоколебаний при  $k_{0, \text{с}} < k'_{0, \text{с}}$  является линия  $ab$ .

Граница автоколебаний при  $k_{0, \text{с}} \geq k'_{0, \text{с}}$ , соответствующая уравнению (9-29), изображена на рис. 9-12 линией  $bg$ . Каждой точке этой части границы автоколебаний соответствует своя амплитуда  $A$  автоколебаний. Она уменьшается с уменьшением  $k_y$ , т. е. по мере приближения к точке  $b$ , начиная с которой и ниже  $A = 0$ .

Область левее границы  $abg$  является областью устойчивости в целом. Она оказалась, как мы и предполагали, меньше области устойчивости, найденной при линейном рассмотрении, на область  $zbg$ . Последняя, следовательно, представляет собой область устойчивости в малом, но с неустойчивостью в целом.

Полученную картину можно дополнить при необходимости построением в области автоколебаний линий постоянной амплитуды  $A$ . Одна из них показана на рис. 9-12 штрихами. При увеличении  $A$  эта линия будет сдвигаться вправо.

Если путем увеличения коэффициента передачи  $k_y$  перевести систему из области устойчивости через границу автоколебаний на участке  $ab$ , в системе возникнут автоколебания, амплитуда которых будет постепенно возрастать от нуля по мере удаления от границы. Такой характер развития автоколебаний, как указывалось в § 8-4, называется **м я г к и м в о з б у ж д е н и е м**.

При переходе через границу  $bg$  уже при бесконечно малом удалении от нее в системе возникают автоколебания конечной амплитуды, величина которой будет тем больше, чем выше система находится от точки  $b$ . Такой переход к автоколебаниям, согласно § 8-4, называется **ж е с т к и м в о з б у ж д е н и е м**.

Соответственно с изложенным найденная при линейном рассмотрении граница устойчивости  $ab\epsilon$  делится на два принципиально различных участка. Участок  $ab$  является безопасной границей устойчивости. Сколь угодно близкий подход к ней, даже небольшой переход за нее вполне допустимы. Участок  $b\epsilon$ , наоборот, является опасной границей, так как, даже не дойдя до нее, система может перейти к автоколебаниям с большой амплитудой в результате воздействия достаточно большого внешнего возмущения, выводящего скорость двигателя из линейного участка характеристики  $\varphi(X)$ .

Приведенный пример наглядно показывает, насколько недостаточно и опасно ограничиваться при исследовании устойчивости даже линеаризуемых в малом САУ линейным приближением.

Как было ранее отмечено, после определения параметров автоколебаний в системе необходимо проверить их устойчивость, а также убедиться в справедливости гипотезы о том, что линейная часть системы является фильтром нижних частот. Устойчивость автоколебаний в данном случае очевидна исходя из физических соображений и результатов исследования устойчивости в линейном приближении.

Для проверки гипотезы о фильтре надо предварительно найти частоты автоколебаний. Они находятся из уравнения, получаемого приравниванием нулю многочлена  $D(p)$  (9-25) после подстановки  $p = j\omega_a$ .

Выше в данном примере мы использовали критерий Гурвица. С равным успехом можно было бы применить любой другой критерий устойчивости, как было показано ранее.

Мы рассмотрели методику гармонической линеаризации для случая симметричных нелинейностей при отсутствии внешних постоянных воздействий, когда автоколебания отыскиваются в виде чисто гармонических колебаний  $X = A \sin \omega_a t$  без постоянной составляющей.

Если к САУ приложено в произвольной точке постоянное воздействие  $F_0$ , оно создает на входе нелинейного звена постоянный сигнал  $X_0$ , и автоколебания следует искать в виде

$$X = X_0 + A \sin \omega_a t.$$

Если в этом случае нелинейное звено имеет симметричную (нечетную) характеристику, то в результате гармонической линеаризации оно заменяется линейным звеном, приведенным на рис. 9-9, а и описываемым уравнением (9-14):

$$Y = k_{r0}X_0 + \left(k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p\right)(X - X_0),$$

где  $k_{r0}$ ,  $k_r$  и  $k'_r$  — функции уже трех подлежащих определению параметров:  $A$ ,  $\omega_a$  и  $X_0$ .

Для постоянной составляющей автоколебаний получаем следующее уравнение:

$$X_0 = W_{30}(0) F_0, \quad (9-30)$$

где

$$W_{30}(0) = \frac{W_{XF}(0)}{1 + k_{r0}(A, \omega_a, X_0) W_{л}(0)}.$$

Для гармонической составляющей система по-прежнему описывается передаточной функцией (9-20):

$$W(p) = W_{л}(p) W_{нл}(p),$$

где

$$W_{нл}(p) = k_r(A, \omega_a, X_0) + \frac{k'_r(A, \omega_a, X_0)}{\omega_a} p.$$

Методика нахождения параметров автоколебаний остается принципиально прежней с той только разницей, что к  $A$  и  $\omega_a$  прибавился третий параметр  $X_0$  и соответственно новое уравнение (9-30), которое следует решать совместно с прежними уравнениями, определяющими условия существования у характеристического уравнения гармонически линеаризованной системы мнимых корней. Можно рекомендовать следующий порядок решения.

Сперва, используя передаточную функцию (9-20), описанным выше способом находим  $A$  и  $\omega_a$  как функции  $X_0$ , считая  $X_0$  пока неизвестным варьируемым параметром, т. е. находим зависимости

$$\left. \begin{array}{l} A(X_0); \\ \omega_a(X_0). \end{array} \right\} \quad (9-31)$$

Затем, подставляя эти зависимости в уравнение (9-30), определяем (обычно графически) искомое значение  $A$ . После этого из (9-31) находим  $\omega_a$ .

Если нелинейное звено имеет несимметричную характеристику, то при его гармонической линеаризации нельзя вводить для постоянной составляющей автоколебаний коэффициент  $k_{r0}$ . Поэтому такое звено следует представлять схемой, изображенной на рис. 9-9, б, и соответственно описывать уравнением (9-13):

$$Y = Y_0 + \left( k_r + \frac{k'_r}{\omega_a} p \right) (X - X_0),$$

где  $Y_0$ ,  $k_r$  и  $k'_r$  — функции  $A$ ,  $\omega_a$  и  $X_0$ .

Поскольку при таком представлении нелинейного звена оно в явном виде не замыкает систему по постоянной составляющей, для этой составляющей вместо уравнения (9-30) следует пользоваться уравнением

$$X_0 = -W_{л}(0) Y_0(A, \omega_a, X_0) + W_{FX}(0) F_0, \quad (9-32)$$

где  $W_{XF}$  — передаточная функция между точками нахождения в системе  $X_0$  и  $F_0$ .

Если постоянное внешнее воздействие отсутствует, но характеристика нелинейного звена является несимметричной, автоколебания по-прежнему будут содержать постоянную составляющую. В этом случае уравнение для постоянной составляющей имеет вид:

$$X_0 = -W_{\text{л}}(0) Y_0(A, \omega_a, X_0). \quad (9-33)$$

Это уравнение отличается от уравнения (9-32) только отсутствием внешнего воздействия  $F_0$ .

До сих пор мы предполагали, что САУ содержит одну нелинейность. Однако описанная методика принципиально применима и к системам, имеющим несколько нелинейностей, разделенных линейными звеньями. При этом, если эти линейные звенья являются фильтрами нижних частот, то каждая из нелинейностей линеаризуется порознь. В противном случае эти нелинейности вместе с промежуточными линейными звеньями рассматриваются как одна сложная нелинейность.

### **Г. Применение гармонической линеаризации для исследования переходных процессов, вызванных медленно меняющимися воздействиями, при наличии автоколебаний**

Описанная выше методика исследования автоколебаний в САУ при наличии постоянного внешнего воздействия  $F_0$  может быть распространена на случай, когда внешнее воздействие не является постоянным, но изменяется достаточно медленно по сравнению с периодом автоколебаний. В частотном выражении это означает, что максимальная частота внешнего сигнала должна быть значительно меньше минимальной частоты возможных автоколебаний в системе.

В этом случае внешнее воздействие, а следовательно, и постоянную составляющую  $X_0$  на входе нелинейного звена можно считать постоянными в течение очередного периода автоколебаний. Поэтому исходные формулы (9-12) и последующие формулы гармонической линеаризации остаются в силе.

В отличие от случая постоянного внешнего воздействия в уравнениях (9-30) и (9-32) для постоянной составляющей теперь уже, разумеется, нельзя принимать  $p = 0$ , и они приобретают вид: при симметричных нелинейностях

$$X_0(t) = W_{\text{зо}}(p) F_0(t); \quad (9-34)$$

где

$$W_{\text{зо}}(p) = \frac{W_{\text{XF}}(p)}{1 + k_{\text{г0}}(A, \omega_a, X) W_{\text{л}}(p)};$$

в общем случае

$$X_0(t) = -W_{\text{л}}(p) Y_0(A, \omega_a, X_0) + W_{\text{XF}}(p) F_0(t). \quad (9-35)$$

Порядок нахождения решения  $X_0(t)$  при заданном  $F_0(t)$  тот же, что и при постоянном  $F_0$ . Вначале по передаточной функции



(9-20)  $W(p) = W_{\text{л}}(p) W_{\text{нл}}(p)$  находим зависимости  $A(X_0)$  и  $\omega_a(X_0)$ . Подставив их в выражение для  $Y_0(A, \omega_a, X_0)$ , получим нелинейную зависимость  $Y_0(X_0)$  только от  $X_0$ . Подставив ее в уравнение (9-34) или (9-35), будем иметь нелинейное уравнение, содержащее только искомую переменную  $X_0$ . Решение этого уравнения облегчается тем, что входящая в него нелинейная зависимость  $Y_0$  от  $X_0$  обычно оказывается весьма плавной даже для релейных исходных характеристик  $Y(X)$  нелинейного звена и допускает обычную линеаризацию. Это означает, что в значительном диапазоне изменения  $X_0$  коэффициент  $k_{r0} = Y_0/X_0$  можно считать постоянным. В результате уравнение (9-34) или (9-35) получается линейным, и решение его не составляет труда.

Указанное явление сглаживания нелинейных характеристик колебательной составляющей сигнала называется **в и б р а ц и о н н о й л и н е а р и з а ц и е й**. Эта линеаризация имеет ту же природу, что и описанная в § 8-3, п. Г линеаризация высокочастотным стационарным случайным сигналом. Благодаря этому эффекту при наличии автоколебаний даже релейная САУ может вести себя по отношению к медленно меняющемуся внешнему воздействию как линейная система непрерывного действия. В свою очередь, это внешнее воздействие влияет на параметры автоколебаний вплоть до того, что при определенных его значениях автоколебания могут вообще пропадать. В этой взаимосвязи, т. е. в отсутствии суперпозиции, проявляется нелинейность системы.

#### Д. Совместная статистическая и гармоническая линеаризация

Если на САУ, в которой существуют автоколебания, подается случайное воздействие

$$F(t) = m_F(t) + F^0,$$

сигнал на входе нелинейного звена будет иметь вид:

$$X(t) = m_X(t) + X^0(t) + A \sin \omega_a t, \quad (9-36)$$

где  $m_X(t) = X_0(t)$ . (Автоколебания предполагаем по-прежнему синусоидальными.) В этом случае при исследовании прохождения через систему любой из входящих сюда трех составляющих необходимо в силу неприменимости принципа суперпозиции учитывать наличие всех составляющих. Для этого надо осуществлять **с о в м е с т н у ю с т а т и с т и ч е с к у ю и г а р м о н и ч е с к у ю л и н е а р и з а ц и ю**. В результате сигнал на выходе нелинейного звена может быть представлен так:

$$Y(t) = m_Y(t) + \left( k_{c, \Gamma} + \frac{k'_{c, \Gamma}}{\omega_a} p \right) A \sin \omega_a t + k_{c, \Gamma 1} X^0(t), \quad (9-37)$$

где  $k_{c, \Gamma}$ ,  $k'_{c, \Gamma}$  и  $k_{c, \Gamma 1}$  — коэффициенты совместной статистической и гармонической линеаризации.

В случае симметричной нелинейной статической характеристики постоянную составляющую  $m_Y(t)$ , т. е.  $Y_0$ , можно записать в виде  $m_Y(t) = k_{c, \Gamma 0} m_X$ .

Величина  $m_Y$  и коэффициенты передачи  $k_{с.г0}$ ,  $k_{с.г}$ ,  $k'_{с.г}$ ,  $k_{сг1}$  отдельных составляющих входного сигнала нелинейного звена определяются по приведенным ранее формулам гармонической и статистической линеаризаций с той, однако, разницей, что в рассматриваемом случае все эти величины являются функциями уже четырех неизвестных:  $m_X$ ,  $\sigma_X$ ,  $A$  и  $\omega_a$ .

В приложении 9 для ряда типовых нелинейностей приведены выражения для  $k_{с.г}$  и  $k_{сг1}$  при  $m_X = 0$ .

При исследовании системы искомые величины  $m_X$ ,  $\sigma_X$ ,  $A$  и  $\omega_a$  определяются совместным решением уравнения для автоколебательной составляющей, содержащего коэффициенты  $k_{с.г}$  и  $k'_{с.г}$ , уравнения для  $\sigma_Y$  случайной составляющей, содержащего  $k_{с.г1}$ , и уравнения для постоянной составляющей  $m_Y$ , содержащего  $m_X$  или  $k_{с.г0}$ .

Применяя совместную статистическую и гармоническую линеаризацию, можно исследовать влияние внешних случайных воздействий на параметры возможных автоколебаний в САУ, выражая  $A$  и  $\omega_a$  как функции  $m_X$  и  $\sigma_X$ . При иной постановке задачи этот метод позволяет исследовать точность САУ в случайных режимах при наличии в системе гармонических колебаний, т. е. выразить  $m_X$  и  $\sigma_X$  как функции  $A$  и  $\omega_a$ .

В заключение укажем еще на следующие возможности метода гармонической линеаризации.

Во-первых, этот метод позволяет после определения параметров основной гармоник автоколебаний принять во внимание отброшенные ранее высшие гармоники и путем последовательных приближений уточнить значения найденных параметров путем учета высших гармоник [24].

Во-вторых, как уже упоминалось, метод гармонической линеаризации может быть применен для исследования не только автоколебательных режимов, но и вынужденных колебаний нелинейных систем, создаваемых внешним периодическим воздействием.

Наконец, метод гармонической линеаризации может быть применен и для приближенной оценки качества переходных процессов в нелинейных системах, о чем будет сказано в следующей главе.

## Глава десятая

# КАЧЕСТВО ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И КОРРЕКЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 10-1. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Качество переходных процессов и нелинейных САУ оценивается теми же известными нам показателями, что и в линейных системах, т. е. прежде всего временем переходного процесса  $t_n$ ,

максимальным отклонением, колебательностью. Однако в отличие от линейных систем эти показатели в нелинейных системах зависят от величины внешнего воздействия, вызвавшего переходный процесс.

Рассмотрим методы определения показателей качества переходных процессов в нелинейных системах. Наиболее простым является случай, когда можно заранее полагать, что входящие в систему нелинеаризуемые нелинейности не оказывают определяющего влияния на динамику системы. В этом случае можно вначале в порядке первого приближения исследовать качество переходных процессов и строить сам процесс, исключив из рассмотрения все

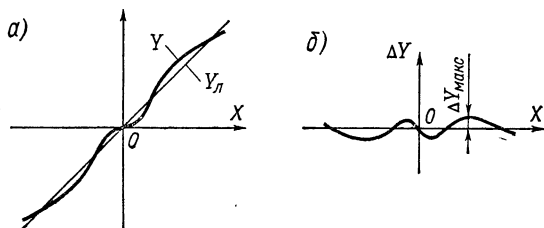


Рис. 10-1. К оценке сверху погрешности в построении переходных процессов, вызванной неучетом малых нелинейностей

нелинейности, и, таким образом, исследовать систему как линейную. Такая ситуация возможна, например, для САУ непрерывного действия с насыщением, небольшой зоной нечувствительности, неоднозначной характеристикой с достаточно узкой петлей и т. п. После проведения такого исследования (это может быть как анализ, так и синтез системы) оценивается влияние на динамику САУ неучтенных нелинейностей. При синтезе системы после этого в случае необходимости производится дополнительное изменение коррекции. Точный учет нелинейностей осуществляется построением переходных процессов с учетом этих нелинейностей. Для этого могут быть использованы методы численного интегрирования и особенно вычислительные машины (см. шестую главу).

Величина погрешности, которая может получиться в кривых переходных процессов в результате пренебрежения достаточно малыми нелинейностями, может быть легко оценена сверху после получения переходной характеристики линеаризованной таким образом системы. Предположим, что в системе имеется звено с нелинейной характеристикой, изображенной на рис. 10-1, а. Вследствие относительно малой нелинейности этой характеристики мы пренебрегли этой нелинейностью, заменив действительную характеристику  $Y(X)$  прямой  $Y_L(X)$ . На рис. 10-1, б приведен график разности  $\Delta Y = Y - Y_L$  и показана величина максимального значения этой разности  $\Delta Y_{\max}$ .

Реальный сигнал  $Y(t)$  на выходе рассматриваемого звена можно представить как сигнал на выходе линейного звена  $Y_L(t)$

с наложенным на него сигналом ошибки  $\Delta Y(t)$ . Изменение выходной величины линейной системы, вызванное сигналом ошибки  $\Delta Y$ , выразим через интеграл свертки (см. § 1-3):

$$\Delta X_{\text{вых}}(t) = \int_0^t h'_{\Delta Y}(\tau) \Delta Y(t - \tau) d\tau,$$

где  $h_{\Delta Y}(\tau)$  — переходная функция системы для воздействия, приложенного в точке нахождения  $Y$  (считаем  $h_{\Delta Y}(0) = 0$ ). Для того чтобы оценить сверху величину  $\Delta X_{\text{вых}}(t)$ , сделаем следующие упрощения в этом выражении. Во-первых, заменим в его правой части переменную величину ошибки  $\Delta Y(t)$  на постоянную величину в виде ее максимально возможного значения  $\Delta Y_{\text{макс}}$ . Во-вторых, перейдем под интегралом к абсолютным значениям:

$$\begin{aligned} \Delta X_{\text{вых}}(t) &\leq \int_0^t |h'_{\Delta Y}(\tau) \Delta Y_{\text{макс}}(t - \tau)| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t |h'_{\Delta Y}(\tau)| |\Delta Y_{\text{макс}}(t - \tau)| d\tau \leq \Delta Y_{\text{макс}} \int_0^t |h'_{\Delta Y}(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Если бы производная переходной функции  $h'_{\Delta Y}$  не изменяла своего знака, то последний интеграл равнялся бы просто значению этой функции. С учетом возможного изменения знака производной переходной функции этот интеграл следует брать по участкам между экстремумами переходной функции, где эта функция знакопостоянна. В результате получаем следующее выражение для верхней оценки погрешности, вызванной неучетом нелинейности:

$$\Delta X_{\text{вых}} \leq \Delta Y_{\text{макс}} \sum_{i=1}^{\infty} (h_{\Delta Y_i} - h_{\Delta Y_{i-1}}). \quad (10-1)$$

Здесь  $h_{\Delta Y_i}$  — значения экстремумов переходной функции.

Погрешность  $\Delta X_{\text{вых}}(t)$  растет со временем, и формула (10-1) дает оценку ее предельного значения при  $t \rightarrow \infty$ . Для конечной длительности переходного процесса погрешность  $\Delta X_{\text{вых}}(t)$  соответственно будет меньше вследствие сокращения числа слагаемых в сумме до числа экстремумов, расположенных на участке переходной характеристики, соответствующем рассматриваемому интервалу времени процесса.

Для приближенной оценки влияния нелинейностей можно воспользоваться идеей гармонической линеаризации. Нелинейное звено заменяется гармонически линеаризованным звеном, и принимается, что его передаточная функция остается справедливой в случае произвольной формы входного сигнала  $X$  с заменой  $A$  на  $X$ . Выразив таким образом параметры передаточной функции через входной сигнал и определив затем, как зависит качество переходных процессов в линейной системе от значений этих параметров, можно качественно определить, как повлияет нелиней-

ность звена на переходные процессы. Например, в случае звена с насыщением такой подход сводится к замене его эквивалентным звеном, коэффициент передачи которого уменьшается с ростом входного сигнала так же, как гармонический коэффициент передачи этого звена уменьшается с увеличением амплитуды входных колебаний.

Чтобы оценить качество процессов в подобным образом гармонически линеаризованной системе, можно применять показатель колебательности  $M$  и полосу пропускания как показатель быстродействия. В отличие, однако, от линейных систем здесь вместо одной частотной характеристики получится серия таких характеристик, как функция амплитуды  $A$ . Соответственно и качество переходных процессов будет зависеть от величины отклонения от установившегося режима.

Для нелинейных систем второго порядка качество переходных процессов полностью определяется по фазовому портрету системы (см. § 8-5).

**Оценка длительности переходных процессов по степени устойчивости с помощью прямого метода Ляпунова и критерия абсолютной устойчивости В. М. Попова.** Для нелинейных систем, устойчивость которых исследовалась с помощью прямого метода Ляпунова или критерия абсолютной устойчивости В. М. Попова, имеется возможность провести далее оценку длительности переходных процессов с помощью этих же методов путем введения понятия степени устойчивости  $\eta$ . Идея оценки заключается в том, что длительность переходных процессов  $X(t)$  в нелинейной системе сравнивается с длительностью затухающего экспоненциального процесса  $e^{-\eta t}$ . Длительность последнего процесса определяется величиной  $\eta$  и, как известно (см. § 5-3), принимается обычно равной  $3/\eta$ , т. е. трем постоянным времени  $1/\eta$  этой экспоненты.

Предположим, что у нас есть возможность определить максимальное значение  $\eta$ , при котором для всех возможных процессов  $X(t)$  в нелинейной системе произведение  $X(t)e^{\eta t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а при бесконечно малом превышении этого значения  $\eta$  это условие уже не выполняется. Это значит, что переходные процессы в системе затухают не медленнее, чем экспонента  $e^{-\eta t}$ . Следовательно, найденная величина  $\eta$  может служить оценкой сверху длительности  $t_n$  переходных процессов в системе, т. е.

$$t_n \leq \frac{3}{\eta}.$$

Понятие степени устойчивости было ранее введено для линейных систем в § 5-3. Поскольку в линейной системе переходный процесс может быть представлен в виде суммы

$$X(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t},$$

где  $\lambda_i$  — корни характеристического уравнения, то умножение  $X(t)$  на  $e^{\eta t}$  эквивалентно в этом случае уменьшению на  $\eta$  действитель-

ных частей корней характеристического уравнения. Таким образом, введенное здесь понятие степени устойчивости для линейных систем совпадает с уже известной нам степенью устойчивости  $\eta$ , представляющей собой величину минимальной действительной части корней характеристического уравнения системы.

В линейных системах величина степени устойчивости находится с помощью критериев устойчивости путем применения их к таким образом измененному уравнению системы, что это соответствует умножению решения на  $e^{\eta t}$ . В частности, при использовании в критерии устойчивости многочлена  $D(\lambda)$  для этого вводится новая переменная  $q = \lambda + \eta$ .

Аналогично в общем случае нелинейной системы для нахождения величины степени устойчивости  $\eta$  тоже можно использовать существующие критерии устойчивости нелинейных систем, а именно прямой метод Ляпунова и критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова. Для этого необходимо предварительно в уравнении системы произвести замену переменной  $X(t)$  на  $X(t)e^{\eta t}$ .

Соответственно при применении критерия абсолютной устойчивости В. М. Попова условием наличия у системы степени устойчивости не менее  $\eta$  является выполнение этого критерия для характеристики  $W_{\pi}^*(-\eta + j\omega)$  вместо  $W_{\pi}^*(j\omega)$  [5].

Как и в случае линейных САУ, при анализе качества нелинейных систем находят величину  $\eta$  как критическое значение неизвестного параметра, при котором для измененного уравнения система оказывается на границе устойчивости. При синтезе системы могут быть построены линии равных значений  $\eta$  внутри области устойчивости системы в плоскости каких-либо варьируемых параметров. Сама граница области устойчивости, очевидно соответствует  $\eta = 0$ .

**Определение степени устойчивости  $\eta$  с помощью гармонической линеаризации.** Метод гармонической линеаризации можно применить для исследования не только гармонических колебаний, но и колебательных переходных процессов [24]. При этом гармоническая линеаризация осуществляется для сигнала на входе нелинейного звена в виде

$$X(t) = X_0(t) + A \sin \psi, \quad (10-2)$$

причем

$$\frac{dA}{dt} = A\eta; \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega.$$

Такая запись соответствует затухающему при  $\eta < 0$  колебанию с изменяющимися со временем степенью затухания  $\eta$  и частотой колебаний  $\omega$ . В частном случае, когда  $\eta$  и  $\omega$  постоянны, выражение (10-2) принимает вид:

$$X(t) = X_0(t) + A_0 e^{-\eta t} \sin \omega_a t.$$

Коэффициенты гармонически линеаризованного уравнения нелинейного звена получаются в виде функций неизвестных параметров  $X_0$ ,  $A_0$ ,  $\omega$  и  $\eta$  искомого решения (10-2). Результатом

исследования является нахождение этих параметров, включая и величину степени устойчивости  $\eta$ , определяющей время переходного процесса. При синтезе САУ таким же образом может быть найдена зависимость  $\eta$  от варьируемых параметров системы, например, путем построения линий постоянных значений  $\eta$  в плоскости этих параметров.

Методика здесь та же, что и для определения степени устойчивости линейных САУ (см. § 5-3), с той только разницей, что применяется она к предварительно гармонически линеаризованной системе.

## **§ 10-2. ОСОБЕННОСТИ КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

### **А. Особенности коррекции динамических свойств нелинейных систем**

Как и у линейных САУ, коррекция динамических свойств нелинейных систем осуществляется с помощью корректирующих звеньев. Эти звенья могут быть линейными и нелинейными. Линейные корректирующие звенья были рассмотрены в седьмой главе. Все изложенное там о них в полной мере справедливо и в случае применения этих звеньев для коррекции нелинейных САУ.

Здесь мы остановимся на принципиально новых возможностях, которые возникают при применении с целью коррекции динамических свойств системы нелинейных звеньев.

Первым, наиболее очевидным случаем, когда целесообразно использование нелинейных корректирующих звеньев, является применение их для устранения или уменьшения отрицательного влияния на работу системы какой-либо входящей в нее нежелательной нелинейности. Например, с помощью звена со специально подобранной нелинейной статической характеристикой может быть выровнена или вообще нужным образом деформирована статическая характеристика всей САУ в целом. Другой пример — уменьшение влияния насыщения, которое часто имеет место, особенно в исполнительных звеньях САУ. Насыщение в статических характеристиках этих звеньев приводит к сильному затягиванию переходных процессов, т. е. к снижению быстродействия системы, при больших внешних воздействиях. В этих случаях можно добиться значительного ускорения переходных процессов, если линейные корректирующие звенья, создающие форсирующие воздействия, заменить или дополнить нелинейными звеньями, которые затягивали бы форсировку, задерживая исполнительный сигнал на предельно возможном с учетом насыщения значении. В одиннадцатой главе будет показано, что для получения максимального быстродействия при наличии ограничений переменных управление должно быть нелинейным, а именно — релейным.

При рассмотрении вопроса об устранении отрицательного влияния отдельных нелинейностей в качестве одного из способов решения этой задачи следует иметь в виду *в и б р а ц и о н н у ю л и н е а р и з а ц и ю*. Последняя заключается в сглаживании нелинейностей, например в устранении влияния зон нечувствительности и неоднозначности статических характеристик звеньев, с помощью высокочастотного сигнала. Существуют четыре способа вибрационной линеаризации: путем создания высокочастотных автоколебаний в системе (см. § 9-3, п. Г), с помощью вынужденных колебаний, создаваемых специальным генератором детерминированных колебаний, с помощью вынужденных колебаний, создаваемых генератором случайного сигнала (см. § 8-3, п. Г), и, наконец, применением скользящих режимов (см. § 8-5).

Компенсация нежелательных нелинейностей далеко не исчерпывает области применения нелинейной коррекции. Последняя является более общим средством коррекции, чем линейная коррекция, которую следует рассматривать как очень частный случай коррекции. Нелинейная коррекция позволяет повышать качество САУ, в том числе и линейных, с получением результатов, совершенно недостижимых средствами линейной коррекции.

Например, с помощью введения нелинейной коррекции в чисто линейную САУ можно устранить известное противоречие между быстродействием и колебательностью, обеспечив возможность независимого выполнения требований по каждому из этих показателей. Если в линейной САУ для повышения быстродействия увеличивать коэффициент передачи разомкнутой системы, то предел этому увеличению создает возрастающая в конце концов колебательность переходного процесса. Применение линейной коррекции позволяет повысить максимально достижимое при этом значение коэффициента передачи, однако принципиально не снимает указанного противоречия, требующего компромиссного решения при выборе коэффициента передачи и самой коррекции (см. седьмую главу). Сказанное иллюстрируется рис. 10-2, где приведены переходные характеристики 1, 2 и 3 линейной САУ при трех настройках коррекции, дающих все возрастающую форсировку процесса.

Указанное противоречие можно устранить, если изменять коррекцию в ходе переходного процесса так, чтобы в первой его части коррекция определялась только по условию обеспечения требования к быстродействию, а затем изменялась, исходя из требования к устойчивости и колебательности процесса. При этом коррекция,

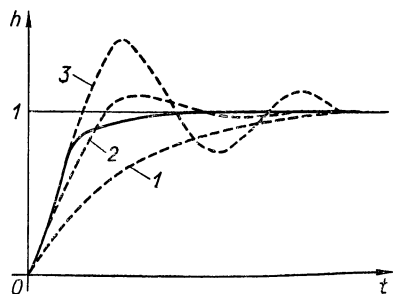


Рис. 10-2. Переходная характеристика системы при нелинейной коррекции



выбранная для первой части переходного процесса, будет настолько сильной, что если ее не изменять к концу, переходный процесс получится с очень большой колебательностью вплоть до неустойчивости.

Такое изменение коррекции в ходе переходного процесса и означает переход к нелинейной коррекции, поскольку сводится к изменению структурной схемы или параметров корректирующих звеньев в функции переменных величин, характеризующих процессы в системе. При больших отклонениях от установившегося

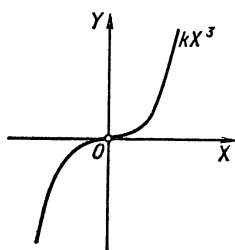


Рис. 10-3. Статическая характеристика нелинейного корректирующего звена

режима, соответствующих началу переходного процесса, коррекция должна обеспечивать максимально быстрое устранение этого отклонения, а затем, когда отклонение снижено до достаточно малой величины, необходима коррекция, обеспечивающая неколебательное окончание процесса.

Практически такая нелинейная коррекция реализуется либо с помощью реле, осуществляющих переключение корректирующих звеньев в функции выходной величины системы или какой-либо другой переменной, либо с помощью нелинейных звеньев со специально подобранными характеристиками, включенных последовательно с линейными корректирующими звеньями и изменяющих коэффициент передачи в ходе переходного процесса. Например, требуемая форсировка при больших отклонениях от установившегося состояния может быть получена включением последовательно в прямой канал САУ или в каналы форсирующих корректирующих воздействий нелинейного звена с вогнутой характеристикой, подобной приведенной на рис. 10-3. Того же результата можно достигнуть введением нелинейного звена с выпуклой характеристикой типа характеристики с насыщением в цепь отрицательной обратной связи или в цепь корректирующих воздействий, демпфирующих переходный процесс.

В результате применения такой нелинейной коррекции может быть получен процесс, изображенный на рис. 10-2 сплошной линией. Начальная часть процесса совпадает с переходной характеристикой 3 линейной системы, а далее происходит увеличение демпфирования и процесс переходит в монотонное окончание, подобное концу характеристики 1.

## Б. Нелинейные корректирующие звенья

Нелинейные корректирующие звенья бывают двух типов: нелинейные корректирующие звенья, включаемые последовательно или параллельно с основными звеньями системы, и переключающие корректирующие звенья, релейно изменяющие настройку или структурную схему системы при соответствующем измене-

нии ее состояния или внешних условий. Последний тип корректирующих звеньев присущ только нелинейной коррекции.

В качестве нелинейных корректирующих звеньев применяются нелинейные звенья непрерывного и дискретного действия, их комбинации друг с другом, а также с линейными корректирующими звеньями.

Простейшим видом нелинейных корректирующих звеньев являются корректирующие звенья с нелинейными статическими характеристиками. Первая область их применения, как уже говорилось, — это коррекция статических характеристик системы и, в частности, коррекция нежелательных нелинейностей ее основных звеньев. Вторая область применения — это коррекция динамических свойств. В этом случае такие безынерционные корректирующие звенья часто применяются в комбинации с линейными корректирующими звеньями, образуя вместе нелинейные динамические корректирующие звенья.

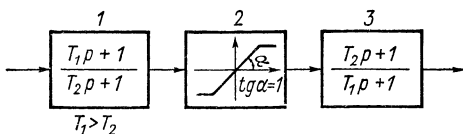


Рис. 10-4. Структурная схема нелинейного динамического корректирующего звена

В качестве нелинейных статических характеристик используют при этом характеристики с насыщением, зоной нечувствительности, петлевые, а также различные специально подобранные нелинейности. Если пользоваться частотным описанием таких нелинейных динамических корректирующих звеньев (на основе гармонической линеаризации), то их назначение можно определить следующим образом. Во-первых, они применяются для получения определенной желаемой зависимости частотных характеристик от амплитуды сигнала и тем самым для получения различной реакции системы на воздействия разной величины или, наоборот, для устранения нежелательных таких зависимостей, обусловленных имеющимися в системе нелинейностями основных звеньев. Во-вторых, такие корректирующие звенья применяются для преодоления той жесткой зависимости между амплитудной и фазовой частотными характеристиками, которая существует в линейных системах, с целью независимой корректировки каждой из этих характеристик. Для последней цели часто используются так называемые псевдолинейные корректирующие звенья (см. ниже).

На рис. 10-4 в качестве примера показана структурная схема нелинейного динамического корректирующего звена, состоящего из двух линейных корректирующих звеньев 1 и 3 и нелинейного звена с насыщением 2. При  $T_1 > T_2$  звено 1 является обычным пропорционально-дифференцирующим звеном, т. е. фильтром верхних частот, а звено 3 — соответственно инерционным звеном, т. е. фильтром нижних частот. Для малых входных сигналов, когда

нелинейное звено 2 не входит в насыщение, передаточная функция всей схемы равна 1, т. е. это звено не влияет на работу системы, в которой находится. При достаточно больших сигналах, когда звено 2 входит в насыщение, схема ведет себя как динамическое звено со спадающей с ростом частоты амплитудной частотной характеристикой, степень спадаания которой зависит от величины входного сигнала, и с примерно постоянным фазовым сдвигом.

Такое корректирующее звено применяется в качестве последовательного корректирующего звена, например, для устранения автоколебаний при больших возмущениях и соответствующего увеличения критического по устойчивости значения коэффициента передачи системы. Это корректирующее звено применяется также в цепях обратной связи, например, следящих систем для улучшения качества переходных процессов при больших входных сигналах [19].

Псевдолинейные корректирующие звенья — это нелинейные корректирующие звенья, эквивалентные амплитудные и фазовые частотные характеристики которых не зависят от амплитуды входного сигнала, чем и объясняется их название. Как уже говорилось, основным свойством этой группы корректирующих звеньев является практическое отсутствие

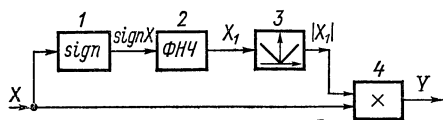


Рис. 10-5. Схема нелинейного фильтра с амплитудным ослаблением

связи между эквивалентными амплитудной и фазовой частотными характеристиками.

У линейных минимально-фазовых звеньев амплитудная и фазовая частотная характеристики связаны однозначно (см. § 1-3, п. В). Применение неминимально-фазовых звеньев принципиально позволяет осуществлять некоторое изменение амплитудной характеристики без изменения фазовой и наоборот, но только в узкой полосе частот. Применение псевдолинейных звеньев создает возможность независимо формировать каждую из этих характеристик во всем диапазоне частот, что существенно облегчает задачу синтеза системы по сравнению со случаем применения линейной коррекции и создает принципиально новые возможности повышения устойчивости и качества переходных процессов.

Существуют два основных типа псевдолинейных корректирующих звеньев: фильтры с амплитудным ослаблением — для коррекции амплитудной характеристики без изменения фазы и фильтры с фазовым опережением — для коррекции фазовой характеристики без изменения амплитудной характеристики.

На рис. 10-5 показан пример схемы фильтра с амплитудным ослаблением. Здесь звено 1 — реле, 2 — фильтр нижних частот ФНЧ, звено 3 дает абсолютное значение (модуль) входного сигнала  $X_1$  (в электрических системах постоянного тока это выпря-

мительная схема), 4 — множительное звено. Выходной сигнал  $Y$  получается как произведение входного сигнала  $X$  на модуль  $X_1$ . Сигнал  $X_1$  не зависит от амплитуды входного сигнала благодаря наличию релейного звена перед фильтром  $\Phi НЧ$  и изменяется с частотой в соответствии с выбранной амплитудной частотной характеристикой фильтра  $\Phi НЧ$ . В результате рассматриваемая схема имеет независимую от амплитуды входного сигнала амплитудную частотную характеристику, близкую этой характеристике фильтра  $\Phi НЧ$ , но при отсутствии существенного фазового запаздывания.

На рис. 10-6 представлена схема фильтра с фазовым опережением. Желаемая фазовая частотная характеристика создается

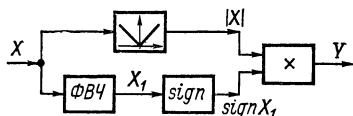


Рис. 10-6. Схема нелинейного фильтра с фазовым опережением

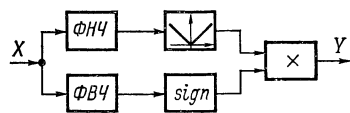


Рис. 10-7. Схема двухканального нелинейного фильтра с разделенными каналами для амплитуды и фазы

фильтром верхних частот  $\Phi ВЧ$ . Соответственно сигнал  $\text{sign } X_1$  опережает по фазе входной сигнал  $X$  и имеет постоянную величину, не зависящую от амплитуды и частоты входного сигнала. Выходной сигнал  $Y$  получается как произведение сигнала  $\text{sign } X_1$  на модуль входного сигнала  $X$ . В результате рассматриваемая схема создает опережение по фазе без изменения амплитуды сигнала.

На рис. 10-7 изображена схема двухканального нелинейного фильтра, объединяющая обе рассмотренные выше схемы. В верхнем канале этой схемы с помощью фильтра  $\Phi НЧ$  формируется желаемая амплитудная характеристика, а в нижнем канале с помощью фильтра  $\Phi ВЧ$  — фазовая характеристика с опережением.

Рассмотренные нелинейные фильтры применяются в качестве последовательных корректирующих звеньев и в каналах обратной связи.

Помимо приведенных выше схем, существует много других псевдолинейных корректирующих устройств, в том числе и не содержащих множительные звенья [19]. Имеются, например, псевдолинейные интегрирующие звенья, амплитудная характеристика которых совпадает с амплитудной характеристикой обычного линейного интегрирующего звена, а фазовый сдвиг вдвое меньше, что облегчает задачу стабилизации астатических систем с таким интегрирующим звеном. Предложены псевдолинейные дифференцирующие звенья, обладающие характеристиками, более

близкими к характеристикам идеального дифференцирующего звена, чем у реальных линейных дифференцирующих звеньев.

Сложные нелинейные динамические корректирующие звенья получаются в результате синтеза оптимальных САУ (см. главу тринадцатую). Они включают, помимо функциональных зависимостей, логические операции и зачастую требуют для своей реализации специального вычислительного устройства.

Переключающие корректирующие звенья осуществляют коррекцию динамических свойств системы путем дискретных изменений ее параметров и структурной схемы в ходе процесса управления в функции переменных системы и внешних воздействий. Эти изменения могут осуществляться как в основных, так и в корректирующих звеньях системы.

Примером такой коррекции является упомянутая выше релейная форсировка переходных процессов в системах с насыщением, которая осуществляется при больших отклонениях от заданного режима путем дискретного изменения настройки корректирующих звеньев системы. Как будет показано в главе тринадцатой, именно к схемам переключающих корректирующих звеньев чаще всего приводит синтез оптимальных САУ.

Переключающие корректирующие звенья применяются также для изменения алгоритма работы управляющего устройства системы при значительных изменениях внешних условий или свойств самой системы. Системы с такой коррекцией относятся к простейшим самоорганизующимся САУ (см. § 15-1).

В системах, управляющее устройство которых включает в себя вычислительную машину, реализующую алгоритм управления, переключающие корректирующие звенья часто также могут быть реализованы алгоритмически в этой ЦВМ без создания их физически в виде отдельного функционального блока (см. § 12-5).

Изложенное показывает большие возможности нелинейной коррекции. Вместе с тем, говоря о достоинствах нелинейной коррекции, следует отметить, что такая коррекция по своей природе является более специализированной по отношению к режимам системы, при которых она дает нужный эффект. Может получиться, например, так, что нелинейная коррекция, выбранная для определенного вида внешних воздействий, окажется не только неэффективной, но даже вредной при других неучтенных режимах САУ. Поэтому, чем шире диапазон внешних воздействий и вообще условий работы системы, тем труднее выбрать нелинейную коррекцию и тем скорее может оказаться наиболее приемлемой линейная коррекция. Последнее обстоятельство усугубляется тем, что, к сожалению, не существует какой-либо общей методики выбора нелинейных корректирующих звеньев и практически при синтезе приходится прибегать к методу проб и последовательных приближений, используя опыт и известные рекомендации по применению отдельных частных приемов и схем нелинейной коррекции (см. например, [8, 19, 32]).

### § 10-3. ПОРЯДОК СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Общий порядок синтеза нелинейных систем тот же, что и линейных (см. § 7-5 и 7-6). Особенности синтеза отдельных типов нелинейных систем (дискретных и адаптивных) будут рассмотрены в следующих частях книги.

Основным этапом синтеза по-прежнему является определение варьлируемой части системы, сводящееся к выбору коррекции исходя из заданных требований к точности и качеству переходных процессов. Как и для линейных САУ, при невысоких требованиях к качеству переходных процессов и точности в случайных режимах синтез осуществляется по условию обеспечения устойчивости с последующим выбором наилучших значений варьлируемых параметров в пределах полученной области устойчивости в их пространстве.

Выбор коррекции по условию устойчивости осуществляется с помощью прямого метода Ляпунова, критерия абсолютной устойчивости В. М. Пóпова или определения границ области устойчивости методом гармонической линеаризации.

Синтез коррекции по требованиям к качеству переходных процессов выполняется с помощью критериев качества нелинейных САУ, изложенных в § 10-1. При этом, как и в случае линейных систем, большие удобства, связанные с графическим характером работы, дает синтез с помощью частотных характеристик, и в частности логарифмических. В случае нелинейных САУ частотные характеристики могут быть использованы при синтезе на основе гармонической линеаризации и критерия В. М. Пóпова. В первом случае синтез проводится с помощью частотных характеристик гармонически линеаризованной системы. Как говорилось, здесь в отличие от линейной САУ нелинейная система будет описана не одной, а серией частотных характеристик, являющихся функцией амплитуды  $A$ . Последнее отражает факт зависимости качества переходных процессов от величины отклонения  $X$  от установившегося значения и соответственно от величины вызвавшего это отклонение внешнего воздействия. Если необходимо скорректировать степень этой зависимости, например уменьшить ее, следует использовать нелинейную коррекцию, которая должна нужным образом изменить зависимость частотных характеристик от  $A$ .

При применении для синтеза с помощью частотных характеристик критерия В. М. Пóпова частотные характеристики варьлируемой части системы выбираются так, чтобы выполнить требования, налагаемые на характеристику  $W_n^*(j\omega)$  или при синтезе на заданное значение  $\eta$  — на характеристику  $W_n^*(-\eta, +j\omega)$ . Синтез в этом случае также удобно проводить с помощью логарифмических характеристик [5].

Особенно эффективным методом синтеза нелинейных САУ является синтез с помощью вычислительных машин (см. § 7-5).

## Дискретные и оптимальные системы автоматического управления

---

### Глава одиннадцатая

## РЕЛЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 11-1. ПОНЯТИЕ О ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Сигналы, действующие в системах автоматического управления, бывают непрерывными и дискретными. Соответственно этому все САУ делятся на системы непрерывного действия и системы дискретного действия.

В системах непрерывного действия (в непрерывных системах) существуют только непрерывные сигналы, являющиеся непрерывными функциями времени (рис. 11-1, *а*). Все звенья этих САУ — звенья непрерывного действия, т. е. их входные и выходные величины представляют собой непрерывные сигналы.

САУ дискретного действия (дискретной САУ) называется система, в которой хотя бы одна величина представляет собой дискретный сигнал. Дискретный сигнал изменяется во времени дискретно, скачками (рис. 11-1, *б, в, г*). Существуют дискретные САУ, в которых имеются только дискретные сигналы. Такие системы состоят полностью из звеньев дискретного действия, входные и выходные величины которых являются дискретными. Однако в большинстве дискретных систем имеются как дискретные, так и непрерывные сигналы. В состав таких систем наряду со звеньями непрерывного и дискретного действия входят звенья, преобразующие непрерывные сигналы в дискретные, и звенья, осуществляющие обратное преобразование.

Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется к в а н т о в а н и е м сигнала. Существуют два основных

вида квантования: по уровню (рис. 11-1, б) и по времени (рис. 11-1, в). Сигнал, квантованный по уровню, может принимать только вполне определенные дискретные значения, соответствующие уровням, показанным на рис. 11-1, б горизонтальными линиями. Сигнал, квантованный по времени, изменяется скачком в фиксированные моменты времени, показанные на рис. 11-1, в вертикальными линиями.

На рис. 11-1, г изображен сигнал, квантованный и по уровню и по времени.

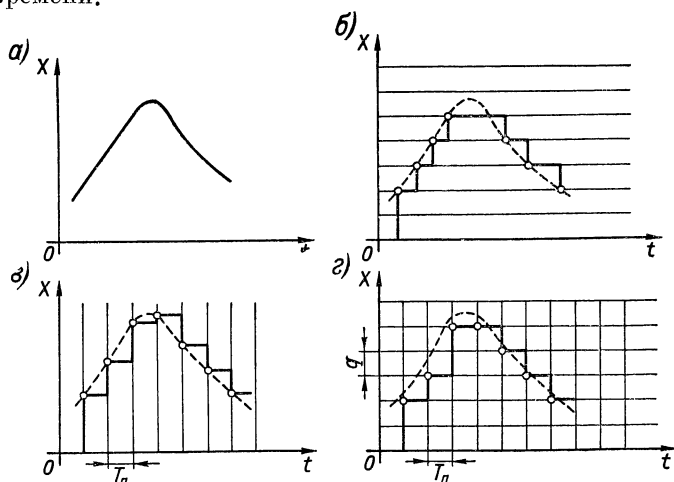


Рис. 11-1. Непрерывные и дискретные сигналы

В соответствии с названными выше видами дискретных сигналов САУ дискретного действия делятся на три типа: релейные, импульсные и цифровые. Релейные САУ — это системы с квантованием по уровню, импульсные — с квантованием по времени, а цифровые — с применением обоих видов квантования<sup>1</sup>.

В настоящей главе рассмотрим релейные САУ. Импульсным и цифровым САУ будет посвящена следующая глава.

## § 11-2. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Большинство релейных САУ можно представить, как показано на рис. 11-2. Здесь *НП* — непрерывная часть системы, а *РЭ* — релейный элемент. Релейный элемент осуществляет квантование непрерывного сигнала *X* по уровню, преобразуя его в дискретный сигнал *Y*. Возможны и более сложные САУ, содержащие

<sup>1</sup> Иногда [3, 21] под дискретными системами понимают только системы, в которых существует квантование по времени, т. е. импульсные и цифровые, а релейные системы выделяют в особый тип САУ.



несколько релейных элементов, разделенных частями непрерывного действия.

Релейный элемент — это звено релейного действия, статическая характеристика которого может иметь вид одной из характеристик, приведенных в пунктах 4, 5, 6 и 7 приложения 8. Релейная характеристика может быть и несимметричной. Релейным элементом в системе может быть собственно реле (электрическое, пневматическое и т. п.), двигатель постоянной скорости (управляемый только командами «включен», «выключен» и, возможно,

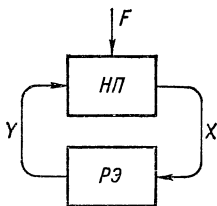


Рис. 11-2. Релейная система автоматического управления

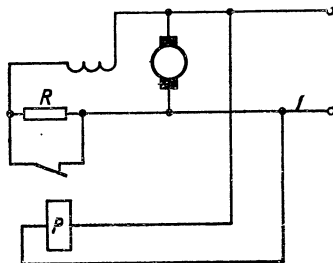


Рис. 11-3. Двухпозиционная система регулирования напряжения генератора постоянного тока

«реверс» без изменения величины скорости), какое-либо чувствительное звено релейного действия и т. п.

Релейный элемент функционально может быть любым звеном управляющего устройства системы — чувствительным, усилительным, исполнительным или входить в состав объекта управления.

Типичным примером релейной САУ являются широко распространенные релейные следящие системы с электрическим исполнительным двигателем. В этих системах усиление сигнала рассогласования и управление исполнительным двигателем осуществляются с помощью реле. К подобным системам относятся, в частности, исследованные в § 8-5 с помощью фазовой плоскости системы, изображенные на рис. 8-13 и 8-15.

Системы автоматического регулирования часто выполняются релейными. На рис. 11-3 приведена схема релейной системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока с двухпозиционным реле. Напряжение генератора подается на электромагнитное реле  $P$ , контакты которого включают или выключают сопротивление  $R$  в цепи обмотки возбуждения генератора, изменяя тем самым ток возбуждения, а следовательно, и напряжение генератора. Установившийся режим работы системы — колебательный. Повышение напряжения генератора вызывает срабатывание реле и размыкание его размыкающих контактов, благодаря чему происходит уменьшение тока возбуждения и напряжения генератора. В результате реле вновь отпускает, опять замыкая свои размыкающие контакты.

Далее процесс замыкания и размыкания контактов повторяется. В установившемся режиме ток возбуждения генератора колеблется относительно некоторого среднего значения, определяющего среднее значение напряжения генератора. Благодаря инерционности цепей генератора колебание его напряжения относительно среднего значения невелико, но, разумеется, оно должно быть достаточным для обеспечения режима периодического срабатывания и отпускания реле. Всякое возмущение, например изменение нагрузки генератора, приводит к временному отклонению напряжения генератора от его установившегося значения и соответственно к длительной задержке реле в одном из своих крайних положений. После восстановления напряжения устанавливается новый устойчивый режим вибраций реле, однако с другой скважностью импульсов тока возбуждения и соответственно с другим средним значением этого тока.

Описанный регулятор напряжения называется **вибрационным регулятором**. Он широко применяется для регулирования напряжения генераторов небольшой мощности (например, в автомобилях). В случае регулирования напряжения генераторов большей мощности в цепь возбуждения генератора включают контакты не самого чувствительного реле  $P$ , а управляемого им более мощного промежуточного реле или контактора. В случае регулирования напряжения еще более мощных генераторов в схему вводится в качестве усилителя мощности возбудитель, т. е. вспомогательный генератор постоянного тока, работающий на обмотку возбуждения основного генератора и управляемый описанным вибрационным регулятором, реле  $P$  которого подключается на зажимы основного генератора. Релейными часто делаются автопилоты самолетов и системы управления космическими объектами.

Основными достоинствами релейных САУ являются их **простота**, связанная с ней высокая **надежность**, а также **экономичность** в расходе энергии питания. Именно этим обусловлено, в частности, широкое применение релейных систем в летательных аппаратах.

Простота релейных систем объясняется тем, что устройства релейного действия, как правило, значительно проще устройств непрерывного пропорционального действия. (Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить двигатель с пропорциональным управлением и двигатель постоянной скорости, линейный усилитель и реле с одинаковой выходной мощностью, какой-либо чувствительный элемент с линейной статической характеристикой и его же вариант в релейном исполнении, выявляющий несколько дискретных значений входной величины.)

Экономичность релейных систем можно продемонстрировать сравнением к. п. д. линейного усилителя и усилителя, выполненного на тех же элементах, но работающих в релейном (ключевом) режиме.

Кроме того, благодаря тому, что релейные элементы осуществляют предельную форсировку выходного сигнала, релейные САУ могут иметь максимально возможное быстродействие и в этом отношении превосходят САУ непрерывного действия (см. тринадцатую главу).

Релейные элементы подразделяются по числу уровней выходной величины на двухпозиционные, трехпозиционные и т. п. Примером первых двух типов релейных элементов являются соответственно двух- и трехпозиционные поляризованные реле. Примером многопозиционного релейного элемента служит управляемое сопротивление, имеющее конечный ряд дискретных значений. (Простейшим таким элементом является многопозиционный переключатель сопротивления.)

Основное применение в релейных САУ получили двух- и трехпозиционные релейные элементы. По типу релейных элементов релейные САУ называются двухпозиционными, трехпозиционными и т. д. Многопозиционное квантование по уровню применяется главным образом в цифровых САУ (см. двенадцатую главу).

### § 11-3. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Начнём с двухпозиционных релейных САУ. На рис. 11-4, а изображена типовая статическая характеристика двухпозиционного релейного элемента (штриховая прямая соответствует идеальному двухпозиционному релейному элементу),

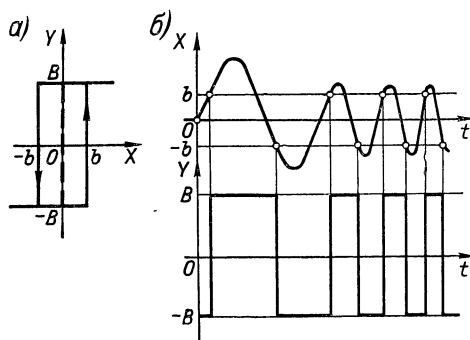


Рис. 11-4. Переходный процесс в двухпозиционной релейной системе автоматического управления

а на рис. 11-4, б показан характер переходного процесса в рассматриваемой САУ. Как видно, переходный процесс сводится к изменению скважности выходных импульсов релейного элемента. Примером двухпозиционной релейной САУ является описанная выше вибрационная система регулирования напряжения.

Первая особенность двухпозиционных релейных САУ заключается в отсутствии у них

статического режима. Поскольку выходная величина двухпозиционного релейного элемента может принимать только одно из двух предельных значений, единственно возможным установившимся невозмущенным режимом в таких системах являются автоколебания. Точность двухпозиционных релейных САУ в

установившемся режиме определяется, таким образом, средним значением выходной величины и амплитудой установившихся автоколебаний относительно этого среднего значения. Величина этой амплитуды зависит от частоты автоколебаний и в соответствии с частотной характеристикой непрерывной части системы, являющейся фильтром нижних частот, принципиально может быть сделана сколь угодно малой путем повышения частоты автоколебаний.

Вторая особенность динамики релейных САУ — возможность получения эффекта вibrационной линеаризации путем создания достаточно высокочастотных колебаний на входе релейного элемента. В этом случае релейный элемент линеаризуется, и поэтому вся система в целом ведет себя, как система непрерывного действия. Эффект вибрационной линеаризации был описан с помощью метода гармонической линеаризации в § 9-3, п. Г. Как там отмечено, он также аналогичен рассмотренному в § 8-3 эффекту линеаризации нелинейного звена высокочастотным случайным сигналом.

Сущность вибрационной линеаризации применительно к релейному нелинейному звену иллюстрирует рис. 11-5. На рис. 11-5 приведено построение сигнала на выходе реле для чисто переменного

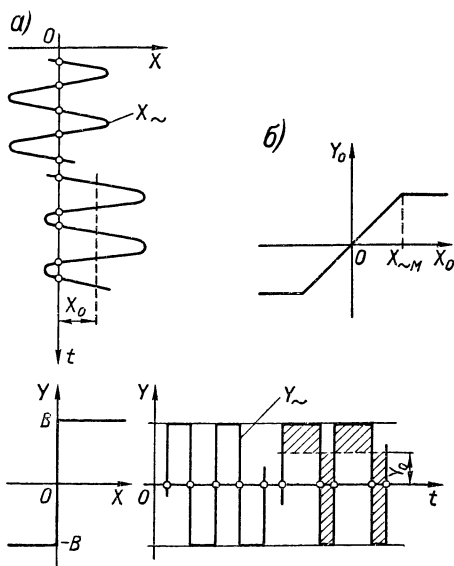


Рис. 11-5. К идее вибрационной линеаризации

входного сигнала  $X_{\sim}$  и для суммы этого переменного сигнала и постоянного сигнала  $X_0$ . В первом случае выходной сигнал получается тоже чисто переменным  $Y_{\sim}$ , а во втором случае вследствие изменения скважности выходных импульсов в выходном сигнале появляется постоянная составляющая  $Y_0$ , величина которой зависит от величины постоянной составляющей  $X_0$  на входе реле. Соответствующая зависимость  $Y_0$  от  $X_0$  показана на рис. 11-5, б. Форма этой зависимости определяется формой входного переменного сигнала и релейной характеристикой. Таким образом, при наличии переменного воздействия  $X_{\sim}$  на входе релейного элемента этот элемент пропускает постоянный (точнее, низкочастотный по сравнению с переменным высокочастотным сигналом  $X_{\sim}$ ) сигнал  $X_0$  как звено непрерывного действия. При этом для малых величин последнего сигнала звено является линейным.

Процесс вибрационной линеаризации можно трактовать как процесс модуляции, где релейный элемент является модулятором, высокочастотное воздействие  $X_{\sim}$  — сигналом несущей частоты, а входной низкочастотный сигнал  $X_0$  — модулирующим сигналом. Здесь имеет место широтно-импульсная модуляция, когда функцией модулирующего сигнала является ширина выходных импульсов (см. § 12-1). Отсюда вытекает следующее условие неискаженной передачи низкочастотной составляющей релейным элементом [17]:

$$\frac{f_{\sim}}{f_0} \geq 3, \quad (11-1)$$

где  $f_{\sim}$  и  $f_0$  — соответственно частоты высокочастотного и низкочастотного входных сигналов.

При работе релейного элемента в составе САУ низкочастотный сигнал  $X_0$  представляет собой сигнал управления, т. е. изменение его во времени и есть переходный процесс в системе.

Высокочастотное воздействие, осуществляющее вибрационную линеаризацию, может быть получено тремя способами: с помощью внешнего генератора, создающего вынужденные колебания системы, путем автоколебаний в самой САУ и, наконец, путем создания скользящего режима.

Применение внешнего генератора позволяет наиболее просто выбирать частоту и амплитуду высокочастотных колебаний системы. Обычно наиболее выгодно эти колебания подавать непосредственно на сам релейный элемент. При этом в случае достаточно высокой частоты вынужденных колебаний эти колебания практически будут существовать только в этом элементе, не проходя дальше в систему вследствие инерционности последующих звеньев. Недостатком этого способа вибрационной линеаризации является необходимость в специальном генераторе колебаний.

Поскольку в двухпозиционной релейной САУ при отсутствии внешнего высокочастотного воздействия всегда существуют автоколебания, то установление вынужденного высокочастотного колебательного режима происходит в результате подавления этих автоколебаний. Такой режим называется режимом захвата.

Использование автоколебаний для осуществления вибрационной линеаризации требует принятия специальных мер для повышения частоты автоколебаний до нужного значения. Для этой цели применяются обычные средства коррекции, повышающие быстродействие системы (см. седьмую главу). Примером систем, в которых используется вибрационная линеаризация автоколебаниями, являются так называемые вибрационные системы автоматического регулирования. К их числу относится описанная выше вибрационная система регулирования напряжения генератора.

Вариантом рассмотренного второго способа осуществления вибрационной линеаризации является создание с помощью местной обратной связи вокруг релейного элемента автоколебательного контура. Такой контур можно рассматривать так же, как генератор вынужденных высокочастотных колебаний, встроенный в саму систему, т. е. выполненный на базе самого релейного элемента этой системы. Типовой схемой такого автоколебательного контура является охват релейного элемента отрицательной инерционной жесткой обратной связью [11].

Третьим способом осуществления вибрационной линеаризации является создание скользящего режима, который был описан с помощью фазовой плоскости в § 8-5. Скользящий режим может существовать либо в течение всего переходного процесса, либо возникать только в его конце.

При наличии в системе вибрационной линеаризации высокочастотные колебания линеаризуют не только релейный элемент, но и другие нелинейности (зоны нечувствительности, неоднозначности и т. д.), имеющиеся в системе (см. § 9-3, п. Г).

Как уже говорилось, при наличии вибрационной линеаризации переходные процессы в релейной САУ подобны процессам в системах непрерывного действия. При этом высокочастотные колебания, вызывающие линеаризацию, образуют высокочастотный фон, накладывающийся на переходный процесс подобно высокочастотной помехе в обычной системе непрерывного действия. Последнее иллюстрируется рис. 11-6, где показан переходный процесс для интересующей нас некоторой промежуточной переменной  $X_i$  непрерывной части системы. (Ею может быть, например, напряжение генератора в схеме на рис. 11-3.)

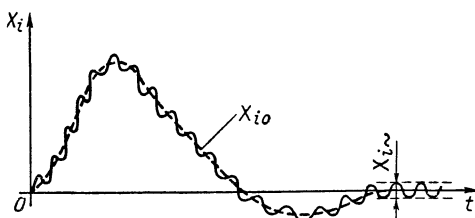


Рис. 11-6. Переходный процесс в релейной системе при наличии вибрационной линеаризации

Точность релейных САУ в установившихся режимах при наличии вибрационной линеаризации выше, чем при ее отсутствии, вследствие того, что в последнем случае в двухпозиционных системах будут существовать автоколебания более низкой частоты и, следовательно, значительно большей амплитуды.

Тот факт, что при вибрационной линеаризации релейные САУ приближаются по качеству переходных процессов к системам непрерывного действия, отнюдь не означает, что такие релейные системы во всех случаях обеспечивают более высокое качество переходных процессов, чем релейные САУ без вибрационной линеаризации. В тринадцатой главе будет показано, что при определенных условиях наилучшее качество переходных процессов обеспечивается именно при чисто релейном управлении. Поэтому,

например, в САУ непрерывного действия часто вводят специальные приставки, осуществляющие релейное управление объектом при больших отклонениях от заданного режима, за счет чего достигается снижение максимального отклонения управляемой величины и повышается быстродействие.

Обратимся теперь к трехпозиционным релейным САУ. В этом случае характеристика релейного элемента (характеристики 6 и 7 в приложении 8) имеет зону нечувствительности. Благодаря этому в таких системах принципиально возможен статический режим покоя без автоколебаний, когда величина на входе  $X$  релейного элемента находится в зоне нечувствительности и соответственно его выходная величина  $Y = 0$ . Для реализации такого режима, когда он желателен, в непрерывную часть системы вводят коррекцию, которую выбирают по условию отсутствия в системе автоколебаний. В остальном, включая режимы вибрационной линеаризации, все изложенное выше остается в силе и для этих систем.

#### § 11-4. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Общий порядок исследования релейных САУ тот же, что и для САУ непрерывного действия. Он включает в себя математическое описание системы, исследование точности, устойчивости, качества переходных процессов и, наконец, построение переходных процессов.

Об особенностях математического описания нелинейных систем говорилось в § 8-1. В результате составляется структурная схема системы, состоящая из непрерывной части и

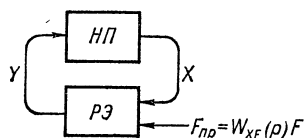


Рис. 11-7. Перенос внешнего воздействия  $F$  на вход релейного элемента через участок с передаточной функцией  $W_{KF}(p)$

релейного элемента с внешним воздействием, приложенным в произвольной точке непрерывной части (см. рис. 11-2). Если участок непрерывной части между местом приложения внешнего воздействия и входом релейного элемента является линейным, это воздействие может быть перенесено на вход релейного элемента. В результате схема САУ принимает типовой вид (рис. 11-7).

Релейный элемент описывается статической характеристикой и временем запаздывания. Время запаздывания определяется по времени срабатывания и времени отпускания релейного элемента [43], которые в общем случае могут быть различными. Запаздывание релейного элемента учитывается введением в структурную схему системы звена с постоянным запаздыванием (см. § 1-4, п. Д), которое включается в непрерывную часть системы.

Динамика релейных САУ второго порядка может быть исчерпывающе исследована с помощью фазовой плоскости (см. § 8-5).

Исследование устойчивости и автоколебаний релейных систем произвольного порядка может осуществляться с помощью гармонической линеаризации (см. § 9-3). Этот метод, как известно, является приближенным и требует в каждом конкретном случае проверки выполнения определенных условий применимости (условие фильтра). Когда непрерывная часть системы линейна, то, учитывая, что релейные характеристики являются кусочно-линейными, в этом случае возможно точное решение уравнения динамики таких САУ методом припасовывания, путем последовательного решения нескольких линейных уравнений, каждое из которых справедливо для отдельного отрезка процесса (см. § 8-5). С помощью метода припасовывания возможно точное исследование релейных САУ, в том числе их устойчивости и автоколебаний [3, 5, 39].

Исследование точности и качества переходных процессов в релейных САУ в случае, если в системе имеет место вибрационная линеаризация, осуществляется обычными методами исследования САУ непрерывного действия. При этом релейный элемент заменяется эквивалентным для постоянной составляющей сигнала линейным звеном. Коэффициент передачи этого звена может быть определен методом гармонической линеаризации (см. § 9-3, п. Г и конец параграфа). При исследовании точности в установившихся режимах необходимо учитывать и высокочастотную составляющую на выходе системы, накладывающуюся на постоянную составляющую процесса.

При наличии случайных воздействий на систему исследование точности проводится методом статистической линеаризации (см. § 8-3). Если при этом в системе существуют автоколебания или вынужденные колебания, необходимо применить совместную статистическую и гармоническую линеаризацию (см. § 9-3, п. Д).

В общем случае релейной САУ без вибрационной линеаризации качество переходных процессов исследуется с помощью общих методов исследования качества нелинейных систем, описанных в § 10-1, и прежде всего с помощью вычислительных машин, а также аналитически методом гармонической линеаризации.

Построение переходных процессов релейных САУ при наличии вибрационной линеаризации осуществляется, как для системы непрерывного действия (см. шестую главу). При отсутствии вибрационной линеаризации в случае линейной непрерывной части системы применяется метод припасовывания. Самым универсальным способом всегда остается применение вычислительных машин.



## ИМПУЛЬСНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### § 12-1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

#### А. Классификация импульсных систем автоматического управления

Импульсные системы — это системы, в которых действуют сигналы, квантованные по времени (см. § 11-4). Большинство замкнутых импульсных САУ можно представить, как показано на рис. 12-1. Здесь *НП* — непрерывная часть системы, а *ИЭ* — импульсный элемент. Импульсный элемент осуществляет квантование непрерывного сигнала  $X$  по времени, преобразуя его, таким

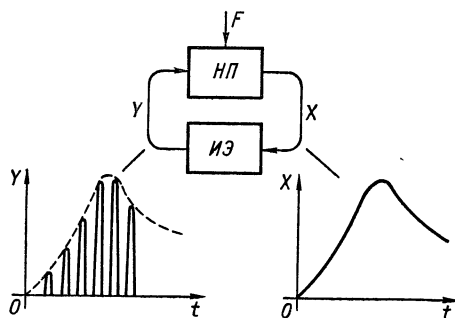


Рис. 12-1. Замкнутая импульсная система автоматического управления

образом, в дискретный сигнал  $Y$ . На рис. 12-1 приведен возможный вид сигналов на входе и выходе импульсного элемента. Проходя непрерывную часть, дискретный сигнал сглаживается и превращается опять в непрерывный сигнал.

Возможны и более сложные импульсные САУ, содержащие несколько импульсных элементов. Квантование, осуществляемое импульсным элементом в виде преобразования непрерывного сигнала в последовательность импульсов, называется и м п у л ь с н о й м о д у л я ц и е й. Импульсная модуляция заключается в изменении одного из параметров выходных импульсов (модулируемого параметра) в функции величины входного сигнала (модулирующего сигнала). Модулируемым параметром для последовательности импульсов на выходе импульсного элемента может быть высота (амплитуда) импульса, его ширина и пауза между импульсами. Соответственно существуют три вида импульсной модуляции: амплитудно-импульсная модуляция (АИМ), широтно-

импульсная модуляция (ШИМ) и время-импульсная модуляция (ВИМ). Последняя, в свою очередь, подразделяется на фазо-импульсную модуляцию (ФИМ) и частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ). Во всех случаях форма импульсов в процессе модуляции принимается неизменной.

Рис. 12-2 поясняет сущность каждого вида модуляции. При АИМ (рис. 12-2, б) модулируемым параметром, зависящим от значения входного сигнала  $X$  (рис. 12-2, а) в начале очередного периода  $T_n$  повторения импульсов, является высота (амплитуда) импульсов  $A$ .

Изображенный ранее на рис. 11-1, в квантованный по времени сигнал представляет собой тоже амплитудно-модулированный сигнал при ширине импульсов, равной периоду их повторения. При ШИМ (рис. 12-2, в) модулируемым параметром является ширина  $T_n$  импульса, а при ФИМ (рис. 12-2, г) — запаздывание  $T_z$  импульса относительно начала периода. В случае ЧИМ (на рис. 12-2 не показана) модулируемым параметром, изменяющимся в функции величины  $X$ , является частота  $f_n = 1/T_n$  следования импульсов.

По виду модуляции импульсные САУ делятся соответственно на амплитудно-импульсные, широтно-импульсные и т. д. Основное распространение получили амплитудно-импульсные, затем широтно-импульсные системы. Поэтому в дальнейшем будем ориентироваться на них.

Импульсный элемент может входить в любую функциональную часть управляющего устройства или в объект управления.

Основные достоинства импульсных САУ обусловлены прерывистым характером передачи сигналов между отдельными частями системы и состоят в возможности многократного использования линий связи, а также в повышенной помехозащищенности.

Первое достоинство заключается в том, что с помощью одного управляющего устройства импульсного действия можно управлять несколькими объектами путем циклического подключения этого управляющего устройства последовательно к каждому из объектов. Промежуток между двумя очередными импульсами, поступающими на один и тот же объект, используется для обмена дискретными сигналами с остальными объектами. В результате система

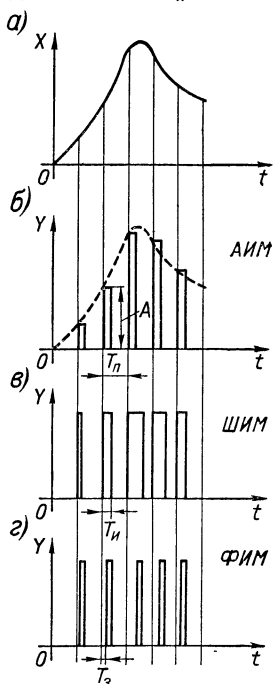


Рис. 12-2. Виды импульсной модуляции: а — модулирующий сигнал; б — амплитудно-импульсная модуляция; в — широтно-импульсная; г — фазо-импульсная

управления всеми объектами в целом существенно упрощается по сравнению со случаем применения для каждого объекта отдельного управляющего устройства. Примером такой системы многооточечного управления является система регулирования температуры большого числа прессов горячей вулканизации с помощью одного регулятора. Каждый пресс снабжен термпарой, выявляющей температуру, и исполнительным реле, контакты которого включены в цепь питания электроподогревателя. С помощью шагового распределителя происходит «обегание» регулятором всех прессов, при подключении к каждому из которых регулятор либо включает, либо выключает нагрев в зависимости от величины температуры.

Возможность многократного использования одного канала связи для управления несколькими объектами, удаленными от места нахождения управляющих устройств импульсного действия, основана на том же принципе последовательного соединения объектов и соответствующих управляющих устройств линий связи с помощью синхронно действующих на обоих концах линий шаговых распределителей. Такое временно́е разделение каналов широко используется, в частности, для связи с летательными объектами и их управления.

Повышенная помехозащищенность импульсных систем обусловлена возможностью передавать информацию в виде очень коротких импульсов, в промежутке между которыми система оказывается разомкнутой и не реагирует на внешние возмущения.

В ряде случаев системы являются импульсными вне зависимости от указанных их достоинств — просто в связи с принципом действия отдельных частей системы. Сюда относятся САУ, включающие радиолокаторы, высотомеры импульсного действия и т. п.

## **Б. Особенности динамики импульсных систем автоматического управления**

Импульсную САУ можно представить как систему непрерывного действия, в которой происходит периодическое прерывание контура, осуществляемое импульсным элементом (см. рис. 12-1). Обычно частота работы импульсного элемента выбирается значительно выше полосы пропускания непрерывной части системы. В этом случае импульсная САУ оказывается эквивалентной системе непрерывного действия, т. е. наличие квантования по времени не создает никакой принципиальной особенности в поведении системы. Это очевидно и из того, что в пределе при увеличении частоты повторения импульсов, т. е. при  $T_n \rightarrow 0$ , импульсная система превращается в систему непрерывного действия.

Непрерывная часть *НП* импульсной системы играет роль фильтра нижних частот. Она, как показано на рис. 12-3 для случая АИМ, реагирует только на низкочастотную составляющую

$Y_0$  импульсного сигнала  $Y$  на ее входе, несущую всю информацию о непрерывном сигнале на входе импульсного элемента *ИЭ*. Дискретность работы импульсного элемента вызывает лишь в качестве побочного явления возникновение на выходе непрерывной части системы высокочастотной составляющей в виде фона (см. кривую  $X$  на рис. 12-3), частотный спектр которой кратен частоте работы импульсного элемента. Таким образом, в данном случае происходит то же явление, что и в релейных системах с вибрационной линейризацией с помощью вынужденных колебаний. Эти системы, как видно из предыдущей главы, подобны импульсной системе с ШИМ.

Если частота  $1/T_p$  работы импульсного элемента недостаточно велика по сравнению с полосой пропускания непрерывной части системы, наличие этого элемента в системе существенно изменяет ее динамические свойства по сравнению с системой непрерывного действия, и, следовательно, при исследовании такой системы необходимо учитывать дискретный характер сигналов.

*В отличие от релейных САУ импульсные системы могут быть как нелинейными, так и линейными. Линейной является импульсная система, у которой линейными уравнениями описываются как непрерывная часть, так и импульсный элемент.*

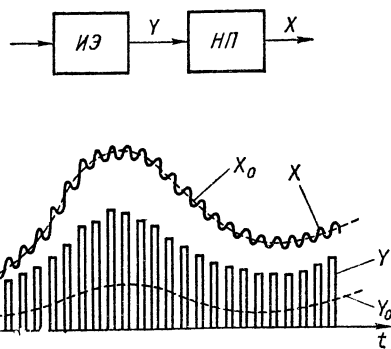


Рис. 12-3. Переходный процесс в импульсной САУ с АИМ при большой частоте импульсов

## § 12-2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### А. Описание линейных систем автоматического управления с АИМ

Математическое описание импульсной САУ (см. рис. 12-1) состоит из описания непрерывной части, методы которого нам уже известны, и описания импульсного элемента. Для описания последнего необходимо знать форму выходных импульсов, статическую характеристику элемента и его время запаздывания, если оно существенно. (На рис. 12-2, иллюстрирующем работу импульсного элемента, время запаздывания для простоты принято равным нулю.)

Статическая характеристика импульсного элемента — это зависимость модулируемого параметра от входного модулирующего сигнала. При описании им-

пульсного элемента его статическая характеристика играет ту же роль, что и статические характеристики звеньев непрерывного действия при описании последних. В линейном приближении, т. е. для ограниченного диапазона изменения входного сигнала, статическая характеристика импульсного элемента может быть заменена прямой линией, и соответственно вместо статической

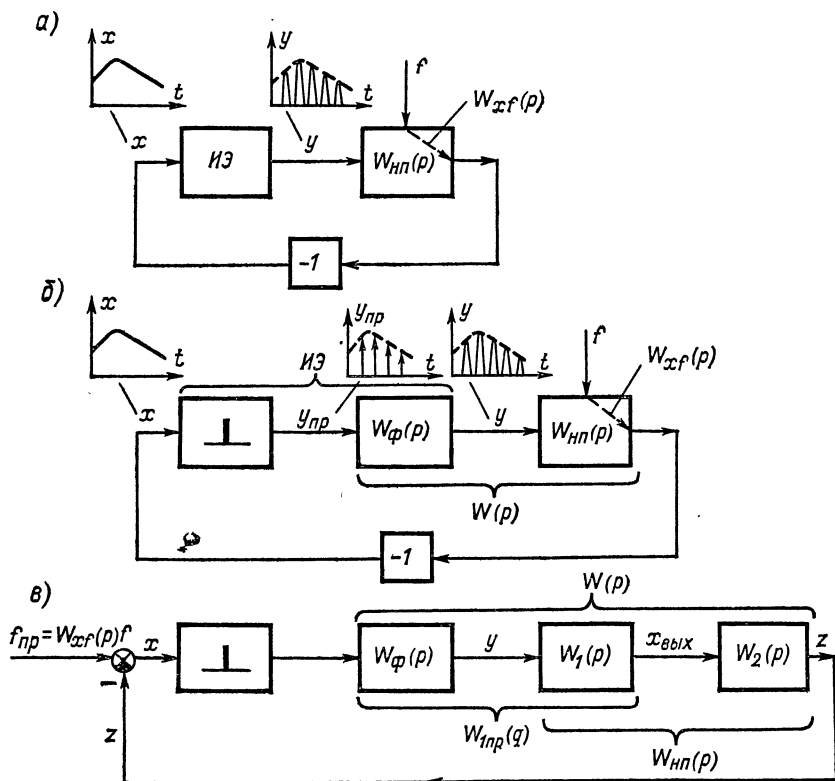


Рис. 12-4. К математическому описанию импульсной САУ с АИМ

характеристики импульсный элемент будет характеризоваться коэффициентом передачи, определяемым наклоном этой характеристики в точке установившегося режима.

Начнем рассмотрение математического описания импульсных систем с линейной системы с АИМ. Такая система состоит из линейной непрерывной части, описываемой передаточной функцией  $W_{\text{ИП}}(p)$ , и линейного импульсного элемента  $\text{ИЭ}$  с АИМ (рис. 12-4, а). Импульсный элемент в этом случае характеризуется формой импульсов, временем запаздывания и коэффициентом передачи

$$k_{\text{И}} = \frac{a}{x}, \quad (12-1)$$

где  $x$  — величина сигнала на входе импульсного элемента в начале очередного периода повторения импульсов  $T_n$ , а  $a$  — высота (амплитуда) выходного импульса в том же периоде.

Для описания такой системы после получения математического описания непрерывной части и импульсного элемента выполняем следующие три преобразования ее структурной схемы: разлагаем реальный импульсный элемент на идеальный и формирующий элементы, переносим внешнее воздействие на вход импульсного элемента и заменяем действующие в системе реальные непрерывные сигналы на фиктивные дискретные сигналы.

Реальный импульсный элемент с выходными импульсами произвольной формы можно представить, как показано на рис. 12-4, б, в виде последовательного соединения идеального импульсного элемента, выдающего на выходе идеальные мгновенные импульсы, и формирующего элемента (формирователя), преобразующего эти импульсы в импульсы, соответствующие выходным импульсам реального импульсного элемента. На рис. 12-4, б дано условное изображение идеального импульсного элемента. Идеальными импульсами будем считать импульсы бесконечно малой ширины и бесконечно большой высоты, площадь которых, однако, конечна и численно равна входному сигналу в начале периода повторения. Иными словами, это  $\delta$ -импульсы (см. § 1-3, п. А), но не единичной, а переменной площади, которая является мерой входного сигнала в дискретные моменты времени. Эти идеальные импульсы условно показаны на рис. 12-4, б стрелками, длина которых соответствует величине площади импульса. В дальнейшем такой сигнал на выходе идеального импульсного элемента будем называть идеальной импульсной функцией.

Идеальный импульсный элемент называют  $\delta$ -импульсным элементом или простейшим импульсным элементом.

Передаточная функция формирующего элемента легко находится как изображение Лапласа от выражения для формы импульса на выходе реального импульсного элемента. Действительно, вспомним, что передаточная функция звена непрерывного действия представляет собой изображение Лапласа его весовой функции, т. е. реакции его на  $\delta$ -импульс (см. § 1-3). Но поскольку на входе формирующего элемента действуют именно  $\delta$ -импульсы, следовательно,

$$W_{\Phi}(s) = L[y_n(t)], \quad (12-2)$$

где  $y_n(t)$  — выражение для импульса единичной высоты на выходе импульсного элемента.

Рассмотрим, например, импульсный элемент с выходными импульсами прямоугольной формы и ширины  $T_n$ . Такой импульс можно представить в виде разности положительной и отрицательной единичных функций, сдвинутых на время  $T_n$ , т. е. здесь

$$y_n(t) = k_n [1(t) - 1(t - T_n)].$$

Отсюда, согласно (12-2),

$$W_{\Phi}(s) = k_n \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-T_n s} \right) = \frac{k_n (1 - e^{-T_n s})}{s}. \quad (12-3)$$

На рис. 12-5 показана соответствующая этой передаточной функции структурная схема формирующего элемента. Как видим, формирующий элемент представляет собой линейное звено непрерывного действия и может быть отнесен к непрерывной части системы.

Если в формуле (12-3) уменьшать длительность импульса  $T_n$ , сохраняя его площадь неизменной, т. е. одновременно пропорционально увеличивая  $k_n$ , то в пределе при  $T_n \rightarrow 0$  получим:

$$W_{\Phi}(p) = k_n T_n, \quad (12-3a)$$

где величина  $k_n T_n$  — площадь импульса на выходе импульсного элемента, соответствующая входному сигналу, равному единице. Таким образом, в

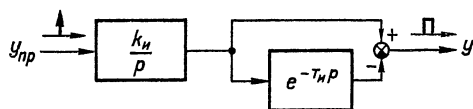


Рис. 12-5. Структурная схема формирующего элемента при прямоугольной форме импульсов

случае достаточно коротких импульсов формирующий элемент может быть представлен в виде идеального звена с коэффициентом передачи, равным отношению площади выходного импульса к величине входного сигнала.

Практически это допустимо, когда длительность импульсов  $T_n$  меньше основных постоянных времени непрерывной части системы. В этом случае реакция системы на такой короткий импульс равна весовой функции и не зависит от ширины и реальной формы импульса, определяясь только его площадью.

При наличии в импульсном элементе запаздывания оно учитывается отдельным последовательным звеном запаздывания и вместе с остальной передаточной функцией формирующего элемента вносится в состав передаточной функции непрерывной части системы.

Перенос внешнего воздействия на вход импульсного элемента осуществляется обычным пересчетом через передаточную функцию, как показано на рис. 12-4, в.

В результате двух указанных выше преобразований схема импульсной САУ с произвольной формой импульсов и внешним воздействием, приложенным в произвольной точке, приводится к типовой схеме, показанной на рис. 12-4, в. Это позволяет при исследовании различных реальных импульсных систем пользоваться единым математическим описанием и соответственно общей методикой.

Для общности на рис. 12-4, в в качестве выходной величины  $x_{\text{вых}}$ , связь которой с внешним воздействием  $f$  в виде передаточной функции или частотной характеристики нам требуется найти

в результате математического описания системы, показана величина в произвольной точке непрерывной части системы.

Третье преобразование схемы заключается в замене действующих в непрерывной части системы непрерывных сигналов на фиктивные дискретные сигналы. В результате получается система, в которой существуют только дискретные переменные. Это существенно упрощает математическое описание импульсной САУ путем применения вместо обычных дифференциальных уравнений разностных уравнений и соответственно вместо обычного преобразования Лапласа дискретного преобразования Лапласа (см. приложение 1, п. Б).

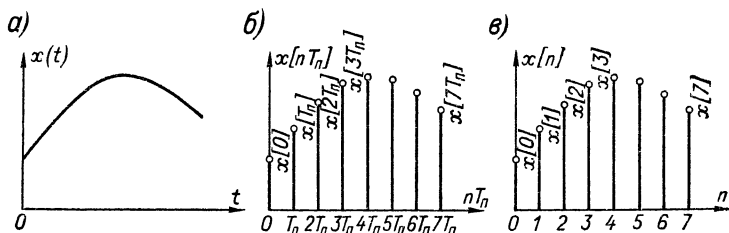


Рис. 12-6. Решетчатая функция

Возможность такой замены основана на том, что выходной сигнал импульсного элемента определяется значениями входного сигнала  $x(t)$  в дискретные моменты времени в начале каждого периода  $T_n$  повторения импульсов. Поэтому в работе импульсного элемента ничего не изменится, если заменить непрерывную функцию  $x(t)$  на его входе дискретной функцией, значения которой в начале каждого периода, т. е. в моменты  $nT_n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , совпадают со значениями непрерывной функции, а в остальное время равны нулю. Такая дискретная функция называется решетчатой функцией и обозначается  $x[nT_n]$  (рис. 12-6, а и б). Непрерывная функция  $x(t)$  является, очевидно, огибающей решетчатой функции  $x[nT_n]$ . При рассмотрении дискретных функций удобно переходить к относительному времени  $\bar{t} = t/T_n$ , т. е. измерять время числом периодов  $T_n$ . В этом случае относительный период повторения импульсов  $\bar{T}_n = 1$ , а решетчатая функция обозначается в виде  $x[n]$ , где  $n = 1, 2, \dots$  (рис. 12-6, в). Это запись ее в нормированной форме.

Переход в структурной схеме, изображенной на рис. 12-4, в, от непрерывных функций времени к решетчатым функциям выполняется в следующем порядке.

Прежде всего осуществляется переход от операторной записи к изображениям Лапласа непрерывных функций и затем к относительному времени  $\bar{t} = t/T_n$ . Переход к изображениям Лапласа сводится к нахождению по оригиналу приведенного внешнего воздействия его изображения и к замене в передаточных функциях оператора дифференцирования  $p$  на комплексную переменную  $s$ .



Переход далее к относительному времени заключается для изображения Лапласа внешнего воздействия в замене  $s$  на  $q/T_{\Pi}$ , где  $q = T_{\Pi} s$  — комплексная переменная в относительном времени, и делении этого изображения на  $T_{\Pi}$ , т. е. в замене  $F_{\Pi p}(s)$  на

$$\frac{1}{T_{\Pi}} F_{\Pi p}(s) \big|_{s=q/T_{\Pi}}.$$

Это непосредственно следует из формулы прямого преобразования Лапласа (см. приложение 1, табл. П-1, п. 4).

Соответственно переход к относительному времени для передаточных функций, поскольку они являются отношением изображений выходной и входной величин, сводится к замене  $s$  на  $q/T_{\Pi}$ , т. е. к замене  $W(s)$  на  $W(q) \big|_{s=q/T_{\Pi}}$ .

Исключение составляет выражение для передаточной функции формирующего элемента в случае определения его через изображение функции времени по формуле (12-2). Осуществив в последнем изображении переход к относительному времени по вышеприведенному правилу, получаем:

$$W_{\Phi}(q) = \frac{1}{T_{\Pi}} L[y_n(t)] \big|_{s=q/T_{\Pi}}, \quad (12-2a)$$

т. е. искомое выражение

$$W_{\Phi}(q) = \frac{1}{T_{\Pi}} W_{\Phi}(s) \big|_{s=q/T_{\Pi}},$$

где  $W_{\Phi}(s)$  определяется по формуле (12-2).

В результате перехода к изображениям Лапласа и относительному времени приведенная на рис. 12-4, в схема принимает вид, показанный на рис. 12-7, а. Здесь

$$W_{1\text{пр}}(q) = \frac{1}{T_{\Pi}} W_{\Phi}(p) W_1(p) \big|_{p=q/T_{\Pi}};$$

$$W_2(q) = W_2(p) \big|_{p=q/T_{\Pi}};$$

$$W(q) = W_{1\text{пр}}(q) W_2(q) = \frac{1}{T_{\Pi}} W_{\Phi}(p) W_1(p) W_2(p) \big|_{p=q/T_{\Pi}}.$$

Переход далее к решетчатым функциям дает окончательную схему, представленную на рис. 12-7, б. Здесь  $F_{\Pi p}^*(z)$ ,  $X_{\text{вых}}^*(z)$ ,  $X^*(z)$ ,  $Z^*(z)$  — дискретные изображения Лапласа решетчатых функций, огибающими которых являются исходные непрерывные функции  $f_{\Pi p}(t)$ ,  $x_{\text{вых}}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $z(t)$ , показанные на рис. 12-4, в;  $W^*(z) = Z^*(z)/X^*(z)$  и  $W_{1\text{пр}}^*(z) = X_{\text{вых}}^*(z)/X^*(z)$  — дискретные передаточные функции, соответствующие передаточным функциям  $W(p)$  и  $W_{1\text{пр}}(p)$  (см. приложение 1, п. Б).

Переход от  $F_{\Pi p}(q)$  к  $F_{\Pi p}^*(z)$  — это определение дискретного изображения  $F_{\Pi p}^*(z)$  решетчатой функции  $f_{\Pi p}[n]$ , соответствующей

непрерывной функции  $f_{\text{пр}}(\bar{t})$ , обычным изображением Лапласа которой является  $F_{\text{пр}}(q)$ . Эта операция в общем виде состоит из двух этапов. Сперва по изображению  $F_{\text{пр}}(q)$  определяют оригинал  $f_{\text{пр}}(\bar{t})$ , а затем после замены этой непрерывной функции времени на соответствующую ей решетчатую функцию  $f_{\text{пр}}[n]$  находят искомое дискретное изображение  $F_{\text{пр}}^*(z)$  последней. При этом пользуются таблицами непрерывного и дискретного преобразований Лапласа. Поскольку обычно  $F_{\text{пр}}(q)$  представляет собой рациональную дробь, не содержащуюся в таблице изображений Лапласа, ее предварительно разлагают на простые дроби (см. приложение 1). Соответственно дискретное изображение  $F_{\text{пр}}^*(z)$  тоже получается в виде суммы простых дробей.

В частности, например, если рациональная дробь  $F_{\text{пр}}(q) = \frac{G(q)}{H(q)}$  не имеет кратных полюсов, она может быть представлена в виде (П-14):

$$F_{\text{пр}}(q) = \sum_i \frac{C_i}{q - q_i}, \quad (12-4)$$

где  $q_i$  — нули многочлена  $H(q)$ , а

$$C_i = \frac{G(q_i)}{H'(q_i)}.$$

Оригинал

$$f_{\text{пр}}(\bar{t}) = L^{-1}[F_{\text{пр}}(q)] = \sum_i C_i e^{q_i \bar{t}}.$$

Соответствующая решетчатая функция

$$f_{\text{пр}}[n] = \sum_i C_i e^{q_i n}.$$

Совершая прямое дискретное преобразование Лапласа и пользуясь приведенной в приложении 1, п. Б таблицей дискретных изображений Лапласа, находим:

$$F_{\text{пр}}^*(z) = Z \left\{ \sum_i C_i e^{q_i n} \right\} = \sum_i Z \{ C_i e^{q_i n} \} = \sum_i \frac{C_i z}{z - e^{q_i}}. \quad (12-5)$$

Выражение (12-5) представляет собой общую формулу для нахождения  $F_{\text{пр}}^*(z)$  непосредственно по  $F_{\text{пр}}(q)$  в виде рациональной дроби при отсутствии у последней кратных полюсов. Аналогичная формула существует и при наличии кратных полюсов [40].

Дискретные передаточные функции  $W_{\text{пр}}^*(z)$  и  $W^*(z)$  находятся по соответствующим непрерывным передаточным функциям  $W_{\text{пр}}(q)$  и  $W(q)$  аналогичным образом путем предварительного разложения их на простые дроби. Передаточная функция  $W^*(z)$  называется дискретной передаточной функцией разомкнутой системы. Как показано на рис. 12-7, б, она связывает дискретное изображение  $Z^*(z)$  на выходе разомкнутой системы с дискретным изображением  $X^*(z)$  на выходе

импульсного элемента. Соответственно дискретная передаточная функция  $W_{\text{пр}}^*(z)$  связывает изображение  $X_{\text{вых}}^*(z)$  с  $X^*(z)$ .

Для пояснения понятия дискретной передаточной функции выразим дискретную передаточную функцию разомкнутой системы через весовую функцию приведенной непрерывной части системы.

Сигнал в виде последовательности идеальных импульсов, поступающий на вход приведенной непрерывной части системы с выхода идеального импульсного элемента, можно представить в следующем виде:

$$x(\bar{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\bar{t} - n),$$

где  $\delta(\bar{t} - n) = 0$  при  $\bar{t} \neq n$ .

Реакция на выходе приведенной непрерывной части на один такой импульс, поступающий в момент времени  $\bar{t} = m$ , равна

$$w(\bar{t} - m) k_d x[m],$$

где  $x[m]$  — значение  $x(\bar{t})$  при  $\bar{t} = m$ , а  $w(\bar{t} - m)$  — весовая функция приведенной непрерывной части системы, равная нулю при  $\bar{t} \leq m$ .

На основании принципа суперпозиции реакция приведенной разомкнутой системы на последовательность импульсов с выхода идеального импульсного элемента равна сумме реакций на каждый импульс, т. е.

$$z(t) = \sum_{m=0}^n w(\bar{t} - m) x[m].$$

Перейдем к решетчатым функциям:

$$z[n] = \sum_{m=0}^n w[n - m] x[m].$$

Подвергнув это уравнение  $z$ -преобразованию, получим:

$$Z\{z[n]\} = Z\{w[n]\} Z\{x[n]\}.$$

Здесь применена теорема свертки, аналогичная одноименной теореме для непрерывного преобразования Лапласа (см. приложение 1, табл. П-1, п. 7). Окончательный вид этого равенства:

$$Z^*(z) = W^*(z) X^*(z),$$

где 
$$W^*(z) = Z\{w[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} w[n] z^{-n}. \quad (12-6)$$

Последнее выражение можно рассматривать как одно из определений дискретной передаточной функции, аналогичное подобному определению передаточной функции через весовую функцию в непрерывных системах: дискретная передаточная функция разомкнутой системы, состоящей из идеального импульсного эле-

мента и непрерывной части с весовой функцией  $w(t)$ , равна  $z$ -преобразованию решетчатой весовой функции  $w[n]$ , соответствующей исходной весовой функции  $w(t)$  непрерывной части системы.

Из (12-6) непосредственно следует указанный выше общий порядок нахождения выражения для дискретной передаточной функции через передаточную функцию приведенной непрерывной части: по  $W(q)$  находят оригинал  $w(t)$ , затем осуществляют переход к решетчатой функции  $w[n]$  и далее находят  $W^*(z)$  как  $z$ -преобразование этой решетчатой функции.

Рассмотрим, например, импульсную систему, состоящую из непрерывной части с передаточной функцией  $W_{\text{нп}}(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$  и импульсного элемента, генерирующего достаточно короткие по сравнению с постоянной времени  $T$  непрерывной части системы импульсы. В этом случае передаточную функцию формирователя, согласно (12-3а), можно представить в виде  $W_{\text{ф}}(p) = k_{\text{н}}T_{\text{н}}$ . Следовательно, передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W(p) = \frac{kk_{\text{н}}T_{\text{н}}}{p(Tp+1)}.$$

Переходя к изображению Лапласа и относительному времени, получаем выражение

$$W(q) = \frac{1}{T_{\text{н}}} W(p) \Big|_{p=q/T_{\text{н}}} = \frac{kk_{\text{н}}T_{\text{н}}}{T_{\text{н}}p(Tp+1)} \Big|_{p=q/T_{\text{н}}} = \frac{kk_{\text{н}}T_{\text{н}}}{q(Tq+1)},$$

где  $\bar{T} = T/T_{\text{н}}$ .

Выражение для дискретной передаточной функции найдем сразу, минуя промежуточные этапы, по окончательной формуле (12-5). В данном случае знаменатель  $W(q)$  имеет два нуля:  $q_1 = 0$  и  $q_2 = -1/\bar{T}$ , поэтому

$$W^*(z) = \frac{C_1 z}{z - e^{q_1}} + \frac{C_2 z}{z - e^{q_2}},$$

где

$$C_i = \frac{kk_{\text{н}}T_{\text{н}}}{2Tq+1} \Big|_{q=q_i},$$

т. е.  $C_1 = -C_2 = k k_{\text{н}}T_{\text{н}}$ .

Следовательно,

$$W^*(z) = kk_{\text{н}}T_{\text{н}} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1/\bar{T}}} \right).$$

Изображенная на рис. 12-7, б структурная схема является окончательным математическим описанием импульсной САУ. По этой схеме может быть получена искомая передаточная функция замкнутой системы, связывающая выходную величину системы с входным воздействием:

$$X_{\text{вых}}^*(z) = W_{\text{з}}^*(z) F_{\text{пр}}^*(z). \quad (12-7)$$

Здесь дискретная передаточная функция замкнутой системы

$$W_s^*(z) = \frac{W_{\text{ин}}^*(z)}{1 + W^*(z)}. \quad (12-8)$$

Выражение (12-8) аналогично выражению (1-98) для передаточной функции замкнутой системы непрерывного действия.

Выше при математическом описании импульсной системы мы предварительно сводили ее к системе с идеальным импульсным элементом путем разложения реального импульсного элемента на идеальный импульсный элемент и формирующий элемент. В качестве идеального импульсного элемента был принят импульсный элемент с мгновенными импульсами типа  $\delta$ -импульсов, площадь которых является мерой сигнала на входе импульсного элемента.

Иногда более просто применить идеальный импульсный элемент с прямоугольными импульсами конечной ширины. Это особенно удобно, когда выходные импульсы реального импульсного элемента с достаточной точностью могут быть заменены идеально прямоугольными. В этом случае не потребуется усложнять непрерывную часть системы введением формирующего элемента, преобразующего идеальные импульсы в реальные.

Выведем выражение для дискретной передаточной функции импульсной системы с импульсным элементом, выходные импульсы которого имеют прямоугольную форму, ширину  $T_n$  и высоту, согласно (12-4), равную  $k_n x$ , без перехода к мгновенным импульсам.

Такой прямоугольный импульс единичной высоты можно представить в виде разности двух сдвинутых ступенчатых функций:

$$1(\bar{t}) - 1(\bar{t} - \gamma),$$

где  $\gamma = T_n/T_n$  — относительная ширина импульса.

Соответственно реакция непрерывной части системы на такой импульс, поступающий в момент  $\bar{t} = m$ ,

$$w_n(\bar{t} - m) = h(\bar{t} - m) - h(\bar{t} - m - \gamma), \quad (12-9)$$

где через  $h$  обозначена переходная функция приведенной непрерывной части системы, т. е. ее реакция на единичное ступенчатое воздействие. (Здесь, как всегда, положено, что функции  $w_n$  и  $h$  не существуют при  $\bar{t} < 0$ .)

Действуя далее, как при выводе выражения (12-6), получаем:

$$x_{\text{вых}}(\bar{t}) = \sum_{m=0}^n w_n(\bar{t} - m) k_n x[m]. \quad (12-10)$$

Следовательно,

$$x_{\text{вых}}[n] = k_n \sum_{m=0}^n w_n[n - m] x[m]. \quad (12-11)$$

Применив  $z$ -преобразование, получим:

$$Z \{x_{\text{вых}} [n]\} = Z \{k_{\text{и}} w_{\text{и}} [n]\} Z \{x [n]\},$$

т. е.

$$X_{\text{вых}}^* (z) = W^* (z) X^* (z),$$

где

$$W^* (z) = Z \{k_{\text{и}} w_{\text{и}} [n]\} = k_{\text{и}} \sum_{n=0}^{\infty} w_{\text{и}} [n] z^{-n} \quad (12-12)$$

— искомое выражение для дискретной передаточной функции разомкнутой импульсной системы.

Передаточная функция замкнутой системы находится дальше обычным образом исходя из структурной схемы системы.

Итак, мы показали, что импульсная система с линейной непрерывной частью и импульсным элементом с АИМ, имеющим линейную статическую характеристику, описывается линейными уравнениями, т. е. является линейной системой, и вывели соответствующее выражение для ее дискретной передаточной функции.

## Б. Частотные характеристики линейных систем автоматического управления с АИМ

Как и системы непрерывного действия, импульсные САУ могут описываться не только передаточными функциями, но и с помощью частотных характеристик. Последние могут быть получены по передаточным функциям или экспериментально.

Выражение для амплитудно-фазовой частотной характеристики получается подстановкой в передаточную функцию  $q = j\bar{\omega}$ , т. е.  $z = e^{j\bar{\omega}}$ , где  $\bar{\omega} = T_{\text{и}}\omega$  — относительная частота. Соответственно  $W^* (j\bar{\omega})$  — это амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой, а  $W_{\text{з}}^* (j\bar{\omega})$  — такая же характеристика замкнутой импульсной САУ. Модуль этих комплексных величин представляет собой амплитудные, а аргумент — фазовые частотные характеристики (см. § 1-3).

Особенностью частотных характеристик импульсных систем является то, что они представляют собой периодические функции частоты. Это иллюстрируется рис. 12-8, где показаны амплитудные частотные характеристики непрерывной системы (рис. 12-8, а) и импульсной системы с той же непрерывной частью и идеальным импульсным элементом для двух значений частоты повторения импульсов  $\bar{\omega}_{\text{п}}$  (рис. 12-8, б и в). Здесь  $\bar{\omega}_{\text{п}}$  — полоса пропускания непрерывной части системы. Частотные характеристики импульсной системы представляют собой бесконечно повторяющуюся с частотой  $\bar{\omega}_{\text{п}}$  частотную характеристику непрерывной части системы.

Формально периодичность частотной характеристики импульсной системы объясняется тем, что в дискретную передаточную функцию комплексная переменная  $q$  входит в виде функции  $z = e^q$ , которая после подстановки  $q = j\bar{\omega}$  принимает вид  $e^{j\bar{\omega}}$ , т. е. становится периодической функцией  $\bar{\omega}$ .

Физически периодичность частотной характеристики импульсной системы объясняется следующим образом. Выходной сигнал импульсного элемента и соответственно воздействие на непрерывную часть системы определяются значением входного сигнала только в дискретные моменты времени через промежуток  $T_n$ . Поэтому при гармоническом воздействии на импульсный элемент выходной сигнал системы не изменится при изменении частоты гармонического сигнала  $\bar{\omega}$  на любую величину, кратную  $\bar{\omega}_n$ , т. е. выходной сигнал будет одним и тем же при всех частотах, равных  $\bar{\omega} + k\bar{\omega}_n$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В частности, при  $\bar{\omega} = k\bar{\omega}_n$ ,

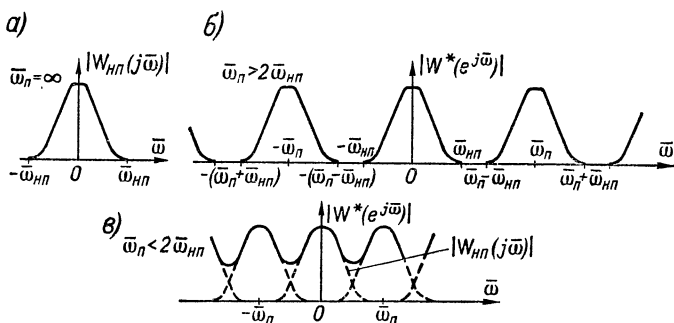


Рис. 12-8. Амплитудная частотная характеристика разомкнутой непрерывной (а) и импульсной (б и в) систем

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , выходной сигнал будет равен реакции на постоянное входное воздействие. В результате при снятии частотной характеристики путем неограниченного увеличения частоты сигнала на входе импульсного элемента должна получиться периодическая характеристика, показанная на рис. 12-8, б или в.

Явление периодичности частотной характеристики импульсных систем можно трактовать и с точки зрения процесса импульсной модуляции, происходящего в импульсном элементе [17]. При модуляции входным непрерывным сигналом последовательности импульсов образуются боковые спектры частот. Число этих спектров бесконечно, поскольку бесконечно узкий импульс содержит бесконечное число гармоник.

Периодичность частотных характеристик импульсных систем, а также их симметричность относительно нулевой частоты, т. е. относительно оси ординат на рис. 12-8, означает, что для их полного описания достаточно иметь частотные характеристики в диапазоне относительных частот  $\bar{\omega}$  от  $0$  до  $+\pi$ , что соответствует абсолютным значениям частоты  $0-0,5 \omega_n$ .

В § 12-1 было сказано, что при достаточно большой частоте  $\omega_{\text{п}}$  повторения импульсов импульсная САУ будет эквивалентна системе непрерывного действия. Из рассмотрения частотных характеристик импульсной системы (рис. 12-8, б и в) можно количественно определить условие такой эквивалентности. Оно сводится к двум следующим неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\text{п}} &\geq 2\omega_{\text{нп}}; \\ \omega_f &\leq \omega_{\text{п}} - \omega_{\text{нп}}, \end{aligned} \right\} \quad (12-13)$$

где  $\omega_f$  — спектр (наибольшая частота) внешнего воздействия, приведенного ко входу импульсного элемента.

При выполнении первого неравенства частотные характеристики непрерывной и импульсной систем в пределах полосы пропускания непрерывной части совпадают. Поскольку боковые частоты, существующие на выходе импульсного элемента, не пройдут на выход непрерывной части системы, играющей роль фильтра нижних частот, импульсная система будет реагировать на низкочастотные внешние воздействия подобно непрерывной системе.

Характеристика на рис. 12-8, б соответствует выполнению первого условия (12-13), а характеристика на рис. 12-8, в не удовлетворяет ему. В результате частотная характеристика импульсной системы в пределах полосы пропускания непрерывной части системы оказывается искаженной (из-за влияния боковых частот) и отличается от частотной характеристики непрерывной части. Поэтому при невыполнении этого условия импульсная САУ будет отличаться по своим свойствам от САУ непрерывного действия с той же непрерывной частью, и при ее исследовании необходимо учитывать импульсный характер работы системы (в частности, описывать ее дискретной передаточной функцией).

Второе неравенство (12-13) ограничивает частоту  $\omega_f$  приведенного внешнего воздействия таким образом, чтобы частотный спектр этого воздействия, равный после прохождения через импульсный элемент  $k\omega_{\text{п}} \pm \omega_f$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , был в пределах полосы пропускания  $\omega_{\text{нп}}$  непрерывной части системы таким же, как и при отсутствии импульсного элемента, т. е. не давал боковых частот. При невыполнении второго условия (12-13) на выходе импульсной системы появятся низкочастотные составляющие процесса, которые отсутствуют в непрерывной системе и возникают при прохождении внешнего воздействия через импульсный элемент.

При выполнении условий (12-13) наличием квантования по времени в системе можно пренебречь и рассматривать систему как САУ непрерывного действия. Условия (12-13) представляют собой известную теорему Котельникова — Шеннона об условии неискаженной передачи непрерывного сигнала конечным числом его дискретных значений применительно к САУ с АИМ.

Частотные характеристики импульсной системы можно получить не только по дискретной передаточной функции, но и чисто



графическим построением по частотной характеристике непрерывной части системы. Методика построения основана на рассмотренной выше связи дискретной передаточной функции с непрерывной передаточной функцией [5, 40].

## В. Описание линейных систем автоматического управления с ШИМ

Как уже было упомянуто, импульсные элементы с ШИМ и ВИМ являются нелинейными. Однако в случае достаточно малой ширины импульсов для ШИМ или малого фазового сдвига для ВИМ (по сравнению с периодом  $T_n$  повторения импульсов) эти оба импульсных элемента могут быть линеаризованы и сведены к эквивалентному импульсному элементу с АИМ.

Покажем это для импульсного элемента с ШИМ. Для этого представим импульсный элемент в виде идеального импульсного элемента с прямоугольной формой выходных импульсов. Уравнение такого элемента имеет вид:

$$\gamma = k'_n |x[n]|, \quad (12-14)$$

где  $\gamma = T_n/T_n$  — относительная ширина импульса;  $k'_n$  — коэффициент передачи импульсного элемента с ШИМ.

Реакция приведенной непрерывной части системы на один импульс единичной высоты в соответствии с (12-9) равна

$$w_n(\bar{t}-m) = h(\bar{t}-m) - h(\bar{t}-m-\gamma_m), \quad (12-15)$$

где  $\gamma_m$ , согласно (12-14), равна  $k'_n x[m]$  и является здесь в отличие от выражения (12-9) величиной переменной.

Соответственно после перехода к решетчатым функциям реакция на выходе непрерывной части на сигнал на входе импульсного элемента

$$x_{\text{вых}}[n] = a \sum_{m=0}^n w_n[n-m] \text{sign } x[m], \quad (12-16)$$

где  $a$  — высота импульсов на выходе импульсного элемента.

Уравнение (12-16), которое выражает с учетом (12-15) и (12-14)  $x_{\text{вых}}[n]$  через  $x[n]$ , является нелинейным, так как  $w_n[n-m]$  представляет собой функцию  $x[m]$ . Соответственно нелинейной оказывается и система с ШИМ.

Для малых значений  $\gamma$  выражение (12-16) можно линеаризовать, разлагая функцию  $w_n(\bar{t})$ , являющуюся нелинейной функцией  $\gamma$ , в ряд Тейлора (см. § 1-2). Действительно, при  $\gamma \ll 1$  после разложения функции  $h(\bar{t}-m-\gamma_m)$  в ряд Тейлора с удержанием лишь первой степени  $\gamma$  получаем:

$$\begin{aligned} w_n(\bar{t}-m) &= h(\bar{t}-m) - h(\bar{t}-m-\gamma_m) \approx \gamma_m h'(\bar{t}-m) = \\ &= \gamma_m w(\bar{t}-m) = k'_n |x[m]| w(\bar{t}-m), \end{aligned} \quad (12-17)$$

где  $w(\bar{t}) = h'(\bar{t})$  — весовая функция непрерывной части системы, т. е. ее реакция на  $\delta$ -импульс. При этом, согласно (12-16),

$$x_{\text{вых}}[n] = ak'_n \sum_{m=0}^n w[n-m] x[m]. \quad (12-18)$$

Уравнение (12-18) является линейным, поскольку  $w[n-m]$  не зависит от  $x[m]$ . Применяв к нему дискретное преобразование Лапласа, можно получить выражение для дискретной передаточной функции импульсной системы с ШИМ аналогично тому, как это делалось выше для систем с АИМ. Величина  $ak'_n$  в (12-18) — это площадь импульса на выходе импульсного элемента при единичном входном сигнале, т. е. при  $x[m] = 1$ . Следовательно, согласно (12-18), импульсный элемент с ШИМ при  $\gamma \ll 1$  может быть сведен, как и в случае с АИМ, к идеальному импульсному элементу с мгновенными импульсами, площадь которых пропорциональна модулирующему сигналу  $x$ . Это значит, что при  $\gamma \ll 1$  системы с ШИМ и АИМ эквивалентны при одинаковой зависимости площади импульсов от модулирующего сигнала  $x$ . Формально из сравнения (12-18) с выражением (12-11) для  $x_{\text{вых}}[n]$  при АИМ следует, что при  $\gamma \ll 1$  система с ШИМ эквивалентна системе с АИМ с  $w_n[n] = \frac{ak'_n}{k_n} w[n]$ .

Физически такая эквивалентность систем с АИМ и ШИМ при малой ширине импульсов  $\gamma$  связана с тем, что, как уже было показано в § 12-2, п. А, при конечной инерционности непрерывной части системы реакция ее на достаточно короткие импульсы единичной площади практически не отличается от весовой функции этой части системы. Соответственно изменение площади импульса вследствие изменения его высоты (при АИМ) или ширины (при ШИМ) одинаково сказывается на выходном сигнале непрерывной части системы, приводя к изменению его ординат пропорционально изменению площади входного сигнала.

## Г. Особенности описания нелинейных импульсных систем автоматического управления

Импульсная САУ может быть нелинейной вследствие нелинейности импульсного элемента или непрерывной части системы. Нелинейность импульсного элемента может быть связана с нелинейностью его уравнения динамики или статической характеристики. В частности, последнее имеет место в случае ШИМ и ВИМ при неограниченном изменении соответственно ширины импульсов или их фазового сдвига.

Особенность математического описания нелинейной импульсной САУ сводится к появлению в ее схеме нелинейных звеньев. Сам аппарат описания остается прежним — это разностные уравнения с использованием для линейных частей системы дискретного преобразования Лапласа.

## Д. Сведение импульсной системы автоматического управления к системе непрерывного действия

Как было показано выше, в случае выполнения условий (12-13) импульсная система с АИМ может быть сведена к эквивалентной системе непрерывного действия. Передаточная функция такой эквивалентной разомкнутой САУ непрерывного действия равна  $k_n W_{\text{нп}}(p)$ , где  $W_{\text{нп}}(p)$  — передаточная функция приведенной непрерывной части системы.

Для импульсной системы с ШИМ или ВИМ условия ее эквивалентности системе непрерывного действия принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\text{п}} &\geq 3\omega_{\text{нп}}; \\ \omega_f &\leq \omega_{\text{п}} - 2\omega_{\text{нп}}. \end{aligned} \right\} \quad (12-19)$$

Возможность такой эквивалентности ранее уже рассматривалась нами применительно к релейным САУ с вибрационной линеаризацией, где имеет место ШИМ [см. условие (11-4)]. Отличие условий (12-19) от условий (12-13) для АИМ связано с тем, что при ШИМ и ВИМ, помимо боковых частот  $k\omega_{\text{п}} \pm \omega_{\text{нп}}$ , как при АИМ, имеются еще и частоты  $k\omega_{\text{п}} \pm 2\omega_{\text{нп}}$  [17]. Правда, величина последних составляющих довольно мала и уменьшается при уменьшении ширины (при ШИМ) и фазового сдвига (при ВИМ) импульсов.

### § 12-3. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При выполнении условий (12-13) или (12-19) импульсная система сводится к непрерывной и соответственно может исследоваться как САУ непрерывного действия методами, изложенными в первой и второй частях книги.

Если эти условия не выполняются, импульсная САУ должна исследоваться с учетом квантования по времени, т. е. на основе ее описания с помощью дискретной передаточной функции или соответствующих частотных характеристик, рассмотренных в предыдущем параграфе. Это придает определенную специфику исследованию, хотя сами методы исследования точности, устойчивости и качества переходных процессов остаются прежними.

Исследование устойчивости линейных импульсных САУ осуществляется с помощью известных критериев устойчивости линейных систем — критериев Рауса — Гурвица, Найквиста, Михайлова, модифицированных с учетом особенностей описания импульсных систем.

Как и у непрерывных систем, в импульсной системе переходная составляющая процесса управления определяется знаменателем передаточной функции  $W_z^*(z)$  (12-8) замкнутой системы  $1 + W^*(z)$ , т. е.  $1 + W^*(e^q)$ . Соответственно, как и у САУ непрерывного действия, общим условием устойчивости импульсной системы является нахождение всех полюсов передаточной функции

замкнутой системы, т. е. нулей  $1 + W^*(e^q)$ , в левой полуплоскости комплексной переменной  $q$  (рис. 12-9, а).

Дискретная передаточная функция  $W_3^*(e^q)$  является функцией  $e^q$ , которая представляет собой периодическую функцию мнимой части  $q$  с периодом  $2\pi$ , т. е.

$$e^q = e^{\tilde{\alpha} \pm j\tilde{\omega}} = e^{\tilde{\alpha} \pm j(2k\pi + \tilde{\omega})}$$

(см. § 12-2, п. Б о частотных характеристиках импульсных систем). Следовательно, передаточная функция  $W_3^*(e^q)$  является тоже периодической функцией вдоль мнимой оси, и поэтому при изучении полюсов этой передаточной функции на комплексной плоскости  $q$  достаточно рассмотреть их в полосе  $\pm \pi$  вдоль действительной оси (рис. 12-9, а).

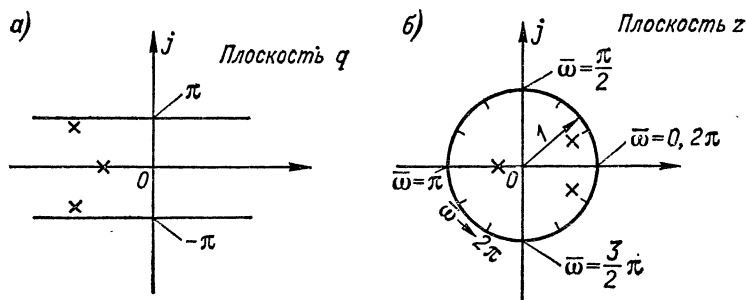


Рис. 12-9. Расположение полюсов передаточной функции устойчивой импульсной системы в комплексных плоскостях  $q$  и  $z$

Если перейти от  $q$  к  $z = e^q$ , то нахождению нулей  $q$  многочлена  $1 + W^*(e^q)$  левее мнимой оси плоскости  $q$  соответствует на плоскости  $z$  нахождение нулей  $z$  многочлена  $1 + W^*(z)$  внутри окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 12-9, б). Иными словами, эта окружность является границей устойчивости системы на плоскости  $z$ . Действительно, при  $q = j\tilde{\omega}$  (мнимая ось на плоскости  $q$ ) модуль  $|z| = |e^{j\tilde{\omega}}| = 1$ .

Чтобы применить критерий устойчивости Рауса — Гурвица к импульсной системе, произведем замену переменной, введя новую переменную  $w$  подстановкой

$$z = \frac{w+1}{w-1}. \quad (12-20)$$

Области устойчивости в виде круга радиусом  $1$  на плоскости  $z$  (или в виде полосы шириной  $\pm \pi$  левее мнимой оси на плоскости  $q$ ) соответствует вся левая полуплоскость комплексной плоскости новой переменной  $w$ . Границей устойчивости при этом является вся мнимая ось: изменению  $\bar{\omega}$  на  $2\pi$  соответствует изменение  $w$  от  $-j\infty$  до  $+j\infty$ . Таким образом, в результате такой подстановки получается уравнение, условия устойчивости для

которого совпадают с условиями устойчивости непрерывных систем. Поэтому к нему непосредственно могут быть применены все известные для непрерывных систем критерии устойчивости. Для применения критерия Рауса — Гурвица надо использовать знаменатель  $D^*(z)$  передаточной функции системы.

У системы первого порядка

$$D^*(z) = a_0 z + a_1.$$

После подстановки сюда выражения (12-20) получаем:

$$D^*(w) = a_0 \frac{w+1}{w-1} + a_1 = \frac{(a_0 + a_1)w + a_0 - a_1}{w-1}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$(a_0 + a_1)\lambda + a_0 - a_1 = 0,$$

и, следовательно, условия устойчивости Рауса — Гурвица, заключающиеся, как известно, в данном случае в положительности коэффициентов характеристического уравнения, сведутся к неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 &> 0; \\ a_0 - a_1 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (12-21)$$

Для системы второго порядка

$$D^*(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2.$$

Соответственно

$$D^*(w) = a_0 \left( \frac{w+1}{w-1} \right)^2 + a_1 \left( \frac{w+1}{w-1} \right) + a_2$$

и характеристическое уравнение будет

$$(a_0 + a_1 + a_2)w^2 + 2(a_0 - a_2)w + (a_0 - a_1 + a_2) = 0.$$

Отсюда получаются следующие условия устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0; \\ a_0 - a_2 &> 0; \\ a_0 - a_1 + a_2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (12-22)$$

Аналогично можно получить условия устойчивости для систем более высоких порядков, однако они оказываются значительно более сложными, чем для систем непрерывного действия.

Критерий Найквиста для импульсных систем сохраняет прежнюю формулировку: условием устойчивости замкнутой системы, которая в разомкнутом состоянии устойчива, является неохват амплитудно-фазовой частотной характеристикой разомкнутой системы  $W^*(j\omega)$  точки  $(-1, j0)$ . Для иллюстрации на рис. 12-10 приведены такие характеристики импульсной системы: кривая 1 соответствует устойчивой системе, кривая 2 — неустойчивой, а кривая 3 — системе, находящейся на границе устойчивости.

Разница по сравнению с САУ непрерывного действия заключается лишь в особенностях самих амплитудно-фазовых характеристик импульсных систем, которые, как показано выше, строятся в диапазоне относительных частот  $\bar{\omega}$  от 0 до  $\pi$ . Поэтому данные характеристики не стягиваются в начало координат, а кончаются на действительной оси, как изображено на рис. 12-10. (Ср. с амплитудной характеристикой на рис. 12-8, в.)

Критерий устойчивости Михайлова для импульсных систем требует, чтобы годограф  $D^*(e^{j\bar{\omega}})$ , определяющийся знаменателем  $W_s^*(e^{j\bar{\omega}})$ , начинаясь на положительной действительной полуоси

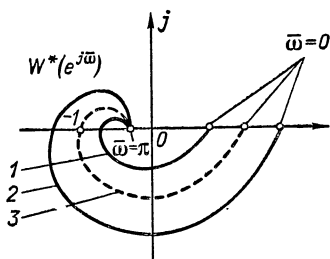


Рис. 12-10. Критерий устойчивости Найквиста для импульсной системы

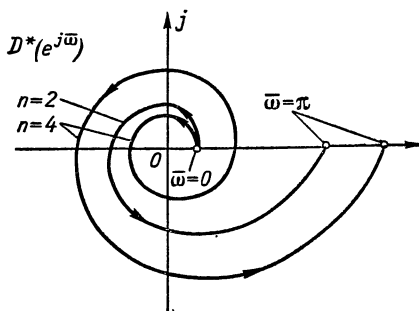


Рис. 12-11. Критерий устойчивости Михайлова для импульсной системы

комплексной плоскости  $q$ , охватывал начало координат, последовательно проходя  $2n$  квадрантов, где  $n$  — порядок системы. Сказанное иллюстрируется рис. 12-11. (В отличие от непрерывных систем здесь годограф не уходит в бесконечность, а заканчивается на действительной оси, проходя при этом вдвое большее число квадрантов.)

Исследование точности и качества переходных процессов импульсных систем осуществляется с помощью тех же методов и критериев, что и для непрерывных САУ. Соответственно методы синтеза импульсных систем тоже заимствованы из теории САУ непрерывного действия. В частности, и здесь широко применяется синтез на базе логарифмических частотных характеристик. При этом для возможности применения методики синтеза непрерывных САУ удобно использовать подстановку (12-20) [37].

Построение переходных процессов в импульсных САУ осуществляется путем решения уравнения (12-7)

$$X_{\text{вых}}^*(z) = W_s^*(z) F_{\text{пр}}^*(z)$$

описанным выше образом с использованием таблиц дискретного преобразования Лапласа или графически с помощью методов, рассмотренных в § 6-2, и в том числе по частотной характеристике

системы (метод трапецеидальных характеристик). Здесь есть только одна особенность по сравнению с САУ непрерывного действия — в результате построения находится не действительная непрерывная выходная величина  $x_{\text{вых}}(t)$ , а решетчатая функция  $x_{\text{вых}}[n]$ , т. е. значения выходной величины в дискретные моменты времени через период  $T_{\text{ц}}$  (см. рис. 12-6). Это цена упрощения математического описания импульсной системы путем перехода от непрерывных функций времени к решетчатым функциям.

В тех случаях, когда требуется знание значений выходной величины в промежуточные моменты времени, т. е. внутри интервала  $T_{\text{ц}}$ , может быть применено модифицированное дискретное преобразование Лапласа. Оно оперирует решетчатыми функциями, сдвинутыми относительно моментов  $t = nT_{\text{ц}}$  на фиксированный промежуток времени  $\varepsilon T_{\text{ц}}$ , где значение  $\varepsilon$  берется в диапазоне 0—1. Такая решетчатая функция обозначается  $x[n, \varepsilon]$ . Пользуясь модифицированным дискретным преобразованием Лапласа, можно найти соответствующую дискретную передаточную функцию системы  $W_s^*(z, \varepsilon)$  и по ней — кривую переходного процесса  $x_{\text{вых}}[n, \varepsilon]$ , определяющую значения выходной величины в моменты времени  $t = (n + \varepsilon) T_{\text{ц}}$ , т. е. в точках внутри интервалов квантования по времени.

Для модифицированного дискретного преобразования Лапласа существуют формулы и таблицы, аналогичные формулам и таблицам для простого преобразования Лапласа [40]. Строя переходный процесс для нескольких значений  $\varepsilon$ , принципиально можно получить любое число точек реального непрерывного процесса  $x_{\text{вых}}(t)$ .

Нелинейные импульсные системы исследуются с помощью общих методов исследования нелинейных САУ, рассмотренных во второй части книги.

Коррекция импульсных систем может осуществляться с помощью обычных корректирующих звеньев непрерывного действия, вводимых в непрерывную часть системы, и с помощью корректирующих звеньев импульсного действия. Последние включаются после импульсного элемента. Как и корректирующие звенья непрерывного действия, они могут быть последовательными и параллельными. Например, вместо пропорционально-дифференцирующего корректирующего звена непрерывного действия в импульсной САУ может быть применено импульсное звено с соответствующей дискретной передаточной функцией. Получение сигнала по производной будет осуществляться при этом в виде сигнала по первой разности дискретных значений входного сигнала (см. приложение 1, п. Б). Соответствующее корректирующее звено должно запоминать очередное дискретное значение входного сигнала  $x[n]$  и с поступлением следующего его значения  $x[n + 1]$  выдавать на выходе дискретный сигнал разности  $\Delta x[n] = x[n + 1] - x[n]$ , запоминая значение  $x[n + 1]$ .

## § 12-4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### А. Определение цифровых систем автоматического управления

В § 12-1 цифровыми системами были названы дискретные системы, в которых происходит квантование как по уровню, так и по времени. Более точно цифровые системы — это системы, в которых существуют дискретные сигналы в виде цифрового кода. Цифровые САУ — это наиболее совершенные по своим алгоритмическим возможностям дискретные САУ. В них в состав управляющего устройства входит цифровая вычислительная машина. Большинство цифровых САУ можно представить в виде схемы, показанной на рис. 12-12. Здесь *НП* — непрерывная часть системы (обычно это объект управления), *ЦВМ* — цифровая вычислительная машина; *Н — Ц* и *Ц — Н* — соответственно преобразователи непрерывной величины в цифровую и наоборот. Эти преобразователи связывают ЦВМ, у которой входная и выходная величины представлены в цифровой форме, с непрерывной частью системы.

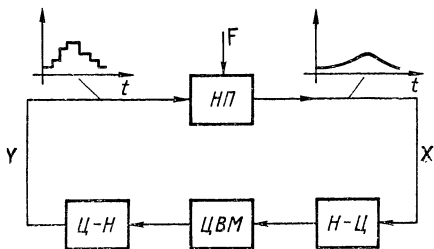


Рис. 12-12. Цифровая система автоматического управления

Преобразование непрерывной величины в цифровую заключается в квантовании ее по времени, по уровню и представлении полученных дискретных значений в виде чисел, т. е. в цифровом коде. В зависимости от принципа действия преобразователя это преобразование может осуществляться либо путем последовательного выполнения перечисленных выше этапов, либо сразу в виде одной операции. Такое преобразование называется **кодоимпульсной модуляцией**. Поэтому цифровые системы иногда называют кодо-импульсными системами. Соответственно преобразование *Н — Ц* называют кодированием, а обратное преобразование *Ц — Н* — декодированием. В отличие от импульсной модуляции, применяемой в импульсных САУ, здесь каждое значение преобразуемой входной величины представляется не одним импульсом, модулируемый параметр которого (высота, ширина, фаза) пропорционален значению входной величины, а серией импульсов. Каждое численное значение входной величины представляется определенной комбинацией дискретных значений модулируемого параметра этих импульсов.

Существуют различные цифровые коды. Простейший из них — **единичный код**. В этом случае каждое значение дискретной вели-



чины представляется числом импульсов, равным числовому значению величины. В случае десятичного кода дискретная величина выражается в виде десятичного числа и представляется серией импульсов, число которых равно числу разрядов этого числа. Каждый импульс несет информацию о цифре определенного разряда. Для этого модулируемый параметр импульса принимает одно из десяти дискретных значений. Наибольшее распространение получил двоичный код, соответствующий системе счисления с основанием 2. Каждый разряд двоичного числа может иметь только одно из двух значений: 0 или 1. Соответственно модулируемому параметру каждого импульса, представляющего значение одного из разрядов, тоже придается одно из двух крайних значений.

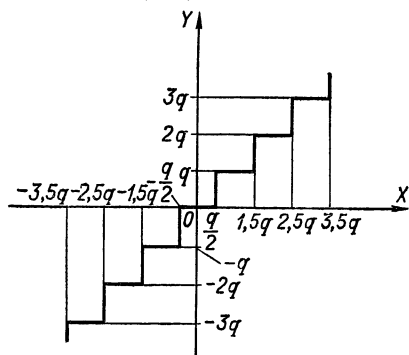


Рис. 12-13. Статическая характеристика квантователя преобразователя Н—Ц

Знак величины передается с помощью отдельного импульса тоже с двумя возможными значениями модулируемого параметра [34, 37]. (В предельно простом случае, когда учитывается только знак входной величины, получается релейная двухпозиционная система с квантованием еще и по времени.)

Преобразование непрерывной величины в цифровой код принципиально содержит погрешность из-за квантования по уровню, т. е. округления численного значения преобразуемой величины

до целого числа, соответствующего числу уровней квантования (см. рис. 11-1, г). Абсолютное значение погрешности квантования определяется величиной шага квантования. Шаг квантования ( $q$  на рис. 11-1, г) — это приращение входной непрерывной величины  $X$ , соответствующее интервалу между двумя соседними уровнями квантования.

Если дискретный (квантованный) сигнал определять числом целых уровней, укладывающихся в текущем значении непрерывной величины  $X$ , то ошибка квантования будет положительной и лежать в пределах  $0 - q$ . Ее можно уменьшить вдвое, если дискретные значения определять б л и ж а й ш и м уровнем квантования, т. е. округлять их до следующего уровня, если входная величина переходит за середину очередного шага квантования. В этом случае ошибка квантования будет лежать в пределах  $\pm q/2$ . Для осуществления такого квантования выполняющее его устройство должно иметь статическую характеристику, показанную на рис. 12-13. (Очевидно, что устройство, осуществляющее квантование по числу пройденных уровней, будет выполнять квантование до ближайшего уровня, если ко входному сигналу  $X$  добавить смещающий сигнал  $q/2$ , равный половине шага кван-

тования.) Во всех цифровых САУ преобразование непрерывной величины в цифровую осуществляется путем квантования с округлением до ближайшего уровня.

Преобразователь Ц — Н цифровой величины в непрерывную преобразует выходной сигнал ЦВМ в ступенчатую функцию  $Y(nT_{\text{ц}})$ , которая изменяется скачком в моменты  $nT_{\text{ц}}$ , а в промежутке между этими моментами сохраняется неизменной или изменяется по определенному экстраполяционному закону (линейно, квадратично и т. п.). Таким образом, в первом случае сигнал  $Y(nT_{\text{ц}})$  подобен квантованному по уровню сигналу с АИМ при  $\gamma = 1$  (см. рис. 12-12).

Основные достоинства цифровых САУ определяются теми возможностями, которые возникают в результате применения цифровой техники. Это прежде всего высокая точность, помехозащищенность и возможность реализации очень сложных алгоритмов управления, какие только доступны современным ЦВМ. Кроме того, к цифровым САУ в полной мере относятся и такое достоинство импульсных систем, как возможность осуществления многоточечного управления (см. § 12-1).

Высокая точность цифровых систем объясняется цифровой формой представления в ней перерабатываемой управляющим устройством информации. Точность всех операций при этом практически не имеет предела и определяется числом разрядов цифрового кода, которым представлены сигналы.

Помехозащищенность цифровых систем выше, чем у импульсных, благодаря кодовому представлению информации. Она может быть увеличена практически неограниченно за счет введения избыточности, позволяющей автоматически обнаруживать и исправлять возможные ошибки и искажения, возникающие при передаче и переработке цифровой информации.

Разумеется, все эти достоинства цифровых систем достигаются ценой значительно большей их сложности и стоимости по сравнению с другими системами. Поэтому цифровые САУ применяются только в тех случаях, когда иными, более простыми средствами задача решена быть не может. Так, цифровыми делаются даже простые по алгоритму работы системы управления и регулирования, если от них требуется большая точность. Например, существуют цифровые системы программного регулирования с цифровым задатчиком программы, цифровые следящие системы с цифровыми измерителями рассогласования и шаговыми исполнительными двигателями или другими исполнительными органами дискретного действия. Широко применяются цифровые регуляторы, особенно интегрального типа, в которых цифровое представление регулируемой величины позволяет осуществить интегрирование с любой степенью точности.

Однако основная область применения цифровых систем — это когда нужны системы с достаточно сложным алгоритмом преобразования информации в управляющем устройстве, требующим

применения ЦВМ. В этом случае в состав управляющего устройства могут входить ЦВМ вплоть до больших машин универсального типа и даже комплекса таких машин. Примерами таких цифровых САУ являются системы управления судами, самолетами и ракетами с помощью малогабаритных бортовых ЦВМ, системы централизованного автоматического управления производством. В таких системах количество входных и выходных величин объекта управления может измеряться сотнями, а расстояния, на которые передаются эти величины, — многими километрами, а в отдельных случаях и тысячами километров.

Область применения цифровых систем в настоящее время быстро расширяется по мере совершенствования ЦВМ.

## **Б. Особенности динамики цифровых систем автоматического управления**

Наличие в цифровой системе квантования по уровню делает ее принципиально нелинейной, как и систему релейного действия. При этом, как и в релейных САУ, в цифровых системах возможна неустойчивость в малом с установлением автоколебаний, амплитуда которых определяется зоной нечувствительности системы, равной шагу квантования. Правда, поскольку шаг квантования в цифровых САУ обычно мал, возможная амплитуда таких автоколебаний тоже достаточно мала.

Статическая точность цифровой САУ определяется шагом квантования, минимальная величина которого ограничена точностью измерения выходных величин объекта, а также возможной точностью преобразования их в цифровую форму. При уменьшении шага квантования  $q$ , т. е. при увеличении числа уровней квантования и числа разрядов цифрового кода, цифровая система приближается по своим свойствам к импульсной системе. При достаточной малости шага квантования  $q$  квантованием по уровню можно пренебречь и приближенно рассматривать цифровую систему как импульсную систему. Такая импульсная система (получаемая из цифровой при  $q \rightarrow 0$ ) называется **предельной импульсной системой**.

Особенностью динамики цифровых САУ по сравнению с импульсными является обязательное наличие фиксированного временного запаздывания в управляющем устройстве, определяемого длительностью одного цикла переработки информации в ЦВМ.

## **§ 12-5. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Математическое описание цифровых САУ осуществляется, как и импульсных САУ, с помощью разностных уравнений и дискретного преобразования Лапласа путем предварительной замены действующих в непрерывной части системы

непрерывных величин фиктивными дискретными в виде решетчатых функций. Однако в связи с тем, что в отличие от импульсных систем в цифровых САУ имеется квантование по уровню, структурная схема цифровой САУ содержит, помимо импульсных элементов, нелинейные звенья — квантователи, описываемые многоступенчатой релейной статической характеристикой. На рис. 12-14, а показана структурная схема цифровой САУ, соответствующая схеме на рис. 12-12. Здесь преобразователь  $H - Ц$  представлен последовательным соединением импульсного элемента  $ИЭ1$  и квантователя  $K1$ . Импульсный элемент  $ИЭ1$  осуществляет квантование по времени, преобразуя входную непрерывную

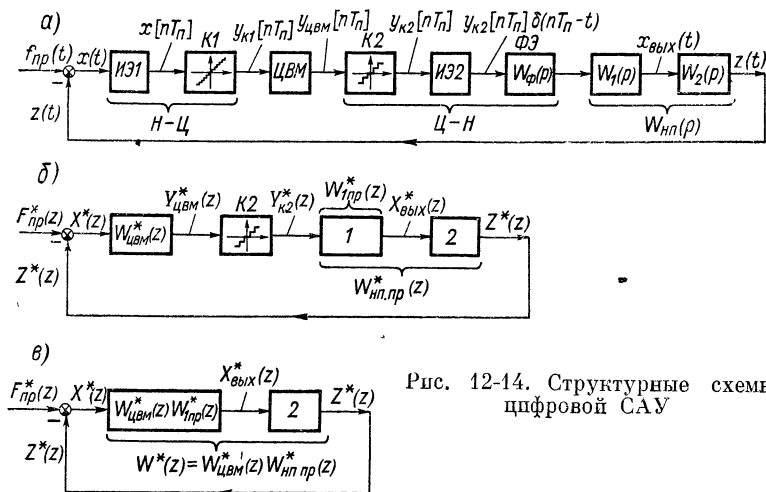


Рис. 12-14. Структурные схемы цифровой САУ

функцию  $x(t)$  в последовательность ее дискретных значений через период квантования  $T_n$ , т. е. в решетчатую функцию  $x[nT_n]$ . Далее квантователь  $K1$ , статическая характеристика которого показана на рис. 12-13, осуществляет квантование по уровню этих дискретных значений, преобразуя каждое значение  $x[nT_n]$  в дискретную величину в виде ближайшего целого числа уровней (шагов)  $q$ . Это число вводится в ЦВМ в определенной (обычно двоичной) системе счисления.

ЦВМ производит вычисления над этой последовательностью чисел в соответствии с заложенной в нее программой (алгоритмом) и выдает через период  $T_n$  очередной результат  $y_{цвм}[nT_n]$  тоже в виде числа. Выходная величина ЦВМ может быть выражена через входную с помощью разностного уравнения. Если выполняемые ЦВМ операции являются линейными, соответствующее разностное уравнение будет линейным. В этом случае ЦВМ может быть описана дискретной передаточной функцией (см. приложение 1, п. Б). Это имеет место, например, когда алгоритм работы ЦВМ заключается в вычислении линейной функции отклонения выход-

ной величины объекта от ее заданного значения, интегралов и производных, служащих для коррекции.

Преобразователь  $C-H$  представлен в виде квантователя по уровню  $K2$ , идеального  $\delta$ -импульсного элемента  $ИЭ2$  и формирующего элемента  $ФЭ$  с передаточной функцией  $W_{\phi}(p)$ . Формирующий элемент преобразователя  $C-H$  представляет собой экстраполятор, сохраняющий сигнал на выходе ЦВМ в течение такта работы машины, т. е. периода  $T_{\Pi}$ , за который она вырабатывает следующее дискретное значение выходного сигнала. Простейший такой экстраполятор, называемый экстраполятором нулевого порядка, удерживает выходной сигнал на исходном уровне, т. е. выдает прямоугольные импульсы шириной  $T_{\Pi}$ . Соответственно передаточная функция формирующего элемента при этом определяется формулой (12-3) при  $T_{\Pi} = T_{\Pi}$  (см. рис. 11-4, в). Существуют экстраполяторы, изменяющие в течение периода  $T_{\Pi}$  выходной сигнал по линейному закону (экстраполяторы первого порядка), по квадратичной параболе (экстраполяторы второго порядка) и т. д.

Число уровней (ступеней статической характеристики) квантователей  $K1$  и  $K2$  в общем случае различно. У входного квантователя  $K1$  число уровней обычно бывает большим, поскольку оно определяется числом разрядов ЦВМ, которое, в свою очередь, определяет точность обработки входной информации. В наиболее распространенном случае преобразования непрерывной величины в двоичный код число уровней у квантователя  $K1$  равно  $2^m - 1$ ; где  $m$  — число двоичных разрядов входного преобразователя. Соответственно при обычном для входного преобразователя значении  $m = 10 \div 20$  число уровней будет равно  $10^3 \div 10^6$ . Поэтому чаще всего квантованием сигнала на входе ЦВМ можно пренебречь, заменив статическую характеристику квантователя  $K1$  линеаризующей ее прямой линией.

Число уровней выходного квантователя  $K2$  определяется требованиями статики и динамики САУ и обычно бывает небольшим вплоть до единицы, что соответствует обычному релейному управлению объектом [3]. Последний случай относится, например, к оптимальному по быстродействию управлению (см. главу тринадцатую).

На рис. 12-14, б показана структурная схема цифровой САУ, преобразованная в соответствии с порядком, изложенным в § 12-2. Схема относится к случаю, когда непрерывная часть системы и алгоритм работы ЦВМ линейные. Квантование на входе ЦВМ не учитывается. Переменные заменены решетчатыми функциями. Выходная величина системы  $X_{\text{вых}}^*(z)$  показана в общем случае в промежуточной точке непрерывной части системы, внешнее воздействие  $F_{\text{пр}}^*(z)$  приведено ко входу ЦВМ.

Дискретная передаточная функция  $W_{\text{цвм}}^*(z)$  описывает ЦВМ со входным импульсным элементом  $ИЭ1$ . Дискретные передаточные функции  $W_{\text{пр}}^*(z)$  и  $W_{\text{нп. пр}}^*(z)$  описывают участки системы

от входа импульсного элемента ИЭ2 соответственно до места нахождения выходной величины  $X_{\text{вых}}^*(z)$  и до выхода  $Z^*(z)$  непрерывной части системы.

Если вследствие достаточной малости шага квантования выходного квантователя К2 им можно пренебречь, получим предельную импульсную систему, схема которой показана на рис. 12-14, в. Эта схема подобна схеме импульсной системы, приведенной на рис. 12-7, б. Однако между этими схемами имеется существенная разница в отношении выражений для описывающих их дискретных передаточных функций. Предельная импульсная схема цифровой САУ содержит два импульсных элемента, т. е. состоит из двух последовательно включенных разомкнутых импульсных участков со своими импульсными элементами. Соответственно каждый такой участок описывается своей дискретной передаточной функцией  $W_{\text{цвм}}^*(z)$  и  $W_{\text{нп.пр}}^*(z)$ , а дискретная передаточная функция всей разомкнутой системы будет равна произведению этих дискретных передаточных функций, т. е.  $W^*(z) = W_{\text{цвм}}^*(z) W_{\text{нп.пр}}^*(z)$ . Только в этом случае можно перемножать дискретные передаточные функции. Для схемы, состоящей из одного импульсного

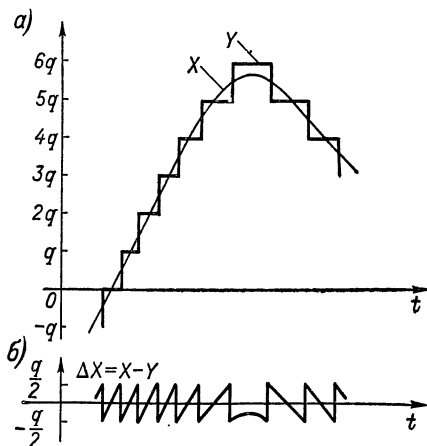


Рис. 12-15. Квантование сигнала в цифровой САУ

элемента и последовательно включенных за ним непрерывных звеньев нельзя находить дискретную передаточную функцию всей цепочки путем вычисления дискретных передаточных функций по непрерывным передаточным функциям отдельных звеньев и последующего их перемножения (см. § 12-2). Например, в схеме на рис. 12-7 дискретную передаточную функцию  $W_{\text{нп.пр}}^*(z)$  нельзя находить как произведение  $W_{\text{нп}}^*(z) W_2^*(z)$ , где  $W_2^*(z)$  определена по непрерывной передаточной функции  $W_2(p)$ . Последняя операция неправильна. Передаточную функцию  $W_{\text{нп.пр}}^*(z)$  надо находить только по передаточной функции всей непрерывной части  $W_{\text{нп.пр}}^*(p)$ .

Схема, представленная на рис. 12-14, относится к случаю квантования по времени с АИМ или предварительно приведенного к нему квантования с ШИМ или ВИМ (см. § 12-2).

Методика исследования цифровых САУ в случае, когда можно пренебречь квантованием по уровню, сводится к исследованию предельной импульсной системы. При этом в процессе исследования устойчивости отдельно следует рассмотреть вопросы о возможности возникновения автоколебаний в точке установившегося режима за счет зоны нечувствитель-

ности квантователя и об их параметрах подобно тому, как это делается в релейных системах.

Как показано на рис. 12-15, квантованный по уровню сигнал  $Y$  можно представить как неквантованный сигнал  $X$  с наложенной на него ошибкой квантования  $\Delta X$ . Ошибка квантования является случайной величиной, изменяющейся в пределах  $\pm q/2$ . При достаточно малом шаге квантования она имеет практически равномерное распределение относительно нулевого среднего значения (см. рис. П-4,  $z$ ) и не зависит от закона изменения квантуемого сигнала [37]. Плотность вероятности ошибки квантования

$$p(\Delta X) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{при } |\Delta X| \leq \frac{q}{2}; \\ 0 & \text{при } |\Delta X| > \frac{q}{2}. \end{cases} \quad (12-23)$$

Дисперсия ошибки, согласно (П-53а),

$$\begin{aligned} D_{\Delta X} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta X)^2 p(\Delta X) d(\Delta X) = \\ &= \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} (\Delta X)^2 d(X) = \frac{1}{q} \cdot \left. \frac{(\Delta X)^3}{3} \right|_{-\frac{q}{2}}^{+\frac{q}{2}} = \frac{q^2}{12}. \end{aligned} \quad (12-24)$$

Таким образом, при достаточно малом шаге квантования наличие в схеме квантователя эквивалентно наличию источника шума на входе приведенной части системы. Поэтому в случае приведения цифровой САУ к предельной импульсной САУ путем исключения из схемы квантователя при исследовании точности системы ошибку квантования можно учесть введением на вход приведенной непрерывной части системы случайного возмущения (шума), описываемого выражением (12-23) и соответственно (12-24).

При достаточно большом шаге квантования сведение цифровой САУ к предельной импульсной с заменой квантователя источником шума, некоррелированного с квантуемым сигналом, может привести к недопустимо большой ошибке. В этом случае цифровая система должна исследоваться как существенно нелинейная с учетом наличия в ней квантователя (рис. 12-14, б) подобно релейной САУ без вибрационной линеаризации (см. одиннадцатую главу).

К о р р е к ц и я   ц и ф р о в ы х   С А У осуществляется прежде всего путем выбора соответствующего алгоритма ЦВМ, входящей в состав управляющего устройства. Поэтому принципиально здесь применимы любая коррекция, любой алгоритм управления, которые могут быть реализованы с помощью соответствующей ЦВМ. При этом, как уже отмечалось, усложнение

алгоритма работы управляющего устройства в данном случае не ведет к снижению точности его реализации, как у систем непрерывного действия.

Особенности синтеза цифровых САУ описаны в работах [37,40].

## Глава тринадцатая

# ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 13-1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оптимальные САУ — это системы, в которых обеспечено оптимальное значение какого-либо основного показателя качества работы системы, называемого к р и т е р и е м о п т и м а л ь н о с т и. Таким критерием оптимальности может быть один из показателей качества переходных процессов (например, длительность), точность, потребляемая мощность и т. п.

В настоящей главе будет рассмотрена методика синтеза оптимальных САУ. С этой задачей мы встречались еще в теории линейных САУ, в частности при синтезе оптимальной передаточной функции управляющего устройства по минимуму дисперсии на выходе системы (см. § 3-3) и при определении оптимальных значений варьируемых параметров системы по минимуму интегральных критериев качества (см. § 5-4). Сейчас мы рассмотрим эту задачу в общем виде, включая нелинейные системы.

Общая постановка задачи синтеза САУ была дана в § 7-5. При решении этой задачи необходимо удовлетворить многочисленным и обычно противоречивым требованиям, предъявляемым к различным показателям, характеризующим систему. В соответствии с данным выше определением оптимальной САУ задача ее синтеза заключается, таким образом, в создании САУ по условию обеспечения оптимума одного из показателей качества системы при учете требований к остальным показателям в виде ограничений на их значения. Такая постановка задачи синтеза САУ является упрощенной и соответствует случаю, когда из всех предъявляемых к системе требований можно выделить одно основное, которое главным образом и определяет качество работы системы в целом. В общем случае, когда имеется несколько равно важных показателей качества, которые не удастся объединить в общий комбинированный показатель (см. § 7-5), синтез САУ на оптимум каждого из этих показателей в отдельности при ограничении остальных дает варианты решения, являющиеся идеальными для отдельных показателей. Знание этих вариантов может существенно помочь проектировщику при выборе оптимального компромиссного варианта.



Для того чтобы дать математическую постановку задачи синтеза оптимальной САУ, остановимся вначале на математическом описании критериев оптимальности, ограничений и объекта управления.

**К р и т е р и и   о п т и м а л ь н о с т и.** Чаще всего приходится иметь дело с критериями оптимальности, величина которых определяется не текущим состоянием объекта, а изменением его в течение всего процесса управления. В результате для определения критерия оптимальности требуется интегрировать какую-либо функцию, величина которой зависит от текущего состояния объекта, т. е. такой критерий оптимальности является интегральным функционалом<sup>1</sup> и его можно представить в виде

$$Q(X, U) = \int_0^{t_n} G(X, U) dt. \quad (13-1)$$

Здесь  $G(X, U)$  — функция выходной величины объекта  $X$  и управления (управляющего воздействия)  $U$ , являющихся в общем случае векторами, содержащими произвольное число составляющих;  $t_n$  — длительность процесса управления.

Обычно критерий оптимальности  $Q$  составляют так, чтобы условием оптимальности был его минимум. В этом случае, который мы и будем в дальнейшем иметь в виду, критерий оптимальности можно трактовать как обобщенную «стоимость» достижения цели управления, показатель «потерь» на управление, и задача синтеза системы заключается в их минимизации.

К критериям оптимальности типа (13-1) относятся уже упомянутые интегральные критерии качества переходных процессов, описанные в § 5-4. Подынтегральная функция в этих критериях содержит только выходную величину объекта  $X$ . Примером критериев, в которых подынтегральная функция содержит управление  $U$ , являются функционалы

$$Q(U) = \int_0^{t_n} \sum_{i=1}^r k_i |U_i| dt \quad (13-2)$$

и

$$Q(U) = \int_0^{t_n} \sum_{i=1}^r k_i U_i^2 dt, \quad (13-3)$$

где  $k_i$  — коэффициенты пропорциональности.

Первый из этих интегралов применяется при минимизации расхода рабочего тела (обычно топлива), который определяется величиной управляющего этим расходом воздействия  $U$ .

<sup>1</sup> Функционал — это величина, значение которой определяется заданием функции. Примером функционала являются интегральные критерии качества (см. § 5-4), значение которых определяется всей кривой переходного процесса, т. е. функцией  $x_n(t)$ .

Такая задача характерна для систем управления полетом летательных аппаратов.

Второй интеграл (13-3) применяется в задачах на минимум энергии, когда величина квадрата управляющего воздействия определяет мощность, расходуемую при управлении объектом. Сюда относится, например, случай, когда управляющее воздействие определяет величину электрического тока, потребляемого объектом. Тогда интеграл от квадрата этого воздействия будет мерой расхода электроэнергии.

Используются и более сложные критерии оптимальности типа (13-1), включающие в себя одновременно как выходную величину  $X$ , так и управление  $U$ . (Такие критерии применяются, в частности, для обеспечения единственности решения, когда приведенные выше более простые критерии не обеспечивают этого.)

Критерий оптимальности может быть интегральным функционалом не во временной, а в частотной области. Именно такой критерий применен, в частности, в упомянутой выше задаче оптимизации системы по минимуму дисперсии, выражаемой через частотную функцию системы и спектральную плотность внешнего воздействия (см. § 3-3).

В простейших случаях критерий оптимальности может представлять собой просто функцию. Это будет, в частности, когда оптимизируется конечное состояние объекта (например, задача минимизации промаха в конечный момент времени при управлении ракетой «земля — воздух», задача мягкой посадки и стыковки). Наиболее простой подобный критерий оптимальности относится к задаче на минимум времени процесса управления  $t_n$ . Этому случаю в выражении критерия (13-1) соответствует  $G \equiv 1$ . Системы, в которых обеспечивается минимум этого критерия, называются системами, оптимальными по быстродействию.

О разных вариантах критериев оптимальности, применяемых в задачах синтеза оптимальных САУ при случайных воздействиях, будет говориться в § 13-4.

Ограничения. Как сказано выше, при синтезе САУ на оптимум определенного показателя качества системы необходимы требования к другим показателям учитываются в виде ограничений их значений. Кроме того, помимо этих ограничений, существуют еще ограничения, обусловленные конструкцией и условиями эксплуатации системы (ограничения запаса топлива, электроэнергии, температуры нагрева и т. п.).

В общем случае все эти ограничиваемые величины, как и критерий оптимальности, могут быть представлены в виде функционалов  $Q(X, U)$  от  $X$  и  $U$ . Поэтому соответствующие ограничения принимают вид неравенств:

$$Q_m(X, U) \leq 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13-4)$$

Например, задача синтеза системы, оптимальной по быстродействию, может включать в себя ограничения на дисперсию выходной величины, расход топлива и т. п. В более простых случаях ограничиваемые величины  $Q_m(X, U)$  могут представлять собой функции. В пределе это могут быть просто ограничения, накладываемые на значения отдельных выходных величин и управлений и задаваемые в виде неравенств:

$$\left. \begin{aligned} X_i - X_{i\text{пр}} &\leq 0; \\ U_i - U_{i\text{пр}} &\leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (13-5)$$

где  $X_{i\text{пр}}$  и  $U_{i\text{пр}}$  — предельно допустимые значения соответствующих координат (например, скорость исполнительного двигателя, угол поворота заслонки, руля и т. п.).

Координаты объекта и управляющие воздействия, удовлетворяющие заданным ограничениям, называются **допустимыми**.

**Объект управления.** В общем виде объект управления описывается зависимостью его выходных величин  $X$  от входных величин — управления  $U$  и возмущения  $F$ :

$$X = A_o(U, F, t). \quad (13-6)$$

Здесь  $A_o$  — оператор объекта, в общем случае нелинейный.<sup>1</sup> Время  $t$  присутствует в (13-6), если объект нестационарный.

Обычно зависимость (13-6) задают в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_i}{dt} = \varphi_i(X_1, \dots, X_n; U_1, \dots, U_r; F_1, \dots, F_i; t), \quad (13-7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\varphi_i$  — в общем случае нелинейные функции.

В векторной форме уравнение (13-7) принимает вид:

$$\frac{dX}{dt} = \varphi(X, U, F, t), \quad (13-8)$$

где  $\varphi$  —  $n$ -мерный вектор — функция с координатами  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

Задание объекта управления должно быть дополнено заданием **г р а н и ч н ы х у с л о в и й**, т. е. начального состояния объекта при  $t = 0$  и конечного состояния, определяемого целью управления в виде задания  $G$ .

Задача синтеза оптимальной САУ теперь может быть сформулирована следующим образом (рис. 13-1, а). Заданы математическое описание объекта управления (13-4), граничные условия,

<sup>1</sup> Оператор определяет одну функцию через другую. Он может быть задан в виде уравнений, графиков или таблиц. В (13-6) оператор  $A_o$  символически определяет всю совокупность математических операций, с помощью которых по множеству входных функций  $U$  и  $F$  находится множество выходных функций  $X$ , представленных в виде вектора. Для линейного объекта оператор может быть представлен в виде передаточной функции.

включающие в себя цель управления, ограничения (13-4), наложенные на выходную величину объекта  $X$  и на управляющее воздействие  $U$ , внешние возмущения  $F$  и критерий оптимальности (13-1). Требуется найти управляющее устройство, обеспечивающее такое управление объектом, при котором цель управления достигается при минимальном значении критерия оптимальности и выполнении всех имеющихся ограничений. Найти управляющее устройство означает в нашем случае определить его математическое описание, т. е. оператор  $A_{yy}$ , выражающий управление  $U$  в общем случае через выходную величину объекта, внешние воздействия и время:

$$U = A_{yy}(X, G, F, t). \quad (13-9)$$

В связи с постановкой задачи оптимального управления введем понятие управляемости.

Объект называется управляемым, если существует хотя бы одно допустимое управление (т. е. управление, удовлетворяющее заданным ограничениям), переводящее систему из заданного начального в заданное конечное состояние за конечный промежуток времени. Очевидно, что задача синтеза оптимального управления может быть решена только в случае, если объект является управляемым. Поэтому весьма существенно иметь достаточно простые критерии управляемости, позволяющие ответить на вопрос о существовании решения, перед тем как приступить к его поиску. Такие критерии существуют для отдельных типов объектов, в частности для линейных [26].

Если воспользоваться фазовым пространством, задаче синтеза оптимального управления можно дать следующее геометрическое толкование (рис. 13-1, б). Пусть целью управления объектом является перевод его из начального состояния, соответствующего точке  $X(0)$ , в конечное, соответствующее точке  $X(t_n)$ . Этот перевод осуществляется под действием управления  $U(t)$  и в зависимости от выбора последнего может происходить по разным траекториям (штриховые линии на рис. 13-1, б). Каждой траектории соответствует определенное значение критерия оптимальности  $Q$ . Задача заключается в определении такого допустимого управления  $U(t)$  и соответствующей траектории  $X(t)$ , для которых критерий  $Q$  имеет минимум. Для автоматического осуществления этого оптимального управления должен быть найден соответствующий оператор управляющего устройства (13-9).

Требование минимизации критерия  $Q$  может быть формально заменено требованием минимизации конечного значения одной

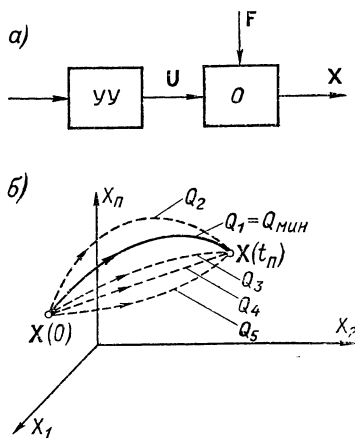


Рис. 13-1. К задаче оптимального управления

из координат объекта управления. Для этого в уравнения (13-7) объекта вводится дополнительная координата, которой является функционал  $Q$ . Это делается добавлением к уравнениям (13-7) нового уравнения:

$$\frac{dX_0}{dt} = G(X_1, \dots, X_n; U_1, \dots, U_r), \quad (13-10)$$

причем

$$X_0(0) = 0.$$

С учетом (13-1) из (13-10) следует, что

$$Q = X_0(t_n). \quad (13-11)$$

Для нестационарного объекта можно аналогично устранить время  $t$  из правых частей уравнений (13-7) формальным представлением его в виде еще одной новой координаты  $X_{n+1}$  объекта. Для этого к уравнениям (13-7) добавляется уравнение

$$\frac{dX_{n+1}}{dt} = 1, \quad (13-12)$$

причем

$$X_{n+1}(0) = 0.$$

В результате таких преобразований размерность фазового пространства увеличивается на два, т. е. становится равной  $(n + 2)$ .

Задача оптимального управления, в которой граничные условия заданы начальной и конечной точками траектории, называется задачей с фиксированными концами. Как видно из изложенного выше, возможны случаи, когда одно или оба граничных условия заданы не точкой, а конечной областью ее возможного нахождения или совсем не заданы. Последние задачи называются задачами со свободными концами (или с одним свободным концом). Существуют также задачи с фиксированным временем процесса. Часто имеется возможность для упрощения задачи переходить путем изменения критерия оптимальности от задачи с фиксированными концами к задаче со свободным концом и от задачи с незадаанным временем к задаче с фиксированным временем процесса. Наконец, существуют задачи оптимизации, характерные, в частности, для систем регулирования, целью которых является удержание объекта, подверженного возмущениям, в заданной точке, области или на заданной траектории.

Если хотя бы одно из внешних воздействий  $F$  или  $G$  является случайной величиной, соответственно и критерий оптимальности должен быть статистическим. В связи с особенностями математического аппарата в последнем случае в дальнейшем изложении принят следующий порядок. Сперва рассматривается синтез оптимальных САУ, находящихся под действием детерминированных воздействий, а затем — особенности синтеза при случайных воздействиях.

## § 13-2. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИОНАЛОВ

Общим математическим аппаратом, применяемым при синтезе оптимальных САУ, поскольку здесь речь идет о нахождении экстремумов функционалов, является вариационное исчисление, включая как классические вариационные методы, основанные на уравнениях Эйлера — Лагранжа, так и методы, созданные в пятидесятые годы нашего столетия, а именно динамическое программирование Р. Беллмана и принцип максимума Л. С. Понтрягина. Эти последние методы наиболее удобны для задач оптимального управления, поскольку наличие в этих задачах ограничений существенно усложняет применение классических вариационных методов [38]. Они предполагают применение вычислительных машин, давая программу численного решения задачи на машине.

В случае сравнительно простых задач с одним, максимум двумя управляющими воздействиями определение оптимального управления возможно методом прямого поиска путем многократного нахождения процесса на вычислительной машине при вариации управляющего воздействия. В простейшем случае это может быть выполнено на вычислительных машинах непрерывного действия. Для объектов второго порядка оптимальное управление может быть найдено с помощью фазовой плоскости [38].

Рассмотрим метод динамического программирования и принцип максимума.

### А. Динамическое программирование

Этот метод решения вариационных задач предложен американским ученым Р. Беллманом. В основу его положен следующий принцип оптимальности: *любой конечный участок оптимальной траектории является тоже оптимальной траекторией*, т. е. часть оптимальной траектории от любой промежуточной точки до конца является оптимальной траекторией между этими точками, если считать данную промежуточную точку началом траектории. Сказанное иллюстрируется рис. 13-2. Принцип оптимальности означает, что если траектория 1—2 между точками  $H$  и  $K$  является оптимальной, то оптимальным будет и любой ее конечный участок от произвольной точки  $i$  до точки  $K$ .

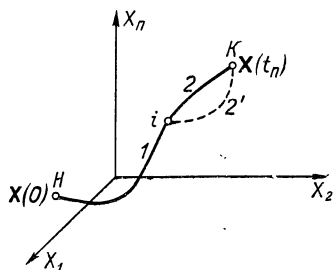


Рис. 13-2. К принципу оптимальности

Этот принцип оптимальности не является всеобщим. Он справедлив для систем, у которых оптимальная траектория не зависит от предыстории системы, а целиком определяется исходным ее состоянием. В последнем случае справедливость принципа оптимальности очевидна: если траектория 1—2 оптимальна, обеспечи-

вая минимум критерия, то оптимальна и траектория 2, так как, если оптимальной траекторией между точками  $i$  и  $K$  оказалась бы какая-то другая траектория  $2'$ , оптимальной траекторией между точками  $H$  и  $K$  была бы траектория  $1-2'$ , поскольку для нее критерий оптимальности имел бы меньшее значение, чем на траектории  $1-2$ , за счет меньшего приращения его на участке  $2'$ .

Поясним вначале суть метода динамического программирования на следующем простом примере (рис. 13-3). Требуется перевести некоторый объект из точки  $H$  в точку  $K$  за  $m$  шагов, каждый из которых, кроме последнего, имеет  $l$  вариантов, обеспечив при

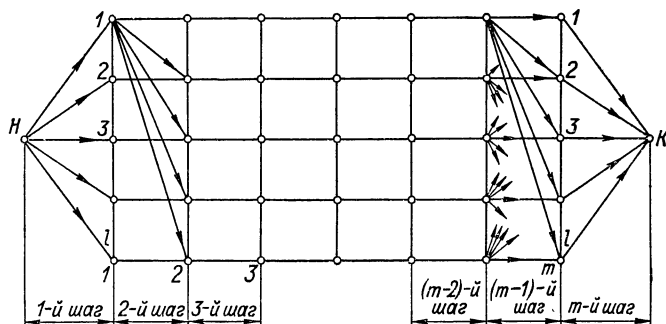


Рис. 13-3. К методу динамического программирования

этом минимум критерия оптимальности  $Q$ . Этот критерий оптимальности зависит от траектории движения, и нам известна величина его приращения  $\Delta Q_i$ , соответствующая шагу из любой точки пути (переходу из каждой точки на рис. 13-3 в каждую точку на следующей вертикали, соответствующей концу очередного шага). Таким образом, требуется выбрать оптимальную траекторию из точки  $H$  в точку  $K$  из конечного числа возможных траекторий, минимизирующую критерий  $Q$ . Речь может идти, например, о выборе маршрута автомобиля или другого движущегося объекта, проходящего через заданные точки и обеспечивающего минимум расхода горючего или времени движения. В данном случае величина  $Q$  является функцией  $l(m-1)$  переменных. Число возможных их комбинаций, т. е. число возможных вариантов решения, равно  $l^{m-1}$ . При небольших значениях  $l$  и  $m$  оптимальное решение можно найти перебором возможных вариантов на вычислительной машине, однако в большинстве реальных задач это потребовало бы чрезвычайно большого объема вычислений. Решение этой задачи методом динамического программирования резко сокращает объем работы.

Нахождение оптимальной траектории этим методом начнем, основываясь на указанном выше принципе оптимальности, с конечной точки  $K$ , «пяться» к начальной точке  $H$ . Для каждой исходной точки предпоследнего,  $(m-1)$ -го, шага найдем, например, пере-

бором из  $l$  вариантов или любым другим методом нахождения оптимума функции (см. § 14-3, п. В) оптимальную траекторию перехода в точку  $K$ , дающую минимальное приращение  $\Delta Q$  критерия оптимальности. Результаты можно представить таблицей:

Номер начальной точки ( $m - 1$ )-го шага	1	2	...	$l$
Значение $\Delta Q_{\min}$ за два шага: $m - 1$ и $m$				

(При решении задачи с помощью вычислительной машины эти данные заносятся в память машины.)

Затем, переходя к  $l$  исходным точкам предыдущего, ( $m - 2$ )-го, шага, находим для каждой из них оптимальную траекторию в конечную точку  $K$  и составляем таблицу соответствующих значений  $\Delta Q_{\min}$ . При этом суммарное значение  $\Delta Q_{\min}$  для последних двух шагов берется из предыдущей таблицы. Аналогично находим оптимальную траекторию из начальных точек ( $m - 3$ )-го шага и соответствующие значения  $\Delta Q_{\min}$  и т. д., пока не дойдем до начальной точки  $H$ . В результате получаем решение всей задачи, т. е. оптимальную траекторию в целом. При этом на последнем этапе решения будет найдено минимальное значение критерия оптимальности  $Q_{\min}$  в виде минимальной суммы среди  $l$  сумм значений  $\Delta Q$  за первый шаг и найденных перед этим значений  $\Delta Q_{\min}$  за последующие  $m - 1$  шагов из каждой из  $l$  точек конца первого шага.

Таким образом, в данном случае задача нахождения оптимального значения функции  $Q$   $m - 1$  переменных, каждая из которых может иметь  $l$  значений, свелась к последовательному решению более простой задачи нахождения оптимума функции одной переменной, имеющей  $l$  значений, т. е. с помощью динамического программирования выбор из  $l^{m-1}$  вариантов сведен к многократному последовательному выбору всего из  $l$  вариантов. Например, для  $m = l = 10$  выбор из  $10^9$  вариантов сводится к последовательному выбору из 10 вариантов.

Решение задачи описанным методом не обязательно требует «попятного» движения от конца к началу. Можно, например, применить такую процедуру расчета. Вначале для каждой из точек конца второго шага (рис. 13-3) находим оптимальную траекторию (оптимальную промежуточную точку в конце первого шага), дающую минимум приращения  $\Delta Q$ . Затем то же определяем для каждой точки конца третьего шага, используя при этом ранее



найденные оптимальные решения для суммы первых двух шагов. И так действуя далее, доходим до конечной точки  $K$ . При этом в конце предпоследнего шага для каждой из  $l$  точек оказываются найденными оптимальные траектории из начальной точки  $H$  и соответствующие значения минимального приращения  $\Delta Q$ . Минимальная из сумм каждого из этих приращений с соответствующим данной точке приращением  $\Delta Q$  на последнем шаге и определяет искомую оптимальную траекторию из точки  $H$  в конечную точку  $K$ .

Математически изложенный метод выглядит следующим образом. Предположим, что речь идет о цифровой системе с квантованием по уровню и по времени, т. е. шаги в решении представляют собой фиксированные интервалы времени. Требуется найти закон управления  $U(t)$  заданным объектом с учетом ряда ограничений, переводящий объект из состояния, характеризуемого точкой  $X(0)$  фазового пространства, в состояние, характеризуемое точкой  $X(t_n)$ , при условии обеспечения минимума критерия оптимальности в виде функционала (13-1):

$$Q = \int_0^{t_n} G(X, U) dt.$$

Для дискретной системы с квантованием по времени интеграл в последнем выражении заменяется суммой функций дискретных величин, т. е.

$$Q = \sum_{n=0}^m G\{X[n], U[n]\}. \quad (13-13)$$

Здесь введено относительное время, так что  $n$  — это текущий номер шага во времени, равного периоду квантования (см. § 12-2). При этом соответственно уравнение объекта записывается в конечных разностях. Задача заключается в определении управления  $U[n]$  в виде последовательности значений  $U[0], U[1], \dots, U[m-1]$  (каждое из них может иметь одно из  $l$  дискретных значений), минимизирующих сумму (13-13) при заданных уравнениях объекта и ограничениях величин  $U$  и  $X$  на его входе и выходе.

Допустим для простоты, что время процесса фиксировано шагами, и будем искать решение, опять двигаясь «попятно» с конечного момента  $t = t_n$ , т. е. в относительном времени с момента  $n = m$ . Решение задачи начинаем с нахождения и запоминания оптимального значения управляющего воздействия  $U[m-1]$  в начале последнего интервала для каждого возможного дискретного значения  $X[m-1]$  в пределах заданных ограничений последнего. Одновременно запоминаем и соответствующие значения приращения  $\Delta Q_{m-1}$  критерия оптимальности. В результате находим оптимальные значения  $\Delta Q_{m-1}$  и  $U[m-1]$  как функции  $X[m-1]$ .

Затем переходим к началу  $(m - 2)$ -го шага и находим минимум приращения  $\Delta Q_{m-2}$  за два последних шага и соответствующее оптимальное значение  $U[m - 2]$  как функцию выходной величины системы  $X[m - 2]$  в этот момент. Минимальное значение  $\Delta Q_{m-2}$  для конкретного значения  $X[m - 2]$  определяем варьированием  $U[m - 2]$ . При этом для каждого значения  $U[m - 2]$  сперва находим приращение критерия оптимальности за второй шаг и значение  $X[m - 1]$  в конце второго шага. После этого определяем полное приращение  $\Delta Q_{m-2}$  за два шага, используя ранее найденную зависимость  $\Delta Q_{m-1}$  от  $X[m - 1]$ . Переходя, далее, к началу  $(m - 3)$ -го шага и т. д., попадаем в конце концов в начальную точку  $X[0]$ , определив при этом оптимальное управление  $U[n]$ , сам оптимальный процесс  $X[n]$  и суммарную величину критерия оптимальности  $Q$ . Таким образом, *оптимизация функционала, зависящего от искомой функции  $U[n]$ , заменяется последовательностью  $m$  оптимизаций значительно более простой функции  $\Delta Q_{m-i}$  одной переменной  $U[m - i]$* . Благодаря последнему упрощению метод динамического программирования позволяет решать задачи оптимизации, которые не решаются классическими методами вариационного исчисления путем прямой оптимизации исходного функционала.

Описанную процедуру решения лишь в простейших случаях можно провести аналитически, т. е. с получением аналитического выражения искомого решения. В общем же случае метод динамического программирования следует рассматривать как метод составления программы для численного решения задачи на цифровых вычислительных машинах.

Метод динамического программирования может быть применен и для оптимизации непрерывных систем путем предварительной их дискретизации, т. е. замены непрерывных переменных дискретными (см. § 12-2). Правда, Беллман развил метод динамического программирования и на случай непрерывных систем, однако, поскольку практически решение осуществляется на цифровых вычислительных машинах, последние все равно требуют проведения дискретизации.

Метод динамического программирования применяется не только для решения задач оптимизации управления. Он является общим методом решения многошаговых (многоэтапных) задач из любой области техники.

## Б. Принцип максимума

Принципу максимума Л. С. Понтрягина можно дать следующую геометрическую интерпретацию (рис. 13-4, а). Пусть стоит задача о переводе за минимальное время изображающей точки из некоторого начального положения  $H$  в определенное конечное  $K$ . Каждой точке фазового пространства, окружающей точку  $K$ , соответствует определенная оптимальная траектория

и отвечающее ей минимальное время перехода в эту точку. Вокруг конечной точки можно построить поверхности, являющиеся геометрическим местом точек с одинаковым минимальным временем  $t_i$  перехода в эту точку (рис. 13-4, а). Такие поверхности называются поэтому *и з о х р о н а м и*. Очевидно, что *оптимальная по быстрдействию траектория из точки H в конечную точку K должна быть максимально близка нормальям к изохронам*, насколько это позволяют ограничения, налагаемые на координаты объекта и управление.

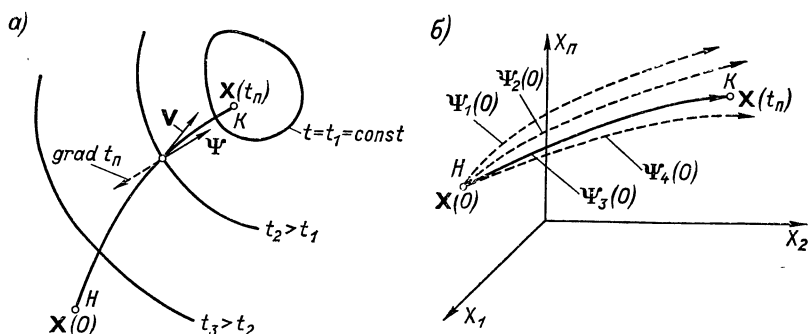


Рис. 13-4. К принципу максимума

Действительно, всякое движение вдоль изохрон увеличивает время процесса, так как означает затрату времени без уменьшения отрезка времени, остающегося до момента достижения конечной точки. Математически это условие оптимальности траектории означает, что на протяжении всей траектории *скалярное произведение вектора скорости  $v = dX/dt$  на вектор, обратный градиенту времени перехода в конечную точку, должно быть максимально*<sup>1</sup>. Если обозначить это произведение через  $H$ , а вектор, обратный градиенту времени перехода, через  $\psi$ , т. е.  $\psi = -\text{grad } t_n$  (см. рис. 13-4, а), то это условие можно записать следующим образом:

$$H = \psi v = \sum_{i=1}^n \psi_i v_i = \max, \quad (13-14)$$

где  $\psi_i$  и  $v_i$  — координаты векторов  $\psi$  ( $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ) и  $v$  ( $v_1, v_2, \dots, v_n$ ), т. е. *условием оптимальности является максимум проекции вектора  $v$  на направление  $\psi$* .

Сформулированное условие оптимальности и есть принцип максимума Л. С. Понтрягина.

В общем случае произвольного критерия оптимальности  $Q$  (13-1) поверхности постоянного значения этого критерия назы-

<sup>1</sup> Напомним, что скалярное произведение двух векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними.

ваются и з о п о в е р х н о с т я м и. Условие оптимальности при этом сохраняется прежним, т. е. в виде условия (13-14) — максимума функции Понтрягина  $H$ , где вектор  $\psi$  представляет собой взятый со знаком минус градиент критерия оптимальности. При применении принципа максимума в общем случае уравнение объекта дополняется уравнениями (13-10) и (13-12), содержащими координаты  $X_0$  и  $X_{n+1}$ .

Практическая методика нахождения оптимального управления  $U(t)$  и соответствующей оптимальной траектории  $X(t)$  не требует определения изоповерхностей. Необходимые для решения задачи векторы  $\psi$  находятся без этого с помощью следующих так называемых сопряженных уравнений, справедливых для оптимальной траектории:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^{n+1} \psi_j \frac{dv_j}{dX_i}, \quad (13-15)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1.$$

Здесь  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — выходные координаты объекта;  $X_0$  и  $X_{n+1}$  — дополнительные координаты, введенные уравнениями (13-10) и (13-12), а  $v_j = \frac{dX_j}{dt}$  определяются правыми частями уравнений объекта с учетом уравнений (13-10) и (13-12).

Уравнения (13-15) получаются из условия (13-14), согласно которому производные  $H$  по  $X_i$  в точках оптимальной траектории равны нулю [38].

Уравнения объекта в виде (13-7) и сопряженные уравнения (13-15) можно представить в виде уравнений Гамильтона, если ввести в них величину

$$H = \sum_{j=0}^{n+1} \psi_j v_j,$$

где  $v_j$  определяются из уравнений объекта.

Учитывая, что (так как  $v_i$  не зависит от  $\psi_i$ )

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = v_i, \quad \text{а} \quad \frac{\partial H}{\partial X_i} = \sum_{j=0}^{n+1} \psi_j \frac{\partial v_j}{\partial X_i},$$

и подставив эти выражения в уравнения объекта и в сопряженные уравнения, получим эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}; \quad (13-16)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial X_i}. \quad (13-17)$$

Соответственно скаляр  $H$  называется гамильтонианом.

Наша задача — найти закон управления  $U(t)$ , дающий в результате совместного решения уравнений объекта и сопряженных уравнений такую траекторию движения  $X(t)$ , для которой значения  $H$  во всех ее точках будут максимальны. Таким образом, искомые функции  $U_j(t)$ , которые входят в указанные выше уравнения, находятся решением последних совместно с уравнениями

$$\frac{\partial H}{\partial U_j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

с учетом также возможности получения максимума  $H$  на границе области допустимых управлений, где отдельные производные  $\partial H / \partial U_j$  могут не обращаться в нуль.

Основная сложность здесь заключается в том, что нам известны не все начальные условия задачи: даны начальные значения  $X(0)$ , но не известны начальные значения  $\psi(0)$  введенной нами вспомогательной величины  $\psi$ .

Если задаться произвольными начальными значениями  $\psi(0)$  и решить совместно уравнения объекта и сопряженные уравнения, получим оптимальную траекторию, которая пройдет мимо заданной конечной точки  $K$  (рис. 13-4, б). Само построение траектории при этом может осуществляться путем разделения времени на достаточно малые интервалы  $\Delta t$  и определения оптимальных значений  $U$  по условию получения максимума значений  $H$  сперва для начального, а затем последовательно для очередных дискретных моментов времени, разделенных интервалами  $\Delta t$ . Искомое оптимальное управление определяется методом последовательных приближений посредством задания последовательно разных начальных значений  $\psi(0)$  до тех пор, пока не будет получена оптимальная траектория, проходящая через заданную конечную точку.

При применении вычислительной машины этот процесс может быть автоматизирован путем организации поиска  $\psi(0)$  по условию минимизации расстояния до находимых траекторий от заданной конечной точки при одновременной максимизации гамильтониана  $H$  на интервалах  $\Delta t$  отдельных просматриваемых траекторий.

Принцип максимума — необходимое и достаточное условие оптимальности только для линейных объектов. Для общего случая нелинейных объектов он является только необходимым [38]. Это означает, что с его помощью находится не оптимальное управление, а некоторая суженная группа допустимых управлений, только среди которых может быть искомое оптимальное управление, если оно вообще существует. Нахождение последнего должно производиться далее, например, перебором. Пример применения принципа максимума приведен в следующем параграфе.

**А. Понятие об оптимальных по быстродействию САУ.  
Теорема об  $n$  интервалах**

Рассмотрим в качестве типовой практически часто встречающуюся задачу управления, оптимального по быстродействию.

В линейной САУ быстродействие может быть сделано сколь угодно большим путем введения соответствующей коррекции. Например, как было показано в § 7-2, в случае аperiodического звена с передаточной функцией  $\frac{k}{Tp+1}$  включение перед ним пропорционально-дифференцирующего звена позволяет полностью скомпенсировать инерционность основного звена и получить бесконечно большое быстродействие, т. е. идеальное звено с  $t_n = 0$ . (Для звена  $n$ -го порядка получение такого же результата требует корректирующих воздействий по  $n$  производным.)

Однако реальные САУ нелинейны — в них всегда существуют ограничения переменных величин и их производных (см. § 8-1). Если же в САУ ограничена хотя бы одна переменная, это ограничивает и время переходных процессов в ней. В частности, упомянутая выше полная компенсация инерционности аperiodического звена первого порядка путем введения дополнительного воздействия по производной в этом случае практически не реализуема, так как при скачкообразном изменении входного сигнала сигнал по его производной будет бесконечно велик и, следовательно, не может быть пропущен звеном без искажения вследствие ограничения (насыщения) его статической характеристики. Например, если этим звеном является электрический двигатель постоянного тока, его выходной величиной — скорость, а входной — напряжение якоря, то из-за ограничения величины этого напряжения максимально допустимым значением (по условию электрической прочности изоляции и механической целостности якоря при действии центробежных сил) время переходного процесса изменения скорости от одного ее значения до другого тоже получается ограниченным.

Начнем рассмотрение задачи оптимального по быстродействию управления с простейшего случая, когда внешнее воздействие, вызывающее переходный процесс, представляет собой ступеньку, т. е. постоянно в течение переходного процесса. Пусть объект управления является линейным аperiodическим звеном первого порядка (рис. 13-5, а), а входной управляющий сигнал  $U$  ограничен по величине некоторым предельным значением  $U_{\text{пр}}$ . (Этим звеном может быть, например, двигатель постоянного тока, у которого вход — напряжение, ограниченное определенным пределом, а выход — скорость вращения вала.) Рассмотрим вопрос, каким образом следует изменять управляющий сигнал  $U$ ,

чтобы обеспечить максимально быстрое изменение сигнала  $X$ , скажем, от нуля до определенного значения  $X_{ст}$ . (В случае двигателя, таким образом, речь идет о максимально быстром его разгоне до определенной скорости.) Начальные условия будем считать пока нулевыми.

Оптимальный процесс управления показан на рис. 13-5, б. Для обеспечения возможно быстрого изменения  $X$  необходимо, очевидно, сигнал  $U$  мгновенно изменить до предельно допустимого значения  $U_{пр}$  и удерживать это значение до тех пор, пока  $X$  не

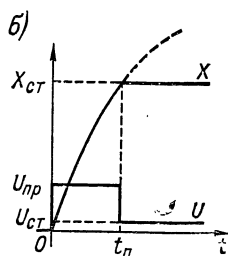
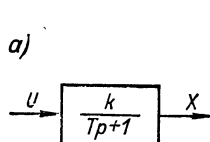


Рис. 13-5. Пример оптимального по быстродействию управления объектом первого порядка

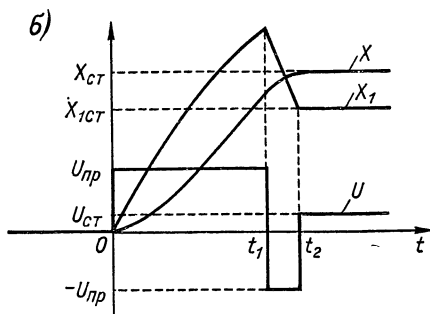
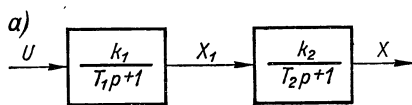


Рис. 13-6. Пример оптимального по быстродействию управления объектом второго порядка

достигнет заданного значения  $X_{ст}$ . При этом  $X$  будет изменяться с максимально возможной, с учетом ограничения  $U$ , быстротой. После этого  $U$  следует мгновенно уменьшить до значения, соответствующего по статической характеристике  $X = X_{ст}$ , т. е. до  $U_{ст} = X_{ст}/k$ . На этом переходный процесс заканчивается. Его длительность  $t_{п}$  определяется инерционностью звена, т. е. постоянной времени  $T$ , величиной ограничения  $U_{пр}$  и, конечно, заданными начальным и конечным значениями  $X$ . При этом, чем больше  $U_{пр}$ , тем меньше  $t_{п}$ : при  $U_{пр} \rightarrow \infty$  время  $t_{п} \rightarrow 0$ . (Последний предел как раз и получается при компенсации инерционности линейного звена введением дополнительного воздействия по производной.)

Аналогично будет обстоять дело и для интегрирующего звена  $k/p$ , только на рис. 13-5, б экспонента заменится прямой линией и будет  $U_{ст} = 0$ .

Пусть теперь имеем линейный объект второго порядка, например, в виде двух последовательно соединенных аperiодических

звеньев первого порядка (рис. 13-6, а) при наличии по-прежнему ограничения  $U$ . (Это может быть тоже задача разгона двигателя, но описываемого уравнением второго порядка.) Оптимальный переходный процесс показан на рис. 13-6, б. Так как сигнал  $U$  ограничен, то ограниченным является и сигнал  $X_1$  на входе второго звена. Его предельное значение  $X_{1\text{пр}} = kU_{\text{пр}}$ . Очевидно, в этом случае входной сигнал  $U$  следует изменять так, чтобы сигнал  $X_1$  на входе второго звена был предельно близок по форме оптимальному управляющему сигналу для звена первого порядка, показанному на рис. 13-5, б. Для этого сигнал  $U$  на входе первого звена вначале мгновенно доводится до своего предельного значения  $U_{\text{пр}}$ , что обеспечивает максимально быстрый рост  $X_1$  в сторону его предельного значения. Затем для возможно быстрого сброса сигнала  $X_1$  до его значения  $X_{1\text{ст}}$ , соответствующего требуемому значению  $X_{\text{ст}}$ , управляющий сигнал  $U$  мгновенно переключается с  $+U_{\text{пр}}$  на  $-U_{\text{пр}}$  и сохраняет это значение до тех пор, пока  $X_1$  не снизится до величины  $X_{1\text{ст}}$ . В этот момент  $U$  мгновенно доводится до значения  $U_{\text{ст}} = X_{1\text{ст}}/k_1$ , на чем процесс управления заканчивается. Из-за наличия первого инерционного звена фронт и спад импульса  $X_1$  на входе второго звена получаются не вертикальными, как на рис. 13-5, б. Соответственно и длительность переходного процесса оказывается больше.

Итак, для двух звеньев первого порядка процесс управления состоит из двух интервалов: в первом  $U = +U_{\text{пр}}$ , а во втором  $U = -U_{\text{пр}}$ .

Аналогично можно показать, что для соединенных последовательно трех звеньев первого порядка оптимальный процесс управления будет состоять из трех интервалов, в каждом из которых управляющий сигнал  $U$  принимает одно из двух своих предельных значений  $\pm U_{\text{пр}}$  с изменением его знака на границах интервалов. При этом знак  $U$  в первом интервале совпадает со знаком конечного значения  $U_{\text{ст}}$ . Такое управление получается в связи с тем, что сигнал на входе второго звена должен быть предельно близок сигналу  $U$  на рис. 13-6, б. Для обеспечения этого управляющий сигнал должен иметь уже три интервала с разными предельными значениями. При этом вследствие инерционности первого звена сигнал на входе второго звена будет в отличие от сигнала  $U$  на рис. 13-6, б изменяться не мгновенно, а по экспоненте.

Экстраполируя, можно заключить, что в общем случае для  $n$  последовательно соединенных линейных звеньев первого порядка или, что то же самое, для линейного объекта  $n$ -го порядка с действительными отрицательными корнями характеристического уравнения *оптимальное управление при наличии ограничения управляющего сигнала состоит из  $n$  интервалов, в каждом из которых этот сигнал принимает свое предельное значение, т. е. управление является релейным. В конце каждого интервала происходит изменение знака управляющего сигнала.* Знак сигнала в начале процесса



управления определяется требуемым направлением изменения выходного сигнала  $X$ .

Этот вывод получен для нулевых начальных условий. При произвольных начальных условиях число интервалов может быть меньше  $n$  (вплоть до одного). Действительно, пусть, например, в момент начала рассматриваемого процесса управления исходное состояние объекта, т.е. значения  $U$ ,  $X$  и их производных, оказалось таким, как в конце  $k$ -го интервала оптимального управления в случае перевода объекта в то же заданное состояние, но при соответственно других, и притом нулевых начальных условиях. Тогда рассматриваемый оптимальный процесс будет содержать, очевидно, только  $(n - k)$  интервалов. Это рассуждение основано на сформулированном в § 13-2 принципе оптимальности, заключающемся в том, что любой конечный участок оптимальной траектории является тоже оптимальной траекторией.

Сформулированное положение о числе интервалов оптимального по быстродействию управления впервые было доказано А. А. Фельдбаумом и носит название *теоремы об  $n$  интервалах*.

Докажем эту теорему строго с помощью принципа максимума Понтрягина в порядке примера его применения [38]. Представим уравнение объекта в виде системы уравнений:

$$\frac{dX_i}{dt} = \varphi_i(X_1, X_2, \dots, X_n) + b_i U, \quad (13-18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

или в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}U. \quad (13-19)$$

Здесь  $U$  — управляющее воздействие, а  $\mathbf{X}$  ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ),  $\boldsymbol{\varphi}$  ( $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ) и  $\mathbf{b}$  ( $b_1, b_2, \dots, b_n$ ) — векторы. Функции  $\varphi_i$  считаем дифференцируемыми. Ограничение принимаем в виде

$$|U| \leq U_{\text{пр}}. \quad (13-20)$$

Согласно (13-14), гамильтониан

$$H = \boldsymbol{\psi} \mathbf{v} = \boldsymbol{\psi} [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}U] = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\psi} \mathbf{b}U, \quad (13-21)$$

где  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}$ . Здесь от  $U$  зависит только второе слагаемое, поэтому с учетом (13-20) максимум  $H$  будет при

$$U = U_{\text{пр}} \text{sign } \boldsymbol{\psi} \mathbf{b} = U_{\text{пр}} \text{sign } \sum_{i=1}^n b_i \psi_i. \quad (13-22)$$

Отсюда следует, что  $U$  все время имеет свою предельную величину  $U_{\text{пр}}$ . Таким образом, *релейный характер оптимального по быстродействию управления справедлив для общего случая нелинейного объекта, описываемого уравнением (13-19).*

Вернемся теперь к линейному объекту. В этом случае уравнения (13-18) принимают вид:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j + b_iU, \quad (13-23)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Согласно (13-15), сопряженные уравнения будут

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{k=1}^n a_{ki}\psi_k, \quad (13-24)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Действительно, в соответствии с (13-23)

$$\frac{dv_k}{dX_i} = \frac{d}{dX_i} \left( \frac{dX_k}{dt} \right) = a_{ki}.$$

Если характеристическое уравнение объекта, соответствующее дифференциальным уравнениям (13-23) при  $U = 0$ , имеет все корни действительные, то же справедливо и в отношении характеристического уравнения для сопряженных уравнений (13-24) [26]. Это значит, что решение уравнений (13-24) имеет вид суммы экспоненциальных составляющих:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij}e^{\alpha_j t}, \quad (13-25)$$

где  $\alpha_j$  — действительные числа, а  $C_{ij}$  — постоянные интегрирования. Следовательно, согласно (13-22),

$$U = U_{\text{пр}} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n C_{ij}e^{\alpha_j t} = U_{\text{пр}} \operatorname{sign} \sum_{j=1}^n B_j e^{\alpha_j t}, \quad (13-26)$$

где

$$B_j = \sum_{i=1}^n b_i C_{ij}.$$

Сумма  $n$  экспонент, входящая в (13-26), как известно, может переходить через нуль не более  $(n - 1)$  раз. Следовательно, число интервалов постоянства знака  $U(t)$  будет не более  $n$ , что и требовалось доказать.

В случае если ограничена не только входная переменная  $U$ , а еще и любое число промежуточных переменных уравнения объекта, число интервалов оптимального управления будет больше. Можно показать, что оно будет равно

$$k = [(n - m) + 1] [(m - l) + 1] \dots - 1, \quad (13-27)$$

где  $n$  — порядок уравнения объекта, связывающего  $X$  с  $U$ , а  $m, l, \dots$  — порядок уравнений, связывающих  $X$  с другими огра-

ниченными по величине промежуточными переменными [15]. Например, если в случае объекта второго порядка, изображенного на рис. 13-6, а, помимо  $U$  ограничена еще и величина  $X_1$ , число интервалов управления, согласно (13-27), будет  $k = (2 - 1 + 1)(1 - 0 + 1) - 1 = 3$ .

В этом случае  $U$  тоже изменяется скачком от одного предельного значения до другого. Однако, если в каком-либо интервале одна из других ограниченных переменных достигнет своего предельного значения,  $U$  нужно изменять таким образом, чтобы эта переменная не превосходила данного предела до очередного момента изменения знака  $U$ , после чего данная переменная начнет

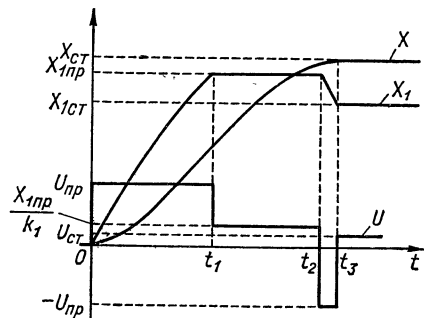


Рис. 13-7. Пример оптимального по быстродействию управления объектом второго порядка при ограничении  $U$  и  $X_1$

изменяться в другом направлении. Таким образом, при ограничении наряду с  $U$  еще и промежуточных переменных объекта оптимальный переходный процесс состоит из интервалов, в каждом из которых  $U$  или какая-либо другая ограниченная величина имеет предельное значение.

На рис. 13-7 показан пример оптимального управления для объекта второго порядка (см. рис. 13-6, а) с ограничением  $U$  и  $X_1$ . Ограничение  $X_1$  создает новый (средний) интервал, на протяжении которого уменьшается форсирующий сигнал  $U$  до вели-

чины  $X_{1пр}/k_1$  для того, чтобы величина  $X_1$  не вышла за допустимый предел  $X_{1пр}$ . В результате переходный процесс получается более длительным, чем при отсутствии ограничения  $X_1$  (см. рис. 13-6, б). Мы рассмотрели оптимальное по быстродействию управление в случае задачи быстрого изменения состояния объекта в соответствии с заданием. Все сказанное полностью справедливо и для переходных процессов, вызванных возмущающими воздействиями, когда речь идет об управлении, обеспечивающем быстрейший возврат объекта к исходному, невозмущенному режиму.

Выше мы уяснили общий характер управления, оптимального по быстродействию, которое оказалось релейным. Для конкретных случаев кривые оптимального управления  $U(t)$  и соответственно процесса  $X(t)$  на выходе объекта могут быть найдены с помощью рассмотренных в § 13-2 вариационных методов.

Также релейным обычно получается оптимальное управление для критерия оптимальности (13-2), соответствующего минимуму расхода рабочего тела (например, топлива). В отличие от управления, оптимального по быстродействию, в этом случае управляющее воздействие принимает поочередно не два, а три дискретных значения:  $+U_{пр}$  («разгон»), 0 (пауза, в течение кото-

рой отсутствует расход рабочего тела, что обеспечивает его экономичность) и  $-U_{пр}$  («торможение»).

Однако, разумеется, оптимальное управление далеко не для всех критериев, типов ограничений и типов объектов оказывается релейным. Даже рассмотренное выше управление, оптимальное по быстродействию, для отдельных типов объектов может оказаться не релейной, а непрерывной «гладкой» функцией. Это имеет место, в частности, когда управляющее воздействие  $U$  является вектором, у которого ограничены не отдельные составляющие, как полагалось выше, а модуль, т. е. когда ограничение задано в виде

$$|U| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_r^2} \leq U_{пр}.$$

Это соответствует, например, случаю управления реактивным двигателем с ограниченной тягой, пропорциональной управляющему воздействию, и поворачивающимся в пространстве [2]. Нерелейным получается оптимальное управление для критерия (13-3), минимизирующего энергию управления, а также для интегральных квадратичных критериев от выходных координат объекта типа интегральных критериев качества переходных процессов (5-18), (5-19).

## Б. Синтез оптимальных САУ

Оптимальные САУ, как и вообще системы управления, могут быть двух типов — разомкнутые и замкнутые.

В простейшем случае, когда изменяющиеся внешние воздействия, включая задание  $G(t)$ , а при нестационарном объекте и его параметры, заранее известны как функции времени, оптимальное управление может быть осуществлено в виде разомкнутой системы программного управления, показанной на рис. 13-8, а. Здесь ПУ — программное устройство, а ИУ — исполнительное устройство. Такие системы управления применяются, например, для вывода космических объектов на орбиту и спуска с нее, в металлорежущих станках с программным управлением, в промышленных роботах с жесткой программой.

Синтез таких САУ сводится к синтезу оптимальной программы управления  $U(t)$ , которая заранее вводится в программное устройство. Оптимальная программа  $U(t)$  и соответствующий ей оптимальный процесс  $X(t)$  на выходе

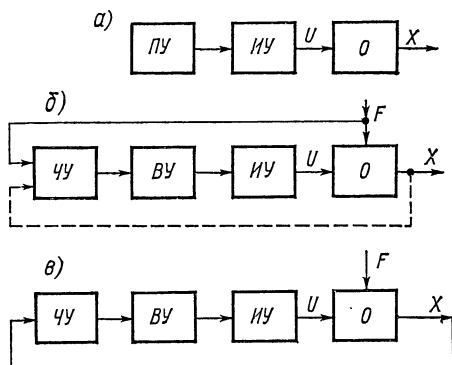


Рис. 13-8. Функциональные схемы оптимальных по быстродействию САУ

объекта рассчитываются с помощью вариационных методов, рассмотренных в § 13-2.

Если изменяющиеся внешние воздействия заранее не известны, но их можно оперативно измерить, оптимальный процесс может быть реализован тоже в виде разомкнутой системы управления, схема которой приведена на рис. 13-8, б. Здесь  $ЧУ$  — чувствительное (измерительное) устройство, а  $ВУ$  — вычислительное устройство, которое рассчитывает оптимальное управление  $U(t)$  по измеренным внешним воздействиям. Показанный штриховой линией канал измерения выходной величины  $X$  объекта  $O$  предназначен для ввода в вычислительное устройство данных о состоянии объекта до начала очередного процесса управления, т. е. для ввода начальных условий. Это необходимо в тех случаях, когда оптимальное управление  $U(t)$  зависит от начальных условий.

Такие разомкнутые САУ применяются в тех случаях, когда внешнее воздействие изменяется скачком, после чего достаточно долго сохраняет постоянное значение или изменяется по какому-либо установившемуся закону. В частности, такие разомкнутые САУ применяются для оптимальной отработки отдельных дискретных заданий  $G$ , заключающихся в переводе объекта из исходного состояния в некоторое конечное. В этом случае в  $ВУ$  вводится очередное задание  $G$ , по которому рассчитывается оптимальная программа  $U(t)$ , и далее осуществляется управление объектом в виде обычного программного управления. Примером подобных САУ являются оптимальные системы управления курсом самолета или корабля. В этих случаях в качестве вычислительного устройства используется бортовая вычислительная машина, которая обычно работает в составе управляющего устройства данной системы параллельно с выполнением других задач.

В случае когда внешнее воздействие является возмущением, такая разомкнутая система представляет собой систему оптимального управления по возмущению, т. е. систему автоматической компенсации, обеспечивающую максимально быстрое устранение влияния возмущения на режим объекта. Таким образом, такая система заменяет (или дополняет) систему линейной компенсации, когда полная инвариантность  $X$  от  $F$  (см. § 7-4) не достижима вследствие ограничения переменных. Задача этой разомкнутой системы, как правило, сложнее, чем в случае отработки задающего воздействия, из-за необходимости более быстрого вычисления оптимального управления. Поэтому иногда сразу после выявления момента начала изменения возмущения в действие вводится заранее рассчитанная программа управления, обеспечивающая по возможности близкое к оптимальному, по крайней мере, начало процесса компенсации, а затем после определения оптимальной программы осуществляется замена или корректировка первой программы.

Синтез рассматриваемых разомкнутых САУ сводится к определению алгоритма расчета оптимального управления  $U(t)$  при

неизвестных заранее значениях внешних воздействий, которые затем вводятся в вычислительное устройство системы в процессе работы. В отдельных случаях этот алгоритм удается свести к выбору программы из набора заранее рассчитанных стандартных программ. В частности, это имеет место, когда все многообразие внешних воздействий, в свою очередь, может быть сведено к конечному числу типовых воздействий. В этом случае задача вычислительного устройства заключается в том, чтобы распознать тип воздействия и включить соответствующую ему оптимальную программу управления объектом.

Наиболее совершенным, хотя соответственно и наиболее сложным типом оптимальных САУ, являются замкнутые САУ с управлением в функции выходной величины объекта и ее производных и как их развитие — оптимальные комбинированные САУ. Преимущества этих оптимальных систем те же, что и вообще замкнутых САУ перед разомкнутыми. Они заключаются в большей точности за счет учета реального состояния объекта в процессе управления и возможности тем самым корректировать неизбежные отклонения от оптимального процесса вне зависимости от вызвавших их причин (включая неточное знание параметров объекта, начальных условий, всех внешних воздействий).

Синтез оптимальной замкнутой САУ заключается в нахождении оператора управляющего устройства в виде зависимости  $U$  от  $X$ , обеспечивающей оптимальный процесс  $X(t)$  на выходе объекта при заданных внешних воздействиях и начальных условиях.

В следующем п. В настоящего параграфа дан пример точного решения этой задачи с помощью фазовой плоскости для системы управления линейным объектом второго порядка. В общем случае решение этой задачи осуществляется с помощью рассмотренных выше вариационных методов, но оно сложнее, чем решение задачи нахождения оптимальных функций времени  $U(t)$  и  $X(t)$ . В ряде случаев эта задача может быть решена путем определения для данных внешних воздействий и начальных условий оптимальных функций  $U(t)$  и  $X(t)$ , а затем нахождения исключением из этих зависимостей времени  $t$  оптимальной зависимости  $U(X)$ , выражающей управляющее воздействие  $U$  через величину  $X$  и ее производные. При этом, однако, дополнительно надо исследовать, в каком диапазоне изменений внешних воздействий и начальных условий полученный закон управления будет обеспечивать оптимальный или достаточно близкий к нему процесс.

Вследствие сложности задачи прямого синтеза оптимального оператора управляющего устройства  $A_{\text{уп}}(X)$  не существует общего метода ее решения. Советским ученым А. М. Летовым в 1960 г. был сформулирован наиболее общий подход к решению этой задачи, названной им задачей аналитического конструирования регулятора [2, 3]. С помощью вариационных методов удается чаще всего найти лишь класс функций,

к которым относится оптимальный оператор. В этом случае искомые функции обычно можно представить конечным числом неизвестных параметров, например разложением их в ряд. После этого значения этих параметров могут быть найдены с помощью численных методов оптимизации на ЭВМ по условию обеспечения минимума выбранного критерия оптимальности.

Наиболее полно разработаны методы такого синтеза для линейных объектов и объектов с нелинейностями, которые могут быть представлены степенными рядами [2, 18, 38]. К таким методам относится, в частности, метод последовательной оптимизации, описанный в следующем п. Г настоящего параграфа.

На рис. 13-8, *в* показана схема замкнутой оптимальной САУ. Важно отметить, что оптимальная зависимость  $U(X)$  обычно для достаточно широкого класса воздействий не зависит от конкретного вида этих воздействий и начальных условий, т. е. инвариантна относительно их. Благодаря этому в замкнутой системе, изображенной на рис. 13-8, *в*, будет осуществляться оптимальное управление объектом вне зависимости от конкретного характера изменения воздействий во времени, если только это воздействие находится в пределах определенного класса функций. В этом и заключается упомянутое выше преимущество замкнутых САУ перед ранее рассмотренными разомкнутыми системами.

В частности, в случае оптимального по быстродействию управления линейным объектом с ограниченным управляющим воздействием или ограниченными любыми промежуточными переменными объекта оптимальная зависимость  $U(X)$  инвариантна относительно начальных условий и воздействия, приложенного в точке  $X$ , изменяющегося по параболическому закону

$$F(t) = B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m, \quad (13-28)$$

где  $B_i$  — произвольные величины, постоянные в течение отдельного переходного процесса [38]. При этом ограничение представляется в виде ограничения величины суммы производных выходной величины объекта

$$|(b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_q p^{n-q}) X|,$$

а величина степени  $m$  в (13-28) должна быть меньше порядка младшей производной в этой сумме, т. е. ограничена неравенством

$$m < (n - q).$$

Ограничение управляющего воздействия  $U$  всегда можно привести к указанному выше ограничению суммы производных, используя уравнение объекта  $Q(p)X = R(p)U$ . (Например, ограничение  $U$  для объекта с астатизмом  $r$ -го порядка при  $R(p) = k$  эквивалентно, согласно уравнению объекта, ограничению величины  $Q(p)X$ , т. е. суммы производных порядка от  $n$  до  $r$ . Соответственно здесь будет  $m < r$ .)

Класс воздействий (13-28) включает в себя ступенчатые воздействия  $[F(t) = B_0]$ , воздействия, растущие по линейному или степенному закону до  $m$ -го порядка, и комбинацию этих воздействий.

Сформулированное выше условие независимости оптимального закона управления  $U(X)$  от внешнего воздействия можно применить как к задающему воздействию, так и к возмущению, приложенному в любой точке объекта. В последнем случае надо предварительно преобразовать схему системы, перенеся это возмущение к выходу объекта, т. е. в точку  $X$ . (При этом изменяется выражение для возмущения в соответствии с передаточной функцией части системы, заключенной между местом приложения возмущения и выходом объекта.)

В общем случае оптимальная зависимость  $U(X)$  является нелинейной, т. е. ее можно представить в виде

$$U = A_{yy}X, \quad (13-29)$$

где  $A_{yy}$  — нелинейный оператор. Порядок зависимости  $U(X)$  (порядок оператора  $A_{yy}$ ) определяется порядком связывающего  $X$  с  $U$  уравнения объекта, на основании которого она находится. Поэтому зависимость  $U(X)$  включает в себя величину  $X$  и ее  $(n-1)$  производных ( $n$  — порядок объекта), совокупность которых полностью определяет состояние объекта.

Наиболее общим случаем оптимальных САУ являются комбинированные системы, в которых управление осуществляется в функции как от  $X$ , так и внешних воздействий, т. е. в виде зависимости  $U(X, G, F)$ . Такая система состоит из разомкнутой системы оптимального программного управления и замкнутой системы автоматического управления, устраняющей отклонения от предписанного программой оптимального режима работы объекта, вызванные различными причинами. Комбинированные оптимальные САУ обладают большими возможностями по сравнению с просто замкнутыми оптимальными САУ. В частности, например, введение в оператор управляющего устройства внешних воздействий позволяет соответственно расширить класс этих воздействий, для которых обеспечивается оптимальное управление объектом, по сравнению с классом, соответствующим инвариантной оптимальной зависимости  $U(X)$ , реализуемой замкнутой системой. Еще сильнее достоинства комбинированных оптимальных систем проявляются при рассмотрении вопроса о практической реализации оптимальных САУ и о переходе в связи с этим к квазиоптимальным системам, рассмотренным ниже в п. Г настоящего параграфа. Как и в обычных САУ, использование информации о внешних воздействиях позволяет в комбинированных системах существенно упростить управляющее устройство замкнутой системы, оставив за последней только задачу устранения отклонений, вызванных изменениями внешних воздействий относительно их учетных значений.



Критерии оптимальности для синтеза программы разомкнутого управления и для синтеза закона управления замкнутой системы в общем случае могут быть различными. Например, в случае синтеза автопилота летательного аппарата программа управления может быть оптимизирована по условию минимума расхода топлива, а закон управления замкнутой системы, устраняющей отклонения от программы, — по какому-либо критерию качества переходного процесса или по точности. Эти критерии более существенны для замкнутой системы, чем расход топлива, поскольку может быть заведомо известно, что дополнительный расход топлива, вызванный действием этой системы, будет во всяком случае во много раз меньше полного расхода топлива, необходимого для выполнения программы полета.

В некоторых случаях отдельные каналы оптимальной САУ могут быть вообще не оптимизированы из-за незначительности получаемого при их оптимизации эффекта или технической сложности реализации. Например, оптимальная замкнутая САУ может быть дополнена компенсационными каналами, осуществляющими только частичную компенсацию некоторых возмущений, но при этом существенно облегчающими режим работы основной замкнутой системы, что может позволить соответственно упростить ее структуру.

Рассматриваемый синтез оптимальных САУ по одному, хотя и важному критерию при учете остальных требований к системе в виде ограничений не дает, как уже говорилось выше, полного решения задачи синтеза и требует последующей коррекции найденного оператора управляющего устройства. Это связано прежде всего с тем, что при таком синтезе, как правило, не удается учесть действительно всех требований к системе даже в виде ограничений. Очень часто ряд требований не удается выразить математически или связать с параметрами, учитываемыми при синтезе (например, вес, результирующая надежность и т. п.) Так, при синтезе рассмотренных выше оптимальных по быстродействию САУ мы не учитываем обязательного требования обеспечения устойчивости установившихся режимов системы. В результате этого система может оказаться неустойчивой в малом в заданной точке нового установившегося режима. Действительно, оптимальное по быстродействию управление является релейным, и поэтому, когда оно оказывается двухпозиционным, так что управляющее воздействие может принимать только два своих предельных значения  $\pm U_{\text{пр}}$ , установившимся режимом после окончания оптимального переходного процесса могут быть только автоколебания относительно заданной точки равновесия, при которых  $U$  попеременно переключается с  $+U_{\text{пр}}$  на  $-U_{\text{пр}}$  (см. одиннадцатую главу). Конечно, эти автоколебания могут быть достаточно малы по амплитуде и поэтому допустимы, однако чаще всего с ними приходится особо бороться. Для этого управляющее устройство, синтезированное для обеспечения оптимального про-

цесса управления, необходимо дополнительно изменить из соображений устойчивости. Здесь возможны следующие пути.

Проще всего ввести у исполнительных реле управляющего устройства зону нечувствительности, внутри которой система будет останавливаться, т. е. перейти к трехпозиционным релейным САУ (см. одиннадцатую главу). Недостатком этого способа ликвидации автоколебаний является возникновение соответствующей этой зоне нечувствительности дополнительной статической ошибки системы, т. е. снижение точности. Если это недопустимо, систему усложняют так, чтобы в пределах зоны нечувствительности исполнительного реле она работала как система непрерывного действия. Это значит, что при подходе к новому установившемуся значению релейное управление заменяется непрерывным линейным и переходный процесс в малом заканчивается, как в системе непрерывного действия. Таким образом, получается двойное управление: релейное при больших  $X$  и непрерывное при малых. В наиболее сложном случае объект снабжается двумя самостоятельными управляющими устройствами: одно осуществляет стабилизацию в малом, а второе — оптимальное управление в большом. Первое устройство, в свою очередь, может быть оптимизировано, например, по точности.

## В. Синтез оптимальной по быстродействию замкнутой САУ

На рис. 13-9, *а* показана схема позиционной следящей системы непрерывного действия, состоящая из двигателя  $D$ , усилителя  $U$ , потенциометра обратной связи  $\Pi$ , с которого снимается напряже-

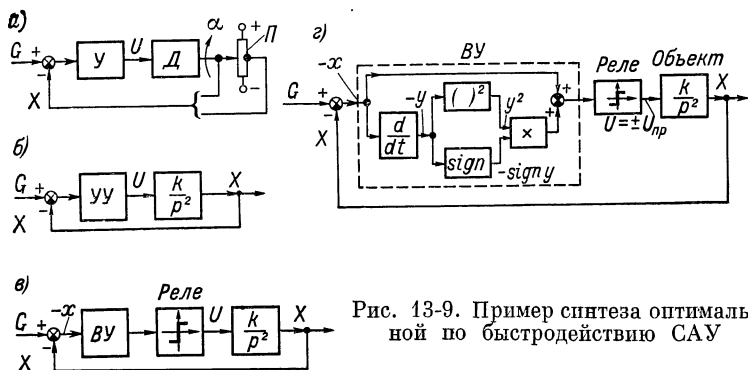


Рис. 13-9. Пример синтеза оптимальной по быстродействию САУ

ние  $X$ , пропорциональное углу поворота вала двигателя  $\alpha$ , и элемента сравнения. При отсутствии каких-либо ограничений, считая систему линейной, можно обеспечить любое требуемое качество переходных процессов, например, с помощью обычных линейных корректирующих звеньев (см. седьмую главу). Учтем теперь ограничение величины напряжения  $U$  на входе двигателя

и рассмотрим, каково должно быть управляющее устройство, обеспечивающее минимум длительности переходных процессов (рис. 13-9, б).

Объект, т. е. двигатель, опишем следующими уравнениями:

$$P^2 X = kU; \quad (13-30)$$

$$|U| \leq U_{\text{пр}}. \quad (13-31)$$

Внешнее воздействие представим ступенчатым изменением  $G$  произвольной величины при произвольных начальных условиях.

Из изложенного выше (см. теорему об  $n$  интервалах в п. А настоящего параграфа) следует, что в данном случае на выходе управляющего устройства  $УУ$  должно стоять двухпозиционное поляризованное реле, выдающее сигнал  $U = \pm U_{\text{пр}}$ . Поэтому схему системы можно представить так, как это сделано на рис. 13-9, в. Здесь  $ВУ$  — вычислительное устройство, оператор которого подлежит определению.

Поскольку в данном случае уравнение объекта имеет всего второй порядок, синтез  $ВУ$  проведем для наглядности с помощью фазовой плоскости.

Подставив выражение (13-31) как равенство в уравнение (13-30) и введя новую переменную  $x = \dot{X} - G$ , запишем уравнение процесса управления в следующем виде:

$$P^2 x = B, \quad (13-32)$$

где  $B = \pm kU_{\text{пр}}$ .

Решение уравнения представим так:

$$x = \frac{B}{2} (t - C_0)^2 + C, \quad (13-33)$$

где  $C_0, C$  — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Введем обозначение

$$y = \frac{dx}{dt}.$$

Согласно уравнению (13-33),

$$y = B(t - C_0). \quad (13-34)$$

Исключив из уравнений (13-33) и (13-34) время, получим уравнение фазовых траекторий оптимального процесса управления, которые являются парабололами:

$$x = \frac{y^2}{2B} + C. \quad (13-35)$$

Соответствующий фазовый портрет приведен на рис. 13-10, а. Сплошными линиями (со знаком  $-$ ) изображены траектории для  $B < 0$ , т. е. для  $U = -U_{\text{пр}}$ , а штриховыми линиями (со знаком  $+$ ) — для  $B > 0$ , т. е. для  $U = +U_{\text{пр}}$ .

Установившийся режим системы соответствует началу координат, где  $x = \dot{X} - G = 0$ . Всякое изменение  $G$  выводит изобра-

жающую точку из начала координат. Целью управления является возврат ее обратно. Это происходит по фазовым траекториям, подобным изображенным на рис. 13-10, а, в результате соответствующего изменения управления  $U$ . Толстыми линиями на рис. 13-10, а показаны два конкретных процесса управления для  $G > 0$  (траектория  $M_0MO$ ) и для  $G < 0$  (траектория  $M'_0M'O$ ) в случае, когда при  $t = 0$  значение  $y = dx/dt = 0$ . Точки  $M$  и  $M'$  соответствуют моменту, когда должно осуществляться переключение реле, т. е. моменту изменения знака  $U$ . При любом значении  $G$  оптимальная траектория состоит из двух отрезков

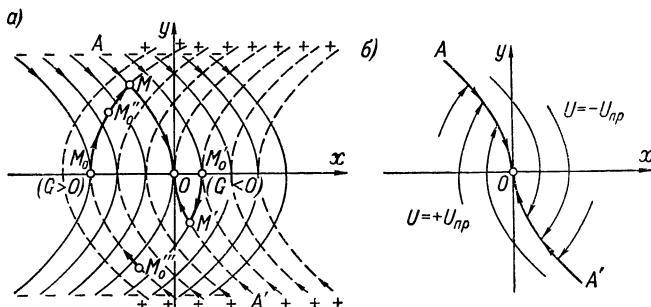


Рис. 13-10. Фазовый портрет оптимальной по быстродействию САУ

парабол. Первая парабола зависит от начального рассогласования  $G$ , а участок второй параболы всегда принадлежит линии  $AOA'$ . Эта линия является линией переключения. По ней изображающая точка движется в начало координат. Процесс управления соответственно состоит из двух интервалов. Второй интервал начинается в момент попадания изображающей точки на линию переключения  $AOA'$ , когда происходит переключение реле и соответственно изменение знака  $U$ .

В общем случае, когда в начальный момент изменения  $G$  значение  $y = dx/dt \neq 0$ , т. е. двигатель не стоит, фазовая траектория может начинаться в любой точке фазового пространства (например, в точках  $M''_0, M'_0$ ). В частности, если в начальный момент точка окажется на линии переключения  $AOA'$ , оптимальный процесс управления будет состоять всего из одного интервала.

Из изложенного следует, что алгоритм работы вычислительного устройства  $ВУ$ , обеспечивающий максимальное быстродействие рассматриваемой следящей системы, сводится к тому, чтобы сигнал на выходе  $ВУ$  был положителен, когда изображающая точка находится ниже линии переключения  $AOA'$  или на ее участке  $OA'$ , и отрицателен, когда она выше этой линии или лежит на ее участке  $AO$ . Сказанное иллюстрируется рис. 13-10, б.

Согласно (13-35), уравнение линии  $A0A'$  можно представить в виде

$$x = -(\operatorname{sign} y) \frac{y^2}{2B}$$

или

$$x + (\operatorname{sign} y) \frac{y^2}{2B} = 0. \quad (13-36)$$

Действительно, для этой линии в уравнении (13-35)  $C = 0$ , так как при  $y = 0$  значение  $x = 0$ , и знак перед членом  $y^2/(2B)$  обратен знаку  $y$  (см. рис. 13-10, а).

Зная уравнение линии переключения, легко определить оператор вычислительного устройства, которое управляет реле. Когда изображающая точка находится выше линии  $A0A'$  и требуется иметь  $U = -U_{\text{пр}}$ , левая часть уравнения (13-36) положительна, а когда изображающая точка лежит ниже этой линии и требуется  $U = +U_{\text{пр}}$ , левая часть этого уравнения отрицательна. Поэтому оператор всего управляющего устройства в целом, включая реле, может быть представлен в виде

$$U = -U_{\text{пр}} \operatorname{sign} \left[ x + (\operatorname{sign} y) \frac{y^2}{2B} \right]. \quad (13-37)$$

Соответствующая структурная схема системы показана на рис. 13-9, г. (Здесь звено, вырабатывающее сигнал  $\operatorname{sign} y$ , очевидно, представляет собой просто двухпозиционное реле.)

Как было ранее указано [см. выражение (13-28)], в данном случае следящей системы второго порядка синтезированное управляющее устройство будет осуществлять оптимальное по быстродействию управление не только при ступенчатых изменениях внешнего сигнала, но и при наличии составляющей, изменяющейся с постоянной скоростью, т. е. при

$$G(t) = B_0 + B_1 t,$$

где  $B_0$  и  $B_1$  — любые постоянные в течение переходного процесса величины.

Для внешнего сигнала, изменяющегося по другому закону, синтезированный выше оператор вычислительного устройства не будет обеспечивать оптимального процесса управления. Например, если

$$G(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2,$$

т. е. входной сигнал содержит составляющую, изменяющуюся с постоянным ускорением, то, согласно (13-28), не существует оператора  $U(X)$ , обеспечивающего оптимальное управление без измерения внешнего воздействия. Для обеспечения оптимального процесса управления в этом случае необходимо перейти к комбинированному управлению, введя в оператор вычислительного устройства воздействие по второй производной входного сигнала.

Соответствующий оптимальный оператор может быть синтезирован тоже с помощью фазовой плоскости [38].

В установившемся состоянии в синтезированной выше системе, как релейной двухпозиционной, будут существовать автоколебания. Если амплитуда их недопустимо велика, следует принять необходимые меры, о которых говорилось в конце предыдущего п. В настоящего параграфа, например ввести в выходное реле зону нечувствительности и т. п.

### Г. Квазиоптимальные САУ

В рассмотренном выше простейшем примере замкнутой оптимальной САУ с объектом второго порядка для осуществления оптимального управления потребовалось выявлять производную выходной величины и осуществлять ряд математических операций (см. рис. 13-9, з). При более сложных объектах оператор оптимального управляющего устройства получается соответственно более сложным для реализации, особенно в связи с необходимостью выявлять идеальные производные выходной величины до  $(n - 1)$ -го порядка. Вместе с тем обычно имеется возможность существенно упростить управляющее устройство ценой практически незначительного отхода от условий оптимальности. В результате получаются САУ, близкие к оптимальным, т. е. квазиоптимальные.

Возможны следующие два основных пути синтеза квазиоптимальных систем: упрощение предварительно найденного строго оптимального оператора управляющего устройства и синтез оптимального оператора для предварительно упрощенного объекта и при введении упрощающих ограничений на вид искомого оператора.

Достоинством первого пути является то, что в ходе упрощения имеется возможность сравнения получаемого процесса с точным оптимальным процессом и, следовательно, известно, как далеко мы от него отходим. В частности, например, в случае САУ, оптимальных по быстродействию, в результате такого упрощения практически при любом порядке уравнения объекта число интервалов управления сводят к двум, в редких случаях к трем. В замкнутой САУ для осуществления такого квазиоптимального управления оказывается достаточным применить, помимо самой выходной величины объекта, сигналы по производным выходной величины не выше второго порядка (или эквивалентным им другим координатам объекта).

Второй путь синтеза квазиоптимальных САУ проще первого пути, так как позволяет с самого начала иметь дело с простым объектом. Его естественным недостатком является отсутствие при этом общей оценки степени отхода от точного оптимального процесса. Этот путь основан прежде всего на предварительном упрощении уравнения объекта посредством возможной линеаризации или отбрасывания второстепенных нелинейностей и

снижения порядка уравнения до второго или третьего. Снижение порядка уравнения объекта осуществляется отбрасыванием малых постоянных времени. Для уменьшения допускаемой при этом погрешности следует соответственно увеличить учитываемые постоянные времени или ввести дополнительное временное запаздывание [20].

Наряду с упрощением объекта задачу синтеза квазиоптимального управляющего устройства упрощают, как было сказано выше, ограничением класса синтезируемого оператора управляющего устройства. Эти ограничения обычно сводятся к следующему. Во-первых, исходя из удобства расчета, а также простоты технической реализации, часто ограничивают класс функций  $U(X)$ , например, функциями, аппроксимируемыми различными рядами. Во-вторых, учитывая реально имеющиеся ограниченные технические возможности для измерения отдельных внешних воздействий, выходных координат объекта и их производных, соответственно ограничивают перечень этих переменных, допустимых для использования в операторе управляющего устройства. В результате таких упрощений сложная задача синтеза оператора управляющего устройства сводится к оптимизации значений его параметров при предварительно определенной указанными выше ограничениями структуре.

Для решения подобным образом задач синтеза оператора управляющего устройства может быть использован метод последовательной оптимизации, разработанный В. М. Пономаревым [18]. Метод заключается в следующем. Оптимальный закон управления отыскивается в классе степенных функций, например, в виде следующих рядов:

$$U_i = k_{i1}X_1 + k_{i2}X_2 + \dots + k_{in}X_n + k_{i(n+1)}X_1^2 + \\ + k_{i(n+2)}X_1X_2 + \dots + k_{ip}X_n^2 + \dots + k_{iq}X_1X_2 \dots X_m + \dots + \\ + k_{ih}X_n^m, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (13-38)$$

Здесь  $m$  — принятая степень ряда, а величины индексов  $p$ ,  $q$  и  $h$  определяются порядковым местом соответствующих членов в ряде.

В такие же степенные ряды разлагаются все нелинейные функции, входящие в уравнения объекта, представленные в виде (13-7). Задача синтеза сводится к отысканию значений коэффициентов  $k_{ij}$  выражения (13-38), дающих минимум выбранному критерию оптимальности при заданных ограничениях, начальных условиях, внешних воздействиях и всех параметрах объекта. Подставив выражения (13-38) в уравнения объекта (13-7) и решив их, например, методом последовательных приближений, получим решение в виде функций искомых коэффициентов  $k_{ij}$ , т. е. в виде  $X_i(k_{ij}, t)$  и  $U_i(k_{ij}, t)$ . Подставив затем эти выражения в формулу для критерия оптимальности, получим его выражение тоже в виде функции  $Q(k_{ij})$  этих коэффициентов. К такому же виду приво-

дятся и ограничения. Задача нахождения оптимальных значений коэффициентов  $k_{ij}$  относится к классу задач нелинейного программирования, поскольку ограничения наряду с критерием оптимальности тоже нелинейно зависят от оптимизируемых коэффициентов. В методе последовательной оптимизации предложены алгоритмы приближенного решения этой задачи нахождения оптимальных значений коэффициентов  $k_{ij}$  на ЭВМ.

### § 13-4. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

#### А. Статистические критерии оптимальности

В рассмотренных в предыдущем параграфе оптимальных САУ оптимальное управление объектом осуществляется при каждой реализации процесса управления. Это обеспечивается за счет использования управляющим устройством полной информации о состоянии объекта и внешних воздействиях. Как было показано, в простейшем случае такое оптимальное управление реализуется в виде разомкнутых систем программного управления. Однако чаще решение находится в виде замкнутой САУ, обеспечивающей оптимальную зависимость  $U(X)$ , инвариантную относительно всего множества внешних воздействий, и при необходимости (в частности, когда указанная инвариантность не получается) дополненной измерением отдельных внешних воздействий путем перехода к комбинированному управлению в виде зависимости  $U(X, F, G)$ . Однако такое оптимальное управление достижимо далеко не всегда вследствие того, что часто невозможно получить всю необходимую для этого информацию о состоянии объекта (его параметрах, выходных величинах и их производных) и о внешних воздействиях. В этом случае приходится переходить к статистическому представлению этих величин. Соответственно и оптимизация при этом может быть осуществлена только в статистическом смысле, т. е. не для каждого отдельного процесса управления, а в среднем для всего множества его реализаций. В этом случае, например, при оптимизации управления по быстродействию в качестве критерия оптимальности берется среднее значение времени процесса  $t_n$ , т. е. его математическое ожидание, определяемое для статистически заданных внешних воздействий и параметров объекта.

В таких статистически оптимальных САУ качество управления будет, естественно, хуже как для каждого процесса в отдельности, так и в среднем, чем в рассмотренных ранее детерминированно оптимальных САУ, поскольку там обеспечивается теоретически возможный для данного объекта минимум критерия оптимальности при каждой реализации процесса управления.



Рассмотрим статистические критерии оптимальности, применяемые при синтезе таких статистически оптимальных систем. Часто в качестве этих критериев берут среднее значение критерия оптимальности, выбранного для оценки отдельных реализаций процесса и используемого в детерминированной задаче. Например, в случае оптимизации по быстрдействию берут, как упоминалось выше, среднее значение времени процесса  $t_n$ , т. е. величину  $M[t_n]$ .

Если требуется минимизировать ошибку управления, в качестве статистического критерия оптимальности берут среднее значение квадрата отклонения  $X$  от  $G$ , т. е. дисперсию. Условие оптимальности соответственно имеет вид:

$$M\{[X(t) - G(t)]^2\} = \min. \quad (13-39)$$

Этот критерий, в частности, использовался нами в § 3-2 для нахождения оптимальной передаточной функции линейной САУ при стационарных случайных возмущениях и задающем воздействии.

В задачах, подобных задаче обнаружения сигнала, т. е. определения факта его наличия, в качестве минимизируемого критерия применяется вероятность ошибочного решения, т. е. условие оптимальности имеет вид:

$$P_{\text{ош}} = P_{\text{л.о}} + P_{\text{п.с}} = \min, \quad (13-40)$$

где  $P_{\text{ош}}$  — вероятность ошибочного решения;  $P_{\text{л.о}}$  — вероятность ложного обнаружения сигнала;  $P_{\text{п.с}}$  — вероятность потери сигнала.

Этот критерий оптимальности называется критерием Котельникова или критерием идеального наблюдателя.

Такой критерий можно, например, применить при решении задачи на поражение цели, если существен только факт попадания, а не величина ошибки в виде отклонения от центра цели. (В случае промаха не имеет значения, на каком расстоянии от цели прошла траектория.)

В ряде случаев учитываемые в формуле (13-40) две составляющие ошибки представляют собой существенно неодинаковую опасность, причем ложное обнаружение (ложная тревога) более нежелательно. Тогда критерий (13-40) дополняют условием, что вероятность ложного обнаружения должна быть снижена до определенного допустимого уровня  $P_{\text{л.о}} = C$ , т. е. он превращается в условную вероятность оптимального решения, и условие оптимальности принимает вид:

$$P_{\text{п.с}} = \min \text{ при } P_{\text{л.о}} = C. \quad (13-41)$$

Этот критерий называется критерием Неймана — Пирсона.

Перечисленные и другие подобные им статистические критерии могут быть обобщены в так называемый критерий среднего риска. Условие оптимальности при этом можно записать так:

$$\rho(A) = M[l(G, X)] = \min. \quad (13-42)$$

Здесь  $\rho(A)$  — средний риск, представляющий собой среднее значение некоторой функции  $l(G, X)$  задания  $G$  и реализации  $X$  на выходе системы, которая называется функцией потерь. Конкретный вид функции потерь определяется задачей системы. Это может быть время процесса, расход горючего и т. п. Стоящая в скобках после  $\rho$  величина  $A$  обозначает оператор системы, связывающий  $X$  с  $G$ . Он входит в выражение для среднего риска. Указывая оператор  $A$  в скобках, отмечаем, что минимизация среднего риска осуществляется выбором оператора системы (точнее — варьируемой части в виде управляющего устройства), что и является задачей синтеза оптимальной САУ.

Величина среднего риска  $\rho$ , найденная для одного определенного сигнала  $G$ , называется условным риском и соответственно обозначается

$$\rho(A/G) = M[l(G, X)/G]. \quad (13-43)$$

Условный риск, таким образом, — это среднее значение функции потерь при многократной реализации системой одного и того же сигнала  $G$ . Согласно формуле (II-49), условный риск вычисляется следующим образом:

$$\rho(A/G) = M[l(G, X)/G] = \int_{\Omega_X} l(G, X) p(X/G) d\Omega_X. \quad (13-44)$$

Здесь  $p(X/G)$  — условная плотность вероятности величины  $X$ , т. е. плотность вероятности  $X$  при определенном фиксированном значении  $G$ . Через  $\Omega_X$  обозначена область возможных значений  $X$ , и, таким образом, показано, что интегрирование осуществляется по всем этим значениям  $X$ .

На основании равенства (13-44) величина среднего риска может быть выражена через условный риск следующим образом:

$$\rho(A) = M[\rho(A/G)] = \int_{\Omega_G} \rho(A/G) p(G) d\Omega_G. \quad (13-45)$$

Знак  $G$  под символом  $M$  конкретизирует, что усреднение осуществляется по всем возможным  $G$ . Область последних обозначена через  $\Omega_G$ .

Нетрудно показать, что все перечисленные ранее критерии могут рассматриваться как средний риск при соответствующем выборе функции потерь. Соответственно условие оптимальности (13-39) в виде минимума дисперсии получается из условия (13-42) минимума среднего риска, если взять функцию потерь

$$l(G, X) = (X - G)^2.$$

Критерий Котельникова соответствует

$$l(G, X) = \begin{cases} 0 & \text{при } X = G; \\ 1 & \text{при } X \neq G. \end{cases}$$

Поскольку среднее значение функции  $l(G, X)$  равно сумме произведений двух ее возможных значений 1 и 0 на вероятности  $P_{\text{ош}}$  и  $(1 - P_{\text{ош}})$  соответствующих решений — ошибочного и правильного, то в этом случае

$$M[l(G, X)] = 1 \cdot P_{\text{ош}} + 0 \cdot (1 - P_{\text{ош}}) = P_{\text{ош}}.$$

Решение задачи оптимизации управления с помощью рассмотренных выше статистических критериев оптимальности, обобщенных в виде критерия минимального риска, требует в общем случае знания вероятностных характеристик всех приложенных к системе воздействий. Задачи такого типа, т. е. требующие подобных априорных знаний, а также соответствующие им критерии и решения называются **бейесовыми** и по имени английского ученого Бейеса.

### **Б. Минимаксный критерий оптимальности**

В ряде случаев необходим другой подход к оптимизации, основанный на критерии в виде максимального условного риска, т. е. на условии

$$\max_G \rho(A/G) = \min. \quad (13-46)$$

(Запись  $\max_G$  читается «максимум по  $G$ » и означает максимальное значение  $\rho(A/G)$  из всех его значений, соответствующих всем возможным значениям  $G$ .) Этот критерий называется **минимаксным**. Смысл его состоит в следующем. Каждому сигналу  $G$  соответствует свое значение условного риска  $\rho(A/G)$ . Рассматриваемый подход означает минимизацию максимального значения условного риска из всех значений, соответствующих различным  $G$ , т. е. получение **наилучшего результата в наихудшей ситуации**. Для других  $G$  и в среднем по всем  $G$  этот критерий дает соответственно худший результат, т. е. повышенное значение функции потерь, но зато в случае самого неблагоприятного сигнала  $G$  функция потерь будет меньше, чем при минимизации среднего риска.

Минимаксный критерий, согласно формуле (13-44) для условного риска, не требует знания вероятностных характеристик входного сигнала  $G$  в отличие от критерия минимума среднего риска. Применяется он в тех случаях, когда распределение  $G$  неизвестно, однако можно полагать, что наиболее вероятными будут именно самые неблагоприятные ситуации. Такое положение имеет место в так называемых **условиях организованного противодействия**, когда приложенным к системе внешним воздействиям специально придают предельно

неблагоприятные для работы системы значения. Примером такой конфликтной ситуации может быть стрельба управляемой ракетой в маневрирующий летательный аппарат противника и другие задачи преследования. В этом примере  $G$  — это координаты цели, а  $X$  — координаты ракеты. Задачей системы управления ракетой является обеспечение в конце траектории ракеты встречи ее с целью. Очевидно, что цель, в свою очередь, обнаружив преследователя, будет перемещаться таким образом и производить такие действия, чтобы предельно затруднить задачу преследователя.

Минимаксный критерий также используют и при отсутствии конфликтной ситуации, если по каким-то причинам необходимо обеспечить наилучшее качество работы системы именно в наиболее тяжелых ситуациях. Такой подход часто целесообразен, например, для систем управления объектом в аварийных ситуациях. Иногда этот критерий применяется и просто из-за полного отсутствия данных о законе распределения внешних воздействий. Однако в последнем случае получается предельно пессимистическое решение, и поэтому более оправданным является задание для воздействий равномерного закона распределения с использованием критерия минимума среднего риска.

Оптимальные САУ, основанные на минимаксном критерии, называют минимаксно-оптимальными САУ.

Минимаксный критерий оптимальности впервые был предложен в теории игр — разделе теории вероятностей, посвященном нахождению оптимальных решений в ситуации, когда имеются две (или больше) стороны, преследующие противоположные цели (игровая ситуация — выигрыш одной стороны означает проигрыш другой). Поэтому САУ, действие которых основано на минимаксном критерии, иногда называют игровыми системами.

Подробнее о критериях оптимальности, применяемых при синтезе оптимальных САУ при случайных воздействиях, см. в работах [18, 21, 38].

## **В. Особенности синтеза оптимальных САУ при случайных воздействиях**

Выше мы рассмотрели три типа оптимальных САУ — детерминированно оптимальные (в них каждый отдельный процесс управления оптимален), статистически оптимальные САУ (в них процессы управления оптимальны в среднем для всего статистически заданного множества воздействий и состояний системы) и минимаксно-оптимальные САУ (в них обеспечиваются оптимальные процессы при наиболее неблагоприятных внешних воздействиях и состояниях системы).

Тип системы определяется типом использованного при ее синтезе критерия оптимальности, что, в свою очередь, зависит

от характера располагаемой информации о состоянии системы и внешних воздействиях, а также от назначения системы. В частности, наиболее точная, детерминированная информация требуется в первом типе САУ, а наименьшая — в третьем.

В общем случае имеющаяся информация может содержать как детерминированную, так и случайную части. Сложность задачи синтеза оптимальных САУ в этом случае заставляет обычно переходить к ее приближенному решению путем разложения на последовательно решаемые более простые задачи. Первая задача — детерминированная задача синтеза оптимальной программы для средних значений всех переменных. При ее решении не учитывают

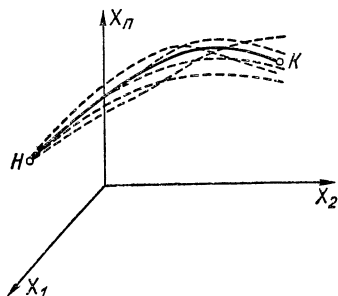


Рис. 13-11. Оптимальное управление при случайных возмущениях

или учитывают приближенно влияние случайных составляющих. Вторая задача, статистическая, — задача синтеза оптимального закона управления замкнутой системы, осуществляющей устранение отклонений от ранее найденной оптимальной программы. Эта задача оперирует с отклонениями переменных от их средних значений в виде центрированных случайных функций. При ее решении используются статистические критерии оптимальности.

Общий порядок решения этих задач тот же, что и рассмотренный

в предыдущем параграфе для чисто детерминированных воздействий. В частности, при синтезе замкнутых САУ также приходится прибегать к описанным в упомянутом параграфе методам упрощения задачи с численным ее решением на ЭВМ. В данном случае также может быть применен описанный там же метод последовательной оптимизации. При этом входящие в уравнение объекта переменные параметры, внешние воздействия и начальные условия задаются здесь соответственно не детерминированными функциями времени, а функциями распределения плотности вероятности, в общем случае зависящими от времени. При нормальном законе распределения соответственно задаются значения дисперсий в функции времени.

В случае игровых ситуаций, когда надо рассчитывать на то, что часть внешних воздействий изменяется не случайно, а предельно неблагоприятно по отношению к управляемому процессу, в первой, детерминированной, части задачи используется минимаксный критерий. При этом значения всех переменных, кроме указанных выше антагонистических воздействий, по-прежнему принимаются равными средним значениям.

Рассмотренный порядок синтеза оптимальной САУ при наличии случайных воздействий, которая получается комбинированной, можно проиллюстрировать рис. 13-11. Пусть задача управ-

ления заключается в переводе изображающей точки из начального положения  $H$  в конечное  $K$ . Оптимальной программе, определенной по средним значениям всех переменных из условия минимизации критерия оптимальности, выбранного в соответствии с основным требованием к данной САУ, соответствует некоторая оптимальная траектория, показанная на рис. 13-11 сплошной линией. При детерминированном управлении объектом по этой программе реальный процесс будет соответствовать оптимальной траектории только в том исключительном случае, когда значения всех переменных действительно совпадают с их средними значениями. В остальных случаях в соответствии с принимаемыми ими случайными значениями для каждой реализации процесса траектория (как и само попадание в заданную конечную точку) будет также случайной (штриховые линии на рис. 13-11). Задача замкнутой системы управления, действующей наряду с системой программного управления, заключается в том, чтобы максимально сжать трубку случайных траекторий относительно программной в соответствии с выбранным согласно с конкретной целью управления (попадание в цель, подъем самолета на заданную высоту и т. д.) статистическим критерием оптимальности.

**Адаптивные системы  
автоматического управления**

---

Глава четырнадцатая

**САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**§ 14-1. ПОНЯТИЕ ОБ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМАХ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ  
И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ**

Общее понятие об адаптивных системах было дано во введении. *Адаптивные, или приспособляющиеся, системы — это системы, которые автоматически приспособляются к изменению внешних условий и свойств объекта управления, обеспечивая при этом необходимое качество управления путем изменения структуры и параметров управляющего устройства.*

Качество управления численно определяется к р и т е р и е м к а ч е с т в а  $J$ , который оценивает заранее выбранный наиболее важный показатель работы САУ. Им может быть какой-либо показатель точности работы системы или качества переходного процесса, производительность, экономичность и т. д. В общем случае критерий качества  $J$  представляет собой функционал, зависящий от выходных и входных величин системы, подобно критерию оптимальности в оптимальных САУ (см. § 13-1). В отдельных случаях  $J$  может быть просто функцией.

Примером изменяющихся внешних условий, требующих применения адаптивной САУ, являются нестационарные случайные внешние воздействия на систему, характеристики которых (например, спектральная плотность) изменяются в широких пределах. В этих условиях точность работы САУ будет изменяться с изменением статистических характеристик внешних воздействий (см. третью главу). Для повышения точности системы необходимо изменять настройку корректирующих звеньев по мере изменения характеристик внешних воздействий. Эту перенастройку иногда

может выполнять человек. В адаптивных САУ она осуществляется автоматически.

Примером объекта с переменными параметрами, также требующего адаптивного управления, является самолет или ракета. Их динамические характеристики могут изменяться со временем в очень широких пределах вследствие изменения массы из-за уменьшения запаса горючего, изменения формы объекта или аэродинамических сил при изменении высоты и скорости полета. В этих случаях часто невозможно обеспечить автоматическое управление объектом во всех его режимах работы без изменения настройки или схемы управляющего устройства. Для автоматического выполнения этой задачи используются адаптивные САУ.

Помимо объектов с переменными свойствами и внешними условиями, областью применения адаптивных систем являются также объекты с недостаточно известными свойствами или условиями работы. В этом случае процесс адаптации может быть однократным.

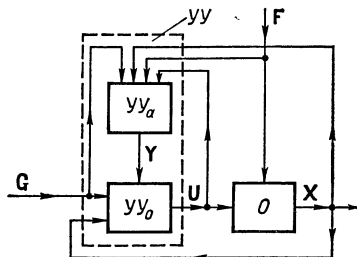


Рис. 14-1. Схема адаптивной САУ

На рис. 14-1 показана в общем виде схема адаптивной САУ. Здесь  $O$  — объект управления,  $УУ$  — управляющее устройство, состоящее из двух частей:  $УУ_о$  и  $УУ_а$ , где  $УУ_о$  — основное управляющее устройство, а  $УУ_а$  — управляющее устройство адаптации.

Контур, образованный  $УУ_о$  и  $O$ , является основным контуром системы и представляет собой обычную неадаптивную САУ. Управляющее устройство адаптации  $УУ_а$  управляет основным управляющим устройством  $УУ_о$ , изменяя его оператор, т. е. схему и значения параметров, в соответствии с изменением внешних условий работы и свойств объекта. Для этого  $УУ_а$  измеряет в самом общем случае внешние воздействия  $G$  и  $F$  и выходную и входную величины объекта  $X$  и  $U$ . По этим данным определяется значение критерия качества управления  $J(X, U, G, F)$ . В зависимости от алгоритма работы устройство  $УУ_а$  определяет отклонение критерия качества  $J$  от заданного или от экстремального его значения и воздействует на  $УУ_о$  так, чтобы ликвидировать это отклонение. Причиной изменения критерия качества  $J$  может быть изменение внешних условий работы в виде изменений каких-либо характеристик воздействий  $G$  и  $F$  или изменение свойств основного контура, т. е. операторов объекта  $O$  и основного управляющего устройства  $УУ_о$ .

Таким образом, адаптивная САУ содержит два контура управления — основной контур и второй контур — контур адаптации, создаваемый управляющим устройством адаптации  $УУ_а$ . Для этого второго контура объектом управления является вся основная САУ.



Контур адаптации образует второй уровень управления, второй этаж над основной САУ. Возможен и следующий уровень адаптации, когда управляющее устройство адаптации  $УУ_a$ , в свою очередь, подстраивается, изменяется следующим управляющим устройством, которое при изменении внешних условий или свойств первичной адаптивной САУ изменяет алгоритм адаптации, осуществляемой  $УУ_a$ . Аналогично возможны многоступенчатые САУ, содержащие большее число уровней адаптации. У таких САУ каждый последующий уровень управляет предыдущим, расширяя диапазон условий, при которых система будет правильно выполнять свою задачу, или повышая качество ее выполнения в заданном диапазоне.

Как и всякое управление, автоматическая адаптация, выполняемая управляющим устройством  $УУ_a$ , принципиально может быть осуществлена в виде разомкнутой, замкнутой и в самом общем случае комбинированной системы. На рис. 14-1 показан этот последний случай.

При разомкнутой цепи адаптации управляющее устройство  $УУ_a$  не образует замкнутого контура. Как обычно, разомкнутое управление осуществляется здесь либо как программное управление основным управляющим устройством  $УУ_0$  в функции времени, либо как система компенсации, действующая в функции внешних воздействий  $G$  или  $F$ . Первый вариант адаптации предполагает наличие заданного графика изменения во времени характеристик основной САУ или внешних воздействий.

Адаптация, осуществляемая с помощью замкнутого контура, т. е. с обратной связью, действует в функции выходной величины  $X$  объекта и, возможно, также выходной величины  $U$  основного управляющего устройства.

Как и у обычных САУ, основным типом адаптивных САУ является замкнутая система адаптации. Поэтому *везде в дальнейшем под адаптивными САУ имеются в виду именно замкнутые адаптивные САУ*. Применение при этом компенсационных сигналов по внешним воздействиям представляет собой вспомогательное средство повышения качества адаптации и упрощения управляющего устройства.

Система адаптации, точнее управляющее устройство  $УУ_a$ , может работать постоянно, периодически (включаясь через определенные интервалы времени) и однократно (путем подключения вручную к САУ для осуществления ее автоматической настройки).

Адаптивные САУ делятся на САУ со стабилизацией и с оптимизацией качества управления. Задачей САУ со стабилизацией качества управления является удержание критерия качества управления  $J$  на определенном уровне или в определенном диапазоне. Контур адаптации выполняет здесь задачу стабилизации этого критерия. В САУ с оптимизацией качества управления обеспечивается поиск и поддержание оптимального значения критерия качества.

По характеру изменений в основном управляющем устройстве  $УУ_0$ , производимых управляющим устройством  $УУ_a$  в процессе адаптации, адаптивные системы делятся на самонастраивающиеся и самоорганизующиеся. В самонастраивающихся САУ адаптация осуществляется изменением значений параметров основного управляющего устройства  $УУ_0$ , а в самоорганизующихся САУ изменяется структура  $УУ_0$ .

Приведенная выше классификация адаптивных САУ не является установившейся в связи с новизной самих адаптивных систем (см. работы [3, 11, 21, 25, 27, 30]).

#### § 14.2. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СТАБИЛИЗАЦИЕЙ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

В названных системах адаптация заключается в стабилизации заданного значения критерия качества  $J$  путем изменения настройки основного управляющего устройства  $УУ_0$  (см. рис. 14-1).

Это осуществляется с помощью настроечных параметров, которые при ручной настройке должны устанавливаться человеком, а в данном случае изменяются автоматически специальным исполнительным устройством, входящим в состав управляющего устройства адаптации  $УУ_a$ .

Основное распространение получили самонастраивающиеся САУ такого типа для стабилизации динамических свойств систем. Критериями качества при этом являются различные косвенные критерии качества переходных процессов (корневые, частотные, интегральные), статистический критерий точности в виде среднеквадратичного отклонения и непосредственно динамические характеристики объекта, т. е. его частотные и переходные характеристики.

На рис. 14-2, а показана функциональная схема САУ со стабилизацией динамических свойств. Штриховыми линиями обведены основная САУ и управляющее устройство адаптации. Последнее состоит из генератора  $G_{пр}$  пробных сигналов  $G_{пр}$ , детектора  $D$  этих сигналов на выходе объекта  $O$ , вычислительного устройства  $ВУ$  и исполнительного устройства  $ИУ$ . Цифрами 1 и 2 обозначены контур основной САУ и контур самонастройки.

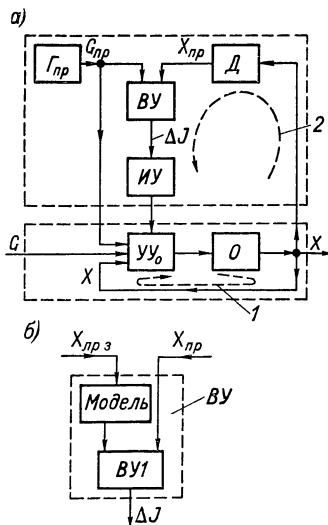


Рис. 14-2. Функциональная схема самонастраивающейся САУ со стабилизацией динамических свойств

Пробный сигнал является специально выбранным воздействием на систему, по реакции на которое можно определять текущее значение выбранного критерия качества. Детектор  $D$  служит для выделения из общего выходного сигнала  $X$ , обусловленного всеми внешними воздействиями, приложенными к системе, составляющей  $X_{\text{пр}}$ , вызванной именно пробным сигналом  $G_{\text{пр}}$ .

Вычислительное устройство  $ВУ$  по величине входного пробного воздействия  $G_{\text{пр}}$  и реакции  $X_{\text{пр}}$  системы на него вычисляет величину отклонения  $\Delta J$  критерия качества от его заданного значения и подает соответствующий сигнал на исполнительное устройство  $ИУ$ . Последнее обычно представляет собой звено интегрирующего типа. Оно изменяет настройку управляющего устройства основного контура в направлении, соответствующем знаку отклонения  $\Delta J$ . В качестве настроечных параметров в  $УУ_0$  выбираются такие параметры, изменяя которые, можно в необходимых пределах изменять величину выбранного критерия  $J$ . Ими могут быть параметры корректирующих и основных звеньев системы. На рис. 14-2, *а* изображена приведенная одноконтурная схема основной САУ. В действительности она может иметь любую структуру.

На рис. 14-2, *б* показан распространенный вариант вычислительного устройства  $ВУ$  с эталонной моделью. Модель имеет динамические характеристики, являющиеся эталоном для подстраиваемой под нее основной САУ. Применение модели упрощает вычислительное устройство, так как отклонение критерия качества  $J$  от его заданного значения определяется здесь как достаточно простая функция разности сигналов на выходе этой модели и объекта. (Эта операция требует более простого вычислительного устройства, обозначенного на рис. 14-2, *б* как  $ВУ1$ .)

В качестве пробного сигнала  $X_{\text{пр}}$  применяются ступенчатый и импульсный сигналы, гармонический сигнал, случайный сигнал, например белый шум, или, наконец, используют приложенные к системе естественные воздействия. Выбор пробного сигнала определяется видом критерия качества  $J$ , т. е. теми динамическими характеристиками системы, которые требуется контролировать.

Например, колебательность системы может быть оценена путем вычисления отношения соседних максимумов или числом колебаний (числом перемен знака) реакции  $X$  на ступенчатое или импульсное пробное воздействие. В этих случаях контур самонастройки работает периодически, для чего генератор пробных сигналов выдает сигналы с определенной частотой следования. В интервале между этими сигналами вычислительное устройство самонастройки определяет величину колебательности, сравнивает ее с заданным значением и формирует стабилизирующий колебательность сигнал подстройки  $УУ_0$  [27]. Колебательность системы может быть определена и с помощью частотных критериев качества, для чего применяются гармонические пробные сигналы.

Вместо косвенных показателей качества переходного процесса можно, как говорилось выше, стабилизировать непосредственно частотные или переходные характеристики системы или же коэффициенты ее передаточной функции. Так, частотную характеристику стабилизируют в отдельных точках, стабилизируя, например, резонансную частоту или ординаты характеристики, соответствующие определенным значениям частоты. На рис. 14-3, а приведена схема самонастраивающейся САУ со стабилизацией одной точки амплитудной частотной характеристики, соответствующей

частоте  $\omega_{пр}$ , выдаваемой генератором  $\Gamma_{пр}$ . Настройка осуществляется путем изменения коэффициента усиления  $k_y$  основного управляющего устройства. Фильтр  $\Phi 1$  представляет собой эталонную модель (см. рис. 14-2, б), ордината амплитудной частотной характеристики которой на частоте  $\omega_{пр}$  соответствует требуемой ординате  $A_{з. зад}(\omega_{пр})$  частотной характеристики настраиваемой замкнутой системы. Узкополосный фильтр  $\Phi 2$  служит для выделения колебательной составляющей выходной величины  $X$  с частотой  $\omega_{пр}$ . Вычислительное устройство  $ВУ$  состоит из двух выпрямителей  $B$  и элемента сравнения, на выходе которого получается сигнал, пропорциональный отклонению  $\Delta A_3(\omega_{пр})$  ординаты амплитудной частотной характеристики  $A_3(\omega)$  от заданного значения (рис. 14-3, б). Исполнительное устройство  $ИУ$  состоит из усилителя  $У$  и вспомогательного двигателя  $ВД$ , перемещающего движок потенциометра, с помощью которого регулируется коэффициент усиления  $k_y$ .

Для стабилизации нескольких точек частотной характеристики применяют соответствующее количество точно таких же контуров самонастройки, каждый из которых работает на своей частоте  $\omega_{пр}$ . Исполнительное устройство каждого контура воздействует на свой настроечный параметр, общее число которых, таким образом, равно числу контролируемых точек частотной характеристики.

С помощью подобной же схемы можно стабилизировать и фазовую частотную характеристику. В этом случае вычислительное устройство должно давать соответственно не разность амплитуд  $\Delta A_3(\omega_{пр})$ , а разность фаз  $\Delta \varphi_3(\omega_{пр})$  колебаний на выходе фильтров  $\Phi 1$  и  $\Phi 2$ .

Необходимость контролировать сразу две частотные характеристики — амплитудную и фазовую — возникает только в минимально-фазовых системах. В минимально-фазовых системах

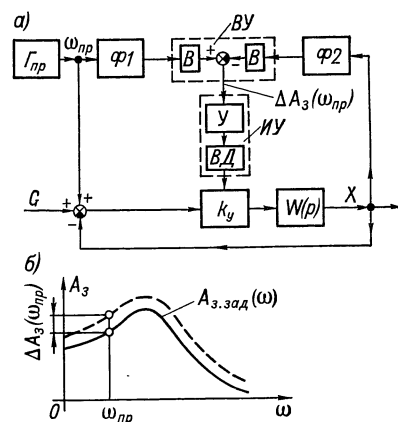


Рис. 14-3. Схема самонастраивающейся САУ со стабилизацией амплитудной частотной характеристики в точке  $\omega_{пр}$

достаточно стабилизировать одну из них, в качестве которой обычно берут амплитудную характеристику, поскольку в этих системах указанные характеристики однозначно друг с другом связаны (см. § 1-3).

Аналогичным образом можно стабилизировать действительную и мнимую характеристики [11].

В качестве пробного сигнала применяют и случайные воздействия. Путем статистической обработки случайного входного сигнала и выходной реакции на него принципиально можно полностью определить переходную (весовую) и частотные функции системы. Как было показано в § 3-2, корреляционные функции входного и выходного сигналов однозначно связаны через весовую

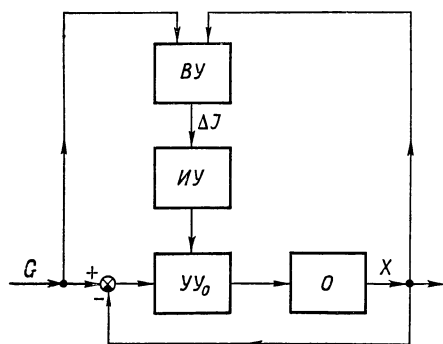


Рис. 14-4. Функциональная схема самонастраивающейся САУ без специального пробного сигнала

функцию и аналогично спектральные плотности этих сигналов связаны амплитудно-фазовой частотной характеристикой. Таким образом, вычислив с помощью коррелятора названные корреляционные функции или спектральные плотности, можно определить весовую функцию или частотные характеристики системы. Такой статистический подход является наиболее универсальным для определения характеристик как линейных, так и нелинейных объектов [25, 30].

В качестве пробного сигнала в отдельных случаях можно использовать и естественные внешние воздействия. При этом отпадает необходимость в специальном генераторе. Например, если в случае схемы на рис. 14-3, а с синусоидальным пробным сигналом в спектре воздействия  $G$  постоянно содержится достаточно большая составляющая с частотой  $\omega_{пр}$ , можно обойтись без генератора  $G_{пр}$ , подавая на вход фильтра  $\Phi 1$  непосредственно входное воздействие  $G$ . При этом такой фильтр должен быть сделан достаточно узкополосным с настройкой на частоту  $\omega_{пр}$ .

Еще бóльшие возможности применения естественных внешних воздействий вместо пробного сигнала возникают при статистическом методе определения динамических характеристик системы с помощью автоматического коррелятора.

На рис. 14-4 показана схема самонастраивающейся системы, в которой вместо пробного сигнала используется входное воздействие  $G$ .

Выше предполагалось, что стабилизация динамических свойств осуществляется для всей основной САУ в целом. Точно так же можно стабилизировать и отдельную часть этой системы. При этом

система самонастройки будет охватывать непосредственно эту часть системы, т. е. пробный сигнал должен подаваться непосредственно на ее вход, а сигнал на вход контура самонастройки должен сниматься с ее выхода. Разумеется, в составе стабилизируемой части системы должно быть звено с управляемыми с помощью исполнительного устройства самонастройки параметрами.

К контуру самонастройки предъявляются следующие два основных требования:

- а) быстродействие контура должно быть больше скорости изменения стабилизируемых динамических свойств основной САУ;
- б) пробные сигналы должны быть достаточно малы, так как они представляют собой помеху для работы основной САУ.

Первое требование очевидно — при его невыполнении система самонастройки не сможет обеспечить стабилизацию динамических свойств системы. В частотном выражении это требование заключается в том, что полоса пропускания системы самонастройки должна быть шире частотного спектра изменения параметров основной САУ. Ясно, что чем выше быстродействие системы самонастройки, тем меньше будут отклонения динамических свойств основной САУ в процессе работы системы. Верхний предел быстродействия контура самонастройки ограничен инерционностью основной САУ, поскольку она ограничивает время, необходимое для определения значения критерия качества  $J$ . Действительно, это время включает в себя время, требуемое для определения реакции основной САУ на пробное воздействие, и поэтому заведомо больше длительности переходного процесса в основной САУ. Практически можно считать, что *длительность процесса самонастройки на порядок больше длительности переходного процесса с основной САУ*.

Требование достаточной малости пробных сигналов сводится к тому, что пробные сигналы должны быть достаточно малы по сравнению с отклонениями, существующими в процессе нормального функционирования основной САУ. В противном случае пробные сигналы вызовут существенное ухудшение точности работы основной системы. Предел уменьшению пробных сигналов создается трудностью выделения их из общего выходного сигнала  $X$  системы. Таким образом, в системах самонастройки большее значение имеет задача выделения сигнала на фоне шума. Эта задача требует тем большего времени, чем меньше сигнал, поскольку приходится усреднять реакцию системы на несколько пробных сигналов, т. е. применять статистические методы выделения полезного сигнала из шума. Из сказанного следует, что выполнение требований в отношении малости пробного сигнала и быстродействия самонастройки вызывает необходимость компромиссного решения.

### § 14-3. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

Эти системы называются еще экстремальными самонастраивающимися САУ. В отличие от рассмотренных выше самонастраивающихся САУ со стабилизацией качества управления задачей самонастройки в этих САУ является поддержание оптимального значения критерия качества управления  $J$ . Последний в данном случае может быть назван поэтому критерием оптимальности, как в неадаптированных оптимальных САУ (см. тринадцатую главу). Рассматриваемые самонастраивающиеся САУ, как и вообще все адаптивные САУ с оптимизацией качества управления, отличаются от неадаптивных оптимальных САУ наличием автоматического изменения оператора управления так, чтобы обеспечивалась оптимальность управления, т. е. оптимум выбранного критерия качества управления, при всех изменениях внешних условий и свойств объекта.

Таким образом, управляющее устройство  $УУ_a$  контура адаптации автоматически решает задачу оптимизации, которую однократно решает конструктор неадаптивной оптимальной системы при ее конструировании или периодически оператор-настройщик в ходе эксплуатации системы. Такая автоматическая оптимизация может рассматриваться как особый тип автоматического управления наряду с управлением по внешним воздействиям (компенсация) и управлением по отклонению.

Основой автоматической оптимизации является автоматический поиск оптимального оператора основного управляющего устройства  $УУ_o$ , хотя существуют и беспоисковые САУ с автоматической оптимизацией (см. ниже).

Принцип действия рассматриваемых самонастраивающихся САУ зависит от того, какой режим системы характеризуется принятым критерием качества — динамический или статический. Соответственно различают самонастраивающиеся САУ с оптимизацией динамических режимов и с оптимизацией статических режимов системы.

#### **А. Самонастраивающиеся САУ с оптимизацией динамических режимов**

В этих системах целью самонастройки является поддержание путем изменения настройки основной САУ экстремума какого-либо критерия качества, характеризующего динамические свойства системы. Чаще всего таким критерием является показатель качества переходного процесса или точность основной САУ при случайных воздействиях, а настраиваемыми параметрами — параметры корректирующих звеньев.

Поиск оптимума критерия качества  $J$  осуществляется путем поискового изменения настроечных параметров корректирующих звеньев, от которых зависит величина  $J$ , и вычисления соответствующего приращения  $J$ . На основании этого определяется направление, в котором следует изменять настройку коррекции, чтобы приблизиться к экстремуму  $J$  и в конце концов найти его.

Вычисление  $J$  при определенной настройке производится, как и в САУ со стабилизацией  $J$ , с помощью подачи на вход основной САУ пробного сигнала  $G_{пр}$ .

На рис. 14-5, а приведена схема САУ с экстремальной настройкой. Здесь  $G_{пр}$  — генератор пробного сигнала,  $G_{п}$  — генератор поискового сигнала  $Y_{п}$ ,  $D$  — детектор, выделяющий составляющую на выходе объекта  $X_{пр}$ , вызванную сигналом  $G_{пр}$ . Вычислительное устройство  $ВУ$  здесь представляет собой автоматический оптимизатор. Если в САУ со стабилизацией  $J$  вычислительное устройство выявляет отклонение  $J$  от заданного значения  $J_3$ , т. е. величину  $\Delta J = J - J_3$ , то здесь выдаваемый  $ВУ$  сигнал  $\Delta J$  определяет отклонение  $J$  от заранее неизвестного его экстремального значения. Необходимое для этого приращение  $Y_{п}$  настроечного параметра  $Y$  создается генератором поискового сигнала  $G_{п}$ . В результате система самонастройки осуществляет автоматическое слежение за экстремумом  $J$ .

Работа системы иллюстрируется рис. 14-5, б. Здесь кривые 1, 2 и 3 — зависимости  $J$  от  $Y$  для трех последовательных моментов времени. При смещении экстремума  $J$  система самонастройки изменяет значение параметра  $Y$  так, чтобы  $J$  вновь имел экстремальное значение. Стрелками показан процесс изменения настройки для случая скачкообразного изменения зависимости  $J$  от  $Y$ .

Таким образом, в САУ с экстремальной самонастройкой в общем случае требуются два специальных воздействия на основную САУ со стороны системы самонастройки: пробный сигнал  $G_{пр}$  (для

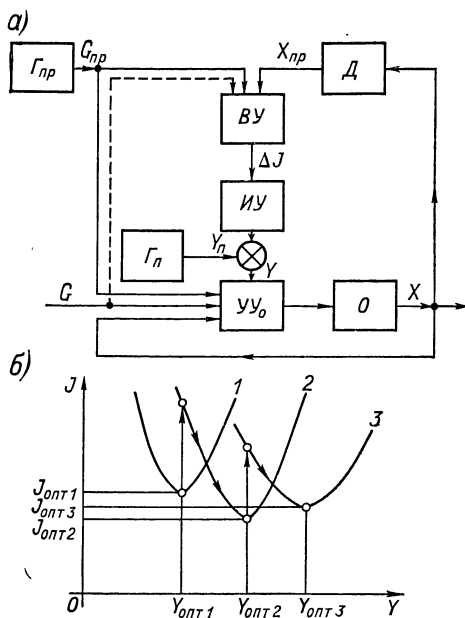


Рис. 14-5. Функциональная схема самонастраивающейся САУ с оптимизацией динамического режима



определения  $J$  при фиксированном  $Y$ ) и поисковый сигнал  $Y_{\text{п}}$  (для определения направления изменения настроечного параметра  $Y$  для движения к экстремуму  $J$ ).

В отдельных случаях система может быть упрощена путем отказа от специальных сигналов  $G_{\text{пр}}$  и  $Y_{\text{п}}$ . Отказ от специального пробного сигнала  $G_{\text{пр}}$  возможен при использовании вместо него естественных флуктуаций на входе основной САУ, существующих при нормальной работе системы. Об этой возможности говорилось выше при рассмотрении самонастраивающихся САУ со стабилизацией динамических свойств (см. рис. 14-4). Соответствующее изменение в схеме на рис. 14-5, а показано штриховой линией.

Примером такой экстремальной самонастраивающейся САУ может быть следящая система с самонастройкой коррекции на минимальную дисперсию выходного сигнала при непрерывно действующих случайном входном сигнале и помехе. Практически в качестве минимизируемого критерия качества здесь используется усредненное с помощью фильтра нижних частот значение квадрата рассогласования  $(G - X)^2$ . Как было показано в § 3-3, если входной сигнал и помеха являются стационарными случайными функциями, то существует оптимальная передаточная функция системы, обеспечивающая минимум дисперсии выходного сигнала. Если параметры какой-то части такой оптимальной следящей системы неконтролируемым образом изменяются со временем по каким-то причинам (изменение параметров входящего в состав системы объекта, разогрев отдельных частей схемы и т. п.), то дисперсия на выходе будет возрастать. Возврат ее к минимальному значению осуществляется путем изменения коррекции с помощью системы экстремальной самонастройки.

Возможность создания самонастраивающихся САУ с оптимизацией качества управления без специального поискового сигнала основана на знании и использовании математического описания, т. е. оператора объекта. Такие самонастраивающиеся САУ называются беспойсковыми или аналитическими [30]. Зная оператор объекта и внешние воздействия (если последние необходимы для определения критерия качества), можно аналитически определить оптимальную настройку системы, как это и делается разработчиком при синтезе неадаптивных систем. В случае самонастраивающихся САУ этот расчет должен выполняться вычислительным устройством контура самонастройки. Наиболее простой случай при этом будет, когда оператор объекта известен заранее и неизменен, а причиной самонастройки является изменение внешних условий работы системы. В этом случае цепь самонастройки на экстремум осуществляется в виде разомкнутой системы компенсации, изменяющей настройку основной САУ в функции внешних воздействий.

В наиболее общем случае изменяющегося (неизвестного) оператора объекта задача контура самонастройки заключается, во-

первых, в идентификации объекта, т. е. в определении оператора объекта (с помощью пробных сигналов или с использованием реакции на естественные входные воздействия — см. § 14-2), и, во-вторых, в вычислении оптимальных значений настроечных параметров системы управления. Для выполнения расчетов в качестве вычислительного устройства обычно используют специальные цифровые вычислительные машины.

Широкое применение получили вычислительные устройства с подстраиваемой (самонастраивающейся) моделью объекта. Такая модель автоматически подстраивается по объекту так, что оператор модели с достаточной точностью совпадает с оператором объекта. Поиск оптимальной настройки осуществляется на модели, и найденная настройка переносится затем на основную САУ. Применение модели объекта часто позволяет существенно упростить вычислительное устройство и весь контур самонастройки.

Входящая в состав беспойсковой самонастраивающейся САУ система автоматической подстройки модели по объекту сама является самонастраивающейся САУ и, в частности, может быть экстремальной. Эта система подобна описанной в предыдущем параграфе системе самонастройки с эталонной моделью, только здесь на этапе подстройки модели роль эталона играет сам объект управления, а подстраивается модель. Подстраиваемая модель может быть выполнена на аналоговой или на цифровой технике. В случае если у объекта изменяются не только параметры, а и структура, соответственно модель должна иметь также переменную структуру, т. е. это будет самоорганизующаяся модель, которая относится к самоорганизующимся САУ, рассматриваемым в следующей главе.

Основное достоинство беспойсковых самонастраивающихся САУ заключается в отсутствии поисковых воздействий на объект, которые всегда нежелательны, так как являются для основной САУ внешними возмущениями, нарушающими режим ее работы.

## **Б. Самонастраивающиеся САУ с оптимизацией статических режимов**

Эти системы называются еще системами экстремального регулирования. Они являются простейшими самонастраивающимися САУ с оптимизацией качества управления. В них поддерживается оптимальное значение такого критерия, который характеризует работу объекта в статическом режиме, т. е. обеспечивается работа в точке экстремума соответствующей статической характеристики.

Примером объекта такой системы экстремального регулирования является система автоматической настройки колебательного контура в резонанс (рис. 14-6, а). Такая задача существует, в частности, в радиоприемных и радиопередающих устройствах. Контур

$LC$  настраивается с помощью переменного конденсатора  $C$ . Задача настройки — установка такого значения емкости  $C$ , при котором резонансная частота контура совпадает с частотой  $f$  подаваемого на контур напряжения. Признаком такой настройки является максимум напряжения на резонансном контуре. Таким образом, задача настройки сводится к определению значения  $C$ , соответствующего максимуму напряжения на резонансном контуре (рис. 14-6, б). Причиной ухода от резонансной настройки может быть изменение частоты  $f$  подаваемого на контур напряжения или изменение параметров контура, например, из-за изменения температуры.

Экстремальный регулятор состоит из усилителя  $У$ , усиливающего напряжение  $U$ , снимаемое с контура; вычислительного

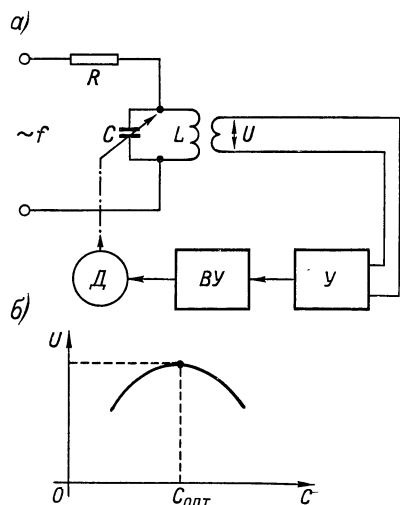


Рис. 14-6. Система экстремального регулирования колебательного контура

устройства  $ВУ$  и исполнительного двигателя  $Д$ , поворачивающего ротор конденсатора  $C$ . Вычислительное устройство автоматически выполняет ту же логическую задачу, что и оператор при ручной настройке контура. После включения в работу оно определяет направление, в котором надо изменять емкость, чтобы напряжение на контуре возрастало, т. е. определяет направление движения в сторону экстремума. Для этого исполнительный двигатель включается вначале в одном направлении, а затем при необходимости — в другом, и устанавливается искомое направление вращения. Движение в найденном направлении продолжается до тех пор, пока напряжение  $U$  не начинает уменьшаться после прохождения максимума. Тогда вычислительное устройство изменяет направление вращения двигателя, чтобы вернуться в точку экстремума. В установившемся режиме исполнительный двигатель периодически реверсируется, создавая небольшие колебания напряжения относительно максимума, с помощью чего все время контролируется местоположение последнего.

Другим примером системы экстремального регулирования является система регулирования скорости двигателя внутреннего сгорания на минимум удельного расхода топлива. Статическая зависимость этого показателя от скорости двигателя имеет минимум, который смещается при изменении нагрузки, качества топлива, давления, температуры и других внешних условий. Система экстремального регулирования обеспечивает поиск и поддержание величины скорости двигателя, соответствующей минимуму

расхода топлива. Аналогичная задача минимизации расхода топлива существует при регулировании двигателей самолетов при полете на большие расстояния. Здесь минимум имеется у зависимости расхода топлива на единицу пути от скорости полета, причем положение этого минимума зависит от веса самолета, высоты полета, ветра и др.

Принцип действия экстремальной системы регулирования тот же, что и контура самонастройки в САУ при оптимизации динамических режимов. Однако в связи с тем, что здесь критерий качества является статической функцией настроечных параметров  $Y$  и определяется в статическом режиме, в системах экстремального регулирования не требуется пробных сигналов  $G_{пр}$ , которые необходимы для определения динамических показателей качества.

Что касается поисковых сигналов, то, как и у самонастраивающейся САУ с оптимизацией динамических режимов, их также может не быть, т. е. возможны беспоисковые системы экстремального регулирования, основанные на использовании в том или ином виде уравнения статики объекта.

## **В. Методы поиска экстремума функции $J$ настроечных параметров $Y$**

Рассмотрим методы, с помощью которых вычислительное устройство может осуществлять поиск значений настроечных параметров  $Y$ , соответствующих экстремуму критерия качества, т. е. рассмотрим возможные алгоритмы поиска.

В случае когда  $J$  является функцией одной переменной  $Y$ , направление движения к экстремуму определяется знаком производной  $dJ/dY$ , а признаком наличия экстремума будет равенство нулю этой производной, т. е.

$$\frac{dJ}{dY} = 0 \quad (\text{рис. 14-7, а}).$$

В общем случае, когда число настроечных параметров  $Y$  равно  $n$ , т. е.  $J(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  является функцией  $n$  переменных, направление движения к экстремуму определяется градиентом, т. е. вектором

$$\text{grad } J = \sum_{i=1}^n k_i \frac{\partial J}{\partial Y_i},$$

где  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — единичные векторы координатных осей  $Y_i$ .

В точке экстремума

$$\text{grad } J = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial J}{\partial Y_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сказанное иллюстрируется рис. 14-7, б и в для случая  $n = 2$ . Метод нахождения экстремума  $J$  путем изменения координат  $Y$  таким образом, что движение к экстремуму осуществляется

строго по градиенту (см. траектории на рис. 14-7, б и в), называется методом градиента. Для осуществления движения по градиенту каждая координата  $Y_i$  должна изменяться со

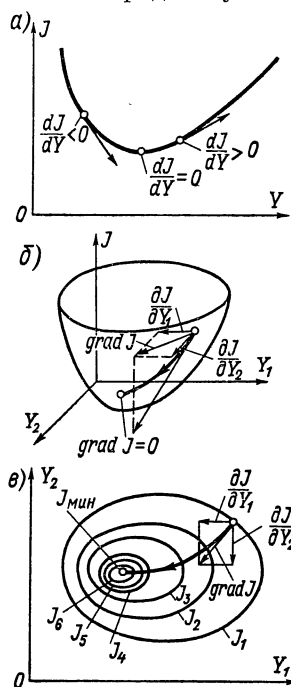


Рис. 14-7. Метод градиента

скоростью, пропорциональной значениям соответствующих частных производных  $dJ/dY_i$ . Однако этот метод — не единственно возможный способ достижения экстремума. Существует целый ряд методов поиска экстремума, которые проще метода градиента в отношении реализации. Кроме того, как будет показано ниже, метод градиента далеко не всегда является наилучшим и в отношении быстроты нахождения экстремума. Основными методами поиска экстремума, помимо метода градиента, являются метод наискорейшего спуска, метод Гаусса — Зейделя и метод слепого поиска.

Метод наискорейшего спуска<sup>1</sup> состоит в следующем (рис. 14-8, траектория 2). В начальной точке находится направление вектора  $\text{grad } J$ , и организуется движение в этом направлении до тех пор, пока не прекратится уменьшение  $J$  (в случае поиска минимума), т. е. не обратится в нуль производная от  $J$  по принятому направлению движения. Как видно из рис. 14-8, этому моменту соответствует касание траектории с линией  $J = \text{const}$ .

В этой точке касания вновь определяется направление вектора  $\text{grad } J$ , и движение продолжается по этому новому направлению опять до момента изменения знака приращения  $J$  и т. д.

Таким образом, метод наискорейшего спуска проще метода градиента (кривая 1 на рис. 14-8) в том отношении, что требует определения направления  $\text{grad } J$  только в небольшом числе точек траектории.

Метод Гаусса — Зейделя дает траекторию 3 на рис. 14-8. Он заключается в поочередном изменении каждой из координат  $Y$  до момента обращения в нуль соответствующей частной производной  $\partial J/\partial Y_i$ . Таким образом, здесь поиск функции нескольких переменных сводится к последовательному нахождению экстремума этой функции от каждой из переменных. Поэтому данный метод технически еще проще, чем метод наискорейшего спуска.

<sup>1</sup> Название метода предполагает, что экстремум представляет собой минимум, однако в равной мере этот метод применим, разумеется, и для поиска максимума.

Метод случайного (слепого) поиска заключается в поиске экстремума путем случайного изменения координат  $Y_i$ . Из начального положения делается случайный шаг приращением координатам случайных приращений, и определяется приращение  $J$ . Если приращение  $J$  положительно (при поиске минимума), производится возврат в исходную точку и делается новый случайный шаг. Так продолжается до тех пор, пока не будет получено отрицательного приращения  $J$ . Тогда система переводится в эту новую точку, и из нее производятся новые случайные шаги, как из исходной точки.

Существуют и другие варианты случайного поиска. Так, можно, совершив несколько пробных случайных шагов из исходной точки и найдя для каждого шага приращение  $J$ , определить по этим приращениям как по составляющим вектора направление наиболее интенсивного изменения  $J$  и в этом направлении делать рабочий шаг. Такой метод называется методом статистического градиента. В найденном направлении можно делать не один шаг, а двигаться, пока приращение  $J$  не изменит знака. Такой метод называется методом статистического наискорейшего спуска.

Достоинством метода случайного поиска является отсутствие контроля зависимости  $J$  от каждой из координат  $Y_i$  в отдельности. Поэтому в отличие от рассмотренных выше детерминированных методов поиска увеличение числа координат  $Y_i$  при случайном поиске не усложняет процедуры поиска. Так, доказано, что при числе координат  $Y_i$  более трех случайный поиск по скорости достижения экстремума превосходит градиентный метод и другие перечисленные выше детерминированные методы [6].

Другим достоинством метода случайного поиска по сравнению с детерминированными методами является пригодность его при наличии нескольких экстремумов, из которых необходимо найти глобальный (минимум минимумом в случае поиска минимума), а также при наличии особых точек, в которых градиент  $J$  обращается в нуль. Во всех этих случаях методы, основанные на поиске точки с нулевым градиентом, непригодны, так как система может застрять на каком-либо локальном экстремуме или в особой точке. Слепой же поиск принципиально позволяет найти все экстремумы и особые точки и выбрать глобальный экстремум.

Выбор метода поиска экстремума зависит от конкретных условий задачи. В работе [6] приведены данные сравнения разных методов поиска и оценка их областей применения. Часто оптималь-

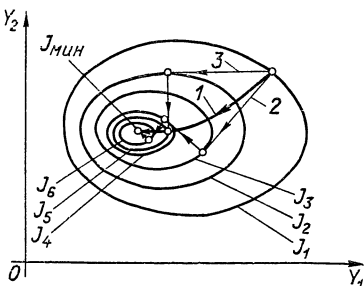


Рис. 14-8. Метод наискорейшего спуска (2) и метод Гаусса—Зейделя (3)

ным решением оказывается комбинация нескольких методов. Так, например, вдали от точки экстремума используют один метод, обеспечивающий скорейшее попадание в район экстремума, а затем переходят к другому методу. Таким образом, в частности, комбинируют метод наискорейшего спуска и метод градиента. При поиске глобального экстремума часто применяют комбинацию слепого поиска с методом градиента. В этом случае методом градиента находят локальный экстремум. Он запоминается, и затем осуществляется случайный шаг в другую произвольную точку. После этого вновь методом градиента отыскивают новый экстремум и сравнивают с ранее найденным. Число таких циклов поиска выбирают заранее, исходя из априорных данных о числе экстремумов и их взаимном размещении.

### Г. Методы определения производных $J$

Рассмотренные выше методы поиска экстремума функции  $J(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  требуют определения частных производных  $\partial J / \partial Y_i$  по отдельным настроечным параметрам  $Y_i$ . Их можно

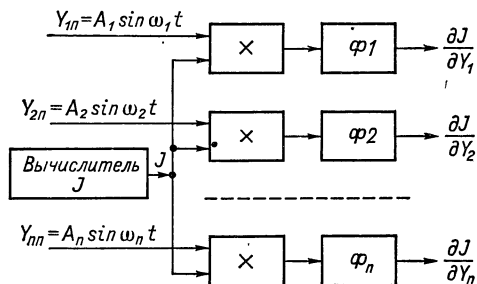


Рис. 14-9. Схема вычислителя  $dJ/dY_i$  с применением синхронного детектирования

находить либо параллельно с помощью частотного разделения отдельных каналов, либо последовательно, т. е. путем временного разделения этих каналов определения отдельных производных. Рассмотрим соответствующие методы определения производных  $\partial J / \partial Y$ .

Метод синхронного детектирования основан на частотном разделении каналов определения  $\partial J / \partial Y$ . Поисковые сигналы  $Y_{in}$ , создающие отклонения  $Y_i$  (см. рис. 14-5, а), могут быть как детерминированными, так и случайными.

Детерминированные поисковые сигналы представляют собой гармонические колебания разных частот с достаточно малыми амплитудами:

$$Y_{in} = A_i \sin \omega_i t. \quad (14-1)$$

Амплитуды  $A_i$  этих сигналов должны быть достаточно малы, чтобы несущественно нарушать режим работы основной САУ. Частоты  $\omega_i$  ограничены снизу максимальной частотой смещения контролируемого экстремума, а сверху — полосой пропускания основной САУ. Эти поисковые сигналы создают колебания настроечных параметров  $Y_i$  относительно их исходных значений  $Y_{i0}$ , т. е.

$$Y_i = Y_{i0} + Y_{in}. \quad (14-2)$$

Реакции основной САУ на одновременно действующие на вход объекта сигналы  $Y_{iп}$ , по которым определяются искомые производные  $\partial J/\partial Y_i$ , разделяются по частоте в вычислительном устройстве с помощью синхронных детекторов. На рис. 14-9 приведена схема вычислителя  $\partial J/\partial Y_i$  с синхронным детектированием. Схема состоит из вычислителя  $J$  и каналов определения частных производных  $\partial J/\partial Y_i$ . Каждый канал состоит из множительного устройства, умножающего величину  $J$  на соответствующий поисковый сигнал  $Y_{iп}$ , который одновременно подается на управляющее устройство основной САУ, и фильтра  $\Phi_i$  нижних частот, осуществляющего усреднение полученного произведения во времени.

Покажем, что выходные величины синхронных детекторов пропорциональны искомому частным производным  $\partial J/\partial Y_i$ . Разложим для этого функцию  $J(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  в ряд Тейлора по приращениям  $\Delta Y_i$ , создаваемым поисковыми сигналами, с удержанием при этом только членов первого порядка малости относительно  $\Delta Y_i$ . В результате получим:

$$J(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \approx J(Y_{10}, Y_{20}, \dots, Y_{n0}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial Y_i} \Delta Y_i, \quad (14-3)$$

где

$$\Delta Y_i = A_i \sin \omega_i t,$$

т. е.

$$J(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = J_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial Y_i} A_i \sin \omega_i t, \quad (14-4)$$

где

$$J_0 = J(Y_{10}, Y_{20}, \dots, Y_{n0}).$$

Величина на выходе  $k$ -го множительного устройства равна произведению  $J(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) A_k \sin \omega_k t$  и с учетом выражения (14-4) принимает вид:

$$J_0 A_k \sin \omega_k t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial Y_i} A_i A_k \sin \omega_i t \sin \omega_k t.$$

Фильтром на выходе синхронного детектора эта величина усредняется по времени. Она включает в себя составляющую  $\sin \omega_k t$  и  $n$  составляющих, содержащих произведение синусов  $\sin \omega_i t \times \sin \omega_k t$ . Средние значения  $\sin \omega_k t$  и произведения  $\sin \omega_i t \sin \omega_k t$  при  $i \neq k$  равны нулю, и только среднее значение произведения  $\sin \omega_i t \sin \omega_k t$  при  $i = k$  отлично от нуля и равно  $1/2$ <sup>1</sup>.

Таким образом, величина на выходе  $k$ -го канала синхронного детектора в первом приближении равна  $\frac{1}{2} A_k^2 \frac{\partial J}{\partial Y_k}$ , т. е. пропорциональна производной  $\partial J/\partial Y_k$ .

<sup>1</sup> Вспомним, что  $\sin^2 \omega_k t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega_k t$ .





от  $J$  по этому настроечному параметру можно представить так:

$$\frac{\partial J}{\partial Y_i} = \frac{dJ}{dt} : \frac{dY_i}{dt}. \quad (14-5)$$

Следовательно, если изменять  $Y_i$  с известной постоянной скоростью  $\partial Y_i / \partial t = \text{const}$ , то скорость  $\partial J / \partial t$  изменения  $J$ , вызванного этим изменением настройки, будет мерой искомой производной  $\partial J / \partial Y_i$ , т. е., измеряя эту скорость  $dJ/dt$ , можно судить о величине  $\partial J / \partial Y_i$ .

На рис. 14-11, а дан один из вариантов схемы вычислителя  $\partial J / \partial Y_i$  с применением производной по времени. Генератор поисковых сигналов  $G_n$  выдает импульсы треугольной формы. Распределитель  $P1$  подает их поочередно в каналы управления отдельными настроечными параметрами, как это показано на рис. 14-11, б для трех каналов настройки. Благодаря треугольной форме импульсов настроечные параметры изменяются с постоянной скоростью сперва в одну, а затем в другую сторону. Дифференциатор ( $d/dt$ ) на выходе вычислителя  $J$  определяет производную  $dJ/dt$ , а

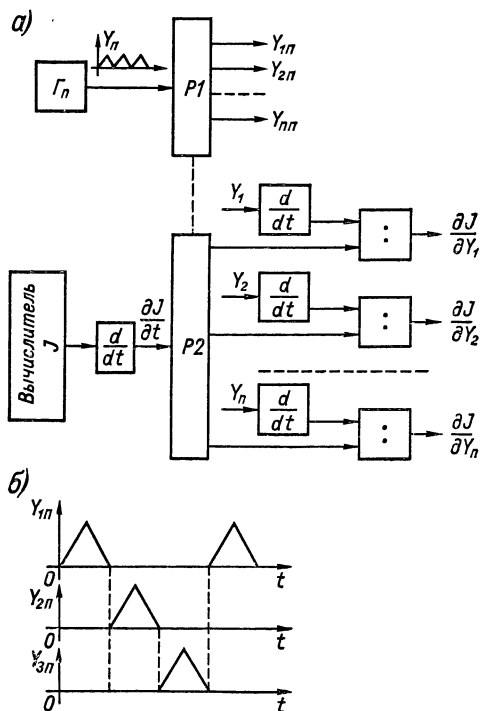


Рис. 14-11. Схема вычислителя  $dJ/dY_i$  с применением метода производной по времени

распределитель  $P2$ , работающий синхронно с  $P1$ , передает ее на выход, воздействующий на тот настроечный параметр, который в данный момент изменяется треугольным импульсом. При этом в соответствии с выражением (14-5) выполняется деление на производную  $dY_i/dt$ .

Недостатками данного метода определения производных  $dJ/dY_i$  по сравнению с методом синхронного детектирования являются поочередное их определение, требующее тем большего времени, чем больше число настроечных параметров, и худшая помехозащищенность. Последнее связано с наличием в схеме дифференциаторов, которые, являясь фильтрами верхних частот, увеличи-

вают относительный уровень высокочастотных помех на выходе вычислителя.

Метод конечных приращений (шагов) также дает поочередное определение частных производных. Он состоит в приближенном определении этих производных в виде отношения конечных приращений, т. е. основан на равенстве

$$\frac{\partial J}{\partial Y_i} \approx \frac{\Delta_i J}{\Delta Y_i}. \quad (14-6)$$

Каждому настроечному параметру  $Y_i$  поочередно дается конечное приращение  $\Delta Y_i$ , определяется вызванное им приращение  $\Delta_i J$ , и находится отношение этих приращений согласно (14-6).

Этот метод представляет интерес в случае инерционных объектов, когда остальные методы могут дать большую амплитуду колебаний относительно максимума.

Метод запоминания экстремума состоит в следующем. С помощью детерминированных или случайных поисковых сигналов изменяется настройка системы и определяется соответствующее значение  $J$ . В запоминающем устройстве удерживается наименьшее (при поиске минимума) из полученных значений  $J$ . Направление движения к экстремуму определяется по разности  $\Delta J$  текущего и наименьшего значений  $J$ . Частные производные  $\partial J / \partial Y_i$  определяются отношением конечных приращений  $\Delta_i J / \Delta Y_i$ , где приращение  $\Delta_i J$ , соответствующее приращению настроечного параметра  $\Delta Y_i$ , выделяется из полного приращения  $\Delta J$  одним из рассмотренных выше методов путем частотного или временного разделения составляющих. В установившемся режиме существуют колебания относительно найденного экстремума с контролем его путем сравнения текущих измеряемых значений  $J$  в окрестностях экстремума с экстремальным значением.

#### § 14-4. ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Общий порядок и методы математического описания и исследования самонастраивающихся САУ те же, что и неадаптивных САУ. Некоторые особенности динамики, а отсюда и методов исследования самонастраивающихся САУ определяются наличием в этих системах контура самонастройки. Общие требования, предъявляемые к этому контуру, те же, что и у основной САУ, т. е. это требования прежде всего в отношении точности, устойчивости и качества переходных процессов.

Точность самонастройки в системе со стабилизацией критерия качества управления  $J$  определяется, как и в обычной системе стабилизации, величиной отклонения этого критерия от его заданного значения. В самонастраивающихся САУ с оптими-

заций  $J$  путем поиска экстремума в установившемся режиме имеют место поисковые колебания настраиваемых параметров  $Y_i$  относительно их значений, соответствующих экстремуму  $J$ . Поэтому точность самонастройки таких систем оценивается средней величиной отклонения  $J$  от его экстремального значения  $J_э$  в установившемся режиме. Эта величина называется *потерей на поиск*. Ее можно выразить через величину колебания относительно экстремума и крутизну экстремума:

$$\overline{J - J_э} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 Y}{\partial Y_i^2} \overline{\Delta Y_{iп}^2}, \quad (14-7)$$

где  $\overline{\Delta Y_{iп}^2}$  — среднее значение квадрата установившегося отклонения  $Y_{iп}$  от значения, соответствующего  $J_э$ .

Выражение (14-7) получается путем разложения разности  $J - J_э$  в ряд Тейлора и удержания первых отличных от нуля членов ряда наименьшей степени малости. Этими членами являются члены с квадратом приращения, так как в точке экстремума первые производные  $\partial J / \partial Y_i$ , входящие в члены первой степени малости, равны нулю.

При оценке точности основной САУ необходимо учитывать в числе установившихся возмущений пробные и поисковые сигналы со стороны системы самонастройки.

**Устойчивость** процесса самонастройки — это устойчивость удержания заданного или экстремального значения  $J$ . В последнем случае для поисковой системы это означает устойчивость автоколебаний относительно точки экстремума.

**Качество переходных процессов** самонастройки определяется прежде всего быстродействием. У систем с оптимизацией настройки это быстродействие определяется временем поиска экстремума. Как уже говорилось, в САУ с самонастройкой динамических свойств (путем ее стабилизации или оптимизации) быстродействие самонастройки ограничено сверху быстродействием основной САУ и обычно получается на порядок меньше последнего. Допустимый нижний предел быстродействия при этом определяется наибольшей возможной быстротой изменения тех свойств основной САУ, которые стабилизируются или оптимизируются системой самонастройки.

В частном случае систем экстремального регулирования, в которых оптимизируется статический режим объекта, быстродействие самонастройки сверху не ограничено, и поэтому целесообразно иметь его как можно большим с тем, чтобы уменьшить отклонения режима от оптимального.

В самонастраивающихся САУ с самонастройкой динамических свойств основной системы, когда быстродействие контура самонастройки сравнимо с быстродействием основной САУ и в течение отдельного переходного процесса в основной САУ настроечные параметры успевают существенно измениться, нахо-

димое в процессе самонастройки значение критерия качества  $J$  будет определяться не постоянными значениями настроечных параметров, а их значениями в виде функций времени, иными словами, критерий качества  $J$  будет не функцией, а функционалом настроечных параметров. Последнее существенно затрудняет аналитическое исследование динамики самонастраивающейся САУ. Такая ситуация, в частности, имеет место всегда, когда скорость естественного изменения свойств основной САУ сравнима с ее быстродействием.

С точки зрения выбора методов исследования самонастраивающиеся САУ представляют собой многомерные многоконтурные системы связанного управления величинами  $X$  и  $J$ . В простейшем случае при одной выходной и одной настроечной величинах такие системы сводятся к двум контурам — контуру основной системы управления величиной  $X$  и контуру самонастройки, осуществляющему управление величиной  $J$ . Это иллюстрируется рис. 14-12. Здесь 1 — контур основной САУ, 2 — контур самонастройки,

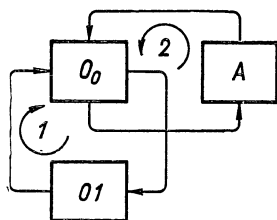


Рис. 14-12. Контур самонастраивающейся САУ

$O_0$  — часть основной САУ, входящая в оба контура,  $O_1$  и  $A$  — остальные части соответственно основного контура и контура адаптации. В общем случае, как говорилось выше, самонастраивающаяся САУ может иметь иерархическую структуру, содержащую произвольное число связанных друг с другом контуров многоступенчатой автоматической настройки.

Самонастраивающиеся САУ в общем случае являются нестационарными и нелинейными системами. Нестационарность вызвана изменениями во времени свойств основной САУ, корректировка которых является целью самонастройки, и изменениями параметров системы в процессе самонастройки. Нелинейность существует прежде всего из-за наличия связи через контур самонастройки параметров  $Y_i$  основной системы с ее выходными величинами  $X_i$ . В системах с оптимизацией настройки существует еще определяемая принципом их действия нелинейная с экстремумом зависимость  $J$  от  $Y$ . Таким образом, исследование самонастраивающихся САУ должно осуществляться методами исследования нелинейных систем, изложенными во второй части книги. При этом следует учитывать особенности исследования многомерных и нестационарных САУ, изложенные в § 7-6, пп. Б и В. В частности, задача существенно упрощается, если можно рассматривать контуры основной САУ и самонастройки как квазиавтономные и квазистационарные. Квазиавтономность будет иметь место, если эти контуры резко различны по быстродействию (см. § 7-6). В самонастраивающихся САУ это часто возможно, когда быстродействие основного кон-

тура много больше быстродействия самонастройки. В этом случае при рассмотрении динамики основной САУ можно принимать ее настройку неизменной, т. е. считать  $Y_i = Y_{i0} = \text{const}$ . Соответственно при рассмотрении процессов самонастройки даже динамических свойств основной САУ можно пренебречь инерционностью этой САУ и считать, что  $J$  по отношению к настроечным параметрам  $Y$  является их статической функцией. Система самонастройки в этом случае может рассматриваться и как квазистационарная, т. е. динамика изменения уставок  $Y_{i0}$  будет описываться уравнениями с постоянными во времени коэффициентами, если можно пренебречь поисковыми сигналами  $Y_{ип}$  из-за их высокочастотности, а также изменениями свойств объекта в течение переходного процесса самонастройки, считая их достаточно медленными.

## Глава пятнадцатая

# САМООРГАНИЗУЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 15-1. ПРОСТЕЙШИЕ САМООРГАНИЗУЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ (БЕЗ САМООБУЧЕНИЯ)

Самоорганизующиеся САУ — это адаптивные САУ, в которых адаптация осуществляется путем изменения оператора, т. е. структурной схемы управляющего устройства  $УУ_0$  основной САУ. Самоорганизующиеся САУ можно представить такой же общей функциональной схемой, как и самонастраивающиеся САУ (см. рис. 14-1). Однако здесь воздействия  $Y$  со стороны управляющего устройства адаптации  $УУ_a$  на управляющее устройство  $УУ_0$  основной САУ вызывают изменения не численных значений параметров, а структурной схемы  $УУ_0$ . Поэтому самоорганизующиеся САУ являются системами с переменной структурой [8]. В самоорганизующихся САУ сигнал  $Y$  является дискретным сигналом, каждому значению которого соответствует определенный оператор  $УУ_0$ , т. е. определенный алгоритм управления объектом.

Примером простейшей самоорганизующейся САУ является самоорганизующаяся САУ с адаптивной коррекцией (рис. 15-1). Варьируемая часть  $УУ_0$  основной системы представляет собой набор определенного числа корректирующих звеньев  $KZ_i$ , которые включаются в контур основной САУ или отключаются от нее исполнительными реле  $ИР_i$  управляющего устройства адаптации. (На рис. 15-1 условно показано, что все корректирующие звенья являются последовательными корректирующими звеньями.) Задача управляющего устройства адаптации заключается в стабилизации или оптимизации принятого критерия качества управления  $J$  путем выбора определенного корректирующего звена или комбинации

этих звеньев. Цепи пробного и при необходимости поискового сигналов для простоты на рисунке не показаны.

Возможна комбинация описанной самоорганизующейся САУ и системы самонастройки численных значений параметров корректирующих звеньев. В этом случае появляются два этапа (уровня) адаптации: первый этап — выбор структуры, т. е. выбор типа коррекции (выбор определенного корректирующего звена или их комбинации), второй этап — самонастройка параметров выбранной коррекции.

Возможность изменения структуры в ходе адаптации резко расширяет диапазоны изменения свойств объекта и внешних условий, в которых самоорганизующаяся САУ сохраняет работоспособность с выполнением заданных требований к качеству управления,

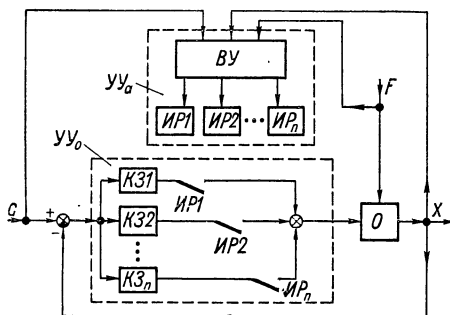


Рис. 15-1. Простейшая самоорганизующаяся САУ

по сравнению с самонастраивающимися САУ, рассмотренными в предыдущей главе. Разумеется, это достигается ценой существенного усложнения контура адаптации.

Примером самоорганизующихся САУ являются системы управления роботами (рис. 15-2). Робот — это машина, предназначенная для выполнения механических действий, подобных выполняемым человеком, занятым физическим

трудом. Основная область применения роботов — это автоматизация ручного труда в промышленности, а также выполнение работ в глубинах океана, космосе и других опасных или недоступных для человека областях. Робот состоит из следующих частей: *О* — рабочих органов — механических рук и органов перемещения, снабженных исполнительными двигателями и являющихся объектом управления; *ВУ* — управляющей вычислительной машины; *ЧУ* — комплекса чувствительных устройств — органов «чувств» робота, выдающих информацию о внешней среде (*F*) и о состоянии робота (*X*); *ПУ* — объединенного в пульте управления комплекса средств общения с человеком — оператором, который дает задание (*G*) роботу и контролирует его действия.

Управление роботом осуществляется следующим образом. Оператор вводит в управляющую вычислительную машину задание *G* на выполнение определенной работы. Пример простейшего задания — взять предмет в определенном месте и переместить его в другое место, или более сложная задача — осуществить сборку изделия из набора деталей, находящихся в определенном месте. Координаты местонахождения предметов могут задаваться различным образом. В частности, предметы могут быть указаны

световым пером непосредственно на экране телевизора, имеющегося на пульте управления, если робот обладает телевизионным зрением. Получив задание, управляющая вычислительная машина осуществляет синтез соответствующего алгоритма управления роботом. Это делается путем разложения полученного задания на более простые задания, для которых в памяти машины имеются готовые типовые алгоритмы синтеза соответствующего алгоритма управления роботом, приводящего к выполнению этого типового задания. В зависимости от характера типового задания ему может соответствовать алгоритм синтеза оптимальной временной программы разомкнутого управления (например, в случае задачи перемещения в заданную точку или по заданной траектории) или алгоритм синтеза управления замкнутого типа в функции

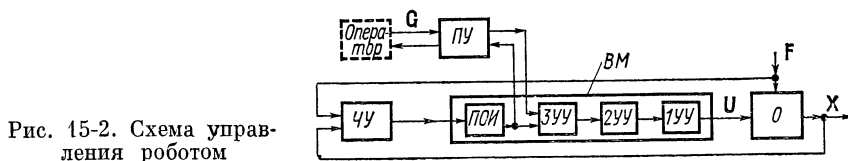


Рис. 15-2. Схема управления роботом

выходных координат  $X$  (например, в случае задачи взятия неориентированного предмета с использованием сигнала обратной связи телевизионного, локационного или тактильного (осязательного) типа). В целом синтезированный алгоритм решения всей поставленной задачи получается комбинированным, включая этапы программного управления и этапы замкнутого или, в свою очередь, комбинированного управления.

После завершения синтеза алгоритма управления и при необходимости его проверки робот осуществляет выполнение задания и по его окончании информирует об этом оператора.

Таким образом, система управления роботом является самоорганизующейся САУ с изменяющимся в соответствии с заданиями алгоритмом работы. Она имеет иерархическую структуру, в которой различаются три уровня иерархии управления, алгоритмически реализуемые в вычислительной машине (см. рис. 15-2). На первом (нижнем) уровне 1УУ синтезируются оптимальные траектории движения  $U_i(t)$  по каждой степени подвижности робота, которые позиционно обрабатываются соответствующими исполнительными двигателями. На втором уровне 2УУ синтезируются элементарные рабочие операции, выполняемые захватом или другим рабочим инструментом механических рук робота. Примеры таких элементарных рабочих операций — найти предмет, взять его, переместить его в определенное место, навинтить гайку, просверлить и т. п. На третьем (верхнем) уровне 3УУ определяются последовательность и набор элементарных операций второго уровня, приводящих к выполнению всего задания, выданного оператором.



Таким образом, на каждом уровне управления происходит разбиение задания, полученного с предыдущего уровня, на более простые задания. Соответственно на каждом уровне используется своя символика, свой алгоритмический язык.

Помимо задачи управления, алгоритмически реализуемой в виде перечисленных трех уровней управления, вычислительная машина выполняет еще отдельную задачу первичной обработки информации (*ПОИ* на рис. 15-2), поступающей от чувствительных устройств. Эта задача представляет большую сложность.

Алгоритмы ее решения включают в себя алгоритмы распознавания образов (см. § 15-2) и часто реализуются в виде самостоятельных самоорганизующихся систем (например, при обработке телевизионной зрительной информации).

Сложность заданий, которые могут быть выполнены третьим уровнем иерархии управления роботом, что в значительной степени зависит, в свою очередь, от качества первичной обработки информации, поступающей от чувствительных устройств, определяет «интеллектуальный» уровень робота в целом. Алгоритмы третьего уровня — это алгоритмы принятия решений, при синтезе которых используются методы автоматического доказательства теорем, методы эвристического программирования.

Все, что выходит за рамки возможностей этого уровня (вместе с *ПОИ*), есть область интеллекта человека — оператора, который образует как бы четвертый уровень иерархии управления роботом, обслуживая его своим интел-

лектом при формулировании задания и контролируя ход выполнения последнего.

Примером другой сложной самоорганизующейся САУ является система управления средствами ПВО. На рис. 15-3 показана укрупненно схема контура адаптации такой системы. Здесь имеются две действующие друг на друга стороны — средства ПВО и средства противника. Средства ПВО подчинены через телеуправляемые исполнительные устройства *ИУ* управляющей цифровой вычислительной машине (*ЦВМ*). Последняя также через систему связи получает сведения о состоянии (действиях) противника (*F*) и своих средств ПВО (*X*). На основании этой текущей информации, а также заданной цели (*G*), к которой следует стремиться, *ЦВМ* выбирает наилучший очередной шаг (этап) в действиях средств ПВО. После получения информации о положении дел в конце этого шага определяется оптимальный следующий шаг и т. д. Таким образом, работа *ЦВМ* заключается в поиске наилучшего решения дискретной многошаговой задачи с учетом изменений в объекте управления и внешних условий в ходе решения.

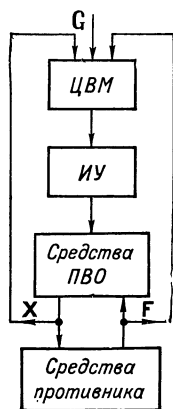


Рис. 15-3. Схема самоорганизующейся системы управления ПВО

Оптимизируемый критерий качества управления в данном случае является минимаксным критерием, поскольку здесь в чистом виде имеет место ситуация «организованного противодействия». Таким образом, рассматриваемая система управления является игровой САУ (см. § 13-4). Поскольку оптимизируемый процесс представляет собой многошаговый процесс, поиск решения осуществляется обычно методом динамического программирования (см. § 13-2).

Приведенная на рис. 15-3 схема является предельно упрощенной. Здесь не показаны местные обратные связи отработки заданий в самих средствах ПВО. В частности, подобные большие системы, как правило, делаются многоступенчатыми, т. е. имеют иерархическую структуру с рядом местных ЦВМ, управляющих отдельными частями средств ПВО и подчиненных центральной ЦВМ.

#### **§ 15-2. ПОНЯТИЕ О САМООБУЧАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

В самом общем случае под самоорганизующейся системой в кибернетике понимается система, упорядоченность, организованность которой со временем возрастают. В предельном случае такая система в исходном состоянии представляет собой совокупность элементов, связанных друг с другом совершенно случайным образом. Затем в результате взаимодействия с внешней средой постепенно в системе возникают стойкие связи между элементами, т. е. возникает определенная структура со специализацией составляющих ее элементов по выполняемым функциям. Прообразами технических самоорганизующихся систем являются живые организмы, которые, как известно, и возникли путем самоорганизации в порядке эволюции из неживой природы. Первую техническую модель самоорганизующейся системы создал английский ученый Р. Эшби (гомеостат Эшби) [14].

Важнейшим свойством самоорганизующихся систем является их способность к о б у ч е н и ю и с а м о о б у ч е н и ю. Рассмотренные в предыдущем параграфе самоорганизующиеся САУ являются простейшими САУ такого типа. Они не обладают какими-либо принципиально новыми возможностями по сравнению с самонастраивающимися системами. Однако благодаря тому, что в самоорганизующихся САУ структурная схема может целенаправленно изменяться в процессе эксплуатации, в них может быть реализована идея самоусовершенствования алгоритма работы и самого критерия качества. Такие самоорганизующиеся САУ называются с а м о о б у ч а ю щ и м и с я САУ. В этих системах качество управления (например, точность, если она выбрана критерием качества управления) повышается со временем в ходе эксплуатации системы.

Самообучающиеся САУ представляют собой высший тип систем автоматического управления, стоящий по своим принципиальным

возможностям на уровне живых существ. Именно на базе самоорганизующихся САУ в будущем будут созданы технические системы, превосходящие по своим «мыслительным» способностям человека. Однако в настоящее время работа по созданию САУ такого типа находится еще на самом начальном этапе. Работа идет пока главным образом в направлении копирования простейших образцов живой природы.

Простейшую самообучающуюся САУ можно представить как результат автоматизации процесса усовершенствования алгоритма работы контура адаптации несамообучающейся адаптивной САУ, который до автоматизации должен был осуществляться человеком по мере накопления опыта эксплуатации системы. Для этого система дополняется вторым контуром адаптации со своим управляющим устройством, который действует значительно медленнее первого контура адаптации, корректируя алгоритм последнего по результатам анализа его многократной работы в ходе эксплуатации системы. Очевидно, что *управляющее устройство этого второго контура адаптации должно обязательно обладать памятью*. Второй контур адаптации имеет свой критерий качества управления, для вычисления и оптимизации которого управляющее устройство этого контура воздействует на первый контур пробными и поисковыми сигналами подобно тому, как управляющее устройство первого контура адаптации воздействует на контур основной САУ.

В свою очередь, второй контур адаптации может быть дополнен еще более медленно действующим третьим контуром адаптации, улучшающим со временем алгоритм второго контура и т. д. В целом самообучающиеся САУ имеют многоступенчатую иерархическую структуру с несколькими этапами адаптации, из которых каждый последующий имеет все более обобщенный алгоритм функционирования, более медленный ритм работы и соответственно более долговременную память.

Примером самообучающейся САУ может быть рассмотренная в § 15-1 система управления роботом, когда третий, верхний уровень иерархии управления включает в себя алгоритмы коррекции и улучшения в процессе накопления опыта при эксплуатации робота первоначально заложенных типовых алгоритмов второго уровня, алгоритмов первичной обработки информации от чувствительных устройств, а также синтезируемых на третьем уровне алгоритмов выполнения отдельных заданий в случае их многократного повторения.

В качестве другого примера самообучающейся САУ можно привести описанную в предыдущем параграфе самоорганизующуюся систему управления ПВО, дополненную надстройкой в виде второго этажа адаптации. Этот новый уровень адаптации конструктивно не обязательно должен представлять собой особый контур со своей ЦВМ, а может быть реализован в рамках ЦВМ первого контура адаптации путем усложнения программы ее

работы. Второй этаж адаптации на основе данных опыта, накапливаемого в ходе многошагового процесса управления ПВО, постепенно все более уточняет характеристики средств противника и на основании этого корректирует оптимизируемый системой критерий качества управления своими средствами ПВО.

В начале действия системы оптимальное управление ПВО целиком определяется первым контуром адаптации по минимаксному критерию (см. § 13-4) при самых широких предположениях о возможных характеристиках и действиях противника.

В ходе действия системы ее второй этаж обобщает данные о состоянии и действиях противника, включая его реакции на действия сил ПВО. При этом для все большей части показателей сил противника находятся вероятностные, а возможно, и детерминированные характеристики. Соответственно при оптимизации управления в отношении этих характеристик минимаксный подход заменяется вероятностным (бейесовым) и детерминированным. В результате постепенно сужается множество тех характеристик противника, в пределах которых оптимизация управления осуществляется на основе минимакса. В этом и заключается самообучение как процесс перехода от незнания ко все большему знанию, т. е. ко все большей определенности поведения.

Таким образом, второй этаж адаптации постепенно изменяет алгоритм работы первого этажа в направлении от минимаксного критерия к вероятностному и детерминированному. Соответственно величина риска уменьшается, т. е. повышается качество управления.

Важным классом самообучающихся систем, получившим наибольшее распространение, являются самообучающиеся системы распознавания образов (зрительных, звуковых и т. д.). Такие системы нашли применение, например, в читающих автоматах, автоматах, печатающих текст с голоса, диагностирующих (включая как техническую диагностику, так и диагностику болезней) и т. п. Разумеется, существуют и более простые автоматы подобного рода, не обладающие способностью к обучению [6, 10, 14].

Помимо самостоятельного назначения, системы распознавания образов применяются и в задачах автоматического управления (например, роботами) как устройства распознавания свойств объекта и быстроменяющейся внешней ситуации. По сравнению с методами, описанными в предыдущей главе, самообучающиеся системы распознавания позволяют принципиально более быстро получать необходимую для осуществления процесса адаптации информацию об объекте, особенно в случае сложных объектов с неизвестными или не поддающимися математическому описанию свойствами [6].

Вообще основной областью применения самообучающихся САУ являются именно такие сложные объекты с принципиально не определяемыми свойствами. Примерами таких объектов служат большие системы телефонной связи, промышленные предприятия,

другие большие системы, включающие живые организмы. Управление такими объектами невозможно детерминированными управляющими устройствами. Здесь принципиально необходимо самообучающееся управляющее устройство с применением принципа распознавания образов (ситуацией) в качестве единственно возможного способа оценки состояния такого объекта [10].

Самообучающиеся САУ требуют принципиально новых методов исследования, помимо описанных в настоящей книге. Эти методы, как и сами системы, еще только создаются. Однако уже сейчас ясно, что сложность задачи, особенно в случае неалгоритмизируемых объектов, вынуждает ограничиваться при аналитических исследованиях и при моделировании на вычислительных машинах получением в основном только качественных результатов. Особое значение в этих условиях приобретает экспериментальное получение конечных количественных результатов путем автоматического процесса самоорганизации и самоусовершенствования управляющего устройства, синтезированного исходя из очень общих начальных предпосылок. Таким образом, речь идет о принципиально новом пути создания технических устройств путем автоматического синтеза и их в процессе самоусовершенствования, конечный результат которого может предопределяться человеком только в самых общих чертах.

Приложение 1  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

**А. Непрерывное преобразование Лапласа**

Преобразование Лапласа основано на двух следующих формулах: формуле прямого преобразования Лапласа

$$L[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (\text{П-1})$$

и формуле обратного преобразования Лапласа

$$L^{-1}[X(s)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds. \quad (\text{П-2})$$

Здесь  $L$  и  $L^{-1}$  — обозначения операций прямого и обратного преобразования Лапласа.

В результате прямого преобразования Лапласа некоторой функции времени  $x(t)$  получается функция  $X(s)$  комплексной переменной  $s = c + j\omega$ . Эта функция называется изображением Лапласа функции  $x(t)$ . В свою очередь,  $x(t)$  называется оригиналом изображения  $X(s)$ .

Последовательное применение формул (П-1) и (П-2) к функции  $x(t)$  дает опять ту же функцию  $x(t)$ .

Преобразование Лапласа применимо к функции  $x(t)$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

$$x(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \quad (\text{П-3})$$

и можно выбрать такое положительное число  $c$ , при котором

$$\int_0^{\infty} |x(t)| e^{-ct} dt < \infty. \quad (\text{П-4})$$

Минимальная величина  $c$ , при которой выполняется неравенство (П-4), называется абсциссой абсолютной сходимости. В САУ мы обычно имеем дело с функциями, для которых оба условия (П-3) и (П-4) всегда выполняются. В частности, для затухающих переходных составляющих в устойчивых САУ абсцисса абсолютной сходимости равна нулю. В этом случае переменная  $s$  оказывается мнимой величиной, т. е.  $s = j\omega$ , и преобразование Лапласа превращается в его частный случай — одностороннее преобразование Фурье, характеризуемое формулами:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (\text{П-5})$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{П-6})$$

Изображение Фурье  $X(j\omega)$  имеет известный физический смысл — это частотная функция, определяющая гармонический состав функции  $x(t)$ .

Если в формуле (П-5) нижний предел сделать  $-\infty$ , получим так называемое двустороннее преобразование Фурье, которое применимо к двусторонним функциям времени, т. е. функциям, существующим как при  $t > 0$ , так и при  $t < 0$ . При этом условием применимости двустороннего преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость функции  $x(t)$  в интервале времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (\text{П-7})$$

Другими вариантами преобразования Лапласа являются преобразование Карсона и преобразование Хевисайда. Преобразование Карсона отличается от преобразования Лапласа тем, что в формуле прямого преобразования (П-1) перед интегралом вводится множитель  $s$ . Преобразование Хевисайда представляет собой частный случай преобразования Карсона, когда начальные условия для функции  $x(t)$  и ее производных являются нулевыми.

Приведем выражения изображений Лапласа для некоторых элементарных функций:

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
1(t)	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$

Изображение производной

$$L[p^k x(t)] = s^k X(s) - [x(0)s^{k-1} + x'(0)s^{k-2} + x''(0)s^{k-3} + \dots + x^{(k-1)}(0)], \quad (\text{П-8})$$

где  $x(0), x'(0), x''(0), \dots, x^{(k-1)}(0)$  — значения  $x(t)$  и ее производных при  $t = 0$ .

В частном случае нулевых начальных условий

$$L[p^k x(t)] = s^k X(s). \quad (\text{П-9})$$

Некоторые свойства преобразования Лапласа приведены в табл. П-1. Осуществим прямое преобразование Лапласа над уравнением

$$D(p)x = M(p)f. \quad (\text{П-10})$$

Учитывая, что обе части этого уравнения представляют собой сумму производных с постоянными коэффициентами, получим:

$$D(s)X(s) = M(s)F(s) + M_H(s). \quad (\text{П-11})$$

Здесь  $X(s) = L[x(t)]$ ;  $F(s) = L[f(t)]$ ; полиномы  $D(s)$  и  $M(s)$  отличаются от исходных полиномов  $D(p)$  и  $M(p)$  только заменой  $p$  на  $s$ , а  $M_H(s)$  — полином, определяемый ненулевыми начальными условиями и в соответствии с выражением (П-8) состоящий из значений производных  $x(t)$  при  $t = 0$ ,

умноженных на коэффициенты многочлена  $D(p)$ . Отсюда изображение искомого решения

$$X(s) = \frac{M(s)F(s) + M_H(s)}{D(s)} = W(s)F(s) + W_H(s), \quad (\text{П-12})$$

где  $W(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$  — передаточная функция, соответствующая уравнению (П-10) (при замене  $p$  на  $s$ );  $W_H(s) = \frac{M_H(s)}{D(s)}$  — дробь, определяемая ненулевыми начальными условиями.

Таблица П-1

Некоторые свойства преобразования Лапласа

№ пп.	Оригинал	Изображение Лапласа
1	$ax(t)$	$aX(s)$
2	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
3	$x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$
4	$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
5	$x(0)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
6	$x(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$
7	$\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$	$X_1(s) X_2(s)$

Для нахождения оригинала искомого решения  $x(t)$  по его изображению, полученному в виде (П-12), применяют теорему разложения входящих в (П-12) дробей на простейшие дроби. Для этого предварительно надо придать выражению (П-12) вид рациональной дроби:

$$X(s) = \frac{G(s)}{H(s)}. \quad (\text{П-13})$$

[Изображение  $F(s)$  в общем случае также может представлять собой дробь. Преобразование выражения (П-12) сводится к тому, чтобы освободиться от этой дроби в числителе всего выражения  $X(s)$ .] В результате в случае отсутствия у дроби (П-13) кратных полюсов получаем сумму

$$X(s) = \sum_i \frac{C_i}{s - s_i}, \quad (\text{П-14})$$

где  $s_i$  — нули  $H(s)$ ;

$$C_i = \frac{G(s_i)}{H'(s_i)}, \quad (\text{П-14a})$$

причем  $H'(s_i) = \left. \frac{dH}{ds} \right|_{s=s_i}$ .



Переходя к оригиналу, окончательно получаем:

$$x(t) = \sum_i C_i e^{s_i t}. \quad (\text{П-15})$$

Как видно из (П-12), в сумме (П-15) часть составляющих обязана своим происхождением нулям  $D(s)$ , т. е. полюсам  $W(s)$ , а часть — полюсам  $F(s)$ . Первая часть составляющих соответствует переходной, а вторая — установившейся (вынужденной) составляющим решения.

Если дробь (П-13) имеет кратные полюсы, формула разложения ее, как известно, несколько усложняется и в коэффициенты  $C_i$  войдет время  $t$ .

Таким образом, применение преобразования Лапласа для решения дифференциального уравнения системы сводится к использованию готовой формулы (П-15), где коэффициенты  $C_i$  определяются согласно (П-14а). Основная трудность здесь заключается в необходимости предварительного определения нулей  $s_i$  и изображения Лапласа  $F(s)$  для  $f(t)$ .

Первую задачу следует решать с помощью приближенных методов отыскания корней (см., например, [23]). Для нахождения выражения изображения  $f(t)$  используются таблицы преобразования Лапласа, содержащие выражения для изображения наиболее часто встречающихся элементарных функций. В случае сложной функции  $f(t)$  ее предварительно разлагают на простейшие дроби.

Остановимся на некоторых частных случаях. При нулевых начальных условиях выражение (П-12) принимает простой вид:

$$X(s) = W(s) F(s). \quad (\text{П-12a})$$

В случае когда  $f(t) = \delta(t)$ , учитывая, что изображение Лапласа  $L[\delta(t)] = 1$ , из (П-12a) получаем следующее выражение для изображения весовой функции звена или системы, описываемых уравнением (П-10):

$$L[w(t)] = W(s), \quad (\text{П-16})$$

т. е.

$$w(t) = L^{-1}[W(s)]. \quad (\text{П-17})$$

В случае когда  $f(t) = 1(t)$ , учитывая, что  $L[1(t)] = 1/s$ , из (П-12a) получаем следующее выражение для изображения переходной характеристики системы, описываемой уравнением (П-10):

$$L[h(t)] = \frac{W(s)}{s}. \quad (\text{П-18})$$

Если в (П-12a) перейти к преобразованию Фурье, подставив  $s = j\omega$ , будем иметь известное соотношение

$$X(j\omega) = W(j\omega) F(j\omega), \quad (\text{П-19})$$

где  $W(j\omega)$  — частотная характеристика системы, определяющая связь между частотными спектрами на выходе и входе системы, описываемой уравнением (П-10).

Выражения (П-16) и (П-17) при переходе к преобразованию Фурье дают следующую важную связь между весовой и частотной функциями:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{П-20})$$

и

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{П-21})$$

## В. Дискретное преобразование Лапласа

Формула прямого дискретного преобразования Лапласа имеет вид:

$$D \{x[nT_{\Pi}]\} = X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_{\Pi}] e^{-sT_{\Pi}n}. \quad (\text{П-22})$$

Здесь  $x[nT_{\Pi}]$  — решетчатая функция времени ( $n = 1, 2, \dots$ ) (рис. 12-6);  $T_{\Pi}$  — период повторения дискретных значений решетчатой функции;  $X^*(s)$  — дискретное изображение Лапласа решетчатой функции  $x[nT_{\Pi}]$ ;  $D$  — символ дискретного преобразования Лапласа.

Для решетчатой функции  $x[n]$  в относительном времени  $t/T_{\Pi}$  (рис. П-1) формула (П-22) принимает вид:

$$D \{x[n]\} = X^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] e^{-qn}, \quad (\text{П-23})$$

где  $q = T_{\Pi}s$  — новая безразмерная комплексная переменная.

Введем обозначение

$$z = e^q. \quad (\text{П-24})$$

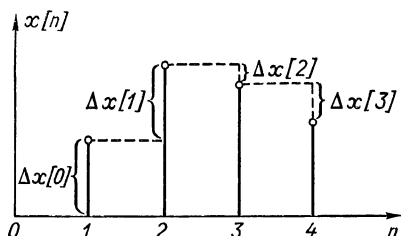


Рис. П-1. Решетчатая функция  $x[n]$  и ее первая разность  $\Delta x[n]$

Тогда выражение (П-23) примет такой вид:

$$Z \{x[n]\} = X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^n. \quad (\text{П-25})$$

В последней форме дискретное преобразование Лапласа называется  $Z$ -преобразованием. Соответственно в (П-25)  $Z$  — символ этого преобразования. (Иногда применяется другое обозначение:  $L_z$ .)

Дискретное преобразование Лапласа аналогично обычному непрерывному преобразованию Лапласа (П-1) для непрерывных функций

$$L[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

с переходом от интеграла к сумме в соответствии с дискретным характером оригинала. Чтобы пояснить соотношение между обоими преобразованиями Лапласа, найдем обычное изображение Лапласа идеальной импульсной функции, которую можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_{\Pi}).$$

Эта функция представляет собой последовательность  $\delta$ -импульсов, существующих в моменты  $t = nT_{\Pi}$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , и имеющих площадь, равную значению непрерывной функции  $x(t)$  в эти дискретные моменты времени. Изображение Лапласа этой функции, согласно формуле (П-1),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_{\Pi}) e^{-st} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) \delta(t - nT_{\Pi}) e^{-st} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_{\Pi}] e^{-sT_{\Pi}n}. \end{aligned} \quad (\text{П-26})$$

Это выражение совпадает с (П-22). Таким образом, дискретное преобразование Лапласа решетчатой функции совпадает с обычным преобразованием

Лапласа идеальной импульсной функции. В импульсных системах поэтому дискретные сигналы можно в равной мере трактовать как решетчатые функции и как идеальные импульсные функции, пользуясь при этом соответствующей формой преобразования Лапласа.

Ниже в табличке указаны выражения для дискретных изображений Лапласа некоторых элементарных функций (для сравнения здесь же даны обычные изображения соответствующих непрерывных функций):

$x(t)$	$x[n]$	$X(s)$	$X^*(z)$
$\delta(t)$	$\delta[n]$	1	1
1(t)	1[n]	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at}$	$e^{-an}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha}}$
$\sin \beta t$	$\sin \beta T_n n$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T_n}{z^2 - 2z \cos \beta T_n + 1}$

Приведем без доказательств ряд формул, определяющих основные свойства дискретного преобразования [40].

Формулы для предельных значений решетчатой функции, выраженных через дискретные изображения:

$$x[0] = \lim_{n \rightarrow 0} x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z); \quad (\text{П-27})$$

$$x[\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1) X^*(z)]. \quad (\text{П-28})$$

Изображение решетчатой функции, смещенной в сторону опережения на  $m$  периодов:

$$Z\{x[n+m]\} = z^m X^*(z) - x[0]z^m - x[1]z^{m-1} - \dots - x[m-1]z, \quad (\text{П-29})$$

где

$$X^*(z) = Z\{x[n]\}.$$

Изображение решетчатой функции, смещенной в сторону запаздывания на  $m$  периодов:

$$Z\{x[n-m]\} = z^{-m} Z\{x[n]\} = z^{-m} X^*(z). \quad (\text{П-30})$$

Системы, в которых действуют сигналы в виде решетчатых функций времени, могут быть описаны с помощью разностных уравнений. Для решения таких уравнений можно воспользоваться методами классической теории разностных уравнений, которые аналогичны методам теории дифференциальных уравнений. Однако, как и для дифференциальных уравнений, значительно более просто использовать для этой цели преобразование Лапласа, которое в данном случае берется в форме дискретного преобразования Лапласа.

Рассмотрим порядок решения разностных уравнений с помощью дискретного преобразования Лапласа. Разностное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_0 \Delta^m x[n] + a_1 \Delta^{m-1} x[n] + \dots + a_{m-1} \Delta x[n] + a_m x[n] = \\ = b_0 \Delta^l f[n] + b_1 \Delta^{l-1} f[n] + \dots + b_{l-1} \Delta f[n] + b_l f[n]. \end{aligned} \quad (\text{П-31})$$

Это линейное неоднородное (с правой частью) разностное уравнение  $m$ -го порядка. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n] \quad (\text{П-32})$$

— первая разность (разность первого порядка); она характеризует скорость изменения решетчатой функции и является аналогом первой производной непрерывной функции (рис. П-1);

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] \quad (\text{П-33})$$

— вторая разность (аналог второй производной).

С учетом (П-32)

$$\Delta^2 x[n] = x[n+2] - 2x[n+1] + x[n]. \quad (\text{П-34})$$

В общем виде  $m$ -я разность

$$\Delta^m x[n] = \Delta^{m-1} x[n+1] - \Delta^{m-1} x[n] = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_i^m x[n+m-i], \quad (\text{П-35})$$

где  $C_i^m = \frac{m!}{i!(m-i)!}$  — коэффициенты бинома Ньютона.

Аналогично  $\Delta^l f[n]$  —  $l$ -я разность функции  $f[n]$  и т. д.

Уравнение (П-31) можно записать в виде рекуррентного уравнения через полные значения решетчатых функций:

$$\begin{aligned} a'_0 x[n+m] + a'_1 x[n+m-1] + \dots + a'_{m-1} x[n+1] + a'_m x[n] = \\ = b'_0 f[n+l] + b'_1 f[n+l-1] + \dots + b'_{l-1} f[n+1] + b'_l f[n]. \end{aligned} \quad (\text{П-36})$$

Уравнения (П-31) и (П-36) получаются одно из другого с помощью формулы (П-35).

Введем оператор, связывающий последующее значение решетчатой функции с предыдущим, т. е.  $x[n+1]$  с  $x[n]$ . Обозначив его через  $\nabla$ , можно записать

$$x[n+1] = \nabla x[n]. \quad (\text{П-37})$$

Согласно (П-32),

$$\nabla = 1 + \Delta.$$

Соответственно

$$x[n+2] = \nabla^2 x[n]$$

и т. д.:

$$x[n+m] = \nabla^m x[n]. \quad (\text{П-38})$$

Оператор  $\nabla$  называется оператором сдвига. С его помощью уравнение (П-36) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} a'_0 \nabla^m x[n] + a'_1 \nabla^{m-1} x[n] + \dots + a'_{m-1} \nabla x[n] + a'_m x[n] = \\ = b'_0 \nabla^l f[n] + b'_1 \nabla^{l-1} f[n] + \dots + b'_{l-1} \nabla f[n] + b'_l f[n] \end{aligned} \quad (\text{П-39})$$

или в виде

$$Q(\nabla) x[n] = R(\nabla) f[n], \quad (\text{П-40})$$

где

$$\begin{aligned} Q(\nabla) &= a'_0 \nabla^m + a'_1 \nabla^{m-1} + \dots + a'_{m-1} \nabla + a'_m; \\ R(\nabla) &= b'_0 \nabla^l + b'_1 \nabla^{l-1} + \dots + b'_{l-1} \nabla + b'_l. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать и с помощью передаточной функции:

$$x[n] = W(\nabla) f[n], \quad (\text{П-41})$$

где

$$W(\nabla) = \frac{R(\nabla)}{Q(\nabla)}.$$

Решение рассматриваемых уравнений с помощью дискретного преобразования Лапласа аналогично решению дифференциального уравнения с помощью обычного преобразования Лапласа. Вначале над обеими частями уравнения совершают прямое преобразование Лапласа. В результате находят выражение для дискретного изображения искомой функции. Затем по нему находят оригинал, пользуясь таблицей дискретного преобразования и разлагая предварительно полученное выражение для изображения на простые дроби.

Заметим, что, согласно (П-29), выражение для дискретного изображения  $Z(\nabla^m x[n]) = Z\{x[n+m]\}$  подобно выражению (П-8) для обычного изображения Лапласа  $L[p^m x(t)]$  производной непрерывной функции с заменой соответственно  $p$  на  $s$  и  $\nabla$  на  $z$ . Поэтому выражение для дискретного изображения  $X^*(z)$  получается из уравнения, использующего оператор  $\nabla$ , точно так же, как выражение для изображения непрерывной функции получается из дифференциального уравнения с оператором дифференцирования  $p$ . Оператор сдвига  $\nabla$  играет здесь роль, подобную оператору  $p$ .

В частности, если совершить над разностным уравнением (П-40) дискретное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим выражение для дискретного изображения искомой функции в виде

$$X^*(z) = W^*(z) F^*(z), \quad (\text{П-42})$$

где  $W^*(z) = R^*(z)/Q^*(z)$  — дискретная передаточная функция системы, которая отличается от выражения (П-41) для передаточной функции  $R(\nabla)/Q(\nabla)$  простой заменой  $\nabla$  на  $z$ .

## Приложение 2

### НОМОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ПО ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Номограммы построены для системы, передаточная функция которой имеет вид:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

(О применении их в более общем случае см. в § 1-5.)

1. Определение л. а. х.  $L_3(\omega)$  и л. ф. х.  $\varphi_3(\omega)$  замкнутой системы по  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  разомкнутой системы.

На рис. П-2а и П-2б даны линии равных значений  $L_3$  и  $\varphi_3$  в координатах  $L$  и  $\varphi$ . По имеющимся характеристикам  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  для каждого отдельного значения  $\omega$  определяются значения  $L$  и  $\varphi$ , а по последним с помощью рис. П-2а и П-2б находятся соответствующие значения  $L_3$  и  $\varphi_3$ .

2. Определение  $U_3(\omega)$  по  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  разомкнутой системы.

На рис. П-3 даны линии равных значений  $U_3$  в координатах  $L$  и  $\varphi$ . Порядок применения этой номограммы тот же, что и рис. П-2а.

## Приложение 3

### СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Случайная величина и случайный процесс.** Случайная величина — это величина, значение которой определяется неконтролируемыми нами причинами и поэтому не может быть точно предсказано. Примеры случайных величин — ошибка при стрельбе в цель, результат измерения какой-либо величины в условиях помех, результат бросания монеты или игральной кости.

Случайный процесс — это случайная величина, являющаяся функцией времени, или по-другому — это функция времени, значение которой в каждый момент времени является случайной величиной.

Пример случайного процесса — изменение напряжения электрической сети питания во времени. В каждый момент времени напряжение является случайной величиной. Совокупность этих величин во времени представляет собой случайный процесс. Именно случайным процессом являются случайные изменения выходной величины в системах автоматического управления.

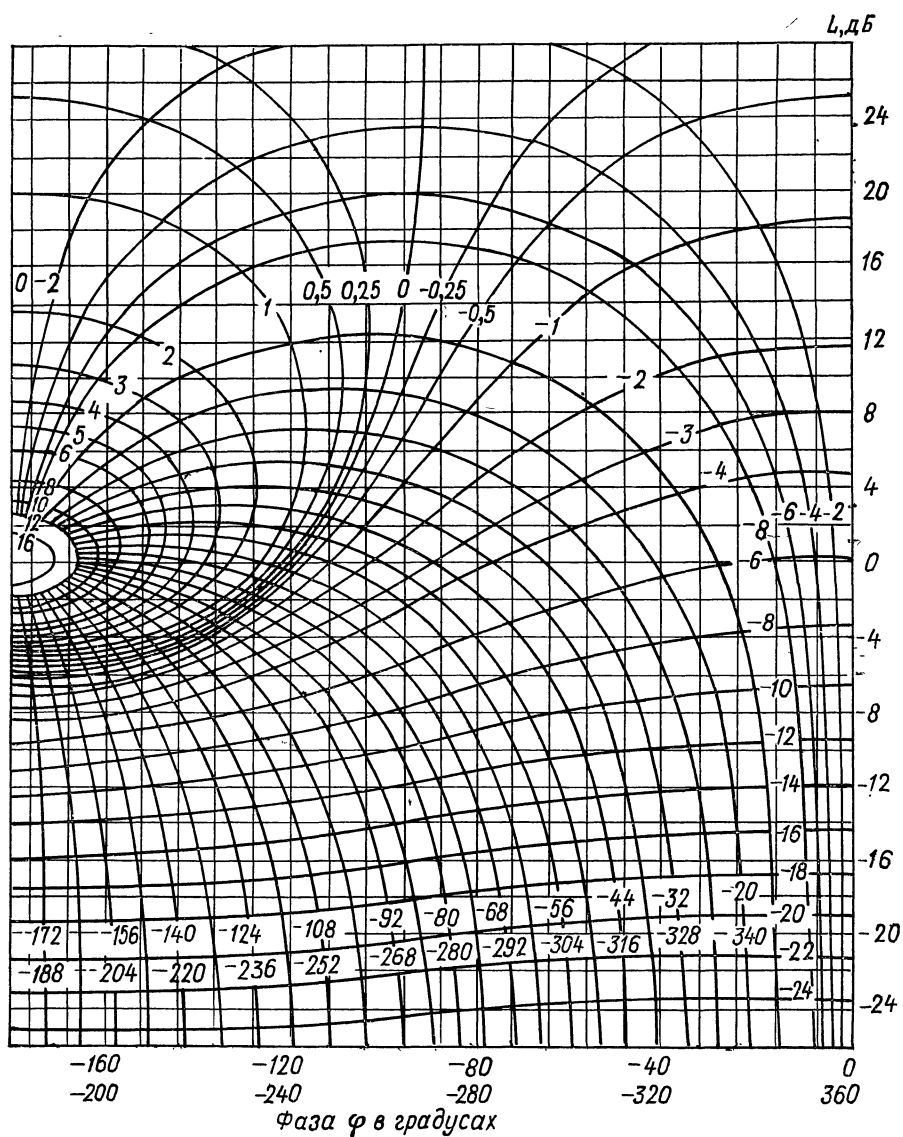


Рис. П-2а. Номограммы для определения л. а. х. и л. ф. х. замкнутой системы по этим характеристикам разомкнутой системы

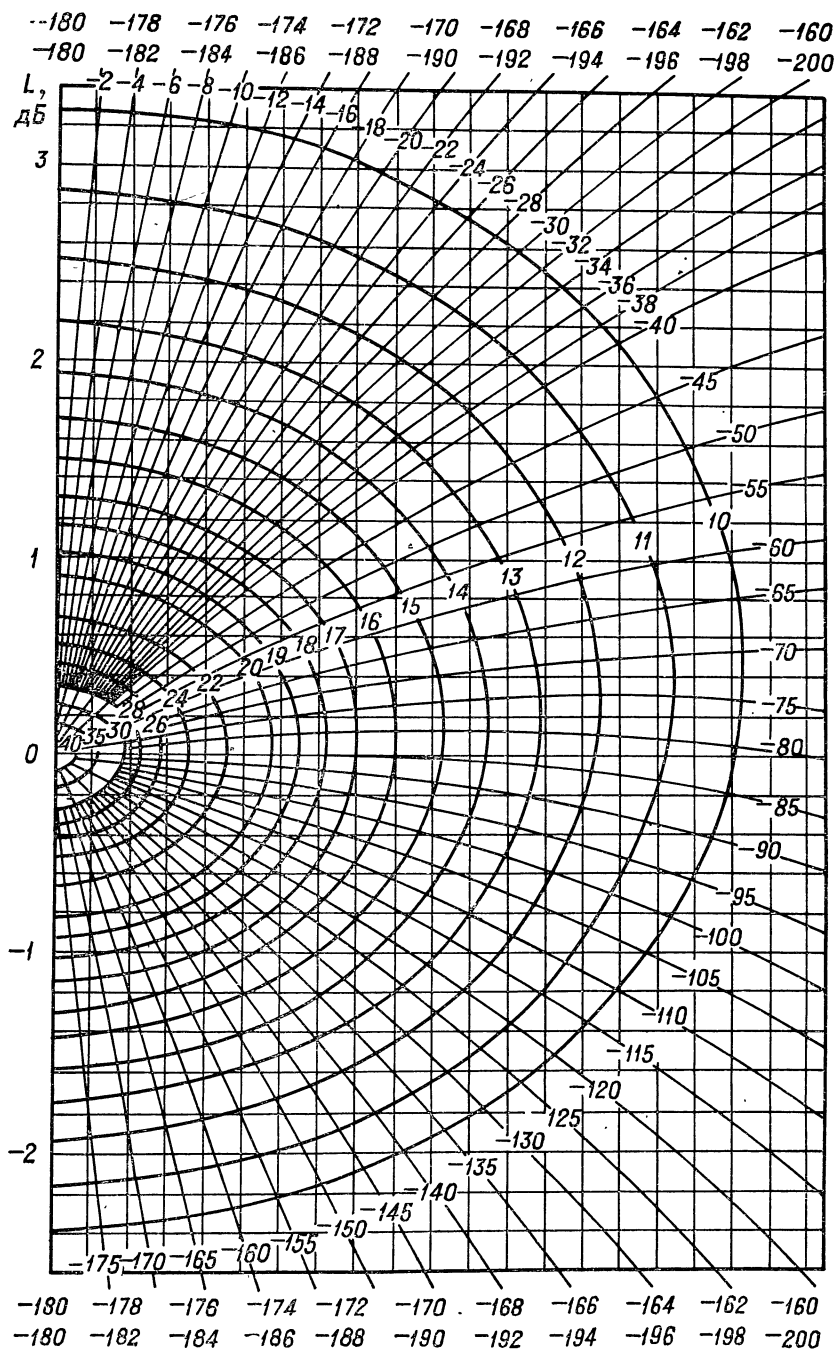


Рис. П-26. Номограммы для определения л. а. х. и л. в. х. замкнутой системы по этим характеристикам разомкнутой системы

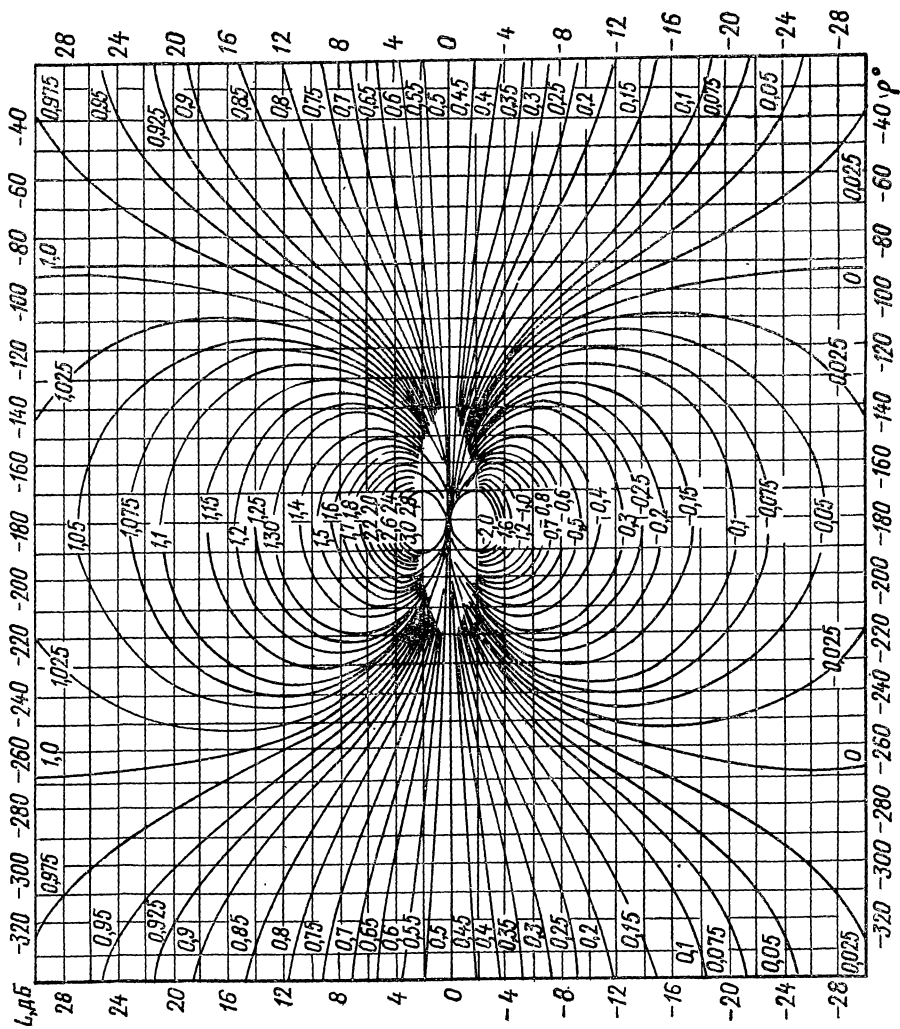


Рис. П-3. Номограмма для определения действительной частотной характеристики замкнутой системы по л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы



Случайные процессы бывают стационарными и нестационарными. Стационарный случайный процесс — это случайный процесс, установившийся в статистическом смысле, когда все вероятностные характеристики его неизменны во времени. Можно сказать, что стационарный случайный процесс является аналогом стационарного детерминированного процесса.

Вместо термина «случайный» употребляют также термины стохастический и вероятностный.

**Вероятность.** Для количественной характеристики случайных величин и функций служит понятие вероятность. Для дискретной случайной величины  $x$  вероятность ее значения  $x_i$ , определенная по результатам  $N$  измерений этой величины, равна

$$P(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}, \quad (\text{П-43})$$

где  $n_i$  — число измеренных значений  $x = x_i$  из общего числа измерений  $N$ .

Иными словами, вероятность данного значения случайной величины — это предельное значение частоты появления этого значения при увеличении до бесконечности общего количества значений этой величины.

Очевидно, что

$$0 \leq P(x_i) \leq 1$$

и сумма вероятностей всех значений случайной величины

$$\sum_i P(x_i) = 1.$$

Если рассматриваются две случайные величины  $x$  и  $y$ , то вероятность того, что первая случайная величина  $x$  примет определенное значение  $x_i$  при условии, что вторая случайная величина примет тоже определенное значение  $y_j$ , называется условной вероятностью и обозначается  $P(x_i/y_j)$ .

Вероятность того, что рассматриваемые две величины одновременно примут определенные значения  $x_i$  и  $y_j$ ,

$$P(x_i, y_j) = P(x_i/y_j) P(y_j).$$

Если величины  $x$  и  $y$  независимы, то

$$P(x_i/y_j) = P(x_i) \text{ и } P(x_i, y_j) = P(x_i) P(y_j).$$

**Законы распределения случайных величин.** Для полного описания случайной величины  $x$  надо знать вероятности  $P(x_i)$  всех ее значений, т. е. знать функцию  $P(x)$ , которая называется законом (функцией) распределения вероятностей случайной величины.

На рис. П-4, а приведен пример графического изображения закона распределения дискретной случайной величины.

Для непрерывных случайных величин, которые могут иметь бесконечное множество значений, вероятность каждого отдельного значения  $x_i$  соответственно бесконечно мала, и можно говорить лишь о конечной вероятности нахождения  $x$  в определенном интервале значений между  $x_i$  и  $x_i + \Delta x$ , т. е. о вероятности  $P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x)$ . Поэтому для описания распределения непрерывных случайных величин вводится понятие плотности вероятности (аналогично тому, как при описании распределения электрического тока по сечению проводника применяется понятие плотности тока). Плотность вероятности

$$p(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x)}{\Delta x}. \quad (\text{П-44})$$

Отсюда, в свою очередь,

$$P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x) = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} p(x) dx. \quad (\text{П-45})$$

Графически эта величина представляет собой заштрихованную часть площади под кривой  $p(x)$  на рис. П-4, б.

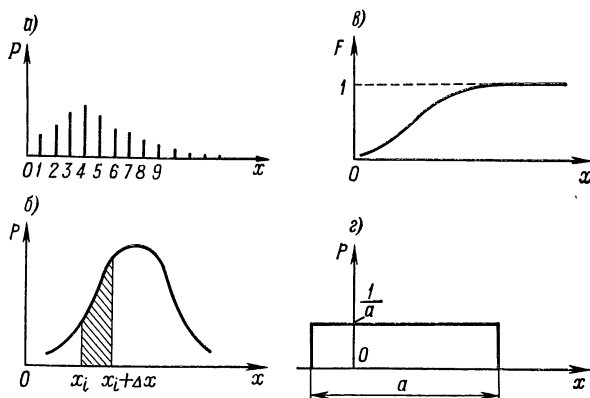


Рис. П-4. Функции распределения случайных величин

Непрерывная случайная величина характеризуется законом (функцией) распределения плотности вероятности  $p(x)$ . Примерный вид его показан на рис. П-4, б. Из (П-45) следует, что площадь под кривой плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (\text{П-46})$$

Функцию  $p(x)$  называют также дифференциальным законом распределения случайной величины. Смысл этого названия очевиден из определения функции  $p(x)$  согласно (П-44).

Вместо  $p(x)$  непрерывную случайную величину можно характеризовать еще так называемым интегральным законом распределения  $F(x)$ . Величина  $F(x)$  представляет собой вероятность того, что случайная величина  $x$  примет значение меньше некоторого  $x_i$ , т. е.

$$F(x_i) = P(x < x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} p(x) dx. \quad (\text{П-47})$$

Примерный график  $F(x)$  показан на рис. П-4, в.

При статистическом описании реальных случайных величин их стараются свести к одному из типовых законов распределения аналогично тому, как реальные детерминированные воздействия стремятся сводить к каким-либо типовым воздействиям (ступенчатое, гармоническое, линейно возрастающее и т. п.). Такими типовыми законами распределения являются распределение Гаусса, или нормальное распределение, равномерное распределение, распределение Пуассона (для дискретных случайных величин), распределения Релея, Коши и др. Основное распространение в системах автоматического управления имеет нормальное распределение. Примером такого распределения является распределение, показанное на рис. П-4, б. Практически можно считать, что всякая непрерывная случайная величина, представляющая

собой результат действия достаточно большого числа независимых случайных причин, имеет нормальное распределение.

На рис. П-4, *з* изображено равномерное распределение. (Здесь любое из возможных значений  $x$  равновероятно.) Такое распределение имеет, например, величина отклонения (ошибки), вызванного зоной нечувствительности измерительного прибора, исполнительного устройства и т. п.

На рис. П-4, *а* показано распределение Пуассона. Различные законы распределения описаны в работе [16].

Если случайная величина  $x$  характеризуется законом распределения  $p(x)$ , то у случайного процесса закон распределения  $p(x, t)$  является функцией времени. Каждому конкретному моменту времени соответствует свой закон распределения. В случае стационарного случайного процесса закон распределения не меняется во времени, т. е.  $p(x, t) = p(x)$ . Однако, если для случайной величины закон распределения  $p(x)$  является исчерпывающей ее характеристикой, то для стационарного случайного процесса, помимо закона распределения  $p(x)$ , необходимо знать еще быстроту протекания его во времени, т. е. его временные и частотные свойства. (Действительно, закон распределения  $p(x)$  стационарного случайного процесса не зависит от масштаба времени, в то время как изменение последнего означает изменение быстроты протекания процесса.) Для характеристики этой стороны случайного процесса применяют особые функции — корреляционную функцию и функцию спектральной плотности. Первая из них характеризует временные, а вторая — частотные свойства случайного процесса (см. ниже).

**Среднее значение.** Среднее значение случайной величины  $x$ , определенное по множеству ее возможных значений и называемое еще математическим ожиданием величины  $x$ ,

$$m_x = M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx. \quad (\text{П-48})$$

Среднее по множеству обозначается также в виде  $\bar{x}$ .

Для дискретной случайной величины интеграл в (П-48) превращается в сумму всех дискретных значений величины, умноженных на их вероятности.

В соответствии с формулой (П-48) среднее значение неслучайной функции случайной величины  $\varphi(x)$  равно

$$m_\varphi = M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)p(x) dx. \quad (\text{П-49})$$

Для случайного процесса  $x(t)$  среднее значение  $m_x(t)$  является функцией времени (рис. П-5, *а*). Однако, если случайный процесс стационарный, то у него  $m_x$  постоянно во времени (рис. П-5, *б*).

Для стационарного случайного процесса практически всегда может быть принята гипотеза о его эргодичности. Свойство эргодичности заключается в том, что *среднее по множеству равно среднему по времени*. Среднее по времени — это среднее значение функции, определенное для отдельной реализации случайного процесса  $x(t)$  (для отдельной кривой на рис. П-5). Оно обозначается  $\bar{x}$  и, согласно определению,

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (\text{П-50})$$

В отличие от среднего по времени среднее по множеству  $\bar{x}$  для случайной функции  $x(t)$  определяется для каждого момента времени  $t_i$  (рис. П-5, *а* и *б*) путем усреднения по всем реализациям процесса (по всем кривым рис. П-5, *а* и *б*). Из чисто физических представлений эргодичность стационарного случайного процесса очевидна. Действительно, поскольку вероятностные характеристики стационарного случайного процесса не меняются с течением времени, длительное наблюдение за отдельной реализацией такого процесса

на одном объекте должно дать в среднем ту же картину, что и наблюдения, сделанные в один и тот же момент на большом числе одинаковых объектов.

Свойство эргодичности сильно упрощает экспериментальное определение вероятностных характеристик стационарных случайных процессов, поскольку позволяет заменить эксперимент на большом числе объектов экспериментом на одном из них, правда, в течение достаточно длительного времени и соответственно статистической обработкой одной реализации случайного процесса.

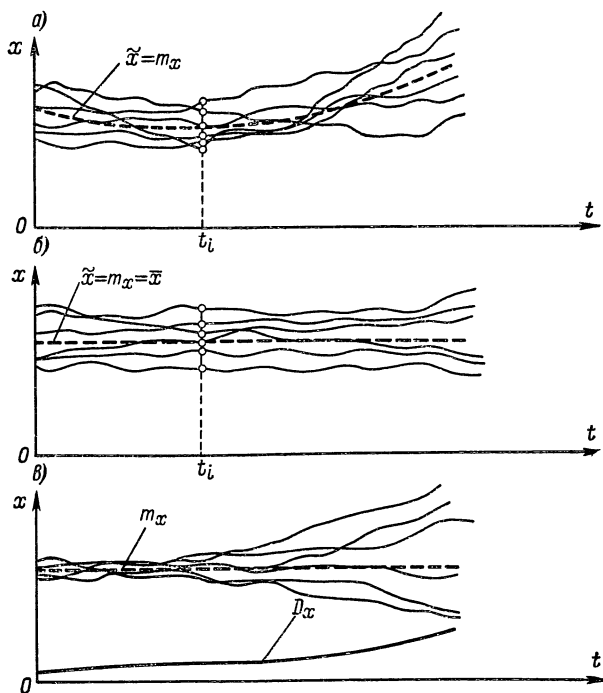


Рис. П-5. Случайные процессы

Таким образом, для стационарного случайного процесса благодаря его эргодичности среднее по множеству  $x$ , т. е. математическое ожидание  $m_x$ , можно находить как среднее по времени  $x$ :

$$m_x = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (\text{П-51})$$

Случайная функция (и величина), математическое ожидание которой равно нулю, называется *центрированной*. Соответственно случайную функцию можно представить как сумму математического ожидания и центрированной случайной функции, т. е.

$$x(t) = m_x(t) + x^0(t). \quad (\text{П-52})$$

Здесь через  $x^0(t)$  обозначена центрированная случайная функция.

**Дисперсия и среднеквадратичное отклонение.** Дисперсия  $D_x$  случайной величины  $x$  — это среднее значение квадрата ее отклонения от

среднего значения:

$$D_x = M[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx \quad (\text{П-53})$$

или с учетом (П-52)

$$D_x = M[(x^0)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x^0)^2 p(x) dx, \quad (\text{П-53a})$$

где  $x^0$  — центрированная часть случайной величины  $x$ .

Дисперсия является мерой отклонения случайной величины  $x$  от ее среднего значения. Чем больше флуктуации случайной величины относительно среднего значения, тем больше дисперсия. Последнее иллюстрируется рис. П-5, в.

Для стационарного случайного процесса, основываясь на свойстве эргодичности, дисперсию можно определить усреднением во времени:

$$D_x = M\{[x^0(t)]^2\} = \overline{[x^0(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x^0(t)]^2 dt. \quad (\text{П-54})$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (\text{П-55})$$

Эта величина часто используется вместо  $D_x$  в качестве меры отклонения случайной величины. Она удобна тем, что имеет ту же размерность, что и сама случайная величина, в то время как дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

**Корреляционные функции.** Эти функции служат для количественной оценки зависимости между последующими во времени значениями случайного процесса, т. е. оценивают быстроту изменения случайного процесса во времени.

**Корреляционная (или автокорреляционная) функция**  $R_x(\tau)$  случайной функции  $x(t)$  — это среднее значение произведения двух значений этой функции, сдвинутых на определенный промежуток времени  $\tau$ , т. е.

$$R_x(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)]. \quad (\text{П-56})$$

В случае стационарного случайного процесса, используя свойство эргодичности, корреляционную функцию можно определить как среднее значение по времени:

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt. \quad (\text{П-56a})$$

При этом практически значение корреляционной функции стационарного случайного процесса может быть найдено по достаточно длинной записи случайного процесса путем вычисления интеграла от произведения текущего значения функции на ее значение, сдвинутое во времени на  $\tau$  (рис. П-6, а). Корреляционные функции вычисляются обычно с помощью специальных приборов, называемых корреляторами [28].

На рис. П-6, б показан типичный вид корреляционной функции. Корреляционная функция симметрична относительно оси ординат и убывает с ростом величины  $\tau$ . Последнее отражает ослабление влияния (корреляции) на текущее значение случайной функции ее предыдущего значения при увеличении сдвига по времени между ними. Любой реальный объект, в котором происходит интересующий нас случайный процесс  $x(t)$ , обладает определенной инерционностью. Вследствие этого случайный процесс не может изменяться бесконечно быстро, т. е. текущее значение случайной функции  $x(t)$

не является совершенно независимой случайной величиной, а в какой-то степени в среднем зависит от предшествующих ее значений или, как говорят, коррелировано с ними.

Корреляционная функция служит мерой этой зависимости, поскольку ее значение, определенное по формуле (П-56), будет тем больше, чем меньше последующее значение данной случайной функции  $x(t + \tau)$  в среднем отличается от ее текущего значения  $x(t)$ . При этом максимальное значение корреляционной функции имеет при  $\tau = 0$ , когда  $x(t + \tau) = x(t)$ . Согласно (П-56), это значение  $R_x(0)$  равно среднему значению квадрата случайной функции, т. е.

$$R_x(0) = M[x^2]. \quad (\text{П-57})$$

Очевидно, такому же значению будет равна корреляционная функция при всех значениях  $\tau$  для детерминированной постоянной во времени величины  $a$ , т. е.

$$R_a(\tau) = a^2. \quad (\text{П-58})$$

Для случайного же процесса с ростом  $\tau$  корреляционная функция убывает соответственно тому, как увеличивается при этом в среднем отклонение  $x(t + \tau)$  от  $x(t)$ .

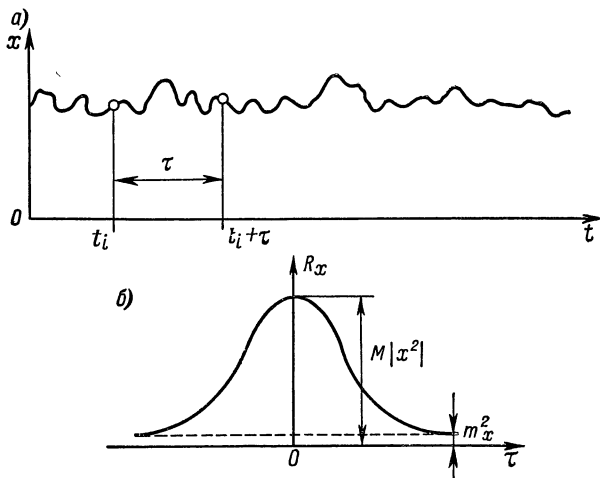


Рис. П-6. Корреляционные функции стационарного случайного процесса

Тот факт, что всегда

$$R_x(\tau) \leq R_x(0),$$

легко доказать для стационарного случайного процесса исходя из неравенства

$$x^2(t_1) + x^2(t_2) - 2x(t_1)x(t_2) \geq 0,$$

которое является очевидным, поскольку его левая часть равна

$$[x(t_1) - x(t_2)]^2.$$

Действительно, перейдя к средним значениям путем определения математического ожидания, получим:

$$M[2x(t_1)x(t_2)] \leq M[x^2(t_1)] + M[x^2(t_2)].$$

Отсюда, учитывая, что для стационарного случайного процесса

$$M[x^2(t_1)] = M[x^2(t_2)] = M[x^2(t)],$$

и подставляя  $t_2 = t_1 + \tau$ , получаем в соответствии с (П-56) требуемое неравенство:

$$R_x(\tau) \leq R_x(0) = M[x^2(t)]. \quad (\text{П-59})$$

Значение корреляционной функции убывает с ростом  $\tau$  тем быстрее, чем быстрее изменяется во времени случайный процесс  $x(t)$ , поскольку при этом ослабляется связь между значениями  $x$ , отстоящими на фиксированный промежуток времени  $\tau$ .

Предельное значение корреляционной функции при  $\tau \rightarrow \infty$ , как показано на рис. П-6, б, равно квадрату среднего значения, т. е.

$$R_x(\infty) = m_x^2. \quad (\text{П-60})$$

Действительно, в бесконечно удаленные друг от друга моменты времени значения случайной функции  $x(t)$  можно считать независимыми, и корреляционная функция будет отличаться от нуля только за счет присутствия в этой случайной функции детерминированной постоянной составляющей в виде среднего значения  $m_x$ , как это следует из (П-60).

Для центрированного случайного процесса

$$R_{x^0}(0) = M\{[x^0(t)]^2\} = D_x, \quad (\text{П-61})$$

а

$$R_{x^0}(\infty) = 0, \quad (\text{П-62})$$

что следует непосредственно из выражений (П-57) и (П-60).

При рассмотрении двух случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  для оценки статистической связи (корреляции) между ними применяется так называемая взаимная корреляционная функция

$$R_{xy}(\tau) = M[x(t)y(t+\tau)]. \quad (\text{П-63})$$

Взаимная корреляционная функция обладает теми же свойствами, что и корреляционная (автокорреляционная) функция. Если процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  статистически независимы и хотя бы один из них центрирован,  $R_{xy}(\tau) = 0$ .

**Спектральная плотность.** Спектральная плотность  $S_x(\omega)$  случайного процесса  $x(t)$  — это частотная функция, характеризующая спектральный (частотный) состав процесса. В отличие от ранее введенных частотных характеристик спектральная плотность представляет собой частотную характеристику для средних значений квадратов амплитуд гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс.

Поскольку мощность гармонического сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, спектральную плотность случайного процесса можно физически трактовать как частотную характеристику, определяющую распределение среднего значения мощности процесса по спектру, т. е. по гармоникам. Поэтому ее часто называют спектральной плотностью мощности.

Для стационарного случайного процесса  $x(t)$  формально спектральная плотность  $S_x(\omega)$  может быть получена как изображение Фурье корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{П-64})$$

Поскольку функция  $R_x(\tau)$  является четной функцией  $\tau$ , т. е.  $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$ , выражение (П-64) удобно представить в тригонометрической форме:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (\text{П-65})$$

Последнее выражение получается после подстановки в (П-64)

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$$

и отбрасывания мнимой части полученного выражения в связи с тем, что  $S_x(\omega)$  является действительной функцией.

С помощью обратного преобразования Фурье можно выразить корреляционную функцию через спектральную плотность

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (\text{П-66})$$

или в тригонометрической форме, учитывая, что  $S_x(\omega)$  — четная функция:

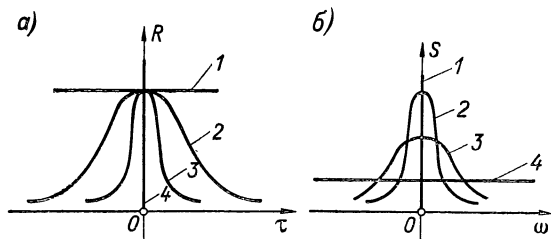
$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (\text{П-67})$$

Из (П-57) с учетом (П-66) получается следующее выражение:

$$\overline{x^2(t)} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (\text{П-68})$$

Это выражение среднего значения квадрата случайной функции  $x(t)$  через спектральную плотность очевидно, поскольку представляет собой

Рис. П-7. Спектральная плотность центрированного стационарного случайного процесса



интегрирование по средним значениям квадратов амплитуд гармоник случайного процесса  $x(t)$ .

Если случайная функция центрированная, из (П-68) вытекает следующее важное выражение для дисперсии:

$$D_x = \overline{[x^0(t)]^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{x^0}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{x^0}(\omega) d\omega. \quad (\text{П-69})$$

На рис. П-7 показаны графики спектральной плотности, соответствующие различным корреляционным функциям. Соотношение между спектральной плотностью  $S(\omega)$  и корреляционной функцией  $R(\tau)$  здесь аналогично рассмотренной выше связи между обычной частотной и переходной характеристиками: чем шире график корреляционной функции, тем уже график спектральной плотности, и наоборот.

В предельном случае, соответствующем кривым 1, когда  $x(t)$  представляет собой детерминированную постоянную величину  $a$ , корреляционная функция тоже постоянна и равна  $D_x = a^2$  [см. выражение (П-58)]. В этом случае спектральная плотность существует только при нулевой частоте и, согласно (П-65), равна  $2\pi a^2 \delta(\omega)$ .

В другом предельном случае, соответствующем кривым 4,  $x(t)$  является чисто случайным стационарным процессом, когда связь между последующими значениями  $x(t)$  совсем отсутствует. Такой случайный процесс называется



белым шумом. Его корреляционная функция пропорциональна дельта-функции, т. е.

$$R_x(\tau) = a\delta(\tau),$$

где  $a = \text{const.}$

Согласно (II-65), соответствующая спектральная функция

$$S(\omega) = a = \text{const.}$$

Случайный процесс в виде белого шума практически невозможен, так как имеет бесконечный спектр и соответственно бесконечную мощность. Однако реальные случайные процессы с конечным спектром часто можно приближенно представить в виде белого шума, если рассматривается действие их на систему, полоса пропускания которой значительно уже ширины спектра процесса. В частности, например, так обычно представляют тепловые шумы в усилителях.

Различные значения максимумов кривых  $S(\omega)$  при одинаковых максимумах соответствующих им кривых  $R(\tau)$  объясняются тем, что площади под кривыми  $S(\omega)$ , согласно (II-68), пропорциональны максимуму  $R(\tau)$ .

В качестве частотной характеристики статистической связи между двумя стационарными случайными процессами  $x(t)$  и  $y(t)$  применяется взаимная спектральная плотность, представляющая собой изображение Фурье взаимной корреляционной функции:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{II-70})$$

## Приложение 4

### ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ [34]

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega,$$

где

$$H(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n;$$

$$G(j\omega) = b_0(j\omega)^{2n-2} + b_1(j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}$$

и все нули  $H(j\omega)$  расположены в верхней полуплоскости (нули  $H(p)$  — левые);

$$I_1 = \frac{b_0}{2a_0a_1};$$

$$I_2 = \frac{-b_0 + \frac{a_0b_1}{a_2}}{2a_0a_1};$$

$$I_3 = \frac{-a_2b_0 + a_0b_1 - \frac{a_0a_1b_2}{a_3}}{2a_0(a_0a_3 - a_1a_2)};$$

$$I_4 = \frac{b_0(-a_1a_4 + a_2a_3) - a_0a_3b_1 + a_0a_1b_2 + \frac{a_0b_3}{a_4}(a_0a_3 - a_1a_2)}{2a_0(a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3)};$$

$$I_5 = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5},$$

где

$$M_5 = b_0 (-a_0 a_4 a_5 + a_1 a_4^2 + a_2^2 a_5 - a_2 a_3 a_4) + a_0 b_1 (-a_2 a_5 + a_3 a_4) + \\ + a_0 b_2 (a_0 a_5 - a_1 a_4) + a_0 b_3 (-a_0 a_3 + a_1 a_2) + \\ + \frac{a_0 b_4}{a_5} (-a_0 a_1 a_5 + a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3);$$

$$\Delta_5 = a_0^2 a_5^2 - 2a_0 a_1 a_4 a_5 - a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_4;$$

$$I_6 = \frac{M_6}{2a_0 \Delta_6},$$

где

$$M_6 = b_0 (-a_0 a_3 a_5 a_6 + a_0 a_4 a_5^2 - a_1^2 a_6^2 + 2a_1 a_2 a_5 a_6 + a_1 a_3 a_4 a_6 - a_1 a_2^2 a_5 - a_2^2 a_5^2 - \\ - a_2 a_3^2 a_6 + a_2 a_3 a_4 a_5) + a_0 b_1 (-a_1 a_5 a_6 + a_2 a_5^2 + a_3^2 a_6 - a_3 a_4 a_5) + \\ + a_0 b_2 (-a_0 a_5^2 - a_1 a_3 a_6 + a_1 a_4 a_5) + a_0 b_3 (a_0 a_3 a_5 + a_1^2 a_6 - a_1 a_2 a_5) + \\ + a_0 b_4 (a_0 a_1 a_5 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_2 a_3) + \frac{a_0 b_5}{a_6} (a_0^2 a_5^2 + a_0 a_1 a_3 a_6 - 2a_0 a_1 a_4 a_5 - \\ - a_0 a_2 a_3 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 - a_1^2 a_2 a_6 + a_1^2 a_4^2 + a_1 a_2^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_4);$$

$$\Delta_6 = a_0^2 a_5^2 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 - a_0 a_2 a_3 a_5^2 - a_0 a_3^2 a_6 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 + a_1^2 a_6^2 - \\ - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6 - a_1^2 a_3 a_4 a_6 + a_1^2 a_4^2 a_5 + a_1 a_2^2 a_5^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5;$$

$$I_7 = \frac{M_7}{2a_0 \Delta_7},$$

где

$$M_7 = b_0 m_0 + a_0 b_1 m_1 + a_0 b_2 m_2 + \dots + a_0 b_6 m_6;$$

$$m_0 = a_0^2 a_6 a_7^2 - 2a_0 a_1 a_6^2 a_7 - 2a_0 a_2 a_4 a_7^2 + a_0 a_2 a_5 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_5 a_6^2 + a_0 a_4^2 a_5 a_7 - \\ - a_0 a_4 a_5^2 a_6 + a_1^2 a_6^2 + 3a_1 a_2 a_1 a_6 a_7 - 2a_1 a_2 a_5 a_6^2 - a_1 a_3 a_4 a_6^2 - a_1 a_4^2 a_7 + a_1 a_2^2 a_5 a_6 + \\ + a_2^2 a_7^2 - 2a_2^2 a_3 a_6 a_7 - a_2^2 a_4 a_5 a_7 + a_2^2 a_5^2 a_6 + a_2 a_3 a_4^2 a_7 - a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 - a_2 a_3^2 a_6^2;$$

$$m_1 = a_0 a_4 a_7^2 - a_0 a_5 a_6 a_7 - a_1 a_4 a_6 a_7 + a_1 a_5 a_6^2 - a_2^2 a_7^2 + 2a_2 a_3 a_6 a_7 + \\ + a_2 a_4 a_5 a_7 - a_2 a_5^2 a_6 - a_3^2 a_6^2 - a_3 a_4^2 a_7 + a_3 a_4 a_5 a_6;$$

$$m_2 = a_0 a_2 a_7^2 - a_0 a_3 a_6 a_7 - a_0 a_4 a_5 a_7 + a_0 a_5^2 a_6 - a_1 a_2 a_6 a_7 + a_1 a_3 a_6^2 + a_1 a_4^2 a_7 - a_1 a_4 a_5 a_6;$$

$$m_3 = -a_0^2 a_7^2 + 2a_0 a_1 a_6 a_7 + a_0 a_3 a_4 a_7 - a_0 a_3 a_5 a_6 - a_1^2 a_6^2 - a_1 a_2 a_4 a_7 + a_1 a_2 a_5 a_6;$$

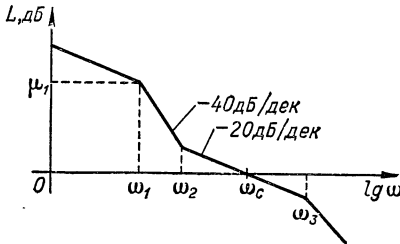
$$m_4 = a_0^2 a_5 a_7 - a_0 a_1 a_4 a_7 - a_0 a_1 a_5 a_6 - a_0 a_2 a_3 a_7 + a_0 a_3^2 a_6 + a_1^2 a_4 a_6 + a_1 a_2^2 a_7 - a_1 a_2 a_3 a_6;$$

$$m_5 = a_0^2 a_3 a_7 - a_0^2 a_5^2 - a_0 a_1 a_2 a_7 - a_0 a_1 a_3 a_6 + 2a_0 a_1 a_4 a_5 + a_0 a_2 a_3 a_5 - \\ - a_0 a_3^2 a_4 + a_1^2 a_2 a_6 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4;$$

$$m_6 = \frac{1}{a_7} (a_0^2 a_1 a_7^2 - 2a_0^2 a_3 a_5 a_7 + a_0^2 a_5^2 - 2a_0 a_1^2 a_6 a_7 + a_0 a_1 a_2 a_5 a_7 + 3a_0 a_1 a_3 a_5 a_6 - \\ - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 + a_0 a_2 a_3 a_5^2 - a_0 a_2 a_3 a_6^2 - a_0 a_3^2 a_4 a_5 + a_0 a_3^2 a_4 a_7 + a_1^2 a_6^2 + a_1^2 a_2 a_4 a_7 - \\ - 2a_1^2 a_2 a_5 a_6 - a_1^2 a_3 a_4 a_6 + a_1^2 a_3^2 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_7 + a_1 a_2^2 a_5^2 + a_1 a_2 a_3^2 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5).$$

**НОМОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ  
КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПО ТИПОВОЙ Л. А. Х. РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ [41]**

На рис. П-8 показана типовая л. а. х. разомкнутой системы с астатизмом первого порядка, по которой ниже определяется качество переходной характеристики  $h(t)$  замкнутой системы с передаточной функцией



$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}$$

Рис. П-8. Типовая л. а. х. разомкнутой системы

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

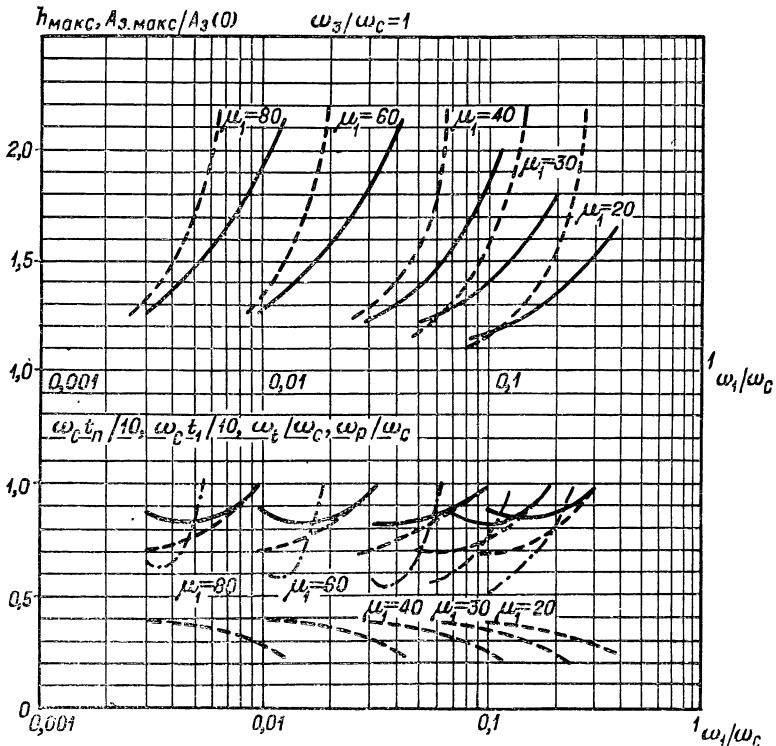


Рис. П-9а. Номограммы для определения показателей качества САУ по л. а. х. разомкнутой системы



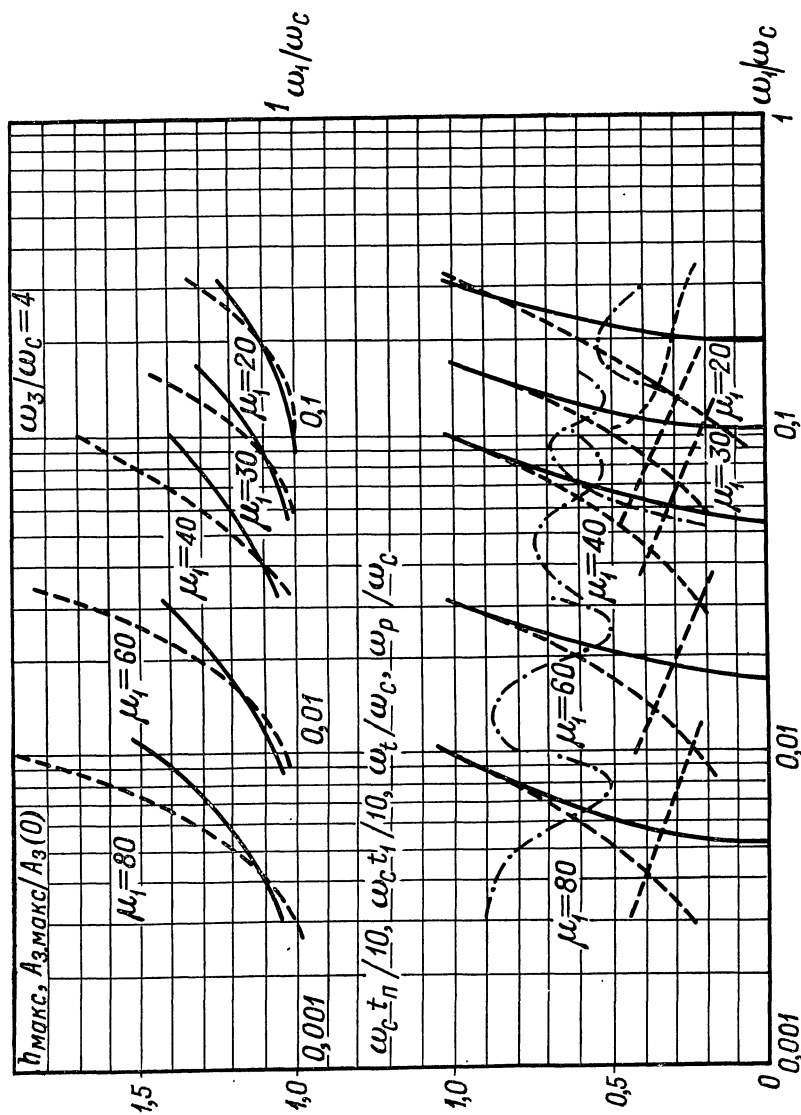


Рис. П-9в. Номограммы для определения показателей качества САУ по л. а. х. разомкнутой системы

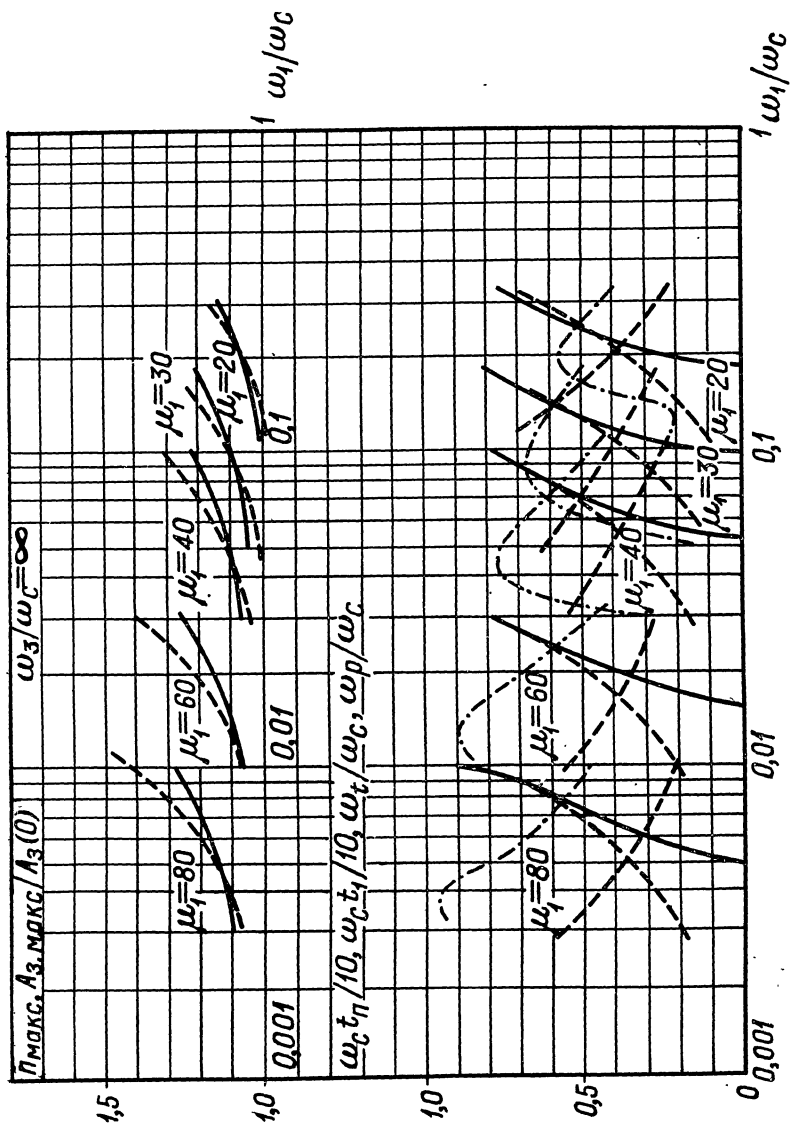


Рис. 8-9г. Номограммы для определения показателей качества САУ по л. а. х. разомкнутой системы

## Приложение 6

### ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС

Если принять в качестве оптимального переходного процесса процесс с одним перегулированием (он быстрее монотонного процесса и вместе с тем, по существу, еще не является колебательным), то для него можно указать определенное оптимальное расположение корней в комплексной плоскости и соответствующие значения коэффициентов характеристического уравнения

$$\lambda^n + A_1 \Omega_0 \lambda^{n-1} + A_2 \Omega_0^2 \lambda^{n-2} + \dots + A_{n-1} \Omega_0^{n-1} \lambda + \Omega_0^n = 0, \quad (\text{П-71})$$

обеспечивающие максимальное быстродействие в безразмерном времени или, другими словами, при неизменном значении  $\Omega_0$  [11]. Все корни имеют одинаковую действительную часть  $\eta$ . Мнимые их части образуют арифметическую прогрессию, т. е.  $\beta_{i+1} = \beta_i + \gamma$ , причем  $\beta_1 = \gamma$ . Для каждого порядка характеристического уравнения имеется определенное оптимальное отношение  $\gamma/\eta$ , обеспечивающее максимальное быстродействие. Оптимальные значения коэффициентов характеристического уравнения (П-71) для уравнений до восьмого порядка даны в табл. П-2.

Таблица П-2

Оптимальные значения коэффициентов характеристического уравнения

$n$	$\frac{\gamma}{\eta}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
2	1	1,38						
3	1,45	2,05	2,39					
4	0,79	2,6	3,8	2,8				
5	1,5	2,5	5,3	5,46	3,64			
6	0,64	3,73	8,0	10,3	8,56	4,18		
7	1,5	2,76	8,12	11,74	14,35	11,5	4,86	
8	0,57	4,65	9,42	22,7	28,4	24,3	15,0	5,45

Таблица П-3

Значения коэффициентов характеристического уравнения при кратных  
комплексных корнях

$n$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
2	1,5				
3	2,5	2,5			
4	3	4,25	3		
5	4	7,25	7,25	4	
6	4,5	9,25	12,375	9,25	4,5

Если указанные в табл. П-2 значения коэффициентов реализовать трудно, можно в качестве оптимального взять несколько более медленный переходный процесс, соответствующий кратным комплексным корням с отношением  $|\beta/\alpha| = 0,66$ . (В этом случае при нечетном порядке уравнения один корень будет действительным.) Соответствующие значения коэффициентов уравнения (П-71) даны в табл. П-3.

Если передаточная функция замкнутой системы имеет нули, они вызовут, как было показано в § 5-3, увеличение колебательности переходной характеристики. В результате переходная характеристика системы, корни характеристического уравнения которой соответствуют табл. П-2 и П-3, будет иметь большое перерегулирование. Поэтому в данном случае рекомендуется переходить к чисто действительным корням, образующим арифметическую прогрессию. Соответствующие значения коэффициентов уравнения (П-71) приведены в табл. П-4.

Также же значения коэффициентов рекомендуются для астатических систем с астатизмом первого порядка. Для этого случая в табл. П-4 приведены значения добротности по скорости. Кроме того, в таблице указаны значения перерегулирования  $\sigma$ .

Таблица П-4

**Значения коэффициентов характеристического уравнения в случае действительных корней, образующих арифметическую прогрессию**

$n$	$\sigma, \%$	$D_v$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
2	5	$\frac{\Omega_0}{1,4}$	1,4		
3	8	$\frac{\Omega_0}{2}$	2	2	
4	10	$\frac{\Omega_0}{2,6}$	2,6	3,4	2,6

Для систем с астатизмом второго порядка рекомендуется располагать действительные корни по геометрической прогрессии. Соответствующие значения коэффициентов уравнения даны в табл. П-5. Здесь же приведены значения добротности по ускорению.

Таблица П-5

**Значения коэффициентов характеристического уравнения в случае действительных корней, образующих геометрическую прогрессию**

$n$	$\sigma, \%$	$D_a$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
2	10	$\Omega_0^2$	2,5				
3	10	$\frac{\Omega_0^2}{5,1}$	5,1	6,3			
4	10	$\frac{\Omega_0^2}{16}$	7,2	16	12		
5	10	$\frac{\Omega_0^2}{38}$	9	29	38	18	
6	10	$\frac{\Omega_0^2}{73}$	11	43	83	73	25



**ТАБЛИЦА  $h$ -ФУНКЦИЙ ДЛЯ НОРМИРОВАННОЙ ТРАПЕ**

$\tau$ \ $\%$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,158	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,326	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,732	0,761	0,786	0,810
2,5	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943
3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,958	0,987	1,013	1,038
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,039	1,060	1,090	1,110	1,127
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129
5,0	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096
6,0	0,903	0,942	0,982	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,030	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,944	0,979	1,006	1,024	1,035	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,027	1,025	1,020	1,005	0,989
8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,020	1,024	1,021	1,012	0,998	0,981
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,022	1,018	1,007	0,992	0,977
9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,025	1,025	1,018	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,029	1,027	1,019	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,031	1,027	1,019	1,006	0,993	0,987
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,033	1,028	1,017	1,005	0,993	0,989
11,0	0,947	0,988	1,015	1,029	1,031	1,025	1,014	1,002	0,993	0,991
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,999	0,991	0,989
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,990
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,999	0,990	0,986	0,989
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,005	0,994	0,986	0,985	0,989
13,5	0,950	0,990	1,011	1,017	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989
14,0	0,952	0,989	1,011	1,016	1,009	0,997	0,988	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	0,990	1,012	1,015	1,008	0,996	0,987	0,985	0,988	0,996
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,007	0,995	0,988	0,987	0,991	1,000
15,5	0,959	0,995	1,014	1,014	1,006	0,995	0,989	0,988	0,996	1,004
16,0	0,961	0,997	1,015	1,014	1,006	0,995	0,991	0,992	0,998	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,014	1,005	0,995	0,993	0,995	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,013	1,005	0,995	0,994	0,997	1,005	1,010
17,5	0,966	1,002	1,015	1,012	1,003	0,995	0,994	0,998	1,005	1,010
18,0	0,996	1,002	1,015	1,011	1,002	0,995	0,995	1,001	1,008	1,010
18,5	0,966	1,001	1,015	1,009	1,001	0,994	0,995	1,001	1,007	1,009
19,0	0,967	1,000	1,015	1,008	0,998	0,992	0,995	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,000	1,014	1,006	0,996	0,991	0,995	1,001	1,005	1,004

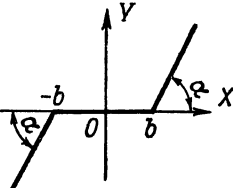
## ЦЕИДАЛЬНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТНОЙ ФУНКЦИИ

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	$\frac{\omega}{\tau}$
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314	0,5
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,562	0,575	0,590	0,603	1,0
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844	1,5
0,833	0,856	0,878	0,899	0,919	0,938	0,956	0,974	0,991	1,008	1,020	2,0
0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133	2,5
1,061	1,082	1,100	1,117	1,130	1,142	1,154	1,164	1,169	1,175	1,178	3,0
1,115	1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175	3,5
1,142	1,152	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,149	1,141	1,131	1,118	4,0
1,138	1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053	4,5
1,117	1,114	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,036	1,019	1,001	0,986	5,0
1,092	1,076	1,070	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932	5,5
1,051	1,037	1,021	1,003	0,984	0,956	0,929	0,904	0,879	0,854	0,829	6,0
1,018	1,001	0,982	0,966	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,903	0,905	6,5
0,993	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,908	0,909	0,915	0,925	7,0
0,974	0,958	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962	7,5
0,966	0,951	0,941	0,935	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,004	8,0
0,966	0,954	0,948	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041	8,5
0,970	0,960	0,961	0,966	0,976	0,990	1,006	1,023	1,039	1,053	1,061	9,0
0,975	0,972	0,980	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,066	1,066	9,5
0,982	0,985	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056	10,0
0,987	0,996	1,007	1,017	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033	10,5
0,997	1,002	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005	11,0
0,997	1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977	11,5
0,997	1,006	1,019	1,026	1,027	1,025	1,015	1,000	0,984	0,969	0,958	12,0
0,997	1,006	1,015	1,019	1,017	1,010	0,995	0,979	0,965	0,954	0,949	12,5
0,997	1,006	1,012	1,012	1,005	0,993	0,980	0,964	0,955	0,950	0,955	13,0
0,998	1,006	1,010	1,005	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970	13,5
1,000	1,006	1,008	0,999	0,987	0,974	0,965	0,961	0,965	0,976	0,990	14,0
1,002	1,006	1,005	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010	14,5
1,005	1,007	1,002	0,993	0,983	0,976	0,978	0,987	1,001	1,017	1,030	15,0
1,008	1,007	1,001	0,993	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,040	15,5
1,011	1,008	1,000	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,039	1,039	16,0
1,011	1,008	1,001	0,996	0,995	1,001	1,014	1,027	1,036	1,038	1,028	16,5
1,012	1,007	1,000	0,997	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,027	1,012	17,0
1,009	1,005	0,997	0,998	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,988	17,5
1,008	1,002	0,997	0,998	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,979	18,0
1,006	0,999	0,995	0,998	1,003	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969	18,5
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	1,007	0,981	0,969	0,956	19,0
0,998	0,992	0,992	0,996	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973	19,5

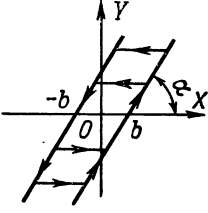
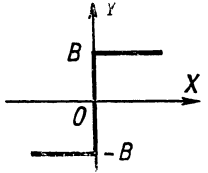
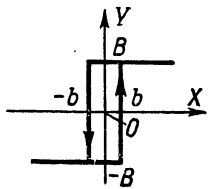
$\tau \backslash \%$	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
20,0	0,967	1,000	1,013	1,005	0,995	0,991	0,995	1,001	1,005	1,002
20,5	0,968	1,002	1,012	1,004	0,994	0,991	0,996	1,002	1,004	1,001
21,0	0,968	1,002	1,011	1,003	0,994	0,992	0,997	1,003	1,004	1,001
21,5	0,969	1,002	1,011	1,003	0,995	0,992	0,999	1,004	1,004	1,000
22,0	0,971	1,002	1,011	1,002	0,995	0,993	1,000	1,005	1,004	0,999
22,5	0,973	1,002	1,011	1,002	0,996	0,995	1,002	1,006	1,004	0,999
23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,998
23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,998	1,004	1,008	1,003	0,998
24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,999	1,005	1,007	1,002	0,997
24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,999	1,005	1,006	1,001	0,997
25,0	0,975	1,005	1,008	1,000	0,995	0,999	1,005	1,004	1,000	0,996
25,5	0,975	1,005	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,003	0,998	0,996
26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996

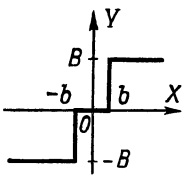
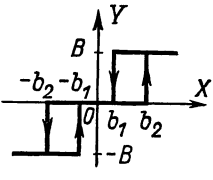
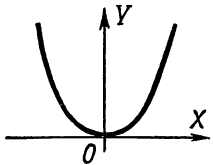
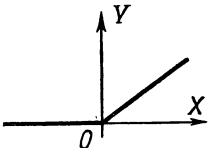
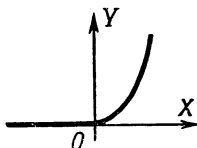
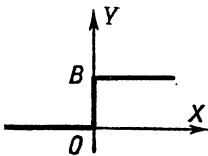
## Приложение 8

### ТИПОВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗВЕНЬЯ

№ п/п.	Статическая характеристика	Наименование звена и уравнение
1		Звено с насыщением (ограничением): $Y = \begin{cases} kX & \text{при }  X  \leq b, \\ B & \text{при } X > b, \\ -B & \text{при } X < -b, \end{cases}$ где $k = \operatorname{tg} \alpha$ .
2		Звено с зоной нечувствительности: $Y = \begin{cases} k(X - b) & \text{при } X > b, \\ 0 & \text{при }  X  \leq b, \\ k(X + b) & \text{при } X < -b, \end{cases}$ где $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	$\frac{\kappa}{\tau}$
0,996	0,991	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,979	0,972	0,974	0,985	20,0
0,995	0,991	0,994	0,999	1,001	0,996	0,986	0,976	0,974	0,990	1,001	20,5
0,995	0,993	0,997	1,001	0,999	0,993	0,983	0,975	0,981	1,002	1,016	21,0
0,996	0,995	1,000	0,995	0,998	0,992	0,987	0,988	0,997	1,013	1,024	21,5
0,996	0,996	1,000	1,004	0,997	0,991	0,991	0,997	1,012	1,024	1,029	22,0
0,997	1,000	1,004	1,005	0,996	0,992	0,998	1,008	1,022	1,028	1,026	22,5
0,998	1,001	1,006	1,007	0,997	0,994	1,002	1,015	1,025	1,027	1,016	23,0
0,999	1,002	1,007	1,006	0,998	0,997	1,007	1,017	1,023	1,023	1,002	23,5
1,000	1,002	1,008	1,003	0,999	1,000	1,008	1,017	1,015	0,012	0,988	24,0
1,000	1,002	1,006	1,003	1,000	1,002	1,008	1,014	1,005	0,995	0,979	24,5
1,000	1,002	1,004	0,993	1,001	1,003	1,005	1,008	0,991	0,985	0,975	25,0
1,000	1,002	1,002	0,997	1,002	1,004	1,004	1,001	0,986	0,978	0,977	25,5
1,000	1,002	1,000	0,995	1,002	1,004	1,002	0,987	0,984	0,977	0,983	26,0

№ пп.	Статическая характеристика	Наименование звена и уравнение
3		Звено с мертвым ходом: $Y = \begin{cases} k(X - b) & \text{при } \dot{X} > 0, \\ k(X + b) & \text{при } \dot{X} < 0 \end{cases}$ или $Y = k(X - b \operatorname{sign} \dot{X})$ , где $k = \operatorname{tg} \alpha$ .
4		Идеальное двухпозиционное реле: $Y = \begin{cases} B & \text{при } X > 0, \\ -B & \text{при } X < 0 \end{cases}$ или $Y = B \operatorname{sign} X$
5		Двухпозиционное реле с зоной нечувствительности: $Y = \begin{cases} B & \text{при } X > b \\ -B & \text{при } X < b \end{cases}, \text{ если } \dot{X} > 0;$ $Y = \begin{cases} B & \text{при } X > -b \\ -B & \text{при } X < -b \end{cases}, \text{ если } \dot{X} < 0,$

№ п.п.	Статическая характеристика	Наименование звена и уравнение
6		Идеальное трехпозиционное реле: $Y = \begin{cases} B & \text{при } X > b, \\ 0 & \text{при }  X  \leq b; \\ -B & \text{при } X < -b. \end{cases}$
7		Трехпозиционное реле с зонами нечувствительности: $Y = \begin{cases} B & \text{при } X > b_2 \\ 0 & \text{при } b_1 \leq X \leq b_2 \\ -B & \text{при } X < b_1 \end{cases} \text{ при } \dot{X} > 0;$ $\begin{cases} B & \text{при } X > b_1 \\ 0 & \text{при } -b_2 \leq X \leq b_1 \\ -B & \text{при } X < -b_2 \end{cases} \text{ при } \dot{X} < 0.$
8		$Y = kX^2$
9		$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ kX & \text{при } X > 0. \end{cases}$
10		$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ kX^2 & \text{при } X > 0. \end{cases}$
11		$Y = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leq 0; \\ B & \text{при } X > 0. \end{cases}$

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ  
И ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИЙ  
ТИПОВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ**

Порядковые номера ниже соответствуют нумерации нелинейностей в приложении 8.

Дополнительные обозначения: .

$$m_1 = \frac{m_X}{b}; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_X}{b}; \quad v = \frac{b_1}{b_2};$$

$$x_1 = \frac{b_1}{\sqrt{2} \sigma_X}; \quad x_2 = \frac{b_2}{\sqrt{2} \sigma_X}; \quad \gamma = \frac{A}{\sqrt{2} \sigma_X};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значения функции  $\Phi(x)$  даны в приложении 10. В приложении 11 даны значения функции  $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , также встречающейся в формулах ниже.

1. Звено с насыщением:

$$k_{c0} = \frac{B}{m_X} \left\{ (1+m_1) \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - (1-m_1) \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right] \right\};$$

$$k_{cl}^{(1)} = \frac{B}{\sigma_X} \left\{ 1 - \frac{k_{c0}^2}{B^2} + (m_1 + \sigma_1^2 - 1) \left[ \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) + \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ (1-m_1) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} + (1+m_1) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right] \right\}^{1/2};$$

$$k_{cl}^{(3)} = \frac{B}{\sigma_X} \sigma_1 \left[ \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) + \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right];$$

$$k_\Gamma = \frac{2B}{b\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq b;$$

$$k'_\Gamma = 0;$$

$$k_{c.\Gamma} = \frac{B}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^{2n}}{2n+1} B_n(\gamma); \quad k_{c.\Gamma 1} = \frac{B}{\sigma_X} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^{2n}}{2n+1} C_n(\gamma).$$

2. Звено с зоной нечувствительности:

$$k_{c0} = k \left\{ 1 - \frac{1}{m_1} \left[ (1+m_1) \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - (1-m_1) \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_1}{m_1 \sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right] \right\};$$

$$= k \left\{ 1 + \frac{1+m_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{k_{c0}^2 m_1^2}{k^2 \sigma_1^2} - \left[ 1 + \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \right. \\ \left. - \left[ 1 + \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) - \frac{1}{\sigma_1} \sqrt{2\pi} \left[ (1-m_1) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-m_1) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right] \right\}^{1/2};$$

$$k_{c1}^{(2)} = k \left[ 1 - \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right];$$

$$k_{\Gamma} = k - \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq b;$$

$$k'_{\Gamma} = 0;$$

$$k_{c, \Gamma} = k \left[ 1 - \frac{b}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^{2n+1}}{2n+1} B_n(\gamma) \right];$$

$$k_{c, \Gamma 1} = k \left[ 1 - \frac{b}{\sigma_X} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^{2n+1}}{2n+1} C_n(\gamma) \right].$$

3. Звено с мертвым ходом:

$$k_{\Gamma} = \frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left( 1 - \frac{b}{A} \right)} \right] \text{ при } A \geq b;$$

$$k'_{\Gamma} = -\frac{4kb}{\pi A} \left( 1 - \frac{b}{A} \right) \text{ при } A \geq b.$$

4. Идеальное двухпозиционное реле:

$$k_{c0} = \frac{2B}{m_X} \Phi \left( \frac{m_X}{\sigma_X} \right);$$

$$k_{c1}^{(1)} = \frac{B}{\sigma_X} \left[ 1 - 4\Phi^2 \left( \frac{m_X}{\sigma_X} \right) \right]^{1/2};$$

$$k_{c1}^{(2)} = \frac{B}{\sigma_X} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{m_X}{\sigma_X} \right)^2};$$

$$k_{\Gamma} = \frac{4B}{\pi A}; \quad k'_{\Gamma} = 0;$$

$$k_{c, \Gamma} = \frac{B}{A} B_0(\gamma);$$

$$k_{c, \Gamma 1} = \frac{B}{\sigma_X} C_0(\gamma).$$

5. Двухпозиционное реле с зоной нечувствительности:

$$k_{c0} = \frac{B}{m_X} \left[ \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right];$$

$$k_{c1}^{(1)} = \frac{B}{\sigma_X} \left( 1 - \frac{k_{c0}^2 m_X^2}{B^2} \right)^{1/2};$$

$$k_{cl}^{(2)} = \frac{B}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right];$$

$$k_r = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b;$$

$$k_r' = -\frac{4Bb}{\pi A^2} \text{ при } A \geq b;$$

$$k_{r.c} = \frac{B}{A} \sum_{n=0}^{\infty} x_1^{2n} B_n(\gamma); \quad k_{c.r1} = \frac{B}{\sigma_X} \sum_{n=0}^{\infty} x_1^{2n} C_n(\gamma).$$

6. Идеальное трехпозиционное реле:

$$k_{c0} = \frac{B}{m_X} \left[ \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right];$$

$$k_{cl}^{(1)} = \frac{B}{\sigma_X} \left\{ 1 - \frac{k_{c0}^2 m_X^2}{B^2} - \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) \right\}^{1/2};$$

$$k_{cl}^{(2)} = \frac{B}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right];$$

$$k_r = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \text{ при } A \geq b; \quad k_r' = 0;$$

$$k_{c.r} = \frac{B}{A} \sum_{n=0}^{\infty} x_1^{2n} B_n(\gamma); \quad k_{c.r1} = \frac{B}{\sigma_X} \sum_{n=0}^{\infty} x_1^{2n} C_n(\gamma).$$

7. Трехпозиционное реле с зонами нечувствительности:

$$k_{c0} = \frac{B}{m_X} \cdot \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{v+m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{v-m_1}{\sigma_1} \right) \right];$$

$$k_{cl}^{(1)} = \frac{B}{\sigma_X} \left\{ 1 - \frac{k_{c0}^2 m_X^2}{B^2} - \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{v+m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{v-m_1}{\sigma_1} \right) \right] \right\}^{1/2};$$

$$k_{cl}^{(2)} = \frac{B}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1-m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{v+m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{v-m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right];$$

$$k_r = \frac{2B}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{A^2}} \right] \text{ при } A \geq b_2;$$

$$k_r' = -\frac{2Bb_1}{\pi A} \left( 1 - \frac{b_1}{b_2} \right) \text{ при } A \geq b_2;$$

$$k_{c.r} = \frac{B}{A} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n}}{2} B_n(\gamma);$$



$$k_{c. r1} = \frac{B}{\sigma_X} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^{2n} + x_2^{2n}}{2} C_n(\gamma).$$

$$8. \quad m_Y = k\sigma_X^2 \left(1 + \frac{m_X^2}{\sigma_X^2}\right);$$

$$k_{cl}^{(1)} = k\sigma_X \left[2 + 4 \frac{m_X^2}{\sigma_X^2}\right]^{1/2} \text{sign } m_X;$$

$$k_{cl}^{(2)} = 2km_X;$$

$$Y_0 = \frac{kA^2}{2}; \quad k_r = k'_r = 0.$$

$$9. \quad m_Y = k\sigma_X \left\{ \frac{m_X}{\sigma_X} \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2}} \right\};$$

$$k_{cl}^{(1)} = k \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right] \left(1 + \frac{m_X^2}{\sigma_X^2}\right) + \frac{m_X}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2}} - \frac{m_Y^2}{k^2 \sigma_X^2} \right\}^{1/2};$$

$$k_{cl}^{(2)} = k \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right];$$

$$Y_0 = \frac{kA}{\pi}; \quad k_r = \frac{k}{2}; \quad k'_r = 0.$$

$$10. \quad m_Y = k\sigma_X^2 \left\{ \left(1 + \frac{m_X^2}{\sigma_X^2}\right) \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right] + \frac{m_X^3}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2}} \right\};$$

$$k_{cl}^{(1)} = k\sigma_X \left\{ \left[ 3 + \frac{m_X^4}{\sigma_X^4} \right] \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right] - \frac{m_Y^2}{\sigma_X^4 k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2}} \left[ 5 \frac{m_X}{\sigma_X} + \frac{m_X^3}{\sigma_X^3} \right] \right\}^{1/2};$$

$$k_{cl}^{(2)} = k\sigma_X \left\{ \left[ 1 + 2\Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right] \frac{m_X}{\sigma_X} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2}} \right\};$$

$$Y_0 = \frac{kA^2}{4\pi}; \quad k_r = \frac{4}{3} \cdot \frac{kA}{\pi}; \quad k'_r = 0.$$

$$11. \quad m_Y = B \left[ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right];$$

$$k_{cl}^{(1)} = \frac{B}{\sigma_X} \left[ \frac{1}{4} - \Phi^2\left(\frac{m_X}{\sigma_X}\right) \right]^{1/2};$$

$$k_{c1}^{(2)} = \frac{B}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_X^2}{2\sigma_X^2}}; \quad Y_0 = \frac{B}{2}; \quad k_r = \frac{2B}{\pi A}; \quad k_r' = 0.$$

Входящие в приведенные формулы функции  $B_n(\gamma)$  и  $C_n(\gamma)$  определяются формулами:

$$B_n(\gamma) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} [2(k+n)]!}{(2n)! (k!)^2 (k+n)! (k+1)!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k+1};$$

$$C_n(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} [2(k+n)]!}{(2n)! (k!)^2 (k+n)!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

При вычислении коэффициентов  $k_{c,r}$  и  $k_{c,r1}$  достаточно ограничиться первыми четырьмя членами соответствующих рядов для  $B_n(\gamma)$  и  $C_n(\gamma)$ . Графики этих функций приведены на рис. П-10 и П-11.

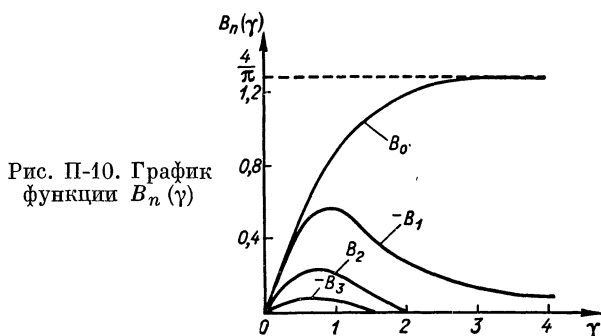


Рис. П-10. График функции  $B_n(\gamma)$

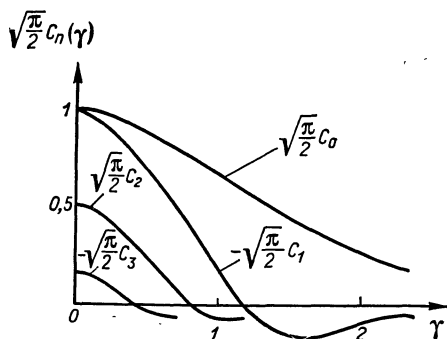


Рис. П-11. График функции  $C_n(\gamma)$

**ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ**  $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0,00	0,0000						
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3437
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2083	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315	1,28	0,3997

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,94	0,4738	2,52	0,4941
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,95	0,4744	2,54	0,4945
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,96	0,4750	2,56	0,4948
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,97	0,4756	2,58	0,4951
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,98	0,4761	2,60	0,4953
1,34	0,4099	1,67	0,4525	1,99	0,4767	2,62	0,4956
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,00	0,4772	2,64	0,4959
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,04	0,4793	2,68	0,4963
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,70	0,4965
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,08	0,4812	2,72	0,4967
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,10	0,4821	2,74	0,4969
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,12	0,4830	2,76	0,4971
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,14	0,4838	2,78	0,4973
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,80	0,4974
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,82	0,4976
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,20	0,4861	2,84	0,4977
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,22	0,4868	2,86	0,4979
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,24	0,4875	2,88	0,4980
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,90	0,4981
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,28	0,4887	2,92	0,4982
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,30	0,4893	2,94	0,4984
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,96	0,4985
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,34	0,4904	2,98	0,4986
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,36	0,4909	3,00	0,49865
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,38	0,4913	3,20	0,49931
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,40	0,4918	3,40	0,49966
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,42	0,4922	3,60	0,499841
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,44	0,4927	3,80	0,499928
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,46	0,4931	4,00	0,499968
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,48	0,4934	4,50	0,499997
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,50	0,4938	5,00	0,49999997
1,61	0,4463						



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость систем. М., Изд-во АН СССР, 1963. 139 с. с ил.
2. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., «Машиностроение», 1968. 763 с. с ил.
3. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория автоматического регулирования. М., «Наука», 1970. 767 с. с ил.
4. Боде Г. В. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. М., Изд-во иностр. лит., 1948. 642 с. с ил.
5. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. В 2-х частях. М. — Л., «Энергия». Ч. 1, 1965. 395 с. с ил. Ч. 2, 1966. 395 с. с ил.
6. Грубов В. И., Ивахненко А. Г., Мандровский Б. Ю. Промышленная кибернетика. Киев, «Наукова думка», 1966. 447 с. с ил.
7. Егоров К. В. Основы теории автоматического управления. М., «Энергия», 1967. 647 с. с ил.
8. Емельянов В. С. Теория систем с переменной структурой. М., «Наука», 1970.
9. Ивахненко А. Г. Кибернетические системы с комбинированным управлением. Киев, «Техника», 1966. 512 с. с ил.
10. Ивахненко А. Г. Самоприспосабливающиеся системы распознавания и автоматического управления. Киев, «Наукова думка», 1969. 392 с. с ил.
11. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М., Госэнергоиздат, 1962. 600 с. с ил.
12. Кузовков Н. Т. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М., Оборонгиз, 1965. 246 с. с ил.
13. Куропаткин П. В. Теория автоматического управления. М., «Высшая школа», 1973. 527 с. с ил.
14. Лернер А. Я. Начала кибернетики. М., «Наука», 1967. 400 с. с ил.
15. Лернер А. Я., Розенман Е. А. Оптимальное управление. М., «Энергия», 1970. 354 с. с ил.
16. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. В 2-х т. М., «Советское радио», 1963. Т. 1. 896 с. с ил. Т. 2. 483 с. с ил.
17. Меерович Л. А., Зеличенко Л. Г. Импульсная техника. М., «Советское радио», 1953. 831 с. с ил.
18. Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. Под ред. Пономарева В. М. М., «Машиностроение», 1970. 307 с. с ил.
19. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления. Под ред. Ю. И. Топчиева. М., «Машиностроение», 1971. 466 с. с ил.
20. Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин А. М. Основы оптимального и экстремального управления. М., «Высшая школа», 1969. 296 с. с ил.
21. Основы автоматического управления. Под ред. В. С. Пугачева. М., «Наука», 1968. 679 с. с ил.

22. **Первозванский А. А.** Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962. 351 с. с ил.
23. **Попов Е. П.** Динамика систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1954. 798 с. с ил.
24. **Попов Е. П., Пальтов И. П.** Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960. 792 с. с ил.
25. **Приспосабливающиеся автоматические системы.** Под ред. Х. Мишкина, Л. Брауна. М., Изд-во иностр. лит., 1963. 670 с. с ил.
26. **Ройтенберг Я. Н.** Автоматическое управление. М., «Наука», 1971. 395 с. с ил.
27. **Самонастраивающиеся системы.** Под ред. П. И. Чинаева. Киев, «Наукова думка», 1969. 528 с. с ил.
28. **Синицын Б. С.** Автоматические корреляторы и их применение. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964. 218 с. с ил.
29. **Соколов Т. Н.** Электромеханические системы автоматического управления. М. — Л., Госэнергоиздат, 1952. 251 с. с ил.
30. **Солодовников В. В., Шрамко Л. С.** Расчет и проектирование аналитических самонастраивающихся систем с эталонными моделями. М., «Машиностроение», 1972. 270 с. с ил.
31. **Сучилин А. М.** Основы вычислительной техники. М. — Л., «Энергия», 1964. 412 с. с ил.
32. **Телер Дж., Пестель М.** Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления. М., «Энергия», 1964.
33. **Теория автоматического регулирования.** В 3-х т. Под ред. В. В. Солодовникова. М., «Машиностроение». Т. 1, 1967. 768 с. с ил. Т. 2, 1967. 679 с. с ил. Т. 3, 1968. Ч. 1. 607 с. с ил. Ч. 2. 367 с. с ил.
34. **Теория автоматического управления.** В 2-х частях. Под ред. А. В. Нетушила. М., «Высшая школа». Ч. 1, 1968. 424 с. с ил. Ч. 2, 1972. 430 с. с ил.
35. **Теория следящих систем.** Под ред. Х. Джеймса, Н. Никольса, Р. Филлипса. М., Изд-во иностр. лит., 1953. 484 с. с ил.
36. **Траксел Д.** Синтез систем автоматического регулирования. М., Машгиз, 1959. 614 с. с ил.
37. **Ту Ю. Т.** Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964. 703 с. с ил.
38. **Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.** Методы теории автоматического управления. М., «Наука», 1971. 743 с. с ил.
39. **Цыпкин Я. З.** Теория релейных систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1955. 456 с. с ил.
40. **Цыпкин Я. З.** Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963. 968 с. с ил.
41. **Честнат Г., Майер Р.** Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. В 2-х частях. М., Госэнергоиздат, 1959. Ч. 1. 487 с. с ил. Ч. 2. 392 с. с ил.
42. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1965. 207 с. с ил.
43. **Юревич Е. И.** Электромагнитные устройства автоматики. М. — Л., «Энергия», 1964. 415 с. с ил.

Абсолютная устойчивость 214  
 Автоколебания 194, 197, 219  
 Автоматическая система управления 7  
 — — регулирования 13  
 — оптимизация 338  
 Автономная система 15  
 Адаптивная система автоматического управления 16, 330  
 Алгоритм 8, 149, 356, 358  
 Амплитудная частотная характеристика 5, 32  
 — — — логарифмическая 5, 33  
 Амплитудно-импульсная модуляция 260, 273  
 Амплитудно-фазовая частотная характеристика 5, 34  
 Аналитическая самонастраивающаяся система 340  
 Аналитическое конструирование регулятора 313  
 Асимптотическая устойчивость 198  
 Астатизм 79, 81  
 Астатическая система 74, 79  
 Астатическое управление 79  
  
 Беллмана метод 297  
 Бифуркационное значение параметра 209  
 Быстродействие 112, 116, 122, 240, 305  
  
 Величина входная 4, 20  
 — выходная 4, 7, 20  
 — дискретная 250  
 — непрерывная 250  
 Весовая функция 5, 28

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Возбуждение автоколебаний жесткое 198  
 — — мягкое 198  
 Воздействие возмущающее 8  
 — задающее 8  
 Возмущение 8  
 Временная характеристика 28  
 Временное запаздывание 50  
 Время запаздывания 50  
 Время-импульсная модуляция 261  
 Вычислительное устройство 8  
  
 Гармоническая линеаризация 219  
 — передаточная функция 5, 224  
 Гармонический коэффициент передачи 223, 224  
 Гаусса — Зейделя метод 344  
 Гипотеза эргодичности 374  
 Годограф корневой 129  
 Граница устойчивости 96, 107  
 — — безопасная 233  
 — — опасная 233  
 Граф прохождения сигнала 63  
 Гурвица критерий устойчивости 97  
 — определитель 98  
  
 Движение возмущенное 211  
 — невозмущенное 211  
 Действительная частотная характеристика 5, 35  
 Дельта-функция 28  
 Детектирование синхронное 346  
 Диаграмма прохождения сигнала 63  
 Динамическое программирование 297  
 Дискретная передаточная функция 5, 269, 288, 368



- Дискретная система 16, 250
- Дифференцирующее звено 49
- Добротность 5, 80
- Дюамеля интеграл 30
- Единичная импульсная функция 4, 28
  - ступенчатая функция 4, 28
- Единичный импульс 28
- Задание 8
- Запаздывание 50
- Запас устойчивости 106
  - — по амплитуде 106
  - — по фазе 106
- Звено системы 19
  - дифференцирующее 49
  - интегрирующее 47
  - колебательное 42
  - корректирующее 140
  - минимально-фазовое 38
  - нелинейное 15
  - неустойчивое 51
  - псевдолинейное 245
  - с постоянным запаздыванием 50
  - устойчивое 31
- Знакоопределенная функция 212
- Зона нечувствительности 390
- Игровые системы 327
- Изображающая точка 196
- Изодромная обратная связь 155
- Изоклина 200
- Импульсная система 225, 260
  - переходная характеристика (функция) 28
- Импульсный элемент 263
- Инвариантность 158
- Интеграл Дюамеля (свертки) 30
- Интегральный критерий качества 130
- Интегрирующее звено 47
- Исполнительное устройство 8
- Качество управления 17, 112
- Квазиоптимальное управление 321
- Квазистационарная система 166
- Квантование сигнала 251
  - по времени 251, 260
  - по уровню 251
- Колебательное звено 42
- Колебательность 113
- Комбинированное управление 13, 77, 321
- Консервативное звено 46
- Корневой годограф 129
  - критерий качества 121
- Корректирующая обратная связь 141, 149
- Корректирующее звено 140
  - — параллельное 140, 149
  - — последовательное 140, 141
- Коррекция линейная 140
  - линейной системы 140
  - нелинейная 242, 244
  - нелинейной системы 242
- Коэффициент передачи 4, 23
  - — гармонический 223, 224
- Коэффициент гармонической линеаризации 5, 223, 224
  - статистической линеаризации 5, 183
- Критерий абсолютной устойчивости В. М. Пóпова 214
  - качества 6, 115
  - — интегральный 6, 130
  - — корневой 121
  - — частотный 115
  - Котельникова 324
  - минимума среднего риска 325
  - Неймана — Пирсона 324
  - оптимальности 6, 291, 323
  - устойчивости 97
  - — Рауса — Гурвица 97
  - — Михайлова 101
  - — Найквиста 103
- Линеаризация 21
  - вибрационная 236, 255
  - гармоническая 219
  - совместная статистическая и гармоническая 236
  - статистическая 178
- Линейная система 15
- Линия переключения 202
- Логарифмическая частотная характеристика 5, 33
- Ляпунова методы 210
  - функция 213

- Метод гармонического баланса 219  
 — гармонической линеаризации 219  
 — Гаусса — Зейделя 344  
 — градиента 344  
 — замороженных коэффициентов 167  
 — — реакций 167  
 — запоминания экстремума 350  
 — изоклин 200  
 — Ляпунова 210  
 — наискорейшего спуска 344  
 — описывающих функций 219  
 — последовательной оптимизации 322  
 — припасовывания 202  
 — производной по времени 348  
 — синхронного детектирования 346  
 — случайного поиска 345  
 — точечного преобразования 208  
 — эквивалентной линеаризации 219  
 Методы нахождения экстремумов функционалов 297  
 — определения производных критерия оптимальности 346  
 — поиска экстремума критерия оптимальности 343  
 Минимаксный критерий оптимальности 326  
 Минимально-фазовое звено 38  
 Михайлова критерий устойчивости 101  
 Мнимая частотная характеристика 6, 35  
 Многоконтурная система 58  
 Многомерная система 14, 63  
 Модель математическая 19  
 — эталонная 334  
 Модуляция 260  
 — амплитудно-импульсная 260  
 — время-импульсная 261  
 — фазо-импульсная 261  
 — широтно-импульсная 261, 276  
 — частотная 261  
 Найквиста критерий устойчивости 103  
 Насыщение 390  
 Нелинейная система 15, 172  
 Нелинейное звено 5  
 Нелинейность линеаризуемая 22  
 Неминимально-фазовое звено 38  
 Нули передаточной функции 38, 121  
 Область устойчивости 107  
 Обратная связь 11, 54  
 — — гибкая 149  
 — — жесткая 54, 149  
 — — отрицательная 54, 55  
 — — положительная 54  
 Объект регулирования 13  
 — управления 7  
 Огибающая решетчатой функции 267  
 Определитель Гурвица 98  
 Оптимизация автоматическая 338  
 Особая точка 198  
 Отклонение статическое 71  
 — установившееся 79  
 Передаточная функция 5, 23, 31, 363, 367  
 — — дискретная 5, 269, 288, 368  
 — — замкнутой системы 5, 272  
 — — разомкнутой системы 5, 269  
 Перерегулирование 113  
 Переходная характеристика (функция) 5, 28  
 — — импульсная 5, 28  
 Плоскость фазовая 196  
 Полоса пропускания 32, 121  
 Полюсы передаточной функции 37  
 Понtryгина принцип максимума 301  
 Пбнова В. М. критерий абсолютной устойчивости 214  
 Порядок астатизма 81  
 Постоянная времени 5, 23  
 Предельный цикл 197  
 Преобразование точечное 208  
 Принцип максимума Понtryгина 301  
 Программирование динамическое 297  
 Пропорционально-дифференцирующее звено 141  
 Пропорционально-интегро-дифференцирующее звено 147  
 Пространство фазовое 195  
 Процесс переходный 17, 95, 112  
 — установившийся 17

- Разностное уравнение 366
- Разомкнутая система 9
- Регулирование 13, 149
  - экстремальное 341
- Регулятор 13
  - вибрационный 353
- Релейная система 251
- Релейное звено 252
- Релейный элемент 251
- Решетчатая функция 267, 365
- Самонастраивающаяся система управления 333, 338
  - — — аналитическая 340
  - — — экстремальная 338
- Самообучающаяся система управления 357
- Самоорганизующаяся система управления 353
- Седло 198
- Синтез систем управления 19, 160
  - — — линейных 160, 164
  - — — нелинейных 249
  - — — оптимальных 311, 317, 327
- Синхронное детектирование 346
- Система автоматическая 7
- Система автоматического регулирования 13
  - — — экстремальная 338, 341
- Система автоматического управления 7
  - — — автономная 15
  - — — адаптивная 16, 330
  - — — астатическая 74, 79
  - — — дискретная 16, 250
  - — — импульсная 251, 260
  - — — квазиоптимальная 321
  - — — комбинированная 13, 77
  - — — оптимальная 291
  - — — по возмущению 10
  - — — по отклонению 12
  - — — релейная 251
  - — — самонастраивающаяся 333, 338
  - — — самоорганизующаяся 353
  - — — статическая 71
  - — — цифровая 251, 283
- Система автоматической компенсации
  - 10, 77, 81
  - импульсная 225, 260
  - линейная 15
  - многомерная 14, 63
  - несвязанного управления 14
  - нестационарная 16, 165
  - программного управления 13
  - разомкнутая 9, 77
  - релейная 251
  - связанного управления 14
  - с запаздыванием 164
  - с переменной структурой 353
  - с переменными параметрами 244, 248, 353
  - стабилизации 13
  - стационарная 16
  - цифровая 251, 283
- Скользящий режим 207
- Следящая система 13
- Случайное воздействие 83
- Соединение звеньев параллельное 54
  - — последовательное 53
- Солодовникова метод трапецеидальных характеристик 137
- Среднеквадратичное отклонение 376
- Средний риск 325
- Статистическая линеаризация 178
- Статическая характеристика 174
- Статический режим 70
- Статическое отклонение 71
- Стационарный режим 70, 79
- Степень колебательности 6, 123, 240
  - устойчивости 6, 122
- Структурная схема 20
  - неустойчивость 108, 240
- Ступенчатая функция 28
- Схема структурная 20
  - функциональная 8, 19
- Точечное преобразование 208
- Точность линейной системы 71, 72, 79, 87, 161
  - нелинейной системы 174, 178
  - управления 18, 71, 161
- Траектория фазовая 196

Узел 198

Управление 7

— комбинированное 13, 77, 321

— оптимальное 291

— квазиоптимальное 321

Уравнение разностное 366

— в отклонениях (в вариациях) 22

— характеристическое 95

Установившийся процесс 17

Устойчивость 17, 93, 195

— абсолютная 214

— асимптотическая 198

— в большом 195

— в малом 195

— в целом 195

— по Ляпунову 211

Фазовая плоскость 196

— траектория 196

— частотная характеристика 5, 32

Фазовое пространство 195, 196

Фазовый портрет 196

Фазо-импульсная модуляция 261

Фокус 198

Функционал 292

Функциональная схема 8, 19

Функция веса (весовая) 5, 28

— Ляпунова 213

— передаточная 5, 23, 31, 363, 367

— — дискретная 5, 269, 288, 368

— потеря 325

— ступенчатая 28

Характеристика статическая 174

— — с зоной нечувствительности 390

Характеристика статическая с насыщением 390

— переходная (временная) 5, 28

— — импульсная 5, 28

— релейная 252, 391, 392

— частотная амплитудная 5, 32

— — амплитудно-фазовая 5, 34

— — действительная 5, 35

— — логарифмическая 5, 33

— — мнимая 6, 35

— — фазовая 5, 32

Характеристическое уравнение 95

Центр 198

Цикл предельный 197

Цифровая система 251, 283

Частотная характеристика 31

— амплитудная 5, 32

— амплитудно-фазовая 5, 34

— действительная 5, 35

— логарифмическая 5, 33

— мнимая 6, 35

— фазовая 5, 32

Частотно-импульсная модуляция 261

Частотный критерий качества 115

Чувствительное устройство 8

Широтно-импульсная модуляция 261, 276

Экстремальная система регулирования 341

— самонастраивающаяся система 338

Эталонная модель 334

z-преобразование 365

$\delta$ -функция 4, 29

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Перечень основных обозначений . . . . .	4
Введение . . . . .	7
В-1. Понятие об автоматическом управлении . . . . .	—
В-2. Классификация систем автоматического управления . . . . .	9
А. Разомкнутые, замкнутые и комбинированные системы . . . . .	—
Б. Системы автоматического регулирования — системы стабилизации, системы программного управления и следящие системы . . . . .	13
В. Одномерные и многомерные системы . . . . .	14
Г. Системы линейные и нелинейные . . . . .	15
Д. Системы стационарные и нестационарные . . . . .	16
Е. Системы непрерывного и дискретного действия . . . . .	—
Ж. Адаптивные и неадаптивные системы . . . . .	—

### Часть первая

#### ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

Глава первая. Математическое описание линейных систем автоматического управления . . . . .	19
1-1. Постановка задачи. Разбиение системы на звенья . . . . .	—
1-2. Уравнения звеньев системы. Линеаризация . . . . .	21
1-3. Переходные и частотные характеристики звеньев . . . . .	27
А. Переходные характеристики . . . . .	28
Б. Частотные характеристики . . . . .	31
В. Особенности частотных характеристик устойчивых и минимально-фазовых звеньев . . . . .	37
1-4. Типовые звенья систем автоматического управления . . . . .	39
А. Аперiodическое звено . . . . .	—
Б. Колебательное звено . . . . .	42
В. Интегрирующее звено . . . . .	47
Г. Дифференцирующее звено . . . . .	49
Д. Звено с постоянным запаздыванием . . . . .	50
Е. Неустойчивые звенья . . . . .	51

1-5. Получение передаточных функций и частотных характеристик систем автоматического управления по передаточным функциям и частотным характеристикам звеньев . . . . .	52
А. Получение передаточных функций одномерной системы по передаточным функциям звеньев . . . . .	—
Б. Построение частотных характеристик системы по частотным характеристикам звеньев . . . . .	64
В. О построении переходных характеристик замкнутой системы . .	69
<b>Глава вторая. Стационарные режимы линейных систем автоматического управления при детерминированных воздействиях . . . . .</b>	<b>69</b>
2-1. Введение . . . . .	—
2-2. Статический режим (статика) линейных систем автоматического управления . . . . .	70
А. Статический режим статических систем . . . . .	—
Б. Способы устранения статического отклонения . . . . .	73
2-3. Динамические стационарные режимы систем автоматического управления . . . . .	78
А. Стационарный режим САУ при гармоническом воздействии . . .	—
Б. Стационарный динамический режим САУ при воздействиях, изменяющихся с постоянной производной . . . . .	79
<b>Глава третья. Стационарные режимы линейных систем автоматического управления при случайных воздействиях . . . .</b>	<b>82</b>
3-1. Введение . . . . .	—
3-2. Прохождение случайного сигнала через линейную систему . . .	83
3-3. Точность систем автоматического управления при стационарных случайных воздействиях . . . . .	87
<b>Глава четвертая. Устойчивость линейных систем автоматического управления . . . . .</b>	<b>93</b>
4-1. Понятие об устойчивости . . . . .	—
4-2. Критерий устойчивости Рауса — Гурвица . . . . .	97
4-3. Критерий устойчивости Михайлова . . . . .	101
4-4. Критерий устойчивости Найквиста . . . . .	103
4-5. Области устойчивости систем автоматического управления . . .	107
<b>Глава пятая. Качество переходных процессов в линейных системах автоматического управления . . . . .</b>	<b>112</b>
5-1. Понятие о качестве переходных процессов . . . . .	—
5-2. Частотные критерии качества переходных процессов . . . . .	115
5-3. Корневые критерии качества переходных процессов . . . . .	121
5-4. Интегральные критерии качества переходных процессов . . . .	130
<b>Глава шестая. Построение переходных процессов в линейных системах автоматического управления . . . . .</b>	<b>133</b>
6-1. Аналитические методы построения переходных процессов . . . .	—
6-2. Приближенные графические методы построения переходных процессов . . . . .	135

<b>Глава седьмая. Коррекция динамических свойств и порядок синтеза линейных систем автоматического управления . . . .</b>	<b>140</b>
7-1. Назначение и виды коррекции динамических свойств систем автоматического управления . . . . .	—
7-2. Последовательные корректирующие звенья в контуре систем автоматического управления . . . . .	141
А. Пропорционально-дифференцирующее звено . . . . .	—
Б. Пропорционально-интегрирующее звено . . . . .	146
В. Пропорционально-интегро-дифференцирующее звено . . . . .	147
7-3. Параллельные корректирующие звенья — обратные связи . . . .	149
А. Жесткие корректирующие обратные связи . . . . .	150
Б. Гибкие корректирующие обратные связи . . . . .	153
В. Сравнение последовательных и параллельных корректирующих звеньев . . . . .	156
7-4. Корректирующие воздействия в функции внешних воздействий и их производных . . . . .	157
7-5. Порядок синтеза линейных систем автоматического управления	160
А. Определение порядка астатизма и коэффициента передачи системы	161
Б. Определение основной, т. е. неварьировуемой, части системы	—
В. Выбор коррекции и составление структурной схемы САУ . . . .	162
Г. Построение переходных процессов . . . . .	164
7-6. Особенности синтеза некоторых особых систем . . . . .	—
А. Особенности синтеза систем с постоянным запаздыванием . . . .	—
Б. Особенности синтеза нестационарных систем . . . . .	165
В. Особенности синтеза многомерных систем . . . . .	168

## **Часть вторая**

### **ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

<b>Глава восьмая. Особенности нелинейных систем автоматического управления. Их стационарные режимы . . . . .</b>	<b>172</b>
8-1. Введение . . . . .	—
8-2. Стационарные режимы нелинейных систем при детерминированных воздействиях . . . . .	173
8-3. Стационарные режимы нелинейных систем при случайных воздействиях. Статистическая линеаризация . . . . .	178
А. Прохождение случайного сигнала через нелинейное звено . . . .	—
Б. Идея статистической линеаризации . . . . .	180
В. Методика исследования точности нелинейных САУ с помощью статистической линеаризации . . . . .	186
Г. Применение статистической линеаризации для исследования нестационарных процессов с высокочастотной случайной составляющей	190
8-4. Особенности динамики нелинейных систем . . . . .	192
8-5. Исследование нелинейных систем на фазовой плоскости . . . . .	199
<b>Глава девятая. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления . . . . .</b>	<b>210</b>
9-1. Методы исследования устойчивости А. М. Ляпунова . . . . .	—
9-2. Критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова . . . . .	214

9-3. Гармоническая линеаризация . . . . .	219
А. Назначение метода гармонической линеаризации . . . . .	—
Б. Идея гармонической линеаризации . . . . .	—
В. Методика исследования автоколебаний с помощью гармонической линеаризации . . . . .	226
Г. Применение гармонической линеаризации для исследования переходных процессов, вызванных медленно меняющимися воздействиями, при наличии автоколебаний . . . . .	235
Д. Совместная статистическая и гармоническая линеаризация . . . . .	236
<b>Глава десятая. Качество переходных процессов и коррекция в нелинейных системах автоматического управления . . . . .</b>	<b>237</b>
10-1. Методы оценки качества переходных процессов в нелинейных системах . . . . .	—
10-2. Особенности коррекции динамических свойств нелинейных систем автоматического управления . . . . .	242
А. Особенности коррекции динамических свойств нелинейных систем . . . . .	—
Б. Нелинейные корректирующие звенья . . . . .	244
10-3. Порядок синтеза нелинейных систем автоматического управления . . . . .	249

## **Часть третья**

### **ДИСКРЕТНЫЕ И ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

<b>Глава одиннадцатая. Релейные системы автоматического управления . . . . .</b>	<b>250</b>
11-1. Понятие о дискретных системах автоматического управления и их классификация . . . . .	—
11-2. Классификация релейных систем автоматического управления . . . . .	251
11-3. Особенности динамики релейных систем автоматического управления . . . . .	254
11-4. Методы исследования релейных систем автоматического управления . . . . .	258
<b>Глава двенадцатая. Импульсные и цифровые системы автоматического управления . . . . .</b>	<b>260</b>
12-1. Классификация и особенности динамики импульсных систем автоматического управления . . . . .	—
А. Классификация импульсных систем автоматического управления . . . . .	—
Б. Особенности динамики импульсных систем автоматического управления . . . . .	262
12-2. Математическое описание импульсных систем автоматического управления . . . . .	263
А. Описание линейных систем автоматического управления с АИМ . . . . .	—
Б. Частотные характеристики линейных систем автоматического управления с АИМ . . . . .	273
В. Описание линейных систем автоматического управления с ШИМ . . . . .	276
Г. Особенности описания нелинейных импульсных систем автоматического управления . . . . .	277



Д. Сведение импульсной системы автоматического управления к системе непрерывного действия . . . . .	278
12-3. Методы исследования импульсных систем автоматического управления . . . . .	—
12-4. Определение и особенности динамики цифровых систем автоматического управления . . . . .	283
А. Определение цифровых систем автоматического управления . . . . .	—
Б. Особенности динамики цифровых систем автоматического управления . . . . .	286
12-5. Методы исследования цифровых систем автоматического управления . . . . .	—
<b>Глава тринадцатая. Оптимальные системы автоматического управления . . . . .</b>	<b>291</b>
13-1. Постановка задачи . . . . .	—
13-2. Методы нахождения экстремумов функционалов . . . . .	297
А. Динамическое программирование . . . . .	—
Б. Принцип максимума . . . . .	301
13-3. Оптимальные системы автоматического управления при детерминированных воздействиях . . . . .	305
А. Понятие об оптимальных по быстродействию САУ. Теорема об $n$ интервалах . . . . .	—
Б. Синтез оптимальных САУ . . . . .	311
В. Синтез оптимальной по быстродействию замкнутой САУ . . . . .	317
Г. Квазиоптимальные САУ . . . . .	321
13-4. Оптимальные системы автоматического управления при случайных воздействиях . . . . .	323
А. Статистические критерии оптимальности . . . . .	—
Б. Минимаксный критерий оптимальности . . . . .	326
В. Особенности синтеза оптимальных САУ при случайных воздействиях . . . . .	327

## Часть четвертая

### АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

<b>Глава четырнадцатая. Самонастраивающиеся системы автоматического управления . . . . .</b>	<b>330</b>
14-1. Понятие об адаптивных системах автоматического управления и их классификация . . . . .	—
14-2. Самонастраивающиеся системы автоматического управления со стабилизацией качества управления . . . . .	333
14-3. Самонастраивающиеся системы автоматического управления с оптимизацией качества управления . . . . .	338
А. Самонастраивающиеся САУ с оптимизацией динамических режимов . . . . .	—
Б. Самонастраивающиеся САУ с оптимизацией статических режимов . . . . .	341
В. Методы поиска экстремума функции $J$ настроечных параметров $Y$ . . . . .	343

Г. Методы определения производных $J$ . . . . .	346
14-4. Особенности исследования самонастраивающихся систем автоматического управления . . . . .	350
<b>Глава пятнадцатая. Самоорганизующиеся системы автоматического управления</b> . . . . .	<b>353</b>
15-1. Простейшие самоорганизующиеся системы автоматического управления (без самообучения) . . . . .	—
15-2. Понятие о самообучающихся системах автоматического управления . . . . .	357
<b>Приложения</b>	
Приложение 1. Преобразование Лапласа . . . . .	361
А. Непрерывное преобразование Лапласа . . . . .	—
Б. Дискретное преобразование Лапласа . . . . .	365
Приложение 2. Номограммы для определения частотных характеристик замкнутой системы по частотным характеристикам разомкнутой системы . . . . .	368
Приложение 3. Сведения из теории вероятностей . . . . .	—
Приложение 4. Таблица интегралов $I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{ H(j\omega) ^2} d\omega$ . . .	380
Приложение 5. Номограммы для определения показателей качества переходной характеристики по типовой л. а. х. разомкнутой системы . . . . .	331
Приложение 6. Значения коэффициентов характеристического уравнения, обеспечивающие оптимальный переходный процесс . . . . .	333
Приложение 7. Таблица $h$ -функций для нормированной трапецидальной действительной частотной функции . . . . .	388
Приложение 8. Типовые нелинейные звенья . . . . .	390
Приложение 9. Формулы для коэффициентов статистической и гармонической линеаризаций типовых нелинейных звеньев . . . . .	393
Приложение 10. Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . . . . .	398
Приложение 11. Значения функции $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$ . . . . .	400
Список литературы . . . . .	401
Предметный указатель . . . . .	403

**Юревич Е. И.**

**Ю 68** Теория автоматического управления. Учебник для студентов высш. техн. учебн. заведений. Изд. 2-е, перераб. и доп. Л., «Энергия», 1975.

**416 с. с ил.**

Книга содержит теорию линейных и нелинейных систем автоматического управления, включая методы математического описания, методы исследования устойчивости, качества, коррекции и синтеза систем. Особо рассматриваются специфические вопросы теории дискретных систем и теория оптимальных систем управления. В последней части книги излагаются принципы построения адаптивных систем. Приложения к книге содержат ряд номограмм, таблиц и формул, полезных при практических расчетах систем автоматического управления.

Книга предназначена для студентов вузов электротехнических и электроэнергетических специальностей.

**Ю 30501-162 215-75**  
**051(01)-75**

**6Ф6.5**

**Евгений Иванович Юревич**  
**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Редактор Л. М. Пархоменко  
Художественный редактор Г. А. Гудков  
Технический редактор О. С. Житникова  
Корректор А. Ф. Кузнецова  
Переплет художника Б. П. Кузнецова

Сдано в набор 8/IV 1975 г. Подписано к печати 3/VII 1975 г.  
М-24104. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 2.  
Печ. л. 26. Уч.-изд. л. 28,64. Тираж 30 000 экз. Заказ № 1934.  
Цена 1 р. 16 к.

Ленинградское отделение издательства «Энергия». 192041,  
Ленинград, Марсово поле, 1.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136,  
Гатчинская ул., 26.



## ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ

**Кибернетику** — на службу коммунизму. Сборник статей. Под ред. А. И. Берга. Том 3. Теория информации. Вычислительная техника. Семиотика, 1966, 312 с., 86 к.

**Павленко В. А.** Электрические системы регулирования с сигналом связи постоянного тока, 1971, 455 с., 1 р. 44 к.

**Петренко А. И.** Автоматический ввод графиков в электронные вычислительные машины, 1968, 424 с., 71 к.

**Петров Ю. П.** Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву, 1971, 144 с., 63 к.

**Юдицкий С. А.** Пневматические системы управления приводом машин-автоматов. Методы построения. (Библиотека по автоматике. Вып. 299), 1968, 88 с., 14 к.

Желающие приобрести книги могут обращаться по адресам:

Москва, К-31, ул. Петровка, 15,  
магазин Москниги № 8, отдел «Книга — почтой»

Ленинград, М-66, Московский пр., 189,  
магазин Ленкниги № 92 «Энергия»,  
отдел «Книга — почтой»

