ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ХРЕСТОМАТИЯ

Арифметика и алгебра

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Теория чисел

Геометрия

ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Под редакцией А. П. Юшкевича

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1976

Составители:
*И. Г. Башмакова, Ю. А. Белый, С. С. Демидов,
Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич*

Хрестоматия по истории математики. Арифметика
X 91 и алгебра. Теория чисел. Геометрия. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Под ред. А. П. Юшкевича. М., «Просвещение», 1976.
318 с. с ил.

На обороте тит. л. сост.: И. Г. Башмакова, Ю. А. Белый, С. С. Демидов и др.

Хрестоматия составлена из подбора оригинальных текстов трудов математиков из области арифметики, алгебры, теории чисел и геометрии. Значительная часть текстов переведена на русский язык впервые. Тексты снабжены историческими и математическими комментариями.
В книге имеется именной указатель и список литературы.

$X \frac{60602\text{-}276}{103\,(03)\text{-}76}$ 33-76

51(09)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Часть III. ГЕОМЕТРИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В литературе по истории математики на русском языке имеется пробел, весьма чувствительный прежде всего для учителей средней школы и студентов-математиков, но также для всех любителей математики. Речь идет о хрестоматии, сборнике первоисточников. Правда, более сорока лет назад, в 1932 г., по инициативе покойного профессора М. Я. Выгодского была переведена на русский язык хрестоматия [1], составленная немецким ученым Г. Вилейтнером. Эта книга имела успех, и через несколько лет, в 1935 г., потребовалось ее переиздание. С тех пор книг такого рода на русском языке больше не появлялось, и их отсутствие отрицательно сказывалось, в частности, на преподавании истории математики, курс которой читается в ряде педагогических институтов и университетов.

Как справедливо отмечал в предисловии к первому русскому изданию книги Вилейтнера М. Я. Выгодский, никакое повествовательное изложение истории математики не может заменить обращения к классикам этой науки, необходимого для более глубокого понимания методов и стиля прошедших времен. Педагогическая ценность первоисточников особенно велика: знакомясь с последовательным развитием математических понятий и методов, так сказать, из первых рук, читатель как бы становится соучастником этого процесса развития. Перед его глазами разворачивается взаимодействие между потребностями практической жизни и деятельностью математиков, притом так, как они сами это понимали; он знакомится с трудностями, которые приходилось преодолевать при решении тех или иных вопросов (трудности, нередко возникающие и у теперешних учащихся); он наблюдает за созданием символики, уточнением понятий и совершенствова-

---

[1] Г. Вилейтнер. Хрестоматия по истории математики. Вып. I—IV. Перевод П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича. М.—Л., 1932—1934. Изд. 2-е. М.—Л., 1935.

нием методов; он видит, как сочетаются идеи различных математических наук, и т. д.

Подготовка этой книги началась по инициативе Научно-методического совета Министерства просвещения СССР. Третье переиздание хрестоматии Вилейтнера не было бы целесообразным. За годы, прошедшие после появления ее немецкого оригинала (1928), было установлено множество новых важных фактов, проливших новый свет на труды отдельных ученых и даже на достижения целых эпох и народов, например, древних греков, средневековых ученых, работавших в странах Ближнего Востока и Средней Азии, математиков времен научной революции XVI—XVII вв. и т. д. В этих работах видная роль принадлежит и советской школе историков науки. Изменения, происшедшие тем временем в структуре математики, также повлекли за собой серьезные перемены в оценке идей прошлых столетий. Мы не говорим уже о принципиальном отличии в методологическом подходе к проблемам истории науки, а следовательно, и к отбору материала между советским исследователем, вооруженным методом марксизма-ленинизма, и таким ученым, как Г. Вилейтнер, который, впрочем, был блестящим и глубоко эрудированным специалистом.

При составлении «Хрестоматии» мы учитывали интересы как студентов—будущих учителей математики, так и более широкого круга возможных читателей, включая учащихся старших классов средней школы. Небольшой размер книги ставил жесткие требования при отборе текстов и стеснял при их комментировании, без которого разобрать многие отрывки читателю было бы нелегко. Можно указать многих выдающихся ученых, которые вовсе не представлены в книге, и еще большее число интересных текстов, которые мы не смогли включить в нее. Нам пришлось ограничиться минимумом текстов, характеризующих развитие некоторых наиболее важных, как мы думаем, направлений и узловых моментов арифметики и алгебры, теории чисел, геометрии, исчисления бесконечно малых и теории вероятностей. В своей совокупности эти тексты покрывают почти 4000 лет: первые относятся примерно к XX в. до нашего летосчисления, к древнему Египту и Вавилону, заключительные же—к XIX и XX вв.

Хрестоматия выходит в двух отдельных книгах; она состоит из введения и пяти частей. Первая книга открывается фрагментами из трудов Ф. Энгельса и В. И. Ленина, характеризующими предмет математики и природу математической абстракции. Вслед за тем помещены отрывки из выступлений П. Л. Чебышева и Д. Гильберта, в которых высказаны взгляды обоих ученых на связь между теорией и практикой в прогрессе математических наук и на ту роль, какую при этом играет постановка конкретных проблем. Читатель увидит, что при всем различии между интересами и направлениями творчества этих двух крупнейших математиков их воззрения по указанным вопросам во многом близки и соприкасаются. Кроме этих четырех текстов, входящих во введение к хрестоматии, первая книга содержит три части: 1) Арифметика и алгебра, 2) Теория чисел, 3) Геометрия,— а также обширную библиографию и именной указатель. Вторая книга, которая выйдет из печати вслед за первой, включает две части: 4) Исчисление бесконечно малых и 5) Теория вероятностей (и также библиографию и именной указатель).

В большинстве случаев тексты каждой части следуют хронологическому порядку, но иногда под одним номером и заголовком собраны тексты различных времен, объединенные общей идеей или проблемой и т. п. Каждый отрывок начинается с русского названия сочинения, из которого он заимствован, затем указан соответствующий номер в библиографии, где приведены все выходные сведения о соответствующем издании. После того идет текст первоисточника, а за ним — пояснительные математические и исторические примечания составителей хрестоматии. Сохранены в основном рубрикация и шрифтовые выделения первоисточников. Годы рождения и смерти цитируемых авторов и вообще упоминаемых лиц, а также оригинальная транскрипция фамилий даны в именном указателе. Более подробно с биографическими сведениями о них, а также с историей того или иного вопроса читатель может ознакомиться в недавно изданной трехтомной «Истории математики», доведенной до 1800 г., или же по другим книгам и статьям, указанным под номером, который позволит найти их в библиографии[1]. В квадратных скобках в текстах даны отдельные слова, добавленные переводчиком для ясности; номера в круглых скобках указывают на примечания к тексту. Если перевод выполнен специально для хрестоматии, фамилия переводчика названа в за-

---

[1] Мы особенно рекомендуем читателю, кроме названного трехтомника [№ 26], русские переводы книг Н. Бурбаки [№ 13] и Ф. Клейна [№ 28].

главии отрывка; в противном случае она приведена в указателе литературы.

Мы надеемся, что при такой структуре хрестоматия сможет быть полезной как слушателям курсов истории математики, так и всем желающим изучать историю математики самостоятельно. Учитель найдет в ней немало интересного для внеклассного чтения учащихся, пытливым читателям она поможет глубже проникнуть в процесс математического творчества и становления ряда важнейших идей нашей науки.

I и II части хрестоматии подготовлены И. Г. Башмаковой и С. С. Демидовым, III часть — Б. А. Розенфельдом, Введение и IV часть — нижеподписавшимся, которому принадлежит и общая редакция книги, V часть — Ю. А. Белым. Впрочем, такое разделение труда не было вполне строгим и все составители принимали то или иное участие в подготовке всех частей.

Все составители признательны за многие ценные советы действительному члену Академии педагогических наук А. И. Маркушевичу, а также кафедре математики и методики математики Киевского государственного педагогического института имени А. М. Горького, особенно ее заведующему доц. Г. П. Бевзу и сотруднику доц. А. С. Бугаю.

А. П. Юшкевич

Москва, 1 ноября 1973 г.

ВВЕДЕНИЕ

1. Ф. ЭНГЕЛЬС О ПРЕДМЕТЕ МАТЕМАТИКИ

[№ I, с. 33.][1]

Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное.

Примечание. В статье «Математика» [№ 29] А. Н. Колмогоров, приведя определение предмета математики, данное Ф. Энгельсом в 1877 г., подчеркивает, что запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется в связи с запросами техники и естествознания, так что это определение наполняется все более богатым содержанием. При этом пространственные формы можно рассматривать как частный вид количественных отношений, понимаемых достаточно широко; отдельное упоминание пространственных форм лишь указывает на относительную самостоятельность геометрических отделов математики. «Количественные отношения (в общем философском понимании этого термина), — пишет А. Н. Колмогоров,— характеризуются, в отличие от качественных, лишь своим безразличным отношением к конкретной природе тех предметов, которые они связывают» [№ 29, с. 476]. Здесь же А. Н. Колмогоров подробно рассматривает вопрос о границах, в которых целесообразно применять термин «пространственные формы».

2. В. И. ЛЕНИН О ТРАКТОВКЕ ПРИРОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ АРИСТОТЕЛЕМ

ИЗ «ФИЛОСОФСКИХ ТЕТРАДЕЙ» В. И. ЛЕНИНА

[№ II, с. 328.]

(Стр. 181 [182]), книга 11, глава 1, § 12—14 (I)[2]:

...«Математическое они» (философы) «помещают между идеями и чувственно воспринимаемым в качестве чего-то третьего, существующего вне идей и посюстороннего мира. И тем

[1] В квадратных скобках приведены ссылки на произведения, которые указаны под этим номером в списке литературы.

[2] Цифра в круглых скобках означает порядковый номер примечания составителей.

не менее нет еще третьего человека и третьего коня, кроме человека в себе (или коня в себе) и отдельного человека или коня. Но если дело обстоит не так, как они говорят, то чем же тогда приходится заниматься математику? Во всяком случае не посюсторонним, ибо в нем ничто не существует так, как того ищут математические науки»... **(2).**

Ibidem, глава 2, § 21—23:

...«Далее, спрашивается, существует ли что-нибудь кроме конкретного, или нет. Конкретным я называю материю и все материальное. Если не существует, то все преходяще, ибо все материальное во всяком случае преходяще. Если же что-нибудь существует, кроме конкретного, то это, по-видимому, форма и образ. Но относительно этих последних трудно определить, в каких вещах они присутствуют и в каких нет»...

Стр. 185—186 [185—186], книга 11, глава 3, § 12—математик оставляет в стороне теплоту, тяжесть и прочие «чувственные противоречия» и имеет в виду «лишь количественное» ... «точно так же обстоит дело и с существующим».

Здесь точка зрения диалектического материализма, но случайно, не выдержано, неразвито, мимолетно **(3).**

[Там же, с. 329—331.]

В книге 13 Аристотель снова возвращается к критике Пифагорова учения о числах (и Платона об идеях), отдельных от чувственных вещей.

Идеализм первобытный: общее (понятие, идея) есть *отдельное существо*. Это кажется диким, чудовищно (вернее: ребячески) нелепым. Но разве не в том же роде (*совершенно* в том же роде) современный идеализм, Кант, Гегель, идея бога? Столы, стулья и *идеи* стола и стула; мир и идея мира (бог); вещь и „нумен“, непознаваемая „вещь в себе“; связь земли и солнца, природы вообще—и закон, λόγος *, бог. Раздвоение познания человека и *возможность* идеализма (= религии) *даны* уже **в первой, элементарной** абстракции „дом“ вообще и отдельные домы

NB

NB

Подход ума (человека) к отдельной вещи, снятие слепка (= понятия) с нее *не есть* простой, непосредственный, зеркально-мертвый акт, а сложный, раздвоенный, зигзагообразный, *включающий в себя* возможность отлета фантазии от жизни; мало того: воз-

* —логос. *Ред.*

можность *превращения* (и притом незаметного, несознаваемого человеком превращения) абстрактного понятия, идеи в *фантазию* (in letzter Instanz ** = бога). Ибо и в самом простом обобщении, в элементарнейшей общей идее („стол" вообще) *есть* известный кусочек **фантазии**. (Vice versa: нелепо отрицать роль фантазии и в самой строгой науке: ср. Писарев о мечте полезной, как толчке *к* работе, и о мечтательности пустой.)

Наивное выражение „трудностей" насчет „философии математики" (говоря по-современному): книга 13, глава 2, § 23:

...«Далее, тело есть субстанция, ибо оно обладает известной законченностью. Но как могли бы быть субстанциями линии? Они не могли бы таковыми быть ни в смысле формы и образа, подобно, например, душе, ни в смысле материи, подобно телу: ибо очевидно, что ничто не может состоять из линий, или из плоскостей, или из точек» ... (стр. 224 [220])...

Книга 13, глава 3 разрешает эти трудности превосходно, отчетливо, ясно, *материалистически* (математика и другие науки абстрагируют *одну* из сторон тела, явления, жизни). Но автор не *выдерживает* последовательно этой точки зрения.

Швеглер в своем комментарии (т. IV, стр. 303) говорит: Аристотель дает здесь позитивное изложение «своего взгляда на математическое: математическое есть нечто отвлеченное от чувственного». **NB**

Примечания. «Философские тетради» В. И. Ленина представляют собой собрание обширных выписок, сделанных им в разное время с 1895 по 1920 г.; эти выписки во многих случаях сопровождаются их разбором, общей оценкой и отдельными замечаниями В. И. Ленина. Мы привели отрывки, относящиеся к «Метафизике» Аристотеля, написанной в середине IV в. до н. э., и именно к тем отделам этого труда, в которых рассматривается вопрос о природе понятий математики и критикуется концепция Платона, учителя Аристотеля.

1. Здесь приведены ссылки на страницы «Метафизики», сперва цитируемых В. И. Лениным по изданию этой книги, а затем (в квадратных скобках петитом) последнего русского перевода [№ 3].

2. Платон, крупнейший представитель объективного идеализма, утверждал, что истинным и вечным бытием обладает некий мир неизменных «идей» — прообразов и причин телесных вещей и отношений чувственного мира; телесные, чувственные вещи и отношения между ними являются лишь как бы преходящими и несовершенными копиями идей. Процесс познания по Платону состоит в припоминании сверхчувственной частью бессмертной души идей, которые она созерцала перед тем, как забыла их, вселившись в смертное тело человека; этому припоминанию способствует восприятие чувственных явлений. Платон не дал отчетливого и однозначного описания того, что понимал под идеей вещи; ближе всего его «идеи» к тому, что мы называем родовыми понятиями. Что касается математических форм, то они занимают в учении Платона промежуточное место между миром идей и чувственным

** — в последнем счете. *Ред.*

миром и служат как бы связующим звеном, через которое первый мир переходит, преобразуется во второй. Понятия математики, прежде всего геометрические, в отличие от «идей», имеют в некоторой мере чувственный характер. И эта часть философской системы Платона не получила у него окончательной и определенной формулировки.

3. Вот соответствующий текст Аристотеля в переводе А. В. Кубицкого: «И в отношении сущего примером служит то рассмотрение, которому математик подвергает объекты, полученные посредством отвлечения. Он производит это рассмотрение, сплошь устранивши все чувственные свойства, например тяжесть и легкость, жесткость и противоположное [ей], далее — тепло и холод и все остальные чувственные противоположности, а сохраняет только количественную определенность и непрерывность, у одних — в одном направлении, у других — в двух, у третьих — в трех, а также свойства этих объектов, поскольку последние количественно определены и непрерывны, но не с какой-нибудь другой стороны...» [№ 3, с. 185—186].

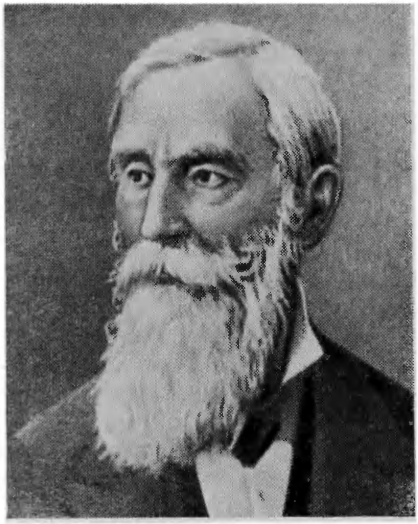
3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

ИЗ РЕЧИ П. Л. ЧЕБЫШЕВА «ЧЕРЧЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ» (1856)

[№ 54, т. V, с. 150—153.]

Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание; в настоящее время они получили еще более интереса по влиянию своему на искусства и промышленность. Сближение теории с практикою дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, от которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы существенно новые для науки и, таким образом, вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике.

Практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: *как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?*



П. Л. Чебышев

Решение задач этого рода составляет предмет так называемой *теории наибольших и наименьших величин*. Эти задачи, чисто практического характера, имеют особенную важность и для теории: все законы, определяющие движение материи весомой и невесомой **(1)**, представляют решение задач этого рода. Нельзя не заметить особенно благотворного влияния их на развитие наук математических.

До изобретения анализа бесконечно малых известны были только частные примеры решения таких задач; но в этих решениях уже было начало новой, важнейшей отрасли математических наук, известной под именем *дифференциального исчисления*. Чтобы показать влияние вопросов о *наибольших и наименьших величинах* на открытие этой науки, я приведу здесь то место знаменитого сочинения Ньютона «Philosophiae naturalis principia mathematica», где он говорит о начале этого открытия, которого приложения и результаты теперь неисчислимы:

«Лет десять тому назад (в 1677 г.), когда я вел переписку с весьма ученым геометром Лейбницем, я писал к нему, что имею способ для определения *наибольших и наименьших величин*, для проведения касательных и для решения других подобных вопросов и что способ мой с таким же удобством может быть употреблен для уравнений, заключающих в себе радикалы, как и для рациональных. Я скрыл тогда свой способ под переставленными буквами, которых значение было следующее: «Дано уравнение, заключающее в себе сколько угодно количеств текущих, найти течение, и наоборот». На это знаменитый Лейбниц отвечал, что с своей стороны он нашел подобный способ и сообщил мне его в том же письме. Этот способ отличался от моего только названием и знакоположением». (Прим. на VII предложение 2-й книги, изд. 1713 г.)

Но открытием дифференциального исчисления и решением задач, подобных тем, которые привели к открытию его, предмет этот не был исчерпан вполне, и это обнаружилось в изысканиях самого Ньютона: вопрос, им решенный, об определении формы, при котсрой тело, двигаясь в жидкости, наименее встречает препятствия, представил задачу *наибольших и наименьших величин*, существенно отличную от подобных задач, разрешимых по способу дифференциального исчисления. Общий способ решения задач этого рода, особенно важных для теоретической механики, привел к открытию еще нового исчисления, известного под именем *вариационного*.

Несмотря на такое развитие математики в отношении теории *наибольших и наименьших величин*, нетрудно заметить, что практика идет далее и требует решения задач о *наибольших и наименьших величинах* еще нового рода, существенно отличного от тех двух, которые решаются в дифференциальном и вариационном исчислениях.

Как пример вопросов такого рода и решения их мы можем представить изыскания наши о *параллелограмме Уатта*, напечатанные в Mémoires des savants étrangers нашей Академии за 1854 г. **(2)**. Из результатов, до которых мы дошли, рассматривая методу, необходимую для определения наилучшего устройства механизмов этого рода, видно, что и в этом случае вопросы практики ведут ко многим теоретическим результатам, интересным для науки; что методы, на которые впервые вызывает нас практика, являются средством для решения новых теоретических вопросов, интересных даже независимо от практического значения их **(3)**.

Другой пример вопросов этого рода, и особенно замечательный, представляет *черчение географических карт*. При современном состоянии теории географических карт можно показать бесконечное множество различных способов черчения их таким образом, что весьма малые элементы Земли сохранят в изображении своем настоящую форму. Но так как при этом, по свойству сфероидальной поверхности Земли, масштаб изображения различных элементов ее по необходимости различен, то равные элементы ее, взятые в разных местах, при изображении на карте представляются в разных размерах. Чем значительнее эти перемены масштаба, тем неправильнее географическая карта. А так как величина этих изменений масштаба на пространстве той же части поверхности бывает более или менее, смотря по способу проекции карты, то, естественно, рождается такой вопрос:

По какой же проекции эти изменения масштаба будут наименьшими?

В записке, читанной мною в заседании Академии наук 18 января, я показал, что вопрос этот, переведенный на язык анализа, приводится к особенной задаче *наибольших и наименьших величин*, существенно отличной от тех, которые решаются в дифференциальном и вариационном исчислениях **(4)**. Задача эта подобна тем, которые были предметом вышеупомянутого мемуара «О параллелограмме Уатта», но относится к высшему разряду таких задач: там отыскивалось несколько постоянных величин, здесь требуется найти две неизвестные функции, что соответствует определению бесконечного множества постоянных. Это полагает такую же разницу между этими задачами, какая существует в задачах дифференциального исчисления и вариационного. В теоретическом отношении этот предмет тем более интересен, что он приводится к исследованию уравнения в частных производных, особенно замечательного и, между прочим, выражающего равновесие теплоты в пластинках бесконечно тонких. Так, вопрос о наивыгоднейшей проекции карт связан с этим замечательным свойством теплоты: при равновесии теплоты в круглой, бесконечно тонкой пластинке температура центра есть *среднее* температуры всех точек на окружности; то же для шара: температура центра—*среднее* температуры на поверхности.

Окончательное решение о наивыгоднейшей проекции карт очень просто: наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой, на границе изображения, масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой, нормальной величине масштаба. Что же касается до определения проекции, представляющей такое свойство, оно приводится к решению обыкновенной задачи *интегрирования уравнений в частных производных*, где дается значение интеграла на границах, внутри которых он должен оставаться конечным и непрерывным.

Так, для изображения всякой страны на карте найдется одна наивыгоднейшая проекция. Эта проекция определится положением страны относительно экватора и формою ее границ; при этом параллели и меридианы будут представлять различные кривые линии, но вообще близкие к кругам или прямым, если проектируется незначительная часть земной поверхности. Линии эти по точкам чертятся безо всякого затруднения **(5)**.

ИЗ СТАТЬИ А. М. ЛЯПУНОВА «ЖИЗНЬ И ТРУДЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА» (1895)

[№ 55, с. 20] (6).

...П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды.

Насколько подобное направление может быть плодотворно в чисто научном отношении, это наглядно показывает вся ученая деятельность П. Л. Чебышева, который пришел к постановке и решению совершенно новых и важных вопросов анализа, исходя из задач прикладного характера, иногда притом чисто практических.

Таков, впрочем, путь многих важных открытий в области математики.

Примечания. «Черчение географических карт», откуда взят приведенный отрывок, было написано П. Л. Чебышевым для торжественного акта в Петербургском университете 8 (20) февраля 1856 г. и опубликовано в том же году. Посвященное вопросу о наиболее целесообразном выборе картографической проекции, это сочинение содержит вместе с тем чрезвычайно яркое изложение взглядов Чебышева на взаимоотношение и взаимодействие теории и практики в развитии математики, причем свою точку зрения автор иллюстрирует на примере ряда экстремальных задач, к которым относится и рассматриваемая им проблема. Воззрения Чебышева разделяли его ученики и последователи, составившие знаменитую Петербургскую математическую школу: А. А. Марков, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов и другие.

1. Невесомыми назывались в физике того времени гипотетические материальные среды, отличные от обычной материи и служащие носителем света, электричества, магнетизма и т. д. Иногда подобного рода носитель называли эфиром.

2. Имеется в виду «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», в которой Чебышев положил начало своей теории наилучшего приближения функций [см. № 54, т. II, с. 23—51].

3. Мы опускаем здесь сноску, в которой Чебышев формулирует основную задачу об определении целого алгебраического многочлена, наименее уклоняющегося на данном отрезке от нуля, и две полученные в ходе ее решения теоремы о пределах корней алгебраических уравнений.

4. 18 (30) января 1856 г. Чебышев представил Академии наук в Петербурге работу «О построении географических карт», напечатанную в том же году [см. № 54, т. V, с. 146—149]. Основное предложение Чебышева высказано здесь, как и в цитируемой речи, без доказательства, которое дал в 1894 г. Д. А. Граве.

5. В заключительной части речи Чебышев детально разбирает вопрос о наилучшем — в его смысле — выборе проекции для Европейской части России «по эту сторону Уральских гор, вместе с Кавказом и Грузиею» [№ 54, т. V, с. 156]. Следует заметить, что данное исследование Чебышева продолжало серию картографических работ, которые велись в XVIII в. в Петербургской Академии наук, в частности Эйлером, а также изыскания Лагранжа.

6. Статья А. М. Ляпунова была напечатана впервые в «Сообщениях Харьковского математического общества», 2 серия, 1895, т. IV, № 5—6 и переиздана в книге [№ 55]. Мы приводим из нее небольшой отрывок, характеризующий подход математиков Петербургской школы к выбору проблем для исследований и в идейном отношении непосредственно примыкающий к только что приведенному отрывку из речи Чебышева.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ И ИХ ИСТОЧНИКИ

ИЗ ДОКЛАДА Д. ГИЛЬБЕРТА «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ» (1900)

[№ 42, с. 13—22]

История учит, что развитие науки протекает непрерывно. Мы знаем, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми. Чтобы представить себе возможный характер развития математического знания в ближайшем будущем, мы должны перебрать в нашем воображении вопросы, которые еще остаются открытыми, обозреть проблемы, которые ставит современная наука и решения которых мы ждем от будущего. Такой обзор проблем кажется мне сегодня, на рубеже нового столетия, особенно своевременным. Ведь большие даты не только заставляют нас оглянуться на прошедшее, но и направляют нашу мысль в неизвестное будущее.

Невозможно отрицать глубокое значение, какое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще, и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследователя. Всякая научная область жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития. Как вообще каждое человеческое начинание связано с той иной целью, так и математическое творчество связано с постановкой проблем. Сила исследователя познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты.

Трудно, а часто и невозможно заранее правильно оценить значение отдельной задачи; ведь в конечном счете ее ценность определится пользой, которую она принесет науке. Отсюда возникает вопрос: существуют ли общие признаки, которые характеризуют хорошую математическую проблему?

Один старый французский математик сказал: «Математическую теорию можно считать совершенной только тогда, когда ты сделал ее настолько ясной, что берешься изложить ее содержание первому встречному». Это требование ясности и легкой доступности, которое здесь так резко ставится в отношении математической теории, я бы поставил еще резче в отношении математической проблемы, если она претендует на совершенство; ведь ясность и легкая доступность нас привлекают, а усложненность и запутанность отпугивают.

Д. Гильберт

Математическая проблема, далее, должна быть настолько трудной, чтобы нас привлекать, и в то же время не совсем недоступной, чтобы не делать безнадежными наши усилия; она должна быть путеводным знаком на запутанных тропах, ведущих к сокрытым истинам; и она затем должна награждать нас радостью найденного решения.

Математики прошлого столетия со страстным рвением отдавались решению отдельных трудных задач; они знали цену трудной задаче. Я напомню только поставленную Иоганном Бернулли *задачу о линии быстрейшего падения*. «Как показывает опыт,— говорит Бернулли, оповещая о своей задаче,— ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи». И поэтому он надеется заслужить благодарность математического мира, если он, следуя примеру таких мужей, как Мерсенн, Паскаль, Ферма, Вивиани и другие, которые (до него) поступали так же, предложит задачу выдающимся аналитикам своего времени, чтобы они могли на ней, как на пробном камне, испытать достоинства своих методов и измерить свои силы. Этой задаче Бернулли и другим аналогичным задачам обязано своим зарождением вариационное исчисление.

Известно утверждение Ферма о том, что диофантово уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах x, y, z, если не считать известных очевидных исключений. *Проблема доказательства этой неразрешимости* являет разительный пример того, какое побуждающее влияние на науку может оказать специальная и на первый взгляд малозначительная проблема. Ибо, побужденный задачей Ферма, Куммер пришел к введению идеальных чисел и к открытию теоремы об однозначном разложении чисел в круговых полях на идеальные простые множители—теоремы, которая теперь, благодаря обобщениям на любую алгебраическую числовую область, полученным Дедекиндом и Кронекером, является центральной в современной теории чисел и значение которой выходит далеко за пределы теории чисел в область алгебры и теории функций.

Напомню еще об одной интересной проблеме — *задаче трех тел*. То обстоятельство, что Пуанкаре предпринял новое рассмотрение и значительно продвинул эту трудную задачу, привело к плодотворным методам и далеко идущим принципам, введенным этим ученым в небесную механику, методам и принципам, которые сейчас признаются и применяются также и в практической астрономии.

Обе упомянутые проблемы — проблема Ферма и проблема трех тел — являются в нашем запасе проблем как бы противоположными полюсами: первая представляет свободное достижение чистого разума, принадлежащее области абстрактной теории чисел, вторая выдвинута астрономией и необходима для познания простейших основных явлений природы.

Часто, однако, случается, что одна и та же специальная проблема появляется в весьма различных областях математики. Так, *проблема о кратчайшей линии* играет важную историческую и принципиальную роль одновременно в основаниях геометрии, в теории кривых и поверхностей, в механике и в вариационном исчислении. А как убедительно демонстрирует Ф. Клейн в своей книге об икосаэдре, *проблема о правильных многогранниках* имеет важное значение одновременно для элементарной геометрии, теории групп, теории алгебраических и теории линейных дифференциальных уравнений!

Чтобы осветить важность отдельных проблем, я позволю себе еще сослаться на Вейерштрасса, считавшего большой удачей для себя то стечение обстоятельств, которое позволило ему в начале своей научной деятельности заняться такой значительной проблемой, как *проблема Якоби об обращении эллиптического интеграла*.

После того как мы рассмотрели общее значение проблемы в математике, обратимся к вопросу о том, из какого источника математика черпает свои проблемы. Несомненно, что первые и самые старые проблемы каждой математической области знания возникли из опыта и поставлены над миром внешних явлений. Даже правила *счета с целыми числами* были открыты на этом пути еще на ранней ступени культурного развития человечества так же, как и теперь ребенок познает применение этих правил эмпирическим методом. То же относится к *первым проблемам геометрии* — пришедшим к нам из древности задачам удвоения куба, квадратуры круга, а также к старейшим проблемам теории численных уравнений, теории кривых, дифференциального и интегрального исчислений, вариационного исчисления, теории рядов Фурье и теории потенциала, не говоря уже о всем богатстве проблем собственно механики, астрономии и физики

При дальнейшем развитии какой-либо математической дисциплины человеческий ум, обнадеженный удачами, проявляет уже самостоятельность; он сам ставит новые и плодотворные проблемы, часто без заметного влияния внешнего мира, с помощью только логического сопоставления, обобщения, специализирования, удачного расчленения и группировки понятий и выступает затем сам на первый план как постановщик задач. Так возникли *задача о простых числах* и другие задачи арифметики, теория Галуа, теория алгебраических инвариантов, теория абелевых и автоморфных функций, и так возникали вообще почти все *тонкие вопросы современной теории чисел и теории функций.*

А между тем во время действия созидательной силы чистого мышления внешний мир снова настаивает на своих правах: он навязывает нам своими реальными фактами новые вопросы и открывает нам новые области математического знания. И в процессе включения этих новых областей знания в царство чистой мысли мы часто находим ответы на старые нерешенные проблемы и таким путем наилучшим образом продвигаем вперед старые теории. На этой постоянно повторяющейся и сменяющейся игре между мышлением и опытом, мне кажется, и основаны те многочисленные и поражающие аналогии и та кажущаяся предустановленная гармония, которые математик так часто обнаруживает в задачах, методах и понятиях различных областей знания.

Остановимся еще кратко на вопросе о том, каковы могут быть общие требования, которые мы вправе предъявить к решению математической проблемы. Я имею в виду прежде всего требования, благодаря которым удается убедиться в правильности ответа с помощью конечного числа заключений и притом на основании конечного числа предпосылок, которые кладутся в основу каждой задачи и которые должны быть в каждом случае точно сформулированы. Это требование логической дедукции с помощью конечного числа заключений есть не что иное, как требование строгости проведения доказательств. Действительно, требование строгости, которое в математике уже вошло в поговорку, соответствует общей философской потребности нашего разума; с другой стороны, только выполнение этого требования приводит к выявлению полного значения существа задачи и ее плодотворности. Новая задача, особенно если она вызвана к жизни явлениями внешнего мира, подобна молодому побегу, который может расти и приносить плоды, лишь если он будет заботливо и по строгим правилам искусства садоводства взращиваться на старом стволе — твердой основе нашего математического знания.

Будет большой ошибкой думать при этом, что строгость в доказательстве — это враг простоты. Многочисленные примеры убеждают нас в противоположном: строгие методы являются в то же время простейшими и наиболее доступными. Стремление к строгости как раз и приводит к отысканию простейших доказательств. Это же стремление часто прокладывает путь к методам, которые оказываются более плодотворными, чем старые менее строгие методы. Так, теория алгебраических кривых благодаря более строгим методам функций комплексного переменного и целесообразному применению трансцендентных средств значительно упростилась и приобрела бо́льшую цельность. Далее, доказательство правомерности применения четырех элементарных арифметических действий к степенны́м рядам, а также почленного дифференцирования и интегрирования этих рядов и основанное на этом признание степенно́го ряда [как инструмента математического анализа.—*П. А.*][1], несомненно, значительно упростили весь анализ, в частности теорию исключения и теорию дифференциальных уравнений (вместе с ее теорема́ми существования).

Но особенно разительный пример, иллюстрирующий мою мысль, представляет вариационное исчисление. Исследование первой и второй вариаций определенного интеграла приводило к крайне сложным вычислениям, а соответствующие исследования старых математиков были лишены необходимой строгости. Вейерштрасс указал нам путь к новому и вполне надежному обоснованию вариационного исчисления. На примере простого и двойного интеграла я вкратце намечу в конце моего доклада, как следование этому пути приводит в то же время к поразительному упрощению вариационного исчисления вследствие того, что для установления необходимых и достаточных критериев максимума и минимума становится излишним вычисление второй вариации и даже частично отпадает необходимость в утомительных умозаключениях, относящихся к первой вариации. Я уже не говорю о тех преимуществах, которые возникают от того, что исчезает надобность рассматривать лишь те вариации, для которых значения производных функций меняются незначительно.

Предъявляя к полному решению проблемы требование строгости в доказательстве, я хотел бы, с другой стороны, опровергнуть мнение о том, что совершенно строгие рассуждения применимы только к понятиям анализа или даже одной лишь арифметики. Такое мнение, поддерживаемое иногда и выдающимися умами, я считаю совершенно ложным. Такое одностороннее толкование требования строгости быстро приводит к игнорированию всех понятий, возникших из геометрии, механики, физики, приостанавливает приток [в математику —*П. А.*] нового материала из внешнего мира и, в конце концов, приводит даже к отбрасыванию понятия континуума и иррационального числа. А существует ли более важный жизненный нерв, чем тот, который был бы отрезан от математики, если из нее изъять геометрию и математическую физику? Я, напротив, считаю, что всякий раз, когда математические понятия зарождаются со стороны теории познания или в геометрии, или в естественнонаучных теориях, перед математикой возникает задача исследовать принципы, лежащие в основе этих понятий, и так обосновать эти понятия с помощью полной и простой системы аксиом, чтобы строгость новых понятий и их

---

[1] Эта и следующая вставки принадлежат редактору русского издания «Математических проблем» П. С. Александрову.

применимость к дедукции ни в какой мере не уступала старым арифметическим понятиям.

К новым понятиям относятся также новые обозначения. Мы их выбираем таким образом, чтобы они напоминали те явления, которые послужили поводом для образования этих понятий. Так, геометрические фигуры являются образами для напоминания пространственных представлений и в качестве таковых применяются всеми математиками. Кто не связывает с двумя неравенствами $a > b > c$ между тремя величинами a, b, c образ тройки прямолинейно расположенных и следующих друг за другом точек в качестве геометрической интерпретации понятия «между»? Кто не пользуется образом вложенных друг в друга отрезков и прямоугольников, если нужно провести полное и строгое доказательство трудной теоремы о непрерывности функций или существования предельной точки? Кто может обойтись без фигуры треугольника, окружности с заданным центром или без тройки взаимно перпендикулярных осей? Или кто хотел бы отказаться от образа векторного поля или семейства кривых, или поверхностей с их огибающей — понятий, которые играют такую существенную роль в дифференциальной геометрии, в теории дифференциальных уравнений, в основах вариационного исчисления и в других чисто математических областях знания?

Арифметические знаки — это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры — это нарисованные формулы, и никакой математик не мог бы обойтись без этих нарисованных формул, так же как и не мог бы отказаться при счете от заключения в скобки или их раскрытия или применения других аналитических знаков.

Применение геометрических фигур в качестве строгого средства доказательства предполагает точное знание и полное владение теми аксиомами, которые лежат в основе теории этих фигур, и поэтому для того, чтобы эти геометрические фигуры можно было включить в общую сокровищницу математических знаков, необходимо строгое аксиоматическое исследование их наглядного содержания. Подобно тому как при сложении двух чисел нельзя подписывать цифры слагаемых в неверном порядке, а нужно строго следовать правилам, т. е. тем аксиомам арифметики, которым подчиняются арифметические действия, так и операции над геометрическими образами определяются теми аксиомами, которые лежат в основе геометрических понятий и связей между ними.

Сходство между геометрическим и арифметическим мышлением проявляется также и в том, что в арифметических исследованиях мы так же мало, как и при геометрических рассмотрениях, прослеживаем до конца цепь логических рассуждений, вплоть до аксиом. Напротив, в особенности при первом подходе к проблеме, мы и в арифметике, совершенно так же как и в геометрии, сначала пользуемся некоторым мимолетным, бессознательным, не вполне отчетливым комбинированием, опирающимся на доверие к некоторому арифметическому чутью, к действенности арифметических знаков, без чего мы не могли бы продвигаться в арифметике точно так же, как мы не можем продвигаться в геометрии, не опираясь на силы геометрического воображения. Образцом арифметической теории, оперирующей строгим образом с геометрическими понятиями и знаками, может служить работа Г. Минковского «Геометрия чисел».

Сделаем еще несколько замечаний относительно трудностей, которые могут представлять математические проблемы, и о преодолении этих трудностей.

Если нам не удается найти решение математической проблемы, то часто причина этого заключается в том, что мы не овладели еще достаточно общей точкой зрения, с которой рассматриваемая проблема представляется лишь отдельным звеном в цепи родственных проблем. Отыскав эту точку зрения, мы часто не только делаем более доступной для исследования данную проблему, но и овладеваем методом, применимым и к родственным проблемам. Примерами могут служить введенное Коши в теорию определенного интеграла интегрирование по криволинейному пути и установление Куммером понятия идеала в теории чисел. Этот путь нахождения общих методов наиболее удобный и надежный, ибо если ищут общие методы, не имея в виду какую-нибудь определенную задачу, то эти поиски, по большей части, напрасны.

При исследовании математических проблем специализация играет, как я полагаю, еще более важную роль, чем обобщение. Возможно, что в большинстве случаев, когда мы напрасно ищем ответа на вопрос, причина нашей неудачи заключается в том, что еще не разрешены или не полностью решены более простые и легкие проблемы, чем данная. Тогда все дело заключается в том, чтобы найти эти более легкие проблемы и осуществить их решение наиболее совершенными средствами, при помощи понятий, поддающихся обобщению. Это правило является одним из самых мощных рычагов для преодоления математических трудностей, и мне кажется, что в большинстве случаев этот рычаг и приводят в действие, подчас бессознательно.

Вместе с тем бывает и так, что мы добиваемся ответа при недостаточных предпосылках или идя в неправильном направлении и вследствие этого не достигаем цели. Тогда возникает задача доказать неразрешимость данной проблемы при принятых предпосылках и выбранном направлении. Такие доказательства невозможности проводились еще старыми математиками, например, когда они обнаруживали, что отношение гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника к его катету есть иррациональное число. В новейшей математике доказательства невозможности решений определенных проблем играют выдающуюся роль; там мы констатируем, что такие старые и трудные проблемы, как доказательство аксиомы о параллельных, как квадратура круга или решение уравнения пятой степени в радикалах, получили все же строгое, вполне удовлетворяющее нас решение, хотя и в другом направлении, чем то, которое сначала предполагалось.

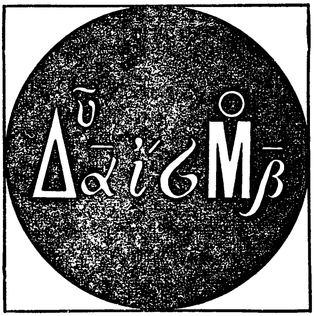
Этот удивительный факт наряду с другими философскими основаниями создает у нас уверенность, которую разделяет, несомненно, каждый математик, но которую до сих пор никто не подтвердил доказательством, — уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна быть доступна строгому решению или в том смысле, что удается получить ответ на поставленный вопрос, или же в том смысле, что будет установлена невозможность ее решения и вместе с тем доказана неизбежность неудачи всех попыток ее решить.

Примечание. Доклад Д. Гильберта «Mathematische Probleme» был произнесен почти в самый канун XX столетия — 8 августа 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже и в том же году напечатан в «Göttinger Nachrichten». В своем докладе Гильберт выдвинул 23 задачи, от исследования которых он ожидал больших успехов в общем прогрессе математики. Произведенный Гильбертом отбор оказался почти во всех случаях замечательно удачным; решение поставленных им вопросов, растянувшееся на десятки лет (и для некоторых проблем еще не полученное), стимулировало творчество многих выдающихся ученых и повлекло за собой создание целых новых отделов математики. Доклад Гильберта заслуживает с этой точки зрения специального изучения, которое теперь во многом облегчено благодаря компетентным комментариям советских математиков, помещенных в русском издании; заметим, что ученые СССР внесли крупный вклад в решение ряда поставленных Гильбертом проблем. Мы приводим почти полностью вводный раздел текста Гильберта, о котором редактор русского издания П. С. Александров пишет: «Доклад начинается с интересно, я бы сказал вдохновенно, написанной общей вводной части, в которой не только говорится о значении для математики «хорошо поставленной» специальной проблемы, но и высказываются суждения о математической строгости, о связи математики с естествознанием и о других вещах, близких всякому активно думающему о своей науке математику. В заключение этой вводной части Гильберт с поражающей силой и убежденностью высказывает свой основной тезис, «аксиому» о разрешимости в широком смысле слова всякой математической задачи — тезис, содержанием которого является глубокая уверенность в неограниченном могуществе человеческого познания и непримиримая борьба со всяким агностицизмом — с нелепым «Ignorabimus», как говорит в другом месте Гильберт» [№ 42, с. 8]. К этому добавим, что читатель заметит, как перекликаются многие мысли Гильберта о взаимосвязи между мышлением и опытом и о роли трудных проблем в создании и развитии математических теорий с приведенными нами ранее высказываниями по тем же вопросам Чебышева и Ляпунова. Выражение «Ignorabimus» в цитированных словах П. С. Александрова означает «мы не узнаем». Таким восклицанием «ignoramus et ignorabimus» — мы не знаем и не узнаем ответ на ряд нерешенных вопросов — закончил свою речь «О границах естествознания» (1872) известный физиолог Э. Дюбуа-Реймон.

От комментирования многочисленных исторических ссылок Гильберта мы должны отказаться. Оно потребовало бы слишком пространных разъяснений. В большинстве случаев необходимые справки можно навести во II и III томах книги [№ 26] и в книге Ф. Клейна [№ 28].

Упоминаемые на с. 25 и 29 сочинения — это: F. Klein. Vorlesungen über das Ikosaedr und die Auflösung der Gleichugen von fünften Grade. Leipzig, 1884, и H. Minkowski. Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1896.

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА



1. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ НА ДРЕВНЕМ ВОСТОКЕ

а. ИСЧИСЛЕНИЕ «АХА»

ИЗ БЕРЛИНСКОГО ПАПИРУСА ЭПОХИ СРЕДНЕГО ЦАРСТВА

(2000—1800 г. до н. э.)

[№ 14, с. 38—39.]

Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ (1) стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это (2).

Возьми квадрат со стороной 1, и возьми $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ от 1, то есть $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ в качестве стороны второй площади. Помножь $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ на самого себя; это дает $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. Поскольку сторона первой площади взята за 1, а второй за $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, то сложи обе площади вместе; это даст $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. Возьми корень отсюда: это будет $1+\frac{1}{4}$. Возьми корень из данных 100: это будет 10. Сколько раз входит $1+\frac{1}{4}$ в 10? Это входит 8 раз (3). [Далее текст прочесть нельзя (4).]

Примечания. В ряде задач, содержащихся в древнеегипетских математических папирусах, требуется найти число, заданное некоторым словесным требованием, соответствующим уравнению вида $ax+bx+cx+\ldots=e$ ($a, b, c, \ldots, e$ — рациональные положительные числа). Неизвестное в источниках обозначается специальным иероглифом, означающим количество или множество, от нынешней транскрипции которого («аха») произошло название задач этого типа — задачи исчисления «аха». Мы бы записали решение указанного уравнения $x=\frac{e}{a+b+c+\ldots}$ и затем произвели соответствующие сложения и деление. Однако выполнение такого деления, учитывая особенности древнеегипетской техники счета с дробями, превращается в чрезвычайно сложную задачу. Поэтому египтяне избрали другой метод решения задачи — метод «ложного положения». Если бы решением было некоторое число x_1 («ложное положение»), то $ax_1+bx_1+cx_1+\ldots$ вместо e равнялось бы некоторому e_1, и тогда $x:x_1=e:e_1$, $x=x_1\frac{e}{e_1}$. Чтобы было легко подсчитать число $x_1\frac{e}{e_1}$, подбирается удобное значение x_1, а следовательно, e_1.

Точно таким же образом египтяне решали задачи, которые можно выразить уравнением $ax^2+bx^2+cx^2+\ldots=e$ ($a, b, c, \ldots, e$ — рациональные положительные числа). Одна из таких задач, при решении которых приходится дополнительно извлекать квадратные корни, приведена выше.

Дальше задач, сводящихся к уравнениям указанных двух видов, египтяне, насколько известно, не пошли — слишком сложна для этого оказалась их техника счета.

1. Древнеегипетские вычислители не применяли дробей с произвольными числителями. Они использовали лишь дроби вида $\frac{1}{k}$, где k — целое положительное число, а также дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, для которых имелись специальные обозначения $\left(\text{впрочем, } \frac{3}{4} \text{ впоследствии, что нашло отражение и в приведенном отрывке, стали записывать как сумму } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$. Счет с этими дробями предполагает особую технику, в основе которой лежит представление дробей вида $\frac{m}{n}$ в виде суммы долей единицы $\left(\text{и } \frac{2}{3}\right)$.

2. Условие задачи можно записать в виде уравнения

$$x^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 x^2=100.$$

3. Итак, если принять сторону первого квадрата равной 1 («ложное положение»), то сторона второго будет $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, а сумма их площадей $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ $\left(\text{т. е. } \frac{25}{16}\right)$. Корень квадратный из этого числа $1+\frac{1}{4}$ $\left(\text{т. е. } \frac{5}{4}\right)$ восемь раз содержится в 10, квадратном корне из 100. Само деление $10:\left(1+\frac{1}{4}\right)$ производится как действие, обратное умножению, а последнее сводится к последовательным удвоениям (и, если требуется, раздвоениям). В данном случае троекратное удвоение $1+\frac{1}{4}$ дает $2+\frac{1}{2}$, 5 и 10.

4. Так как квадратный корень из числа $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ в 8 раз меньше квадратного корня из 100, то принятое за длину стороны квадрата число, т. е. единицу, следует умножить на 8. Таким образом, легко восстанавливается содержание недостающей части текста: стороны искомых квадратов будут $8\cdot 1=8$ и $8\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=6$.

6. ДРЕВНЕВАВИЛОНСКАЯ ЗАДАЧА НА СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ 2-Й СТЕПЕНИ

ИЗ ДРЕВНЕВАВИЛОНСКОГО ТЕКСТА ВРЕМЕН ДИНАСТИИ ХАММУРАПИ (XVIII в. до н. э.)

[№ 14, с. 87]

Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 3,3 (1) получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27 (2). Спрашивается длина, ширина и площадь.

[Даны] 27 и 3,3 суммы

[Результат] 15 длина | 3,0 — площадь
12 ширина |

Ты сделаешь так:

$$27 + 3,3 = 3,30$$
$$2 + 27 = 29 \ (3).$$

Возьми половину от 29 [это дает 14;30].

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$
$$3,30;15 - 3,30 = 0;15.$$

0;15 имеет 0;30 квадратный корень.

$$14;30 + 0;30 = 15 \text{ длина}$$
$$14;30 - 0;30 = 14 \text{ ширина } (4).$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14;12 истинная ширина (5).

15 длину, 16 ширину я перемножил:

$$15 \times 12 = 3,0 \text{ площадь}$$
$$15 - 12 = 3$$
$$3,0 + 3 = 3,3 \ (6).$$

Примечания. Древневавилонские клинописные тексты времен Хаммурапи содержат решения многочисленных алгебраических уравнений первой и второй степени и их систем. Коэффициенты уравнений всегда имеют определенные числовые значения, однако несомненно, что тогдашним математикам были известны общие правила.

Успехами, достигнутыми в решении алгебраических уравнений и их систем, древневавилонские математики в значительной степени были обязаны изобретенной ими шестидесятеричной системе нумерации, позволившей без труда проводить вычисления, представлявшие большие трудности.

1. Целые положительные числа $A = a_n 60^n + a_{n-1} 60^{n-1} + \ldots + a_1 60 + a_0$, где $0 \leqslant a_i \leqslant 59$, вавилоняне изображали в виде $a_n a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1 a_0$, оставляя пробелы между соседними a_i (числа от 1 до 59 они записывали с помощью только двух знаков для 1 и 10). Мы будем записывать числа A в современной десятичной системе, заменяя пробелы запятыми. Так, $3792 = 2 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60 + 12$ запишется 2, 3, 12. В вавилонской нумерации долгое время не имелось особого знака отсутствия разряда. Впоследствии такой знак для межразрядного нуля был введен. Однако отсутствие разряда или нескольких подряд разрядов в конце числа не отмечалось, и, например, отдельно стоящий знак единицы сам по себе мог означать 1, 60, 60^2 и т. д. и, более того, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$ и т. д., ибо дроби вавилоняне записывали в той же шестидесятеричной системе. Абсолютное значение числа в вавилонских задачах обычно усматривается из их содержания. В наших записях мы отделяем дробную часть от целой точкой с запятой. Например, наше число $2\frac{3}{5}$ запишется соответственно 2;36. Очевидно, что действия в шестидесятеричной системе дробей производятся в принципе столь же просто, как с десятичными дробями. [Подробнее о вавилонском счете см. № 26, т. I, с. 36—39.]

2. Если длину обозначить через x, а ширину через y, то условие задачи запишется в виде системы:

$$\begin{cases} xy + x - y = 183, \\ x + y = 27. \end{cases} \qquad (1)$$

3. Как следует из смысла предлагаемого решения, производится замена:

$$y' = y + 2,$$

в результате которой система (1) приобретает более простой вид:

$$\begin{cases} xy' = 27 + 3{,}3 = 27 + 183 = 210, \\ x + y' = 27 + 2 = 29. \end{cases} \qquad (2)$$

Дальнейшие выкладки проводятся уже для системы (2).

К замене $y' = y + 2$ можно было прийти, например, таким путем: если сложить уравнения системы (1), то получим $xy + 2x = 210$ или, $x(y+2) = 210$; таким образом, получается система:

$$\begin{cases} x(y+2) = 210, \\ x + y = 27 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x(y+2) = 210, \\ x + (y+2) = 29 \end{cases}$$

(эквивалентная системе (1)), для которой замена $y' = y + 2$ напрашивается сама собой.

4. Решение получается по правилу, которое в современной алгебраической символике выглядит так:
если задана система

$$\begin{cases} xy' = p, \\ x + y' = a, \end{cases}$$

то x и y' равны:

$$x = \frac{1}{2}a + w \quad \text{и} \quad y' = \frac{1}{2}a - w,$$

где

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - p}.$$

Разумеется, такой формулы в тексте не имеется. В нашем случае $w = 14$; $30 = 14 + 30 \cdot 60^{-1} = 14\frac{1}{2}$, $x = 15$ и $y' = 14$.

Как вавилоняне получили это и подобные ему правила (например, для системы $xy = p$, $x - y = d$)? Видимо, не путем определения неизвестного (например, x) через другое (через y') из одного из уравнений системы (например, $x = a - y'$), последующей подстановки полученного выражения во второе уравнение и решения полученного таким образом квадратного уравнения ($y'^2 - ay' + p = 0$). Хотя такой способ им был известен, однако, применяя его и находя, например, y' из уравнения $y'^2 - ay' + p = 0$, они должны были бы искать x как $x = a - y'$; вместо этого они в рассматриваемом случае определяли x как $\frac{1}{2} + w$, а y' как $\frac{1}{2} - w$.

Вероятно, ход решения был следующим: так как сумма x и y' равна a, то насколько x превышает половину a (обозначим эту величину через w), настолько y меньше этой величины: $x = \frac{1}{2}a + w$, $y' = \frac{1}{2}a - w$. Согласно первому уравнению нашей системы $xy' = \left(\frac{1}{2}a + w\right)\left(\frac{1}{2}a - w\right) = p$, или (соотношение $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ было им известно) $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - w^2 = p$, откуда $w = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - p}$.

5. $y = y' - 2 = 14 - 2 = 12$.

6. Здесь проверяется, что $x = 15$ и $y = 12$ удовлетворяют условиям задачи. О втором решении системы (1) ($x = 14$, $y = 13$) в тексте не упоминается.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ИЗ II КНИГИ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА (ОКОЛО 300 г. до н. э.)

[№ 25, т. 1, с. 61]

Предложение 1

Если имеются две прямые и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков, то прямоугольник, заключающийся между этими двумя прямыми, равен ⟨вместе взятым⟩ прямоугольникам, заключенным между нерассеченной прямой и каждым из отрезков (1).

[Там же, с. 64—65]

Предложение 4

Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей ⟨прямой⟩ равен квадратам на отрезках вместе с дважды ⟨взятым⟩ прямоугольником, заключенным между отрезками (2).

В самом деле, пусть прямая линия *AB* как-либо рассечена в точке *C*. Я утверждаю, что квадрат на *AB* равен квадратам на *AC*, *CB* вместе с дважды ⟨взятым⟩ прямоугольником, заключенным между *AC*, *CB* (рис. 1).

Действительно, надстроим на *AB* квадрат *ADEB* [предложение 46 книги I], соединим *BD* и через *C*, параллельную каждой из *AD*, *EB*, проведем *CH*, через *H*, параллельную каждой из *AB*, *DE*, проведем *GK* (предложения 30 и 31 книги I). И поскольку *CI* параллельна *AD* и на них упала *BD*, то внешний угол *CHB* равен внутреннему и противолежащему *ADB* (предложение 29 книги I). Но угол *ADB* равен углу *ABD*, поскольку и сторона *BA* равна *AD* (предложение 5 книги I); и, значит, угол *CHB* равен углу *HBC*, так что и сторона *BC* равна стороне *CH* (предложение 6 книги I); но *CB* равна *HK* (предложение 34 книги I), *CH* же равна *KB*, и, значит, *HK* равна *KB*; значит, ⟨площадь⟩ *CHKB* равносторонняя. Вот я утверждаю, что она и прямоугольная. Действительно, поскольку *CH* параллельна *BK* [и на них упала прямая *BC*], то, значит, углы *KBC* и *HCB* ⟨вместе⟩ равны двум прямым (предложение 29 книги I). Угол же *KBC* прямой; значит, прямой и *BCH*; так что и противоположные углы *CHK*, *HKB* прямые (предложение 34 книги I).

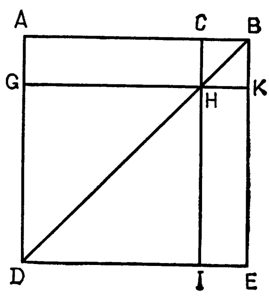


Рис. 1.

Значит, $CHKB$ — прямоугольная. Доказано же, что она и равносторонняя; значит, она квадрат; и она на CB. Вследствие того же вот и GI квадрат; и он на GH, т. е. на AC (предложение 34 книги I); значит, GI, KC — квадраты на AC, CB. И поскольку AH равно HE (предложение 43 книги I), и AH прямоугольник между AC и CB, ибо HC равна CB; и, значит, HE равен прямоугольнику между AC и CB; значит, AH и HE ⟨вместе⟩ равны дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику между AC, CB. И GI, CK суть квадраты на AC, CB; значит, четыре площади GI, CK, AH, HE равны квадратам на AC, CB и дважды ⟨взятому⟩ прямоугольнику, заключенному между AC, CB. Но GI, CK, AH, HE в целом есть $ADEB$, который будет квадратом на AB; значит, квадрат на AB равен квадратам на AC, CB и дважды взятому прямоугольнику, заключенному между AC, CB.

Значит, если прямая линия как-либо рассечена, квадрат на всей прямой равен квадратам на отрезках вместе с дважды ⟨взятым⟩ прямоугольником, заключенным между отрезками, что и требовалось доказать.

[Там же, с. 65—67]

Предложение 5

Если прямая линия рассечена на равные и неравные ⟨отрезки⟩, то прямоугольник, заключенный между неравными ⟨отрезками⟩ всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями, равен квадрату на половине.

В самом деле, пусть какая-либо прямая AB рассечена на равные части в C, на неравные же в D; я утверждаю, что прямоугольник, заключенный между AD и DB вместе с квадратом на CD, равен квадрату на CB (рис. 2).

Действительно, надстроим на CB квадрат $CEIB$, соединим BE и через D, параллельную каждой из CE, BI, проведем DH, через G — параллельную каждой из AB, EI, далее проведем KM (предложения 30, 31 книги 1) и далее через A, параллельную каждой из CL, BM, проведем AK. И поскольку «дополнение» CG равно «дополнению» GI (предложение 43 книги 1), прибавляем общую DM; значит, вся CM равна всей DI. Но CM равна AL, поскольку и AC равна CB; и, значит, AL равна DI. Прибавим общую CG; значит, вся AG равна гномону MNX. Но AG — прямоугольник между AD и DB, ибо DG равна DB; и, значит, гномон MNX равен прямоугольнику между AD

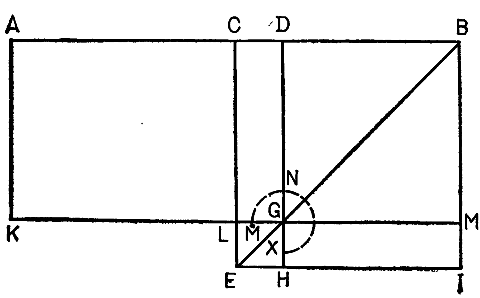


Рис. 2.

и DB. Прибавим общий LH, который равен квадрату на CD; значит, гномон MNX и LH ⟨вместе⟩ равны прямоугольнику, заключенному между AD, DB, и квадрату на CD. Но гномон MNX и LH в целом квадрат $CEIB$, который на CB; значит, прямоугольник, заключенный между AD, DB ⟨вместе⟩ с квадратом на CD, равен квадрату на CB.

Значит, если прямая линия рассечена на равные и неравные ⟨отрезки⟩, то прямоугольник, заключенный между неравными ⟨отрезками⟩ вместе с квадратом на отрезке между сечениями, равен квадрату на половине, что и требовалось доказать.

[Там же, с. 67]

Предложение 6

Если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приложена какая-либо другая прямая, то прямоугольник, заключенный между всей прямой с приложенной и самой приложенной, вместе с квадратом на половине, равен квадрату на ⟨прямой⟩, составленной из половины и приложенной **(3)** (рис. 3).

Примечания. Во II книге «Начал» Евклида излагается так называемая «геометрическая алгебра» (это название ввел Г. Цейтен), т. е. алгебра, построенная на основе геометрии. Первоначально греки строили геометрию и алгебру на основе арифметики, однако в конце VI — начале V в. до н. э. в пифагорейской школе было открыто существование несоизмеримых отрезков. Это означало, что целых чисел и их отношений недостаточно для выражения отношений между геометрическими величинами, что область отрезков «шире», чем область рациональных чисел. Вероятно, благодаря этому изменилось соотношение между геометрией и арифметикой: геометрия была положена в основу всей математики, и операции алгебры начали определять с ее помощью.

В этой новой алгебре величины изображались с помощью отрезков, прямоугольников и параллелепипедов. Сложение осуществлялось путем «приставления» соответствующих отрезков, вычитание — путем выбрасывания меньшего отрезка из большего. Произведением двух или трех отрезков назывался построенный на них прямоугольник, или, соответственно, прямой параллелепипед. При этом произведение двух (или трех) отрезков нельзя было сложить ни с одним из сомножителей; таким образом, «умножение» приводило к величинам большего числа измерений. Сложение и вычитание было определено лишь для величин одной размерности, т. е. «исчисление» было ступенчатым.

Преимущества «геометрической алгебры» заключались в том, что определение основных алгебраических операций и вывод их общих свойств и алгебраических тождеств не зависели от конкретных размеров величин, для которых они устанавливались, в частности от того, были ли эти величины соизмеримы или нет.

В геометрической алгебре были выведены первые общие правила и доказаны некоторые свойства алгебраических операций; ее средствами были решены в общем виде некоторые классы квадратных уравнений.

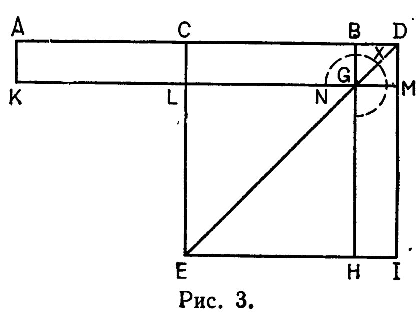


Рис. 3.

1. В этом предложении доказывается закон дистрибутивности умножения по отношению к сложению:

если стороны прямоугольника обозначить через a и b и рассечь a на части $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то

$$ab=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,b=a_1b+a_2b+\ldots+a_nb.$$

2. Как легко видеть, в этом предложении доказывается правило, выражаемое для положительных a и b формулой

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$$

Доказательство не зависит ни от длины отрезков a и b, ни от того, будут ли они соизмеримы.

3. В предложениях 5 и 6 выводятся тождества, которые служили для решения двух типов квадратных уравнений:

$$x(a-x)=s \text{ (эллиптический тип)} \qquad (1)$$

$$x(a+x)=s \text{ (гиперболический тип).} \qquad (2)$$

Древние формулировали соответствующие задачи геометрически в терминах «приложения площадей». Задача, отвечающая уравнению (1), ставилась так: «приложить» к данному отрезку (a) данную площадь (S) так, чтобы «недостаток» был квадратом. Пусть (см. рис. 2) $AB=a$; заданную площадь S прикладываем так, чтобы «недостаток» $DBB'D'$ был квадратом, т. е. если обозначить $DB=x$, то получим $(a-x)\,x=S$. Аналогично в задаче, отвечающей уравнению (2), требовалось приложить S так, чтобы «избыток» $BDD'B'$ был квадратом (см. рис. 3).

Евклид доказывает, что

$$AD\cdot DB=BC^2-CD^2 \qquad \text{(предл. 5)}$$

и

$$AD\cdot BD=CD^2-CB^2, \qquad \text{(предл. 6)}$$

или, в современных обозначениях:

$$S=x\,(a-x)=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2 \qquad \text{(предл. 5)}$$

$$S=x\,(a+x)=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad \text{(предл. 6)}$$

После такого преобразования произведения в разность квадратов отрезки $\frac{a}{2}-x$, или, соответственно, $\frac{a}{2}+x$, можно построить по теореме Пифагора (любую прямолинейную площадь S древние умели преобразовывать в квадрат $S=b^2$).

Заметим, что в случае эллиптического уравнения, положительный корень будет существовать тогда и только тогда, когда $b^2=S\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Евклид устанавливает это общим образом в VI книге, где построения 28-го и 29-го предложений соответствуют решению более общих уравнений:

$$\frac{\alpha}{\beta}\,x\,(a-x)=S, \qquad (1')$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\,x\,(a+x)=S. \qquad (2')$$

3. НАЧАЛО БУКВЕННОЙ АЛГЕБРЫ

ИЗ I КНИГИ «АРИФМЕТИКИ» ДИОФАНТА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО (ВЕРОЯТНО, СЕРЕДИНА III в. н. э.)

[№ 74, с. 1—14; перевод И. Г. Башмаковой и И. Н. Веселовского.]

Как ты знаешь, все числа состоят из некоторого количества единиц; очевидно, что они продолжаются, увеличиваясь до бесконечности **(1)**. Так вот, среди них находятся

квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа само на себя; это же число называется стороной квадрата,

затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их стороны,

далее квадрато-квадраты от умножения самих на себя квадратов,

далее квадрато-кубы, получающиеся от умножения квадрата на куб его стороны,

далее кубо-кубы от умножения кубов самих на себя.

Из них при помощи сложения, вычитания, умножения или нахождения отношения между собой, или каждого с собственной стороной, составляются многочисленные арифметические задачи; и они будут решены, если ты будешь следовать указанному далее пути.

(II). Было принято, что каждое из этих чисел, получившее более краткое наименование, становится элементом арифметической теории; так, квадрат называется «динамис» и обозначается знаком Δ с индексом Υ: Δ^{Υ} — *δύναμις*.

Куб обозначается знаком К с индексом Υ: K^{Υ} — *κύβος*.

Квадрат, умноженный на себя, —квадрато-квадрат; его знаком будет две дельты с индексом Υ: $\Delta\Upsilon\Delta$ — *δυναμοδύναμις*.

Квадрат, умноженный на куб собственной стороны, — квадрато-куб; его знак ΔК с индексом Υ: ΔK^{Υ} — *δυναμοκύβος*.

Куб, умноженный на самого себя, — кубо-куб; его знак две каппы с индексом Υ: $K^{\Upsilon}K$ — *κυβόκυβος*.

То же, что не приобрело никакого из этих названий, но состоит из неопределенного количества единиц, называется числом (ἀριθμὸς); и его знаком будет ς.

Есть еще другой знак для определенного и постоянного — единица (ἡμονὰς); и его знаком будет М с индексом о, $\overset{\circ}{M}$ **(2)**.

(III). Подобно тому как для чисел одноименные части получают названия, схожие с этими числами, например для трех будет треть, для четырех — четверть, так и теперь для вышеназванных чисел подобноименные части получают названия, соответствующие этим числам:

для числа (ἀριθμὸς) — арифметическая
для квадрата — квадратичная
для куба — кубическая
для квадрато-квадрата — квадрато-квадратичная
для квадрато-куба — квадрато-кубичная
для кубо-куба — кубо-кубичная

И каждая из них над знаком подобноименного числа будет иметь линии × для различения вида **(3)**.

(IV). Изложив тебе названия каждого из этих чисел, я перейду к их умножению; это будет для тебя очевидным, так как названия тебе уже объяснены.

Число, умноженное на число, производит квадрат

на квадрат — куб

. . . . **(4)**.

(V). Всякое число, умноженное на одноименную ему часть, производит единицу.

(VI). Так как единица есть и будет всегда неизменной, то умноженный на нее вид останется тем же видом **(5)**.

(VII). Подобные части, умноженные друг на друга, образуют части, подобноименные числам.

. . . . **(6)**.

(IX). Недостаток (λεῖψις), умноженный на недостаток, дает наличное (ὕπαρξις); недостаток же, умноженный на наличное, дает недостаток; знак же для недостатка Ψ, укороченное и опрокинутое вниз ⋔ **(7)**.

(X). После того как тебе объяснено умножение, становится ясным и деление упомянутых видов; и тому, кто приступает к этому трактату, было бы хорошо поупражняться в сложении, вычитании и умножении этих видов, а также в том, как наличные и недостающие (ὑπάρχοντα καὶ λείποντα) виды, взятые с различными коэффициентами, прибавить к другим видам, также наличным или недостающим, и как от наличных и недостающих видов отнять другие наличные или также наличные и недостающие **(8)**.

(XI). Затем если из какой-нибудь задачи проистекает равенство некоторых видов таким же видам, но с различными коэффициентами, то от обеих частей ⟨равенства⟩ ты должен будешь вычитать подобные от подобных, пока не получится один вид, равный одному виду. Если же в одной из частей или в обеих частях содержатся какие-нибудь недостающие виды, то ты должен прибавлять к обеим частям недостающие виды, пока в обеих частях все виды не будут наличными, а затем вычитать подобные от подобных, пока в каждой части не останется по одному виду.

Применяй это искусно к предложениям, если это возможно, пока не останется один вид, равный также одному виду; потом мы покажем тебе, как решается случай, когда остаются два вида, равные одному **(9)**.

П р и м е ч а н и я. До нас дошло 6 из 13 книг «Арифметики» Диофанта. Это сочинение явилось поворотным пунктом в развитии алгебры: оно знаменует начало создания буквенного исчисления. Во «Введении», отрывок из которого приведен, Диофант строит основы новой алгебры: он отказывается от геометрической интерпретации алгебраических операций, вводит символы для первых шести степеней неизвестного и обратных им величин, а также другие алгебраические обозначения, формулирует ряд общих правил действий с многочленами и уравнениями и т. д.

«Арифметика» Диофанта оказала большое влияние на развитие алгебры и теории чисел (см. ч. II, п. 2) XIII—XVII вв., где с нею познакомились прежде всего через посредство науки Византии и стран арабского Востока (первое латинское издание «Арифметики» вышло только в 1575 г.).

Разделение текста на пункты, помеченные латинскими цифрами, принадлежит П. Таннери, по изданию которого сделан наш перевод; другой перевод — № 24а, с. 37—41

1. Диофант приводит традиционное определение числа как множества единиц. Однако впоследствии числом (ἀριθμός) он называет любое положительное рациональное число как целое, так и дробное.

2. В пункте II вводятся символы для шести первых степеней неизвестного. Для обозначения неизвестного Диофант применяет символ ς, происхождение которого не вполне ясно. По-видимому, это концевая сигма, которая не имела числового значения (обычная сигма σ обозначала число 200). Этот символ употреблялся и до Диофанта. Так, его вариации встречаются в «Геометрии» Герона (I в.н.э.), а также в Мичиганском греческом папирусе (II в.н.э.).

Для обозначения 3-й и 2-й степеней неизвестного Диофант применяет первые буквы соответствующих названий, а последующие степени им образуются по аддитивному принципу (сложения показателей степеней).

Почти одновременно во «Введении в арифметику» Анатолия Александрийского (III в.н.э.) появились обозначения степеней неизвестного по мультипликативному принципу: «квадрато-куб» обозначал в этой системе 6-ю степень, а «кубо-куб» — 9-ю. Зато 5-я степень не могла быть образована из предыдущих; она называлась «первой невыразимой» (ἄλογος πρῶτος), 7-я степень — второй невыразимой (ἄλογος δεύτερος) и т. д. Эта номенклатура для степеней неизвестного дошла до нас в передаче Михаила Пселла, византийского ученого XI в. Этот неудобный способ обозначения был воспринят математиками Индии и частью ученых средневекового Востока и Европы. В частности, по такому принципу образовывали степени неизвестного коссисты. В Европе аддитивный принцип образования степеней был впервые применен Леонардом Пизанским (начало XIII в.).

В этом же пункте вводится символ единицы $\overset{\circ}{\text{M}}$. В дальнейшем Диофант всегда пишет этот знак перед константами.

3. Здесь вводятся величины, обратные степеням неизвестного $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^6}\right)$. Для их обозначения применяется косой крест $\times$, который ставится справа сверху вслед за индексом. Например, x^2 обозначается Δ^{Υ}, а $\frac{1}{x^2}$ через $\Delta^{\Upsilon\times}$.

4. Далее формулируются правила перемножения степеней $x^m \cdot x^n$, $m+n \leqslant 6$.

5. В пунктах V и VI Диофант формулирует два общих утверждения относительно видов, т. е. степеней неизвестного:

а) Любое число, умноженное на одноименную с ним дробь, дает единицу:

$$x^m \cdot \frac{1}{x^m} = 1.$$

б) Любой вид при умножении на единицу остается неизменным:

$$x^n \cdot 1 = x^n.$$

Можно сказать, что здесь Диофант выделяет два чисто групповых свойства операции умножения.

6. Далее формулируются правила перемножения величин: $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^n}$ $(n \leqslant 5)$ и $\frac{1}{x^m} \cdot x^n$ $(m,\ n \leqslant 6$, причем $m \neq n)$.

7. Перевод и истолкование терминов λεῖψις и ὕπαρξις представляют большие трудности. Первое слово является специальным термином и в обычных словарях отсутствует. Оно произведено от глагола «λεῖπω», одним из значений которого является «недоставать», «не хватать», и мы в своем переводе остановились на значении «недостаток». Второе слово (которое далее в «Арифметике» не употребляется) обозначает буквально «существование», «бытие», а во множественном числе — «имущество». Мы передаем его словом «наличное». Для сравнения приведем переводы соответствующих терминов на латинский язык в издании «Арифметики» Диофанта Поля Таннери: λεῖψις — minus, ὕπαρξις — plus.

Что касается смысла «недостатка» и «наличного», то многие историки математики понимают под ним вычитаемые и прибавляемые члены алгебраических многочленов и соответственно трактуют правила умножения. Автор этих примечаний считает, что Диофант здесь оперирует с отрицательными и положительными числами, причем вводит отрицательные числа, формулируя для них «правило знаков»:

$$(-)\cdot(-)=(+)$$
$$(-)\cdot(+)=(-).$$

Правила знаков при сложении и вычитании (которые обозначаются с помощью слов, производных от глагола ἀφαιρέω — отнимать) не даются. По-видимому, Диофант считал, что они ясны без специальных пояснений.

Отметим, что в случаях, когда надо вычесть из обеих частей уравнения отрицательные члены, Диофант говорит о «прибавлении недостающих», т. е. терминология у него здесь отлична от нашей. Для характеристики «недостающего» числа вводится символ ⋔, отвечающий нашему минусу.

На протяжении всех шести книг Диофант широко пользуется недостающими (или отрицательными) числами, применяя их в промежуточных выкладках и в качестве промежуточных результатов. Так, например, в задачах 12, 13, 20, 23, 28, 29 и 32 книги II стороны квадратов, которым должны быть равны левые части уравнений, при выбранных числовых параметрах получаются отрицательными. Это не смущает Диофанта, потому что окончательный результат будет положительным.

Диофант еще не рассматривал отрицательные числа как равноправные положительным. Решения обязательно должны быть положительными. Эту точку зрения восприняли Виет, Ферма и другие математики XVI—XVII вв.

8. Для обозначения операций сложения и умножения у Диофанта нет специальных символов. Все члены многочлена, которые должны быть сложены, просто приписываются друг к другу, после чего ставится знак минус и записываются все отрицательные члены. При этом сначала записывается степень неизвестного, а затем числовой коэффициент. Свободный член (т. е. x^0) характеризуется символом $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ — это первые две буквы слова μοναϛ — единица. Например, многочлен $202x^2+13-10x$ записывается так: $\Delta^{\upsilon}\overline{\sigma\beta}\overset{\circ}{\mathrm{M}}\overline{\iota\gamma}$⋔$\varsigma\overline{\iota}$.

Здесь $\overline{\sigma\beta}=202$, $\overline{\iota\gamma}=13$, $\overline{\iota}=10$.

Кроме перечисленных символов, Диофант применяет еще знак □ для неопределенного квадрата и знак ἴσ — первые буквы слова ἴσος — равно, для знака равенства.

9. В пункте XI даны правила действий с многочленами и уравнениями. В частности, формулируется правило приведения подобных:

$$ax^n+bx^n=(a+b)\,x^n$$

и правило прибавления к обеим частям уравнения одного и того же числа или вида. Оба эти правила получили впоследствии известность под арабизированными названиями «алджебр» и «альмукабалы» (см. ч. I, п. 5).

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА В ДРЕВНЕМ КИТАЕ

ИЗ «МАТЕМАТИКИ В ДЕВЯТИ КНИГАХ» *(между III в. до н.э. и I в. н.э.)*

[№ 34, с. 498—499.]

Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу **(1)** [зерна]. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу [зерна]. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу [зерна]. Спрашивается, сколько [зерна] получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая **(2)**.

Ответ: из 1 снопа хорошего урожая $9\frac{1}{4}$ доу,
из 1 снопа среднего урожая $4\frac{1}{4}$ доу,
из 1 снопа плохого урожая $2\frac{3}{4}$ доу.

[Правило] «фан-чэн»

Правило: расположи 3 снопа хорошего урожая, 2 снопа среднего урожая, 1 сноп плохого урожая, составляющие [их] 39 доу [зерна] с правой стороны. [Расположи] посредине и слева [количества снопов] урожаев в таком же порядке, как и с правой стороны **(3)**. [Числа] среднего столбца умножь на [количество снопов] хорошего урожая в правом столбце и образуй остатки. И еще раз так же образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до [количества снопов] среднего урожая в среднем столбце **(4)**. И снова образуй остатки до тех пор, пока не исчерпается все до [количества снопов] плохого урожая в левом столбце **(5)**. Верхнее [число] есть делитель, нижнее [число] есть делимое, делимое для [искомого количества] снопов плохого урожая **(6)**. [Чтобы] найти [делимое] для среднего урожая, нижнее составляющее среднего столбца умножь на делитель и вычти делимое из плохого урожая. Остаток объедини **(7)** с количеством снопов среднего урожая, это и будет делимое для среднего урожая (8). [Чтобы] найти [делимое] для хорошего урожая, нижнее составляющее [количество] правого столбца также умножь на делитель, исключи делимые для плохого урожая и среднего урожая (9), объедини остаток с количеством снопов хорошего урожая, это и будет делимое для хорошего урожая (10). Все делимые объедини с делителем, получатся [искомые количества] в доу.

[Там же, с. 500 (11).]

2 снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько [зерна] получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая (12).

Ответ: из 1 снопа хорошего урожая получили $\frac{9}{25}$ доу,

из 1 снопа среднего урожая получили $\frac{7}{25}$ доу,

из 1 снопа плохого урожая получили $\frac{4}{25}$ доу.

Правило: составь таблицу «фан-чэн», установи для каждого то, чего не хватает. По способу «чжэн-фу» вычисляй (13).

Правило «чжэн-фу»: если одинакового названия, то вычитается; если разного названия, то прибавляется; если положительное без пары, то [становится] отрицательным; если отрицательное без пары, то [становится] положительным (14). Если разного названия, то вычитается; если одинакового названия, то прибавляется; если положительное без пары, то [становится] положительным; если отрицательное без пары, то [становится] отрицательным (15).

Примечания. В восьмой книге анонимной древнекитайской «Математики в девяти книгах» изложено правило решения системы n линейных уравнений с n неизвестными «фан-чэн», по существу, совпадающее с методом Гаусса. Своеобразие метода составляет техника вычислений, проводившихся на специальной счетной доске.

Пользуясь современной терминологией, можно сказать, что, решая систему

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\},$$

китайский математик рассматривал матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{n1} & \ldots & a_{21}a_{11} \\ a_{n2} & \ldots & a_{22}a_{12} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{nn} & \ldots & a_{2n}a_{1n} \\ b_n & \ldots & b_2\ b_1 \end{pmatrix}$$

При этом правильное расположение чисел (коэффициентов и свободных членов) на счетной доске заменяло ему буквы и индексы современной символики («фан-чэн» в буквальном переводе означает выстраивание чисел по клеткам). Далее, посредством операций (о которых см. примечание 5) он преобразовывал эту матрицу к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} \\ 0 & \dots & \bar{a}_{22} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{nn} & \dots & \bar{a}_{2n} & a_{1n} \\ \bar{b}_n & \dots & \bar{b}_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

и из полученной таблицы определял x_n, а затем и другие неизвестные.

Метод «фан-чэн» довольно близок к методу решения систем с помощью определителей. Однако между обоими методами существует принципиальное различие. Несмотря на то что на таблице оперировали с отвлеченными числами, связь таблицы с системой уравнений была очень сильна. Для получения определителей было необходимо отделить от таблицы строку из свободных членов, сделать строки и столбцы равноправными и т. д. В 1683 г. японский математик Секи Кова Шинсуке усовершенствовал метод «фан-чэн» до метода определителей, однако его исследования, как и сам метод «фан-чэн», остались тогда неизвестными в Европе, где первые ростки теории определителей появляются в конце XVII в. у Г. В. Лейбница [см. ч. I, п. 12] [№ 30[.

1. Доу — мера объема.

2. Если обозначить количество зерна в снопах хорошего, среднего и плохого урожая соответственно x_1, x_2, x_3, то задача выражается системой

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=39, \\ 2x_1+3x_2+x_3=34, \\ x_1+2x_2+3x_3=26. \end{cases}$$

3. В результате получается таблица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}.$$

Такое расположение коэффициентов уравнения в таблице, отличное от современного

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}$$

является естественным при китайском способе письма: сверху вниз, справа налево.

4. Важно отметить, что числа, с которыми производятся действия, здесь называются аналогично тому, как мы бы назвали их, обозначая индексами: «[числа] среднего столбца умножь на [количество снопов] хорошего урожая в правом столбце» и т. д., но не умножь, скажем, 2, 3, 1, 34 на 3.

Таким образом, излагаемое здесь правило приобретает полную общность.

5. Соответствующие преобразования таблицы выглядят так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 34 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 34 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}.$$

Следует заметить, что знака для изображения нуля не было, и на счетной доске ему соответствовало пустое место в соответствующей клетке.

6. Итак, $x_3=\frac{99}{36}$.

7. Термин «объединить a и b» в данном случае означает, что, после того как на счетной доске получены числа a и b, из них следует составить одно (объединить) — число $\frac{a}{b}$.

8. «Делимое» для x_2 («делитель» постоянный для всех x_i, это — 36). Это число $\frac{36\cdot 24-99}{5}=A$.

9. Здесь неточность. Следует читать: удвоенного среднего урожая

10. Делимое для x_3 есть $\frac{36\cdot 39-99-2A}{3}$.

11. Последовательное применение метода «фан-чэн» во всех задачах на системы линейных уравнений должно было привести китайских математиков к отрицательным числам, поскольку алгоритм преобразования таблицы к треугольному виду требовал вычитания из меньших чисел бóльших, из «ничего» каких-либо чисел. В результате появились числа «фу», отличные от обыкновенных (положительных) чисел «чжэн». Отсюда название заключающего текст правила «чжэн-фу». Числа «фу» выделялись на счетной доске палочками другого цвета или формы, а в книгах записывались другими чернилами или отмечались косой чертой. Для этих чисел, как следует из приведенного отрывка, определены были правила сложения и вычитания. Умножение и деление чисел «фу» в «Математике в девяти книгах» не рассматривается.

Китайские математики не ограничились формальным введением чисел «фу», но и предложили их трактовку как долга или недостачи и вообще обращались с ними весьма свободно: отрицательными могли быть не только числа, возникающие в промежуточных вычислениях, но и начальные элементы столбцов таблицы «фан-чэн» и свободные члены уравнений.

12. В современной записи эта задача сводится к системе:

$$\begin{cases} 2x_1=1-x_2, \\ 3x_2=1-x_3, \\ 4x_3=1-x_1. \end{cases}$$

13. Соответствующая задаче таблица «фан-чэн» будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Преобразование таблицы, состоящее в вычитании элементов третьего столбца из удвоенного первого, приводит к необходимости вычесть из «ничего» единицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому в решении этой задачи формулируются правила сложения и вычитания отрицательных чисел — правила «чжэн-фу».

14. Это правило вычитания:

$$\begin{gathered} (\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b), \\ (\pm a)-(\mp b)=\pm(a+b), \\ 0-(+b)=-b, \\ 0-(-b)=+b. \end{gathered}$$

15. Здесь дано правило сложения:

$$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b),$$
$$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b),$$
$$0+(+b)=+b,$$
$$0+(-b)=-b.$$

5. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА НА АРАБСКОМ ВОСТОКЕ И В ИНДИИ

а. ДЕСЯТИЧНАЯ ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА НУМЕРАЦИИ

ИЗ ТРАКТАТА «ОБ ИНДИЙСКОМ СЧЕТЕ» МУХАММЕДА АЛ-ХОРЕЗМИ (IX в.)

[№ 52, с. 9.]

Сказал Алгоризми (1): Когда увидел я, что индийцы составляли из .IX. букв (2) любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно Богу, что получается из этих букв для облегчения изучающему.

[Там же, с. 9.]

Итак, они создали .IX. букв, фигуры которых такие (3)... В фигурах их имеются также различия у разных людей (4): такое различие бывает в фигуре буквы пять и шесть, а также семь и восемь. Но в этом нет никакой помехи. Ведь это знаки, выражающие число, а фигуры, в которых имеются различия, следующие...

[Там же, с. 10—11.]

Я нашел, говорит Алгоризми, все, что можно назвать из чисел, т. е. все, что сверх единицы и до .IX., т. е. то, что есть между .XI. и единицей, т. е. удваивается единица и будет два, утраивается та же единица и будет три, и так далее до .IX.. Затем ставится .X. на место единицы и удваивается .X. и утраивается, как это делалось с единицей, и получается из их удвоения .XX., из утроения .XXX., и так до .XC.. Затем следует .C. на место единицы и удваиваются там и утраиваются, как это делалось с единицей и .X., и получается из них .CC., .CCC., и так далее до .DCCCC. Далее ставятся тысячи на место единицы, и удвоением и утроением, как мы говорили, получаются из них таким же образом .II.тысячи, .III. тысячи и далее до бесконечного числа. И я нашел,какие действия производили индийцы с этими разрядами. Из них первый — это разряд единиц, в котором удваивается все, что стоит между единицей и .IX. . Второй — разряд десятков, в котором удваивается и утраивается все, что от .X. до девятнадцати. Третий — разряд сотен, в котором удваивается и утраивается все, что от .C. до .DCCCC. Четвертый же разряд тысяч, в котором удваивается и утраивается все, что от тысячи до .IX.M. (5). Пятый разряд .X. (6). Таким образом, всякий раз, когда возрастает число, прибавляются разряды, и будет расстановка числа такая: всякая единица, какая была в высшем разряде, будет в низшем, который перед ним, .X., а что было в низшем .X. , будет единицей в высшем, который предшествует ему. Начало разрядов будет справа от пишущего, и это будет первый из них, и состоит он из единиц. Если же они ставили .X. вместо единицы, и были они во втором разряде, и была их фигура фигура единицы, то была необходима им фигура десятков, подобная фигуре единицы, чтобы было известно из нее, что это .X. . Итак, они ставили перед нею один разряд и ставили в нем маленький кружок, наподобие o, чтобы по нему знали, что разряд единиц пуст и что нет в нем никакого числа, кроме маленького кружка, который, как мы говорили, его занимает. И этим показано, что число, которое стоит в следующем разряде, будет десятки и что это второй разряд, т. е. разряд десятков.

. . . .

Следует, однако, иметь в виду, что цифра, означающая в первом разряде единицу, во втором означает .X. , в третьем .C. , в четвертом .M. .

[Там же, с. 11.]

После разряда десятков следует разряд сотен, в котором удваивается и утраивается все, что есть от .C. до .DCCCC. и фигура сотни такая, как фигура единицы, поставленная в третьем разряде, т. е. .100., фигура двухсот такая, как фигура двух, поставленная точно так же в третьем разряде, т. е. .200. , фигура трехсот также есть фигура трех, поставленная в третьем разряде, т. е. .300. , и так дальше до девятисот. За этим следует разряд тысяч, в котором таким же образом удваивается и утраивается все, что от тысячи до .IX. . Фигура ее как фигура единицы, поставленная в четвертом разряде, т. е. .1000. , фигура двух тысяч такая, как фигура двух, поставленная в четвертом разряде, т. е. .2000. , и так дальше до .IX. тысяч. В четвертом разряде перед цифрой ставятся три кружка, чтобы показать, что это в четвертом разряде, точно так же, как во втором разряде ставится один кружок, а в третьем два, чтобы показать, что это разряды десятков и сотен. Так происходит, когда перед самим числом нет еще другого числа в том же разряде. Если же с числом, которое ставится в этих разрядах, имеется еще другое число ниже его, оно должно ставиться в том разряде, который ему причитается.

Например, если имеется с .X. какое-нибудь число из тех, которые ниже его, допустим .XI. или .XII. , ставится так: 11, т. е. в первом разряде, где стоял кружок, ставится единица, а во втором разряде ставится также единица, которая означает .X. ... То же самое будет в других разрядах в том же порядке, т. е. сколько бы ни прибавлялось число и ни возрастали разряды, ставится каждый род числа в своем разряде, какой ему причитается. Если же в каком-нибудь разряде собралось .X. или больше, то они выдвигаются в высший разряд, и будет из каждых .X. в высшем разряде единица.

[Там же, с. 13.]

Если ты хочешь прибавить число к числу или отнять число от числа, поставь оба числа в два ряда, то есть одно под другим, и пусть будет разряд единиц под разрядом единиц и разряд десятков под разрядом десятков. Если захочешь сложить оба числа, то есть прибавить одно к другому, а именно прибавишь каждый разряд к разряду того же рода, который над ним, то есть единицы к единицам, десятки к десяткам. Если в каком-нибудь из разрядов, то есть в разряде единиц или десятков или каком-нибудь другом, соберется десять, ставь вместо них единицу и выдвигай ее в верхний ряд, то есть если ты имеешь в первом разряде, который есть разряд единиц, десять, сделай из них единицу и подними ее в разряд десятков, и там она будет означать десять. Если от числа осталось что-нибудь, что ниже десяти, если само число ниже десяти, оставь его в том же разряде. А если ничего не останется, поставь кружок, чтобы разряд не был пуст; но пусть будет в нем кружок, который займет его, чтобы не случилось так, что если он будет пуст, разряды уменьшатся и второй будет принят за первый, и так ты обманешься в своем числе. То же самое ты сделаешь во всех разрядах (7).

Примечания. Система счисления, которой мы в основном пользуемся сегодня, десятичная позиционная. Десятичная, так как числа представляются в ней суммой числа единиц (до 10), десятков (до 100), сотен (до 1000) и т. д. Позиционная, так как значимость каждой цифры (а их у нас десять — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) зависит от положения (позиции), которое занимает эта цифра в записи числа.

Десятичной позиционной предшествовали другие, основанные на различных принципах, системы счисления. Так примером непозиционной системы может служить нумерация, используемая древними греками. Эта система относится к числу алфавитных. Первыми восемью буквами греческого алфавита (с добавлением «архаичной» буквы ϛ=вау, имевшей значение 6) обозначались числа от единицы до девяти, следующими восемью с добавлением ϙ=коппы, имевшей значение 90, — десятки от 10 до 90, следующими восемью с добавлением ϡ=сампи, означавшей 900, — сотни от 100 до 900, наконец, тысячи от 1000 до 9000 обозначались так же, как единицы, но со штрихом внизу: ͵α означала 1000. Для того чтобы отличать числа от слов, над ними ставилась черточка. Так, число 1305 греки записывали $͵\overline{\alpha\tau\varepsilon}$. От греческой нумерации ведет свое происхождение древнерусская. Пример другой непозиционной системы дает употребляемая поныне римская нумерация.

Основные недостатки непозиционных систем нумераций — трудности с изображением произвольно больших чисел и, главное, более сложный, чем в позиционных системах, процесс вычислений. (Последнее, правда, облегчалось употреблением счетных досок — абаков, так что изображение чисел было необходимо лишь для обозначения конечного результата.)

Крупным шагом вперед, оказавшим колоссальное влияние на все развитие математики, было создание позиционных систем счисления. Первой такой системой стала вавилонская шестидесятеричная система счисления (см. 1,б), в которой появился знак , указывающий на отсутствие разряда, выполняющий роль нашего нуля. Концевой нуль, который позволял различать, например, обозначения для 1 и 60, у вавилонян отсутствовал. Удобство вычислений в шестидесятеричной системе сделало ее популярной у греческих астрономов. К. Птолемей (II в. н. э.) при вычислениях в шестидесятеричной системе пользуется знаком «0» для обозначения отсутствующих разрядов как в середине, так и в конце числа (0, омикрон — первая буква греческого слова ovden — ничто). О вавилонской шестидесятеричной системе нам напоминает деление часа на 60 минут и минуты на 60 секунд, а также деление угла, равного четырем прямым, на 360 градусов. Неудобство шестидесятеричной системы счисления в сравнении с десятичной — необходимость большого количества знаков для обозначения индивидуальных цифр (от 0 до 59), более громоздкая таблица умножения.

Создание десятичной позиционной системы счисления, одного из выдающихся достижений средневековой науки, — заслуга индийских математиков. Позиционные десятичные записи чисел встречаются в Индии с VI в. Так, в дарственной записи 595 г. встречается запись числа 346 цифрами брахми — ≡Ұφ (≡ — 3, Ұ — 4, φ — 6). Первую достоверную запись нуля в виде кружочка мы находим в изображении числа 270 в настенной записи из Гвалиора, относящейся к 876 г. Иногда нуль обозначали точкой. Неясно, был ли нуль собственным изобретением индийцев; возможно, они познакомились с ним по сочинениям александрийских астрономов.

Большое количество пробелов в дошедших до нас материалах не позволяет точно проследить эволюцию цифр до XI в. Несомненно, что на рубеже VIII—IX вв. в арабском халифате уже получает первое распространение десятичная позиционная система (об эволюции написания индийских цифр см. таблицу). Древнейший дошедший до нас памятник, в котором рассматривается эта система, — руководство по индийскому счету Мухаммеда ал-Хорезми (787 — ок. 850), дошел до нас в латинском переводе XII в., и притом в списке XIV в. Перевод был сделан, вероятно, Герардо из Кремоны или Аделардом из Бата. Рукопись названия не имеет. Общепринятое сегодня наименование дано трактату на основании слов первого абзаца.

1. Транскрипция прозвища — «нисбы» — багдадского математика и астронома Мухаммеда ибн Муса — ал-Хорезми. Это прозвище указывает, что Мухаммед ибн Муса или его предки были родом из Хорезма. От латинизированной формы этого прозвища (Algorismus или Algorithmus) произошло наше слово «алгоритм» — обозначение всей системы десятичной позиционной арифметики. Впоследствии термин «алгоритм» приобрел значение регулярного вычислительного процесса, дающего решение (в конечное число шагов) некоторого класса задач.

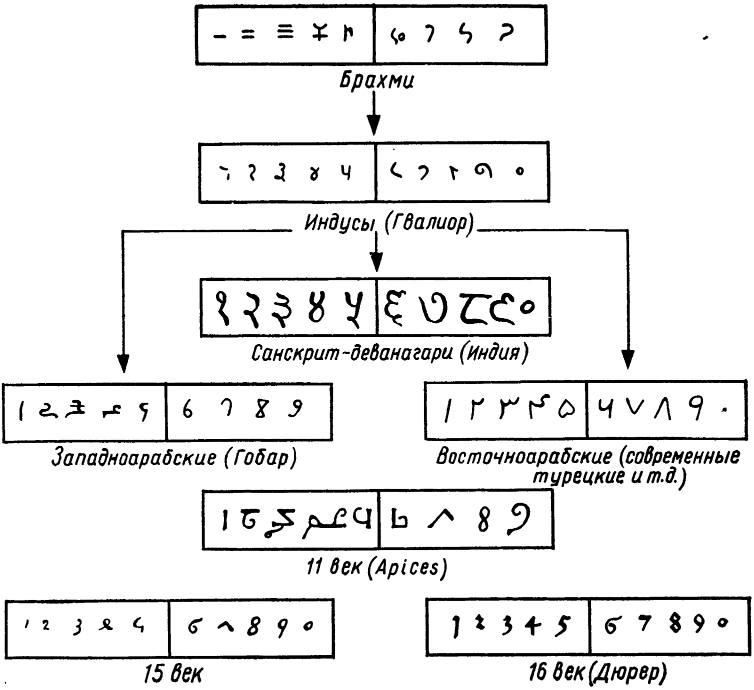
2. В рукописи почти все числа записаны общеупотребительными в это время в Европе римскими цифрами. Разумеется, в арабском первоисточнике на их месте стояли индийские цифры либо соответствующие числительные.

3. В рукописи обозначения индийских цифр в данном месте отсутствуют; в дальнейшем встречаются только цифры, обозначающие 1, 2, 3 и 5.

4. Разнобой в записи цифр препятствовал их распространению в Европе, ибо способствовал возможности производить подделки в денежных документах.

5. .IX.M. — своеобразная мультипликативная запись числа 9000.

6. Имеется в виду 10 000.



7. Далее в трактате подробно описаны вычитание, умножение, деление, извлечение корня, а также операции удвоения и раздвоения чисел с помощью индийских цифр.

Знакомство начиная с XII в. с трактатом ал-Хорезми, а также с переводами ряда других арабских книг по арифметике имело решающее значение для принятия в Европе десятичной позиционной системы нумерации и новых цифр. Европейские ученые быстро оценили удобство записи чисел и действий над ними в новой системе. Уже в XIV в., несмотря на яростное сопротивление абацистов (так именовались противники нового счета в противоположность алгоритмикам — его приверженцам), новая арифметика приобрела широкое распространение в европейском ученом мире; распространение новых цифр в быту шло гораздо медленнее. О распространении десятичного позиционного принципа на запись дробей см. № 6д.

6. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

ИЗ «КРАТКОЙ КНИГИ ОБ ИСЧИСЛЕНИИ АЛГЕБРЫ И АЛМУКАБАЛЫ» МУХАММЕДА АЛ-ХОРЕЗМИ

[№ 52, с. 26.]

...Я составил краткую книгу об исчислении алгебры и алмукабалы (1), заключающую в себе простые и сложные вопросы арифметики, ибо это необходимо людям при дележе наследств, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, инженерном искусстве и прочих разновидностях подобных дел.

[**Там же, с. 27—28 (2).**]

Что касается квадратов и корней, равных числу, то если, например, ты скажешь: квадрат и десять его корней равны тридцати девяти дирхемам (3), то это означает, что если добавить к некоторому квадрату то, что равно десяти корням, получится тридцать девять. Правило таково: раздвой [число] корней, получится в этой задаче пять, умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Прибавь это к тридцати девяти, будет шестьдесят четыре. Извлеки из этого корень, будет восемь, и вычти из этого половину [числа] корней, т. е. пять, останется три: это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат есть девять (4).

[**Там же, с. 30—31.**]

Имеется ... чертеж, передающий смысл этого. Это плоская фигура *AB*, являющаяся квадратом. Мы хотим прибавить к ней равное десяти ее корням. Для этого раздваиваем десять [корней], получается пять, строим [полученные] две плоские фигуры на двух сторонах фигуры *AB*, это будут фигуры *C*, *D*, причем длина каждой из этих фигур — пять, т. е. половина десяти корней, а ширина их равна стороне фигуры *AB*. У нас осталась квадратная фигура в одном из углов фигуры *AB* [размерами] пять на пять, а [пять] — половина десяти корней, построенных на сторонах первой фигуры. Мы знаем, что первая фигура — квадрат и что две фигуры на его сторонах составляют десять корней. Все это вместе составляет тридцать девять. До полной самой фигуры остается квадратная фигура [размерами] пять на пять, т. е. двадцать пять. Прибавим это к тридцати девяти, чтобы дополнить большую фигуру, т. е. фигуру *GE*. Все это вместе составляет шестьдесят четыре. Извлечем корень, это восемь. Это одна сторона самой большой фигуры. Если мы вычтем из нее равное тому, что мы прибавляли, т. е. пять, останется три. Эта сторона фигуры *AB*, являющейся квадратом, т. е. корень, а квадрат его есть девять (5). Вот чертеж этого (рис. 4).

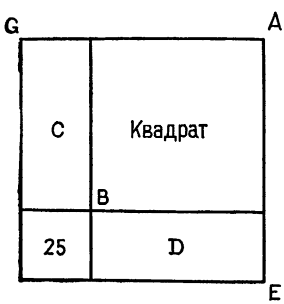


Рис. 4.

Примечания. Алгебраический трактат багдадского математика и астронома Мухаммеда бен Муса ал-Хорезми — первое дошедшее до нас, а может быть, и вообще первое сочинение по алгебре на арабском языке. Ближайшие предшественники ал-Хорезми в алгебре неизвестны; несомненно, что он продолжал математические традиции, издавна существовавшие на территории Багдадского халифата и включавшие элементы как греко-эллинистической, так и восточной науки. Данное сочинение ал-Хорезми—отправное в развитии алгебры во всем арабском мире, а затем, благодаря переводу в XII в. на латынь, в Западной Европе; такую же роль сыграл его арифметический трактат в распространении десятичной позиционной нумерации, восходящей к индийской математике.

1. Термин «ал-джебр» (откуда слово «алгебра») обозначал «восполнение»—одну из операций приведения уравнения к канонической форме, а именно исключение из обеих частей уравнения вычитаемых членов (путем добавления противоположных по знаку). Ал-мукабала, или «противопоставление»,—последующая операция сокращения в частях уравнения одинаковых членов. Канонические виды содержали в обеих частях только члены с положительными коэффициентами, причем рассматривались лишь положительные корни.

(О термине «алгебра» см. также ч. I, п. 14.)

2. Ал-Хорезми рассматривает шесть видов уравнений:

1) $ax^2=bx$, 2) $ax^2=c$, 3) $bx=c$,

4) $ax^2+bx=c$, 5) $ax^2+c=bx$, 6) $bx+c=ax^2$.

Алгебраической символики он, как и другие математики Арабского Востока, не применяет, и все уравнения и преобразования записывает словесно. Мы приводим правило решения уравнения 4-го вида и его геометрическое доказательство.

3. Дирхем (от греческого—драхма)—денежная единица; здесь это просто единица. Уравнение $x^2+10x=39$ обошло все средневековые руководства алгебры. Второй корень—13 у ал-Хорезми, естественно, не появляется.

4. Правила поясняются на примерах, но формулируются общим образом.

5. Как видно, доказательство также имеет общий характер, хотя и проведено на примере уравнения $x^2+10x=39$. Приведенное доказательство встречается у ал-Хорезми впервые. Доказательства для 5 и 6 видов близки к построениям «геометрической алгебры» греков. Заметим, что для уравнения вида 5 ал-Хорезми показывает, как находятся оба (положительные) корня, если они существуют (в этом случае при вычислении корней «применяется сложение и вычитание»), и формулирует условия, когда «задача невозможна» и когда имеется одно решение (наш двойной корень).

в. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТОРОНЫ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

ИЗ «ИЗМЕРЕНИЯ ПЯТИУГОЛЬНИКА И ДЕСЯТИУГОЛЬНИКА» АБУ КАМИЛА (ок. 900 г.)

[№ 97, с. 15—16, перевод Б. А. Розенфельда.]

Я начинаю с определения меры [хорды] одной пятой окружности, диаметр которой известен.

Пусть дан круг $ABCD$ (рис. 5), пусть его диаметр 10 в числах, пусть это линия EF и пусть $ABCED$—вписанный пятиугольник с равными сторонами и углами. Если ты хочешь знать меру каждой стороны этого пятиугольника, то проведем линию CHD, отсекающую две пятые окружности. Будем считать линию ED вещью (1). Так как квадрат ED равен плоской фигуре EH

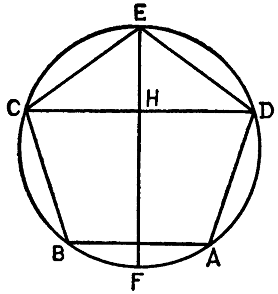


Рис. 5.

на EF (2), то EH равна одной десятой квадрата и CH равна корню из квадрата без одной сотой квадрато-квадрата. Но CH равна половине CD, поэтому CD равна корню из 4 квадратов без $\frac{2}{5}$ от $\frac{1}{10}$ квадрато-квадрата (3). Но известно, что плоская фигура AB на CD и плоская фигура AD на BC равны квадрату CD, так как плоская фигура AB на CD и плоская фигура AD на BC равны плоской фигуре AC на BD (4), но плоская фигура AC на BD равна квадрату CD. Но квадрат CD равен 4 квадратам без $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{10}$ квадрато-квадрата, если вычесть отсюда плоскую фигуру AD на BC, равную квадрату ED, т. е. квадрату, то останется: плоская фигура AB на CD равна 3 квадратам без $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{10}$ квадрато-квадрата. Раздели это на AB, т. е. вещь, в частном получится: CD равна 3 вещам без $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{10}$ кубов. Умножь это на себя, получится: квадрат CD равен 9 квадратам и $\frac{1}{625}$ кубо-куба без $\frac{6}{25}$ квадрато-квадрата, но это равно 4 квадратам без $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{10}$ квадрато-квадрата. Восполни это, получится: $\frac{5}{25}$ квадрато-квадрата равны 5 квадратам и $\frac{1}{625}$ кубо-куба. Раздели все это на квадрат, получится: $\frac{1}{5}$ квадрата, равная пяти, и $\frac{1}{625}$ квадрато-квадрата; восполни это так, чтобы получился квадрато-квадрат, для чего умножь это на 625, получится: квадрато-квадрат и 3125 равны 125 квадратам (5). Раздвой квадраты, получится $62\frac{1}{2}$, умножь это на себя, получится $3906\frac{1}{4}$, вычти из этого 3125, останется $781\frac{1}{4}$, корень из этого вычти из $62\frac{1}{2}$, корень из остатка — линия ED, являющаяся одной из сторон пятиугольника.

Примечания. В качестве образца применения алгебры к решению задач геометрии, которое встречается уже у Мухаммеда ал-Хорезми, мы приводим вычисление стороны правильного пятиугольника, вписанного в данную окружность, которое Абу Камил Шуджа ал-Мисри, известный также под именем ал-Хасиб ал-Мисри, т. е. египетский вычислитель, свел к решению биквадратного уравнения. Правильные пяти- и десятиугольник были изучены еще в древней Греции (см. ч. III, п. 4 б, прим. 6—8).

1. «Вещь» (шай) — употребительное название неизвестной в средневековой арабоязычной алгебре. Дальнейшие степени назывались: «квадрат» (мал, буквально «имущество»), «куб» (ка'б) «квадрато-квадрат» (мал ал-мал), «квадрато-куб» (мал ал-ка'б), «кубо-куб» (ка'б ал-ка'б); последние три названия являются переводами терминов Диофанта (см. ч. I, п. 3).

2. То есть прямоугольник на отрезках EH, EF.

3. Так как $ED=x$ и $EF=10$, из равенства $ED^2=EH\cdot EF$ получаем $EH=\frac{x^2}{10}$, откуда $CD=2CH=\sqrt{4x^2-\frac{x^4}{25}}$.

4. Это — теорема Птолемея (см. ч. III, п. 4б, прим. 10).

5. Равенство $AB\cdot CD+AD\cdot BC=CD^2$ можно переписать в виде

$$x\sqrt{4x^2-\frac{x^4}{25}}+x^2=4x^2-\frac{x^4}{25},$$

или, после преобразований,

$$x^4+3125=125x^2,$$

откуда

$$x=\sqrt{62\frac{1}{2}-\sqrt{781\frac{1}{4}}}.$$

г. ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ КОРНЕЙ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ ОМАРА ХАЙЯМА «О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ И АЛМУКАБАЛЫ» (ок 1070 г.)

[№ 49, с. 85—86.]

... Первый вид: *куб и его ребра равны числу*. Положим [линию] AB равной стороне квадрата, равного числу корней, тем самым она дана. Построим способом, указанным нами выше, тело, основание которого равно квадрату AB, а высота равна BC и которое равно данному числу, и сделаем BC перпендикулярной AB [рис. 6]. Известно, что у нас понимается под телесным числом: это тело, основание которого — квадрат единицы, а высота равна данному числу, т. е. линии, отношение которой к стороне основания тела равно отношению данного числа к единице **(1)**. Продолжим AB до G и построим параболу, вершина которой есть точка B, стрела BG, а прямая сторона — AB. Это будет || парабола HBD. Она известна по положению, как мы это показали выше, и касается линии BC. Построим на BC полукруг: он необходимо пересечет параболу. Пусть он пересекает ее в D. Опустим из D, которая, как мы знаем, будет известна по положению, два перпендикуляра DG, DE на BG, BC. Они будут известны по положению и величине. Так как линия DG — координатная линия параболы, ее квадрат равен произведению BG на AB;

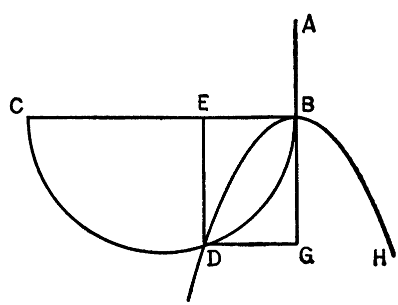


Рис. 6.

следовательно, AB будет относиться к DG, равной BE, как BE к ED, равной GB. Но BE относится к ED, как ED к EC. Поэтому четыре линии AB, BE, ED, EC пропорциональны и квадрат AB, являющейся первой, относится к квадрату BE, являющейся второй, как BE, являющаяся второй, к EC, являющейся четвертой. Тогда тело, основание которого есть квадрат AB, а высота EC, равно кубу BE, так как их высоты обратно пропорциональны их основаниям. Прибавим к ним обоим тело, основание которого есть квадрат AB, а высота EB. Куб BE вместе с этим телом будет [равен телу], основание которого есть квадрат AB, а высота CB, которое мы положили равным данному числу. Но тело, основание которого есть квадрат AB, равный числу корней, а высота CB, являющаяся ребром куба, будет равно данному числу ребер куба EB. Следовательно, куб EB вместе с данным числом его ребер равен данному числу. Это и есть искомое.

У этого вида нет многообразия случаев и невозможных задач **(2)**. Он был решен при помощи свойств круга и параболы.

Примечания. Выдающимся достижением алгебры на Арабском Востоке было создание довольно развитой теории кубических уравнений, не увенчавшееся, правда, их решением в радикалах. Работа велась в двух направлениях: геометрической теории уравнений 3-й степени и их численного решения (см. ч. I, п. 8). Главным средством первой служило построение корней как координат точек пересечения подходящим образом выбранных конических сечений. Впервые этот прием был применен, насколько известно, Менехмом в середине IV в. до н. э. к задаче о построении двух средних пропорциональных между двумя данными отрезками (т. е. отыскания x, y из пропорций $a:x = x:y = y:b$) и, в частности, к классической задаче удвоения куба, а затем Архимедом к задаче о делении данного шара на два сегмента с заданным отношением объемов. Математики Арабского Востока применили графическое решение ко всем 14 видам уравнений 3-й степени, которые они различали в соответствии с тем, что их канонические формы содержали только члены с положительными коэффициентами, — мы это уже видели в случае квадратных уравнений. Своего расцвета эта теория достигла в цитируемом трактате Омара Хайяма: здесь для каждого из 14 видов подробно рассмотрен вопрос о распределении его положительных корней. Правда, анализ Хайяма не всегда полон; устанавливаемые им границы корней могли бы быть в ряде случаев уточнены. Он заметил, что кубические уравнения иногда имеют два корня, но из-за несовершенства чертежа пропустил случай трех корней. К сожалению, эти открытия Хайяма не получили в свое время известности в Европе; даже в мавританских странах о них знали только понаслышке. Графическое построение корней вновь стало средством теоретического исследования в трудах европейских алгебраистов, особенно у Декарта, но затем, начиная с Ньютона, оно постепенно становится лишь вспомогательным приемом приближенного вычисления корней. Взятый нами пример Хайяма — первый на построение корня трехчленного уравнения вида $x^3+px=q$.

1. Приступая к графическому построению корня уравнения $x^3+px=q$, Хайям прежде всего приводит его в однородной форме $x^3+a^2x=a^2b$, где $a^2\ (=AB^2)=p$ и $a^2b\ (=AB^2BC)=q$. Далее Хайям строит параболу $x^2=ay$ и окружность $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$; положительное направление оси абсцисс обращено влево, а оси ординат — вниз. Тогда абсцисса точки D, в которой, помимо вершины, пересекаются обе кривые, выражает искомый корень x.

2. Эти слова означают, что данное уравнение имеет один и только один положительный корень.

д. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА У ИНДИЙЦЕВ

ИЗ «ВЕНЦА НАУКИ» БХАСКАРЫ II (ок. 1150 г.)

[№ 64, с. 216—217; перевод С. С. Демидова.]

Пятая часть стаи обезьян без трех, возведенная в квадрат, залезла в пещеру; и одна обезьяна, вскарабкавшаяся на ветку, была видна. Скажи — сколько их?

Здесь [величина] стаи положена «йа» 1 **(1)**. Ее пятая часть «йа» $\frac{1}{5}$, уменьшенная на 3, — «йа» $\frac{1}{5}$ «ру» $\frac{\dot{1}5}{5}$ **(2)**, возведенная в квадрат — «йа ва» $\frac{1}{25}$ «йа» $\frac{\dot{3}0}{25}$ «ру» $\frac{225}{25}$ **(3)**. С одной видимой [обезьяной] $\left[\frac{25}{25}\right]$ это — «йа ва» $\frac{1}{25}$ «йа» $\frac{\dot{3}0}{25}$ «ру» $\frac{250}{25}$. Это равно [величине] стаи «йа» 1. После того как стороны уравнения приведены к общему знаменателю, знаменатель опущен и произведено одинаковое вычитание [из обеих сторон уравнения], уравнение становится

«йа ва» 1 «йа» $\dot{5}5$ «ру» 0

«йа ва» 0 «йа» 0 «ру» $\dot{2}50$ **(4)**.

После того как умножим на 4, прибавим число, равное квадрату 55 [3025], полученные корни — «йа» 2 «ру» $\dot{5}5$

«йа» 0 «ру» 45 **(5)**.

Здесь так же, как и прежде, получается два значения, 50 и 5 **(6)**. Но второе в этом случае брать не следует, ибо оно непригодно. Люди не одобряют отрицательных известных **(7)**.

Примечания. Приведенный выше отрывок взят из сочинения крупнейшего индийского математика XII в. Бхаскары II «Сиддханта-сиромани», состоящего из четырех частей, из которых «Лилавати» («Красавица») и «Биджаганита» («Вычисление корней») посвящены математике (первая — арифметике, а вторая — алгебре), а остальные — астрономии.

1. «йа» — сокращение санскритского термина для неизвестной величины «йават — тават», буквально означавшего: столько — сколько. Алгебраическая символика индийцев была значительно более развита, чем у всех их предшественников; это относится, в частности, к введению знаков для нескольких неизвестных и для целого ряда операций (во всех случаях — сокращений, соответствующих терминов).

2. «ру» — от «рупа» (монета рупия), термина, обозначавшего свободный член. Точка над числом — знак отрицательного числа. Отрицательные числа, именовавшиеся «рина» или «кшайа», долг (положительные — «дхана» или «сва», имущество), систематически употреблялись индийскими математиками, начи-

ная с Брахмагупты (VII в.). В применении отрицательных чисел индийцы также сделали заметный шаг вперед, и уже Брахмагупта знал правила их умножения и деления. Возможно, что с отрицательными числами индийцы познакомились у китайцев, но они могли быть и их собственным изобретением.

Впоследствии применение отрицательных чисел, трактуемых как долг, встречается у Абу-л-Вафы (X в.) и Леонардо Пизанского (XIII в.). Систематическому введению отрицательных чисел особенно содействовали труды Н. Шюке (XV в.), а в XVI в. — М. Штифеля и Р. Бомбелли.

3. «ва» — от санскритского «варга» (квадрат). Таким образом, выражение «йа ва» $\frac{1}{25}$ «йа» $\frac{\dot{3}0}{25}$ «ру» $\frac{225}{25}$ можно записать как $\frac{1}{25}x^2-\frac{30}{25}x+\frac{225}{25}$.

4. Знак равенства в обозначениях Бхаскары II, совпадающих с обозначениями Брахмагупты, отсутствует. Обе части уравнения почленно записываются одна под другой. В современной символике приведенное уравнение запишется: $x^2-55x+0=0\cdot x^2+0\cdot x-250$. Характерно указание отсутствующих членов уравнения с помощью знака нуля, который, как известно, получил повсеместное распространение вместе с индийской позиционной нумерацией (ср. выше, п. 5а, прим.). Операция «ал-джабр» в индийской алгебре не применялась (ср. п. 5а, прим.).

5. Уравнение $x^2-55x=-250$ решается путем предварительного умножения на 4, затем дополнения до квадрата и, наконец, извлечения корня.

6. Имеется в виду предшествующая задача, приводившая к уравнению $(x-32)^2=256$, для которого Бхаскара нашел два корня, 48 и 16 (при этом оба корня оказывались пригодными). С возможностью двух корней квадратного уравнения индийские математики были, вероятно, знакомы еще до Бхаскары II [ср. п. 5б, прим. 5].

7. Бхаскара отбрасывает корень 5, так как число $\frac{1}{5}\cdot 5-3$ («пятая часть стаи обезьян без трех») оказывается отрицательным. Бхаскара отбрасывал и отрицательные решения, коль скоро он их получал.

6. АЛГЕБРА ЭПОХИ ВОЗРОЖДЕНИЯ

а. СИМВОЛИКА НЕМЕЦКИХ АЛГЕБРАИСТОВ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ АДАМА РИЗЕ «КОСС» (1524)

[№ 17, с. 36—37.]

Пятое уравнение такое. Если даны три последовательные степени, причем первая равна последним двум (1), то следует две наименьшие, именно первую и среднюю, разделить на последнюю, наибольшую (2). Затем средний знак должен быть разделен пополам, и половинную часть надо возвести в квадрат, потом прибавить к первому знаку, и radix quadrata (3) из этой суммы без половинной части среднего знака дает ответ на вопрос, как, например, $12\mathfrak{C}+3\mathfrak{z}$ равны 135ϕ (4), раздели $\phi+\mathfrak{C}$ (5) на $\mathfrak{z}$, получится 45 от первого знака и 4 от среднего. Раздели пополам 4, возведи в квадрат и прибавь к 45, получится 49. Radix quadrata от этого будет 7; отними теперь половину среднего знака, т. е. 2, останется 5. Это и будет radix **(6)**. Проверка: 12 radices составляют 60, и 3 квадрата от 5 radix составляют 75, сложи вместе, получишь 135, т. е. число, равное первому знаку **(7)**.

Примечания. В эпоху Возрождения усиливается интерес к математике, в первую очередь к алгебре, сначала в Италии, а затем и в других странах. В Италии алгебра иногда называлась regola della cosa (правило вещи), ибо арабский термин неизвестного «шай» (см. выше, п. 5в) был переведен итальянским cosa = вещь; ее называли также arte maggiore, т е. великим искусством; впрочем, итальянские авторы говорили и об algebra e almucabala. Важной стороной развития алгебры в Европе явилось постепенное создание символики. В итальянской литературе появились, например, знаки неизвестной и ее степеней co. (от cosa), ce. (от census = имущество, см. выше, № 56, прим. 1), cu. (от cubus) и т. д., знаки сложения и вычитания $\tilde{p}$ (от plus или piú — больше), $\tilde{m}$ (от minus или meno — меньше), знак квадратного корня ℞ (от ℞adix — корень) и др. В Германии итальянское слово cosa перешло в coss, и так начали называть алгебру. Немецкие «коссисты» создали свою своеобразную символику. Мы привели отрывок из ненапечатанного руководства по алгебре известного коссиста А. Ризе, содержащий решение квадратного уравнения. Подобно математикам Арабского Востока, Ризе еще различал три типа таких уравнений: $ax+bx^2=c$, $ax+c=bx^2$ и $bx^2+c=ax$, где $b>0$, $a, c \geqslant 0$, и для каждого из них давал свое правило решения, одно из которых содержится в приведенном фрагменте.

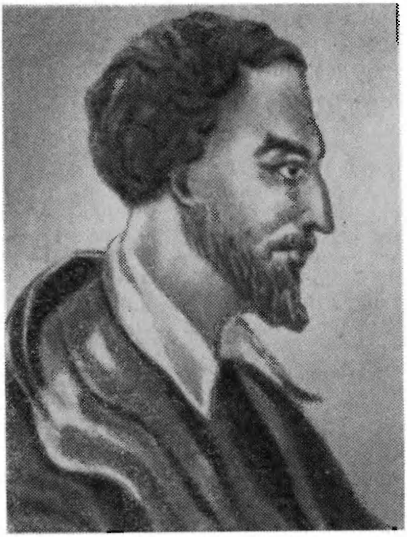
1. Речь идет об уравнениях вида $ax+bx^2=c$.
2. Здесь имеются в виду только коэффициенты.
3. То есть квадратный корень.
4. Помимо знака ɸ для единиц и знаков первых двух степеней неизвестной ꝶ, готического r, от латинского res — вещь и ʒ, готического z, от zensus вместо census, коссисты применяли специальные символы для третьей и седьмой степеней, а с помощью комбинаций обозначали целый ряд высших степеней [подробнее см. № 26, т. I, с. 290—291].
5. Здесь знак + поставлен вместо союза «и». Знаки + и — появляются в немецких руководствах к концу XV в. (в печати — в 1489 г.).
6. Radix = корень.
7. Единое правило решения квадратного уравнения $x^2=ax+b$ (за исключением случая $a<0$, $b<0$, в котором нет положительных корней) сформулировал впервые коссист М. Штифель (1544).

6. РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ ДЖ. КАРДАНО «ВЕЛИКОЕ ИСКУССТВО, ИЛИ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРАВИЛАХ» (1545).

[№ 70, листы 29—30; перевод С. С. Демидова.]

Шипионе дель Ферро из Болоньи около тридцати лет тому назад изобрел [метод, изложенный в] этой главе [и] сообщил его Антонио Марио Флоридо **(1)** из Венеции, который после того, как вступил однажды в состязание с Николо Тартальей из Брешии, объявил, что Николо также открыл его; и он [Николо] сообщил его нам, когда мы попросили его об этом, он скрыл доказатель-



Дж. Кардано

ство. Используя это, мы искали доказательство и нашли его, однако с большим трудом, способом, который мы изложим далее.

Доказательство

Например, пусть куб *GH* и шесть раз сторона *GH* равны 20 **(2)**. Я беру два куба *AE* и *CL*, разность между которыми будет 20, так чтобы произведение стороны *AC* на сторону *CK* давало 2 **(3)**, т. е. треть числа «вещей» **(4)**; и я откладываю *CB*, равное *CK* [рис. 7], затем говорю, что если это сделано таким образом, то остающаяся линия *AB* равна *GH* и, следовательно, величине «вещи», т. к. относительно *GH* предположено, что оно было таким **(5)**, посему я составляю по способу теоремы первой шестой главы этой книги тела *DA*, *DC*, *DE*, *DF* таким образом, что под *DC* мы понимаем куб *BC*, под *DF* куб *AB*, под *DA* утроенное *CB* на квадрат *AB*, под *DE* утроенное *AB* на квадрат *BC* **(6)**. Поскольку, следовательно, *AC* [умноженное] на *CK* есть 2, то, утраивая [произведение] *AC* на *CK*, мы получаем 6, число «вещей»; поэтому [умножение] *AB* на утроенное *AC* на *CK* дает здесь 6 «вещей» *AB* или ушестеренное *AB*, так что утроенное произведение *AB*, *BC* и *AC* есть ушестеренное *AB*. Но разность куба *AC* и куба *CK* и, аналогичным образом, [разность куба *AC* и] куба *BC*, равная ей по предположению, есть 20 **(7)**, и по первой теореме шестой главы это—сумма тел *DA*, *DE* и *DF*, так что эти три тела составляют 20 **(8)**. Но, полагая *BCm*: **(9)**, куб *AB* равен кубу *AC* и [плюс] утроенное *AC* на квадрат *CB* и [плюс] куб *BCm*: и [плюс] утроенное *BC* на квадрат *ACm*: **(10)**. Согласно доказательству, разница между утроенным *CB* на квадрат *AC* и утроенным *AC* на квадрат *BC* есть [утроенное] **(11)** произведение *AB*, *BC* и *AC* **(12)**. Ввиду того что это [произведение], как это было показано, равно ушестеренному *AB*, то, прибавляя ушестеренное *AB* к тому, что получается от [умножения] *AC* на утроенный квадрат *BC*, получаем здесь утроенное *BC* на квадрат *AC* **(13)**, так как *BC* есть *m*:. Теперь показано, что произведение *CB* на утроенный квадрат *AC* есть *m*: **(14)**; и остаток, который равен этому, есть *p*: **(15)**, отсюда утроенное *CB* на квадрат *AC* **(16)** и утроенное *AC* на квадрат *CB* и ушестеренное *AB* составляют ничто **(17)**. Поэтому, согласно здравому смыслу, разница между кубами AC и BC так же велика, как сумма куба AC и утроенного AC на квадрат CB и утроенного CB на квадрат ACm: и куба BCm: и ушестеренного AB. Это, следовательно, 20, ибо разность кубов AC и CB была 20 **(18)**. Кроме того, согласно второй теореме шестой главы, полагая BCm:, куб AB будет равен кубу AC и [плюс] утроенное AC на квадрат BC и [плюс] куб BCm: и [плюс] утроенное BC на квадрат ACm: **(19)**. Поэтому куб AB с ушестеренным AB согласно здравому смыслу, поскольку это [выражение] равно кубу AC и [плюс] утроенное AC на квадрат CB и [плюс] утроенное CB на квадрат ACm: **(20)** и плюс куб CBm: и [плюс] ушестеренное AB, которое теперь равно 20, как показано, будет также равен 20 **(21)**. Так как, следовательно, куб AB и [плюс] шесть раз AB будут равны 20 и куб GH вместе с ушестеренным GH составит 20, то согласно здравому смыслу и из того, что было сказано в 35-м и 31-м предложениях 11-й книги Элементов **(22)**, GH будет равно AB, следовательно, GH — разность AC и CB. Но AC и CB или AC и CK — числа или линии, содержащие площадь, равную трети числа «вещей» **(23)**, кубы которых разнятся на число в уравнении **(24)**, поэтому мы имеем:

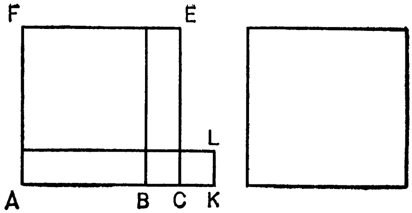


Рис. 7.

Правило

Куб третьей части числа «вещей», к которому ты прибавляешь квадрат половины числа из уравнения и берешь корень из всего полученного (25), — это квадратный корень, который ты используешь в одном случае, прибавляя половину числа, которое как раз умножал само на себя **(26)**, в другом случае, вычитая ту же самую половину, и ты будешь иметь соответственно «бином» и «вычет» **(27)**; затем вычти кубический корень **(28)** из вычета из кубического корня из бинома и остаток от этого есть величина «вещи» **(29)**. В примере куб и шесть «вещей» равны 20 **(30)**; возведи 2, третью часть от 6, в куб, это даст 8; умножь 10, половину числа, само на себя, это даст 100; сложи 100 и 8, это даст 108; возьми корень, который есть ℞108 **(31)**, и используй его, в первом случае прибавляя 10, половину числа, и во втором случае вычитая то же самое количество, и ты будешь иметь бином ℞108*p*:10 **(32)** и вычет ℞108*m*:10 **(33)**; возьми кубический корень из этого и вычти корень из вычета от корня из бинома, и ты будешь иметь величину «вещи»,

℞*v*:cub:℞108*p*:10*m*:℞*v*:cubica ℞108*m*:10 **(34)**

$$
\begin{array}{ccc}
\text{cub}^9p\text{:6reb}^9\text{æ}\tilde{\text{q}}\text{lis} & 20 \\
2 & 20 \\
8 \quad — & 10 \\
& 108 \\
& ℞108p\text{:}10 \\
& ℞108m\text{:}10 \\
& ℞v\text{:cu.}℞108p\text{:}10 \\
& m\text{:}℞v\text{:cu.}℞108m\text{:}10\ \textbf{(35)}
\end{array}
$$

Примечания. Решение в радикалах кубических уравнений, положившее начало огромному циклу исследований и сразу необыкновенно поднявшее в глазах математиков престиж алгебры, впервые удалось для случая $x^3+px=q$ болонскому ученому Шипионе дель Ферро около 1500 г. Однако дель Ферро не опубликовал это открытие, но лишь сообщил его своему ученику А. М. Фиору. В 1535 г. на одном публичном состязании математиков, какие были тогда в ходу в Италии, Фиор предложил целую серию кубических уравнений Николо Тарталье, который в течение нескольких дней вновь самостоятельно нашел правило решения указанного уравнения, а затем уравнений и других двух видов: $x^3+px=q$ и $x^3+q=px$. Но и Тарталья не спешил обнародовать свои результаты. Это сделал, нарушив обещание не публиковать секретно сообщенные ему в 1539 г. Тартальей правила, Джироламо Кардано в 1545 г. Кардано ведет изложение на языке геометрической алгебры и, при формулировке правила, риторической алгебры. Текст сопровождается схемой вычислений, представляющей собой некий прообраз алгебраических выкладок. Но Кардано, сам талантливый математик, не ограничился публикацией трех правил Тартальи. Он снабдил их доказательствами (мы приводим его доказательство для уравнений первого вида), показал, как приводится к рассмотренным трехчленным видам четырехчленное кубическое уравнение; ему принадлежит первое употребление мнимых решений квадратных уравнений. В цитируемом труде Кардано изложен также метод сведения решения уравнения четвертой степени к решению кубического уравнения, найденный его учеником Луиджи Феррари.

1. Латинизированная форма фамилии Фиора.

2. Если обозначить неизвестную GH через x, то уравнение можно записать в виде $x^3+6x=20$.

3. Если обозначить $AC=u$ и $CK=v$, то $uv=2$—треть коэффициента при x.

4. О термине «вещь» (см. выше, п. 5в).

5. То есть было равно x.

6. То есть $DC=v^3$, $DF=(u-v)^3=x^3$, $DA=3(u-v)^2v$ и $DE=3(u-v)v^2$.

7. u^3-v^3+20.

8. $(u-v)^3=3(u-v)^2v+3(u-v)v^2=20$.

9. BC минус, т. е. BC отрицательно.

10. $(u-v)^3=u^3+3uv^2-v^3-3u^2v$.

11. В оригинале «triplum» (утроенное) в данном месте пропущено.

12. $3vu^2-3uv^2=3(u-v)uv$.

13. $6(u-v)+3uv^2=3u^2v$.

14. То есть отрицательно (см. прим. 9).

15. То есть положителен.

16. В оригинале AB.

17. В тексте nihil—ничто, ничего; $-3vu^2+3uv^2+6(u-v)=0$.

18. $u^3-v^3=u^3+3uv^2-3vu^2-v^3+6(u-v)=20$

19. $(u-v)^3=u^3+3uv^2-v^3-3vu^2$.

20. В тексте ABm:.

21. $x^3+6x=u^3+3uv^2-3vu^2-v^3+6(u-v)=20$.

22. Ссылка неверна, в издании 1570 г. она отсутствует.

23. $uv=2$.

24. $u^3-v^3=20$

25. В случае уравнения $x^3+px=q$ (p, $q>0$) получим $\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}$.

26. $\frac{1}{2}q$.

27. Бином — $\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}+\frac{1}{2}q$, вычет (в оригинале «apotome») — $\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}-\frac{1}{2}q$.

28. В тексте «R̶ cubica».

29. $x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}+\frac{1}{2}q}-$
$-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}-\frac{1}{2}q}$.

Кардано дает впоследствии правило для решения уравнений вида $x^3=px+q$ (p, $q>0$), которое можно записать в виде формулы

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

В случае $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$, который назвали неприводимым, под кубическими корнями появляются мнимые числа, между тем как все три корня при этом действительные. Разъяснение неприводимого случая принадлежит Р. Бомбелли.

30. $x^3+6x=20$.

31. $\sqrt{108}$.

32. $\sqrt{108}+10$.

33. $\sqrt{108}-10$.

34. $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$; букву v в то время часто набирали вместо u — первой буквы в слове universale, R̶$_{v}$ — общий корень.

35. «Куб» плюс 6 «вещей» равно 20.

в. ПЕРВОЕ ПОЯВЛЕНИЕ МНИМЫХ ЧИСЕЛ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ ДЖ. КАРДАНО «ВЕЛИКОЕ ИСКУССТВО, ИЛИ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПРАВИЛАХ» (1545)

[№ 70, лист 65; перевод П. С. Юшкевича.]

Второй вид ложного решения уравнения **(1)** заключается в корне из *m*: **(2)**. Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем 40, — как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется m:15; если взять от этого R̸ и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут: $5p$:R̸m:15 и $5m$:R̸m:15.

Примечания. Здесь впервые появляются мнимые числа которые Кардано вообще называет «чисто отрицательными» или «софистически отрицательными». Никакого употребления эти алгебраические формы у Кардано не получили. Однако вскоре Р. Бомбелли, сформулировав правила действий с ними, употребил их для объяснения неприводимого случая (см. п. 6г, прим.). Введение мнимых чисел, так же как и отрицательных чисел в древнем Китае, связано было с попытками формального распространения некоторого алгоритма, сперва установленного для ограниченной области объектов, на общий случай (у Кардано — на неприводимый случай кубических уравнений, в древнем Китае — на n линейных уравнений с n неизвестными).

1. Первый вид ложного решения уравнений, рассмотренный перед этим, составляют отрицательные корни.

2. То есть из отрицательного количества.

г. ОБЩИЕ ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ НАД МНИМЫМИ ЧИСЛАМИ

ИЗ «АЛГЕБРЫ» Р. БОМБЕЛЛИ (ок. 1560 г., изд в 1572 г.)

[№ 68. с. 169; перевод И. Ю. Тимченко.]

Я нашел другой род связанных кубических корней, значительно отличающийся от других (1), возникающий при решении уравнений вида куб равен корням (2) и числу (3), когда куб трети корней больше квадрата половины числа ..., этого рода квадратные корни, в своем алгоритме, подчиняются правилам, отличным от тех, которым подчиняются другие корни, и носят особые названия; ... разность квадрата половины числа и куба трети корней (4) [по извлечении квадратного корня] не может быть названа ни положительной, ни отрицательной (non si può chiamare ne più ne meno), поэтому я буду называть ее плюс от минуса (più di meno), когда она должна прибавляться, а в тех случаях, когда она должна отниматься, я буду называть ее минус от минуса (meno di meno) (5) ...; корни этого рода покажутся многим скорее софистическими, чем имеющими действительное значение; такого мнения держался я до тех пор, пока не нашел доказательства на линиях.

. . . .

Плюс на плюс от минуса дает плюс от минуса.
Минус на плюс от минуса дает минус от минуса.
Плюс на минус от минуса дает минус от минуса.
Минус на минус от минуса дает плюс от минуса.
Плюс от минуса на плюс от минуса дает минус.
Плюс от минуса на минус от минуса дает плюс.
Минус от минуса на минус от минуса дает минус.
Минус от минуса на плюс от минуса дает плюс. (2).

Примечания. Важность мнимых чисел в теории алгебраических уравнений впервые осознал болонский инженер и математик Р. Бомбелли. В противовес Кардано, который рассматривал мнимые числа как курьез и не дал им никакого употребления, Р. Бомбелли объяснял с их помощью так называемый «неприводимый случай», встречающийся при решении кубического уравнения вида $x^3=px+q$ (см. п. 6б прим. 29) [подробнее см. № 26, т. I, с. 296—298]. Именно это обстоятельство прежде всего привлекло внимание алгебраистов к новой категории чисел, поразивших их воображение.

Мнимые в «Алгебре» Бомбелли вводятся формально через определение правил действий над ними, приведенных выше. Вероятно, образцом для этого послужило введение отрицательных чисел в «Арифметике» Диофанта (см. п. 3, прим. 7), с которой Бомбелли был хорошо знаком.

1. Имеются в виду корни кубические из выражений $a\pm\sqrt{b}$.

2. Бомбелли называет неизвестную в первой степени tanto, т. е. столько, некоторое количество.

3. То есть $x^3=px+q$.

4. $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3$.

5. Присоединение к числу названий più di meno и meno di meno эквивалентно умножению на $+i$ или $-i$

Действия с комплексными числами определялись у Бомбелли на основании правил действий с многочленами

д. ВВЕДЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ В ЕВРОПЕ

ИЗ «ДЕСЯТОЙ» С. СТЕВИНА, изданной в 1585 г.

[№ 96, с. 208—209; перевод С. С. Демидова.]

Определение II.

Всякое предложенное целое число называется **начальным,** его знак таков ⓪.

Объяснение.

Например, некоторое предложенное число—триста шестьдесят четыре. Мы назовем его триста шестьдесят четыре **начальных,** записывая его в таком виде: 364⓪. И также во всех других подобных [случаях].

Определение III.

Каждую десятую часть начальной единицы мы назовем первой, ее знак таков: ①; каждую десятую часть первой единицы мы назовем второй, ее знак таков: ②. Подобным образом для каждой десятой части единицы предшествующего знака, всегда в порядке возрастания.

С. Стевин

Объяснение.

Если 3① 7② 5③ 9④, то будем говорить 3 *первых* 7 *вторых*, 5 *третьих*, 9 *четвертых*, и так может вестись до бесконечности. Но что касается его значения, известно, что согласно этому определению данные числа есть $\frac{3}{10}\ \frac{7}{100}\ \frac{5}{1000}\ \frac{9}{10\,000}$, вместе $\frac{3759}{10\,000}$. Точно так же 8 ⓪ 9 ① 3② 7③ означают $8\ \frac{9}{10}\frac{3}{100}\frac{7}{1000}$, вместе $8\ \frac{937}{1000}$. И так же для других [чисел]. Нужно также знать, что мы не используем в Десятой никаких дробей и что число под каждым знаком, за исключением ⓪, никогда не превышает 9. Например, мы не пишем 7① 12②, но вместо него 8① 2②, ибо они означают то же.

. . . .

Предложение I, о сложении.

Пусть даны числа Десятой для сложения: найти их сумму. Объяснение данного. Имеются числа Десятой, из которых первое 27⓪ 8① 4② 7③, второе 37⓪ 6① 7② 5③, третье 875⓪ 7① 8② 2③. *Объяснение требуемого:* нам нужно найти их сумму.
Построение. Расположим данные числа как в приведенной [таблице], складывая их согласно обычному способу сложения целых чисел таким образом:

$$\begin{array}{r} ⓪①②③ \\ 2\ 7\ 8\ 4\ 7 \\ 3\ 7\ 6\ 7\ 5 \\ 8\ 7\ 5\ 7\ 8\ 2 \\ \hline 9\ 4\ 1\ 3\ 0\ 4 \end{array}$$

Это дает (по первой проблеме «Арифметики» (1)) сумму 941 304, которая, как указывают знаки над числами,—941⓪ 3① 0② 4③. Я говорю, что это—требуемая сумма.

Доказательство. По третьему определению данные 27⓪ 8① 4② 7③ — $27\frac{8}{10}\,\frac{4}{100}\,\frac{7}{1000}$, вместе $27\frac{847}{1000}$. Аналогично 37⓪ 6① 7② 5③ означают $37\frac{675}{1000}$ и 875⓪ 7① 8② 2③—$875\frac{782}{1000}$. Три числа, такие, как $24\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, вместе дают согласно 10-й проблеме «Арифметики» $941\frac{304}{1000}$, но это означает также сумму 941⓪ 3① 0② 4③, это, следовательно, правильная сумма, что и требовалось доказать.

Заключение. Следовательно, были даны числа Десятой для сложения, мы нашли их сумму, что и требовалось сделать **(2)**.

Замечание.

Если у данных чисел отсутствует некоторый знак в их естественном порядке, заполним его место нулем. Пусть, например, данные числа — 8⓪ 5① 6② и 5⓪ 7②, в последнем из которых отсутствует знак порядка ①.

Поставим на его место 0①, беря тогда за данное число 5⓪ 0① 7②, складывая их, как выше, следующим образом:

$$\begin{array}{r} ⓪①② \\ 8\ 5\ 6 \\ 5\ 0\ 7 \\ \hline 1\ 3\ 6\ 3 \end{array}$$

Примечания. Все возраставший объем вычислений (особенно астрономических) потребовал в XVI в. значительного усовершенствования самой основы расчетов. Широкое применение уже в средние века получили шестидесятеричные дроби, введенные еще в древнем Вавилоне (см. п. 1 б, прим. 1); при этом для записи целых чисел использовали десятичную систему нумерации. Попытки некоторых авторов распространить шестидесятеричный принцип записи и на целые числа успеха не имели; зато в Европе появляются десятичные дроби, с которыми мы встречаемся у математиков Китая в I тысячелетии и затем на Арабском Востоке начиная с XI в. (особенно же у Джемшида ал-Каши в XV в.). Они встречаются еще у Иммануила Бонфиса из Тараскона (XIV в.), правда, в недостаточно завершенной форме. В пользу их употребления решительно выступал Ф. Виет в опубликованном в Париже в 1579 г. «Математическом каноне». Однако широкое их распространение в Европе началось лишь после выхода в свет в 1585 г. «Десятой» фламандского математика и инженера С. Стевина, придававшего большое значение десятичным дробям, как важному вычислительному средству и как основе метрологии.

1. Имеется в виду сочинение: La Pratique d'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges, Leiden, 1585.

2. Десятичные дроби очень быстро вошли в научный обиход (и лишь позже в повседневное употребление). При этом запись их, у Стевина еще довольно громоздкая, приобретает современные формы уже у его ближайших последователей.

7. НАЧАЛА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И НОВОЙ АЛГЕБРЫ

а. СИМВОЛЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН; ПРИНЦИП ОДНОРОДНОСТИ

ИЗ «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИСКУССТВО Ф. ВИЕТА» (1591)

[№ 100, с. 227—250; перевод А. П. Юшкевича]

Гл. I. Об определении и делении анализа и о вещах, употребляемых в зететике (1)

Искусство, которое я излагаю, ново или по крайней мере было настолько испорчено временем и искажено влиянием варваров, что я счел нужным придать ему совершенно новый вид... Все математики знали, что под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками с помощью нашего искусства, представляющего потому самый верный путь для математических изысканий (2).

. . . .

Гл. III. О законе однородных и о порядках и родах сравниваемых величин

Первый и неизменный закон уравнений, или пропорций, называемый законом однородных, так как относится к однородным величинам, таков:

Однородные надлежит сравнивать с однородными...

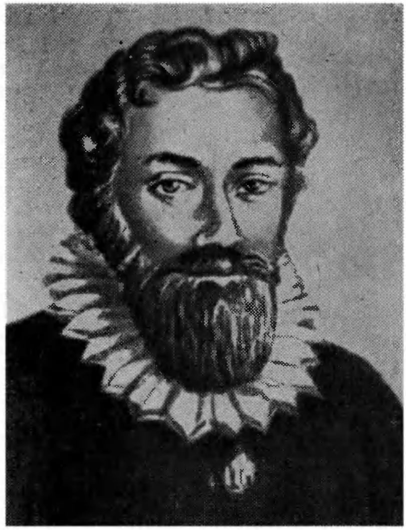
Если величина складывается с величиной, она однородна с ней. Если величина вычитается из величины, она однородна с ней. Если величина проводится к величине (3), результат разнороден с ними обеими...

Величины, которые по своей собственной природе пропорционально восходят или нисходят от рода к роду, называются скалярами (4). Первая из скалярных величин — это сторона или корень. Вторая — это квадрат. Третья есть куб. Четвертая есть квадрато-квадрат. Пятая есть квадрато-куб... Девятая есть кубо-кубо-куб.

Роды величин ... суть: длина и ширина, площадь, тело, площаде-площадь, площаде-тело, ..., тело-тело-тело.

. . . .

Гл. IV. О правилах видовой логистики



Ф. Виет

Числовая логистика оперирует числами, видовая вычисляет с помощью видов или форм вещей (per species seu rerum formas), например букв алфавита **(5)**.

Имеются четыре канонических правила вычислений с помощью видов:

Правило I. Сложить величину с величиной... Правило II. Вычесть величину из величины... Правило III. Провести величину к величине... Правило IV. Приложить величину к величине... **(6)**.

...Данные величины надлежит отличать от искомых неопределенных **(7)** с помощью постоянного и неизменного, а также вполне отчетливого символа, например обозначая искомые величины буквой A и другими гласными E, I, O, U, Y, данные же — буквами B, G, D и другими согласными **(8)**.

. . . .

Гл. V. О законах зететики

I. Предложение I. Антитеза не изменяет уравнения **(9)**.

II. ИЗ СОЧИНЕНИЯ Ф. ВИЕТА «ПЕРВЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ВИДОВОЙ ЛОГИСТИКЕ» (1591, опубл. в 1631 г.)

[№ 100, с 257; перевод С. С. Демидова и А. П. Юшкевича] (10)

Если имеются две стороны и, кроме того, коэффициентная побочная длина **(11)**, то квадрат первой стороны, плюс площадь [на] первой стороне и удвоенной второй, плюс квадрат второй стороны, плюс площадь [на] первой стороне и коэффициентной длине, плюс площадь на второй стороне и той же коэффициентной длине, [взятые вместе], равны квадрату суммы сторон, сложенному с площадью [на] этой коэффициентной и упомянутой сумме. Пусть A — одна из сторон, B — другая и D — коэффициентная побочная длина. Я говорю, что A квадрат $+ A$ на дважды

$B+B$ квадрат $+D$ на $A+D$ на B равно $A+B$ квадрат $+D$ на $A+B$. Это следует из умножения $A+B$ на $A+B+D$.

Примечания. Коренные изменения в алгебре Нового времени связаны прежде всего с именем Ф. Виета, который положил начала общего алгебраического исчисления, введя знаки для произвольного числа алгебраических переменных и параметров. Только после этого стало возможным создать развитой алгоритм алгебраических операций и заменить преимущественно словесные описания и рассуждения аппаратом формул и их преобразований. Новизна идей Виета сочеталась в его творчестве с приверженностью древнегреческой традиции, великолепным знатоком которой он был и которая в некоторых отношениях препятствовала полному раскрытию его новаторских тенденций. Труд «In artem analyticen Isagoge» (1591), из которого взята большая часть приведенных отрывков, должен был составить первую часть более обширного сочинения, посвященного, как сказано на титульном листе, восстановлению анализа в математике, или же «новой алгебре». В полном объеме это сочинение света не увидело, вместо него был издан (частью посмертно) ряд отдельных алгебраических книг. Во «Введении» Виет высказал общие принципы новой алгебры, которую называл также аналитическим искусством. Термин «аналитический», «анализ» взят из греческой терминологии (ἀνάλυσις — разрешение, разложение) и имел специальное значение в античной математике; блестящим примером анализа Виет считал «Арифметику» Диофанта (см. выше, п. 3).

1. Виет различал три части аналитического искусства, из которых первую составляет зететика, с помощью которой устанавливают уравнения или отношения между искомыми и данными величинами (от ζητέω—ищу, исследую). Две другие части, пористика и экзегетика, имеют предметом выяснение истинности предложений и нахождение неизвестных.

2. Виет видел в алгебре самый сильный и верный метод математики. Он был уверен, что аналитическое искусство в состоянии решить любую математическую задачу, и в одном месте «Введения» заявил: нет неразрешимых проблем (nullum non problema solvere).

3. О проведении величин см. прим. 6.

4. Scala — лестница, scalaris— ступенчатый. Величины новой алгебры образуют лестницу, шкалу геометрических и квазигеометрических образов различных измерений. Таким образом, новая алгебра Виета и геометрия тесно связаны самим предметом исследования. Слово «скаляр» приобрело иной, весьма распространенный теперь смысл у У. Гамильтона (1853), одного из создателей векторного исчисления.

5. Термин «логистика» обозначал у древних греков искусство арифметических вычислений, а слово «арифметика» — общее учение о числах. Различая числовую и видовую логистику, Виет создавал аппарат второй для применения его в первой, а также для геометрических приложений.

6. При сложении и вычитании однородных величин Виет употребляет знаки $+$ и $-$. Соответствующее умножению чисел проведение величины B к величине A (ductio B in A) порождает величину, размерность которой складывается из размерностей B и A. Приложение C к D (applicatio C ad D) соответствует делению чисел и понижает размерность C на размерность D; название этого действия восходит к геометрической алгебре греков (см. выше, п. 2). Приложение C к D Виет обозначал $\frac{C}{D}$. Степени величин он записывал словами, вроде B cubus или B cub.; он употреблял также специальную запись размерности величин, вроде B planum или B pl., т. е. плоское B.

Мы опустили описание некоторых свойств операций, таких, как правила знаков в случае «проведения», сложение буквенных дробей и др.

7. В оригинале: ab incertis quaesititiis. Слово incertus можно перевести двояко: неопределенный и неизвестный. Мы взяли первое значение, более подходящее в данном случае и близкое к мысли Виета. Так, например,

и выражение quantitas ignota, буквально неизвестная величина, понималось иногда в значении нашей переменной, например в аналитической геометрии Ферма (см. ч. III, п. 6а).

8. Записи в символике Виета были еще довольно громоздкие как из-за малого числа символов, так и из-за соблюдения однородности. Наше квадратное уравнение $x^2+2ax=C$ он записывал A quad. $+B$ 2 in A aequetur Z plano, а его корень $\sqrt{c+a^2}-a$ в виде $\sqrt{Z \text{ plan.} + B \text{ quadr.}} - B$; знака равенства у Виета не было. Запись численных уравнений была несколько проще; если, скажем, $a=1$, $c=3$, то следовало бы записать $1Q+2N$ aequetur 3 (здесь N — numerus означает неизвестную). Символы Виета применяли некоторые математики XVII в., в том числе П. Ферма, но довольно быстро они были вытеснены гораздо более удобными обозначениями Декарта (см. п. 7б).

9. Антитезой здесь называется перенос членов из одной части уравнения в другую. По-видимому, Виет впервые указал, что при такой операции получается уравнение, равносильное начальному.

10. Далее следует пример из примыкающих к «Введению» «Ad Logisticam speciosam notae priores», написанных Виетом в том же, 1591 г., но увидевших свет только в 1631 г. и в собрании его сочинений, изданном в 1646 г. Фр. ван Схоотеном. В этом тексте впервые появляется термин «коэффициент», хотя и не в привычном нам общем значении, какое он постепенно получил в XVII в. Декарт называл его еще «известным количеством» в том или ином члене, но уже в «Dictionnaire mathématique» («Математический словарь») Ж. Озанама (1691) этот термин поясняется, как мы его понимаем теперь.

11. Здесь выражение $(A+B)^2+D(A+B)$ преобразуется к виду $A^2+2AB+B^2+DA+DB$ Величины A и B рассматриваются как части отрезка, на котором построен квадрат $(A+B)^2$ и к которому пристроен прямоугольник $D(A+B)$. Отрезок D и называется longitudo sublateralis coefficiens, т. е. содействующей побочной длиной. Прилагательное coefficiens происходит от cum—с и efficere—делать, образовать и т. п., так что означает содействующая, именно отрезок, содействующий тому, что член $D(A+B)$ имеет ту же размерность, что $(A+B)^2$. Слово sublateralis происходит от sub — под и lateralis — боковой, от latus — бок.

6. ИСЧИСЛЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И АЛГЕБРА ДЕКАРТА

ИЗ «ГЕОМЕТРИИ» Р. ДЕКАРТА (1637)

[№ 23, с. 11—13.]

Все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий.

Как исчисление арифметики относится к построениям геометрии? Подобно тому как вся арифметика состоит только в четырех или пяти действиях, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением (1), подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы удобнее установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая обыкновенно может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии,— найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух,

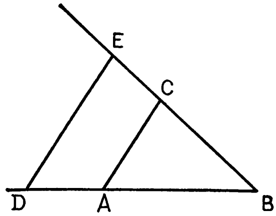


Рис. 8.

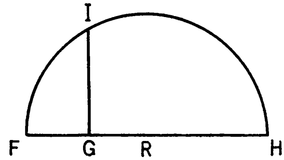


Рис. 9.

как другая к единице, а это то же самое, что умножение; или же найти четвертую линию, так относящуюся к одной из этих двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-либо другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т. д. корень. С целью быть более понятным, я без опасений введу эти арифметические термины в геометрию.

Умножение. Пусть, например (рис. 8), AB является единицей и требуется умножить BD на BC; для этого я должен только соединить точки A и C, затем провести DE параллельно CA, и BE будет результатом этого умножения.

Деление. Или же, если BE нужно разделить на BD, то, соединив точки E и D, я провожу AC параллельно DE, и BC будет результатом этого деления.

Извлечение квадратного корня. Или если нужно извлечь квадратный корень из GH, то я прибавляю (рис. 9) к GH по продолжению прямую FG, являющуюся единицей, и, разделив FH в точке R на две равные части, описываю из центра R окружность FIH; если затем провести от точки G к точке I прямую, перпендикулярную FH, то GI будет искомым корнем. Я здесь ничего не говорю ни о кубическом, ни о других корнях, так как мне будет удобнее рассмотреть их дальше.

Как можно употреблять буквенные обозначения (les chiffres) *в геометрии?* Но часто нет нужды проводить эти линии на бумаге, а достаточно их обозначить какими-нибудь буквами, каждую линию одной буквой. Так, чтобы прибавить линию BD к GH, я называю одну из них a, а другую b и пишу $a+b$; и я пишу $a-b$ при вычитании b из a; и ab при их перемножении; и $\frac{a}{b}$ при делении a на b; и aa, или a^2, при умножении a самое на себя; и a^3 при умножении ее еще раз на a и так до бесконечности; и $\sqrt{a^2+b^2}$ при извлечении квадратного корня из a^2+b^2; и $\sqrt{C \cdot a^3-b^3+abb}$ (2) при извлечении кубического корня из a^3-b^3+abb и так далее.

При этом следует заметить, что под a^2, или b^2, или тому подобным (3) я обыкновенно понимаю лишь самые простые линии, хотя, чтобы пользоваться наименованиями, употребительными в алгебре, я их называю квадратами или кубами и т. д.

Следует также заметить, что если единица в рассматриваемом вопросе не определена, то все части одной и той же линии должны всегда выражаться одним и тем же числом измерений: так, например, здесь a^3 имеет столько же измерений, как и abb или b^3, из которых я составил линию, названную мной $\sqrt{C \cdot a^3 - b^3 + abb}$; но если единица определена, то дело обстоит иначе, ибо тогда повсюду, где имеется слишком много или слишком мало измерений, можно подразумевать единицу; так, если нужно извлечь кубический корень из $aabb - b$, то следует представить себе, что величина $aabb$ поделена один раз на единицу, а другая величина b два раза умножена на нее.

Между прочим, чтобы легче было вспомнить названия этих линий, всегда следует по мере их установления или же изменения составлять их отдельный список, записывая, например, так:

$AB \propto 1$, то есть AB равна 1 (4),
$GH \propto a$,
$BD \propto b$ и т. д. (5).

[Там же, с. 75—77.]

О природе уравнений. Чтобы иметь здесь возможность дать некоторые правила для избежания обеих этих ошибок (6), я должен предварительно привести некоторые общие сведения о природе уравнений, то есть о выражениях, составленных из нескольких членов, которые частью известны, а частью неизвестны и из которых одни равны другим или, лучше, которые, рассматриваемые все вместе, равны ничему; ибо уравнения часто удобнее рассматривать именно последним образом (7).

. . . . (8)

Каковы ложные корни? Однако часто случается, что некоторые из этих корней [т. е. корней уравнений] ложны или же меньше, чем ничто. Например, если допустить, что x выражает собой также недостаток какой-нибудь величины, скажем 5, то мы получим $x+5 \propto 0$, и если это умножить на $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$, то получится

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0,$$

уравнение, у которого четыре корня, именно три истинных (vraies), 2, 3, 4, и один ложный (fausse), 5 (9).

Сколько может иметься у всякого уравнения истинных корней? Отсюда также видно, сколько может иметься у всякого уравнения истинных корней и сколько ложных. Именно, истинных корней может быть столько, сколько раз в нем изменяются знаки + и —, а ложных — сколько раз встречается подряд два знака + или дважды знаки — (10).

Примечания. «La géométrie» Р. Декарта, опубликованная в качестве одного из приложений его философского труда «Рассуждение о методе» («Discours de la méthode», 1637), оказала огромное влияние на последующее развитие математики; с нее начинается период математики переменных величин. Главным предметом этого сочинения является приложение алгебры, в которой Декарт видел единственный общий метод математического исследования, к геометрии. С этой целью Декарт совершенствует и модернизует алгебру своих предшественников, в частности Виета, и разрабатывает новую аналитическую геометрию (см. ч. III, п. 6б).

Самой алгебре посвящены вводные параграфы 1-й книги «Геометрии» и вся 3-я (и последняя) книга. Основой алгебры и ее геометрических приложений служит алгебраическое исчисление отрезков, в котором числа интерпретируются как прямолинейные отрезки, а алгебраические операции как геометрические построения, результатом которых оказывается всегда опять-таки отрезок. В конечном счете все это опирается на античную теорию отношений Евдокса-Евклида (см. кн. II, ч. I, п. 1в), хотя она и не упоминается. Естественно, что в алгебраическом исчислении Декарта отпадает необходимость в дополнительных множителях, которых требовал принцип однородности Виета; однородность многочленов обеспечивается автоматически, ибо все их члены — отрезки Это позволило существенно упростить символику, которой Декарт вообще придал почти современный вид как в обозначении переменных и постоянных, так и в обозначении степеней.

Мы приводим сперва отрывки, характеризующие исчисление отрезков, а затем несколько текстов из общей теории алгебраических уравнений.

1. Извлечение корней рассматривается как вид деления, в связи с тем что корень n-й степени можно определить с помощью пропорции: например, если $1:x=x:a$, то $x=\sqrt{a}$; если $1:x=x:y=y:a$, то $x=\sqrt[3]{a}$, и т п.

2. Буква C, отделенная от многочлена под знаком радикала точкой, инициал слова cubicus — кубический. Сам знак радикала в виде V появляется в печати у коссиста Хр. Рудольфа в 1525 г. Записи вроде $\overset{3}{\mathrm{V}}$ или $\overset{4}{\mathrm{V}}$ применял А. Жирар (1629); более широкое применение такая запись получила с конца XVII и в XVIII в.

3. Декарт употреблял свое обозначение степеней в случае натуральных числовых показателей; аналогичное обозначение любых степеней ввел Ньютон. Добавим, что у Декарта буквы a, b, ... обозначали еще положительные величины, для отрицательных величин он добавлял знак минус. Терминология Декарта еще близка к принятой рядом математиков в XVI в. Так, Дж. Кардано называл отрицательные числа numeri ficti, т. е. придуманными, ложными, а положительные — numeri veri, т. е. истинными. Термины «положительный» (positivus) и «отрицательный» (nositivus), неоднократно появлявшиеся в XVI в., входят в обиход со второй половины XVII в.

4. Знак равенства ∞, придуманный Декартом, был вытеснен более удобным знаком =, предложенным в 1557 г. Р. Рекордом.

5. Неизвестные (и переменные) Декарт обозначает далее, как и мы, прежде всего последними буквами латинского алфавита x, y, z.

6. Общим методом решения уравнений высших степеней у Декарта было построение их корней как координат, надлежащим образом выбранных алгебраических кривых. Упоминаемые здесь «ошибки» относятся к выбору слишком сложных кривых или же к попыткам применить кривые недостаточно высокого порядка.

7. Записи алгебраических уравнений, при которых в правой части стоит нуль, иногда встречаются у М. Штифеля (1544) и Т. Гарриота (опубл. в 1631 г.). Декарт вполне оценил значение такой записи для формулировки общих теорем алгебры и применял ее систематически.

8. Пропущенный здесь текст, где говорится о возможном числе корней уравнений, см. в п. 9а.

9. До XVII в. отрицательные числа использовались как вспомогательные средства вычислений. Применение отрицательных корней уравнений до вы-

хода «Геометрии» встречается у А. Жирара, истолковывавшего их как «движение вспять». Однако сочинение Жирара по алгебре (1629) не получило в свое время большой известности. У Декарта отрицательные корни при их геометрическом построении выступают как отрезки ординат, лежащих по другую сторону оси абсцисс, чем положительные. Отрицательные числа применяются в «Геометрии» на равных правах с положительными и вместе с ними образуют множество действительных (réels) корней, которым противостоят воображаемые, мнимые (см. далее, п. 9a).

10. Это — известное «правило знаков Декарта». В примере, следующем за правилом, Декарт выразился не вполне осторожно, что дало основание истолковать его слова как утверждение, будто число положительных корней всегда в точности равно числу перемен знака; на самом деле Декарт здесь ограничивается случаем, когда все корни действительные. Эту необходимую оговорку сделал в своей «Всеобщей арифметике» (опубл. в 1707 г.) И. Ньютон, который дал и первое правило определения числа мнимых корней. Общее исследование правила знаков Декарта, точную формулировку которого можно найти в любом курсе высшей алгебры, произвел К. Ф. Гаусс (1828). Правило Декарта положило начало множеству исследований о распределении корней алгебраических уравнений; особенно известны теоремы Ж. Б. Фурье (не позднее 1796 г., опубл. в 1820 г.) и Ш. Стюрма, или, как его чаще называют у нас, Штурма (1829—1835).

в. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОРНЕЙ

1. ФОРМУЛЫ ВИЕТА ИЗ «ВСЕОБЩЕЙ АРИФМЕТИКИ» И. НЬЮТОНА (опубл. в 1707 г.)

[№ 37, с. 262—263.]

Из способа образования уравнений (1) ясно, что коэффициент второго члена, взятый с обратным знаком, равен сумме всех корней с их собственными знаками, коэффициент третьего члена равен сумме произведений всех корней, взятых по два, коэффициент четвертого члена, взятый с обратным знаком, равен сумме произведений всех корней, взятых по три, коэффициент пятого равен сумме произведений всех корней, взятых по четыре, и т. д. до бесконечности.

Положим $x=a$, $x=b$, $x=-c$, $x=d$ и т. д. или же $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$. Перемножая последовательно эти уравнения, мы можем образовывать уравнения, как было показано ранее. Если умножить $x-a$ на $x-b$, то получится уравнение

$$x^2-(a+b)\,x+ab=0,$$

в котором коэффициент второго члена с обратным знаком, т. е. $a+b$, есть сумма двух корней a и b, а коэффициент третьего члена ab равен единственному наличному их произведению. Если полученное уравнение умножить затем на $(x+c)$, то получится кубическое уравнение

$$x^3-(a+b-c)\,x^2+(ab-ac-bc)\,x+abc=0,$$

в котором коэффициент второго члена с обратным знаком, т. е. $a+b-c$, есть сумма корней a, b и $-c$; коэффициент третьего члена $ab-ac-bc$ есть сумма произведений корней, взятых по два: a и b, a и $-c$, b и $-c$, а коэффициент четвертого члена с обратным знаком $-abc$ есть единственное наличное произведение, образуемое последовательным перемножением всех корней, a на b, на $-c$.

II. СТЕПЕННЫЕ СУММЫ КОРНЕЙ

[Там же, с. 264.]

Допустим теперь, что коэффициенты членов какого-либо уравнения с обратными знаками обозначены p, q, r, s, t, v, т. е. коэффициент второго есть $-p$, третьего $-q$, четвертого $-r$, пятого $-s$ и т. д. Правильно соблюдая знаки членов, положите $p=a$, $pa+2q=b$, $pb+qa+3r=c$, $pc+qb+ra+4s=d$, $pd+qc+$ $+rb+sa+5t=e$, $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$ и т. д. до бесконечности, следуя тому же порядку. Тогда a будет сумма корней, b — сумма квадратов каждого из корней, c — сумма кубов, d — сумма четвертых степеней, e — сумма пятых степеней, f — сумма шестых степеней и т. д. Например, в уравнении

$$x^4-x^3-19x^2+49x-30=0,$$

в котором коэффициент второго члена есть -1, третьего -19, четвертого $+49$, пятого -30, вы должны положить $p=1$, $q=19$, $r=-49$, $s=30$. Отсюда получится, что $a=(p=)\,1$, $b=(pa+2q=$ $=1+38=)\,39$, $c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89$, $d=(pc+$ $+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)\,723$. Таким образом, сумма корней есть 1, сумма квадратов корней есть 39, сумма кубов есть -89, а сумма четвертых степеней есть 723. Действительно, корни этого уравнения суть 1, 2, 3, -5 и их сумма $1+2+3-5$ есть 1; сумма квадратов $1+4+9+25$ есть 39, сумма кубов $1+$ $+8+27-125$ есть -89, а сумма четвертых степеней $1+16+$ $+81+625$ есть 723.

Примечания. Алгебраическая часть «Геометрии» Декарта получила некоторое развитие в латинских изданиях этого труда 1649 г. и 1659—1661 гг., подготовленных Фр. ван Схоотеном и содержащих различные дополнения, сделанные как этим, так и другими учеными. Новый существенный шаг вперед в разработке алгебры сделал только И. Ньютон. Он изложил их в систематическом курсе лекций, который он читал в Кембриджском университете в 1673—1683 гг. и который был издан по его рукописям под названием «Arithmetica universalis» в 1707 г. Мы приводим отрывок, в котором выводятся зависимости между коэффициентами алгебраического уравнения (старший член которого имеет коэффициент 1) и симметрическими функциями их корней. Эти зависимости, отдельные случаи которых знал еще Дж. Кардано, были установлены Ф. Виетом в одном сочинении 1591 г., изданном в 1615 г. Виет, однако, не мог придать открытым им соотношениям надлежащую общность, так как не употреблял ни отрицательных ни, тем более, мнимых корней. В следующем затем отрывке содержатся открытые Ньютоном рекуррентные соотношения для степенных сумм корней; первые четыре такие суммы привел в 1629 г. А. Жирар.

1. Имеется в виду образование алгебраического уравнения, имеющего корнями числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, путем перемножения уравнений $x-a_1=0$, $x-a_2=0, \ldots, x-a_n=0$.

2. Рекуррентное соотношение, данное Ньютоном можно записать так: если корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ суть $x_1, \ldots, x_n$, то, обозначив $S_m=\sum_{k=1}^{n} x_k^m$, имеем

$$S_m+a_1S_{m-1}+a_2S_{m-2}+\ldots+a_m\cdot m=0$$

для любого $m \geqslant 1$.

Доказательство этих формул дали К. Маклорен (опубл. в 1748 г.), а впоследствии также Эйлер и Лагранж. Возможно, что именно эта работа Ньютона положила начало изучению симметрических функций и установлению основной теоремы: всякая рациональная симметрическая функция от n переменных рационально выражается через элементарные симметрические функции от этих переменных. Сам Ньютон применил степенные суммы для приближенного вычисления корней.

8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

а. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНУСА ОДНОГО ГРАДУСА ПО МЕТОДУ ДЖЕМШИДА АЛ-КАШИ

ИЗ «ТРАКТАТА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СИНУСА ОДНОГО ГРАДУСА» УЛУГБЕКА (1) *(первая половина XV в.)*

[№ 4, с. 539—551.]

Этот трактат об определении синуса одного градуса с помощью действий, опирающихся на геометрические и арифметические основания, которые внушил [мне] дражайший собрат, единственный в свое время Джемшид ибн Мас'уд, врач, по прозванию Гияс [ад-Дин] ал-Каши, да будет Аллах милосерден к нему...

... все сводится к задаче: вещи равны кубу и числу (2). Этого нет среди известных задач (3) Однако это перестанет быть скрытым, если делить число и куб на число вещей: в частном получится вещь Он, да помилует его Аллах, применил изящное ухищрение, состоящее во введении куба в деление (4). Сначала некоторые [цифры] числа делятся на число вещей Образуется куб частного и присоединяется к остатку от числа Затем их сумма делится еще раз. Образуется куб суммы двух частных, и его избыток над кубом, полученным в первый раз, присоединяется к остатку суммы. Далее [их] вторая сумма делится еще раз. Образуется куб суммы [трех] частных, и его избыток над кубом суммы двух частных присоединяется к остатку второй суммы. Далее третья сумма делится еще раз, и поступают так же, как раньше. Действие заканчивается тогда, когда доходят до того, что не принимается в расчет. Необходимо вводить в деление куб вещи, получающейся каждый раз в частном, с увеличивающейся точностью так, чтобы одно и то же не делилось два раза...

Если мы хотим ... определить синус одного градуса на основе доказанного, то надо сказать: умножим синус трех градусов на девятьсот и разделим произведение вместе с кубом частного на 45 поднятых один раз (5) ..., в результате получится синус одного градуса (6) ...

После восполнения и противопоставления (7) получается, что это равно 47 6 8 29 53 37 3 37 15 септим (8). Я утверждаю, что, применив восполнение и противопоставление, а также дополнение (9), мы установим такую схему действия:

	1	2	49	43	11	14	44	16	26	16	30
47 45 2	6	8	29	53	37	3	37	15			
	1										
2 1	7 30										
0	37										
		6	12	8							
	37 36	14 45	42	1							
	00	29 2	42 39	1 2	23	46	49				
		32 32	21 15	4	00	50	26				
		00	6 2	4 21	00 25	50 22	26 13	55	8	7	
			8 8	25 15	26	12	40	10	8	7	
			0	10 0	26 36	12 11	40 5	10 26	8 23	7	
				11 10	2 30	23	45	36	31	7	
				00	32	23	45	36	31	7	
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45		

В строке частного (10) будет записан тот синус одного градуса, который мы определим и наличие которого пока только возможно. Разделим 47 поднятых один раз на 45, также поднятые один раз. Получится 1 градус и остаток от делимого 2. К этому [прибавим] куб 1, также [равный 1] градусу. [Записывая это] под его родом вместе с остатком, получим 2 6. Далее делим сумму, получается 2 минуты и остаток 36 8. Образуется куб 1 2, это 1 6 12 8, и записывается по разрядам. Избыток этого над первым кубом записывается под его родами вместе с остатком, это 37 14 42 1. Далее делится эта сумма, получится 49 секунд. Куб 1 2 49 есть 1 8 51 10 23 46 49. Возьмем избыток этого над 1 6 12 8, это 0 2 39 2 23 46 49. Это записывается под его родами, а затем складывается [с остатком]. Получится 0 17 21 4 0 50 26. Раньше от градусов оставалось 15 минут, которые делятся вместе с этим, в сумме получается 0 32 21 [4 0 50 26]. В частном получатся 43 терции. От 21 секунды остается 6 секунд и т. д. В силу принципов этот остаток складывается с разностью 1 2 49 23 и куба 1 2 49, т. е. с 2 21 25 22 13 55 8 7 нонами. Если прибавить к этой разности 21 и т. д., получится 23 25 26 12 40 10 8 7, а если вычесть из 23 секунд 15 секунд, останется 8 секунд. Далее разделим это, в частном получится 11 кварт. От 25 терций останется 10 терций. Складывая и поступая, как было указано для секунд, получим 11 2 23 и т. д. сколько угодно. Далее эта строка сокращается путем отбрасывания того, что за нонами, и вместо этого записывается [сокращенная строка]...

Примечания. 1. Трактат, который ранее приписывали сотруднику Гияс ад-Дина Джемшида ал-Каши по Самаркандской обсерватории Улугбека Мусе Кази-заде ар-Руми, написан, как выяснили недавно Б. А. Розенфельд и А. Ахмедов [5а], Улугбеком. Метод ал-Каши разработан в связи с составлением тригонометрических таблиц для «Астрономических таблиц Улугбека» намного превышавших своей точностью тригонометрические таблицы предшественников Улугбека (см. ч. III, п. 4б, прим. 12).

2. Уравнение «вещи равны кубу и числу» — кубическое уравнение $px = x^3 + q$.

Синус 1° определяется ал-Каши по синусу 3° как корень кубического уравнения трисекции угла

$$\sin 3^\circ = 3 \sin 1^\circ - 4 \sin^3 1^\circ,$$

где $\sin 1^\circ$ — искомая «вещь», а $\sin 3^\circ$ — известная величина, значение которой в шестидесятеричных дробях, которыми пользовались средневековые астрономы равно 3, 8 24 33 59 34 28 14 29.

3. Здесь имеются в виду те алгебраические уравнения, которые к тому времени умели решать в радикалах т. е. квадратные уравнения и приводимые к ним.

4. Уравнение $px = x^3 + q$ записывается в виде $x = \frac{q + x^3}{p}$ (1) и решается следующим образом. Положим, что $x = a + b + c + \ldots$, где a, b, c — последовательные значения шестидесятеричных разрядов, начиная с первого значащего. Первое приближение в силу заранее известной малости x получается из (1) путем деления q на p, т. е. пренебрегая весьма малым x^3, причем

деление проводится до первого значащего разряда $a:x_1=\frac{q}{p}=a$. Второй знак находится путем деления $\frac{q-ap+a^3}{p}=b+\ldots$, третий знак—путем деления $\frac{(q-ap+a^3)-bp+[(a+b)^3-a^3]}{p}=c+\ldots$, т. е. фактически из $\frac{q-(a+b)\,p+(a+b)^3}{p}=c+\ldots$ и т. д. Если обозначить $x_1=a$, $x_2=a+b$, $x_3=a+b+c$ и т. д., то

$$x_1=a,$$

$$x_2=\frac{q+a^3}{p}=\frac{q+x_1^3}{p},$$

$$x_3=\frac{q+(a+b)^3}{p}=\frac{q+x_2^3}{p}$$

и вообще

$$x_n=\frac{q+x_{n-1}^3}{p}.$$

В случае рассматриваемого уравнения процесс сходится весьма быстро.

5. Ал-Каши пользовался не только шестидесятеричными дробями, но и шестидесятеричной записью целых чисел, причем целые числа $a<60$ он называл градусами, а целые числа вида $a\cdot 60^k$—поднятыми k раз.

6. Синус 1° вычисляется в предположении, что синус 90° равен 60. В таком случае уравнение трисекции угла, приведенное в прим. 2, можно переписать в виде

$$60^2 \sin 3^\circ=3\cdot 60^2 \sin 1^\circ-4 \sin^3 1^\circ,$$

т. е.

$$45\cdot 60 \sin 3^\circ=45\cdot 60 \sin 1^\circ-\sin^3 1^\circ$$

или

$$\sin 1^\circ=\frac{15\cdot 60 \sin 3^\circ+\sin^3 1^\circ}{45\cdot 60},$$

причем
$15\cdot 60 \sin 3^\circ=15\ 0{\cdot}3{,}8\ 24\ 33\ 59\ 34\ 28\ 14\ 29=47\ 6{,}8\ 29\ 53\ 37\ 3\ 37\ 15.$

7. О восполнении и противопоставлении см. п **5а**, прим. **1**.

8. Здесь арабские названия разрядов шестидесятеричных дробей переведены эквивалентными латинскими терминами «минута», «секунда», «терция», «кварта», «квинта», «септима», «октава», «нона», «децима» и т. д.

9. Дополнение—приведение алгебраического уравнения к виду, когда коэффициент в старшем члене равен единице.

10. В рукописи, с которой сделан перевод для приведенной таблицы, было оставлено пустое место, и она воспроизведена по книге Салеха Зеки «Сохранившиеся следы», располагавшего полной рукописью трактата (Асар бакийа. Стамбул, 1911, с. 129). «Строка частного»—строка над таблицей, в которой последовательно, по мере их определения, записывались знаки частного; нижняя строка таблицы—«строка делителя», где записывался делитель во всех своих положениях. Как видно, ал-Каши вычислил синус 1 градуса с большой точностью. При переводе его результата в десятичные дроби получается 17 верных знаков.

6. МЕТОД НЬЮТОНА—РАФСОНА

ИЗ СОЧИНЕНИЯ И. НЬЮТОНА «АНАЛИЗ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЧЛЕНОВ» (1669, опубл. в 1711 г.)

[№ 38, с. 9—11.]

Пусть требуется решить уравнение

$$y^3-2y-5=0$$

и 2 представляет то число, которое отличается от искомого корня меньше чем на свою десятую часть. Тогда я полагаю $2+p=y$ и подставляю это выражение в уравнение, причем получается новое:

$$p^3+6p^2+10p-1=0,$$

у которого следует определить корень p, чтобы прибавить его к первому результату. Отсюда (пренебрегая p^3+6p^2 по малости) имеем приблизительно

$$10p-1=0,$$

или

$$p=0,1.$$

Поэтому я пишу в результате 0,1 и полагаю $0,1+q=p$; это выражение я подставляю, как и раньше, причем получается

$$q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0.$$

А так как уравнение

$$11,23q+0,061=0$$

почти соответствует истине, или q почти равно —0,0054 (деление производится до тех пор, пока не определится столько знаков, сколько отделяет первые знаки этого и основного результатов (1)), и так как —0,0054 отрицательно, то я пишу его в нижней части результата.

Полагая $-0,0054+r=q$, я это выражение подставляю, как раньше, и продолжаю эти операции сколько угодно раз. Если я желаю продолжать действия до тех пор, пока не получится в результате вдвое больше цифр, чем находится во всем уже полученном результате, то в $6,3q^2+11,23q+0,061$, где, конечно, первый член q^3 отброшен вследствие его ничтожности, я вместо q подставляю $-0,0054+r$ и получаю приблизительно

$$6,3r^2+11,16196r+0,000541708=0$$

или (отбрасывая $6,3r^2$) приблизительно

$$r=\frac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853,$$

что и пишу в отрицательной части результата. Наконец, вычитая отрицательную часть результата из положительной, я имею искомый результат 2,09455147.

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $\overline{+2,09455147}=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8\ +12p\ +6p^2\ +p^3$ $-4\ -2p$ -5
	Сумма	$-1\ +10p\ +6p^2\ +p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $10p$ -1	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$ $+0,06\ +1,2\ +6,0$ $+1\ +10$ -1
	Сумма	$+0,061+11,23q\ +6,3q^2\ +q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$ $-0,060642\ +11,23$ $+0,061$
	Сумма	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004853+s=r$		

Уравнения высших степеней решаются совершенно так же, и дело будет к концу облегчено, как это было сделано здесь, если ты будешь постепенно отбрасывать первые его члены.

. . . .

Этот метод решения уравнений,— не знаю, опубликованный или нет, мне кажется в сравнении с другими более простым и удобным для определения. Доказательство его явствует из самого способа действия, на основании чего его легко в случае необходимости вспомнить.

Примечания. Метод Ньютона, принадлежащий к числу наиболее простых и известных приемов приближенного вычисления действительных корней уравнений, был впервые опубликован в главе 94 «Алгебры» Дж. Валлиса (англ. изд. 1685 г.; лат. изд. 1693 г.). Сам Ньютон изложил его много раньше в сочинении «Analysis per aequationes numero terminorum infinitas», подготовленном в 1669 г., но напечатанном лишь в 1711 г. В 1690 г. Дж. Рафсон опубликовал привычную теперь схему вычислений, в которой последовательные приближения x_1, x_2, ... корня уравнения $f(x)=0$ находятся по исходному значению x_0 с помощью одной и той же итеративной формулы

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots),\ -$$

мы применили нашу современную запись. Рафсон и Ньютон рассматривали только алгебраические уравнения; Л. Эйлер вывел этот метод (опубл. в 1755 г.) с помощью разложения функции $f(x+h)$, которая может быть и трансцендентной, в ряд Тейлора. Метод Ньютона, как установил еще Э. Галлей (1694), не всегда дает значении x_n, сходящиеся к истинному значению корня; условия применимости метода исследовали Ж. Р. Муррайль (1768 г.), Ж. Л. Лагранж (1798) и Ж. Б. Фурье (опубл. посмертно в 1831 г.).

1. При делении 0,061 на 11,23 ошибка уменьшается более чем в 10 раз. Если 0,061 взята с точностью до $\frac{1}{10^3}$, то $\frac{0{,}061}{11{,}23}$ будет с точностью до $\frac{1}{10^4}$. Число мест, отделяющих в значениях 2 и 0,005 знаки 2 и 5, равно двум, и в частном берутся соответственно два знака: 5 и 4.

в. МЕТОД ДАНДЕЛЕНА—ЛОБАЧЕВСКОГО—ГРЕФФЕ

ИЗ КНИГИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО «АЛГЕБРА, ИЛИ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ» (1834)

[№ 32, т. 4, с. 356.]

257. Можно иногда с выгодой употребить способ приближения, основанный на том, что с возвышением в степень числа, наконец, делаются неприметными в сравнении с самым большим из них по величине. Так, если дается уравнение

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

и составляем новое

$$y^n - A_1y^{n-1} + A_2y^{n-2} - \ldots + (-1)^n A_n = 0,$$

которого корни будут степени с показателем r от корней данного, то чем r возьмем более, тем $\sqrt[r]{A_1}$ сделаем ближе к самому большому по величине из корней первого уравнения. Если бы даже встречались между корнями по два воображаемых, которым всегда можно давать вид $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$ или

$$\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \qquad \rho(\cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta),$$

положивши $\rho^2 = a^2 + b^2$, $b = a\operatorname{tang}\theta$, то и степени таких корней делаются, наконец, неприметными, как скоро ρ менее самого большого из действительных корней.

Всего простее возвышать корни уравнения несколько раз в квадрат, покуда приближение окажется достаточным. Для подобного вычисления будут служить (ст. 245) уравнения:

$$A_1 = a_1^2 - 2a_2, \quad A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4, \quad A_3 = a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_6$$

и т. д.

Для примера возьмем уравнение из ст. 255:

$$x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Находим

$r=2$	4	8
$A_1=23$ $A_2=19$ $A_3=19$ $A_4=10$ $A_5=1$	491 —491 —45	242067

После чего

$$x=\sqrt[5]{242067}=4{,}70968. \qquad (2)$$

Примечание. Среди приемов приближенного вычисления корней алгебраических уравнений особое место занял метод возведения в степень, предложенный независимо друг от друга Ж. Данделеном (1826), Н. И. Лобачевским (1834) и К. Греффе (1837). В отличие от других методов, например Ньютона—Рафсона (см. выше, п. 8б), служащих для вычисления каждого действительного корня в отдельности и требующих предварительного отделения корней, метод Данделена—Лобачевского—Греффе позволяет одновременно находить все, в том числе и комплексные, корни алгебраических уравнений без кратных корней.

Суть метода, если ограничиться для простоты случаем действительных корней, в следующем: пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($|x_1|>|x_2|>\ldots>|x_n|$) — корни уравнения

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0, \qquad (1)$$

и пусть

$$y^n+A_1y^{n-1}+A_2y^{n-2}+\ldots+A_n=0 — \qquad (2)$$

уравнение, все корни которого $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — r-е степени корней уравнения (1): $y_1=x_1^r$, $y_2=x_2^r$, $\ldots$, $y_n=x_n^r$; тогда, если r достаточно велико, то y_1 будет значительно больше, чем $y_2>y_3>\ldots>y_n$, и, учитывая, что $y_1+y_2+\ldots+y_n=-A_1$, можно положить $y_1=x_1^r\approx -A_1$, определить из этого приближенного равенства x_1 (знак которого определяется подстановкой в исходное уравнение); затем, используя формулы Виета, т. е. зависимости между суммами произведений пар, троек и т. д. корней уравнения (2) и его коэффициентами, определяют $y_2, y_3, \ldots$ и, наконец, $x_2, x_3, \ldots$

1. Точнее говоря, в ст. 255 рассмотрено уравнение, корни которого отличаются от написанного здесь по знаку, т. е. уравнение $x^5+3x^4-7x^3+5x^2-1=0$, и для его решения применяется представление корня, лежащего между —5 и —4, в виде непрерывной дроби; получив приближение $x=-4{,}70968$, Лобачевский его затем уточняет по способу Ньютона.

2. В предисловии к «Алгебре» Лобачевский характеризовал этот метод как предпочтительный в сравнении с другими ему известными по краткости и легкости вычислений. Однако он ограничился изложением общей схемы и одним простым примером. Первое детальное изложение метода дал Греффе. Об истории этого вопроса см. [№ 59, с. 124—127.]

9. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

а. ПЕРВЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМЫ

I. ИЗ «НОВОГО ОТКРЫТИЯ В АЛГЕБРЕ» А. ЖИРАРА (1629)

[№ 83, с. E4.]

Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины.

II. ИЗ «ГЕОМЕТРИИ» Р. ДЕКАРТА (1637)

[№ 23, с. 76.]

Сколько корней может иметь любое уравнение? Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений; ибо, если, например, принять x равным 2 или же $x-2$ равным ничему, а также $x \propto 3$ или же $x-3 \propto 0$, то, перемножив оба эти уравнения $x-2 \propto 0$ и $x-3 \propto 0$, мы получим

$$xx-5x+6 \propto 0 \text{ или же } xx \propto 5x-6,$$

уравнение, в котором величина x имеет значение 2 и вместе с тем значение 3. Если принять еще, что $x-4 \propto 0$, и умножить это выражение на $xx-5x+6 \propto 0$, то мы получим

$$x^3-9xx+26x-24 \propto 0,$$

другое уравнение, в котором x, обладая тремя измерениями, имеет вместе с тем три значения, а именно 2, 3 и 4.

[Там же, с. 85.]

Как истинные, так и ложные корни могут быть или действительными, или воображаемыми. Наконец, как истинные, так и ложные корни не всегда бывают действительными, оказываясь иногда лишь воображаемыми (imaginaires). Другими словами, хотя всегда можно вообразить себе (imaginer) у каждого уравнения столько корней, сколько я сказал, но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням (1). Так, например, хотя у уравнения

$$x^3-6xx+13x-10 \propto 0$$

можно вообразить себе три корня, но на самом деле оно имеет только один действительный, именно 2.

Примечания. Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени, а также прием образования уравнений с помощью перемножения двучленов вида $x-a$, естественно, навели на мысль, что уравнение может иметь столько (действительных) корней, какова его степень. Впервые такую мысль высказал немецкий алгебраист П. Роте (1608), который писал, что «кубикосcические» уравнения имеют по большей части три корня, и «цензицензикоссические» (т. е. 4-й степени) — четыре, а последующие столько, сколько указывает «высшее количество» уравнения, но не более. Затем основная теорема алгебры уже в виде предложения о равенстве числа корней уравнения его степени встречается в « Invention nouvelle en l'algèbre» А. Жирара (1629), из которого мы привели ее лаконическую формулировку. При этом Жирар учитывал возможность мнимых корней, которые он называл невозможными (impossibles) и употребление которых мотивировал их необходимостью для справедливости общих правил алгебры и вообще их полезностью. Книга Жирара большой известности не получила. Мы приводим также две формулировки теоремы из «Геометрии» Декарта. В первой из них принимаются во внимание только действительные корни, во второй предложение обобщается путем привлечения мнимых корней. Впрочем, ни один из ученых того времени не вкладывал в теорему тот смысл, в каком ее понимаем мы. В XVII в. умели производить только простейшие арифметические действия над числами вида $a+b\sqrt{-1}$ и, например, операция, извлечения корня из них оставалась настолько неисследованной, что даже Лейбниц (правда, по случайному недосмотру) полагал, что эта операция порождает новые категории мнимых чисел. Жирар и Декарт вводили свои «невозможные», или «воображаемые», корни уравнений высших степеней только по аналогии с мнимыми комплексными корнями уравнений 3-й и 4-й степени как удобные фикции совершенно неизвестной им алгебраической формы. Лишь в середине XVIII в. Даламбер и Эйлер доказали, что все употребительные алгебраические и аналитические операции над числами вида $a+b\sqrt{-1}$ приводят к таким же числам. Добавим, что еще с конца XVII в. начались попытки геометрического истолкования мнимостей, но успеха в этом впервые достиг лишь К. Вессель (1799).

1. Слово imaginaire переведено здесь как «воображаемый», а не «мнимый», как принято теперь, только в связи со следующей фразой Декарта, где глагол imaginer приходится передавать словом «воображать». От imaginaire произошел знак мнимой единицы i, введенный Л. Эйлером (1777, опубл. в 1794 г.).

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭЙЛЕРА

ИЗ СТАТЬИ Л. ЭЙЛЕРА «ИССЛЕДОВАНИЯ О МНИМЫХ КОРНЯХ УРАВНЕНИЙ» (1751)

ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

[№ 77, с. 79—80; перевод И. Г. Башмаковой.]

Итак, мы предполагаем, что, какова бы ни была степень предложенного уравнения

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+N=0,$$

оно всегда может быть представлено в виде

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)\ldots(x+\nu)=0,$$

причем число этих простых множителей равно n. И так как эти множители, будучи перемноженными между собой, должны произвести предложенное уравнение, то очевидно, что количества A, B, C, D, ..., N будут, таким образом, определены через количества α, β, γ, δ, ..., ν, что

A = сумме этих количеств α, β, γ, δ, ..., ν,

B = сумме их попарных произведений,

C = сумме их произведений по три,

D = сумме их произведений по четыре

. . . .

и, наконец,

N = произведению их всех, $\alpha\beta\gamma\delta, \ldots, \nu$.

Но так как число этих равенств $= n$, то значение букв α, β, γ, δ, ..., ν будет в свою очередь определяться из них (1)...

[Тогда утверждается (там же, с. 89):]

«Каждое уравнение, которое нельзя разложить на действительные простые множители, имеет всегда действительные множители второй степени».

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ (2).

Теорема 1. **[Там же, с. 90—91.]**

Всякое уравнение нечетной степени, которое имеет общий вид

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = 0,$$

всегда имеет по крайней мере один действительный корень; если же у него несколько таких корней, то число их нечетно.

Доказательство

Положим

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \ldots + N = y$$

и рассмотрим кривую, выражаемую этим уравнением. Очевидно, что каждой абсциссе x отвечает только одна аппликата y, которая будет всегда действительной, и что там, где аппликата y исчезает, значение абсциссы x будет корнем предложенного уравнения. Значит, это уравнение будет иметь столько действительных корней, сколько имеется мест, в которых аппликата y уничтожается, что случается там, где кривая пересекает ось абсцисс; так что число действительных корней будет равно числу пересечений кривой с осью, на которой мы берем абсциссы. Чтобы судить о числе этих пересечений, положим сначала абсциссу x положительной и бесконечно большой или $x = \infty$; ясно, что тогда

$$y = \infty^{2m+1} = \infty,$$

откуда следует, что ветвь кривой, которая отвечает положительным бесконечным абсциссам, находится над осью, так как ее аппликаты y положительны. Положим теперь абсциссы отрицательными и также бесконечными или $x = -\infty$, тогда получим

$$y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty;$$

значит, аппликаты будут здесь отрицательными и ветвь кривой будет находиться под осью. Но поскольку эта ветвь непрерывна с другой, расположенной над осью, то совершенно необходимо, чтобы кривая где-нибудь пересекла ось, а если она пересечет в нескольких точках, то число этих точек должно быть нечетным. Откуда следует, что предложенное уравнение необходимо должно иметь по крайней мере один действительный корень, а если их у него несколько, то число их будет всегда нечетным. Ч. т. д.

. . . .

Теорема 3.

Каждое уравнение четной степени, у которого последний член, или абсолют, имеет отрицательное значение, как например

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots - OO = 0,$$

всегда имеет по крайней мере два действительных корня, из которых один положителен, а другой отрицателен.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

[Там же, с. 96—99, 105, 112—113.]

Теорема 4.

Любое уравнение четвертой степени

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

можно разложить на два действительных множителя второй степени **(3)**.

. . . .

Схолия 2 (4).

Сила доказательства этой теоремы заключается в том, что неизвестное u определяется уравнением 6-й степени и что последний член этого уравнения существенно отрицателен. Оба эти обстоятельства могут быть открыты с помощью одного только рассуждения, так что нет необходимости разыскивать само уравнение относительно неизвестного u. Итак, поскольку впоследствии, когда я перейду к уравнениям более высоких степеней, будет очень трудно и даже невозможно найти уравнение, которое определяет неизвестное u, весьма важно установить оба упомянутых обстоятельства для предложенного уравнения 4-й степени путем только рассуждения для того, чтобы проложить путь для применения этого же рассуждения, когда предложенное уравнение будет более высокой степени.

Пусть задано уравнение, уже освобожденное от второго члена

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0,$$

и если положить четыре корня этого уравнения

$$x=\mathfrak{a},\quad x=\mathfrak{b},\quad x=\mathfrak{c},\quad x=\mathfrak{d},$$

то сразу же ясно, что сумма этих четырех корней

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$$

равна нулю.

Далее, если положить общим образом один из квадратных множителей этого уравнения $xx-ux+\beta$ или $xx-ux+\beta=0$, то ясно, что u будет суммой двух каких-либо корней из четырех предположенных $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Значит, эта буква u, рассмотренная как наше неизвестное, может принимать столько различных значений, сколько имеется различных сочетаний из двух букв, взятых из этих четырех $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Но это число сочетаний равно, как известно, $\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6$, поэтому буква u может принимать 6 различных значений, и не больше. Значит, буква u будет определяться уравнением 6-й степени, которое будет иметь следующие шесть корней:

I. $u=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, II. $u=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, III. $u=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}$,
IV. $u=\mathfrak{c}+\mathfrak{d}$, V. $u=\mathfrak{b}+\mathfrak{d}$, VI. $u=\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$.

Но так как $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=0$, то если мы положим первые три из этих шести корней

I. $u=p$, II. $u=q$, III. $u=r$,

то три последние будут

IV. $u=-p$, V. $u=-q$, VI. $u=-r$,

так что каждое значение u, взятое с минусом, будет вновь значением u. Поскольку нам теперь известны эти шесть корней, то уравнение, которому они удовлетворяют, будет

$$(u-p)(u-q)(u-r)(u+p)(u+q)(u+r)=0,$$

или, соединяя эти скобки попарно, а именно те, в которые входят величины противоположных знаков, получим

$$(uu-pp)(uu-qq)(uu-rr)=0,$$

что дает уравнение 6-й степени, в котором отсутствуют все нечетные степени u, в точности так, как мы это нашли при доказательстве теоремы.

Но, кроме того, я замечаю, что последний свободный член этого уравнения будет $= -pp \cdot -qq \cdot -rr = -ppqqrr$, который, будучи квадратом со знаком —, будет существенно отрицательным. Откуда следует, что это уравнение обязательно будет иметь по крайней мере два действительных корня, из которых один или другой, взятый в качестве u, даст квадратный действительный множитель предложенного уравнения. Вот и еще одно доказательство предложенной теоремы, с которым будут схожи доказательства последующих теорем.

Но мне, конечно, возразят, что я здесь предположил, что количество pqr является действительным количеством, а его квадрат $ppqqrr$ положителен; а это сомнительно, поскольку корни $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ мнимые, то может случиться, что квадрат количества pqr, которое из них составлено, будет отрицательным. Но я отвечаю на это, что подобный случай никогда не может иметь места, так как какими бы мнимыми ни были корни $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, известно, тем не менее, что должно быть

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=0,$$
$$\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}+\mathfrak{ad}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{bd}+\mathfrak{cd}=B,$$
$$\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=-C,$$
$$\mathfrak{abcd}=D,$$

причем эти количества B, C, D действительны. Но так как $p=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $q=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $r=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}$, то их произведение

$$pqr=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$$

можно будет определить, как известно, через количества B, C, D и, вследствие этого, оно будет действительным, точно так, как мы видели, что оно действительно $pqr=-C$, и $ppqqrr=CC$. Легко установить, что и для высших уравнений имеет место то же обстоятельство и что невозможно сделать мне в этом пункте возражения против последующих доказательств.

. . . .

[Затем идут аналогичные доказательства для уравнений 8-й и 16-й степени, после чего доказывается.]

Теорема 7 (5).

Каждое уравнение, степень которого является некоторой степенью двойки, как 2^n (где n — целое число, большее 1), разложимо на два действительных множителя степени 2^{n-1}.

. . . .

Теорема 11.

Если алгебраическое уравнение любой степени имеет мнимые корни, то каждый из них будет содержаться в этой общей формуле

$M+N\sqrt{-1}$, где буквы M и N означают действительные количества **(6)**.

Пусть предложено некоторое уравнение степени n:

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots=0,$$

так что число всех его корней равно n. Разложим это уравнение на все его действительные множители, которые будут либо простыми вида $x-p=0$, или второй степени вида $x^2-2px+q=0$; и все корни могут быть найдены путем решения уравнений, которые возникают из этих множителей, если приравнять их нулю. Но каждый простой множитель или уравнение $x-p=0$ дает действительный корень $x=p$, а каждый множитель второй степени (double) или уравнение $x^2-2px+q=0$ заключает два корня:

$$x=p+\sqrt{(pp-q)} \quad \text{и} \quad x=p-\sqrt{(pp-q)},$$

которые также будут действительными, если $pp>q$. Но если $pp<q$, то пусть $q=pp+rr$, тогда $\sqrt{pp-q}=\sqrt{-rr}=r\sqrt{-1}$; значит, оба эти корня будут мнимыми, а именно

$$x=p+r\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad x=p-r\sqrt{-1}.$$

Поскольку мы доказали, что каждое уравнение всегда возможно разложить на действительные множители, простые или второй степени (ou simples ou doubles), то все корни будут также либо действительными, либо мнимыми вида $M+N\sqrt{-1}$, где M и N являются действительными, так что мнимое, которое в них входит, содержится только в виде $\sqrt{-1}$. Ч. т. д.

Примечания. Первое доказательство основной теоремы алгебры опубликовал в 1748 г. Ж. Даламбер. Это доказательство имело чисто аналитический характер. Почти одновременно Л. Эйлер нашел другое доказательство, в котором свойства непрерывности используются в минимальной степени и которое в главной своей части было алгебраическим. Соответствующая работа Эйлера «Recherches sur les racines imaginaires des équations» была напечатана в 1751 г.

1. В доказательстве Эйлера нас прежде всего поражает постановка вопроса, хотя для математиков XVIII в. она была вполне естественна. Точно такой же точки зрения придерживались Даламбер, Лагранж и Лаплас.

Эта точка зрения такова: предполагается, что алгебраическое уравнение n-й степени $f_n(x)=0$ с действительными коэффициентами можно представить в виде

$$f_n(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые символы, о которых известно только, что арифметические операции с ними подчиняются тем же законам, что и для обычных чисел. Основная теорема заключается при таком предположении в доказательстве того, что все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ будут действительными или комплексными числами.

Такая постановка вопроса сближает основную теорему алгебры в понимании Эйлера с теоремой Вейерштрасса-Фробениуса о том, что любая числовая система конечного ранга над полем действительных чисел, в которой законы операций те же, что и для рациональных чисел, совпадает либо с полем действительных чисел, либо с полем комплексных чисел. В доказательстве Эйлера требование конечности ранга заменяется эквивалентным требованием, чтобы воображаемые числа были корнями алгебраического уравнения степени n с действительными коэффициентами.

Точку зрения Эйлера подверг критике молодой Гаусс (см. п. 9в).

2. Две топологические теоремы, на которые опирается Эйлер, могут быть сведены к одной: если непрерывная функция в концах интервала, где она определена, принимает значения разных знаков, то по крайней мере в одной точке внутри интервала она обращается в нуль. Эта теорема была впервые доказана Б. Больцано (см. кн. II, ч. I, п. 9а).

3. Для доказательства Эйлер сначала делает подстановку, которая переводит исходное уравнение в уравнение той же степени, у которого отсутствует второй член. Пусть это уравнение будет

$$x^4+Bx^2+Cx+D=0.$$

После этого Эйлер представляет его в виде

$$(x^2+ux+\alpha)(x^2-ux+\beta)=0$$

и, сравнивая произведение этих скобок с предыдущим уравнением, находит, что u должно удовлетворять уравнению

$$u^6+2Bu^4+(B^2-4D)u^2-C^2=0.$$

Свободный член этого уравнения отрицателен, и оно по теореме 3 имеет два действительных корня, положительный и отрицательный, которые и берутся в качестве значений u во множителях $x^2+ux+\alpha$ и $x^2-ux+\beta$.

4. Схолия 2 показывает, что Эйлеру уже за 20 лет до выхода в свет «Размышлений об алгебраическом решении уравнений» Лагранжа были известны многие основные факты теории алгебраических уравнений, которые впоследствии составили основу теории Галуа, а именно:

а) рациональная функция от корней уравнения (в данном случае u), принимающая при всевозможных перестановках корней ν различных значений, удовлетворяет алгебраическому уравнению степени ν, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения;

в) рациональная функция от корней уравнения, не изменяющаяся ни при каких перестановках корней, рационально выражается через коэффициенты исходного уравнения (основная теорема о симметрических функциях).

Эти основные положения Эйлер использует и дальше, при исследовании уравнений степени $2m=2^n$. В теоремах 5 и 6 он доказывает, что уравнения 8-й и 16-й степени раскладываются соответственно в произведение двух множителей 4-й и 8-й степени с действительными коэффициентами. При этом он следует той схеме, которая была намечена в схолии 2.

5. Доказательство теоремы 7, по существу, только намечено. Имеющиеся там пробелы были восполнены Лагранжем в его работе «О виде мнимых корней уравнения», опубликованной в 1774 г.

6. Эта заключительная теорема и представляет собой первый вариант теоремы Вейерштрасса — Фробениуса.

в. КРИТИКА ПОСТАНОВКИ ВОПРОСА В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЭЙЛЕРА

I. ИЗ РАБОТЫ К. Ф. ГАУССА «НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ТОМ, ЧТО ВСЯКАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МОЖЕТ БЫТЬ РАЗЛОЖЕНА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПЕРВОЙ ИЛИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ» (1799)

[№ 82, с. 12—13, перевод И. Г. Башмаковой.]

Так как, помимо действительных и мнимых количеств $a+b\sqrt{-1}$, нельзя представить никаких других видов количеств, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предполагается в качестве основного предложения; но даже если бы можно было придумать еще и другие виды количеств, как F, F', F'', ..., то и тогда нельзя было бы принять без доказательства, что каждое уравнение удовлетворяется либо действительным значением x, либо значением вида $a+b\sqrt{-1}$, либо вида F, либо вида F' и т. д. Поэтому это основное предложение может иметь только такой смысл: каждое уравнение может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо мнимым вида $a+ +b\sqrt{-1}$, либо, может быть, некоторым значением другого, еще неизвестного вида, либо значением, которое не содержится ни в каком виде. Как эти количества, о которых мы не можем составить никакого представления, — эти тени теней, — должны складываться или умножаться, этого нельзя понять с ясностью, требующейся в математике.

II. ИЗ РАБОТЫ К. Ф. ГАУССА «ВТОРОЕ НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ТОМ, ЧТО ВСЯКАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЦЕЛАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МОЖЕТ БЫТЬ РАЗЛОЖЕНА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПЕРВОЙ ИЛИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ» (1814—1815)

[№ 82, с. 40; перевод И. Г. Башмаковой.]

Это предложение (о возможности разложения многочлена на множители.— *Перев.*), по крайней мере в том месте, где речь идет об общем доказательстве этой разложимости, есть не что иное, как Petitio principii.

Примечание. Гаусс дал четыре доказательства основной теоремы алгебры, из которых первое было предметом его докторской диссертации «Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi potest» (1799). Гаусс, прежде всего, резко критикует постановку вопроса, которую безоговорочно принимали Эйлер, Лагранж, Лаплас и другие его предшественники. Сам Гаусс исходил из того, что поле C комплексных чисел $a+b\sqrt{-1}$ заранее определено, и доказывал, что у каждого алгебраического уравнения с действительными коэффициентами в этом поле имеется корень, или, что то же самое, доказывал разложимость соответствующего многочлена на действительные множители 1-й или 2-й степени. Последнее доказывалось, разумеется, без предположения о существовании корней.

Первое доказательство Гаусса было целиком аналитическим. Впоследствии он вновь обратился к основной теореме и в сочинении «Demonstratio nova altera theorematis...» (1814—1815) дал на этот раз безупречно строгое «алгебраическое» доказательство, очень близкое по идеям к доказательству Эйлера. Однако и здесь Гаусс нигде не предполагал существования корней. Второй из приведенных фрагментов показывает, что он обвинил даже рассуждение Эйлера в Petitio principii, т. е. в порочном круге. Это обвинение несправедливо. В доказательстве Эйлера есть пробел, но нет порочного круга, так как, на самом деле, можно построить поле разложения многочлена, не предполагая заранее существования поля комплексных чисел. Такое построение известно теперь под названием конструкции Л. Кронекера, который предложил ее в 1882 г. При этом если $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из некоторого поля k, над которым уравнение $f(x)=0$ неприводимо, то по методу Кронекера можно построить поле $\varkappa$ разложения этого многочлена, т. е. такое минимальное поле, над которым $f(x)$ распадается в произведение линейных множителей:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Тогда основная теорема алгебры будет состоять в том, что $\varkappa$ является подполем поля C комплексных чисел или изоморфно его подполю. Этот второй подход Г. Вейль назвал точкой зрения, характерной для алгебры, между тем как подход в первом доказательстве Гаусса характерен для анализа, все операции которого разворачиваются над полем комплексных чисел.

Заметим, что, по существу, во втором доказательстве Гаусса содержится конструкция поля разложения многочлена $f(x)$, хотя и в очень завуалированной форме [см. статью И. Г. Башмаковой, № 9]. Независимо от Гаусса построил поле разложения для $f(x)=x^2+1=0$ О. Коши. Для этого многочлена поле разложения совпадает со всем полем C комплексных чисел. Наконец, общую конструкцию, как мы говорили, провел Л. Кронекер.

10. РАЗРЕШИМОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

а. ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

ИЗ МЕМУАРА Ж. Л. ЛАГРАНЖА «РАЗМЫШЛЕНИЯ ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ» (1771—1773)

[№ 87, т. 3, с. 307; перевод И. Г. Башмаковой и С. С. Демидова.]

... Весьма сомнительно, чтобы методы, о которых мы только что говорили, могли дать полное решение уравнений пятой степени и, тем более, уравнений более высоких степеней; и эта неуверенность, соединенная с длиной вычислений, которых требуют эти методы, должна впредь отбивать охоту у всех, кто мог бы захотеть применить их для решения одной из самых знаменитых и самых важных Проблем Алгебры. Также мы видим, что сами Авторы этих методов довольствуются тем, что применяют их к [уравнениям] третьей и четвертой степеней и что никто еще не брался за то, чтобы продвинуть их работу дальше.

[Там же, с. 355—356.]

Мы должны были видеть из только что данного анализа основных известных методов решения уравнений, что все эти методы сводятся к одному и тому же общему принципу, а именно — найти функции от корней предложенного уравнения, которые будут такими: 1^0 что уравнение или уравнения, которыми они задаются, так сказать, корнями которых они являются (уравнения, обыкновенно называемые приведенными), окажутся меньшей степени, чем предложенное, или, по крайней мере, будут разлагаться на другие уравнения степени меньшей, чем исходное; 2^0 чтобы можно было легко вычислить значения искомых корней.

Итак, искусство решения уравнений заключается, следовательно, в нахождении функций от корней, которые обладали бы свойствами, нами только что высказанными; но всегда ли возможно найти такие функции для уравнений любой степени, так сказать, для такого числа корней, которое мы только захотим? Это вопрос, на который, кажется, вообще очень трудно дать ответ.

Что касается уравнений, степень которых не превосходит четырех, то самые простые функции, дающие их решения, могут быть представлены формулой

$$x' + yx'' + y^2x''' + \ldots + y^{\mu-1}x^{(\mu)},$$

где x', x'', x''', $\ldots$, $x^{(\mu)}$ — корни предложенного уравнения, степень которого μ, а y — отличный от единицы корень уравнения

$$y^{\mu} - 1 = 0,$$

т. е. некоторый корень уравнения

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \ldots + 1 = 0,$$

как это следует из всего изложенного в двух первых частях относительно решения уравнений 3-й и 4-й степени.

[Там же, с. 358—359.]

Итак, если имеется несколько функций от одних и тех же количеств, то *подобными* будем называть такие, которые одновременно меняются или одновременно остаются неизменными, если производят одинаковые перестановки количеств, из которых они составлены...

[Там же, с. 373—374.]

Из всего нами доказанного следует, вообще, 1) что все *подобные* функции от корней x', x'', x''', ... одного и того же уравнения необходимо задаются уравнениями одинаковой степени; 2) что эта степень всегда будет равна числу $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$ (где μ — степень данного уравнения) или делителю этого числа; 3) что для нахождения прямым образом наиболее простого уравнения $\Theta = 0$, которое определяет некоторую заданную функцию от x', x'', x''', ..., надо только найти все различные значения, которые может принимать эта функция при всевозможных перестановках между собой количеств x', x'', x''', ... , и, взяв эти значения за корни искомого уравнения, определить с их помощью коэффициенты этого уравнения, что делается известными методами, уже неоднократно примененными в этом мемуаре.

[Там же, с. 403.]

Вот, если я не ошибаюсь, истинные принципы решения уравнений, и самый тщательный анализ приводит к этому; все сводится, как видим, к некоторому виду исчисления комбинаций (combinaisons), посредством которого находим a priori результаты, которых следует ожидать. Было бы кстати применить их к уравнениям пятой степени и высших степеней, решение которых до настоящего времени неизвестно; но это применение требует очень большого числа исследований и комбинаций (combinaisons), успех которых, впрочем, еще очень сомнителен, чтобы мы могли, если речь идет о настоящем, заняться этой работой; мы, однако, надеемся найти возможность вернуться к ней в другое время и удовольствуемся здесь тем, что заложили основы теории, которая кажется нам новой и общей.

Примечание. В своем мемуаре «Réflexion sur la résolution algébrique des équations» (1771—1773) Лагранж подверг разбору все ранее известные способы решения алгебраических уравнений степеней $n=2$, 3, 4 и показал, почему каждый из этих способов непригоден для уравнений степени $n \geqslant 5$. Первый из приводимых нами отрывков показывает, что Лагранж вообще усомнился в возможности решения в радикалах уравнений высших степеней.

Далее Лагранж пришел к выводу, что все известные методы решения уравнений в радикалах сводятся к нахождению таких рациональных функций $y = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ от корней предложенного уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

которые принимали бы при всевозможных перестановках корней $k < n$ различных значений: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Тогда эти значения являются корнями уравнения степени k:

$$(y - \varphi_1)(y - \varphi_2) \ldots (y - \varphi_k) = y^k + b_1 y^{k-1} + \ldots + b_k = 0,$$

где $b_1, \ldots, b_k$ будут рационально выражаться через коэффициенты первоначального уравнения $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Действительно, легко видеть, что

$$b_1 = -(\varphi_1 + \ldots + \varphi_k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_k = (-1)^k \varphi_1 \ldots \varphi_k$$

будут рациональными симметрическими функциями от $x_1, \ldots, x_n$, а значит, рациональными функциями от $a_1, \ldots, a_n$. Эта теорема была известна еще Эйлеру (см. выше, п. 9б), но в общем виде ее установил Э. Варинг (1765).

Если такая функция φ найдена, то необходимо еще позаботиться, чтобы корни $x_1, \ldots x_n$ можно было легко вычислить через ее значения $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Во втором из приведенных нами отрывков Лагранж говорит об этом и ставит вопрос: всегда ли можно найти такие функции? Ведь, вообще говоря, рациональная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при всех перестановках корней примет $n!$ различных значений, т. е. k будет больше n. Лагранж вводит в рассмотрение простые функции от корней (они впоследствии получили название резольвент Лагранжа)

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n,$$

где $\alpha^n = 1$, $\alpha \neq 1$, которые позволяют решить в радикалах уравнения степеней $n=3$ и 4, а также циклические уравнения любой степени (их Лагранж решает в 3-й части своего мемуара).

Так, при $n=3$, $t^3 = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3$, как нетрудно видеть, не меняется при циклических перестановках корней $x_k \longrightarrow x_{k+1}$, значит, $t^3 = \Theta$ принимает при всех перестановках корней только два различных значения Θ_1, Θ_2, которые будут: $\Theta_1 = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3$ и $\Theta_2 = (x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3)^3$. Они удовлетворяют квадратному уравнению с коэффициентами, рационально выражающимися через коэффициенты первоначального уравнения. После этого x_1, x_2, x_3 определяются из системы:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a_1, \\ x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 &= \sqrt[3]{\Theta_1}, \\ x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 &= \sqrt[3]{\Theta_2}, \end{aligned}$$

т. е. они выражаются рационально через кубические корни из единицы и радикалы $\sqrt[3]{\Theta_1}$ и $\sqrt[3]{\Theta_2}$.

Для дальнейшего исследования вопроса Лагранж вводит очень важное понятие *подобных* функций. Чтобы лучше понять, в чем оно состоит, будем говорить далее не о *перестановках* корней, а об их *подстановках*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \ldots . x_n \\ x_{k_1} \ldots . x_{k_n} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ k_1 & k_2 \ldots k_n \end{pmatrix}.$$

Подстановки из n символов, как известно, образуют симметрическую группу S_n порядка $n!$ Легко видеть, что все подстановки, оставляющие неизменной некоторую рациональную функцию от корней $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, образуют подгруппу H. Если подстановка σ меняет φ: $\sigma\varphi = \varphi_1$, то и все подстановки класса σH переведут φ в φ_1. Чтобы узнать, сколько значений примет φ, Лагранж разбивает группу S_n на смежные классы по подгруппе H:

$$S_n = H + \sigma_1 H + \sigma_2 H + \ldots + \sigma_{k-1} H$$

(не пользуясь терминами «группа» и «смежный класс»). Он устанавливает, что в каждом классе $\sigma_i H$ содержится столько же элементов h, сколько и в подгруппе H, и что $\sigma_i H$ и $\sigma_j H$ либо совпадают, либо не пересекаются, и, следовательно, $hk = n!$, т. е. число различных значений φ есть $k = \frac{n!}{h}$.

Переформулируя результаты Лагранжа, можно сказать, что *подобными* будут такие функции φ и ψ, которые принадлежат одной и той же подгруппе, т. е. $H\varphi = \varphi$, $H\psi = \psi$, все же остальные подстановки из S_n меняют эти функции.

Основной результат Лагранжа состоит в том, что *подобные* функции выражаются рационально одна через другую и коэффициенты основного уравнения, т. е. лежат в одном и том же поле. Эта теорема явилась важным этапом при построении теории Галуа.

В итоге всех исследований Лагранж пришел к выводу, что «истинным принципом» решения уравнения является рассмотрение группы подстановок корней уравнения, ее подгрупп и рациональных функций от корней, инвариантных при подстановках этих подгрупп.

Мемуар Лагранжа остался в некотором смысле незавершенным. Он не исследовал вопроса, какие подгруппы имеются у S_n. Это сделали вскоре после него П. Руффини и О. Коши, результатами которого воспользовался и Н. Г. Абель. А именно было доказано, что полная симметрическая группа S_n при $n \geqslant 5$ не имеет подгрупп индекса больше 2 и меньше наибольшего простого числа, не превосходящего n. Отсюда можно вывести, что алгебраические уравнения степени $\geqslant 5$ неразрешимы в радикалах.

Эти же исследования Лагранжа послужили основой для будущей теории Галуа.

6. АБЕЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ

ИЗ РАБОТЫ Н. Г. АБЕЛЯ «О СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИ РАЗРЕШИМЫХ УРАВНЕНИЙ (1829)

[№ 63, с. 472—473; перевод И. Г. Башмаковой.]

Хотя алгебраическое решение уравнений в общем случае невозможно, тем не менее существуют специальные уравнения любой степени, которые допускают такое решение. Таковы, например, уравнения вида $x^n - 1 = 0$. Решение таких уравнений основывается на соотношениях, существующих между корнями. Я попытался обобщить этот метод, предполагая, что два корня данного уравнения связаны между собой так, что один из них можно рационально выразить через другой, и я пришел к заключению, что такое уравнение всегда можно решить с помощью некоторого числа уравнений *меньшей степени*. Имеются даже случаи, в которых можно *алгебраически решить* само данное уравнение. Это будет иметь место, например, всякий раз, когда данное уравнение неприводимо, а степень его есть простое число. То же самое имеет место, если все корни уравнения можно представить так: x, Θx, $\Theta^2 x$, $\Theta^3 x$, $\ldots$, $\Theta^{n-1}x$; причем $\Theta^n x = x$, где Θx — рациональная функция от x, а $\Theta^2 x$, $\Theta^3 x$, $\ldots$ — функции того же вида, что и Θx, взятые два раза, три раза и т. д.

Уравнение $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, где n — простое число, относится к этому случаю, так как, обозначив через α примитивный корень по модулю n, можно, как известно, выразить $n-1$ корней в виде x, x^α, x^{α^2}, x^{α^3}, $\ldots$, $x^{\alpha^{n-2}}$, причем $x^{\alpha^{n-1}} = x$, или, полагая $x^\alpha = \Theta x$, в виде x, Θx, $\Theta^2 x$, $\Theta^3 x$, $\ldots$, $\Theta^{n-2} x$, причем $\Theta^{n-1} x = x$.

То же свойство имеет один класс уравнений, к которому я пришел, занимаясь теорией эллиптических функций.

Вообще я доказал следующую теорему:

Если корни некоторого уравнения произвольной степени связаны между собой так, что *все* корни могут быть выражены рационально через один из них, который мы будем обозначать x, и если, кроме того, будет иметь место

$$\Theta\Theta_1 x = \Theta_1 \Theta x,$$

где Θx, $\Theta_1 x$ — два каких-нибудь других корня, то рассматриваемое уравнение всегда будет алгебраически разрешимо. Если предположить также, что уравнение неприводимо, а его степень выражается в виде

$$\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\ldots\alpha_m^{\nu_m},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — различные простые числа, то можно свести решение этого уравнения к решению ν_1 уравнений степени α_1, ν_2 уравнений степени α_2, ν_3 уравнений степени α_3 и т. д. (1).

. . . .

Уравнение $\varphi x = 0$, коэффициентами которого являются рациональные функции от некоторого числа известных величин a, b, c, ..., называется *неприводимым*, если ни один из его корней невозможно представить как корень уравнения меньшей степени, коэффициенты которого также являются рациональными функциями от a, b, c, ... (2).

Примечания. 1. В 1799 г. П. Руффини предложил доказательство неразрешимости общего уравнения 5-й степени в радикалах, которое, однако, содержало пробел, а именно опиралось на предположение, что все промежуточные радикалы в выражении для корня уравнения являются рациональными функциями от корней. Все попытки Руффини восполнить этот пробел не увенчались успехом. В 1824 г. независимо от Руффини молодой норвежский математик Н. Г. Абель дал полное доказательство неразрешимости уравнений степени $n \geqslant 5$, более подробное изложение которого было опубликовано в 1826 г.

Все эти доказательства относились к уравнениям с *произвольными* коэффициентами. Они не давали ответа на вопрос о разрешимости в радикалах конкретных уравнений с заданными числовыми коэффициентами или некоторых классов уравнений. Мы говорили уже (см. ч. I, п. 10а), что Лагранж показал разрешимость в радикалах так называемых циклических уравнений. К. Ф. Гаусс провел исчерпывающее исследование уравнений деления круга $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ (n — нечетное простое число) и показал, что корни их всегда выразимы в радикалах. При этом он, по существу, показал, что группа G этого уравнения циклична, рассмотрел ее подгруппы и построил соответствующие им поля. Как он сам отмечал, его методы можно обобщить и применить к уравнению деления лемнискаты.

Абель нашел самый общий класс уравнений, для которого разрешимость в радикалах можно доказать методом Гаусса. Это уравнения, группа допустимых подстановок корней которых (т. е. не нарушающих правильности рациональных соотношений между корнями) коммутативна. В ходе доказательства Абель показал, что любая коммутативная группа распадается в прямую сумму циклических групп.

Приведенный отрывок взят из «Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement», напечатанного в самый год смерти автора. Абель искал и общий критерий разрешимости уравнений в радикалах, однако безвременная кончина не позволила ему закончить эти исследования. В его оставшемся неоконченным мемуаре содержится много интересных методов и теорем.

2. Абель дает здесь точное определение многочлена, неприводимого над данной областью рациональности (или над данным полем).

в. ТЕОРИЯ ГАЛУА

1. ИЗ «МЕМУАРА ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ» Э. ГАЛУА (*опубл. в 1846 г.*)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

[№ 20, с. 61—64.]

Я начну с изложения нескольких определений и последовательности лемм, которые все известны.

Определения. Уравнение называется *приводимым*, когда оно допускает рациональные делители; *неприводимым* — в противном случае.

Здесь нужно объяснить, что дóлжно понимать под словом *рациональный*, так как оно будет часто попадаться.

Когда у уравнения *все* коэффициенты численные и рациональные, то это [т. е. наличие рационального делителя] означает просто, что уравнение можно разложить на множители, которые имеют численные и рациональные коэффициенты.

Но, когда *не все* коэффициенты уравнения будут численными и рациональными, тогда надо понимать под рациональным делителем делитель, коэффициенты которого выражаются в рациональных функциях от коэффициентов рассматриваемого уравнения

Более того, можно условиться рассматривать как рациональности все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных a priori известными. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала.

Тогда, когда мы уславливаемся рассматривать как известные некоторые количества, мы говорим, что мы их *присоединяем* к уравнению, о решении которого идет речь. Мы говорим, что эти количества *присоединены* к уравнению.

Положив это, мы будем называть *рациональным* всякое количество, которое будет выражаться рациональной функцией от коэффициентов уравнения и некоторого числа произвольно выбранных *присоединенных количеств.*

Когда мы будем пользоваться вспомогательными уравнениями, они будут рациональными, если их коэффициенты рациональны в нашем смысле.

Мы увидим, сверх того, что свойства и трудности уравнения могут быть сделаны совершенно разными сообразно количествам, которые к нему присоединены. Например, присоединение некоторого количества может сделать приводимым неприводимое уравнение. Так, когда присоединяют к уравнению

$$\frac{x^n-1}{x-1}=0,$$

где n — простое число, корень одного из вспомогательных уравнений Гаусса, то это уравнение разлагается на множители и становится, следовательно, приводимым (1).

Подстановками называются переходы от одной перестановки к другой.

. . . .

Так как всегда рассматриваются вопросы, в которых первоначальное расположение букв совершенно не влияет на группы, которые мы будем рассматривать, то мы должны будем иметь одни и те же подстановки, какова бы ни была перестановка, от которой мы будем отправляться. Итак, если в подобной группе имеются подстановки S и T, то есть уверенность в наличии подстановки ST (2).

II. ИЗ ПИСЬМА Э. ГАЛУА К О. ШЕВАЛЬЕ от 29 мая 1832 г.

[№ 20, с. 48—59.]

Я сделал в анализе несколько новых открытий. Одни из них касаются теории уравнений; другие — интегральных функций.

В теории уравнений я исследовал, в каких случаях уравнения решаются в радикалах, что мне дало повод углубить эту теорию и описать все преобразования над уравнением, допустимые даже когда оно не решается в радикалах.

Из всего этого можно сделать три мемуара.

Первый написан, и, вопреки тому что о нем говорит Пуассон, я его поддерживаю с поправками, которые я в нем сделал.

Второй содержит довольно любопытные приложения теории уравнений. Вот резюме наиболее важных положений:

I. Из предложений II и III первого мемуара видно большое различие между присоединением к уравнению одного из корней некоторого вспомогательного уравнения и присоединением всех корней.

В обоих случаях группа уравнения при присоединении разделяется на такие группы, что от одной группы переходят к другой посредством одной и той же подстановки; но условие, что эти группы содержат одни и те же подстановки, имеет, наверное, место только во втором случае. Это называется *собственным разложением.*

Другими словами, когда группа G содержит другую группу H, то группа G может разлагаться на группы (3), каждая из которых получается применением к перестановкам H одной и той же подстановки, таким образом, что

$$G = H + HS + HS' + \dots$$

Она может быть разложена также на группы, которые содержат все одни и те же подстановки, таким образом, что

$$G = H + TH + T'H + \ldots$$

Эти два рода разложения обычно не совпадают. Когда они совпадают, то говорят, что разложение *собственное* **(4)**.

Легко видеть, что когда группа уравнения не допускает никакого собственного разложения, то, как бы ни преобразовывать это уравнение, группы преобразованных уравнений имеют всегда одно и то же число перестановок.

Наоборот, когда группа уравнения допускает какое-нибудь собственное разложение такого рода, что она разлагается на M групп по N перестановок, то можно решить данное уравнение с помощью двух уравнений: одно будет иметь группу из M перестановок, другое — из N перестановок **(5)**.

Стало быть, когда в группе некоторого уравнения исчерпываются все возможные собственные разложения, мы придем к группам, которые можно преобразовать, но перестановки которых остаются всегда в одном и том же числе.

Если каждая из таких групп содержит простое число перестановок, то уравнение решается в радикалах; в противном случае — нет **(6)**.

Наименьшее число перестановок, которое может иметь неразложимая группа, когда это число составное,— это $5 \cdot 4 \cdot 3$ **(7)**.

. . . .

Ты дашь напечатать это письмо в Revue encyclopédique.

Я в своей жизни часто позволял себе высказывать предложения, в которых не был уверен, но все, что я написал здесь, уже около года в моей голове, и слишком в моих интересах не ошибиться, чтобы меня могли заподозрить в том, что я объявляю теоремы, для которых не имел бы полного доказательства.

Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать их заключение, не о справедливости, но о важности этих теорем.

После этого будут, я надеюсь, люди, которые найдут свою выгоду в расшифровке всей этой путаницы.

Горячо обнимаю тебя.

Э. Галуа.

29 мая 1832 г.

Примечания. Основные работы Э. Галуа были опубликованы только через 14 лет после смерти автора, погибшего на дуэли в двадцатилетнем возрасте. Мы помещаем здесь отрывки, относящиеся к проблеме решения уравнений в радикалах. Вот что писал в предисловии к русскому изданию работ Э. Галуа Н. Г. Чеботарев:

«Полученные им (т. е. Э. Галуа) результаты позволяют решить для всякого заданного уравнения при помощи конечного числа действий вопрос, решается ли оно в радикалах. Но несравненно бóльшую ценность для математики имеет построенный им аппарат, при помощи которого он достиг своих результатов. Выражаясь современным языком, Галуа предложил изучать структуру *алгебраических полей*, сопоставляя с ними структуру *групп* конечного числа символов (подстановок), допускающих своеобразные законы действий над ними» [№ 20, с. 5].

1. Здесь Галуа дает четкое определение области рациональности, т. е, исходного поля, над которым рассматривается уравнение. Это понятие до него встречается в мемуаре Н. Абеля «О специальном классе алгебраически разрешимых уравнений» (1829). Однако Абель не останавливается специально на определении области рациональности (см. выше, ч. I, п. 10 б).

2. Галуа не дает определения группы. В приведенном отрывке он, как будто, считает группой множество подстановок, замкнутое относительно операции умножения (т. е. последовательного выполнения двух подстановок). Однако в письме к Шевалье, отрывок из которого помещен ниже, он называет группами и смежные классы по некоторой подгруппе (см. прим. 3).

3. Здесь Галуа называет «группой» и подгруппу H и каждый смежный класс SH, который, очевидно, не является замкнутым относительно операции умножения. По-видимому, Галуа еще не установил для себя стабильной терминологии.

4. До Галуа были решены в радикалах уравнения степени $n=2$, 3, 4 и такие классы уравнений любой степени n, группа G допустимых подстановок корней которых (т. е. группа Галуа) коммутативна. При этом под «допустимыми» подстановками понимаются такие, которые не нарушают верности рациональных соотношений между корнями [1]. Галуа исследовал самый общий случай, когда эта группа некоммутативна. Он открыл, что особую роль играют такие ее подгруппы H, для которых разложения G на левые и правые смежные классы попарно совпадают. Такие разложения Галуа назвал *собственными*. Подгруппа H дает собственное разложение тогда и только тогда, когда H является ***нормальным делителем*** группы G, т. е. когда для любой подстановки $\sigma\in G$ будет иметь место $\sigma H=H\sigma$ или $\sigma H\sigma^{-1}=H$. Таким образом, здесь впервые вводится в рассмотрение новый, чрезвычайно важный класс подгрупп — нормальные делители группы.

5. Как уже говорилось (см. прим. к п. 10 а), число M смежных классов равно степени неприводимого уравнения $F(y)=0$, которому удовлетворяет функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащая подгруппе H. Коэффициенты этого уравнения будут симметричными функциями относительно S_n, а значит, они не меняются и при подстановках из G, т. е. они будут рациональными функциями от коэффициентов исходного уравнения.

Однако если H не является нормальным делителем, то группа Галуа уравнения $F(y)=0$ будет иметь порядок, больший M. Если G вообще не имеет нормальных делителей, то группа Галуа этого уравнения будет изоморфна группе G первоначального уравнения.

Если H — нормальный делитель, то группой уравнения $F(y)=0$ будет фактор-группа G/H, имеющая порядок M. Поле $\varkappa$, полученное присоединением к основному полю R одного из корней уравнения $F(y)=0$, будет в этом случае нормальным. Над этим полем $\varkappa$ группа Галуа основного уравнения будет порядка N, где $M\cdot N$ — порядок группы G.

6. Это и есть знаменитый критерий Галуа разрешимости уравнения в радикалах, который теперь формулируется так:

«Уравнение $f(x)=0$ разрешимо в радикалах тогда и только тогда, если его группа Galois есть разрешимая группа» [№ 53, с. 58].

При этом группа называется разрешимой, если в ее композиционном ряду

$$G\supset H_1\supset H_2\supset \ldots \supset H_{k-1}\supset E$$

все фактор-группы G/H_1, H_1/H_2, ..., H_{k-1} будут простого порядка.

---

[1] Или еще: переводят совокупность рациональных соотношений между корнями в себя.

Заметим, что если группа Галуа некоторого уравнения содержит простое число подстановок, то она циклична $\{\sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^p\}$, а в этом случае, как показал еще Лагранж, уравнение решается в радикалах.

7. Здесь содержится утверждение, что подгруппа четных подстановок $\mathfrak{A}_n$ при $n \geqslant 5$ не имеет нормальных делителей.

Далее излагаются результаты Галуа, относящиеся к разрешимости в радикалах уравнений степени p^ν, где p — простое число, и модулярным уравнениям эллиптических функций.

Конец письма посвящен абелевым интегралам [подробнее о теории Галуа и ее истории см. примечания Н. Г. Чеботарева к книге, № 20, а также монографию Н. Г. Чеботарева, № 53].

8. Это письмо было действительно опубликовано в сентябрьском номере «Revue encyclopédique» за 1832 г.

11. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

а. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

ИЗ «ТЕОРИИ БИКВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ» К. Ф. ГАУССА (1831).

[№ 21, с. 704—705.]

Подобно тому как каждая вещественная величина выражается куском бесконечной в обе стороны прямой линии, начинающимся из произвольно выбранной начальной точки и измеренным произвольно выбранным в качестве единицы отрезком, и потому может быть представлена другим концом этого куска, причем точки по одну сторону от начальной представляют положительные величины, а точки по другую сторону от начальной — отрицательные, так и каждая комплексная величина может быть представлена некоторой точкой бесконечной плоскости, на которой определенная прямая служит для представления вещественных величин; а именно, комплексная величина $x+iy$ представляется точкой, абсцисса которой равна x, а ордината (берущаяся положительной по одну сторону от линии абсцисс и отрицательной — по другую сторону) равна y. Таким образом, можно говорить, что каждая комплексная величина измеряет различие между положением той точки, которой представляется эта величина, и положением начала координат, если положительная единица обозначает произвольное, но фиксированное уклонение по произвольному, но фиксированному направлению, отрицательная единица — такое же по величине уклонение по противоположному направлению, наконец, мнимые единицы — такие же по величине уклонения по направлениям, перпендикулярным первым и идущим в обе стороны.

Таким образом, на природу величин, которые мы называем мнимыми, проливается ясный свет. Если начало координат обозначить через (O), а две комплексные величины m, m' соответствуют точкам M, M', положение которых по отношению к точке (O) они выражают, то разность $m-m'$ будет выражать не что иное, как положение точки M относительно точки M'; с другой стороны, если произведение mm' выражает положение точки N относительно точки (O), то легко убедиться, что это положение так же определяется положением точки M относительно точки (O), как положение точки M' определяется положением той точки, которой соответствует положительная единица, так что будет не лишено оснований сказать, что положения точек, соответствующих комплексным величинам mm', m, m', 1, образуют пропорцию. Однако более исчерпывающее изложение этого вопроса мы оставим до другого случая. Трудности, которыми считается окруженной теория мнимых величин, по большей части имеют своей причиной малоудачные наименования (некоторые снабдили их даже неудачно звучащим названием невозможных величин). Если бы, исходя из представлений, даваемых многообразием двух измерений (которые с большой ясностью проявляются при пространственных соображениях), называть положительные величины прямыми, отрицательные—обратными, а мнимые—к ним перпендикулярными величинами, то мы имели бы простоту вместо путаницы, ясность вместо туманности.

П р и м е ч а н и е. Несмотря на многочисленные важные применения комплексных чисел, почти все математики XVII—XVIII вв. рассматривали их как полезные фикции, лишенные самостоятельного реального смысла, и, если это оказывалось возможным, охотно отказывались от их употребления. Первую попытку геометрического истолкования комплексных чисел предпринял Дж. Валлис (1685). Даламбер и Эйлер в своих вычислениях неоднократно переходили от чисел $a+b\sqrt{-1}$ к точкам с координатами a, b и обратно, но они считали мнимые числа лишь удобными знаками. Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и, что особенно важно, действий над ними было предложено в работах К. Весселя (1799) и Ж. Р. Аргана (1806). Если работа К. Весселя, написанная на датском языке, не получила достаточной известности вплоть до конца прошлого века, то исследование Аргана было замечено через семь лет после опубликования и вызвало оживленную дискуссию на страницах журнала, издаваемого Ж. Д Жергоном. Однако действительное признание и широкую известность геометрическая интерпретация комплексных чисел получает после выхода в свет мемуара Гаусса «Theoria residuorum biquadraticorum», отрывок из которого приведен выше. Причиной этого признания послужило не столько преклонение перед авторитетом Гаусса, сколько то обстоятельство, что он перенес на эти числа понятие «целости» (см. ч. II, п. 7) и получил с их помощью существенно новые результаты относительно обычных целых чисел. Начиная с этого времени комплексные числа становятся полноправным математическим объектом, а сам термин «комплексное число», встречавшийся ранее у Л. Карно (1803), входит в обиход.

6. КВАТЕРНИОНЫ

ИЗ СТАТЬИ У. Р. ГАМИЛЬТОНА «О КВАТЕРНИОНАХ, ИЛИ О НОВОЙ СИСТЕМЕ МНИМЫХ В АЛГЕБРЕ» (1843)

[№ 85, с.10—14; перевод С. С. Демидова.]

1. Выражение вида

$$Q = w + ix + jy + kz$$

назовем *кватернионом*, если w, x, y, z, которые мы будем называть четырьмя *составляющими* (constituents) кватерниона Q, обозначают любые действительные величины (положительные, отрицательные или нулевые), а i, j, k являются символами трех мнимых величин, которые мы будем называть *мнимыми единицами* и будем предполагать не связанными друг с другом никакими линейными соотношениями; таким образом, если имеем другое выражение того же вида

$$Q' = w' + ix' + jy' + kz',$$

то предположение равенства между двумя данными кватернионами

$$Q = Q'$$

будем понимать так, что оно влечет четыре отдельных уравнения между их соответственными составляющими, а именно

$$w = w', \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Естественным будет тогда определить *сложение* или *вычитание* кватернионов, выполняемые по следующей формуле:

$$Q \pm Q' = w \pm w' + i(x \pm x') + j(y \pm y') + k(z \pm z');$$

или, в словесной форме, по правилу, что *суммы или разности составляющих любых двух кватернионов являются составляющими суммы или разности самих этих кватернионов*. Естественно будет также определить произведение QQ' от умножения Q как множителя на Q' как на множимое, как выраженное таким образом:

$$\begin{aligned} QQ' = {} & ww' + iwx' + jwy' + kwz' \\ & + ixw' + i^2xx' + ijxy' + ikxz' \\ & + jyw' + jiyx' + j^2yy' + jkyz' \\ & + kzw' + kizx' + kjzy' + k^2zz'; \end{aligned}$$

но прежде чем мы сможем привести это произведение к выражению кватернионного вида, такому, как

$$QQ' = Q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'',$$

необходимо установить кватернионные выражения (quaternion — expressions) (или действительные значения) для девяти квадратов или произведений

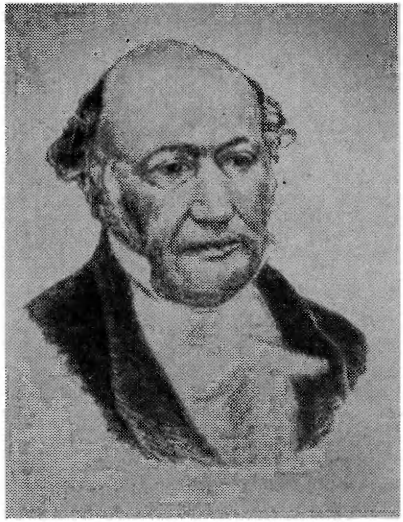
$i^2,\ ij,\ ik,\ ji,\ j^2,\ jk,\ ki,\ kj,\ k^2.$

2. Рассмотрения, которые могли занять слишком много места, чтобы здесь их приводить, привели автора к выбору следующей системы значений или выражений для этих девяти квадратов или произведений:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j; \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

$$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j; \quad (C)$$



У. Гамильтон

хотя на первый взгляд должно показаться странным и почти недопустимым определять умножение таким образом, что произведение двух мнимых сомножителей, взятых в одном порядке, отличается (по знаку) от произведения тех же сомножителей, взятых в противоположном порядке $(ji = -ij)$. Можно, однако, надеяться, что нам будет позволено, начиная обсуждение мнимых, из соображений необходимости или удобства отказаться от некоторых ожиданий, подсказанных предварительным изучением произведений действительных количеств или выражений вида $x + iy$, где $i^2 = -1$. И является ли выбор системы определяющих уравнений (A), (B), (C) разумным или, во всяком случае, удачным, будет, вероятно, выяснено впоследствии, т. е. проверкой — будут ли эти уравнения приводить к результатам достаточно состоятельным и изящным.

С учетом принятых соотношений (A), (B), (C) мы имеем четыре следующих выражения для четырех составляющих произведения двух кватернионов как функций составляющих множимого и множителя:

$$\left.\begin{aligned} w'' &= ww' - xx' - yy' - zz', \\ x'' &= wx' + xw' + yz' - zy', \\ y'' &= wy' + yw' + zx' - xz', \\ z'' &= wz' + zw' + xy' - yx' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

Из этих уравнений следует

$$w''^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 = (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)(w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

и, следовательно,

$$\mu''=\mu\mu', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{(E)}$$

если мы введем для составляющих систему выражений вида:

$$\left.\begin{aligned} w&=\mu\cos\theta,\\ x&=\mu\sin\theta\cdot\cos\varphi,\\ y&=\mu\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\psi,\\ z&=\mu\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi \end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

и предположим каждое μ положительным. Называя μ *модулем* кватерниона Q, мы получаем теорему: *модуль произведения Q'' любых двух кватернионов Q и Q' равен произведению их модулей.*

Примечание. Согласно предложенной на рубеже XVIII и XIX вв. геометрической интерпретации комплексных чисел, операциям над комплексными числами соответствуют некоторые преобразования на плоскости: сложению — параллельный сдвиг, умножению — вращение плоскости вокруг начала координат с растяжением всех отрезков в некотором отношении. Нельзя ли ввести новую систему чисел, действиям над которыми соответствуют основные преобразования в трехмерном пространстве? Такие числа — кватернионы — введены были в работе У. Р. Гамильтона «On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra» (1843), отрывок из которой приведен выше.

Отличие кватернионов от действительных чисел значительно глубже, чем комплексных чисел. Если при переходе к комплексным числам утрачивается лишь отношение порядка (упорядочивание по величине) и комплексные числа, подобно действительным, образуют поле, то для кватернионов, кроме этого, не выполняется свойство коммутативности закона композиции, т. е. QQ', вообще говоря, не равно $Q'Q$, и они, таким образом, поля не образуют. Это был первый в истории математики пример некоммутативных числовых систем. А. Пуанкаре сравнивал открытие таких систем в алгебре с открытием неевклидовых геометрий.

В 1844 г. в исследованиях Г. Грассмана появляются более общие системы так называемых гиперкомплексных чисел, т. е. числовые системы с n единицами $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$ (ср. ч. III, п. 10а). Для чисел вида $\alpha_1\vec{i}_1+\alpha_2\vec{i}_2+ +\ldots+\alpha_n\vec{i}_n$ (где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа) Грассман определил отношения равенства, а также правила сложения, вычитания (покоординатно) и умножения (как многочленов при этом $\vec{i}_k\,\vec{i}_j=\sum\limits_{l=1}^{n}\gamma_{kj}^{l}\,\vec{i}_l$). Действительные и комплексные числа, а также кватернионы составляют частные случаи таких систем (при n, равном соответственно 1, 2 и 4). Как показал в 1878 г. Г. Фробениус, единственными гиперкомплексными системами над полем действительных чисел, для которых выполняются все свойства поля, кроме, быть может, коммутативности умножения, являются множества действительных ($n=1$), комплексных ($n=2$) чисел, а также система кватернионов Гамильтона ($n=4$). Частный случай этой теоремы, именно предложение, что единственные гиперкомплексные системы, для которых выполняются все аксиомы поля, суть множества действительных и комплексных чисел, носит название теоремы Вейерштрасса — Фробениуса.

12. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

а. ПЕРВЫЕ РОСТКИ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

ИЗ ПИСЬМА ЛЕЙБНИЦА К Г. Ф. ЛОПИТАЛЮ ОТ 28 АПРЕЛЯ 1693 Г.

[№ 30, с. 197—198.]

...Раз Вы говорите, что Вам трудно поверить, что пользование числами носит столь же общий характер и столь же удобно, как и пользование буквами, значит, я нехорошо выразил свою мысль. Нельзя сомневаться в общности, если принять во внимание, что можно пользоваться 2, 3 и т. д., так же как a или b, если только иметь в виду, что это не настоящие числа. Так, $2\cdot3$ означает вовсе не 6, но то же, что $a\cdot b$. Что касается удобства, то оно очень велико, и поэтому я часто пользуюсь этим, особенно в длинных и трудных вычислениях, в которых легко ошибиться. Ибо, кроме удобства проверки с помощью чисел, а также отбрасывания девяток, я нахожу в этом очень важное преимущество даже для развития Анализа. Так как это открытие довольно своеобразно, я еще не рассказывал о нем другим. Но вот в чем дело. Ведь верно, что когда приходится употреблять много букв, то эти буквы совсем не выражают отношений между обозначаемыми ими величинами; между тем, пользуясь числами, я могу это отношение выразить. Допустим, например, что предложены три простые уравнения с двумя неизвестными и требуется исключить эти два неизвестные, причем по общему правилу (canon). Я полагаю

$$10+11x+12y=0, \quad (1) \quad \text{и} \quad 20+21x+22y=0, \qquad (2)$$

и $30+31x+32y=0$ (3), где предполагаемые числа (le nombre feint) выражены каждое двумя знаками, из которых первый показывает мне, какому уравнению принадлежит число, а второй показывает мне, какой оно принадлежит букве **(1)**. Вычисляя таким образом, везде открываешь гармонии (des harmonies), которые не только служат нам порукой, но и сразу (d'abord) показывают нам правила или теоремы. Например, исключая сперва из первого и второго уравнений y, мы получим **(2)**

$$\begin{matrix}+10\cdot22+11\cdot22x\\-12\cdot20-12\cdot21\end{matrix}=0, \qquad (4)$$

а исключая его из первого и третьего, мы получим **(3)**

$$\begin{matrix}+10\cdot32+11\cdot32x\\-12\cdot30-12\cdot31\end{matrix}=0, \qquad (5)$$

где легко заметить, что эти два уравнения отличаются лишь тем, что предыдущий знак 2 заменяется на предыдущий знак 3. Впрочем, в каждом члене каждого уравнения предыдущие знаки одинаковы, а последующие знаки образуют одну и ту же сумму. Теперь остается исключить из четвертого и пятого уравнений букву x, и тогда мы получим

$$\begin{matrix} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0\ 2_2\ 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & 1_1\ 2_0\ 3_2 \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & 1_2\ 2_1\ 3_0, \end{matrix}$$

что и представляет собой последнее уравнение (4), свободное от обоих неизвестных, которые желали исключить, и заключающее свое доказательство в самом себе, в силу заметных во всем гармоний, которые было бы весьма трудно открыть при употреблении букв a, b, c, особенно, когда число букв и уравнений велико. Часть секрета анализа состоит в характеристике, т. е. в искусстве хорошо употреблять применяемые знаки, и по этому малому образцу Вы видите, Сударь, что Виет и Декарт еще не познали все его тайны. Незначительно продолжив это вычисление, можно прийти к общей теореме для любого произвольного числа букв и простых уравнений.

Примечания. Начало теории определителей восходит к Лейбницу; мы приводим соответствующий отрывок из одного его письма. Примерно в то же время (1683) японский математик Кова Секи, развивая древнекитайский метод «фан-чэн» (см. выше, ч. I, п. 4), пришел к решению систем линейных уравнений с помощью определителей. Об этих результатах в Европе было неизвестно вплоть до XIX в. Не получили широкой известности и соответствующие результаты Лейбница, и теория определителей стала развиваться в Европе лишь с середины XVIII в., в первую очередь в исследованиях Г. Крамера (1750).

1. В современных обозначениях систему уравнений (1), (2) и (3) можно записать таким образом:

$$\left.\begin{aligned} a_{10}+a_{11}x+a_{12}y=0, \\ a_{20}+a_{21}x+a_{22}y=0, \\ a_{30}+a_{31}x+a_{32}y=0. \end{aligned}\right\}$$

2. $a_{10}a_{22}+a_{11}a_{22}x-a_{12}a_{20}-a_{12}a_{21}x=0.$

3. $a_{10}a_{32}+a_{11}a_{32}x-a_{12}a_{30}-a_{12}a_{31}x=0.$

4. Полученное условие разрешимости системы, следуя обозначениям А. Кэли (1841), можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0.$$

6. ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

ИЗ СТАТЬИ ДЖ. СИЛЬВЕСТРА «ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ТОМ, ЧТО КАЖДЫЙ ОДНОРОДНЫЙ ПОЛИНОМ СВОДИТСЯ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ К ФОРМЕ СУММЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ КВАДРАТОВ» (1852)

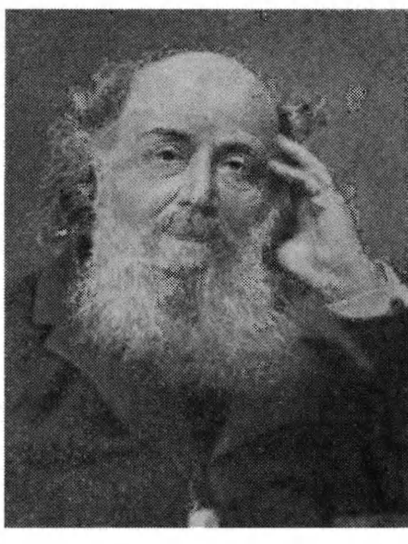
[№ 98, т. I, с. 380—381; перевод С. С. Демидова.]

Я могу воспользоваться случаем, чтобы заметить, что при любых линейных подстановках, ортогональных или нет, сводящих данный полином (1) к форме (2) $\sum A_1\zeta^2$, число положительных и отрицательных коэффициентов неизменно; это легко доказать.

. . . .

...[Это] закон, которому мои физические представления о количестве вещества склоняют меня, по аналогии, дать наименование Закона Инерции Квадратичных форм, как отражающее факт существования неизменного числа, неразрывно связанного с такими формами.

Примечания. Истоки теории квадратичных форм лежат в аналитической геометрии, именно теории кривых и поверхностей второго порядка, одной из основных задач которой является проблема приведения уравнения кривой или поверхности к каноническому виду. Многочисленные приложения привели к необходимости построения соответствующей теории для случая, когда число неизвестных равно любому n, а коэффициенты уравнения — комплексные числа. Для этого оказалось необходимым значительное развитие линейной алгебры, в истории которой заметное место принадлежит Д. Сильвестру, введшему матрицы и определившему для них понятие ранга. В работе «A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares», отрывок из которой приведен выше, Сильвестр формулирует закон инерции квадратичных форм. Доказательства он не дает, считая это утверждение почти очевидным. Кроме Сильвестра, к этому же результату пришли: Гаусс, который, по свидетельству Б. Римана, посещавшего его лекции в 1846—1847 гг., доказывал этот закон в лекциях о методе наименьших квадратов, а также Якоби, опубликовавший формулировку закона инерции и его доказательство в 1850 г.



Дж. Сильвестр

1. Речь идет о квадратичной форме $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, которую Сильвестр записывает в виде $(1,\ 1)\,x^2+2(1,\ 2)\,xy+(2,\ 2)\,y^2+\ldots+(n,\ n)\,t^2$ (ср. с обозначениями коэффициентов, принятыми Лейбницем в № 12а).

2. $\sum_{i=1}^{n} A_i\zeta_i^2$.

13. ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ

а. АЛГЕБРА БУЛЯ

ИЗ «ИСЧИСЛЕНИЯ ЛОГИКИ» ДЖ. БУЛЯ (1848)

[№ 69, с. 126—127; перевод С. С. Демидова.]

Универсальный [класс] (universe) мыслимых объектов обозначим 1, или единицей. Этот [класс] я полагаю в качестве первоначального и главного понятия. Все подчиненные понятия классов будем понимать как образованные из него ограничением согласно следующей схеме.

Предположим, что мы имеем понятие какой-либо группы объектов, состоящей из X-ов, Y-ов и др., и что через x, который мы будем называть символом-представителем (elective symbol), обозначена мысленная операция выбора из этой группы всех X-ов, которые в ней содержатся, или [что то же самое] операция фиксации внимания на X-ах, исключающей все, что не есть X-ы, через y — мысленная операция выбора Y-ов и т. д.; тогда, [учитывая, что] 1 или универсальный [класс] — главное понятие, будем иметь

$x1$ или x = класс X-ов

$y1$ или y = класс Y-ов

$xy1$ или xy = класс, каждый член которого как X, так и Y, и т. д.

Подобным образом мы получим

$1 - x$ = класс не-X-ов,

$1 - y$ = класс не-Y-ов,

$x(1-y)$ = класс, члены которого — X-ы, но не Y-и,

$(1-x)(1-y)$ = класс, члены которого не X-ы и не Y-и.

Кроме того, из рассмотрения существа введенной мысленной операции очевидно выполнение следующих правил:

Если x, y, z — любые символы-представители, то

$$x(y+z) = xy + xz \quad \ldots \quad (1),$$

$$xy = yx \quad \text{и т. д.} \ldots \quad (2),$$

$$x^n = x \quad \text{и т. д.} \ldots \quad (3).$$

Из первого из них видно, что операции для символов-представителей дистрибутивны, из второго — что эти символы коммутативны. Третье правило я назвал правилом показателя степени (index law); это правило специфично для символов-представителей.

Истинность этих правил нисколько не зависит от количества или взаимных отношений индивидуумов, включенных в различные классы. В классе может быть лишь один индивидуум или их может быть тысяча. Могут быть индивидуумы, общие для различных классов, или классы могут быть взаимно непересекающимися (mutually exclusive).

Примечание. Для эволюции алгебры от науки об алгебраических уравнениях к науке о системах объектов произвольной природы с заданными на них законами композиции (см. прим. к п. 14) огромное значение имело расширение взгляда на само понятие закона композиции. Такому расширению во многом способствовали Гаусс и Галуа, однако наиболее мощный импульс в этом направлении исходил от работ алгебраистов английской школы, которые в 30-е и 50-е годы XIX в. выделяли абстрактное понятие закона композиции и применили его к целому ряду новых математических объектов.

В результате возникли алгебра кватернионов (У. Р. Гамильтон; см. выше, п. 11б), алгебра матриц (А. Кэли; см. далее, п. 13в), алгебра с неассоциативным законом композиции (А. Кэли) и др. Важное место среди этих построений занимает алгебра логики Дж. Буля, из сочинения «The calculus of logic» (1848) которого взят приведенный отрывок.

Алгебра Буля появилась в форме исчисления классов. Рассматривая универсальный класс (множество) всех предметов (элементов), обозначенный 1, а также классы предметов — x, y, z, ..., обладающих, соответственно, свойствами X, Y, Z, ..., Буль вводит операции $x+y$, xy и $1-x$. Эти операции совпадают с теоретико-множественными операциями сложения, умножения и дополнения; единственное отличие состоит в том, что при сложении у Буля классы x и y предполагаются не имеющими общих элементов — ограничение, снятое учеником Буля Джевонсом в 1864 г. Так, если под X понимать свойство «быть четным числом» (класс всех четных чисел), а под Y — свойство «быть нечетным числом» (y — класс всех нечетных чисел), то $x+y$ — класс всех целых чисел, xy — класс, не содержащий ни одного элемента — пустое множество или «nothing a class» (по Булю), $1-x$ — класс всех элементов, не являющихся четными числами.

Сегодня под алгеброй Буля понимают непустое множество M, на котором выполнены унарная и бинарная операции: $^-$ и $\cap$ такие, что для любых x, y, z из M имеют место:

1. $x\cap y=y\cap x$,

2. $x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z$, 3. $x\cap\bar{y}=z\cap\bar{z}$

тогда и только тогда, когда $x\cap y=x$. Обычно $z\cap\bar{z}$ и $\bar{0}$ обозначают, соответственно, через 0 и 1.

Алгебра Буля, сыгравшая, как уже указывалось выше, важную роль в становлении новой алгебры, оказала большое влияние на все дальнейшее развитие математической логики, в частности она способствовала созданию исчислений, используемых в приложениях математической логики в технике (теория контактно-релейных схем слабого тока — В. И. Шестаков, К. Э. Шеннон).

6. АБСТРАКТНАЯ ГРУППА

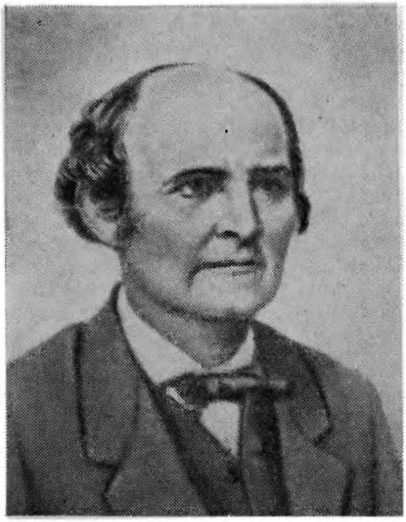
ИЗ МЕМУАРА А. КЭЛИ «О ТЕОРИИ ГРУПП, СВЯЗАННЫХ С СИМВОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ $\theta^n=1$» (1854)

[№ 71, с. 123—132; перевод С. С. Демидова.]

Множество символов (1)

$$1, \alpha, \beta, \ldots,$$

различных между собой и таких, что произведение любых двух из них (не важно, в каком порядке взятых) или произведение



А. Кэли

любого из них на самого себя принадлежит этому же множеству, называется группой [1]. Следовательно, если вся группа умножена на любой из символов, взятый в качестве левого и правого сомножителя, то в результате должна снова получиться та же группа (2). Или, что то же самое, если символы группы перемножены между собой так, как показано на таблице, то каждая ее строка, равно как и каждый столбец, будут содержать все символы $1, \alpha, \beta, \ldots$ Из этого также следует, что произведение любого числа символов, взятых, с повторениями или без, в любом порядке, будет символом группы. Предположим, что группа

$$1, \alpha, \beta, \ldots$$

		Левые сомножители			
		1	α	β	.....
Правые сомножители	1	1	α	β	.....
	α	α	α^2	$\beta\alpha$	.....
	β	β	$\alpha\beta$	β^2	.....
	⋮	⋮			

содержит n символов. Можно показать, что каждый из этих символов удовлетворяет уравнению

$$\theta^n = 1.$$

[1] Идеей группы, применительно к перестановкам или подстановкам, мы обязаны Галуа. Ее введение составило целую эпоху в теории алгебраических уравнений.

Таким образом, группу можно рассматривать как представление системы корней этого символического двучленного уравнения. Более того, легко показать, что если любой символ α группы удовлетворяет уравнению $\theta^r = 1$, где r меньше, чем n, то r должно являться делителем n. Следовательно, когда n — простое число, группа необходимо имеет вид

$$1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \ (\alpha^n = 1).$$

Примечания. Теория групп первоначально развивалась как теория групп подстановок, что объясняется распространением среди математиков идей Э. Галуа (см. выше, п. 10 в). Определение абстрактной конечной группы, вне зависимости от интерпретации ее элементов, дал в 1854 г. в приведенном фрагменте Артур Кэли. В конце статьи «On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$» (1854), содержащей этот отрывок, Кэли пишет, что элементы α, β, ... и т. д. группы не обязательно рассматривать как символы операций, но можно трактовать как величины.

В рассматриваемом тексте формулируется также несколько элементарных утверждений теории конечных групп. Более подробно с историей вопроса можно ознакомиться по книге [Н. Бурбаки, № 13, и статье Г. Вуссинга, № 18].

1. Дальнейшие рассмотрения Кэли указывают на то, что число символов множества 1, α, β, ..., т. е. элементов группы, конечно.

2. Для правильности этого утверждения необходимо наличие обратного для каждого элемента группы (или выполнение эквивалентного требования) — требование, специально не оговоренное, но, очевидно, подразумевавшееся А. Кэли.

в. АЛГЕБРА МАТРИЦ

ИЗ «МЕМУАРА О ТЕОРИИ МАТРИЦ» А. КЭЛИ (1858)

[№ 71, с. 475—476; перевод С. С. Демидова.]

Термин «матрица» может быть использован в более общем смысле, но в настоящем мемуаре я рассматриваю только квадратные и прямоугольные матрицы, и термин «матрица», использованный без оговорок, следует понимать как обозначающий квадратную матрицу; в этом специальном смысле система величин, расположенная в форме квадрата, например

$$\begin{array}{|lll|} \multicolumn{3}{(c)}{a, \ b, \ c} \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}$$

является матрицей. Понятие такой матрицы естественно возникает из сокращенной записи системы линейных уравнений, а именно уравнения

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

могут быть более просто записаны в виде

$$(X,\ Y,\ Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x, y, z),$$

и рассмотрение такой системы уравнений приводит к самым фундаментальным понятиям теории матриц. Будет видно, что матрицы, имеющие один и тот же порядок, ведут себя как простые величины: они могут быть сложены, умножены и т. д. Закон сложения матриц в точности подобен закону сложения обыкновенных алгебраических величин; что же касается их умножения (или композиции), то здесь имеется особенность — матрицы, вообще говоря, не перестановочны; возможно образовывать степени (положительные или отрицательные, целые или дробные) матриц и таким образом достичь понятия рациональной и целой функции или вообще любой алгебраической функции от матрицы. Я получаю замечательную теорему: любая матрица удовлетворяет алгебраическому уравнению ее собственного порядка, имеющему коэффициентом при старшей степени единицу и коэффициентами при других степенях — функции от членов матрицы, последний коэффициент — фактически детерминант (1).

Примечание. Выше было сказано о важности выделения абстрактного понятия закона композиции (см. выше, прим. к п. 13а). Одним из объектов его применения стали матрицы, явно введенные в математику Дж. Сильвестром и фактически встречавшиеся у У. Р. Гамильтона, Г. Грассмана и др. Их исчисление было разработано в 1858 г. А. Кэли в статье «A Memoir on the Theory of Matrices», отрывок из которой приведен выше.

1. Это теорема, известная ныне под названием теоремы Гамильтона — Кэли. Пусть A — квадратная матрица порядка n и E — единичная матрица того же порядка. Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы $A: \Delta(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$. Тогда $\Delta(A) = 0$, т. е. всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Доказательство этой теоремы для $n=2$ и 3 содержится в одном сочинении У. Р. Гамильтона 1853 г. В цитируемом мемуаре Кэли только формулирует теорему в общем виде, ограничиваясь ее доказательством для случаев $n=2$, 3.

г. ПОНЯТИЕ ПОЛЯ, МОДУЛЯ И ИДЕАЛА

ИЗ X-го ДОПОЛНЕНИЯ Р. ДЕДЕКИНДА К «ТЕОРИИ ЧИСЕЛ» ЛЕЖЕНА-ДИРИХЛЕ (1871)

[№ 89а, с. 424; перевод И. Г. Башмаковой.]

Под полем (Körper) будем понимать любую систему из бесконечного числа действительных или комплексных (1) чисел, которая является замкнутой и полной так, что сложение, вычитание, умножение и деление любых двух чисел снова дает число той же системы. Простейшее поле образовано всеми рациональными числами, наибольшее — всеми числами вообще (2).

. . . .

Мы будем называть поле A *делителем* поля M, а это последнее — *кратным* первого, если все числа, содержащиеся в A, входят также и в M; легко найти, что поле рациональных чисел будет делителем любого другого поля.

[Там же, с. 442—443.]

Р. Дедекинд

1. Система $\mathfrak{a}$ действительных или комплексных чисел α, *сумма* и *разность* которых принадлежат этой же системе $\mathfrak{a}$, называется *модулем*; если разность двух чисел ω и ω' принадлежит $\mathfrak{a}$, то мы будем называть их *сравнимыми* по $\mathfrak{a}$ и выражать это сравнением

$$\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}.$$

Такие сравнения можно складывать, вычитать и, следовательно, умножать на любое целое рациональное число, как уравнения. Так как два числа, сравнимые с третьим, будут сравнимы друг с другом, то все существующие числа можно разбить на *классы* (mod $\mathfrak{a}$), так что два сравнимых числа относятся к одному классу, а два несравнимых—к двум различным классам.

2. Если все числа модуля $\mathfrak{a}$ являются также числами модуля $\mathfrak{d}$, то $\mathfrak{a}$ называется *кратным* $\mathfrak{d}$, а $\mathfrak{d}$ — делителем $\mathfrak{a}$.

3. Если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$—заданные числа, то все числа вида

$$\omega = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + \ldots + h_n\omega_n,$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_n$ пробегают все целые числа, образуют *конечный* модуль $\mathfrak{o}$, и мы будем называть комплекс из n чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которые могут быть зависимыми или независимыми друг от друга, *базисом* модуля $\mathfrak{o}$.

[Там же, с. 452.]

1. Система $\mathfrak{a}$ бесконечного множества чисел, содержащихся в $\mathfrak{o}$, называется *идеалом*, если она удовлетворяет двум условиям:

1) Сумма и разность двух чисел из $\mathfrak{a}$ снова является числом из $\mathfrak{a}$.

2) Каждое произведение числа из $\mathfrak{a}$ на число из $\mathfrak{o}$ есть снова число из $\mathfrak{a}$.

[Там же, с.453.]

Если α содержится в $\mathfrak{a}$, то будем говорить, что α *делится* на $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ *входит* [множителем] в α ...

2. Если все числа некоторого идеала $\mathfrak{a}$ содержатся также в идеале $\mathfrak{d}$, то $\mathfrak{d}$ состоит из одного или нескольких классов $(\operatorname{mod} \mathfrak{a})$, и мы будем говорить, что $\mathfrak{a}$ — *кратное* от $\mathfrak{d}$ или *делится* на $\mathfrak{d}$, а $\mathfrak{d}$ — *делитель* $\mathfrak{a}$ или *входит* [множителем] в $\mathfrak{a}$.

[Там же, с. 454.]

3. Идеал $\mathfrak{p}$, отличный от $\mathfrak{o}$, который не имеет делителей, отличных от $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{p}$, называется *простым идеалом* (Primideal).

Примечания. В X дополнении[1] к изданным им «Лекциям по теории чисел» („Vorlesungen über Zahlentheorie") П. Г. Лежена-Дирихле Р. Дедекинд построил теорию делимости для целых алгебраических чисел некоторого конечного расширения $Q(\theta)$, где Q — поле рациональных чисел, а θ — корень неприводимого над Q уравнения:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — целые рациональные. Арифметика целых комплексных чисел была построена Гауссом (см. ч. II, п. 7). Идеи Гаусса были развиты в работах Дирихле и Куммера, причем последний обосновал законы делимости для целых чисел полей деления круга путем введения идеальных множителей. Р. Дедекинд, Е. И. Золотарев и Л. Кронекер рассмотрели и обосновали самый общий случай.

В своей теории Дедекинд явно ввел понятия, которые и до сих пор остаются фундаментальными, а именно поля, модуля и идеала. Первое из этих понятий встречалось уже, в несколько ином виде, в работах Н. Г. Абеля и Э. Галуа по алгебраической теории уравнений (см. выше, п. 10 б — в). Последние два вводятся впервые. Причем делается это с помощью системы аксиом, что явилось одним из первых применений аксиоматического метода в алгебре и, добавим, одним из первых существенных применений его в новое время (работы по аксиоматике геометрии начались позднее). Отличие определений Дедекинда от современных состоит в том, что они вводятся не для произвольных систем элементов, а для *чисел*.

Новые понятия Дедекинд трактует с теоретико-множественной точки зрения. И поля, и модули, и идеалы являются множествами алгебраических чисел, обладающих свойствами, сформулированными в аксиомах, причем понятие «делится на» определяется через понятие «содержится в», отношение $\omega \equiv \omega' \pmod{\mathfrak{a}}$, где $\mathfrak{a}$ — некоторый модуль и означает, что $\omega - \omega'$ содержится в $\mathfrak{a}$, и т. д.

Это был первый важный шаг в создании абстрактной алгебры. Второй шаг был сделан Дедекиндом и Г. Вебером, которые перенесли всю построенную Дедекиндом теорию на поля алгебраических функций (1882).

В начале XX в. в работах Д. Гильберта, Э. Штейница, Э. Нетер и ее учеников и Э. Артина аксиоматизация алгебры была успешно продолжена. Некоторый итог ее развитию был подведен в известной книге Б. Л. ван дер Вардена «Современная алгебра» (впервые опубликована в 1930 г.) [см. № 15], в которой, по словам Н. Бурбаки, эти работы впервые были собраны «в единое целое, открыв пути... для многочисленных исследований последних лет по абстрактной алгебре» [№ 13, с. 72].

1. Под комплексными здесь понимаются числа, которые теперь называются алгебраическими. Наименование «комплексные» они получили в честь гауссовых целых чисел $m + n\sqrt{-1}$, причем комплексными называли и действительные алгебраические числа, например $m + n\sqrt{3}$.

2. В настоящее время поле определяется системой аксиом: множество K элементов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ образует тело, если в K определены две операции $\oplus$

[1] Оно более известно как XI дополнение, так как в последующих изданиях оно шло под этим номером.

и $\otimes$, каждая из которых двум элементам из K ставит в соответствие третий элемент из K. Требуется, чтобы эти операции обладали следующими свойствами:

I	II
$a \oplus b = b \oplus a$	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	
Существует элемент 0 такой, что для любого элемента a из K $a \oplus 0 = a$.	Существует элемент e такой, что для любого элемента a из K $a \otimes e = e \otimes a = a$.
Для каждого элемента $a \in K$ существует $(-a)$ такой, что $a \oplus (-a) = 0$.	Для каждого a $(a \neq 0)$ существует такой элемент $a^{-1} \in K$, что $a \otimes a^{-1} = e$.

Кроме того,

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$

Если $a \otimes b = b \otimes a$, то тело называется коммутативным или полем.

Отметим, что наряду с бесконечными полями в современной математике рассматриваются и конечные. Например, вычеты по простому модулю p: $0, 1, \ldots, p-1$ образуют поле.

14. ЭВОЛЮЦИЯ ВЗГЛЯДОВ НА АЛГЕБРУ

I. ИЗ СОЧИНЕНИЯ ОМАРА ХАЙЯМА «О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ И АЛМУКАБАЛЫ» (ок. 1070 г.)

[№ 49, с. 70—71.]

...Искусство алгебры и алмукабалы (1) есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число (2) и измеримые величины (3), являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-нибудь известной вещи, по которой их можно определить. Эта вещь есть или количество (4), или отношение, не связанное ни с чем другим. В это ты должен глубоко вникнуть. Цель этого искусства состоит в нахождении соотношений, связывающих его предмет с указанными данными. Совершенство этого искусства состоит в знании методов изучения, посредством которых можно постигнуть способ определения упомянутых неизвестных, как числовых, так и геометрических.

II. ИЗ БУМАГ И. НЬЮТОНА (1683—1684)

[№ 91, т. V, с. 564; перевод И. Г. Башмаковой.]

Алгебра же есть ничто иное, как математический язык, приспособленный для обозначения отношений количеств. В этом языке роль слов играют количества, а предложений — уравнения.

III. ИЗ «МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛОГИКИ» ДЖ. БУЛЯ (1847)

[№ 69, с. 49; перевод С. С. Демидова.]

Тем, кто знаком с современным состоянием Символической алгебры, известно, что законность методов анализа зависит не от интерпретации используемых символов, но лишь от правил их комбинации. Любая система интерпретации, не нарушающая истинности предположенных отношений, равно приемлема, и благодаря этому один и тот же метод согласно одной системе интерпретации представляет собой решение вопроса о свойствах чисел, согласно другой — решение геометрической проблемы и решение проблемы динамики или оптики согласно третьей. Это — принцип действительно огромной важности, и можно без риска утверждать, что современному прогрессу чистого анализа во многом содействовало то влияние, которое этот принцип оказал, направляя ход исследования.

IV. ИЗ ПЕРВОГО ТОМА «КУРСА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ» Ж. А. СЕРРЕ (5-е изд., 1885)

[№ 95, с. 1; перевод С. С. Демидова.]

Алгебра, по существу говоря,— Анализ уравнений; все различные части теории, ее составляющие, в большей или меньшей степени связаны с этим основным вопросом. С этой точки зрения Алгебра может быть разделена на три части:

1°. Общая теория уравнений, т. е. совокупность свойств, общих всем уравнениям.

2°. Решение численных уравнений, т. е. определение точных или приближенных значений корней уравнения, коэффициенты которого даны в числах.

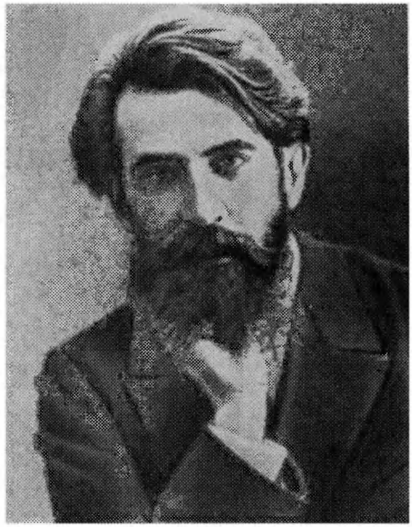
3°. Алгебраическое решение уравнений, т. е. определение выражения, составленного из коэффициентов данного уравнения, которое, будучи в него подставленным вместо неизвестного, тождественно ему удовлетворяет [вне зависимости от того], будут ли коэффициенты предложенного уравнения численно данными или, рассматриваемые просто как известные, останутся неопределенными и записанными буквами.

V. ИЗ СТАТЬИ О. Ю. ШМИДТА И А. Г. КУРОША «АЛГЕБРА» (1950)

[№ 56, с. 53—54.]

Алгебра (5)... может быть определена как наука о системах объектов той или иной природы, в которых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции называются алгебраическими.

Алгебра классифицирует системы с заданными на них алгебраическими операциями по их свойствам и изучает различные задачи, естественно возникающие в этих системах, включая и задачу решения и исследования уравнений, которая в новых системах объектов получает новый смысл (решением уравнений может быть вектор, матрица, оператор и т. д.). Этот новый взгляд на алгебру, вполне оформившийся лишь в XX веке, способствовал дальнейшему расширению алгебраических методов, в том числе и за пределами математики, в частности в физике. Вместе с тем он укрепил связи алгебры с другими отделами математики и весьма усилил влияние алгебры на их дальнейшее развитие.



О. Ю. Шмидт

VI. ИЗ СТАТЬИ «АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ» Н. БУРБАКИ (1948)

[№ 13, с. 251—252].

Теперь можно объяснить, что надо понимать в общем случае под математической структурой. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы (в случае групп — это отношение $x\tau y=z$ между тремя произвольными элементами); затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются аксиомами рассматриваемой структуры). Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предположений относительно рассматриваемых элементов (в частности, от всяких гипотез относительно их «природы»).

. . . .

Отношения, являющиеся исходной точкой в определении структуры, могут быть по своей природе весьма разнообразными. То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют «законом композиции»; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры поля являются «законами композиции», соответствующая структура поля называется алгебраической структурой (например, структура поля определяется двумя законами композиции с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).

Примечания. Сам термин «алгебра», как указывалось, восходит к трактату Мухаммеда ал-Хорезми (см. ч. I, п. 5б). Определение, данное в 1074 г. О. Хайямом (отрывок I), показывает, что под алгеброй в ту пору понимали науку о решении алгебраических уравнений. Такая концепция удерживалась вплоть до второй половины XIX в., о чем свидетельствует приведенный отрывок IV из известного в прошлом веке «Cours d'algèbre supérieure» (5-е изд., 1885) Ж. А. Серре.

Другой аспект понимания предмета алгебры мы находим у Ньютона в процитированном выше отрывке II, найденном среди его бумаг: алгебра трактуется здесь как некоторый язык для обозначения отношений количеств.

Новый этап в подходе к предмету алгебры начинается с работ английских математиков второй четверти XIX в. (ср. выше, п. 11б и п. 13а—в). Основным объектом алгебры становятся множества с аксиоматически заданными на них алгебраическими операциями. В отрывке III из «The mathematical analysis of logic» (1847) Дж. Буль одним из первых утверждает независимость аксиоматических теорий такого рода от конкретных их интерпретаций — принцип, получивший признание лишь в конце прошлого века, главным образом после работ Д. Гильберта.

Последовательная работа по аксиоматизации алгебры, начатая в конце прошлого века Р. Дедекиндом (см. выше, п. 13г) и Д. Гильбертом, завершилась в 20-е годы нашего столетия работами Э. Артина, Э. Нетер и их последователей. Одним из результатов этого было новое понимание алгебры, зафиксированное в отрывке V из статьи «Алгебра», написанной советскими алгебраистами О. Ю. Шмидтом и А. Г. Курошем.

1. См. примечание к п. 5б.

2. То есть, по-нашему, натуральное число.

3. Термин «величина» относится у Хайяма только к непрерывным количествам.

4. Имеется в виду как дискретное, так и непрерывное количество.

5. По мере своего развития алгебра из науки о решении уравнений преобразовывалась постепенно в науку об операциях определенного рода над произвольным множеством объектов. О специфике операций, изучаемых в алгебре, и об алгебраических структурах говорит приведенный нами отрывок VI из статьи Н. Бурбаки «L'Architecture des mathématiques».

Н. Бурбаки — это псевдоним для группы французских математиков, которая предприняла издание «Элементов математики» — серии книг, которые, по замыслу авторов, должны были стать для современной математики тем же, чем были «Начала» (по-латыни — элементы) Евклида для античной науки. В центре внимания Н. Бурбаки находятся основные типы структур, порождающие структуры (les structures-mères), как-то алгебраические, топологические и др., органическое соединение которых и дает все многообразие современных математических теорий (например, топологическая алгебра или алгебраическая топология).

Мы приводим здесь определение структуры, данное Н. Бурбаки и являющееся фундаментальным для всего его труда, и определение одной из порождающих структур, а именно алгебраической, столь же фундаментальное для современной алгебры.

С точки зрения Н. Бурбаки, алгебра — раздел математики, в котором изучаются алгебраические структуры.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ
ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В АНТИЧНОСТИ

а. ЕДИНИЦА И ЧИСЛО. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

ИЗ VII И IX КНИГ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА (ок. 300 г. до н. э.)

[№ 25, т. 2, с. 9—10. Книга VII. Определения.]

1. *Единица* есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым.

2. *Число* же — множество, составленное из единиц (1).

12. *Первое* число есть измеряемое только единицей.

13. *Первые между собой* числа суть измеряемые только единицей как общей мерой.

14. *Составное число* есть измеряемое некоторым числом (2).

Примечания. VII — IX книги «Начал» Евклида посвящены теории (положительных) целых чисел и их отношений, т. е. (положительных) рациональных чисел, и представляют собой, по мнению историков науки, переработку сочинений, уже существовавших в пифагорейской школе в эпоху математика Архита, т. е. около 400 г. до н. э. [см., например, Б. Л. ван дер Варден, № 14].

Книга VII начинается с 23 определений, из которых мы приводим здесь 5. Одной из основных целей книги является построение теории делимости целых чисел. Евклид вводит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя двух чисел, доказывает, что каждое число раскладывается в произведение простых, и, наконец, устанавливает закон однозначности разложения на простые множители. Опираясь на этот закон, Евклид доказывает теорему о бесконечности числа простых чисел.

Одновременно Евклид строит и теорию рациональных чисел как теорию пар целых. В его изложении эта теория тесно переплетается с теорией делимости, однако мы постараемся выделить, насколько это возможно, то, что относится к теории делимости.

Более подробно о книгах VII и IX «Начал» Евклида, кроме упомянутого выше сочинения ван дер Вардена, см. [№ 26, т. 1, ч. 1, гл. IV, и № 7].

1. Евклид приводит традиционное определение единицы и числа (ἀριθμός), восходящее к пифагорейцам. Это определение носит теоретико-множественный характер с его помощью вводятся только натуральные, т. е. целые положительные, числа. Пустое множество, которому отвечало бы число 0, не рассматривалось.

Евклид выбирает некоторый отрезок в качестве единичного (мы будем обозначать его буквой E); каждое целое число получается повторением этого фиксированного отрезка некоторое конечное число раз (мы будем писать $N = nE$).

Все определения и теоремы Евклида относятся к геометрически представленным, так сказать, «формализованным» числам, которые мы будем в дальнейшем называть числами-отрезками. В отличие от них отвлеченные числа, показывающие, сколько раз единица содержится в числе-отрезке, будем называть числами-кратностями. Евклид четко отличает эти два рода чисел на протяжении VII и IX книг «Начал».

2. Определения 12—14 не отличаются от современных. Термину «первое число» (πρῶτος ἀριθμός) в современной русской терминологии соответствует «простое число».

[№ 25, т. 2, с. 12—13. Книга VII.]

Предложение 2

Для двух данных чисел, не первых между собой, найти наибольшую общую их меру.

Пусть данные два числа, не первые между собой, будут *AB*, *CD*. Вот требуется для *AB*, *CD* найти наибольшую общую меру (рис. 10). Если теперь *CD* измеряет *AB*, измеряет также и себя, то, значит, *CD* есть общая мера *CD*, *AB*. И ясно, что и наибольшая, ибо никакое ⟨число⟩, большее *CD*, не измерит *CD*.

Если же *CD* не измеряет *AB*, то для *AB*, *CD* при постоянном отнятии меньшего из большего останется некоторое число, которое измерит предыдущее. Действительно, единица не останется; в противном случае будут *AB*, *CD* первыми между собой (предложение 1); это же не предполагается. Значит, останется какое-то число, которое измерит предыдущее. И пусть *CD*, измеряя *BE*, оставит меньшее себя *EA*, *EA* же, измеряя *DI*, оставит меньшее себя *IC*, *CI* же пусть будет измерять *AE*. Поскольку теперь *CI* измеряет *AE*, *AE* же измеряет *DI*, то, значит, *CI* измерит и *DI*; оно же измеряет и себя самого; значит, измерит и все *CD*. Но *CD* измеряет *BE*; значит, и *CI* измеряет *BE*; оно же измеряет и *EA*; значит, измерит и все *BA*; оно же измеряет и *CD*; значит, *CI* измеряет *AB*, *CD*. Значит, *CI*—общая мера *AB*, *CD*. Вот я утверждаю, что ⟨она⟩ и наибольшая. Действительно, если *CI* не будет наибольшей общей мерой *AB*, *CD*, то числа *AB*, *CD* измерит какое-то число, большее чем *CI*. Пусть оно измеряет и будет *H*. И поскольку *H* измеряет *CD*, *CD* же измеряет *BE*, то, значит, и *H* измеряет *BE*; оно же измеряет и все *BA*; значит, оно измерит и остаток *AE*. Но *AE* измеряет *DI*; значит, и *H* измерит *DI*; оно же измеряет и все *DC*; значит, измерит и остаток *CI*, большее—меньшее; это же невозможно. Значит, числа *AB*, *CD* не измерит никакое число большее *CI*; значит, *CI*—наибольшая общая мера *AB* и *CD* [что и требовалось доказать].

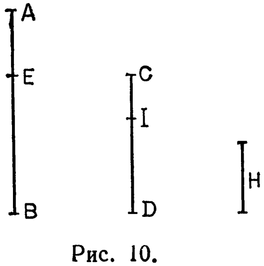


Рис. 10.

Следствие

Из этого вот ясно, что если число измеряет два числа, то оно измерит и их наибольшую общую меру, что и требовалось доказать.

Примечание. В VII, 2 Евклид приводит алгоритм нахождения общего наибольшего делителя для случая, когда числа-отрезки взаимно просты, т. е. общая мера их равна единичному отрезку E. В VII, 2 рассматривается случай, когда числа-отрезки A, B не взаимно просты. Если $A > B$, то Евклид вычитает B из A столько раз, сколько это возможно, пусть

$$A - nB = B_1 \text{ и } B_1 < B.$$

Затем, та же процедура применяется к числам B и B_1:

$$B - n_1 B_1 = B_2 \text{ и } B_2 < B_1,$$

затем к B_1 и B_2 и т. д.

Евклид утверждает, что этот процесс через конечное число шагов приведет к числу B_k, которое измерит предыдущее

$$B_{k-1} = n_k B_k,$$

и доказывает, что тогда B_k и будет наибольшей общей мерой отрезков A и B. При этом молчаливо предполагается, что целых чисел, меньших данного, всегда конечное число. Однако такое предложение было Евклиду известно, и он явно высказал его при доказательстве теоремы VII, 31, которое помещено далее.

6. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ

[№ 25, т. 2, с. 15—16. Книга VII.]

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

Предложение 5.

Если число есть часть числа и другое—такая же часть другого, то и вместе взятые ⟨первые⟩ будут такой же частью вместе взятых ⟨вторых⟩, как одно одного.

Примечание. Предложение 5 можно записать так:

$$nA + nB = n(A + B),$$

где A и B — числа-отрезки, а n — число-кратность. Итак, Евклид доказывает, что умножение на числа-скаляры дистрибутивно (термин, введенный французским математиком Ф. Сервуа в 1815 г.) по отношению к сложению чисел-отрезков.

КОММУТАТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ

[№ 25, т. 2, с. 10. Книга VII. Определение 16.]

Говорят, что *число умножает число*, когда сколько в нем единиц, столько раз составляется умножаемое и что-то возникает (1).

[№ 25, т. 2, с. 23—24. Книга VII.]

Предложение 16.

Если два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающие из них будут равны между собой.

Пусть будут два числа A, B и пусть A, умножая B, производит C; B же, умножая A, производит D; я утверждаю, что C будет равно D (рис. 11).

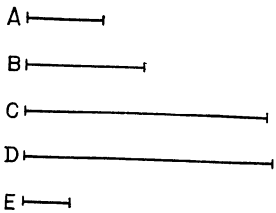


Рис. 11.

Действительно, поскольку A, умножая B, произвело C, то, значит, B измеряет C по ⟨количеству⟩ единиц в A. Также и единица E измеряет число A по ⟨количеству содержащихся⟩ в нем единиц; значит, равное ⟨число раз⟩ единица E измеряет число A и B — ⟨число⟩ C. Значит, и перестановкой равное ⟨число раз⟩ единица E измеряет число B и A — ⟨число⟩ C (предложение 15). Опять, поскольку B, умножая A, произвело D, то, значит, A измеряет D по ⟨количеству содержащихся⟩ в B единиц. Также и единица E измеряет B по ⟨количеству содержащихся⟩ в нем единиц; значит, равное ⟨число раз⟩ единица E измеряет число B, и A — ⟨число⟩ D. Но равное ⟨число раз⟩ единица E измеряла число B, и A — ⟨число⟩ C; значит, равное ⟨число раз⟩ A измеряет каждое из C, D. Значит, C равно D, что и требовалось доказать **(2)**.

Примечания. 1. Определение умножения двух чисел-отрезков $A=aE$ и $B=bE$ у Евклида не симметрично: $AB=aB$, т. е. B повторяется столько раз, сколько единиц содержится в множителе A. Вероятно поэтому Евклид доказывает коммутативность умножения: $AB=BA$, т. е. $bA=aB$.

2. Доказательство VII, 16 основано на свойствах отношений целых чисел, в частности на «перестановочности» крайних и средних членов пропорции (VII, 13 и VII, 15). Если учесть некоторые предыдущие предложения, то рассуждение Евклида соответствует следующей схеме:

$$AB=aB=a\underbrace{(E+\ldots+E)}_{b\ \text{раз}}=a\,(bE)=(ab)\,E$$

$$BA=bA=b\underbrace{(E+\ldots+E)}_{a\ \text{раз}}=b\,(aE)=(ba)\,E=(ab)\,E$$

Так что, по существу, Евклид доказывает коммутативность (термин Ф. Сервуа, 1815 г.) умножения чисел-отрезков, опираясь на коммутативность умножения чисел-кратностей [см. И. Г. Башмакова, № 7].

в. ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ

[№ 25, т. 2, с. 33—34. Книга VII.]

Предложение 30.

Если два числа, умножая друг друга, производят что-то, возникающее же из них измеряется каким-то первым числом, то ⟨последнее⟩ измерит и одно из первоначальных.

Пусть два числа A, B, умножая друг друга, производят C, и пусть C измеряется каким-то первым числом D; я утверждаю, что D измеряет одно из A, B (рис. 12).

Действительно, пусть оно не измеряет A и D есть первое; значит, A, D будут первыми между собой (предложение 29).

И сколько раз D измеряет C, пусть столько единиц будет в E. Поскольку теперь D измеряет C по ⟨количеству⟩ единиц в E, то, значит, D, умножая E, произвело C (определение 16). Вместе с тем и A, умножая B, произвело C; значит, ⟨произведение⟩ из D, E равно ⟨произведению⟩ из A, B; значит, будет, что как D к A, так и B к E. Но D, A — первые, первые же и наименьшие, наименьшие же измеряют имеющие то же самое отношение равное ⟨число раз⟩ большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20), то есть предыдущее — предыдущее и последующее — последующее; значит, D измеряет B. Подобно вот докажем, что и если оно не измеряет B, то будет измерять A. Значит, D измеряет одно из A, B, что и требовалось доказать.

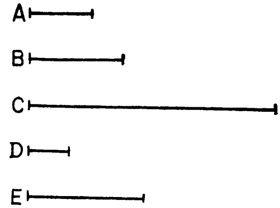


Рис. 12.

Примечание. Это — основная теорема теории делимости: если произведение AB делится на простое число p и A не делится на p, то B будет делиться на p. Доказательство опирается на следующие две теоремы «Начал»: VII, 20 «*Числа, наименьшие из имеющих то же самое отношение с ними, равное ⟨число раз⟩ измеряют имеющие то же самое отношение ⟨числа⟩, причем большее ⟨измеряет⟩ большее, а меньшее — меньшее*» [№ 25, т. 2, с. 26]; VII, 21 «*Первые между собой числа суть наименьшие из имеющих с ними то же самое отношение*» [№ 25, т. 2, с. 27]. Таким образом, если имеется множество пар чисел, имеющих одно и то же отношение $\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}=\ldots$, то наименьшая пара $\frac{A_0}{B_0}$ (т. е. такая, что $A_0 < A_i$, $i=1, 2, \ldots$; тогда, как легко вывести, и $B_0 < B_i$, $i=1, 2, \ldots$) обладает тем свойством, что $A_i = kA_0$, $B_i = kB_0$. При этом, если A_0, B_0 взаимно просты, то они и составляют наименьшую пару. Это свойство наименьшей пары позволяет Евклиду эффективно ее найти. Итак, пусть $AB = nP$ и $(A, P) = E$, тогда $AB = NP$, где $\frac{A}{P} = \frac{N}{B}$ и $N = nE$. Но A, P составляют наименьшую пару, поэтому $N = kA$, $B = kP$, т. е. B делится на P.

[№ 25, т. 2, с. 34—35. Книга VII.]

Предложение 31.

Всякое составное число измеряется каким-то первым числом.

Пусть будет составное число A; я утверждаю, что A измеряется каким-то первым числом (рис. 13).

Действительно, поскольку A есть составное, его измерит какое-то число. Пусть оно измеряет и будет B. И если B первое, то заданное уже было бы выполнено. Если же ⟨оно⟩ составное, то его измерит какое-то число. Пусть оно измеряет и будет C. И поскольку C измеряет B, B же измеряет A, то, значит, и C измеряет A. И если C первое, то заданное уже было бы выполнено. Если же оно составное, то его будет измерять какое-то число. Вот при производстве такого пересмотра останется какое-то первое число, которое измерит. Действительно, если бы не осталось, то число A будет измеряться бесконечным ⟨рядом⟩ чисел,

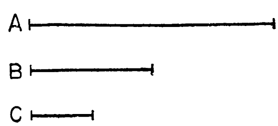


Рис. 13.

из которых каждое каждого будет меньше; это же невозможно для чисел. Значит, останется какое-то первое число, которое измерит предыдущее, которое измерит и A.

Значит, всякое составное число измеряется каким-то первым числом, что и требовалось доказать.

Примечание. Если A—составное число, то, по определению, $A = BC$, $B < A$. Если B—также составное, то $B = B_1C_1$, $B_1 < B < A$ и т. д. Процесс этот не может продолжаться до бесконечности, так как иначе «число A будет измеряться бесконечным ⟨рядом⟩ чисел, из которых каждое каждого будет меньше; это же невозможно для чисел». Здесь сформулировано важнейшее свойство целых чисел: существует только конечное число чисел, меньших данного. Из VII, 31 следует, что каждое целое A можно представить в виде произведения простых

$$A = P_1P_2 \ldots P_k \quad \text{(где } P_i \text{ и } P_j \text{ могут быть равными).}$$

[№ 25, т. 2, с. 83—84. Книга IX.]

Предложение 14.

Если число будет наименьшим измеряемым ⟨данными⟩ первыми числами, то оно не измерится никаким иным первым числом, кроме первоначально измерявших ⟨его⟩.

Пусть число A будет наименьшим измеряемым первыми числами B, C, D; я утверждаю, что A не измерится никаким иным первым числом, кроме B, C, D (рис. 14).

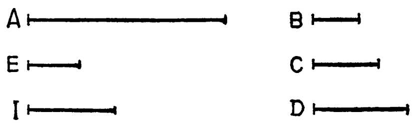


Рис. 14.

Действительно, если возможно, пусть оно измеряется первым ⟨числом⟩ E и пусть E не будет тождественно ни с одним из B, C, D. И поскольку E измеряет A, пусть оно измеряет его по ⟨числу единиц в⟩ I; значит, E, умножая I, произвело A. И A измеряется первыми числами B, C, D. Если же два числа, умножая друг друга, производят что-то, возникающее же из них измеряется некоторым первым числом, то ⟨последнее⟩ измерит и одно из первоначальных (предложение 30 книги VII); значит, B, C, D измерят одно из E, I. Теперь E они не измерят, ибо E есть первое и ни одному из B, C, D не тождественное. Значит, они измерят I, являющееся меньшим A; это же невозможно, ибо A предполагается наименьшим измеряемым B, C, D. Значит, A не будет измеряться ⟨другим⟩ первым числом, кроме B, C, D, что и требовалось доказать.

Примечание. В VII, 31 было установлено, что любое целое число A можно представить в виде произведения простых множителей

$$A = P_1 \ldots P_k, \tag{1}$$

где некоторые из P_i или все они могут быть одинаковыми. В IX, 14 доказано, что если $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$, то представление (1) однозначно. Действительно, если $P_1, \ldots, P_k$ попарно различны, то наименьшее число, ими измеряемое, т. е. их общее наименьшее кратное, и будет произведением (1). Евклид доказывает, что в этом случае A не может делиться ни на какое простое число q, отличное от P_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Евклид имел все, чтобы провести доказательство для самого общего случая, т. е. для случая

$$A = P_1^{n_1} \ldots P_r^{n_r}. \qquad (1')$$

Он не сделал этого, вероятно, потому, что из-за неразвитости алгебраической символики рассуждение со степенями различных простых чисел было бы слишком громоздким.

г. БЕСКОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

[№ 25, т. 2, с. 89—90. Книга IX.]

Предложение 20.

Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел.

Пусть предложенные первые числа будут A, B, C; я утверждаю, что первых чисел существует больше, чем A, B, C (рис. 15).

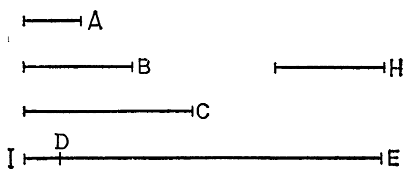


Рис. 15.

Действительно, возьмем наименьшее ⟨число⟩, измеряемое A, B, C (предложение 36 книги VII), и пусть оно будет DE, и приложим к DE единицу DI. Вот EI или будет первым, или нет. Пусть сперва оно будет первым; значит, найдено первых чисел A, B, C, EI больше, чем A, B, C.

Но вот пусть EI не будет первым; значит, оно измеряется некоторым первым числом (предложение 31 книги VII). Пусть оно будет измеряться первым ⟨числом⟩ H; я утверждаю, что H не будет тождественным ни с одним из A, B, C. В самом деле, если возможно, пусть будет. Но A, B, C измеряют DE, значит, и H измерит DE. Оно же измеряет и EI; и остающуюся единицу DI измерит H, будучи числом; это же нелепо. Значит, H не будет тождественным ни с одним из A, B, C. И оно предполагается первым, значит, найдено первых чисел больше предложенного количества A, B, C, ⟨а именно⟩ A, B, C, H, что и требовалось доказать.

Примечание. Теорема о бесконечности числа простых чисел вплоть до XIX в. оставалась единственным строго установленным результатом относительно распределения простых чисел в натуральном ряду. В XVIII в. Л. Эйлер дал новое доказательство бесконечности числа простых чисел, основывающееся на идеях математического анализа. Он исходил из выведенного им тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

где произведение берется по всем простым числам p. При $s \to 1$ левая часть тождества стремится к бесконечности, откуда следует, что простых чисел бесконечно много. Этим доказательством было положено начало аналитической теории чисел (см. далее, ч. II, п. 8).

2. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

ИЗ II КНИГИ «АРИФМЕТИКИ» ДИОФАНТА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО (III в. н. э.)

[№ 74, т. I, с. 90; перевод И. Г. Башмаковой и И. Н. Веселовского.]

Задача 8. Заданный квадрат разложить на два квадрата.

Пусть надо разложить 16 на два квадрата.

Положим, что первый будет $\Delta^{\nu}1$; тогда второй будет $\mathring{M}16 \pitchfork \Delta^{\nu}1$; следовательно, $\mathring{M}16 \pitchfork \Delta^{\nu}1$ будет равно $\square$-ту **(1)**.

Составим $\square$ из некоторого количества $\varsigma \pitchfork$ столько $\mathring{M}$, сколько их будет в стороне разлагаемого [квадрата]; пусть это будет $\varsigma 2 \pitchfork \mathring{M}4$ **(2)**. Тогда сам этот $\square$ будет $\Delta^{\nu}4\mathring{M}16 \pitchfork \varsigma 16$, и это равно $\mathring{M}16 \pitchfork \Delta^{\nu}1$.

Прибавим к обеим частям недостающее и [вычтем] подобные из подобных.

Тогда $\Delta^{\nu}5$ равно $\varsigma 16$ и ς окажется равным 16 пятым.

Один [квадрат] будет $\frac{256}{25}$, другой $\frac{144}{25}$. И сложенные оба дают $\frac{400}{25}$, или $\mathring{M}16$, и каждое будет квадратом **(3)**.

Примечания. «Арифметика» Диофанта посвящена в основном задачам, сводящимся к неопределенным уравнениям:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (1)$$

или системам таких уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где $m < n$, а F и F_i — многочлены. В настоящее время задача решения системы (2) ставится так: пусть коэффициенты всех F_i принадлежат некоторому полю K Тогда решение $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ называется рациональным, если все $x_i^{(0)} \in K$. Требуется найти множество $M(K)$ всех рациональных решений и определить структуру этого множества. Диофант рассматривал все свои системы над полем Q рациональных чисел и искал их решение в полуполе Q^+ положительных рациональных чисел. Он стремился, если это возможно, выразить неизвестные в виде рациональных функций одного или нескольких параметров. Однако поскольку у Диофанта был только один символ для неизвестного, то в качестве параметров он брал некоторые конкретные числа, оговаривая обычно, что можно было бы вместо них взять и любые другие.

Мы приводим здесь две задачи на решение неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными:

$$F_2(x, y) = 0. \tag{3}$$

Диофант, по существу, доказывает, что если (3) имеет рациональное решение x_0, y_0, то оно имеет и бесконечно много таких решений, причем неизвестные можно выразить как рациональные функции одного параметра:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{4}$$

так что $F[\varphi(t), \psi(t)] \equiv 0$.

В задаче 8 решается уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

которое имеет, очевидно, решение $x = 0$, $y = a$. На этой задаче, как и на нескольких предыдущих, Диофант демонстрирует метод, который потом постоянно применяется в «Арифметике»: пусть задано уравнение

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C \tag{3'}$$

и пусть $C = l^2$, тогда для нахождения выражения (4) делается подстановка:

$$x = t, \quad y = kt \pm l,$$

откуда

$$t = \frac{B \mp 2lk}{k^2 - A},$$

следовательно, x и y выражаются в виде (4). Другой перевод: [№ 24а, с. 64—65].

1. Целые числа Диофант записывал в греческой алфавитной нумерации, а дроби — с помощью горизонтальной черты, над которой ставил знаменатель и под которой — числитель [см. № 26, т. I, с. 62—64]. Для удобства чтения мы записываем числа в привычной для нас форме, сохраняя, однако, алгебраическую символику оригинала (см. ч. I, п. 3).

2. Для решения неопределенного уравнения

$$y^2 = a^2 - x^2, \quad (a = 4), \tag{3''}$$

Диофант делает подстановку $y = 2x - a$, отмечая, что вместо $2x$ можно взять любое другое количество x, так что наиболее адекватной записью подстановки будет $y = kx - a$

3. В общем виде решение можно записать так:

$$(kx - a)^2 = a^2 - x^2,$$

откуда

$$x = \frac{2ak}{k^2+1}, \quad y = \frac{ak^2 - a}{k^2+1} = a\frac{k^2-1}{k^2+1}.$$

Решение Диофанта получается при $a = 4$, $k = 2$.

Если мы предположим, что надо разделить на два квадрата произвольный квадрат z^2 и рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ или } \left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1, \tag{5}$$

то получим $\frac{x}{z}=\frac{2k}{k^2+1}$, $\frac{y}{z}=\frac{k^2-1}{k^2+1}$, или, если принять $k=\frac{p}{q}$, $(p, q)=1$, то

$$x=\lambda\, 2pq,\ y=\lambda\,(p^2-q^2),\ z=\lambda\,(p^2+q^2). \qquad (6)$$

Это — общие формулы решения уравнения (5), т. е. для нахождения «пифагоровых троек» — целочисленных сторон прямоугольного треугольника. Приемы составления троек «пифагоровых чисел» были известны еще в древнем Вавилоне, причем возможно, что они вычислялись по правилу (6) [см. № 26, т. I, с. 49—50]. В школе Пифагора согласно Проклу такие тройки определялись по формулам: $\frac{1}{2}(m^2-1)$, m, $\frac{1}{2}(m^2+1)$ при нечетном m. Общее решение, лишь по форме отличающееся от (6), приводится в лемме к предложению 28 X книги «Начал» Евклида.

В приведенном тексте Диофант ничего не говорит о числе решений уравнения (3″). О бесконечности числа решений можно заключить только из самого метода решения. Но при решении задачи III, 19 Диофант пишет: «Мы уже знаем, что заданный квадрат можно разбить на два квадрата бесконечным числом способов». А в книге VI он доказывает общую лемму (лемма к предложению VI, 15), согласно которой, если уравнение $ax^2-b=y^2$ имеет некоторое решение x_0, y_0, то можно найти неограниченно много других решений, причем $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$

[№ 74, т. I, с. 93—94; перевод И. Г. Башмаковой и И. Н. Веселовского.]

З а д а ч а 9. Данное число, которое составляется из двух квадратов, подразделить на два других квадрата (1).

Пусть число 13, составленное из двух квадратов 4 и 9, надо подразделить на два других квадрата.

Возьмем стороны $\overset{\circ}{M}2$ и $\overset{\circ}{M}3$ упомянутых квадратов и положим стороны искомых квадратов: одну ς1$\overset{\circ}{M}2$, а другую — нескольким ς⋔ столько $\overset{\circ}{M}$, сколько их будет в стороне другого квадрата. Пусть это будет ς2⋔$\overset{\circ}{M}3$ (2). И получатся квадраты: один Δ^{Y}1ς4$\overset{\circ}{M}4$, а другой Δ^{Y}4$\overset{\circ}{M}9$⋔ς12.

Остается сделать, чтобы оба сложенные давали $\overset{\circ}{M}13$. Но два сложенные дают Δ^{Y}5$\overset{\circ}{M}13$⋔ς8. Это равно $\overset{\circ}{M}13$ и получаем ς [равным] $\frac{8}{5}$ (3).

К подстановкам: я положил сторону первого ς1$\overset{\circ}{M}2$, она будет $\frac{18}{5}$.

Сторона же второго ς2⋔$\overset{\circ}{M}3$; она будет одна [пятая]. А сами квадраты будут: один $\frac{324}{25}$, а другой одна [двадцать пятая]. И оба сложенные дадут $\frac{325}{25}$, что сводится к заданному [числу] $\overset{\circ}{M}13$ (4).

П р и м е ч а н и я. 1. Задача эквивалентна неопределенному уравнению

$$x^2+y^2=N, \qquad (1)$$

причем число N представлено в виде суммы двух квадратов $N=a^2+b^2$.

2. Подстановка Диофанта имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x&=t+a,\\ y&=kt-b. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь a и b — стороны квадратов, на которые раскладывается N, а k Диофант принимает равным 2.

3. Подставляя (2) в (1), Диофант получает рациональное выражение неизвестного t (у Диофанта ϛ) через параметр k:

$$t = 2\frac{kb-a}{k^2+1}\left[=\frac{8}{5}\right].$$

Из решения Диофанта следует, что если уравнение (1) имеет одно рациональное решение, то у него будет и бесконечно много таких решений, рационально выражающихся через параметр k.

4. Метод решения Диофанта особенно нагляден, если придать ему геометрическую интерпретацию. Через заданную рациональную точку $M(a, -b)$ окружности (1) проводится прямая (2), которая встречает окружность еще в одной точке T, координаты которой также будут рациональны. При этом каждому рациональному k будет отвечать точка T_k с рациональными координатами и, наоборот, каждой рациональной точке T на окружности (1) будет отвечать прямая MT с рациональным параметром k_T. Этот же метод применим для нахождения рациональных точек на любой кривой 2-го порядка, на которой лежит, по крайней мере, одна рациональная точка. Подробнее об этом см. [№ 8].

3. ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

а. ФОРМУЛИРОВКА ФЕРМА

ЗАПИСЬ П. ФЕРМА НА ПОЛЯХ «АРИФМЕТИКИ» ДИОФАНТА (опубликована в 1670 г.)

[№ 81, т. I, с. 291; перевод И. Г. Башмаковой.]

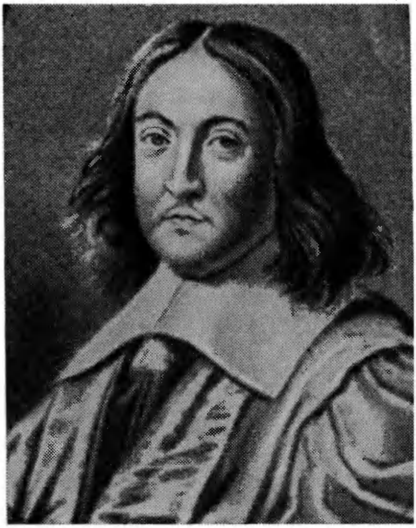
Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни квадрато-квадрат на два квадрато-квадрата, ни вообще какую-либо степень, бóльшую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое не может поместиться на этих полях.

Примечание. Утверждение Ферма означает, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

при $n > 2$ и $xyz \neq 0$ не имеет решений в целых числах (а значит, и в рациональных). В общем виде оно еще не доказано, а «чудесное доказательство» самого Ферма не сохранилось.

Ферма записал свою теорему на полях принадлежащего ему экземпляра «Арифметики» Диофанта в издании Баше де-Мезериака, напротив задачи 8 II книги (см. ч. II, п. 2). В письмах к математикам Ферма ставил эту задачу для частных случаев $n=3$ и $n=4$. В замечании к другой задаче Диофанта Ферма доказал свою теорему для $n=4$ (см. ч. II, п. 3в). Впоследствии Л. Эйлер доказал ее для $n=4$ и $n=3$ (см. ч. II, п. 3г), А. М. Лежандр (1823) и П. Лежен Дирихле (1825, 1832) дали доказательства для $n=5$, 14 и 7. А в 1847 г. Г. Ламе представил Парижской Академии наук общее до-



П. Ферма

казательство теоремы, которое основывалось на предположении об однозначности разложения чисел вида

$$a_0+a_1\zeta+\ldots+a_{\lambda-1}\zeta^{\lambda-1}, \qquad (2)$$

где a_i — целые рациональные, а $\zeta^\lambda=1$, $\zeta\neq 1$, в произведение простых множителей. Лиувилль сделал замечание, что это предположение необходимо доказать. Однако еще раньше Э. Куммер обнаружил, что для чисел вида (2) закон однозначности разложения на простые множители не имеет места. Точнее говоря, дело обстоит так: рациональные простые числа можно характеризовать двумя свойствами: 1) неразложимостью в произведение двух целых чисел, отличных от единицы, и 2) тем, что произведение двух простых чисел не делится ни на какое третье число. Куммер показал, что числа вида (2) могут обладать свойством 1 и не иметь свойства 2. Он преодолел эту трудность путем введения идеальных множителей, с помощью которых построил арифметику целых чисел полей деления круга. После этого Куммер перешел к доказательству теоремы Ферма. Заметим, что доказательство достаточно провести для простых значений n, так как если $n=n'p$, где p — простое, то уравнение (1) можно записать в виде $(x^{n'})^p+(y^{n'})^p=(z^{n'})^p$. Куммер доказал теорему для всех регулярных простых чисел, т. е. для таких, которые не входят в качестве множителей в числители первых $\frac{p-3}{2}$ чисел Бернулли (например, среди чисел первой сотни нерегулярными будут только 37, 59 и 67). Однако доказано, что нерегулярных простых чисел бесконечно много, тогда как аналогичный вопрос о регулярных простых числах остается открытым.

В 70-х годах прошлого века Р. Дедекинд, Е. И. Золотарев и Л. Кронекер построили различными методами арифметику целых чисел любого поля алгебраических чисел, завершив тем самым исследования, начатые Куммером в связи с теоремой Ферма.

В дальнейшем были получены результаты, относящиеся к так называемому первому случаю теоремы, в котором неразрешимость уравнения (1) рассматривается для простых показателей l и для чисел x, y, z, не делящихся на l. Так, в 1909 г. Виферих показал, что первый случай справедлив для всех l, для которых $2^{l-1}\not\equiv 1 \pmod{l^2}$, а затем Д. Мириманов, Г. Фробениус, Г. С. Вандивер и ряд других авторов показали, что это же имеет место и для тех l, для которых $q^{l-1}\not\equiv 1 \pmod{l^2}$, где q — некоторое простое число. Основываясь на этом результате, первый случай теоремы Ферма был установлен для всех простых чисел, меньших 253 747 889 (1941 г.).

В 1934 г. Г. С. Вандивер показал, что если число классов дивизоров h поля $Q(\zeta+\zeta^{-1})$, $\zeta^l=1$ не делится на l, то для показателя l справедлив первый случай.

Великая теорема Ферма представляет собой одну из таких математических проблем, с исследованием которых было связано создание и развитие новых математических теорий. Именно этим она ценна для науки. [Подробнее о проблеме Ферма см. А. Я. Хинчин, № 51, З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, № 12.]

6. МЕТОД СПУСКА

ИЗ ПИСЬМА П. ФЕРМА К КАРКАВИ ОТ АВГУСТА 1659 г.

[№ 81, г. 2, с. 43, перевод И. Г. Башмаковой.]

Поскольку обычные методы, которые изложены в книгах, недостаточны для доказательства столь трудных предложений, я нашел совершенно особый путь для того, чтобы достичь этого.

Я назвал этот способ доказательства *бесконечным* (infinie) или *неопределенным* (indéfinie) *спуском*; вначале я пользовался им только для доказательства отрицательных предложений, как-то:

что не существует числа, меньшего на единицу кратного трех, которое составлялось бы из квадрата и утроенного квадрата;

что не существует прямоугольного треугольника в числах, площадь которого была бы квадратным числом.

Доказательство проводится путем приведения к абсурду таким способом:

Если бы существовал какой-нибудь прямоугольный треугольник в целых числах, который имел бы площадь, равную квадрату, то существовал бы другой треугольник, меньший этого, который обладал бы тем же свойством. Если бы существовал второй, меньший первого, который имел бы то же свойство, то существовал бы в силу подобного рассуждения третий, меньший второго, который имел бы то же свойство, и, наконец, четвертый, пятый, спускаясь до бесконечности. Но, если задано число, то не существует бесконечности по спуску меньших его (я все время подразумеваю целые числа). Откуда заключают, что не существует никакого прямоугольного треугольника с квадратной площадью.

Примечание. Метод бесконечного или неопределенного спуска действительно сделался одним из наиболее мощных средств диофантова анализа. После Ферма его с успехом применяли Эйлер и Лагранж, а в наши дни — Л. Дж. Морделл, А. Вейль и другие. При этом метод был распространен на проблемы решения уравнений в рациональных числах. Для этого было введено понятие «высота точки». Если, например, речь идет о доказательстве неразрешимости уравнения

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — многочлен, в рациональных числах, то сначала переходят к однородным координатам u, v, z и получают уравнение

$$\varphi(u, v, z) = 0. \tag{2}$$

Каждому рациональному решению (1) отвечает решение (2) в целых числах. Поэтому достаточно показать, что уравнение (2) не имеет ни одного решения в целых числах. Пусть теперь u, v, z — решение (2). Назовем *высотой* точки (u, v, z) наибольшее из чисел $|u|$, $|v|$, $|z|$. Чтобы провести «спуск», надо доказать, что если уравнению (2) удовлетворяют координаты точки высоты h, то ему будут удовлетворять и координаты точки высоты $h_1 < h$ [подробнее см. добавления Ю. И. Манина к книге Д. Мамфорда, № 33].

в. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФЕРМА ДЛЯ $n=4$

ИЗ ЗАМЕЧАНИЙ П. ФЕРМА К ДИОФАНТУ (опубликовано в 1670 г.)

[№ 81, т. I, с. 340—341; перевод С. С. Демидова.]

Если бы площадь треугольника была квадратом, существовали бы два квадрато-квадрата, разность которых была бы квадратом; из этого следует, что у нас имелись бы также два квадрата, сумма и разность которых были бы квадратами. Следовательно, мы имели бы квадратное число, составленное из квадрата и удвоенного квадрата, при условии, что сумма составляющих его квадратов также была бы квадратом (1). Но если квадратное число составлено из квадрата и удвоенного другого квадрата, то его сторона также составлена из квадрата и удвоенного квадрата, что я могу без труда доказать.

Отсюда заключаем, что эта сторона есть сумма двух сторон при прямом угле прямоугольного треугольника, один из составляющих квадратов которой образует основание и удвоенный другой квадрат — высоту (2).

Этот прямоугольный треугольник будет образован, следовательно, двумя квадратными числами, сумма и разность которых будут квадратами. Но мы докажем, что сумма этих двух квадратов меньше, чем двух первых, для которых мы также предположили, что как сумма их, так и разность образуют квадраты. Следовательно, если даны два квадрата, сумма и разность которых образуют квадраты, то даны тем самым в целых числах два квадрата, обладающие тем же самым свойством и сумма которых меньше первоначальной (3).

При помощи того же самого рассуждения получим затем сумму меньшую, чем сумма, выведенная из первой, и, продолжая бесконечно, будем находить все время целые числа все меньшие и меньшие, удовлетворяющие тем же условиям. Но это невозможно, так как, задав целое число, нельзя найти бесконечное количество целых чисел, которые были бы меньшими (4).

Примечания. Ферма утверждает, что площадь $S=\frac{1}{2}ab$ прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c, где a, b, c — целые числа, не может быть квадратом. Из этого следует Великая теорема Ферма для $n=4$. Действительно, по формулам для «пифагоровых чисел» (см. ч. II, п. 2, прим. 3)

$$a=\xi^2-\eta^2,\quad b=2\xi\eta,\quad c=\xi^2+\eta^2,$$

где ξ, η можно предполагать взаимно простыми и различной четности (иначе a, b, c имели бы общие делители). Если бы площадь $S=\xi\eta(\xi^2-\eta^2)$ была квадратом, то ξ, η, $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ были бы квадратами: $\xi=p^2$, $\eta=q^2$, $\xi^2-\eta^2=r^2$, а тогда и разность двух четвертых степеней $p^4-q^4=r^2$ равнялась бы квадрату. Из невозможности последнего равенства следует, что p^4-q^4 не может равняться четвертой степени, т. е. следует Великая теорема Ферма для $n=4$. Ферма доказывает свое утверждение от противного, пользуясь методом спуска.

1. Заметив, что из допущения, будто $S=\frac{1}{2}ab$ есть квадрат, следует существование таких p^4, q^4, что

$$p^4-q^4=r^2, \tag{*}$$

Ферма заключает, что p^2+q^2 и p^2-q^2 также должны быть квадратами. В самом деле, ξ и η (см. выше) взаимно просты и разной четности, поэтому p и q также будут взаимно просты и различной четности и из $(p^2-q^2)\times\times(p^2+q^2)=r^2$ получим $p^2+q^2=u^2$, $p^2-q^2=v^2$, где u, v — нечетны и взаимно просты. Откуда $p^2=v^2+q^2$, $u^2=v^2+2q^2$.

2. Ферма утверждает, что и само u (см. предыдущее примечание) будет суммой квадрата и удвоенного квадрата. Действительно,

$$u^2-v^2=(u+v)(u-v)=2q^2.$$

Поскольку u и v нечетны и взаимно просты, то $u+v$ и $u-v$ имеют общий наибольший делитель 2, а их произведение должно делиться на 8. Пусть

$$u-v=4m^2,\quad u+v=2n^2,$$

тогда $u=n^2+2m^2$, $v=n^2-2m^2$, т. е. u представляется в том же виде, что и u^2. Далее, $p^2=\frac{u^2+v^2}{2}=n^4+4m^4$, $q^2=\frac{u^2-v^2}{2}=4n^2m^2$. Значит, n^2 и $2m^2$ являются сторонами прямоугольного треугольника в числах.

3. Поскольку $n^4+4m^4=p^2$, то существуют такие взаимно простые числа τ, σ, что $p=\tau^2+\sigma^2$, $n^2=\tau^2-\sigma^2$, $2m^2=2\tau\sigma$. Значит, $(\tau+\sigma)(\tau-\sigma)=n^2$ и $\tau\sigma=m^2$, откуда, как и выше, $\tau=p_1^2$, $\sigma=q_1^2$ и $p_1^4-q_1^4=n^2$, т. е. приходим к новым двум числам, удовлетворяющим уравнению (*). При этом, как замечает Ферма,

$$p_1^2+q_1^2<p^2+q^2.$$

Это можно установить, заметив, что

$$p_1^2+q_1^2<n^2<p^2+q^2.$$

4. Итак, повторяя проведенное рассуждение, получим бесконечную цепочку убывающих целых чисел:

$$p^2+q^2>p_1^2+q_1^2>p_2^2+q_2^2>\ldots,$$

что невозможно. Рассуждения такого рода Ферма и называл доказательством «методом бесконечного или неопределенного спуска».

г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФЕРМА ДЛЯ $n=3$

ИЗ «УНИВЕРСАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ» Л. ЭЙЛЕРА (1768—1769)

[№ 76. т. 2, с. 343—349; перевод С. С. Демидова.]

Теорема. Невозможно найти два куба, сумма или разность которых будет кубом.

Мы начнем с замечания, что если невозможность, о которой идет речь, имеет место для суммы, то она имеет место также для разности двух кубов. В самом деле, если невозможно

$x^3+y^3=z^3$, то невозможно также $z^3-y^3=x^3$; между тем z^3-y^3 — разность двух кубов; следовательно, и т. д. Если это так, то достаточно будет доказать искомую невозможность либо только для суммы, либо только для разности. Итак, вот последовательность рассуждений, которых требует это доказательство.

I) Можно считать числа x и y взаимно простыми, ибо, если бы они имели общий делитель, кубы были бы также делимы на куб этого делителя. Например, пусть $x=2a$ и $y=2b$, будем иметь $x^3+y^3=8a^3+8b^3$; однако если эта формула — куб, то a^3+b^3 также является кубом.

II) Далее, так как x и y вовсе не имеют общего делителя, то эти два числа или оба нечетные, или одно четное, а другое нечетное. В первом случае необходимо, чтобы z было четным, и во втором — нечетным. Следовательно, из этих трех чисел x, y и z всегда имеется одно четное и два нечетных; и нам достаточно для нашего доказательства рассмотреть случай, когда x и y оба нечетные, ибо безразлично доказывать ли невозможность, о которой идет речь, для суммы или для разности, и что часто происходит, что сумма становится разностью, когда один из корней отрицателен.

III) Если, следовательно, x и y нечетны, ясно, что как их сумма, так и разность будут числами четными. Пусть, следовательно, $\frac{x+y}{2}=p$ и $\frac{x-y}{2}=q$, тогда мы будем иметь $x=p+q$ и $y=p-q$, откуда следует, что одно из двух чисел p и q должно быть четным и другое нечетным. Итак, мы имеем $x^3+y^3=2p^3+$ $+6pqq=2p(pp+3qq)$, так что речь идет о том, чтобы доказать, что это произведение $2p(pp+3qq)$ не может стать кубом; и если доказательство должно было относиться к разности, то мы имели бы $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(qq+3pp)$, совершенно ту же самую формулу, что и предыдущая, если поставить p и q одно вместо другого. Следовательно, достаточно для нашего вопроса доказать невозможность формулы $2p(pp+3qq)$, так как из этого необходимо будет следовать, что ни сумма, ни разность двух кубов не может стать кубом.

IV) Следовательно, если $2p(pp+3qq)$ было бы кубом, этот куб был бы четным и, следовательно, делился бы на 8; следовательно, необходимо, чтобы восьмая часть нашей формулы, или $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$, была бы числом целым и, сверх того, кубом. Однако мы знаем, что одно из чисел p и q четное, а другое нечетное; так как $pp+3qq$ должно быть числом нечетным, вовсе не делящимся на 4, нужно, чтобы таковым было p или чтобы $\frac{p}{4}$ было бы числом целым.

V) Но для того, чтобы произведение $\frac{p}{4}(pp+3qq)$ было бы кубом, нужно, чтобы каждый из его сомножителей в отдельности, если они не имеют общего делителя, был бы кубом; ибо, если произведение двух взаимно простых сомножителей должно быть кубом, необходимо, чтобы каждый был бы сам кубом; в ином случае, если эти сомножители имеют общий делитель, требуется особое рассмотрение. Следовательно, вопрос здесь в том, чтобы знать — не могут ли два сомножителя p и $pp+3qq$ иметь общий делитель? Для ответа на него нужно принять во внимание, что если эти сомножители имеют общий делитель, то числа pp и $pp+3qq$ будут иметь тот же самый делитель; что также разность этих чисел, которая есть $3qq$, будет иметь один и тот же общий делитель с pp и что так как p и q — взаимно просты, то эти числа pp и $3qq$ не могут иметь другого общего делителя, кроме 3, что имеет место, когда p делится на 3.

VI) Нам нужно исследовать, следовательно, два случая: первый — тот, когда множители p и $pp+3qq$ вовсе не имеют общего делителя, что случается всегда, когда p не делится на 3; другой случай — тот, когда эти множители обладают общим делителем, и это имеет место, когда p может делиться на 3, так как тогда два числа делятся на 3. Нам нужно тщательно различать эти два случая один от другого, так как каждый из них требует отдельного доказательства.

VII) *Первый случай.* Пусть p не делится на 3 и, следовательно, наши два сомножителя $\frac{p}{4}$ и $pp+3qq$ — взаимно просты, так что каждый в отдельности должен быть кубом. Для того чтобы добиться сначала, чтобы $pp+3qq$ стало кубом, нужно только положить, как мы это видели выше, $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ и $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$, что дает $pp+3qq=(tt+3uu)^3$, т. е. куб. Теперь отсюда $p=t^3-9tuu=t(tt-9uu)$ и $q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu)$. Далее, так как q — нечетное число, нужно, чтобы u также было бы нечетным и, следовательно, чтобы t было бы четным, так как в противном случае $tt-uu$ было бы четным.

VIII) Теперь, когда мы преобразовали $pp+3qq$ в куб и нашли $p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u)$, речь пойдет о том, чтобы также $\frac{p}{4}$ и, следовательно, $2p$ стало бы кубом; или же, что то же самое, формула $2t(t+3u)(t-3u)$ стала кубом. Однако мы должны заметить здесь, что t — число четное и не делящееся на 3, так как в ином случае p делилось бы на 3, что мы специально предположили не выполненным; так что три сомножителя $2t$, $t+3u$ и $t-3u$ — взаимно просты, и необходимо, чтобы каждый из них был бы в отдельности кубом. Если же мы положим $t+3u=f^3$ и $t-3u=g^3$, будем иметь $2t=f^3+g^3$. Следовательно, если $2t$ — куб, мы будем иметь два куба f^3 и g^3, сумма которых будет кубом и которые, очевидно, будут намного меньше, чем кубы x^3 и y^3, рассмотренные вначале; ибо, как мы сначала положили, $x=p+q$ и $y=p-q$, и так как мы только что определили p и q через буквы t и u, необходимо, чтобы числа x и y были бы намного больше, чем t и u.

IX) Если, следовательно, существовали бы среди больших чисел два куба такие, которые нам требовались, можно было бы найти также среди меньших чисел два куба, сумма которых была бы кубом, и можно было бы всегда прийти тем же самым способом к кубам еще меньшим. Однако, как хорошо известно, не существует таких кубов среди маленьких чисел, откуда следует, что их тем более нет среди самых больших. Это заключение подтверждается тем, что получается во втором случае, и которое [заключение] есть то же самое, как мы сейчас это увидим.

Примечание. Это доказательство так же, как и соответствующие доказательства Ферма и самого Эйлера для $n=4$, проводится методом спуска. Однако Эйлер делает здесь существенно новый шаг, который Н. Бурбаки [№ 13, с. 109] характеризует как открытие новой главы арифметики. А именно Эйлер смело распространяет законы делимости на целые алгебраические числа. Действительно, в п. VII он получает, что p^2+3q^2 равно кубу, и для дальнейшего вывода разлагает левую часть на линейные множители $(p+q\sqrt{-3})\times\times(p-q\sqrt{-3})$, с которыми оперирует дальше так, как если бы для них был справедлив закон однозначности разложения на простые множители, установленный Евклидом для натуральных чисел.

Так, из того, что $p+q\sqrt{-3}$ и $p-q\sqrt{-3}$, где $(p, q)=1$, не могут иметь общего делителя того же вида (что Эйлер не проверяет), а произведение их равно кубу, Эйлер заключает, что и каждый из этих множителей является кубом:

$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3,$$
$$p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3}),$$

и получает отсюда рациональные выражения p и q через t и u. Таким образом, впервые понятие целости было отделено от обычных чисел и перенесено на более широкий класс объектов. Это послужило началом теории алгебраических чисел, развитой в XIX в. в работах К. Гаусса, П. Дирихле, Э. Куммера, Р. Дедекинда, Е. И. Золотарева, Л. Кронекера и Д. Гильберта.

Что же касается самого рассуждения Эйлера, то оно нуждается в существенных дополнениях. Дело в том, что в кольце $O(m+n\sqrt{-3})$, где m и n — целые, нет однозначности разложения на простые множители, например:

$$4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}).$$

Но кольцо O не охватывает всех целых чисел поля $Q(\sqrt{-3})$. Целые числа этого поля имеют вид $\frac{m+n\sqrt{-3}}{2}$, $m\equiv n \pmod 2$, и в этом расширенном кольце уже имеют место обычные законы делимости, которыми пользуется Эйлер. Доказательство Эйлера справедливо лишь потому, что p и q — разной четности (т. е. $p\not\equiv q \pmod 2$), поэтому $p+q\sqrt{-3}$ является кубом тогда и только тогда, когда $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$, где t и u также разной четности.

4. УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ

ИЗ «ВТОРОГО ВЫЗОВА МАТЕМАТИКАМ» П. ФЕРМА (1657)

[№ 81, т. 3, с. 312—313; перевод С. С. Демидова.]

Пусть дано число, не являющееся квадратом; существует бесконечное количество определенных квадратов, таких, что, прибавляя единицу к произведению одного из них на данное число, получаем квадрат.

Например, дано 3, число, не являющееся квадратом.

$$3\times 1^2+1=4 \qquad \text{(квадрат)},$$
$$3\times 16+1=49 \qquad \text{(квадрат)}.$$

Вместо квадратов 1 и 16 можно найти бесконечное количество других квадратов, удовлетворяющих предложенному условию, но я спрашиваю об общем правиле, применимом к любому числу, не являющемуся квадратом, которое [только] может быть дано.

Требуется, например, [найти] такой квадрат, что, прибавляя единицу к его произведению на 149, или на 109, или на 433 и т. д., получим квадрат.

Примечание. Ферма принадлежит заслуга постановки задачи о решении неопределенных уравнений в *целых числах*. До него, следуя за Диофантом, обычно искали рациональные решения таких уравнений. В своем письме, получившем название «второго вызова математикам», Ферма предложил своим корреспондентам найти общее правило решения уравнения

$$ax^2+1=y^2, \qquad (1)$$

где a—целое неквадратное число. Такое уравнение рассматривали еще математики древней Греции и средневековой Индии. Так, в «Началах» Евклида (книга II, предложения 9—10) содержатся формулы для получения всех решений x_n, y_n уравнения (1), исходя из наименьшего, для $a=2$. Позднее Архимед поставил перед александрийскими математиками так называемую «Задачу о быках Солнца», которая сводится к уравнению (1) для $a=4\,729\,494$. Наименьшее решение соответствующего уравнения записывается в десятичной системе с помощью 41 цифры. Ясно, что Архимеда интересовал вопрос о том, владеют ли александрийцы регулярным приемом для отыскания решения. Эйлер по ошибке связал уравнение (1) с именем математика Пелля. Теперь более принято называть уравнение (1) именем Ферма.

Проблема решения уравнения (1) распадается на две:

1) найти наименьшее целое положительное решение x_0, y_0;

2) зная наименьшее решение, найти все остальные (x_n, y_n).

В своем письме Ферма предлагал найти решение при $a=149$, 109, 433. Эти значения выбраны так, что наименьшее решение соответствующего уравнения Ферма очень велико и его нельзя найти простым подбором. Вероятно, Ферма, как и Архимед, специально выбрал эти примеры, чтобы узнать, владеют ли его коллеги общим методом для решения первого из указанных нами вопросов. Что касается самого Ферма, то не подлежит сомнению, что он имел общие формулы для решения второго из вышеуказанных вопросов. Для случая $a=2$ он привел соответствующие формулы в письме к Френиклю. По-видимому, он владел методом нахождения наименьшего решения, однако в его бумагах никаких следов такого приема не осталось.

Ферма придавал уравнению (1) очень большое значение, считая, что оно поясняет путь, по которому должна развиваться наука о числах. Но его современники не поняли значения этого уравнения. По поводу «уравнения Пелля» разгорелась интересная дискуссия, в которой приняли участие английские математики. Содержание этой дискуссии нашло отражение в книге, которая была издана Валлисом в 1658 г. [№ 103]. Из этой переписки видно, что английские математики сначала не поняли задачу: Броункер предложил ее решение в рациональных числах, Валлис считал, что требование найти решение в целых числах делает задачу менее общей. После дополнительных разъяснений Ферма Броункер решил уравнение Ферма с помощью разложения $\sqrt{a}$ в непрерывную дробь, но не доказал ни того, что его способом всегда можно найти решение, ни того, что при этом получаются все решения. Валлис нашел формулы для бесконечного числа решений исходя из наименьшего:

$$x_n = 2x_{n-1}y_{n-1}, \quad y_n = y_{n-1}^2 + ax_{n-1}^2,$$

которые, однако, не дают *всех* решений уравнения (1); что, впрочем, знал и сам Валлис.

Впоследствии эффективное решение уравнения Пелля и исчерпывающее его исследование было дано Л. Эйлером (1759) и Ж. Л. Лагранжем (1766—69), который провел все нужные доказательства. Наконец, в 1846 г., обобщив результаты Эйлера и Лагранжа, П. Лежен-Дирихле построил теорию единиц в полях алгебраических чисел. При этом оказалось, что решение уравнения Пелля равносильно отысканию всех единиц в кольце целых чисел поля $Q(\sqrt{a})$.

5. МАЛАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА И СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ КОРНЕЙ

а. ФОРМУЛИРОВКА П. ФЕРМА

ИЗ ПИСЬМА П. ФЕРМА К ФРЕНИКЛЮ ОТ 18 ОКТЯБРЯ 1640 г.

[№ 81, т. 2, с. 209; перевод С. С. Демидова.]

Всякое простое число непременно измеряет одну из степеней — 1 любой прогрессии, которая пусть [нам] дана, и показатель названной степени является делителем данного простого числа — 1; и после того, как нашли первую степень, удовлетворяющую искомому, все те степени, показатели которых — кратные показателю [упомянутого] первого, также удовлетворяют искомому.

Пример: пусть дана прогрессия

1	2	3	4	5	6
3	9	27	81	243	729

со своими показателями степени наверху.

Возьмите, например, простое число 13. Оно измеряет третью степень — 1, показатель которой, т. е. 3, является делителем [числа] 12, на единицу меньшего числа 13, и так как показатель степени 729, равный 6, кратен первому показателю, равному 3, то следует, что 13 измеряет также упомянутую степень 729—1.

И это предложение верно вообще для всех прогрессий и для всех простых чисел; чему я вам прислал бы доказательство, если бы не опасался быть слишком многословным.

Примечание. Высказанное здесь утверждение получило впоследствии имя Малой теоремы Ферма. Теорему эту можно сформулировать так: если p — простое число и a не делится на p, то существует такое f, являющееся делителем $p-1$, что a^f-1 делится на p. Это — одна из важнейших теорем всей элементарной теории чисел. В ней впервые рассматривается конечная циклическая группа $\{a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$ и ее подгруппы. Яснее всего теоретико-групповой характер этой теоремы виден из доказательства Эйлера, которое приведено непосредственно далее.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МАЛОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

ИЗ РАБОТЫ Л. ЭЙЛЕРА «ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ, ПРОИСХОДЯЩИХ ОТ ДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ» (опубл. в 1761 г.)

[№ 77, с. 493—518; перевод И. Г. Башмаковой.]

1. Теорема 1.

Если p — простое число и a — взаимно простое с p, то ни один из членов геометрической прогрессии

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6 \qquad \text{и т. д}$$

не делится на p **(1)**.

. . . .

4. Следствие 2.

Поскольку все вычеты **(2)** являются целыми числами и, очевидно, меньшими p, то множество различных остатков, которые получились, не может быть больше $p-1$. А так как в геометрической последовательности $1, a, a^2, a^3, a^4$ и т. д. бесконечное число членов, то необходимо, чтобы многие члены давали один и тот же вычет.

5. Следствие 3.

Если a^μ и a^ν — два таких члена, которые дают один и тот же вычет r, так что $a^\mu = mp + r$ и $a^\nu = np + r$, то будет

$$a^\mu - a^\nu = (m-n)\,p,$$

поэтому разность этих членов $a^\mu - a^\nu$ будет делиться на p. Значит, бесконечно много разностей между двумя членами предложенной геометрической прогрессии будет по величине делиться на число p.

. . . .

7. Теорема 2.

Если степень a^{μ} при делении на p дает вычет r и степень a^{ν} — вычет s, то степень $a^{\mu+\nu}$ даст вычет rs (3).

. . . .

12. Теорема 3.

Если число a взаимно просто с p и образована геометрическая прогрессия

$$1, a, a^2, \ldots, a^7, \ldots,$$

то в ней встретится бесконечно много членов, которые, разделенные на p, дадут вычет 1, и показатели этих членов составят арифметическую прогрессию.

Доказательство

Так как число членов прогрессии бесконечно, множество (plura) же получающихся различных вычетов не может быть больше, чем $p-1$, необходимо, чтобы многие, даже бесконечно многие [члены] давали один и тот же вычет r. Пусть a^{μ} и a^{ν} — два таких члена, оставляющих один и тот же вычет r, тогда $a^{\mu}-a^{\nu}$ будет делиться на p. Но $a^{\mu}-a^{\nu}=a^{\nu}(a^{\mu-\nu}-1)$, и так как произведение делится на p, а один из множителей a^{ν} взаимно прост с p, необходимо, чтобы другой множитель $a^{\mu-\nu}-1$ делился на p. Откуда степень $a^{\mu-\nu}$ при делении на p имеет вычет $=1$. Если $\mu-\nu=\lambda$, так что вычет a^{λ} будет $=1$, то также и все эти степени $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$, $a^{5\lambda}$ и т. д. дадут тот же вычет $=1$. Итак, единица будет вычетом всех этих степеней

$$1, a^{\lambda}, a^{2\lambda}, a^{3\lambda}, a^{4\lambda}, a^{5\lambda}, a^{6\lambda} \quad \text{и т. д.,}$$

чьи показатели образуют арифметическую прогрессию.

. . . .

16. Теорема 4.

Если степень a^{μ} при делении на p дает вычет $=r$, а более высокая степень $a^{\mu+\nu}$ — вычет rs, то степень a^{ν}, которую та превосходит, будет иметь вычет s.

. . . .

18. Если $r=1$ и $s=1$ или если две степени a^{μ} и $a^{\mu+\nu}$ имеют одинаковый вычет $=1$, то также и степень a^{ν}, показатель которой есть разность их показателей, имеет равным образом вычет $=1$.

. . . .

20. Теорема 5.

Если a^{λ} будет наименьшей степенью, стоящей после единицы, которая при делении на p имеет остаток единицу, то никакие другие степени не дают тот же вычет $=1$, кроме тех, которые встречаются в геометрической прогрессии:

$$1,\ a^{\lambda},\ a^{2\lambda},\ a^{3\lambda},\ a^{4\lambda},\ a^{5\lambda} \qquad \text{и т. д.}$$

Доказательство

Положим, что некоторая другая степень a^{μ} при делении на p также дает вычет $=1$, и так как $\mu > \lambda$, но не равно никакому кратному самого λ, то этот показатель μ может быть представлен как $\mu = n\lambda + \delta$, причем $\delta < \lambda$, но не будет $\delta = 0$. Тогда, поскольку как степень $a^{n\lambda}$, так и $a^{\mu} = a^{n\lambda+\delta}$ при делении на p дают в остатке 1, то согласно § 18 степень a^{δ} также имеет вычет единицу, и тогда a^{λ} не будет минимальной степенью, а это противно предположенному. Поэтому если a^{λ} — минимальная степень, дающая вычет $=1$, то никакие другие степени не имеют того же свойства, кроме тех, показатели которых являются кратными λ.

. . . .

27. Теорема 7.

Если a^{λ} — наименьшая степень a, которая при делении на число p дает вычет $=1$, то все вычеты, которые происходят от членов геометрической прогрессии

$$1,\ a,\ a^{2},\ a^{3},\ \ldots,\ a^{\lambda-1},$$

продолженной до степени a^{λ}, не равны между собой.

Доказательство

Действительно, если две степени, как, например, a^{μ} и a^{ν}, показатели которых μ и ν меньше λ, имеют тот же вычет, то их разность $a^{\mu} - a^{\nu}$ будет делиться на p, и поэтому $a^{\mu-\nu}$ при делении на p дает вычет $+1$ и $\mu - \nu < \lambda$, что противоречит предположенному; откуда очевидно, что все степени, показатели которых меньше λ, дают различные вычеты.

. . . .

Теорема 8.

Если a^{λ} — некоторая степень a, которая при делении на p производит вычет $=1$, и если разделить геометрическую прогрессию на части, следующие за степенями a^{λ}, $a^{2\lambda}$, $a^{3\lambda}$, $a^{4\lambda}$ и т. д., таким образом:

$$1,\ a,\ a^{2},\ \ldots,\ a^{\lambda-1}\,|\,a^{\lambda},\ \ldots,\ a^{2\lambda-1}\,|\,a^{2\lambda},\ \ldots,\ a^{3\lambda-1}\,|\,a^{3\lambda},\ \ldots,\ a^{4\lambda-1}\,| \qquad \text{и т. д.},$$

так что каждая часть содержит λ членов, тогда в любой части будут одни и те же вычеты и в том же порядке.

. . . .

35. Теорема 9.

Если p — простое число, и a — взаимно простое с p, и все числа, меньшие p, находятся между вычетами, которые происходят от деления степеней a на простое число p, то a^{p-1} является наименьшей степенью, которая при делении на p имеет остатком единицу.

Доказательство

Если a^{λ} — наименьшая степень, которая при делении на p дает остаток единицу, то из предыдущего ясно, что $\lambda < p$ (§ 15) (4). Так как число всех различных вычетов $=\lambda$, а всех чисел, меньших p, $=p-1$, то ясно, что если $\lambda < p-1$, то не все числа, меньшие p, встречаются среди вычетов, значит, не будет $\lambda < p-1$ и, конечно, не будет $\lambda > p-1$, потому что иначе не будет выполнено [условие] $\lambda < p$. Откуда остается $\lambda = p-1$. Поэтому если все числа, меньшие p, встречаются среди вычетов, то степень a^{p-1} будет наименьшей, которая при делении на p дает единицу.

. . . .

37. Теорема 10.

Если число различных вычетов, которые происходят от деления степеней $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$ и т. д. на простое число p, меньше, чем $p-1$, тогда чисел, которые являются невычетами, будет самое меньшее столько же, сколько и вычетов.

Доказательство

Пусть a^{λ} — наименьшая степень, которая при делении на p дает единицу, и пусть $\lambda < p-1$; число всех различных вычетов будет $=\lambda$, которое поэтому меньше, чем $p-1$. Но так как число всех чисел, меньших p, будет $=p-1$, то ясно, что в предложенном случае (in casu proposito) имеются числа, которые не находятся среди вычетов. Я утверждаю, что таких чисел будет самое меньшее λ. Чтобы это обнаружить, расположим вычеты по членам, из которых они возникли, и эти вычеты будут

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots,\ a^{\lambda-1},$$

число которых $=\lambda$, и эти вычеты, если их привести к обычному виду, будут все меньше, чем p, и различны между собой. Поскольку по предположению $\lambda < p-1$, то наверняка имеется число, не содержащееся среди этих вычетов. Пусть таким будет число k; я утверждаю, что если k не вычет, то ни ak, ни a^2k, ни a^3k и т. д., ни $a^{\lambda-1}k$ не будут вычетами. Положим же, что $a^{\mu}k$ является вычетом, получившимся от степени a^{α}; пусть будет $a^{\alpha} = np + a^{\mu}k$ или $a^{\alpha} - a^{\mu}k = np$, поэтому $a^{\alpha} - a^{\mu}k = a^{\mu}(a^{\alpha-\mu} - k)$ делится на p. Но a^{μ} не делится на p, значит, $a^{\alpha-\mu} - k$ будет делиться на p или степень $a^{\alpha-\mu}$ при делении на p дает вычет k, что противоречит предположению. Из чего ясно, что все эти числа

$$k,\ ak,\ a^2k,\ a^3k,\ a^4k,\ \ldots,\ a^{\lambda-1}k$$

или числа, из них получающиеся, не являются вычетами. Но эти числа, количество которых $=\lambda$, все различны между собой; если бы два, как, например, $a^{\mu}k$ и $a^{\nu}k$, приводили к одному и тому же вычету r, то было бы $a^{\mu}k=mp+r$ и $a^{\nu}k=np+r$, и поэтому $a^{\mu}k-a^{\nu}k=(m-n)p$ или $(a^{\mu}-a^{\nu})k=(m-n)p$ делилось бы на p. Но k не может делиться на p, так как мы приняли, что p — простое число и $k<p$; если бы $a^{\mu}-a^{\nu}$ делилось на p или $a^{\mu-\nu}$ давало бы при делении на p в остатке единицу, тогда, поскольку $\mu<\lambda-1$ и $\nu<\lambda-1$, было бы $\mu-\nu<\lambda$, что абсурдно. Итак, все эти числа k, ak, a^2k, a^3k, $\ldots$, $a^{\lambda-1}k$, если их привести, будут различны между собой и количество их $=\lambda$.

Значит, самое меньшее будет дано λ чисел, которые не входят в состав вычетов, если только $\lambda<p-1$.

. . . .

39. Следствие 2.

Значит, если a^{λ} является наименьшей степенью, которая при делении на простое число p дает в остатке единицу, и если $\lambda<p-1$, тогда невозможно, чтобы $\lambda>\frac{p-1}{2}$; значит, будет $\lambda=\frac{p-1}{2}$ или $\lambda<\frac{p-1}{2}$ **(5)**.

. . . .

48. Теорема 13.

Если p — простое число и a^{λ} — минимальная степень a, которая при делении на p дает в остатке единицу, тогда показатель λ будет делителем $p-1$.

Доказательство

Значит, число всех различных вычетов $=\lambda$, поэтому число оставшихся чисел, меньших p, которые не могут быть вычетами, будет $=p-1-\lambda$; но их число должно быть кратно λ (§ 47), так что будет $p-1-\lambda=n\lambda$, поэтому

$$\lambda=\frac{p-1}{n+1}.$$

Значит, ясно, что показатель λ будет делителем $p-1$; поэтому если не имеет места $\lambda=p-1$, то несомненно показатель λ будет равен некоторой аликвотной части числа $p-1$ **(6)**.

Примечания. В этой работе Эйлер дает второе доказательство Малой теоремы Ферма (первое было опубликовано в 1736 г. и основывалось на свойствах биномиальных коэффициентов [1]), которое интересно по применен-

[1] В бумагах Г. Ф. Лейбница было найдено доказательство этой теоремы, основанное на той же идее. Лейбниц доказывает, что $a^p\equiv a\pmod p$, рассматривая для этого $(1+1+\ldots+1)^p$, где число единиц в скобках равно a.

ным методам. Это одно из первых известных нам теоретико-групповых доказательств. Оно основано на рассмотрении последовательности степеней целого числа a, не делящегося на простое число p.

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^n,\ \ldots \qquad (*)$$

Множество положительных вычетов этой последовательности образует циклическую группу H, что Эйлер, по существу, и устанавливает. Он доказывает (разумеется, в других выражениях), что порядок λ этой группы является делителем $p-1$. Для этого группа G из всех положительных чисел, меньших p, разбивается на смежные классы по подгруппе H:

$$G = H + b_1H + b_2H + \ldots + b_nH,$$

доказывается, что каждый смежный класс содержит ровно λ элементов (теорема 10, следствие из нее и теоремы 11—12), а отсюда выводится, что $p-1=\lambda(n+1)$ (теорема 13).

Интересно отметить также, что в процессе доказательства Эйлер устанавливает изоморфизм между аддитивной группой показателей степеней $\{0, 1, 2, \ldots, \lambda-1\}$ по $\mathrm{mod}\,\lambda$ и мультипликативной циклической группой H (теоремы 2 и 4).

Более четко групповые свойства H Эйлер устанавливает в другой своей работе, посвященной доказательству существования первообразного корня, отрывок из которой приведен далее.

Эйлеру принадлежит обобщение Малой теоремы Ферма на случай, когда модуль m — не простое число, а a и m взаимно просты.

1. Доказательство теоремы 1 следует, как отмечает Эйлер, из предложения VII, 26 «Начал» Евклида (в русском переводе это предложение VII, 24): *«Если два числа будут первыми по отношению к какому-то числу, то и возникающее из них* <*произведение*> *будет по отношению к нему первым»* (№ 25, т. 2, с. 29).

2. Вычетом (residuum) Эйлер называет положительный остаток от деления целого числа a на фиксированное целое p.

3. Доказательство теоремы легко следует из перемножения степеней $a^\mu = mp + r$ и $a^\nu = np + s$. Эйлер отмечает несколько следствий из этой теоремы: 1) если a^μ имеет при делении на p вычет r, то $a^{\mu+1}$ будет иметь вычет ar, $a^{\mu+2}$ — a^2r и т. д., $a^{2\mu}$ будет иметь вычет r^2, $\ldots$, $a^{n\mu}$ — вычет r^n; 2) если a^μ имеет вычет 1, то и любое $a^{n\mu}$ будет иметь тот же вычет 1.

4. В § 15, на который ссылается Эйлер, устанавливается, что если a^λ — наименьшая степень, которая имеет вычет 1 по $\mathrm{mod}\,p$, то $\lambda < p$.

5. Далее Эйлер аналогично доказывает, что λ будет $=\frac{p-1}{3}$ или $<\frac{p-1}{3}$, $=\frac{p-1}{4}$ или $<\frac{p-1}{4}$ и т. д.

Действительно, если $\lambda < \frac{p-1}{2}$, то имеется некоторое число s, меньшее $p-1$ и не попавшее ни в H, ни в kH. Эйлер рассматривает вычеты, получающиеся от членов

$$s,\ sa,\ sa^2,\ \ldots,\ sa^{\lambda-1},$$

и показывает, что ни один из них не будет совпадать с ka^ν, т. е. не будет принадлежать к H. Если бы $sa^\mu = ka^\nu$; тогда $s = ka^{\nu-\mu}$ или $s = ka^{\lambda+\nu-\mu}$, т. е. $s \in kH$, что противоречит предположению. Эйлер применяет здесь те же рассуждения, с помощью которых мы разбиваем группу на смежные классы.

Из этого он заключает (§ 47, следствие 3), что количество всех чисел, меньших $p-1$ и не являющихся вычетами, будет либо 0, либо λ, либо 2λ и т. д., т. е. $p-1=n\lambda$.

6. Эйлер выводит отсюда, что a^{p-1} всегда будет иметь при делении на p вычет 1.

в. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП У ЭЙЛЕРА

ИЗ РАБОТЫ Л. ЭЙЛЕРА «ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ОТНОСЯЩЕЕСЯ К ВЫЧЕТАМ, ПРОИСХОДЯЩИМ ОТ ДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ НА ПРОСТЫЕ ЧИСЛА» (опубл. в 1774 г.)

[№ 58, с. 247.]

1. Вычеты, получающиеся при делении на простое число P членов геометрической прогрессии, начинающейся с единицы, будем обозначать буквами 1, α, β, γ, δ и т. д. следующим образом:

Геометрическая прогрессия ...1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 и т. д.
Вычеты .... 1, α, β, γ, δ, ε, ζ и т. д.

[№ 58, с 251.]

24. В ряду вычетов 1, α, β, γ, δ и т. д., будет ли он полным или неполным, встречаются также произведения этих вычетов, взятых по два, по три, по четыре и т. д., а следовательно, и любые степени каждого из них, если они снижены посредством деления на P.

Доказательство. Если степень a^m дает вычет μ, а степень a^n — вычет ν, то $a^m = ..P + \mu$ и $a^n = ..P + \nu$, где я пишу две точки .. вместо любого целого коэффициента.

Отсюда $a^{m+n} = ..P + \mu\nu$, так что степень a^{m+n} дает вычет $\mu\nu$. Итак, в ряду вычетов встречается произведение двух вычетов, и наше предположение становится очевидным.

25. Если даны два вычета μ и ν, то в ряду вычетов встретится такой вычет ω, что будет $\nu = \mu\omega$ или $\nu = \mu\omega - ..P$.

Доказательство. Пусть вычеты μ и ν возникают от степеней a^m и a^n, а ω является вычетом степени a^{n-m} или, если $n < m$, степени $a^{P-1+n-m}$; тогда вычет степени $a^n = a^m \cdot a^{n-m}$ будет равен $\mu\omega - ..P$ и, следовательно, $\nu = \mu\omega - ..P$.

26. Так как единица всегда содержится в ряду вычетов, то каждому вычету μ там же соответствует такой другой ω, что $\mu\omega = 1$ или $\mu\omega = 1 + ..P$. Такие два вычета я буду называть *союзными*. Отсюда видно, что в каждом ряду вычетов члены можно сгруппировать таким образом, чтобы они были попарно союзными.

Надо только отметить, что *единица союзна сама себе*, а если встречается -1, то и она также будет союзна сама себе.

Примечание. Здесь, как и в «Теоремах о вычетах, получающихся от деления степеней» (см. ч. II, п. 5б), Эйлер рассматривает остатки (или вычеты) от деления степеней

$$1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^n,\ \ldots$$

на простое число p, причем $(a, p) = 1$. Основная цель мемуара — доказать существование первообразного корня по простому модулю. Доказательство это опирается на предположение, что сравнение

$$x^d - 1 \equiv 0 \pmod P,$$

$d < p$, имеет ровно d решений, действительных или мнимых. Причем последние были определены только как «мнимые», ничего более о них не говорилось. Поэтому доказательство Эйлера нуждается в существенных уточнениях.

В приведенном отрывке Эйлер характеризует чисто групповые свойства множества H вычетов, получающихся от деления степеней $1, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$ на p. В п. 24 он отмечает, что произведение двух элементов из H снова принадлежит H. В п. 25 — что в H всегда разрешимо уравнение

$$\mu x = \nu,$$

где $\mu, \nu \in H$. Наконец, в п. 26 показано, что поскольку $1 \in H$, то для каждого элемента $\mu \in H$ существует такой элемент $\mu' \in H$, что

$$\mu\mu' = 1.$$

Таким взаимно обратным элементам Эйлер дает специальное название *союзных*, подчеркивая тем самым их значение. По существу в п. 23—26 выделяются *все* основные свойства, которыми мы сейчас характеризуем группу: замкнутость относительно закона композиции, наличие единицы, разрешимость уравнения $\mu x = \nu$ (или наличие у каждого элемента обратного). Эйлер не отмечает специально только ассоциативности операции умножения, поскольку здесь это свойство совершенно очевидно.

Строгое доказательство существования первообразного элемента по простому модулю было проведено К. Ф. Гауссом (см. следующий текст).

г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРВООБРАЗНОГО КОРНЯ

ИЗ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ К. Ф. ГАУССА (1801)

[№ 21, с. 58—59.]

55. Наибольшее значение имеет, однако, один специальный случай предыдущей теоремы, а именно то, что *всегда существуют числа, наименьшая степень которых, сравнимая с единицей, есть $(p-1)$-я*, причем между 1 и $p-1$ их столько, сколько существует чисел, не превосходящих $p-1$ и взаимно простых с $p-1$. Так как доказательство этой теоремы не столь просто, как это могло бы показаться на первый взгляд, мы вследствие важности этой теоремы дадим еще одно ее доказательство, несколько отличающееся от предыдущего, тем более что различие методов обычно очень помогает уяснению более трудных вопросов. Разложим $p-1$ на его простые сомножители; пусть $p-1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma, \ldots$, где $a, b, c, \ldots$ обозначают различные простые числа. Тогда мы можем провести *доказательство теоремы следующим образом*:

I. Всегда можно найти число A, которое принадлежит показателю a^α, и точно так же числа $B, C, \ldots$, которые принадлежат соответственно показателям $b^\beta, c^\gamma, \ldots$

II. Произведение всех чисел $A, B, C, \ldots$ (или наименьший вычет этого произведения) принадлежит показателю $p-1$.

Это мы докажем следующим образом:

I. Если g — какое-нибудь из чисел $1, 2, 3, \ldots, p-1$, не удовлетворяющее сравнению $x^{(p-1)/a} \equiv 1 \pmod p$, которому не могут удовлетворять все эти числа, так как его степень меньше, чем $p-1$, то я утверждаю, что если через h обозначить $(p-1)/a^{\alpha}$-ю степень числа g, то h или его наименьший вычет принадлежит показателю a^{α}.

К Гаусс

Действительно, a^{α}-я степень числа h, очевидно, есть $(p-1)$-я степень числа g, т. е. сравнима с единицей, в то время как $a^{\alpha-1}$-я степень h есть $(p-1)/a$-я степень g, т. е. с единицей не сравнима; $a^{\alpha-2}$-я, $a^{\alpha-3}$-я и другие степени h подавно не могут быть сравнимы с единицей. Но показатель наименьшей сравнимой с единицей степени h, т. е. показатель, которому принадлежит h, должен (согласно п. 48) входить в число a^{α}. Так как a^{α} не делится ни на какие числа, кроме самого себя и более низких степеней a, отсюда необходимо вытекает, что a^{α} должно быть показателем, которому принадлежит h. Аналогичным образом показывается, что существуют числа, которые принадлежат показателям b^{β}, c^{γ}, ...

II. Если мы предположим, что произведение всех чисел A, B, C... принадлежит не показателю $p-1$, а меньшему показателю t, то t будет входить в $p-1$ (п. 48), т. е. $(p-1)/t$ будет целым числом, превосходящим единицу. Но легко видеть, что это частное или равно одному из простых чисел a, b, c, ..., или по крайней мере делится на одно из них (п. 17), пусть, например, на a, так как для остальных доказательство остается тем же. Тогда t будет входить в $(p-1)/a$, и потому произведение ABC..., возведенное в $(p-1)/a$-ю степень, будет тоже сравнимо с единицей (п. 46). Но ясно, что отдельные числа B, C, ... (кроме A), возведенные в $(p-1)/a$-ю степень, будут сравнимы с единицей, потому что показатели b^{β}, c^{γ}, ..., которым эти отдельные числа принадлежат, входят в $(p-1)/a$. Поэтому

$$A^{(p-1)/a}B^{(p-1)/a}C^{(p-1)/a}\ldots \equiv A^{(p-1)/a} \equiv 1.$$

Отсюда следует, что показатель, которому принадлежит A, должен быть делителем $(p-1)/a$ (п.48), т. е. $(p-1)/a^{\alpha+1}$ должно быть целым числом. Но $\frac{p-1}{a^{\alpha+1}}=\frac{b^{\beta}c^{\gamma}\ldots}{a}$ не может быть целым (п. 15); поэтому мы должны сделать вывод, что наше предположение не может быть верным, т. е. что произведение ABC... действительно принадлежит показателю $p-1$.

Последнее доказательство выглядит несколько длиннее первого, однако первое является менее прямым, чем второе.

Примечание. Гаусс дал в «Арифметических исследованиях» два различных доказательства существования первообразного корня по простому модулю, из которых мы привели второе. Это доказательство является одним из самых блестящих арифметических рассуждений. Гаусс доказал также существование первообразного корня по модулю p^{α} и $2p^{\alpha}$.

6. ТЕОРИЯ СРАВНЕНИЙ ГАУССА

ИЗ «АРИФМЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ» К. Ф. ГАУССА (1801)

[№ 21, с. 15—16.]

1.

Если число a входит делителем в разность чисел b, c, то b и c называются **сравнимыми** *по* a, в противном же случае—**несравнимыми**. Число a мы назовем **модулем**. Каждое из чисел b, c в первом случае называется **вычетом**, а во втором—**невычетом** другого из них.

Эти обозначения применяются в отношении всех целых, как положительных, так и отрицательных[1] чисел; на дробные числа они не распространяются (1). Так, например, -9 и $+16$ сравнимы по модулю 5; число -7 является вычетом по модулю 11, но невычетом по модулю 3 числа $+15$. Так как нуль делится на любое число, то каждое число следует считать сравнимым с самим собой по любому модулю.

2.

Все вычеты заданного числа a по модулю m содержатся в формуле $a+km$, где k обозначает произвольное целое число. Из теорем, которые мы установим позднее, более легкие могут быть без труда выведены отсюда; однако всякий сможет с такой же легкостью убедиться в их верности и с первого взгляда.

В дальнейшем сравнимость чисел мы будем обозначать знаком $\equiv$, а модуль, там, где это будет нужно, мы будем добавлять заключенным в скобки: $-16\equiv 9 \pmod 5$, $-7\equiv 15 \pmod{11}$[2].

. . . .

[1] Модуль, очевидно, всегда нужно брать *по абсолютной величине*.

[2] Это обозначение я выбрал вследствие большой аналогии, которая имеется между равенствами и сравнениями. По этой же причине Лежандр в своем сочинении, ниже часто упоминаемом (2), сохраняет для сравнений просто знак равенства; однако, во избежание возможных двусмысленностей, я не решился следовать его примеру.

[Там же, с. 27—28.]

24.

Выражение $ax+b$, в котором a, b обозначают данные числа, а x — неизвестное или переменное число, *может быть сделано сравнимым по взаимно простому с* a *модулю* m *с любым заданным числом.*

Пусть число, которое должно быть сравнимо с указанным выражением, есть c, а наименьший положительный вычет $c-b$ по модулю m есть e. Тогда, согласно предыдущему пункту, имеется хотя бы одно значение $x<m$ с тем свойством, что наименьший вычет произведения ax по модулю m равен e. Если это значение есть v, то $av \equiv e \equiv c-b$, и потому $av+b \equiv c \pmod m$.

25.

Выражение, которое, аналогично уравнению, связывает между собой две сравнимые одна с другой величины, мы будем называть **сравнением.** Сравнение, содержащее неизвестное, называется решенным, если для этого неизвестного найдено удовлетворяющее сравнению значение **(корень)**. Отсюда ясно далее, что понимается под *разрешимым или неразрешимым* сравнением.

Наконец, легко видеть, что здесь могут представиться те же различия, что и для уравнений. Дальше встречаются примеры *трансцендентных* сравнений (3); *алгебраические* же сравнения разделяются в зависимости от наивысшей содержащейся в них степени неизвестного на *сравнения первой, второй* и *более высоких степеней* (4). Точно так же могут встречаться системы сравнений с несколькими неизвестными, вопрос об исключении которых нам придется рассмотреть.

Решение сравнений первой степени.

26.

Сравнение первой степени $ax+b \equiv c$, согласно п. 24, всегда *разрешимо, если модуль взаимно прост с* a. Если v — подходящее значение x, т. е. корень сравнения, то очевидно, что корнями являются и все числа, сравнимые с v по модулю этого сравнения (п. 9). Обратно, легко видеть, что *все корни* v *должны быть сравнимы между собой*; действительно, если t — другой корень, то $av+b \equiv at+b$, и потому $av \equiv at$, откуда $v \equiv t$ (п. 22). Отсюда следует, что сравнение $x \equiv v \pmod m$ представляет собой полное решение сравнения $ax+b \equiv c$.

Так как решения сравнения, которые сравнимы с x, находятся в нашем распоряжении и в этом отношении сравнимые числа следует рассматривать как эквивалентные, то мы все такие решения сравнения будем считать за одно решение. Поэтому если наше сравнение $ax+b \equiv c$ не допускает других решений, то мы будем говорить, что оно разрешимо единственным образом, или имеет только один корень. Так, например, сравнение $6x + 5 \equiv 13 \pmod{11}$ не обладает другими корнями, кроме тех, которые $\equiv 5 \pmod{11}$. По-иному обстоит дело для сравнений более высоких степеней или для сравнений первой степени, в которых неизвестное умножается на число, не взаимно простое с модулем.

Примечания В первом приведенном отрывке Гаусс вводит новое отношение типа равенства — *сравнение* целых чисел по некоторому модулю. Знак сравнения $\equiv$ удачно подчеркивает аналогию сравнения с равенством. По существу, сравнения рассматривались уже Эйлером, Лагранжем и Лежандром, однако только Гаусс начал систематическое изучение сравнений и построил их теорию. С современной точки зрения это было построение алгебры над конечным полем. В приведенных двух отрывках рассматриваются сравнения первой степени, соответствующие линейным уравнениям над конечным полем.

1. В настоящее время сравнимость определяется и для дробных чисел. Две дроби $\alpha = \frac{b}{a}$ и $\alpha_1 = \frac{b_1}{a_1}$ называются сравнимыми по модулю m, если a и a_1 взаимно просты с m и

$$a_1 b \equiv a b_1 \pmod{m}.$$

Подробнее об этом см. в книге Г. Хассе, № 50, с. 66—67.

2. Имеется в виду книга А М. Лежандра, № 88.

3. Гаусс имеет в виду сравнение вида

$$a^x \equiv b \pmod{m}.$$

Рассматривая их, Гаусс ввел понятие *индекса*, аналогичное понятию *логарифма*: если m имеет вид p^α или $2p^\alpha$, g — есть первообразный корень по $\bmod m$ и

$$a \equiv g^\gamma \pmod{m},$$

то γ называется индексом числа a по модулю m при основании g и обозначается символом $\gamma = \operatorname{ind}_g a$. Для индексов, как и для логарифмов, имеют место следующие свойства:

$$\operatorname{ind} ab = \operatorname{ind} a + \operatorname{ind} b,$$
$$\operatorname{ind} a^n = n \cdot \operatorname{ind} a.$$

4. В «Арифметических исследованиях» Гаусс развил теорию сравнений первой и второй степеней.

7. ЦЕЛЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА У ГАУССА

ИЗ «ТЕОРИИ БИКВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ» (СОЧИНЕНИЕ ВТОРОЕ, 1828)

[№ 21, с. 694—695.]

30. ... мы скоро пришли к убеждению, что *естественный источник общей теории следует искать в* **расширении области** *арифметики*, как мы уже указывали в п. 1.

Именно, в то время как в рассматривавшихся до сих пор вопросах высшая арифметика имеет дело только с целыми вещественными числами, теоремы, относящиеся к биквадратичным вычетам, только тогда выступают во всей своей простоте и естественной красоте, когда *область арифметики распространяется также и на* **мнимые** *числа*, так что ее объектом становятся без ограничения все числа вида $a+bi$, где, как обычно, i обозначает мнимую величину $\sqrt{-1}$, a и b — всевозможные целые вещественные числа от $-\infty$ до $+\infty$. Такие числа мы будем называть целыми комплексными числами, причем вещественные числа не противопоставляются комплексным, а рассматриваются как их частный случай **(1)**.

[№ 21, с. 698—700.]

33(2). Целое комплексное число, которое может быть разложено на два отличных от единиц **(3)** сомножителя[1], мы будем называть **составным** *комплексным числом*; напротив, число, не допускающее такого разложения, называется *комплексным* **простым** *числом*. Из этого тотчас же вытекает, что каждое составное вещественное число является также и составным комплексным числом. *Однако вещественное простое число может быть составным комплексным числом*, а именно это будет иметь место для числа 2 и всех вещественных положительных простых чисел вида $4n+1$ (за исключением числа 1), так как они, как известно, могут быть разложены на два положительных квадрата; например, $2=(1+i)\times\times(1-i)$, $5=(1+2i)(1-2i)$, $13=(3+2i)(3-2i)$, $17=(1+4i)\times\times(1-4i)$ и т. д.

Напротив, положительные вещественные простые числа вида $4n+3$ всегда являются также и комплексными простыми числами. Действительно, если бы для некоторого такого числа имело место $q=(a+bi)(\alpha+\beta i)$, то было бы также $q=(a-bi)(\alpha-\beta i)$, и потому $q^2=(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$; но q может быть только одним единственным способом разложено на положительные сомножители, большие чем 1, именно $q^2=q\cdot q$, так что должно было бы быть $q=a^2+b^2=\alpha^2+\beta^2$. Это, однако, невозможно, так как сумма двух квадратов не может иметь вид $4n+3$.

Для отрицательных вещественных чисел, очевидно, сохраняет силу та же терминология, что и для положительных, и так же обстоит дело и для чисто мнимых чисел.

Остается поэтому только показать, как отличать составные числа от простых среди смешанных мнимых чисел, и это достигается следующей теоремой.

Теорема. *Каждое целое смешанное мнимое число $a+bi$ является или комплексным простым числом, или составным числом, в зависимости от того, является ли его норма* **(4)** *простым вещественным числом или составным числом.*

---

[1] Или, что то же самое, на такие сомножители, нормы которых больше единицы.

Доказательство. I. Так как норма составного комплексного числа всегда является составным числом, то очевидно, что комплексное число, норма которого является вещественным простым числом, обязательно должно быть комплексным простым числом. Это первая часть теоремы.

II. Если же норма a^2+b^2 является составным числом, то пусть p — вещественное положительное простое число, которое входит в нее делителем. Рассмотрим тогда два случая.

1. Если p имеет вид $4n+3$, то, как известно, a^2+b^2 может делиться на p только тогда, когда p одновременно входит и в a и в b, так что $a+bi$ будет составным числом.

2. Если p не имеет вида $4n+3$, то оно заведомо может быть разложено на два квадрата; положим поэтому $p=\alpha^2+\beta^2$. Так как

$$(a\alpha+b\beta)(a\alpha-b\beta)=a^2(\alpha^2+\beta^2)-\beta^2(a^2+b^2)$$

и потому левая часть делится на p, то p заведомо будет входить в один из сомножителей $a\alpha+b\beta$, $a\alpha-b\beta$, а так как, далее,

$$(a\alpha+b\beta)^2+(b\alpha-a\beta)^2=(a\alpha-b\beta)^2+(b\alpha+a\beta)^2=(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$$

и потому левая часть делится на p^2, то очевидно, что в первом случае на p должно делиться также число $b\alpha-a\beta$, а во втором — число $b\alpha+a\beta$. Поэтому в первом случае будет целым комплексным числом число

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}=\frac{a\alpha+b\beta}{p}+\frac{b\alpha-a\beta}{p}i,$$

а во втором — число

$$\frac{a+bi}{\alpha-\beta i}=\frac{a\alpha-b\beta}{p}+\frac{b\alpha+a\beta}{p}i.$$

Так как вследствие этого заданное число делится или на $\alpha+\beta i$, или на $\alpha-\beta i$ и норма отношения, именно $(a^2+b^2)/p$, по предположению, отлична от единицы, то $a+bi$ в обоих случаях является комплексным составным числом. Это вторая часть теоремы.

34. Таким образом, *совокупность комплексных простых чисел исчерпывается числами следующих четырех типов.*

1. Четырьмя единицами 1, $+i$, -1, $-i$, которые, однако, когда речь будет идти о простых числах, мы в большинстве случаев молчаливо будем предполагать исключенными.

2. Числом $1+i$ и тремя ассоциированными с ним числами $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

3. Вещественными положительными простыми числами вида $4n+3$ и тройками чисел, ассоциированных с каждым из них.

4. Комплексными числами, нормами которых являются превосходящие единицу простые числа вида $4n+1$, причем каждой данной норме такого вида соответствует в точности по восемь комплексных чисел, так как норма только одним единственным образом может быть разложена на два квадрата (4).

Теорема. *Произведение $M=A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots$,* где A, B, C, ... *обозначают различные комплексные первичные числа* **(5)**, *не может делиться ни на одно первичное комплексное простое число, не содержащееся среди чисел A, B, C, ...*

Доказательство. Пусть P — первичное комплексное простое число, не содержащееся среди чисел A, B, C, ..., и пусть p, a, b, c, ... являются соответственно нормами чисел P, A, B, C, ... Тогда легко видеть, что норма числа M равна $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$, так что это число должно было бы делиться на p, если бы M делилось на P. Так как отдельные нормы являются или вещественными простыми числами (из ряда 2, 5, 13, 17, ...), или квадратами вещественных простых чисел (из ряда 9, 49, 121, ...), то немедленно ясно, что это может быть только тогда, когда p равно одной из норм a, b, c, ...; мы предположим поэтому, что $p=a$. Но так как, по предположению, P и A являются различными между собой первичными комплексными простыми числами, то легко видеть, что это может выполняться, лишь если P и A являются сопряженными комплексными числами, и потому $p=a$ является нечетным вещественным простым числом (а не квадратом простого числа); положим поэтому $A=k+li$, $P=k-li$. Тогда (если распространить понятие и обозначение для сравнимости на целые комплексные числа) будет иметь место $A\equiv 2k \pmod P$, откуда легко видеть, что

$$M\equiv 2^{\alpha}k^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots \pmod P.$$

Таким образом, если предположить, что M делится на P, то и

$$2^{\alpha}k^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots$$

будет делиться на P, а потому норма этого числа, которая равна

$$2^{2\alpha}k^{2\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots,$$

будет делиться на p. Но так как 2 и k заведомо на p не делятся, то из этого следует, что p должно совпадать с одним из чисел b, c, ... Пусть, например, $p=b$. Но тогда мы заключаем отсюда, что или $B=k+li$, или $B=k-li$, т. е. или $B=A$, или $B=P$, но и то и другое противоречит предположению.

Из этой теоремы другая теорема, а именно что разложение на простые сомножители возможно только единственным способом, выводится очень легко, причем методом, совершенно аналогичным тому, который мы использовали в «*Арифметических исследованиях*» (п. 16); поэтому было бы излишним задерживаться сейчас на этом.

. . . .

39. Изложенное в предыдущем пункте **(6)** относится к непрерывным комплексным величинам; в арифметике же, которая имеет дело только с целыми числами, схемой комплексных чисел является система точек, так расположенных на одинаковых расстояниях одна от другой на проходящих на одинаковых расстояниях одна от другой прямых, что они разбивают бесконечную плоскость на бесконечное число квадратов. Все числа, делящиеся на заданное комплексное число $a+bi=m$, также будут образовывать бесконечно много квадратов, стороны которых равны $\sqrt{a^2+b^2}$, т. е. площади равны a^2+b^2; если ни одно из чисел a, b не равно нулю, то последние квадраты будут расположены по отношению к первым наклонно. Каждому числу, не делящемуся на модуль m, будет соответствовать точка, расположенная или внутри одного из таких квадратов, или на границе двух квадратов; последний случай, однако, может иметь место только тогда, когда числа a, b имеют общий делитель; далее ясно, что числа, сравнимые по модулю m, занимают в своих квадратах конгруэнтные положения. Отсюда легко видеть, что если собрать все числа, лежащие внутри некоторого определенного квадрата, и все числа, лежащие на каких-нибудь двух непротивоположных его сторонах, и, наконец, добавить к ним число, делящееся на m, то мы получим полную систему несравнимых по модулю m вычетов, т. е. каждое целое число будет сравнимо с одним и только с одним из этих чисел. Было бы также нетрудно показать, что количество этих вычетов равно норме модуля, т. е. равно a^2+b^2. Однако нам кажется целесообразным доказать эту очень важную теорему другим, чисто арифметическим, способом.

Примечания. 1. Исследуя биквадратичный закон взаимности, Гаусс пришел к мысли о возможности и необходимости расширения понятия целого числа. Он перенес понятие целого на все числа вида $a+bi$, где a, b — целые рациональные, а i является корнем уравнения $x^2+1=0$. Развитая им теория послужила моделью для развития теории целых алгебраических чисел. Сам Гаусс в предисловии к работе говорит о необходимости *«в некотором смысле бесконечно расширить область высшей арифметики»*, что и было сделано после него. Новые трудности, с которыми при этом встретились математики, послужили толчком для уточнения понятия простого числа и для создания теории идеалов, дивизоров, а затем и p-адических чисел (см. статью И. Г. Башмаковой [№ 9]).

2. В приведенном (п. 33—34), а также в последующем (из п. 37) отрывках Гаусс строит теорию делимости для чисел вида $a+bi$, где a, b — целые рациональные, полностью аналогичную обычной, лежащей в основе всей арифметики целых рациональных чисел.

3. В п. 31 Гаусс отмечает, что в области целых комплексных чисел имеются *четыре единицы*: $+1$, -1, $+i$, $-i$.

4. Произведение комплексного числа на сопряженное с ним Гаусс назвал *нормой* этого числа. Норма вещественного числа равна его квадрату.

Гаусс показывает, что норма произведения чисел равна произведению их норм.

5. Под *первичным* комплексным числом Гаусс понимает такое простое, которое выделено определенным образом из четырех *ассоциированных*, т. е. $\alpha\cdot 1$, $\alpha(-1)$, $\alpha\cdot i$ и $\alpha(-i)$.

6. После того как в предыдущем параграфе Гаусс дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел, он обращается здесь к интерпретации целых комплексных чисел, и в частности чисел, сравнимых по комплексному модулю m.

8. ИЗ ИСТОРИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

а. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ИЗ РАБОТЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА «ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ» (1848)

[№ 54, т. I, с. 173.]

Во втором томе «Теории чисел» Лежандр предлагает формулу для приближенного определения числа простых чисел, меньших данного числа. Свою формулу Лежандр проверяет таблицею простых чисел от 10 000 до 1 000 000 и потом прилагает ее к решению некоторых вопросов теории чисел. Несмотря на видимое согласие формулы Лежандра с таблицею простых чисел, мы не можем не изъявить сомнения насчет строгости ее и вследствии того не можем признать верными выводы, на ней основанные. К такому заключению приводит нас одна теорема относительно свойств функции, определяющей число простых чисел, меньших данного числа, теорема, из которой могут быть выведены многие любопытные предложения.

Мы займемся теперь изложением этой теоремы, а потом покажем некоторые из ее предложений.

Теорема, которая будет предметом наших исследований, заключается в следующем:

Теорема I. *Если* $\varphi(x)$ *означает число простых чисел, меньших* x, n*—какое-либо целое число,* ρ*—количество* > 0, *то в сумме*

$$\sum_{x=2}^{\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

мы будем иметь такую функцию, которая с приближением ρ *к* 0 *приближается к конечному пределу.*

. . . .

[Там же, с. 177—178.]

Из доказанной нами теоремы можно вывести многие любопытные свойства функции, определяющей число простых чисел, меньших данного предела. Для этого мы замечаем, что разность $\frac{1}{\log x}-\int\limits_{x}^{x+1}\frac{dx}{\log x}$ при x большом есть бесконечно малое относительно $\frac{1}{x}$ порядка первого; а потому выражение

$$\left(\frac{1}{\log x}-\int\limits_{x}^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при x большом будет относительно $\frac{1}{x}$ порядка $2+\rho$, и, следовательно, при ρ не <0 сумма

$$\sum_{x=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log x}-\int\limits_{x}^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\cdot\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет иметь конечное значение. Складывая же эту сумму с выражением

$$\sum_{x=2}^{\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

о котором сейчас доказали теорему I, на основании ее заключаем, что значение

$$\sum_{x=2}^{\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int\limits_{x}^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}\,dx$$

с приближением ρ к 0 приближается к конечному пределу. А отсюда нетрудно вывести следующую теорему:

Теорема II. *От* $x=2$ *до* $x=\infty$ *функция* $\varphi(x)$, *означающая число простых чисел, меньших* x, *удовлетворяет бесконечное число раз и неравенству* $\varphi(x)>\int\limits_{2}^{x}\frac{dx}{\log x}-\frac{\alpha x}{\log^n x}$, *и неравенству* $\varphi(x)<$ $<\int\limits_{2}^{x}\frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha x}{\log^n x}$, *как бы* α, *оставаясь количеством положительным, ни было мало, а* n *ни было велико.*

. . . .

[Там же, с. 180.]

Теорема III. *Выражение* $\frac{x}{\varphi(x)}-\log x$ *при* $x\to\infty$ *не может иметь пределом количество, отличное от* -1.

Примечание. В 1798—1808 гг. А. Лежандр, опираясь на таблицы простых чисел, дал для достаточно больших x эмпирическую формулу для функции, которую теперь, вслед за Э. Ландау (1909), обозначают $\pi(x)$ (числа простых чисел, не превосходящих x):

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x-1{,}08366}.$$

Основываясь на табличных подсчетах, Гаусс в 1849 г. (опубликовано в 1863 г.) предложил для больших x иную, более точную, как оказалось впоследствии, эмпирическую формулу:

$$\pi(x) \sim \operatorname{Li} x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Крупным шагом вперед в изучении свойств функции $\pi(x)$ явилась цитированная выше работа П. Л. Чебышева 1848 г. В ней на основании изучения свойств функции, получившей впоследствии название дзета функция [см. ч. II, п. 86] $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ для вещественных s, доказывается теорема II, приведенная во втором из цитированных выше отрывков. Из этой теоремы следует теорема III (см. третий отрывок), показывающая принципиальную неточность формулы Лежандра. В самом деле, из формулы Лежандра следовало бы: если предел $\frac{x}{\pi(x)} - \ln x$ при $x \to \infty$ существует, то этот предел равен $-1{,}08366$ вместо -1.

Таким образом, Чебышев доказал, что $\frac{\pi(x)}{\operatorname{Li} x}$ или $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ при $x \to \infty$ не может иметь пределом число, отличное от единицы. В этой же работе он получил еще несколько важных результатов теории простых чисел.

Следует иметь в виду, что $\log x$ означает в цитируемой работе Чебышева натуральный логарифм.

Дальнейшее развитие теория распределения простых чисел вскоре получила в другой статье Чебышева, отрывок из которой приведен непосредственно далее.

ИЗ РАБОТЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА «О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ» (1850)

[№ 54, с. 191—193.]

§ 1. Все вопросы, зависящие от закона распределения простых чисел в ряду

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots,$$

представляют вообще большие трудности. Те заключения, которые можно сделать с очень большою вероятностью на основании таблиц простых чисел, чаще всего остаются без строгого доказательства. Например, таблицы простых чисел приводят к мысли, что, начиная от $a > 3$, существует всегда простое число, большее чем a и меньшее $2a-2$ (что составляет известный postulatum Бертрана[1]), но до настоящего времени не было доказательства этого предложения для значений a, которые превышают пределы наших таблиц. Трудность еще увеличивается, когда задаются более тесными пределами или когда желают назначить такой предел для a, чтобы для значений a, превышающих этот предел, ряд

$$a+1,\ a+2,\ \ldots,\ 2a-2$$

[1] Journal de l'École polytechnique, cahier XXX.

содержал, по крайней мере, два, три, четыре и т. д. простых числа.

Существует еще другой род очень трудных вопросов, которые также зависят от закона распределения простых чисел в ряду

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$$

и разрешение которых крайне необходимо. Таковы именно все вопросы о числовых величинах рядов, члены которых суть функции простых чисел

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

Эйлер доказал, что ряд

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{7^a}+\frac{1}{11^a}+\frac{1}{13^a}+\dots$$

делается расходящимся для тех же значений a, при которых делается расходящимся ряд

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{5^a}+\frac{1}{6^a}+\frac{1}{7^a}+\dots,$$

а именно для $a \leqslant 1$. Но для некоторых форм общего члена сходимость ряда

$$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+\dots$$

не представляет необходимого условия для того, чтобы ряд

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+u_{13}+\dots$$

имел конечное значение. Таков, например, случай $u_n=\frac{1}{n\log n}$. Действительно, значение ряда

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\dots,$$

как мы докажем дальше, не превышает 1,73, между тем как ряд

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{6\log 6}+\dots$$

расходящийся. Какой же критерий сходимости рядов, которые составлены из членов с простыми индексами 2, 3, 5, 7, 11 и т. д.? А в случае сходимости как установить степень приближения, с которою вычисляются их величины по первым членам? Решение этих вопросов по отношению к рядам вида

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+u_{13}+\dots$$

весьма интересно, ибо эти ряды встречаются в некоторых изысканиях о числах.

Этот мемуар содержит решение поименованных вопросов. Я достиг такового, изучая функцию, которая обозначает сумму логарифмов простых чисел, не превышающих данного предела. На основании уравнения, которому удовлетворяет эта функция, можно указать два предела, между которыми лежит значение этой суммы. Между различными заключениями, которые мы отсюда выводим, нам удается указать пределы, между которыми находится всегда, по крайней мере, одно простое число, что нас приводит очень просто к доказательству упомянутого постулата Бертрана. Что касается вычисления рядов формы

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+\ldots,$$

то мы находим критерий суждения, сходятся они или расходятся, и в первом случае мы даем метод для вычисления, с известною степенью приближения, разности между величинами этих рядов и суммами их первых членов. Мы даем также формулу для вычисления по приближению числа простых чисел, не превышающих данного предела, и указываем предел погрешности этой формулы, чего до сих пор еще не было сделано. В мемуаре, который я имел честь представить С.-Петербургской Академии наук в 1848 г., я доказал, что если в выражении числа простых чисел, не превосходящих x, отбросить все члены, которые исчезают по сравнению с

$$\frac{x}{\log x},\quad \frac{x}{\log^2 x},\quad \frac{x}{\log^3 x},\quad \ldots$$

при $x \longrightarrow \infty$, то это выражение приводится к $\int\limits_2^x \frac{dx}{\log x}$; но для конечных значений x величина отброшенных членов остается неизвестною. Что же касается формулы Лежандра, то ее степень приближения известна только в пределах таблиц простых чисел, которыми пользуются для ее проверки.

Примечание. Первый из результатов, содержащихся в мемуаре «О простых числах», — доказательство постулата, высказанного Ж. Бертраном в 1845 г. Это доказательство, равно как и последующие результаты мемуара, основывается на изучении функции $\theta(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}\ln p$, т. е. суммы натуральных логарифмов всех простых чисел, не превышающих числа x, для которой Чебышев устанавливает следующую оценку:

$$Ax-\frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}}-\frac{15}{8\ln 6}\ln^2 x-\frac{15}{4}\ln x-3<\Theta(x)<$$

$$<\frac{6}{5}Ax-Ax^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{4\ln 6}\ln^2 x+\frac{5}{2}\ln x-3,$$

где

$$A=\ln\frac{2^{\frac{1}{2}}\,3^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}=0{,}92129\ldots$$

Второй результат состоит в следующем: если функция $F(x)$ для достаточно больших x положительна, то для сходимости ряда

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\frac{F(2)}{\ln 2}+\frac{F(3)}{\ln 3}+\frac{F(4)}{\ln 4}+\frac{F(5)}{\ln 5}+\ldots$$

Из этой теоремы следует фундаментальное предложение, которое в несколько преобразованной форме можно сформулировать так: для достаточно больших x

$$0{,}92129 < \frac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1{,}10555.$$

Этот результат вместе с утверждением первого мемуара о том, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$, если он существует, равен 1, был первым после Евклида [см. ч. II, п. 1г] существенным продвижением в решении проблемы о распределении простых чисел и явился первым шагом на пути к доказательству асимптотического закона распределения простых чисел, т. е. теоремы о том, что предел отношения $\pi(x)$ к $\frac{x}{\ln x}$ или же к $\mathrm{Li}\,x$ при $x\to\infty$ есть единица. Доказательство этого предложения было получено в 1896 г. независимо друг от друга Ж. Адамаром и Ш. де ла Валле-Пуссеном. Для этого доказательства оказалось необходимым при исследовании $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ перейти от действительной области изменения аргумента к комплексной плоскости, ибо, как показал Б. Риман, закон распределения простых чисел тесно связан с законом расположения нетривиальных нулей функции $\zeta(z)$ (см. ниже).

О работах П. Л. Чебышева по теории чисел см. комментарий А. О. Гельфонда [в № 54], а также монографии Б. Н. Делоне [№ 24], Е. П. Ожиговой [№ 40] и А. П. Юшкевича [№ 60].

6. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ

ИЗ МЕМУАРА Б. РИМАНА «О ЧИСЛЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВЫШАЮЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ» (1859)

[№ 45, с. 216.]

В этих исследованиях мне служило исходным пунктом то обстоятельство, что, как было замечено Эйлером, имеет место соотношение

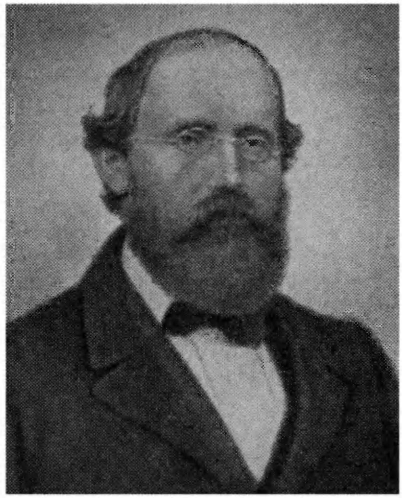
$$\Pi\,\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\sum\frac{1}{n^s},$$

причем p пробегает здесь все простые, а n — все целые положительные числа. Функцию комплексного переменного s, представляемую этими тождественно равными выражениями, поскольку они являются сходящимися, я обозначаю через $\zeta(s)$. Но оба они оказываются сходящимися лишь в том случае, когда действительная часть s больше, чем 1; впрочем, легко можно указать и такое представление названной функции, которое не теряет смысла ни при каких значениях s.

[Там же, с. 218—219.]

Функция $\xi(t)$ конечна для всех конечных значений t и разлагается в очень быстро сходящийся ряд, расположенный по степеням tt (1). Так как при значениях s, действительная часть которых больше единицы,

$$\log \zeta(s) = -\Sigma \log(1 - p^{-s})$$



Б. Риман

остается конечным и то же справедливо относительно логарифмов других множителей, из которых составляется $\xi(t)$, то функция $\xi(t)$ может обращаться в нуль только в том случае, если мнимая часть t заключена между $\frac{1}{2}i$ и $-\frac{1}{2}i$. Число корней уравнения $\xi(t) = 0$, действительная часть которых заключена между 0 и T, приблизительно равно

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

ибо интеграл $\int d \log \xi(t)$, взятый в положительном направлении по контуру той прямоугольной области, внутри которой мнимая часть t меняется от $-\frac{1}{2}i$ до $+\frac{1}{2}i$, а действительная от 0 до T, равен

$$\left(T \log \frac{T}{2\pi} - T\right) i$$

$\left(\text{с относительной погрешностью порядка } \frac{1}{T}\right)$; а такой интеграл равен числу лежащих в этой области корней $\xi(t) = 0$, умноженному на $2\pi i$. И в самом деле, в указанных пределах содержится примерно столько действительных корней; представляется весьма вероятным, что и все корни являются действительными. Во всяком случае, было бы желательно найти строгое доказательство этого предложения; после нескольких напрасных, не очень настойчивых попыток разыскать таковое я временно от них отказался, так как для ближайшей цели моего исследования в этом не представлялось надобности.

П р и м е ч а н и е. Данная работа Б. Римана явилась поворотным пунктом в развитии аналитической теории чисел. В первом из приведенных отрывков Риман рассматривает тождество Эйлера, с помощью которого Эйлер дал новое доказательство бесконечности числа простых чисел. Риман делает, однако, существенно новый шаг, полагая s комплексным. Это дает ему возможность привлечь для дальнейших исследований аппарат теории аналитических функций. Так, в этой работе Риман сумел дать строго обоснованный вывод функционального уравнения для ζ-функции, связывающего $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$:

$$2 \sin \pi s\, \Pi(s-1)\, \zeta(s) = (2\pi)^s \Sigma n^{s-1} [(-i)^{s-1} + i^{s-1}],$$

где $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$. Это уравнение (в несколько ином виде) было известно еще Эйлеру, но обосновать его в рамках математики XVIII в. без владения аналитическим продолжением было невозможно.

Во втором отрывке формулируется знаменитая гипотеза Римана о нулях ζ-функции, которая до сих пор не доказана.

1. Риман определяет функцию $\xi(t)$ следующим образом:

$$\xi(t) = \Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\, \pi^{-\frac{s}{2}}\, \zeta(s),$$

где $s = \frac{1}{2} + it$, $\Pi(s) = \Gamma(s+1)$, и выводит соотношение, из которого следует, что $\xi(-t) = \xi(t)$, поэтому $\xi(t)$ раскладывается в ряд по степеням t^2. Из того, что все нули $\xi(t)$ действительные, следует, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ (т. е. отличные от $-2, -4, -6, \ldots$) лежат на прямой $Rs = \frac{1}{2}$, а это и есть гипотеза Римана.

9. ИЗ ИСТОРИИ ДИОФАНТОВА АНАЛИЗА

ИЗ СТАТЬИ А. ПУАНКАРЕ «ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ» (1901)

[№ 43, т. 2, с. 901—902.]

I. Введение

Арифметические свойства некоторых выражений и, в частности, бинарных квадратичных форм крайне тесно связаны с изменением этих форм под действием линейных преобразований с целыми коэффициентами. Я не буду здесь особенно останавливаться на той стороне этого вопроса, которая касается изучения таких преобразований и которая достаточно хорошо известна всем, интересующимся теорией чисел.

Можно полагать, что изучение групп аналогичных преобразований призвано сыграть большую роль в теории чисел. Именно это и побудило меня опубликовать нижеследующие соображения, хотя они представляют собой скорее программу исследования, чем подлинную теорию.

Я спросил себя, нельзя ли многие проблемы анализа связать друг с другом на систематической основе, благодаря новой классификации однородных полиномов высшего порядка, аналогичной в некотором смысле классификации квадратичных форм.

Эту классификацию следовало бы строить на основе группы бирациональных преобразований с *рациональными коэффициентами*, которую допускает алгебраическая кривая.

II. Уникурсальные кривые

Пусть $f(x, y, z)$ — однородный относительно x, y, z полином с целыми коэффициентами. Равенство

$$f(x, y, z) = 0$$

можно рассматривать как уравнение плоской алгебраической кривой в однородных координатах. Две кривые $f = 0$ и $f_1 = 0$ будут тогда *эквивалентными*, или принадлежащими к *одному классу*, если от одной из них можно перейти к другой с помощью бирационального преобразования с целыми или рациональными коэффициентами.

Я замечу сперва, что две прямые

$$ax + by + cz = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

(где коэффициенты в левых частях, разумеется, целые или рациональные) всегда эквивалентны. Действительно, достаточно задать соответствие между точкой M, принадлежащей первой прямой, и точкой M_1, принадлежащей второй прямой, так, чтобы прямая MM_1 проходила через данную фиксированную точку F с рациональными координатами. Таким образом, имеется только один класс прямых.

Рассмотрим теперь конические сечения. Если коническое сечение проходит через точку C с рациональными координатами (такую точку я буду называть для краткости *рациональной точкой*), то оно эквивалентно прямой. Действительно, достаточно рассмотреть какую-нибудь прямую D с рациональными коэффициентами (такую прямую я буду называть *рациональной прямой*) и задать соответствие между точкой M, принадлежащей коническому сечению, и точкой M_1, принадлежащей прямой D, так, чтобы три точки M, M_1, C лежали на одной прямой.

Отсюда немедленно следует, что если коническое сечение содержит рациональную точку, то оно содержит бесконечно много таких точек. Это можно увидеть следующим образом. Пусть C — рациональная точка, принадлежащая коническому сечению и пусть P — произвольная точка плоскости. Проведем прямую PC; эта прямая пересекает коническое сечение во второй точке M, которая является, очевидно, рациональной.

Конические сечения, содержащие рациональную точку, образуют, следовательно, один класс, и этому классу принадлежат все прямые.

Примечание. В своем мемуаре А. Пуанкаре не только наметил «программу исследований», как он об этом пишет во введении, но и значительно развил саму теорию, особенно для кривых рода 1.

Во введении (п. I), которое мы приводим целиком, высказана та чрезвычайно важная и плодотворная идея, что для изучения арифметических свойств кривых в основу их классификации должны быть положены бирациональные преобразования.

Пункт II посвящен доказательству теоремы: если на коническом сечении лежит рациональная точка, то оно бирационально эквивалентно прямой. Эта теорема была, по существу, известна Диофанту (см. ч. II, п. 2). Пуанкаре сформулировал ее в общем виде и дал ей геометрическую интерпретацию.

Он показал в дальнейшем, что эта же теорема верна для любой алгебраической кривой рода 0. Этот же результат за десять лет до Пуанкаре был получен Д. Гильбертом и А. Гурвицем, с работой которых Пуанкаре, повидимому, не был знаком.

Наиболее интересным в мемуаре является построение арифметики для кривых рода 1. Гипотезы, сделанные при этом Пуанкаре, и намеченные им планы расширения теории послужили отправным пунктом для исследований Л. Д. Морделла, А. Вейля и других и оказали большое влияние на развитие арифметических методов алгебраической геометрии.

10. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

ИЗ ДОКЛАДА Д. ГИЛЬБЕРТА «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ» (1900)

[№ 42, с. 36—37 (1).]

Я хотел бы поэтому указать класс задач, на которые, помоему, следовало обратить внимание как на ближайшие в этом направлении. Когда мы узнаем, что некоторые специальные трансцендентные функции, играющие в анализе существенную роль, принимают при определенных алгебраических значениях аргумента алгебраические же значения, то это обстоятельство кажется нам особенно удивительным и достойным дальнейшего исследования. Мы всегда ждем, что трансцендентные функции при алгебраических значениях аргументов принимают, вообще говоря, трансцендентные значения, и хотя нам хорошо известно, что существуют даже такие целые трансцендентные функции, которые для всех алгебраических значений аргумента принимают рациональные значения, мы все же считаем очень вероятным, что такая функция, как, например, показательная $e^{i\pi z}$, которая, очевидно, для всех рациональных значений аргумента z принимает алгебраические значения, с другой стороны, будет всегда принимать для всех алгебраических иррациональных значений z

трансцендентные значения. Этому высказыванию можно придать и геометрический облик следующим образом. *Если в равнобедренном треугольнике отношение угла при основании к углу при вершине есть алгебраическое, но не рациональное число, то отношение основания к боковой стороне есть трансцендентное число.* Несмотря на простоту этого предложения, а также на его сходство с задачами, решенными Эрмитом и Линдеманном (2), его доказательство представляется мне исключительно трудным, так же как и доказательство того, что *степень* α^{β} *при алгебраическом основании* α *и алгебраическом иррациональном показателе* β, *как например число* $2^{\sqrt{2}}$ *или* $e^{\pi}=i^{-2i}$, *есть всегда или трансцендентное число, или, по крайней мере, иррациональное.* Можно быть уверенным, что решение этой и аналогичных проблем должно привести нас к новым методам и новым точкам зрения на существо специальных иррациональных и трансцендентных чисел.

Примечания. 1. Приводимый фрагмент—отрывок из текста седьмой проблемы—одной из 23 проблем, поставленных Д. Гильбертом в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже.

2. См. следующий отрывок.

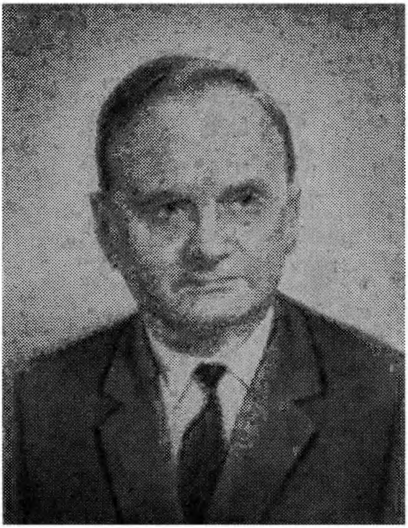
ИЗ СТАТЬИ А. О. ГЕЛЬФОНДА «К СЕДЬМОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА» (1969)

[№ 42, с. 121—123.]

Алгебраическим числом называется любой корень алгебраического уравнения $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=0$, где a_0, a_1, $\ldots$, a_n — целые числа. Всякое неалгебраическое число называется трансцендентным числом. Существование трансцендентных чисел строго было доказано Ж. Лиувиллем (1) в 1844 г., но еще Л. Эйлер их существование считал безусловным, хотя вполне строгого определения трансцендентного числа у него, по-видимому, не было.

Первые общие утверждения относительно арифметической природы чисел мы находим у Л. Эйлера, который, например, утверждал, что числа $a^{\sqrt{b}}$, где a иррационально, а b целое, но не квадрат, не только не рациональны, но даже не «иррациональны», что в нашей терминологии значит «трансцендентны».

В создании и развитии методов доказательства трансцендентности чисел за 60 лет, прошедших со времени постановки проблем Д. Гильберта, были достигнуты существенные успехи и основная проблема, поставленная Д. Гильбертом, была решена в общем виде. Два основных метода доказательства трансцендентности, как это и было предположено Д. Гильбертом, основаны на исследовании арифметических и аналитических свойств функции, значением которой является при алгебраическом значении аргумента исследуемое число. Мы остановимся только на основных этапах развития этих методов.



А. О. Гельфонд

Геометрическая проблема трансцендентности отношения основания к боковой стороне равнобедренного треугольника, отношение углов которого будет иррациональным алгебраическим числом, сводится к трансцендентности числа $e^{\pi\alpha} = i^{-2i\alpha}$ при алгебраическом и действительном α. Трансцендентность чисел вида $\alpha^{i\sqrt{q}}$, где $\alpha \neq 0, 1$ — алгебраическое число, а $q \geqslant 1$ целое, была доказана А. О. Гельфондом в 1929 г. **(2)** с помощью исследования роста и арифметических свойств коэффициентов разложения функции α^z в интерполяционный ряд Ньютона с узлами интерполяции вида $x + i\sqrt{q}\,y$, где x и y пробегают все целые значения. Этот же метод был в дальнейшем использован Р. О. Кузьминым **(3)** для доказательства трансцендентности чисел вида $\alpha^{\sqrt{q}}$ при прежних предположениях относительно α и q и дополнительном условии иррациональности $\sqrt{q}$ и К. Л. Зигелем для доказательства трансцендентности хотя бы одного из периодов эллиптической функции $\wp(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$[\wp'(x)]^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$$

при алгебраических значениях инвариантов g_2 и g_3.

Трансцендентность чисел вида α^β при алгебраическом α, $\alpha \neq 0$, 1, и β алгебраическом иррациональном (к вопросу об арифметической природе таких чисел и сводится проблема Д. Гильберта) была впервые доказана в 1934 г. А. О. Гельфондом **(4)** с помощью более глубокого исследования арифметических и аналитических свойств показательных функций. Несколько позднее эта теорема была доказана Т. Шнейдером **(5)**, который также использовал метод А. О. Гельфонда для доказательства трансцендентности каждого из периодов эллиптической функции при алгебраических инвариантах, а также трансцендентности многих постоянных, связанных с эллиптическими функциями. Трансцендентность чисел вида α^β эквивалентна трансцендентности отношения логарифмов $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ при алгебраических α и β, откуда, в частности, следует, что все логарифмы, приближенные значения которых приводятся в таблице десятичных логарифмов,— или рациональные, или трансцендентные числа.

Общая проблема отсутствия алгебраических соотношений с целыми коэффициентами между числами вида α^β при прежних предположениях относительно α и β не решена до настоящего времени.

. . . .

В 1873 г. Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e **(6)**, а в 1882 г. Линдеманн **(7)**, обобщая метод Эрмита, доказал, что соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} A_k e^{z_k} = 0$$

невозможно при алгебраических не равных нулю в совокупности A_k и алгебраических и различных z_k. Этим была доказана трансцендентность π, так как $e^{2\pi i} = 1$, что было бы невозможно, если бы π, а тем самым и $2\pi i$ было бы алгебраическим числом **(8)**. Трансцендентность π, как известно, влечет за собой и отрицательное решение проблемы квадратуры круга. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям второго порядка при алгебраических значениях аргумента, была доказана впервые К. Зигелем **(9)** в 1930 г. с помощью разработанного им общего метода. Например, им была доказана трансцендентность чисел вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{[n!]^2}$$

при алгебраическом a, $a \neq 0$, и, более общо, значений функций Бесселя или цилиндрических функций.

. . . .

Отметим также очень красивую теорему К. Малера о трансцендентности числа α

$$\alpha = 0{,}123456789101112\ \ldots,$$

другими словами, десятичной или q-ичной дроби, в которой после запятой выписаны подряд все числа натурального ряда, или, более общо, цифры последовательных значений целочисленного многочлена $P(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Этот результат получен с помощью теоремы Т. Шнейдера о приближении алгебраических чисел рациональными дробями и явился прямым следствием полученной позднее теоремы Рота.

Примечания.

1. C. r. Acad. sci. 18 (1844), 883, 910; J. math. pures et. ap. 16 (1851), 133.

2. C. r. Acad. sci. 189. (1929), 1224—1228.

3. ИАН СССР, сер. матем. 3 (1930), 585—597.

4. ДАН СССР 2 (1934), 1—6; ИАН СССР, сер. физ.-матем. 4 (1934), 623—630.

5. J. reine und angew. Mat. 172 (1934), 65—69.

6. C. r. Acad. sci. 77 (1873), 18, 74, 226, 285.

7. Math. Ann. 20 (1882), 213.

8. Вопрос об арифметической природе чисел e и π имеет длительную историю. В 1767 г. Ламберт доказал, что числа π и e^m (где m рациональное) не являются рациональными (Mém. Ac. Berlin, 1761 (1768)) Лиувилль в 1840 г. (J. math. pures et appl.) показал, что ни e, ни e^2 не могут являться квадратичными иррациональностями.

9. Abh. preuss. Acad. Wiss., № 1 (1929—1930), 1—70.

ГЕОМЕТРИЯ

1. ИЗМЕРЕНИЕ ОБЪЕМОВ В ДРЕВНЕМ ЕГИПТЕ

ИЗ МОСКОВСКОГО ПАПИРУСА (прибл. XXI—XVIII вв. до н. э.)

[№ 90, с. 157; перевод А. Е. Раик и Б. А. Розенфельда.]

Задача № 10.

Форма вычисления корзины, если тебе называют корзину с устьем, диаметра $4\frac{1}{2}$. О, дай мне узнать ее поверхность (1). Вычисли $\frac{1}{9}$ от 9, так как корзина — половина яйца. Получится 1. Вычисли остаток, это 8. Вычисли $\frac{1}{9}$ от 8. Получится $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$ (2). Вычисли остаток от этих 8 [при вычитании] этих $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$. Получится $7\frac{1}{9}$. Вычисли $7\frac{1}{9}$ $4\frac{1}{2}$ раза. Получится 32. Смотри: это и есть ее поверхность. Ты правильно нашел.

[Там же, с. 135.]

Задача № 14.

Форма вычисления усеченной пирамиды, когда тебе называют усеченную пирамиду высотой в 6 [локтей] с плоскостями по 4 [локтя] на нижней стороне и по 2 [локтя] на верхней стороне (3). Вычисляй с этими 4, возведенными в квадрат. Получится 16. Удвой 4. Получится 8 (4). Вычисляй с этими 2, возведенными в квадрат. Получится 4. Сложи вместе эти 16 с этими 8 и этими 4. Получится 2. Вычисли $\frac{1}{3}$ от 6. Получится 2. Сосчитай 28 2 раза. Получится 56. Смотри: это 56. Ты правильно нашел (5).

Примечания. Московский папирус, хранящийся в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве, был написан в эпоху Среднего царства (XXI—XVIII вв. до н. э.), его расшифровку произвели Б. А. Тураев и В. В. Струве.

1. Термин «корзина» понимается различными исследователями по-разному. Согласно В. В. Струве корзина — это полусфера; Т. Пит (1923) считал, что в задаче находится площадь боковой поверхности круглого полуцилиндра, а О. Нейгебауэр (1934) полагает, что «корзина» имеет форму купола. Мы придерживаемся последней точки зрения и следуем реконструкции А. Е. Раик [№ 44, с. 34—38]. Если обозначить диаметр устья корзины через d, то результат решения можно выразить формулой

$$S=d\left[\left(2d-\frac{1}{9}\cdot 2d\right)-\frac{1}{9}\left(2d-\frac{1}{9}\cdot 2d\right)\right],$$

т. е.

$$S=\left[\left(1-\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)\right]\cdot 2d^2=\left(\frac{8}{9}\right)^2\cdot 2d^2=2\left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

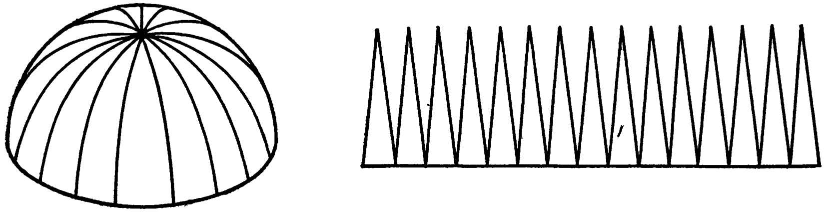


Рис. 16.

Но выражение $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ египтяне применяли для площади круга, что соответствует значению $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,16\ldots$ Поэтому найденная египетским математиком площадь S равна сумме площадей двух кругов диаметра d. Раик считает, что это правило получено из представления, что поверхность корзины, так же как круг, можно составить из треугольников (рис. 16).

Выражение $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ для площади круга Раик объясняет тем, что египтяне представляли приближенно круг как описанный квадрат A_0 площади d^2, из которого отброшены по углам четыре квадрата A_1 со сторонами $\frac{1}{6}d$ и восемь квадратов A_2 со сторонами $\frac{1}{9}d$, примыкающих к квадратам A_1 (рис. 17).

2. Одну девятую от восьми египетский математик представлял как сумму основных дробей $\frac{8}{9}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. О технике вычислений древних египтян см. ч. 1, № 1.

3. Имеется в виду усеченная пирамида с квадратными основаниями.

4. В оригинале вместо 8 написано 16.

5. Если обозначить сторону нижнего основания усеченной пирамиды через a, сторону верхнего основания через b, а высоту через h, то решение сводится к вычислению значений a^2, b^2, ab, $\frac{h}{3}$ и искомый объем равен

$$V=\frac{h}{3}\,(a^2+ab+b^2).$$

Это правило, которое Нейгебауэр считает самым замечательным достижением египетской математики, согласно Раик [№ 44, с. 39—40] египтяне могли

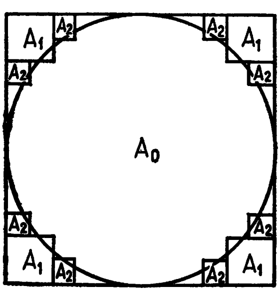


Рис. 17.

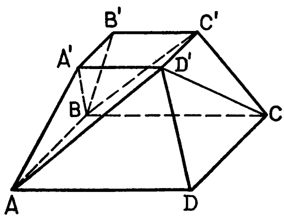


Рис. 18.

получить следующим образом: усеченная пирамида $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 18) разбивается на 4 пирамиды: $ABCDD'$, $A'B'C'D'B$, $BCC'D'$ и $ABA'D'$, из которых две последние конгруэнтны.

Объемы этих пирамид соответственно равны:

$$V_1=\frac{1}{3}a^2h,\ V_2=\frac{1}{3}b^2h,\ V_3=V_4=\frac{1}{6}abh \text{ и}$$

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4=\frac{1}{3}(a^2h+b^2h+abh)=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Правило вычисления объема пирамиды, несомненно, было в Древнем Египте известно, хотя и не встречается в сохранившихся текстах.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АКСИОМЫ ЕВКЛИДА

ИЗ ПЕРВОЙ КНИГИ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

[№ 25, т. I, с. 11—15.]

Определения

1. *Точка* есть то, что не имеет частей.
2. *Линия* же—длина без ширины.
3. Концы же линии—точки.
4. *Прямая линия* есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.
5. *Поверхность* есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Концы же поверхности—линии.
7. *Плоская поверхность* есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней (1).

. . . .

13. *Граница* есть то, что является оконечностью чего-либо.
14. *Фигура* есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.
15. *Круг* есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [которая называется окружностью], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие [на окружность круга] прямые между собой.
16. *Центром* же круга называется эта точка.
17. *Диаметр* же круга есть какая угодно прямая, проведенная через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.
18. *Полукруг* же есть фигура, содержащаяся между диаметром и отсекаемой им [частью] окружности. Центр же полукруга—то же самое, что и у круга.

19. *Прямолинейные фигуры* суть те, которые содержатся между прямыми, *трехсторонние*—между тремя, *четырехсторонние* же—четырьмя, *многосторонние* же—которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.

20. Из трехсторонних фигур *равносторонний треугольник* есть фигура, имеющая три равные стороны, *равнобедренный* же—имеющая только две равные стороны, *разносторонний* же—имеющая три неравные стороны.

21. Кроме того, из трехсторонних фигур *прямоугольный треугольник* есть имеющий прямой угол, *тупоугольный* же—имеющий тупой угол, а *остроугольный*—имеющий три острых угла.

22. Из четырехсторонних фигур *квадрат* есть та, которая и равносторонняя и прямоугольная, *разносторонник* же—прямоугольная, но не равносторонняя, *ромб*—равносторонняя, но не прямоугольная, *ромбоид* [параллелограмм]—имеющая противоположные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней, ни прямоугольной (2).

Остальные же четырехсторонники будем называть *трапециями* (3).

23. *Параллельные* суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой «стороны» между собой не встречаются (4).

Постулаты

Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.

2. И что ограниченную прямую [можно] непрерывно продолжать по прямой (5).

3. И что из всякого центра и всяким раствором [может быть] описан круг.

4. И что все прямые углы равны между собой (6).

5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых (7).

Общие понятия (Аксиомы)

1. Равные одному и тому же равны и между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

[4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

5. И удвоенные одного и того же равны между собой.

6. И половины одного и того же равны между собой] (8).

7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой (9).

8. И целое больше части.

[9. И две прямые не содержат пространства] (10).

Примечания. Каждая из 13 книг, на которые разделены «Начала» Евклида, начинается с определений; в I книге к определениям присоединены 5 постулатов и несколько аксиом, число которых в различных списках колеблется от 5 до 9. Из этих предпосылок последовательно выводятся затем все предложения «Начал». Система предпосылок математических наук, изложенная в «Началах», является древнейшей из дошедших до нас; несомненно, что она не была первой, как и сами «Начала» Евклида не были первым общим руководством по математике в Древней Греции. Мы сказали «математических наук», так как «Начала» содержат не только планиметрию и стереометрию, но также основы геометрической алгебры (см. ч. I, п. 2), арифметики и теории чисел (см. ч. II, п. 1), общей теории отношений величин (см. ч. IV, п. 1в), учение о квадратичных иррациональностях и применение так называемого метода исчерпывания к измерению фигур (см. ч. IV, п. 1г).

1. Определения «Начал» можно разделить на две группы: 1) такие, которые сводят те или иные понятия к нескольким основным и реально используются при построении теории (их большинство), и 2) такие, в которых сами основные понятия поясняются с помощью других, не определенных понятий или же просто какие-либо термины заменяются их синонимами; подобного рода определения фактически затем не употребляются Ко второй категории относятся 1—7-е и 13—14-е определения.

Первое определение восходит к атомистической математике пифагорейцев или Демокрита, 2-е и 5-е определения также, по-видимому, происходят от представления о линии как о цепочке и о поверхности как о слое атомов.

2. Ромб (ῥόμβος — «волчок»); форму ромба имеет силуэт волчка. Ромбоид (ῥομβοειδής — «ромбообразный») — параллелограмм, не являющийся ромбом и прямоугольником.

3. Термин «трапеция» (τραπέζιον — «столик») применяется здесь в значении любого четырехугольника, не являющегося параллелограммом. В тексте «Начал» термины «ромб», «ромбоид» и «трапеция» не встречаются, но начиная с предложения 34 применяется общий термин «параллелограмм» (παραλληλόγραμμον χωριον — «место [ограниченное] параллельными линиями»). Этот факт также свидетельствует о том, что многие определения «Начал» заимствованы Евклидом из сочинений его предшественников.

4. Параллельные — от παράλληλοι — «проведенные друг подле друга». Оговорка о продолжении связана с тем, что слова «прямая линия» Евклид всегда понимал в смысле конечного отрезка.

5. Постулаты («требования») Евклида — чисто геометрические аксиомы. Первые два постулата — правила пользования идеальной линейкой, III постулат — правило пользования идеальным циркулем. Все построения «Начал» Евклида предполагают пользование этими двумя идеальными инструментами, и задач, не разрешимых этими инструментами, в «Началах» нет.

6. И. Н. Веселовский (№ 16) высказал предположение, что значение IV постулата состоит в исключении сферической геометрии, где прямые углы между меридианами и параллелями не наложимы друг на друга.

7. Это — знаменитый V постулат Евклида, лежащий в основе теории параллельных линий. По-видимому, в трудах предшественников Евклида этого постулата не было, так как Аристотель в «Первой Аналитике» в качестве примера логической ошибки «постулирования основания» т. е. неявного использования утверждения, равносильного доказываемому, приводит изложение параллельных линий у современных ему математиков: «Так поступают [например] те, кто думает описать параллельные линии. В самом деле, они, сами того не зная, в основу доказательства берут то, что [само] не может быть доказано, если линии не параллельны» [№ 2, с. 155; в этом переводе слово γραφεῖν, означающее «описать» и «проводить», переведено вторым значением].

8. «Общие понятия» — общие аксиомы величин, как непрерывных, так и дискретных. Аксиомы в квадратных скобках добавлены позднейшими комментаторами.

9. Евклид понимает равенство в смысле равновеликости, и 7-я аксиома обозначает, что конгруэнтные фигуры равновелики; для некоторых величин

(отрезки, углы) равенство совпадает с конгруэнтностью. Следует отметить, что Евклид пытается как можно меньше пользоваться движением и наложимостью, но полностью отказаться от них не может, что видно, в частности, из 7-й аксиомы.

10. Система определений, постулатов и аксиом Евклида, при всех ее достоинствах, является недостаточной для строго дедуктивного построения «Начал» на ее основе, без молчаливого обращения к различным дополнительным представлениям. Впрочем, первоначально внимание многочисленных комментаторов «Начал» было направлено главным образом на попытки усовершенствовать теорию параллельных путем доказательства V постулата (см. ч. III, п. 9), а также общую теорию отношений (см. ч. IV, п. 1в). Впоследствии была замечена недостаточность системы предпосылок Евклида при рассмотрении вопросов, связанных с непрерывностью геометрических фигур и преобразований, при доказательстве теорем стереометрии и т. д. В результате глубокого анализа оснований геометрии на рубеже XIX и XX вв. был разработан ряд систем аксиом, позволяющих чисто логически строить евклидову геометрию, без добавления неявно подразумеваемых допущений и наглядных представлений. Далее приведена пользующаяся особенной известностью аксиоматика, предложенная Д. Гильбертом (ч. III, п. 9г). По истории оснований геометрии см. книгу В. Ф. Кагана [№ 27].

3. ПРИБЛИЖЕННАЯ КВАДРАТУРА КРУГА

а. КВАДРАТУРА МНОГОУГОЛЬНИКА

ИЗ ВТОРОЙ КНИГИ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

[№ 25, с. 78—79.]

Предложение 14.

Построить квадрат, равный данной прямолинейной фигуре.

Пусть данная прямолинейная [фигура] будет A; вот требуется построить квадрат, равный прямолинейной фигуре A (рис. 19).

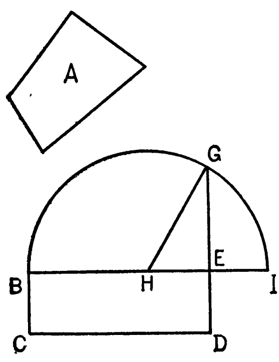


Рис. 19.

Построим равный прямолинейной фигуре A прямоугольный параллелограмм BD (предложение 45 книги I); если теперь BE будет равно ED, то заданное было бы выполнено **(1)**. Действительно, построен равный данной прямолинейной фигуре A квадрат BD; если же нет, то одна из BE, ED будет большей. Пусть большей будет BE, продолжим ее до I и отложим EI, равную ED; рассечем BI пополам в H (предложение 10 книги I); из центра H раствором одним из BH или HI опишем полукруг BGI, продолжим DE до G и соединим HG **(2)**.

Поскольку теперь прямая BI рассечена на равные [отрезки] I в H, а на неравные в E, то (предложение 5), значит, прямоугольник, заключенный между BE, EI вместе с квадратом на EH, равен квадрату на HI (3).

HI же равна HG; значит, прямоугольник между BE, EI вместе с квадратом на EH равен квадрату на HG. Квадрату же на HG равны квадраты на GE и EH [вместе] (предложение 47 книги I); значит, прямоугольник между BE, EI вместе с квадратом на HE равен квадратам на GE и EH (4). Отнимем общий квадрат на HE; тогда остающийся прямоугольник, заключенный между BE, EI, равен квадрату на EG. Но прямоугольник между BE, EI есть BD, ибо EI равна ED; значит, параллелограмм BD равен квадрату на GE.

BD же равен прямолинейной фигуре A. И значит, прямолинейная фигура A равна квадрату, который будет надстраиваться на EG.

Значит, построен равный данной прямолинейной фигуре A квадрат, [именно тот], который будет надстраиваться на EG, что и следовало сделать.

Примечания. Задача о построении квадрата, равновеликого данной фигуре, получила в математике древних греков название квадратуры данной фигуры, при этом в «Началах» под построением фигуры разумеется построение с помощью циркуля и линейки. Аналогичная задача для круга с помощью циркуля и линейки неразрешима, вследствие чего «квадратурой круга» часто называют неразрешимые задачи. В новое время под квадратурой фигуры стали понимать нахождение площади фигуры любым способом, в частности интегрированием.

1. В 45-м предложении I книги «Начал» в данном прямолинейном угле строится параллелограмм, равновеликий данному многоугольнику. Это предложение опирается в свою очередь на 42-е предложение о построении в данном прямом угле параллелограмма, равновеликого данному треугольнику, и на 44-е предложение — аналогичную задачу, но с требованием, чтобы одна из сторон параллелограмма была равна данной прямой (в этом случае говорилось, что искомый параллелограмм «приложен» к данной прямой).

2. 10-е предложение I книги «Начал» — задача о делении прямолинейного отрезка пополам.

3. 5-е предложение II книги «Начал» можно выразить формулой $ab+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Выражение «прямоугольник, заключенный между BE, EI», означает прямоугольник, стороны которого равны отрезкам BE и EI, что на языке «геометрической алгебры» означает произведение этих отрезков.

4. 47-е предложение I книги «Начал» — теорема Пифагора.

6. АРХИМЕД. ИЗМЕРЕНИЕ КРУГА (III *в. до н. э.*)

[№ 5, с. 266—270.]

I

Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника.

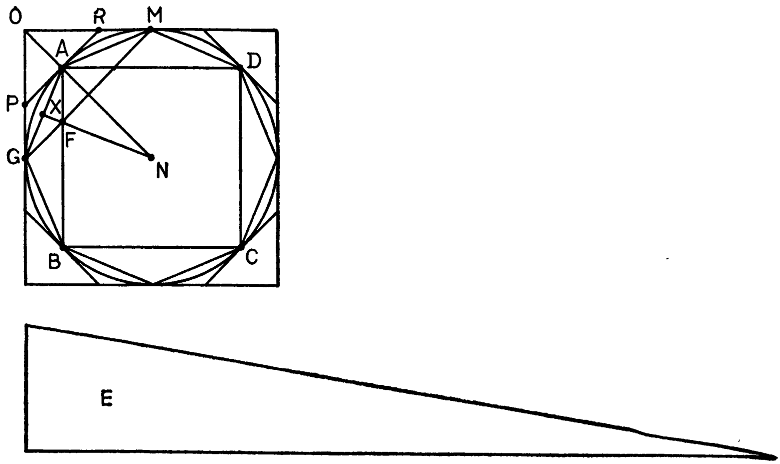


Рис. 20.

Пусть круг $ABCD$ (рис. 20) относится к треугольнику E, как высказано в предложении; я утверждаю, что он будет ему равен.

Действительно, пусть, если возможно, круг будет больше; впишем в него квадрат AC, будем [постоянно] делить дуги пополам [и проводить прямые BG, GA, AM, MD и т. д.], и пусть [когда-нибудь] получатся сегменты меньшие той разницы, на которую круг больше треугольника; тогда полученная прямолинейная фигура будет также больше треугольника. Возьмем центр [круга] N и проведем перпендикуляр NX; тогда NX будет меньше соответствующей стороны треугольника [E]. Также и периметр прямолинейной фигуры меньше оставшейся стороны, поскольку он меньше периметра круга; значит, полученная прямолинейная фигура будет меньше треугольника E, а это нелепо.

Пусть теперь круг, если и возможно, будет меньше треугольника E; опишем около него квадрат, разделим пополам его стороны и через полученные точки делений проведем касательные; тогда угол OAR будет прямым. Следовательно, OR будет больше MR, так как RM равна RA; и значит, треугольник ROP будет больше половины фигуры $OGAM$. Возьмем такие сегменты, подобные PGA, чтобы они были [вместе] меньше избытка, на который треугольник E больше круга $ABCD$, тогда и описанная прямоугольная фигура будет менее E, а это нелепо; действительно, она больше, так как NA равна [вертикальному] катету этого треугольника, а периметр ее больше основания треугольника. Значит, круг будет равен треугольнику E **(1)**.

II

Круг к квадрату на диаметре относится, как 11 *к* 14 (рис. 21).

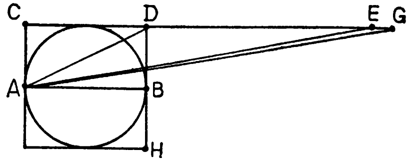


Рис. 21.

Пусть будет круг с диаметром AB; опишем около него квадрат CH, и пусть DE равна удвоенной CD, а ED—седьмой части CD. Теперь, так как ACE имеет к ACD отношение, как 21 к 7, и ACD имеет к AEG отношение, как 7 к 1, то ACG будет [относиться] к ACD, как 22 к 7 **(2)**.

Но квадрат CH в четыре раза больше треугольника ACD, треугольник же $ACDG$ равен кругу AB, [так как катет AC равен радиусу, а основание, как будет доказано, чуть-чуть больше трех диаметров и одной седьмой]; значит, круг к квадрату на CH относится, как 11 к 14.

III

Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых **(3)**.

Пусть будет круг с диаметром AC и центром E (рис. 22), затем касательная CLG и угол GEC—третья часть прямого угла; тогда EG относится к GC, как 306 к 153, а EC к CG относится, как 265 к 153 **(4)**.

Разделим угол GEC пополам прямой EH; тогда как GE к EC, так будет и GH к HC, будем также «переставлять» и «присоединять» **(5)**; тогда как вместе взятые GE, EC к GC, так и EC к CH; таким образом, CE к CH имеет отношение больше, чем 571 к 153 **(6)**.

Значит, в квадратах EH имеет к HC отношение, как 349 450 к 23 409, следовательно, в первых степенях имеет отношение, как $591\frac{1}{8}$ к 153. Опять делим пополам угол HEC прямой EF;

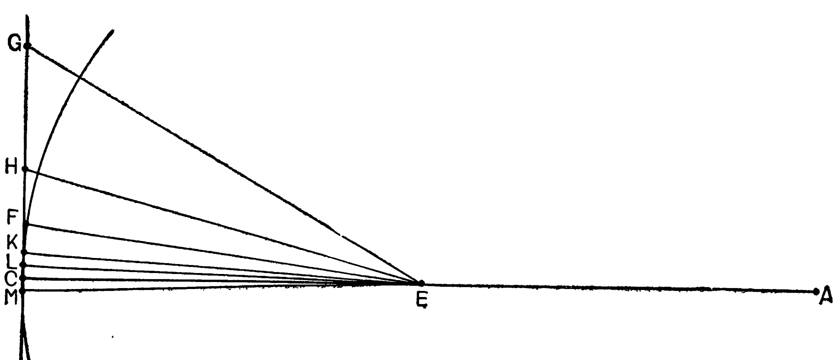


Рис. 22.

тогда на том же основании EC будет иметь к CF большее отношение, чем $1162\frac{1}{8}$ к 153; значит, FE имеет к FC большее отношение, чем $1172\frac{1}{8}$ к 153. Делим пополам еще угол FEC прямой EK; тогда EC имеет к CK большее отношение, чем $2334\frac{1}{4}$ к 153. Значит, EK имеет к CK большее отношение, чем $2339\frac{1}{4}$ к 153. Делим еще пополам угол KEC прямой LE; тогда EC имеет к LC [в первой степени] отношение большее, чем $4673\frac{1}{2}$ к 153. Теперь, так как угол GEC, будучи третьей частью прямого, разделен пополам четыре раза, то угол LEC будет $\frac{1}{48}$ прямого. Отложим от E в другую сторону равный ему угол CEM, тогда угол LEM равен $\frac{1}{24}$ прямого; и значит, прямая LM будет стороной описанного около круга многоугольника, имеющего 96 сторон. Теперь, так как EC, по доказанному, имеет к CL отношение большее, чем $4673\frac{1}{2}$ к 153, и AC вдвое больше CE, а LM вдвое больше CL, то, значит, AC к периметру 96-угольника имеет большее отношение, чем $4673\frac{1}{2}$ к 14 688. И [эти 14 688] будут втрое больше, $\left[\text{чем } 4673\frac{1}{2}\right]$, причем остаются $664\frac{1}{2}$, которые несколько меньше седьмой части $4673\frac{1}{2}$, так что [периметр] многоугольника, описанного около круга, будет более диаметра в три раза с дробью, которая меньше седьмой его части, значит, периметр круга будет и подавно меньше, чем диаметр, взятый три раза с добавлением седьмой части **(7)**.

Пусть будет круг с диаметром AC (рис. 23), и угол BAC составляет третью часть прямого; тогда AB имеет к BC отношение меньшее, чем 1351 к 780, [а AC к CB, как 1560 к 780].

Разделим пополам угол BAC прямой AH. Теперь: так как угол BAH равен HCB, а также и HAC, то и угол HCB равен HAC. Далее, прямой угол AHC является общим; значит, и третий угол HGC равен третьему углу ACH. Тогда треугольник AHC будет равноугольным с треугольником CHG; следовательно, отношение AH к HC равно отношениям CH к HG и AC к CG. Но как AC к CG, так и вместе взятые CA, AB к BC, и, значит, как вместе взятые BA, AC к BC, так и AH к HC. Вследствие этого AH будет иметь к HC меньшее отношение, чем 2911 к 780, а AC к CH меньшее отношение, чем $3013 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ к 780 **(8)**.

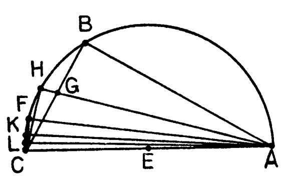


Рис. 23.

Делим пополам угол CAH прямой AF; тогда, вследствие того же, AF будет иметь к FC меньшее отношение, чем $5924\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ к 780 или 1823 к 240, так как каждый [последующий] составляет $\frac{4}{13}$ [предыдущего]; таким образом, AC будет иметь к CF отношение меньшее, чем $1838\frac{9}{11}$ к 240. [Делим] еще пополам угол FAC прямой KA; [тогда] AK имеет к KC меньшее отношение, чем 1007 к 66, так как каждый [последующий] составляет $\frac{11}{40}$ [предыдущего]; значит, AC к KC [имеет меньшее отношение], чем $1009\frac{1}{6}$ к 66. [Делим] еще пополам угол KAC прямой $\angle A$; тогда AL имеет к LC меньшее отношение, чем $2016\frac{1}{6}$ к 66, а AC к CL—меньшее, чем $2017\frac{1}{4}$ к 66.

Значит, [обратно отношение CL к AC больше, чем 66 к $2017\frac{1}{4}$. Но CL есть сторона многоугольника с 96 сторонами;] поэтому периметр рассматриваемого многоугольника имеет к диаметру большее отношение, чем 6336 к $2017\frac{1}{4}$, чем больше $2017\frac{1}{4}$ более чем в три раза с десятью 71-ми долями; следовательно, периметр 96-угольника, вписанного в круг более чем в три и $\frac{10}{71}$ раза больше диаметра, так что окружность будет и подавно больше, чем в три и $\frac{10}{71}$ раза.

Итак, периметр круга будет более чем в три раза больше диаметра с избытком седьмой части, но большим $\frac{10}{71}$ **(9)**.

Примечания. «Измерение круга» Архимеда — первый труд, в котором приближенное вычисление длины окружности было проведено на вполне безупречном теоретическом основании. Сочинение это дошло до нас не полностью. Так, Герон Александрийский (I в. н. э.) в своей «Метрике» писал: «Архимедом в «Измерении круга» доказано, что всякий сектор будет половиной прямоугольника, заключенного между дугой сектора и радиусом того круга, к которому принадлежит сектор» [№ 5, с. 270], а этого предложения в известных нам текстах Архимеда нет. Однако уже в VI в. н. э., как показывают комментарии Евтокия, «Измерение круга» существовало в таком же виде, как сейчас. В отличие от издания № 5 мы заменили здесь греческие буквы латинскими и отказались от некоторых пояснений переводчика.

1. Доказательство 1-го предложения проведено здесь с помощью так называемого метода исчерпывания (о котором см. ч. IV, № 2.)

2. Данное предложение является следствием приближенной формулировки следующего, 3-го предложения; это также свидетельствует о том, что дошедший до нас текст «Измерения круга» не точно соответствует оригинальному.

3. В первоначальном тексте «Измерения круга», вероятно, имелась теорема о пропорциональности длины окружности диаметру. Такое предложение имеется в «Математическом собрании» Паппа [см. № 92, с. 544—545].

4. Так как угол $GEC=30°$, то отношение радиуса круга к половине стороны описанного правильного 6-угольника $\frac{EC}{GC}=\sqrt{3}$. Здесь для отношения $\frac{EG}{GC}$ приведено значение $\frac{306}{153}=2$, а для отношения $\frac{EC}{GC}$ — приближенное значение $\sqrt{3}$, равное $\frac{265}{153}$. Далее (см. прим. 7) Архимед говорит, что отношение $\frac{GE+EC}{GC}$ больше, чем $\frac{571}{153}=\frac{306+265}{153}$, т. е. что $\frac{EC}{GE}>\frac{265}{153}$. Архимед приводит и приближенное значение $\sqrt{3}$ с избытком: для треугольника ABC (рис. 23) $\frac{AB}{BC}=\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$. Таким образом, Архимед знал, что $\sqrt{3}$ находится в границах $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$. По мнению И. Н. Веселовского [№ 5, с. 547], Архимед установил эти границы следующим образом: представляя 3 в виде $\frac{26^2-1}{15^2}$, он получил $\sqrt{3}=\frac{\sqrt{26^2-1}}{15}$. Применяя для вычисления этого корня известное еще в древнем Вавилоне правило $\sqrt{A}=\frac{1}{2}\left(A_0+\frac{A}{A_0}\right)$, где A_0 — приближенное значение $\sqrt{A}$, Архимед мог найти, что

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}.$$

Приближенное значение $\sqrt{3}$ с недостатком Архимед мог вывести, разделив 3 на полученное значение $\sqrt{3}$ с избытком:

$$\frac{26^2-1}{\frac{1}{2}\left(26+\frac{26^2-1}{2}\right)\cdot 15}=\frac{26^2-1}{\left(26-\frac{1}{2\cdot 26}\right)\cdot 15}=\frac{26}{15}\cdot\frac{26-\frac{1}{26}}{26-\frac{1}{2\cdot 26}}=$$

$$=\frac{26}{15}\left(1-\frac{\frac{1}{2\cdot 26}}{26-\frac{1}{2\cdot 26}}\right)=\frac{26}{15}\left(1-\frac{1}{2\cdot 26^2-1}\right)=\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{2\cdot 26-\frac{1}{26}}\right)>$$

$$>\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{2\cdot 26-1}\right)=\frac{1}{15}\left(26-\frac{1}{51}\right)=\frac{1325}{15\cdot 51}=\frac{1325}{765}=\frac{265}{153}.$$

5. «Присоединение отношения» — переход от пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ к пропорции $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; «перестановка отношения» — переход от пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ к пропорции $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

6. Здесь Архимед переходит от пропорции $\frac{GE}{EC}=\frac{GH}{HC}$, имеющей место в силу того, что EH — биссектриса треугольника CEG, к пропорции $\frac{GE+EC}{EC}=\frac{GH+HC}{HC}$, а от нее — к пропорции $\frac{GE+EC}{GH+HC}=\frac{EC}{HC}$, откуда находит, что отношение радиуса круга к половине стороны описанного правильного 12-уголь-

ника $\frac{EC}{HC}=\frac{GE+EC}{GC}>\frac{571}{153}$. Далее следуют аналогичные вычисления и оценки для описания 24-, 48- и 96-угольников.

7. Из неравенства $\frac{EC}{LC}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}$ следует, что отношение диаметра круга к периметру описанного правильного 96-угольника больше $\frac{4673\frac{1}{2}}{96\cdot 153}=\frac{4673\frac{1}{2}}{14\,688}$, вследствие чего отношение «периметра круга» к его диаметру меньше

$$\frac{14\,688}{4673\frac{1}{2}}=3+\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}<3\frac{1}{7}.$$

8. Так как угол $BAC=30^\circ$, то $\frac{AB}{BC}=\sqrt{3}$. Здесь Архимед пользуется упомянутым в прим. 4 приближенным выражением с избытком: $\frac{AB}{BC}=\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$. Далее следуют аналогичные выкладки и оценки для вписанных 12-, 24-, 48- и 96-угольников.

9. Из неравенства $\frac{AC}{CL}<\frac{2017\frac{1}{4}}{66}$ следует, что отношение диаметра круга к периметру вписанного правильного 96-угольника меньше $\frac{2017\frac{1}{4}}{96\cdot 66}=\frac{2017\frac{1}{4}}{6336}$, вследствие чего отношение «периметра круга» к его диаметру больше

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}>3+\frac{10}{71}.$$

Найденные Архимедом границы $3\frac{1}{7}\approx 3{,}142857\ldots$ и $3\frac{10}{71}\approx 3{,}140846\ldots$ соответствуют двум верным десятичным знакам числа π после запятой. Китайский математик V в. н. э. Цзу Чун-чжи указал, что число π содержится между 3,1415926 и 3,1415927, т. е. он нашел 6 верных десятичных знаков числа π, ему же приписывают приближенное значение $\frac{355}{113}$, также дающее 6 верных десятичных знаков числа π. Самаркандский математик XV в. Гияс ад-Дин Джемшид ал-Каши, вычисляя периметры вписанного и описанного правильных многоугольников с $3\cdot 2^{28}=805\,306\,368$ сторонами, нашел значение $\pi\approx\approx 3{,}1415926535897932\,55$, имеющее 16 верных десятичных знаков после запятой. Этот результат был превзойден в XVII в. Л. ван Кёленом, нашедшим 32 верных знака числа π. В 1873 г. У. Шенкс вычислил 708 десятичных знаков числа π, но в 1945 г. было обнаружено, что он ошибся в 520-м знаке. В 1961 г. на электронной вычислительной машине ЭВМ было вычислено 100 625 знаков числа π. Добавим, что в XVIII в. И Г Ламберт доказал иррациональность π, а в 1882 г. Ф. Линдеман доказал его трансцендентность.

4. НАЧАЛЬНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

а. ДРЕВНЕКИТАЙСКИЙ ПРИЕМ ИЗМЕРЕНИЯ ВЫСОТЫ НЕДОСТУПНОГО ПРЕДМЕТА

ИЗ «МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТРАКТАТА О МОРСКОМ ОСТРОВЕ» ЛЮ ХУЭЯ (III в.)

[№ 47, с. 265—266; перевод Э. И. Березкиной.]

Задача 1.

Наблюдают морской остров. Для этого установили пару шестов одинаковой высоты в 3 чжана. Предыдущий [шест] от последующего отделен на 1000 бу (1). Пусть последующий шест вместе с предыдущим находится на одной прямой [с островом]. Если отойти по прямой от предыдущего шеста на 123 бу, то глаз человека, лежащего на земле, будет наблюдать верхний конец шеста совпадающим с вершиной острова. Если же отойти по прямой от последующего шеста на 127 бу, то глаз человека, лежащего [на земле], будет наблюдать верхний конец этого шеста также совпадающим с вершиной острова. Спрашивается, какова высота острова и его расстояние от шеста?

Ответ: высота острова 4 ли 55 бу, расстояние от шеста 102 ли 150 бу (2).

Способ [решения]: взяв высоту шеста, умножь ее на расстояние между шестами, это делимое. Разность [между отступлениями] будет делителем, раздели на нее. К тому, что получится, прибавь высоту шеста, получится высота острова. Чтобы найти расстояние от предыдущего шеста до острова, надо [отступление] от предыдущего шеста умножить на расстояние между шестами, это делимое. Разность между отходами будет делителем, раздели на нее, получишь количество ли, на которое остров удален от шеста (3).

Примечания. 1. Чжан и бу — меры длины, бу примерно равна двойному шагу, чжан $=\frac{5}{3}$ бу.

2. Ли — мера длины, равная 300 бу.

3. Обозначим искомую высоту морского острова через H, искомое расстояние от предыдущего шеста до пика острова — через D, высоту шестов — через h, расстояние между шестами — через d, а «отступления» от предыдущего и последующего шестов, соответственно, через a и b (рис. 24). Получаются две пары подобных прямоугольных треугольников, вертикальные катеты обеих пар этих треугольников равны H и h, горизонтальные катеты первой пары равны $D+a$ и a, а второй пары — $D+d+b$ и b. Из подобия первой

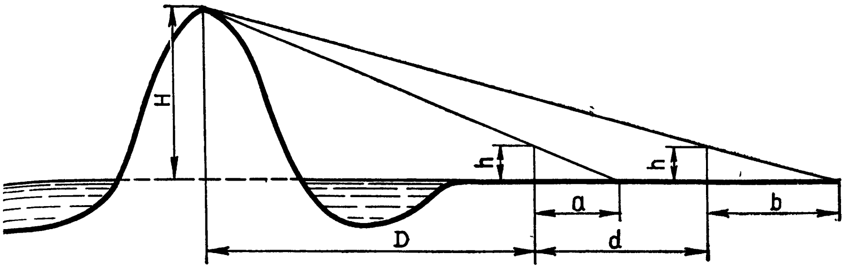


Рис. 24.

пары треугольников следует пропорция $\frac{D+a}{a}=\frac{H}{h}$, из подобия второй пары — пропорция $\frac{D+d+b}{b}=\frac{H}{h}$. Поэтому $\frac{D+a}{a}=\frac{D+d+b}{b}$, откуда

$$D=\frac{da}{b-a}$$

и, на основании первой пропорции,

$$H=\frac{dh}{b-a}+h.$$

В данном случае $h=5$ бу, $d=1000$ бу, $a=123$ бу, $b=$бу, так что $D=$ $=30750$ бу $=102$ ли 150 бу, $H=1255$ бу $=4$ ли 55 бу.

6. ВЫЧИСЛЕНИЯ ТАБЛИЦЫ ХОРД КРУГА

ИЗ ПЕРВОЙ КНИГИ «АЛМАГЕСТА» КЛ. ПТОЛЕМЕЯ
(первая половина II в.)

[№ 94, с. 26—31; перевод И. Н. Веселовского.]

Глава 10. О величинах прямых, содержащихся в круге (1).

Для удобного употребления на практике в дальнейшем мы построим некоторую таблицу, дающую их величины, разделив окружность на 360 отрезков (2); она будет содержать длины прямых, стягивающих эти дуги, причем последние будут возрастать на полградуса, а именно число содержащихся в них частей диаметра, предполагая последний разделенным на 120 частей, ибо это число очень удобно, как выявится из самих вычислений. Сначала мы покажем, каким образом лучше всего при помощи небольшого числа повторяющихся теорем создать удобный и быстрый способ для определения дробной части их величин, чтобы не было никаких сомнений, если бы мы дали только одни величины этих прямых, а также и чтобы при помощи методического их получения на чертежах дать легкий способ их проверки. При числовых выкладках мы вообще будем пользоваться шестидеся-

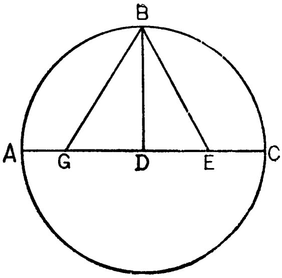


Рис. 25.

теричной системой вследствие неудобства обычных дробей (3); затем, произведя умножение и деление, мы всегда будем придерживаться приблизительных результатов, но так, чтобы отбрасываемая часть ничем существенным на первый взгляд не отличалась от точной величины.

Итак, возьмем сначала полукруг ABC на диаметре ADC с центром в D (рис. 25); из D под прямым углом к AC проведем DB, разделим DC в E пополам и соединим BE; отложим EG, равную EB, и соединим GB; я утверждаю, что GD—сторона десятиугольника, а BG—[сторона] пятиугольника.

Действительно, поскольку прямая линия DC разделена пополам в E и к ней прибавлена некоторая прямая DG, то [прямоугольник] на CG, GD вместе с квадратом на EG будет равен квадрату на EG (4) или на BE, так как EB равна GE. Но квадрату на EB равны вместе взятые квадраты на ED и DB, следовательно, [прямоугольник] на CG, GD вместе с квадратом на DE будет равен вместе взятым квадратам на ED и DB, или после отнятия общего квадрата на ED остающийся [прямоугольник] на CG, GD будет равен квадрату на DB или на DC; следовательно, GC разделена в точке D в крайнем и среднем отношении (5). Поскольку же стороны вписанных в один и тот же круг шестиугольника и десятиугольника, будучи отложены по одной и той же прямой, разделяют ее в крайнем и среднем отношении (6) и CD, являясь радиусом, представляет собой сторону шестиугольника, то DG будет, следовательно, равна стороне десятиугольника (7).

Равным образом, поскольку квадрат на стороне пятиугольника равен вместе взятым квадратам сторон шестиугольника и десятиугольника (8), вписанных в тот же самый круг, и в прямоугольном треугольнике BDG квадрат на BG равен вместе взятым квадратам на BD—стороне шестиугольника и DG—стороне десятиугольника, то BG будет, следовательно, стороной пятиугольника.

Теперь если мы положим, как я уже сказал, диаметр круга равным 120 частям, то на основании вышеизложенного сторона DE, являясь половиной радиуса, будет равна 30 частям, а ее квадрат—900; далее, BD, являясь радиусом, равна 60 частям, а ее квадрат—3600, квадрат же на EB или на EG равен 4500; следовательно, линейно EG будет равна приблизительно 67; 4,55 частям (9), а остаток DG равен 37; 4,55 таким же частям; следовательно, сторона десятиугольника, стягивающая дугу, равную 36 таким частям, каких в окружности будет 360, содержит 37; 4,55 таких частей, каких в диаметре будет 120. Далее, поскольку DG составляет 37; 4,55 частей, то квадрат на ней будет 1375; 4,15, а квадрат на DB—3600 таких же частей, то, сложив, получаем квадрат на BG, равный 4975; 4,15 и, следовательно, линейно BG будет равна приблизительно 70; 32,3 частям, и, значит, сторона пятиугольника, стягивающая 72 градуса (если всю окружность принять за 360), будет равна 70; 32,3 таким частям, каких в диаметре будет 120. Отсюда также ясно, что сторона шестиугольника, стягивающая 60 градусов и равная радиусу, будет содержать 60 частей. Точно так же, поскольку сторона квадрата, стягивающая девяносто градусов, в квадратах будет вдвое больше радиуса, а сторона треугольника, стягивающая 120 градусов, в квадратах будет втрое его больше, и квадрат радиуса равен 3600 частям, отсюда получится, что квадрат на стороне квадрата будет 7200, а на стороне треугольника 10 800 частей, таким образом, линейно прямая, стягивающая девяносто градусов, составит приблизительно 84; 51,10 таких частей, каких в диаметре 120, а стягивающая 120 градусов будет равна 103; 55,23 таким частям.

Вот эти прямые будем брать уже готовыми и в качестве основных; отсюда будет ясно, что если эти прямые даны, то можно будет считать данными и прямые, стягивающие дуги, дополняющие их до полуокружности, вследствие того что, складывая их квадраты, мы будем получать квадрат на диаметре; например, поскольку прямая, соответствующая 36 градусам, оказалась равной 37; 4,55 частям, а квадрат на ней — 1375; 4,15 и квадрат на диаметре — 14400, то квадрат прямой, стягивающей остающиеся до полуокружности 144 градуса, после вычитания получится равным 13024; 55,45, а сама эта прямая — приблизительно 114; 7,87 частям; аналогично получаются и остальные.

Каким же образом на основании этих определяется и каждая из остальных, мы покажем ниже, предложив сначала небольшую лемму, в высшей степени полезную для предстоящего дела.

Пусть будет круг со вписанным в него каким-нибудь четырехугольником $ABCD$ (рис. 26); проведем в нем соединительные [линии] AC и BD; требуется доказать, что [прямоугольник] на AC, BD равен вместе взятым [прямоугольникам] на AB, DC и на AD, BC (**10**).

Построим угол ABE, равный DBC; если мы прибавим к ним общий угол EBD, то угол ABD будет равен углу EBC; но угол

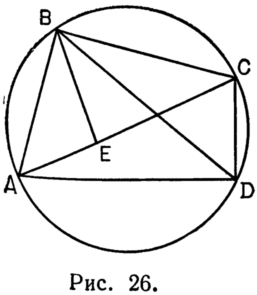


Рис. 26.

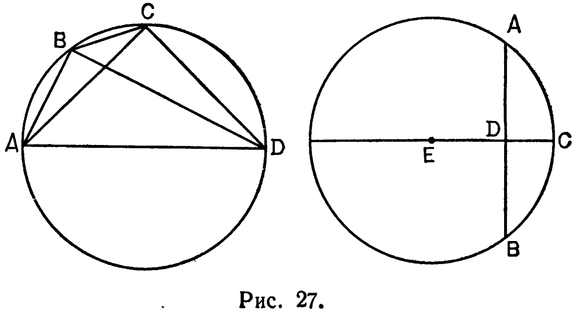


Рис. 27.

BDA будет равен углу *BCE*, так как они стягивают одну и ту же дугу; следовательно, треугольник *ABD* будет равноугольным с *BCE*; таким образом, имеет место пропорция: *BC* относится к *CE*, как *BD* к *DA*. Следовательно, [прямоугольник] на *BC*, *AD* равен [прямоугольнику] на *BD*, *CE*. Далее, так как угол *ABE* равен углу *DBC*, а [угол] *BAE* равен [углу] *BDC*, то треугольник *ABE* — равноугольный, поэтому имеет место пропорция: *BA* относится к *AE*, как *BD* к *DC*, поэтому [прямоугольник] на *BA*, *DC* равен [прямоугольнику] на *BD*, *AC*. Поэтому весь [прямоугольник] на *AC*, *BD* равен вместе взятым [прямоугольникам] на *AB*, *DC* и *AD*, *BC*, что и требовалось доказать.

Изложив это, возьмем полукруг *ABCD* на диаметре *AD* (рис. 27), из точки *A* проведем две прямые *AB*, *AC*, и пусть величина каждой из них будет дана в частях, в которых диаметр — 120; затем проведем соединительную [линию] *BC*; я утверждаю, что последняя тоже будет данной.

Действительно, проведем соединительные [линии] *BD* и *CD*; тогда, очевидно, и они будут данными, вследствие того что каждая из них дополняет до полуокружности. Теперь поскольку в круге имеется четырехугольник *ABCD*, то, следовательно, [прямоугольник] на *AB*, *CD* вместе с [прямоугольником] *AD*, *BC* равен [прямоугольнику] на *AC*, *BD*.

Но [прямоугольник] на *AC*, *BD* дан; дан также и [прямоугольник] на *AD*, *CD*; следовательно, будет данным остающийся [прямоугольник] на *AD*, *BC*; но *AD* — диаметр, следовательно, дана и прямая *BC*. Таким образом, нам стало ясным, что если даны две дуги и стягивающие их прямые, то будет дана и прямая, стягивающая дугу, равную разности двух заданных дуг (**11**). И ясно, что при помощи этой теоремы мы сможем записать [значения] для немалого числа других прямых при помощи разностей заданных основных дуг; таким образом, имея величины прямых, стягивающих 60 и 72 градуса, мы найдем прямую, стягивающую дугу в 12 градусов (**12**).

Примечания. «Алмагест» — употребительное с давних пор название «Математической системы» (или «построения») Клавдия Птолемея, возникшее из названия, которое этот труд получил в средневековых арабских переводах и изложениях. В 13 книгах «Алмагеста» изложена геоцентрическая теория видимых движений Солнца, Луны, планет и звезд. Эту теорию Птолемей относил к области математики, исходя из предложенного Аристотелем деления наук на физические, математические и теологические. Значительное место в «Алмагесте» занимает «тригонометрия хорд» как основная вспомогательная часть астрономии.

1. «Прямые, соединяющиеся в круге», — хорды, вписанные в круг. Несмотря на то что слово «хорда» греческого происхождения (χορδή — «струна»), оно не применялось в античной математике и появилось в форме chorda только в средневековых латинских переводах с арабского: словом chorda было переведено арабское ватар, буквально «тетива», словом arcus было переведено арабское название дуги каус, буквально «лук», словом sagitta было переведено арабское название сахм — «стрела» для перпендикуляра, опущенного из середины дуги на стягивающую ее хорду (на рисунке 25 *BD* ? — «стрела» дуги и хорды *AC* ?).

Хорды у Птолемея играли роль наших линий синуса: хорда дуги α равна удвоенной линии синуса дуги $\frac{\alpha}{2}$.

2. 360 «отрезков» окружности — градусы. Деление окружности на градусы, минуты и секунды было заимствовано Птолемеем у вавилонских астрономов. Птолемей называл градус μοῖρα — «часть, доля», минуту πρῶτα λεπτα — «первая малая» и секунду δεύτερα λεπτά — «вторая малая»; наши названия «градус», «минута», «секунда» — от латинских переводов gradus, [prima] minuta, secunda [minuta] соответствующих арабских терминов: дараджа — «ступень», дакӣка — «уменьшенная», са̄нийа — «вторая» (уменьшенная). Эту же терминологию Птолемей употреблял для шестидесятеричных долей радиуса.

3. Вслед за вавилонскими астрономами Птолемей пользовался шестидесятеричными дробями, причем записывал все целые числа в греческой буквенной нумерации; отсутствие каких-либо разрядов он отмечал знаком $\bar{o}$ от греческого слова οὐδέν — «ничто», откуда, быть может, впоследствии произошел знак 0.

4. Это — 6-е предложение II книги «Начал» Евклида.

5. Согласно 3-му определению VI книги «Начал» Евклида отрезок CG называется разделенным точкой D в крайнем и среднем отношении, если $\frac{CG}{CD}=\frac{CD}{GD}$. Такое деление отрезка часто называют, начиная с XIX в., золотым сечением.

6. Это — 9-е предложение XIII книги «Начал».

7. Это — следствие 15-го предложения IV книги «Начал».

8. Это — 10-е предложение XIII книги «Начал».

9. То есть $67\,\frac{4}{60}\,\frac{55}{60^2}$ частям радиуса или же 67 частям 4 минутам и 55 секундам.

10. Эта «теорема Птолемея» (известная, впрочем, еще Архимеду) в настоящее время формулируется так: в четырехугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений пар противоположных сторон.

11. Здесь с помощью теоремы Птолемея показано, как по хордам дуг AB и AC находится хорда их разности, т. е. дуги BC, именно $BC=\frac{AC\cdot BD-AB\cdot CD}{AD}$. Введя центральные углы 2α, опирающийся на хорду AB, и 2β, опирающийся на хорду AC, читатель легко выведет, что последнему равенству соответствует тригонометрическая формула

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\beta.$$

12. Далее, с помощью теоремы Птолемея показано, как по хорде дуги находится хорда ее половины, а по хордам двух дуг — хорда их суммы.

С помощью этих предложений по хордам 72° и 60°, т. е. по сторонам вписанных правильных пятиугольника и шестиугольника, находится хорда 12°, а отсюда — хорды 6°, 3°, $1\frac{1}{2}^\circ$ и $\frac{3}{4}^\circ$. Затем по хордам $\frac{3}{4}^\circ$ и $1\frac{1}{2}^\circ$, равным соответственно 0, 34,15 и 1; 34,15, Птолемей вычисляет хорду 1° на основании следующей теоремы: в данном круге отношение большей из двух неравных хорд к меньшей меньше отношения стягиваемых ими дуг. Таким образом,

$$\frac{\text{хорда } 1^\circ}{\text{хорда } \frac{3}{4}^\circ}<\frac{4}{3} \quad\text{и}\quad \frac{\text{хорда } 1\frac{1}{2}^\circ}{\text{хорда } 1^\circ}<\frac{3}{2},$$

так что $\frac{2}{3}\cdot 1;\ 34,\ 15<\text{хорда } 1^\circ<\frac{4}{3}\cdot 0;\ 34;\ 15$ или же

$$1;\ 2,\ 50<\text{хорда } 1^\circ<1;\ 2,\ 5,\ 40$$

и в качестве значения хорды 1° принимается 1; 2,50. После этого вычисляется таблица хорд до 180° через $\frac{1^\circ}{2}$, равносильная нашей таблице синусов через 1°.

Приведем пять первых строк таблицы Птолемея:

Таблица прямых в круге

Дуги	Прямые	Шестидесятые доли
1/2	0 31 25	0 1 2 50
1	1 2 50	0 1 2 50
1 1/2	1 34 15	0 1 2 50
2	2 5 40	0 1 2 50
2 1/2	2 37 4	0 1 2 48

В первом столбце таблицы приведены дуги через $\frac{1^\circ}{2}$, во втором столбце — хорды этих дуг в долях радиуса (до секунд), в третьем столбце — разности (до терций), служащие для вычисления промежуточных значений хорд с помощью линейного интерполирования.

Для оценки точности таблиц Птолемея приведем первые пять строк таблицы синусов из «Канона Мас'уда» ал-Бируни (1036) [№ 66, стр. 308] для 15′, 30′, 45′, 1° и 1°15′, а также удвоенные значения ее синусов, т. е. хорд 30′, 1°, 1 1/2°, 2° и 2 1/2° (радиус принят равным 1):

Дуги		Синусы				Удвоенные синусы			
Градусы	Минуты	Минуты	Секунды	Терции	Кварты	Минуты	Секунды	Терции	Кварты
0	15	0	15	42	28	0	31	24	56
0	30	0	31	24	56	1	2	49	52
0	45	0	47	7	21	1	34	14	32
1	0	1	2	49	23	2	5	39	26
1	15	1	18	32	1	2	37	4	2

Как видно, значения хорд Птолемея совпадают с правильно округленными значениями удвоенных синусов, вычисленных ал-Бируни. Со временем точность тригонометрических таблиц возрастала: в «Астрономических таблицах Улугбека» (XV в.) таблицы синусов вычислены с 6 шестидесятеричными знаками и не через 15′, как у ал-Бируни, а через 1′.

в. СОЛНЕЧНЫЕ ЧАСЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ И СИНУСОВ

ИЗ «КНИГИ О ЧАСОВЫХ ПРИБОРАХ, НАЗЫВАЕМЫХ СОЛНЕЧНЫМИ ЧАСАМИ» САБИТА ИБН КОРРЫ (вторая половина IX в.)

[№ 99, с. 14—18; перевод А. Абдурахманова и Л. М. Карповой.]

Это — часовые приборы, которые вычерчивают линии часов на некоторой известной плоскости. На плоскости этого прибора устанавливается гномон, конец тени которого падает на нее (1). Тень указывает часы истекшей части дня. Большинство людей называют их солнечными часами. Пользование ими различно в соответствии с различием плоскостей, на которых установлены эти приборы. Если мы хотим начертить линии часов на желательной нам известной плоскости, то мы знаем несколько видов этих плоскостей и приборов, а именно семь видов. Первый из них расположен в плоскости горизонта, второй — в плоскости меридиана (2), третий — в плоскости круга, пересекающего горизонт и меридиан под прямым углом и идущего с востока на запад, четвертый — в плоскости круга, пересекающего упомянутый круг, идущий с востока на запад под прямым углом и наклоненного от меридиана к востоку и от круга горизонта к западу, пятый — в плоскости круга, пересекающего плоскость меридиана под прямым углом и наклоненного от упомянутого круга, идущего с востока на запад, к северу и от круга горизонта к югу, шестой — в плоскости круга, пересекающего плоскость горизонта под прямым углом и наклоненного от меридиана и от круга, идущего с востока на запад, т. е. круга высоты (3), седьмой — в плоскости круга, не пересекающего под прямым углом ни одну из трех упомянутых нами плоскостей — плоскости горизонта, полуденного круга [и круга], идущего с востока на запад. Мы опишем вычисление всех этих видов, их построение после того, как предпошлем некоторые общие сведения, необходимые для того, чтобы не повторять их больше.

. . . .

(5). *О вычислении и построении первого вида солнечных часов, т. е. тех, которые расположены в плоскости круга горизонта*

Если солнечные часы расположены в плоскости горизонта, то следует отметить часы немного в начале и немного в конце дня, не проводя на них линий [целиком]. Это необходимо для определения тени и азимута (4), для часов или для часов и их частей, будь то для сезонных или равноденственных (5). Если сможешь, проведи на солнечных часах линии [целиком], это надо сделать [прежде всего] для начала Козерога и для начала Рака.

Между ними линии часов проводятся сначала прямолинейно. Это делается и для других знаков зодиака (6). Более правильные линии часов проводятся не прямолинейно (7).

(6). *Об определении тени и азимута, в которых нуждаются в этом классе солнечных часов*

Возьми расстояние между Солнцем и серединой неба (8) по малому кругу в то время, какое тебе угодно, в часах и в их частях. Возьми его обращенный синус (9), умножь его на косинус склонения Солнца (10) в градусах и раздели произведение на наибольший синус, частное умножь на косинус широты местности, произведение раздели на наибольший синус (11) и запомни частное. Далее вычти это из синуса высоты Солнца во время полудня и возьми дугу остатка. Это и есть высота (12).

Мы можем определить высоту другим, родственным способом, общим для всякого часа. Возьми дневное расстояние Солнца от середины неба и перейди к его обращенному синусу, вычти его из обращенного синуса половины дневной дуги, возьми синус высоты Солнца во время полудня и раздели его на обращенный синус половины дуги дня, частное умножь на разность между обращенным синусом расстояния Солнца от середины неба и между обращенным синусом половины дуги дня, возьми дугу того, что получилось. Это — высота Солнца для этого времени (13).

Если ты определил высоту любым из этих двух способов, которым ты хочешь, то определи ее тень так, как мы упомянули раньше.

Если ты хочешь узнать азимут, то возьми синус расстояния Солнца от середины неба по малому кругу, умножь его на косинус склонения Солнца в градусах, произведение раздели на косинус высоты. Возьми дугу частного, это — азимут в южном или в северном направлении (14).

. . . .

(8). *О вычислении частей длины и ширины, которыми пользуются при упомянутом построении во всякое время*

Определи азимут и тень для этого времени так, как в предыдущих главах. Далее возьми дугу азимута тени, если она северная, то в северном направлении, а если она южная, то в южном направлении. Возьми ее синус и синус дополнения до четверти круга и умножь каждый из них на тень в это время. Каждое из этих произведений раздели на наибольший синус. Первое частное — части длины в частях гномона, второе частное — части ширины в частях гномона (15). Части длины начинаются на солнечных часах на полуденной линии, которая проходит через основание, и идут в направлении востока и запада — до полудня — к востоку, а после полудня — к западу.

Части ширины начинаются на солнечных часах на линии, проходящей через основание гномона и пересекающей полуденную линию под прямым углом в направлении севера или юга, если азимут тени северный, то к северу, а если южный, то — к югу. Этим способом узнаешь части длины, изображающие время на солнечных часах, их ширину и положение гномона на них. Так же определится длина и ширина солнечных часов в начале и в конце линий часов, проведенных на них, это также вычисляется по гномону.

Примечания. 1. Солнечные часы — прибор, состоящий из доски, обычно мраморной или металлической, и укрепленного на ней гномона (миќйāс, буквально «измеритель»; греческое слово γνώμων означает «указатель», а также сами солнечные часы).

2. Меридиан (от meridianus — «полуденный») — большой круг небесной сферы, проходящий через зенит и полюсы мира; Солнце пересекает этот круг над горизонтом в полдень, поэтому плоскость меридиана пересекает плоскость горизонта в направлении север—юг.

3. «Круги высоты» — вертикалы, здесь имеется в виду вертикал, плоскость которого пересекает плоскость горизонта в направлении восток—запад.

4. Азимут (ас-самт — «направление», слово «азимут» происходит от множественного числа этого слова ас-сумӯт) — угол, образуемый направлением на горизонтальной плоскости с направлением плоскости меридиана. Конец тени гномона во время суточного движения Солнца описывает на плоскости солнечных часов коническое сечение, являющееся проекцией суточного круга Солнца на небесной сфере из конца гномона. Сабит ибн Корра определяет положение конца тени гномона на плоскости солнечных часов двумя величинами — «тенью», т. е. длиной тени гномона, и азимутом, т. е. углом между тенью гномона и тенью гномона в полдень; эти две величины по существу представляют собой полярные координаты точки на плоскости солнечных часов.

5. На средневековом Востоке пользовались двумя видами часов — «равноденственными», т. е. астрономическими, равными $^1/_{24}$ суток, и «сезонными», равными $^1/_{12}$ светлого или темного времени суток. Сезонные часы совпадают с равноденственными в дни весеннего и осеннего равноденствий. Как в гражданской, так и в религиозной жизни применялись сезонные часы; в частности, по ним устанавливалось время молитв. Солнечные часы обычно показывали время в сезонных часах; для этого точки конических сечений, пробегаемых концом тени гномона в различные дни, соответствующие одному и тому же сезонному часу, соединялись линиями, так называемыми линиями часов.

6. Знаки зодиака — двенадцатые части эклиптики, проходимые Солнцем в течение месяца. Знаки зодиака носят названия созвездий, расположенных вдоль эклиптики. В день весеннего равноденствия Солнце вступает в знак Овна, через месяц — в знак Тельца, еще через месяц — в знак Близнецов, в день летнего солнцестояния — в знак Рака, затем — в знаки Льва и Девы, в день осеннего равноденствия — в знак Весов, потом — в знаки Скорпиона и Стрельца, в день зимнего солнцестояния — в знак Козерога, после чего — в знаки Водолея и Рыб. Конические сечения, пробегаемые концом тени гномона, заполняют некоторую область на плоскости солнечных часов, причем на границах этой области — линии, описываемые концом тени гномона в дни летнего и зимнего солнцестояний (дни начал Рака и Козерога), а в середине — линия, описываемая концом тени гномона в дни весеннего и осеннего равноденствий (дни начал Овна и Весов), последняя линия близка к прямой, так как в эти дни видимое суточное движение Солнца происходит по небесному экватору.

7. Приближенный способ построения линий часов, рекомендуемый Сабитом ибн Коррой, состоит в том, что отмечаются точки крайних конических

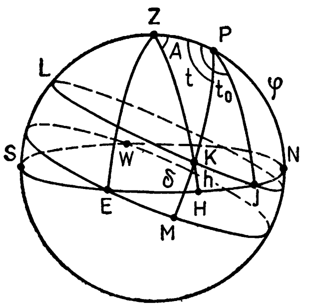


Рис. 28.

сечений, описываемых концом тени гномона, соответствующие 1,2 и т. д. солнечным часам, и точки, соответствующие одному и тому же часу, соединяются прямыми линиями. При более точном построении, когда точки, соответствующие 1,2 и т. д. часам, отмечаются также на конических сечениях для начал других знаков зодиака, эти точки лежат не на прямых, а на кривых линиях.

8. «Середина неба» — небесный меридиан над горизонтом.

9. Терминология современной тригонометрии восходит к индийским математикам, которые не позднее середины первого тысячелетия перешли от известной им «тригонометрии хорд» (см. ч. III, п. 4б) к применению линий синуса, косинуса и обращенного синуса. Арабский термин для линии синуса «джӣб» возник при транслитерации санскритского джӣва — «тетива». Этим словом индийцы обозначали сперва хорду, называя линию синуса «полутетивой» — ардха-джӣва. Затем слово ардха было отброшено и «джива» стало названием линии синуса. Арабское слово «джӣб» пишется так же, как «джайб» — «выпуклость, пазуха, карман», и иногда произносится таким образом; при переводе арабских сочинений на латинский язык в XII в. термин «джайб» был передан словом sinus, имеющим то же значение. Санскритское «котиджива», синус остатка (до 90°), получило в арабской литературе название «джиб тамāм», а в латинских средневековых трудах — sinus complementi — синус дополнения, что в начале XVII в. стали сокращенно писать cosinus. Наконец, «уткрамаджива» означало у индийцев разность между радиусом и линией косинуса, по-арабски «джӣб ма‘кӯс», обращенный синус, латинское sinus versus.

10. Склонение Солнца — сферическое расстояние Солнца от небесного экватора.

11. «Наибольший синус» (или «полный синус», в Западной Европе — sinus totus) — радиус круга.

12. Здесь решается задача определения высоты h Солнца, т. е. его сферического расстояния от круга горизонта, по его склонению δ широте φ местности и часовому углу t, т. е. расстоянию Солнца по его суточному кругу от меридиана; часовой угол пропорционален времени, вследствие чего его можно измерять как в градусах и их долях, так и в часах и их долях; в настоящее время часовой угол измеряют в часах, но в средние века его измеряли в градусах небесного экватора и его параллелей, назывались, впрочем, «временами». На рисунке 28 изображен небесный экватор EMW со своим полюсом («полюсом мира») P, круг горизонта $ESWN$ и зенит Z, небесный меридиан ZLS, дуги больших кругов небесной сферы ZKH и PKM и суточная параллель Солнца KL. Искомая высота L равна дуге KH, а сторона ZK сферического треугольника PZK равна $90^\circ - h$. Склонение δ равно дуге KM, а сторона PK сферического треугольника PZK равна $90^\circ - \delta$. Сферическое расстояние ZP между полюсом мира и зенитом равно углу между небесным экватором и горизонтом, т. е. дополнению широты φ местности до 90°. Часовой угол t равен углу ZPK. Высота Солнца в полдень (т. е. его высота в меридиане) равна дуге SL; так как дуга PL равна дуге PK, а $SZ = 90^\circ$, дуга SL равна $SZ + ZP - PL = 90^\circ - \varphi + \delta$. Поэтому правило Сабита ибн Корры можно записать в виде

$$\sin h = \sin (90^\circ - \varphi + \delta) - \sin \operatorname{vers} t \cos \delta \cos \varphi;$$

заменяя $\sin \operatorname{vers} t$ через $1 - \cos t$, а $\sin (90^\circ - \varphi + \delta)$ — через $\cos (\varphi - \delta) = \cos\varphi \cdot \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta$, мы можем переписать это правило в виде

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cos t. \quad (1)$$

Если мы обозначим $90°-\varphi=\alpha$, $90°-\delta=\beta$ и $90°-h=\gamma$, эту формулу можно записать в виде

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos t,$$

т. е. в виде сферической теоремы косинусов для сферического треугольника PZK.

Доказательство правила определения высоты Солнца по его склонению, широте местности и часовому углу, равносильного правилу (1), т. е. сферической теореме косинусов, впервые встречается в «Каноне Мас‘уда» ал-Бируни (1036). Доказательство сферической теоремы косинусов как чисто математической теоремы впервые дал И. Региомонтан в сочинении «О треугольниках всех видов», написанном в 1464 г. с чертежом, весьма близким к нашему рисунку, откуда видно, что эта теорема была получена Региомонтаном, исходя из той же задачи, известной ему по астрономическим таблицам ал-Баттани, младшего современника ибн Корры, находившегося под сильным его влиянием. Происхождение сферической теоремы косинусов от задачи, изложенной ал-Баттани, было хорошо известно европейским ученым, которые часто называли эту теорему «теоремой Альбатегния».

13. «Дневная дуга» — часть суточного круга Солнца KL, находящаяся над горизонтом. Если I — одна из точек пересечения этого круга с горизонтом (рис. 28), то половина дневной дуги — дуга $IK\alpha$. Эта дуга измеряется углом $\alpha PI=t_0$, который можно найти из сферического треугольника LPI, где сторона LP равна $90°-\varphi$, сторона PI равна $90°-\delta$, а сторона LI равна $90°$. В силу сферической теоремы синусов

$$\cos 90°=0=\sin\varphi\cdot\sin\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t_0.$$

Поэтому косинус угла t_0 равен произведению $\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta$, что равносильно соотношению

$$\sin\operatorname{vers} t_0=1+\cos t_0=1+\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta. \tag{2}$$

Правило Сабита ибн Корры можно записать в виде

$$\sin h=(\sin\operatorname{vers} t_0-\sin\operatorname{vers} t)\,\frac{\sin(90°-\varphi+\delta)}{\sin\operatorname{vers} t_0},$$

что в силу (2) можно переписать в виде

$$\sin h=(\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta+\cos t)\,\frac{\cos(\varphi-\delta)}{1+\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta}=$$
$$=(\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta+\cos t)\,\frac{\cos\varphi\cdot\cos\delta+\sin\varphi\cdot\sin\delta}{\cos\varphi\cdot\cos\delta+\sin\varphi\cdot\sin\delta}\cos\varphi\cdot\cos\delta=$$
$$=(\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta+\cos t)\cos\varphi\cdot\cos\delta,$$

т. е. в виде формулы (1).

14. Здесь решается задача определения азимута Солнца, который вместе с высотой Солнца составляет систему сферических координат, определяющих положение Солнца на небесной сфере (см. п. 5 в, прим. 1). Азимут A Солнца здесь определяется по его часовому углу t, склонению δ и высоте h. На рисунке 28 азимут A равен углу PZK. Правило Сабита ибн Корры можно записать в виде

$$\frac{\sin A}{\cos\delta}=\frac{\sin t}{\cos h}.$$

Так как $\delta=KM=90°-PK$, а $h=KH=90°-ZK$, это правило можно, введя прежние обозначения $90°-\delta=\beta$ и $90°-h=\gamma$, переписать в виде

$$\frac{\sin A}{\sin\beta}=\frac{\sin t}{\sin\gamma},$$

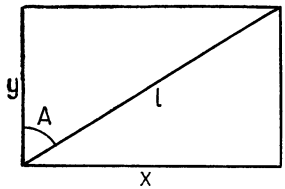


Рис. 29.

т. е. в виде сферической теоремы синусов для сферического треугольника PLK.

Как математическая теорема сферическая теорема синусов была выделена и доказана в конце X в. Абу Насром ибн Ираком, учителем ал-Бируни, ее доказательство приведено в «Каноне Мас'уда» ал-Бируни.

15. Здесь Сабит ибн Корра определяет положение конца тени гномона на плоскости солнечных часов не полярными координатами — длиной тени и азимутом тени, а прямоугольными координатами, которые он называет «частями длины» и «частями ширины». Заметим, что термины «длина» (тӯл) и «ширина» ('арḍ) совпадают с географическими терминами «долгота» и «широта». Термин «части» (аджза̄), как и птолемеевский термин μοῖραι (см. п. 46, прим. 2), означает единицы измерения как прямых линий, так и дуг кругов — градусы дуг. Сабит ибн Корра приводит правило перехода от полярных координат l и A к прямоугольным координатам x и y (рис. 29), которое можно выразить формулами

$$x = l \cdot \sin A, \quad y = l \cdot \sin (90^\circ - A),$$

т. е.

$$x = l \sin A, \quad y = l \cdot \cos A.$$

г. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ВЫСОТЫ НЕДОСТУПНОГО ПРЕДМЕТА

ИЗ «КНИГИ ВРАЗУМЛЕНИЯ НАЧАТКАМ НАУКИ ЗВЕЗД» АЛ-БИРУНИ (1029)

[№ 67, с. 209; перевод Н. Д. Сергеевой.]

346. Определение высоты минарета или горы, основания которых недоступны. Остановись на месте, установи алидаду и подними ее на твою [высоту]. Смотри через отверстия обоих диоптров на искомую вершину до тех пор, пока не увидишь ее, как при определении высоты светил **(1)**. Затем посмотри, на скольких пальцах тени **(2)** находится конец алидады, это — первая тень. Затем передвинься вперед или назад до тех пор, пока не найдешь на земле длину, подобную высоте этой вершины. Если ты перемещался по ровной земле в направлении горы или минарета, уменьши тень на один палец, если ты подходишь к ним, или увеличь ее на один палец, если отходишь от них, увидя вершину через отверстия обоих диоптров. Затем измерь

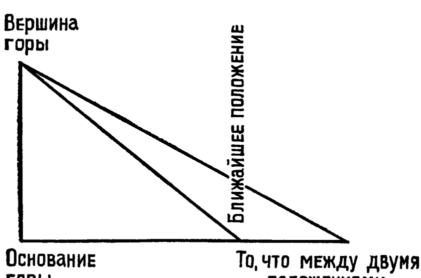


Рис. 30.

то, что между двумя положениями, и умножь это на двенадцать, получится искомая высота (рис. 30) (3).

Если умножишь найденную длину на первую тень, получишь то, что между первым положением и основанием той вершины, высоту которой ты хочешь найти.

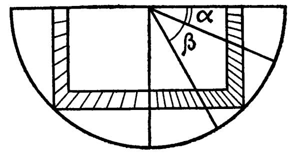


Рис. 31.

Примечания. 1. Об определении высоты светил с помощью астролябии [см. п. 5в, прим. 1].

2. «Тень», точнее, «плоская тень» (зилл мустав), — линия котангенса; линия тангенса называлась «обращенной тенью» (зилл ма'кӯс). Такие названия объясняются тем, что эти линии, появляющиеся в арабских сочинениях уже в первой половине IX в., рассматривались как тени соответственно вертикального гномона на горизонтальной плоскости и горизонтального гномона на вертикальной плоскости. Тень измерялась в долях гномона, который обычно делился на 12 «пальцев» или на 7 «ступней». Здесь имеется в виду определение линий тангенсов и котангенсов дуг с помощью «тангенс-квадрантов» астролябий, обычно помещаемых на двух нижних квадрантах обратной стороны астролябии. В этих квадрантах помещались два вписанных в них квадрата, примыкающих к вертикальному и горизонтальному диаметрам диска астролябии; другие две стороны каждого из этих квадратов делились на 7 «ступней» и 12 «пальцев» (рис. 31). Для определения тангенса дуги α, меньшей 45°, или котангенса дуги β, большей 45°, алидада устанавливалась так, что ее острие отсекало на ободе астролябии дугу α или β от горизонтального диаметра, тогда алидада пересекала вертикальную сторону квадрата в точке, указывающей число «пальцев» или «ступней» «обращенной тени» или горизонтальную сторону квадрата в точке, указывающей на число «пальцев» или «ступней» «плоской тени». «Обращенная тень» в пальцах и ступнях — соответственно $12\operatorname{tg}\alpha$ и $7\operatorname{tg}\beta$, «плоская тень» в пальцах и ступнях — соответственно $12\operatorname{ctg}\beta$ и $7\operatorname{ctg}\beta$.

В Западной Европе начиная с XII в. для обеих теней применялись латинские переводы арабских терминов: umbra или umbra extensa и umbra versa и некоторые варианты. Слово tangens — касательная ввел Т. Финк (1583); слово cotangens, как и косинус, возникло и начале XVII в.

3. Если мы обозначим высоту горы через h, расстояние между ближайшим положением и горой — через a, расстояние между двумя положениями — через d, а углы, под которыми видна гора из первого и второго положений, соответственно через α и β, то из треугольников, изображенных на рисунке 30, мы найдем, что $\frac{a}{h}=\operatorname{ctg}\alpha$, $\frac{a+d}{h}=\operatorname{ctg}\beta$, откуда

$$h=\frac{d}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}, \quad a=h\operatorname{ctg}\alpha.$$

Но углы α и β связаны тем условием, что разность их плоских теней равна 1 «пальцу», т. е. $12\operatorname{ctg}\beta-12\operatorname{ctg}\alpha=1$, следовательно, как у ал-Бируни,

$$h=12d; \quad a=d\cdot 12\operatorname{ctg}\alpha.$$

д. ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ИЗ «ВОСЬМОЙ КНИГИ ОТВЕТОВ НА РАЗЛИЧНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ» ФР. ВИЕТА (1593)

[№ 101, с. 350—354; перевод П. С. Юшкевича.]

IV. Если в каком-либо плоском треугольнике даны углы, то в столбцах канона можно найти и стороны его **(1)**.

Действительно, стороны пропорциональны синусам [углов], которыми они стягиваются **(2)**.

Иначе. Стороны треугольника пропорциональны суммам тангенсов углов, дополнительных к половинам углов, которые прилежат к ним **(3)**.

Иначе. Основание треугольника пропорционально сумме тангенсов половин прилежащих к нему углов, а каждое боковое ребро подобно разности между тангенсом угла, дополнительного к половине угла при вершине, и тангенсом половины прилежащего к нему у основания угла **(4)**.

Иначе. Боковые ребра пропорциональны секансам углов, дополнительных к углам основания, к которым они прилежат. Основание же пропорционально разности или сумме тангенсов углов, дополнительных к этим углам: сумме в том случае, если оба угла при основании предполагаются острыми, разности, если один из них тупой **(5)**.

V. *Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны стороны, то можно найти и углы.*

Действительно, как двойной прямоугольник из боковых ребер относится к разности между суммой квадратов ребер и квадратом основания, так полный синус относится к синусу угла, дополнительного к углу при вершине **(6)**.

При этом если квадрат основания меньше суммы квадратов боковых ребер, то угол при вершине острый, если же больше, то тупой. Если же он равен ей, то угол при вершине прямой.

. . . .

VI. *Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны боковые ребра и угол при вершине, то можно найти углы при основании.*

Действительно, как сумма боковых ребер [относится] к их разности, так [относится] тангенс полусуммы углов при основании к тангенсу их полуразности **(7)**.

Иначе... Действительно, первое боковое ребро относится ко второму ребру, как секанс угла, дополнительного к углу при вершине, относится к некоторому другому отрезку; сумма или разность этого отрезка и тангенса угла, дополнительного к углу при вершине, равна тангенсу угла, дополнительного к углу, стягиваемому первым ребром **(8)**. Случай суммы [имеет место], когда угол при вершине принимается тупым, случай разности,— если он острый. В том случае, когда тангенс угла, дополнительного к углу при вершине, меньше указанного отрезка, угол, стягиваемый первым боковым ребром, острый; если же он больше его,— тупой, а если равен ему, то прямой.

VII. *Если в каком-нибудь плоском треугольнике даны боковые ребра и угол при основании, то можно найти также другой угол при основании.*

Действительно, если считать боковое ребро, стягиваемое данным углом, первым, то как первое ребро относится ко второму, так относится синус данного угла к синусу другого искомого угла у основания.

Или: как второе боковое ребро относится к первому, так секанс угла, дополнительного к данному углу, относится к секансу угла, дополнительного к искомому углу.

Но если данный угол острый и первое, стягиваемое им, ребро меньше второго ребра, то значение искомого угла двоякое — именно если отношение второго ребра к первому меньше отношения полного синуса к синусу данного угла. Поэтому в данном случае можно взять либо острый угол, который находят в каноне, либо же угол, дополнительный к нему до двух прямых. Из условий задачи нельзя вывести, какой из этих углов следует взять **(9)**.

Примечания. Систему плоской и сферической тригонометрии Виет сперва изложил во второй части своего «Математического канона» („Canon mathematicus. Lutetiae, 1579), первую часть которого составили тригонометрические и другие таблицы. В более совершенной форме задачи и теоремы тригонометрии Виет привел в цитируемом труде, из многих задуманных книг которого свет увидела только восьмая (Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII, Turonis, 1593). Некоторые предложения Виета новы, другие по-новому сформулированы; доказательства и чертежи отсутствуют. Следует иметь в виду, что Виет всюду оперирует тригонометрическими линиями, а не их отношениями к радиусу соответствующего круга, который принят за 100 000. Мы ограничиваемся предложениями о решении плоских косоугольных треугольников, опуская как предшествующие им случаи прямоугольных треугольников, так и следующие далее разделы, посвященные решению сферических треугольников. Отметим еще традиционное применение Виетом пропорций, а не уравнений, например в формулировке теоремы косинусов (п. V).

1. Формулируя данную задачу, Виет забыл указать, что известна также одна сторона треугольника.

2. Теорема синусов для плоского треугольника была известна еще в X в. математикам стран ислама; Виет, вслед за Т. Финком (1583), высказывает ее в удобной симметрической форме, соответствующей нашей записи

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

3. Это правило можно выразить (также симметрично построенными) формулами

$$\frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}=\frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}},$$

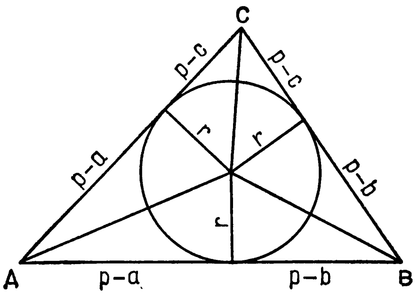


Рис. 32.

которые можно доказать следующим образом: если мы умножим каждый из знаменателей на радиус r круга, вписанного в треугольник, то каждый из числителей окажется равным соответствующему знаменателю (рис. 32). Виет называет тангенс изобретенным им термином prosinus.

4. Данное правило можно выразить формулами

$$\frac{c}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}},$$

вытекающими из равенств

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a};\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b};\ \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\frac{r}{p-c},$$

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$

первые три из которых очевидны (рис. 32); здесь $p=\frac{a+b+c}{2}$. Это правило Виета несимметрично: основание треугольника выделено по отношению к «боковым ребрам».

5. Соответствующие правилу формулы

$$\frac{a}{\operatorname{cosec} B}=\frac{b}{\operatorname{cosec} A}=\frac{c}{\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B}$$

вытекают из равенств

$$a:\frac{1}{\sin B}=b:\frac{1}{\sin A}=c:\frac{\sin C}{\sin A\cdot\sin B}.$$

Так как Виет еще не рассматривал функций тупых углов, то в случае тупого угла он берет котангенс смежного с ним острого угла и вычитает его. Термин secans (секущая) ввел Т. Финк (1583); Виет пользовался изобретенным им термином transsinuosa.

6. Правило (мы полагаем «полный синус», о котором см. п. 4*в*, прим. 11, равным 1)

$$\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=\frac{1}{\cos c}$$

равносильно теореме косинусов для плоского треугольника

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$$

Теорема косинусов соответствует в тригонометрии теоремам о квадрате стороны треугольника, лежащей против тупого или острого угла, доказанным в 12-м и 13-м предложениях II книги «Начал» Евклида. Для определения углов по трем сторонам треугольника долгое время, вплоть до XVI в., прежде всего определяли с помощью названных предложений какую-либо высоту треугольника. Впрочем, теорема косинусов случайно упоминается — но не применяется — уже ал-Бируни. В полной мере оценил значение этой теоремы Виет. Следующее далее замечание Виета связано с тем, что он рассматривал только абсолютные значения тригонометрических линий. Вопрос о знаках тригонометрических функций для углов, больших 90°, был постепенно исследован в XVII и начале XVIII в.

7. Формула

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

часто называется «теоремой тангенсов»; в несколько более сложном виде ее высказал Т. Финк (1583).

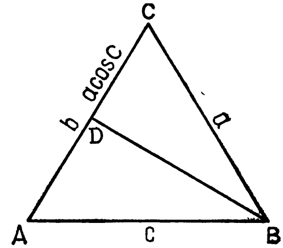


Рис. 33.

8. Это правило может быть выражено равенствами

$$\frac{a}{b}=\frac{\operatorname{cosec} C}{x}, \quad x-\operatorname{ctg} C=\operatorname{ctg} A,$$

откуда

$$\frac{b}{\sin C}=a\cdot\operatorname{ctg} A+a\cdot\operatorname{ctg} C \text{ и } \operatorname{tg} A=\frac{a\cdot\sin C}{b-a\cdot\cos C}.$$

Последняя формула очевидна из чертежа (рис. 33), где BD — числитель последней дроби, а AD — ее знаменатель.

9. Здесь Виет дает полный анализ случая, когда даны стороны a и b ($a < b$) и угол $A < 90°$; при этом имеют место оба указанные Виетом решения, за исключением случаев, когда $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sin A}$ (в этом случае $B=90°$) или $\frac{b}{a}>\frac{1}{\sin A}$, т. е. $a < b\cdot\sin A$ (в этом случае треугольник невозможен).

5. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ В ДРЕВНОСТИ И В СРЕДНИЕ ВЕКА

а. АНТИЧНАЯ ТЕОРИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

ИЗ 1-Й КНИГИ «КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ» АПОЛЛОНИЯ
(ок. 200 г. до н. э.)

[№ 65, с. 6—8; перевод Б. А. Розенфельда и П. С. Юшкевича.]

Первые определения

1. Если из какой-нибудь произвольной точки проведена прямая к окружности круга, не лежащего в одной плоскости с этой точкой, и продолжена по обе стороны и если, оставляя неподвижной эту точку, водить указанной прямой по окружности, пока она не вернется в то же самое положение, из которого

началось движение, то образуемую прямой поверхность, состоящую из двух соединенных между собой вершинами поверхностей от вершины, каждая из которых простирается в бесконечность, я называю *конической поверхностью*, неподвижную точку—*вершиной*, а прямую, соединяющую неподвижную точку с центром круга,—*осью*.

2. Я называю *конусом* фигуру, ограниченную кругом и конической поверхностью, расположенной между вершиной и окружностью круга; *вершиной конуса*—точку, являющуюся вершиной его поверхности; *осью конуса*—прямую, проведенную из этой вершины к центру круга; *основанием*—круг.

3. С другой стороны, среди конусов я называю *прямыми* те, оси которых перпендикулярны основаниям, и *наклонными* те, оси которых не перпендикулярны основаниям (1).

4. Я называю *диаметром* всякой кривой линии, расположенной в плоскости, прямую, проведенную от кривой линии и секущую пополам все прямые линии, проведенные в данной линии параллельно какой-либо прямой; *вершиной* линии—конец этой прямой, расположенный на [кривой] линии, и, наконец, я называю *прямой, проведенной по порядку* (2) к диаметру, каждую из параллелей.

5. Я называю также, аналогично, *диаметром* двух кривых линий, расположенных в одной плоскости (3), с одной стороны, прямую, пересекающую обе эти линии и секущую пополам все прямые, проведенные параллельно какой-либо прямой в каждой из этих линий, а вершинами этих линий—концы диаметра, расположенные на этих линиях; с другой стороны,—прямую, расположенную между двумя линиями, секущую пополам все прямые, проведенные параллельно какой-либо прямой и перегораживающие промежуток между этими линиями; наконец, я называю *прямыми*, проведенными по порядку к диаметру, каждую из этих параллелей.

6. Я называю *сопряженными диаметрами* кривой линии и двух кривых линий две прямые, каждая из которых является диаметром, секущим пополам прямые, параллельные другой.

7. С другой стороны, я называю *осью* кривой линии и двух кривых линий прямую, которая, являясь диаметром этой линии или этих линий, сечет параллели под прямыми углами.

. . . .

[Там же, с. 36—50.]

Предложение 11

Если конус пересечен плоскостью, проходящей через ось, и другой плоскостью, пересекающей основание конуса по прямой, перпендикулярной основанию треугольника, проходящего через ось, и если при этом диаметр сечения параллелен одной из сторон треугольника, проходящего через ось, то всякая прямая, проведенная от конического сечения параллельно пересечению секущей плоскости и основания конуса к диаметру сечения, взятая в квадрате, равна [прямоугольнику], заключенному между прямой, отсекаемой ею на диаметре со стороны вершины сечения, и некоторой прямой, отношение которой к прямой, расположенной между углом конуса и вершиной сечения, таково же, как отношение [квадрата] на основании треугольника, проходящего через ось, к [прямоугольнику], заключенному между двумя остальными сторонами этого треугольника. Мы будем называть такое сечение *параболой*.

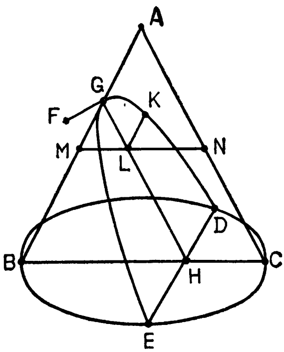


Рис. 34.

Пусть [дан] конус, вершина которого—точка A, а его основание—круг BC (рис. 34). Пусть будет произведено сечение его плоскостью, проходящей через ось, и пусть сечением будет треугольник ABC, и пусть будет произведено сечение его другой плоскостью, пересекающей основание по прямой DE, перпендикулярной прямой BC, и пусть она образует на поверхности конуса сечение DGE, причем диаметр GH сечения параллелен стороне AC треугольника, проходящего через ось. Проведем из [точки] G [прямую] GF, перпендикулярную [прямой] GH, и сделаем ее такой, чтобы GH относилась к GA, как [квадрат] на BC к [прямоугольнику] на BAC (4). Наконец, возьмем произвольную точку K на сечении и проведем через эту [точку] K [прямую] KL, параллельную DE.

Я утверждаю, что [квадрат] на KL равен [прямоугольнику] на FGL.

В самом деле, проведем через [точку] L [прямую] MN, параллельную BC. В то же время KL также параллельна DE; поэтому плоскость, проходящая через [прямые] KL, MN, параллельна плоскости, проходящей через [прямые] BC, DE, т. е. параллельна основанию конуса. Поэтому плоскость, проходящая через прямые KL, MN [дает в сечении] круг, диаметром которого является MN. Кроме того, KL перпендикулярна MN, так как DE также перпендикулярна BC. Следовательно, [прямоугольник] на MLN равен [квадрату] на KL. Так как FG относится к GA, как [квадрат] на BC к [прямоугольнику] на BAC, а отношение [квадрата] на BC к [прямоугольнику] на BAC таково же, как отношение, составленное из отношения BC к CA и из отношения BC к BA (5), отсюда следует, что отношение FG к GA составлено из отношения BC к CA и из отношения CB к BA. Но MN относится к NA, как ML к LG и как BC к CA, а MN относится к MA, как LM к MG, как оставшаяся NL к оставшейся GA и как BC и BA. Следовательно, отношение FG к GA составлено из отношения

ML к LG и из отношения NL к GA. Но отношение, составленное из отношения ML к LG и из отношения LN к GA, образует отношение [прямоугольника] на MLN к [прямоугольнику] на LGA. Поэтому [прямоугольник] на MLN относится к [прямоугольнику] на LGA, как FG к GA. В то же время, если GL—общая высота, то [прямоугольник] на FGL относится к [прямоугольнику] на LGA, как FG к GA. Следовательно, [прямоугольник] на FGL относится к [прямоугольнику] на LGA, как [прямоугольник] на MLN к [прямоугольнику] на LGA. Поэтому [прямоугольник] MLN равен [прямоугольнику] на FGL. Но [прямоугольник] на MLN равен [квадрату] на KL. Поэтому [квадрат] на KL также равен [прямоугольнику] на FGL (6).

Будем называть такое сечение параболой (7); в то же время будем называть FG прямой, к которой относят квадраты прямых, проведенных по порядку к диаметру GH, будем называть ее также прямой [стороной] (8).

. . . . (9).

Предложение 13

Если провести сечение конуса плоскостью через ось, а также другой плоскостью, встречающей каждую из двух сторон треугольника, проходящего через ось и не параллельной и не антипараллельной (10) основанию конуса, и если плоскость основания конуса и секущая плоскость пересекаются по прямой, перпендикулярной либо основанию треугольника, проходящего через ось, либо его продолжению, то каждая прямая, проведенная от сечения параллельно общей линии пересечения плоскостей к диаметру сечения, взятая в квадрате, равна площади, приложенной к некоторой прямой, отношение диаметра сечения к которой таково же, как отношение [квадрата] на прямой, проведенной из вершины конуса параллельно диаметру сечения до основания треугольника, к [прямоугольнику] на отрезках, отсекаемых этой прямой [на продолженном основании] по отношению к сторонам треугольника, если площадь имеет шириной прямую, отсекаемую от диаметра этой первой прямой от вершины сечения с недостатком, подобным [прямоугольнику] на диаметре к прямой, к которой относят квадраты прямых, проведенных по порядку к диаметру, и подобно расположенной по отношению к нему. Будем называть это сечение *эллипсом*.

Пусть [дан] конус, вершина которого—точка A, а основание—круг BC (рис. 35). Пусть будет произведено сечение его плоскости через ось, и пусть сечением будет треугольник ABC, и пусть, кроме того, будет произведено сечение его другой плоскостью, которая пересекает каждую из [двух] сторон треугольника, проведенного через ось и не параллельно и не антипараллельно основанию конуса, и пусть эта плоскость образует на поверхности конуса сечение DE. Линией пересечения секущей плоскости

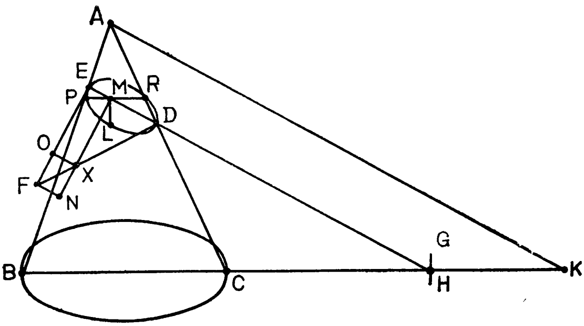


Рис. 35.

и плоскости основания конуса пусть будет GH, перпендикулярная к BC, диаметром сечения пусть будет DE. Проведем из [точки] E [прямую] EF, перпендикулярную ED, а через [точку] A проведем AK, параллельную ED, и сделаем так, чтобы ED относилась к EF, как [квадрат] на AK к [прямоугольнику] на BKC. Наконец, возьмем произвольную точку L на сечении и проведем через L [прямую] LM, параллельную GH. Я утверждаю, что [квадрат] на LM равен площади, приложенной к EF с шириной EM с недостатком, подобным [прямоугольнику] на DEF.

Действительно, проведем соединительную [прямую] DF и через [точку] M проведем MXN параллельно FE, через [точки] F, X проведем EN и XO параллельно EM, а через [точку] M проведем PMR параллельно BC. Так как PR параллельна BC, а LM также параллельна GH, то плоскость, проходящая через LM, PR, параллельна плоскости, проходящей через GH, BC, т. е. параллельна основанию конуса. Поэтому если провести плоскость через LM и PR, то сечение будет кругом, диаметр которого — PR. Кроме того, [прямая] LM перпендикулярна этой прямой, поэтому [прямоугольник] на PMR равен [квадрату] на LM. И так как ED относится к EF, как [квадрат] на AK к [прямоугольнику] на BKC, а отношение [квадрата] на AK к [прямоугольнику] на BKC составлено из [отношения AK к] KB и отношения AK к KC, а, с одной стороны, AK относится к KB, как EH к HB или EM к MP, а с другой, AK относится к KC, как DH к HC или DM к MR, то отношение DE к EF составлено из отношения EH к HP и отношения DM к MR. Но отношение, составленное из отношения EM к MP и отношения DM к MR, таково же, как отношение [прямоугольника] на EMD к [прямоугольнику] на PMR. Поэтому DE относится к EF, т. е. DM к MX, как [прямоугольник] на EMD к [прямоугольнику] на PMR. Но так как прямая ME — общая высота, то [прямоугольник] на DME относится к [прямоугольнику] на XME, как DE к MX. Поэтому [прямоугольник] на DME относится к [прямоугольнику] на PMR, как [прямоугольник] на DME к [прямоугольнику] на XME. Поэтому [прямоугольник] на PMR равен [прямоугольнику] на XME. Но было доказано, что [прямоугольник] на PMR равен [квадрату] на LM. Следовательно, [квадрат] на LM равен также [прямоугольнику] на XME. Поэтому [квадрат] на ML равен [прямоугольнику] MO, т. е. приложенному к [прямой] FE с [прямой] EM в качестве высоты, от чего отнята [фигура] ON, подобная [прямоугольнику] на DEF. Мы будем называть такое сечение эллипсом (**11**), а прямую EF — прямой, к которой относятся квадраты прямых, проведенных по порядку к прямой DE. Мы будем называть эту прямую также прямой стороной, а прямую DE — поперечной стороной (**12**).

Примечания. Согласно комментаторам V в. Проклу и Евтокию, конические сечения были известны уже Менēхму (ок. 350 г. до н. э.), который дал с их помощью геометрическое решение задачи об удвоении куба, т. е., в нашей терминологии, построение корня уравнения $x^3 = 2a^3$. Вскоре затем Аристей написал специальный труд о конических сечениях, за которым последовало сочинение по тому же вопросу Евклида; оба эти произведения не сохранились. Первым дошедшим до нас изложением теории конических сечений мы обязаны Аполлонию. Его «Конические сечения» состояли из восьми книг; четыре первые сохранились по-гречески, следующие три в арабском переводе Сабита ибн Корры, а восьмая утрачена (в начале XVIII в. реконструкцию ее содержания предложил Э. Галлей).

1. В отличие от Евклида, определившего в XI книге «Начал» только прямой круговой конус, Аполлоний определяет здесь общий круговой конус, вообще говоря наклонный, и поверхность этого конуса. До Аполлония конические сечения определялись как сечения прямых круговых конусов плоскостью, перпендикулярной одной из их прямолинейных образующих, вследствие чего гипербола, парабола и эллипс назывались первоначально сечением тупоугольного конуса, сечением прямоугольного конуса и сечением остроугольного конуса (в частности, такая терминология применялась Архимедом).

2. «[Прямые], проведенные по порядку к диаметру» (τεταγμένως κατῆχθας ἐπὶ τὴν διάμετρον) — ординаты той косоугольной системы координат, которой, по существу, пользуется Аполлоний. Роль оси абсцисс здесь играет диаметр конического сечения, а оси ординат, которая не проводится, соответствует касательная к сечению в конце этого диаметра; таким образом, ординатами служат половины хорд, сопряженных с диаметром. Термины Аполлония «проведенные по порядку» и «отсеченные от диаметра» были переведены в XVI в. Ф. Коммандино на латынь выражениями ordinatum applicatae (приложенные, проведенные по порядку) и ex diametro abscissae (отсеченные на диаметре), откуда произошли наши термины «абсцисса», «ордината» и «аппликата». Кривыми линиями в тексте Аполлония называются только конические сечения.

3. Речь идет о двух ветвях одной гиперболы.

4. Мы переводим выражения Аполлония ἀπό ΒΓ, буквально «с (от) BC», и ὑπόν, ΑΒΓ буквально «под ABC» выражениями «[квадрат] на BC» и «[прямоугольник] на ΑΒΓ», так как первое из этих выражений обозначает квадрат со стороной BC, а второе — прямоугольник со сторонами AB и BC. Позднейшие античные математики пользовались выражениями ὑπο ΑΒ, ΓΔ, которые мы будем переводить «[прямоугольник] на AB, CD» и в тех случаях, когда отрезки AB, CD не имеют общего конца.

5. Составным отношением античные математики называли то, что мы называем произведением отношений, а то, что мы называем квадратом и кубом отношения, они называли соответственно «двойным» и «тройным» отношениями (см. ч. IV, п. 1в). Здесь Аполлоний пользуется 23-м предложением VI книги «Начал» Евклида: «Равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон» [№ 25, т. I, с. 203].

6. Предыдущие рассуждения, опирающиеся на средства «геометрической алгебры» (см. ч. I, п. 2), служат для вывода из исходного стереометрического определения рассматриваемого конического сечения его основного планиметрического свойства, которое древние называли симптомом (σύμπτωμα) и которое применяется затем при дальнейшем исследовании этого сечения. Если обозначить отрезок диаметра $GL = x$, половину сопряженной хорды $KL = y$ и данный отрезок $GF = 2p$, то окончательный результат выразится уравнением $y^2 = 2px$, т. е. найденный симптом соответствует в выбранной косоугольной системе координат так называемому уравнению параболы относительно вершины.

7. Термин «парабола» связан с тем, что для любой точки данного сечения построение абсциссы x по ординате y, равносильное преобразованию квадрата y^2 в прямоугольник со стороной $2p$, называлось в геометрической алгебре приложением площади (παραβολή) квадрата на KL к отрезку FG (см. ч. I, п. 2).

8. Кл. Мидорж в 1631 г. назвал «прямую сторону» конического сечения параметром (παραμετρέω — измеряю, сравниваю); в современной аналитической геометрии параметром называют половину этого отрезка.

9. Мы опускаем 12-е предложение, в котором выведен «симптом» гиперболы.

10. Аполлоний называет плоскость антипараллельной основанию наклонного кругового конуса, если она отсекает на «треугольнике, проходящем через ось» конуса, подобный треугольник, но не параллельна основанию конуса. В 5-м предложении I книги Аполлоний доказал, что сечения наклонного кругового конуса плоскостями, антипараллельными его основанию, также являются кругами. Далее, если мы пересечем наклонный круговой конус плоскостью, перпендикулярной его оси, сечение будет эллипсом, и мы можем рассматривать наклонный круговой конус как прямой эллиптический конус; тогда если мы проведем круговые сечения этого конуса, параллельные основанию кругового конуса, то сечения этого конуса плоскостями, антипараллельными этому основанию, симметричны первым сечениям относительно одной из плоскостей симметрии эллиптического конуса, из чего ясно, что эти сечения также являются круговыми.

11. Если обозначить диаметр $DE = 2a$, отрезок $EF = 2p$, отрезок диаметра $EM = x$ и половину сопряженной хорды $LM = y$, то найденный симптом кривой, т. е. равенство квадрата на LM прямоугольнику MO, можно, принимая во внимание, что $\frac{EO}{EF} = \frac{DM}{ED}$, т. е. $EO = \frac{p}{a}(2a - x)$, записать в форме $y^2 = \frac{p}{a} x (2a - x) = 2px - \frac{p}{a} x^2$ — уравнение эллипса относительно вершины.

Наименование этого конического сечения эллипсом связано с тем, что построение на данном отрезке (EF) прямоугольника (MO), равного данному квадрату (на ML), так, что недостающий прямоугольник (ON) подобен данному прямоугольнику (DF), называлось эллиптическим приложением площади (от слова ἔλλειψις — недостаток). Аналогично возникло название гиперболы (от слова ὑπερβολή — избыток), симптом которой, выведенный в 12-м предложении, соответствует уравнению $y^2 = 2x + \frac{p}{a} x^2$, где $2a$ — действительный диаметр гиперболы.

12. «Прямая сторона» здесь имеет тот же смысл, что в случае параболы, «поперечная сторона» (πλαγιά πλευρά) в латинском переводе latus transversum — диаметр эллипса.

6. ВОПРОСЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗ СЕДЬМОЙ КНИГИ «МАТЕМАТИЧЕСКОГО СБОРНИКА» ПАППА (ок. 300 г.)

[№ 92, с. 868—895; перевод Б. А. Розенфельда.]

Леммы ко второму поризму I книги «Поризмов» (1).

III. (Предложение 129). Если три прямые *AB*, *CA*, *DA* пересечены выходящими из одной точки прямыми *FE*, *ED*, то я утверждаю, что [прямоугольник] на *FD*, *DC* относится к [прямоугольнику] на *FD*, *BC*, как [прямоугольник] на *FE*, *HG* к [прямоугольнику] на *FH*, *GE* (рис. 36) **(2)**.

Проведем через [точку] *F* [прямую] *KL*, параллельную прямой *GCA*. Тогда *DA*, *AB* встретят ее в точках *K*, *L*. С другой стороны, проведем через *L* [прямую] *LM*, параллельную *DA*. Она встретит *EF* в *M*. Поэтому *EG* относится к *GA*, как *EF* к *FL*; *AG* относится к *GH*, как *FL* к *FM*, так как и те и другие относятся, как *FK* к *FH*, в силу параллельности, отсюда «по равенству» **(3)** *EG* относится к *GH*, как *EF* к *FM*. Следовательно, [прямоугольник] на *FE*, *HG* равен [прямоугольнику] на *EG*, *FM*.

Рассмотрим другой [прямоугольник] на *EG*, *FH*. [Прямоугольник] на *EF*, *HG* относится к [прямоугольнику] на *FG*, *HF*, как [прямоугольник] на *EG*, *FM* к [прямоугольнику] на *EG*, *HF*, т. е. как *FM* к *FH*, или как *LF* к *FK*. По тем же причинам [прямоугольник] на *FD*, *BC* относится к [прямоугольнику] на *FB*, *CD*, как *KF* к *FL*. Поэтому, перевертывая **(4)**, находим, что [прямоугольник] на *FB*, *CD* относится к [прямоугольнику] на *FD*, *BC*, как *LF* к *FK*. Но было доказано, что [прямоугольник] на *EF*, *HG* относится к [прямоугольнику] на *EG*, *HF*, как *LF* к *FK*. Поэтому [прямоугольник] на *EF*, *HG* относится к [прямоугольнику] на *EG*, *HF*, как [прямоугольник] на *FB*, *CD* к [прямоугольнику] на *FD*, *BC*.

. . . .

V. (Предложение 131). Если дана фигура *ABCDEFGH*, то *AD* относится к *DC*, как *AB* к *BC*. Если же *AD* относится к *DC*,

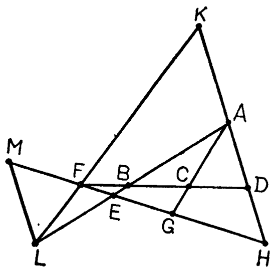


Рис. 36.

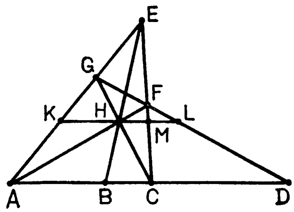


Рис. 37.

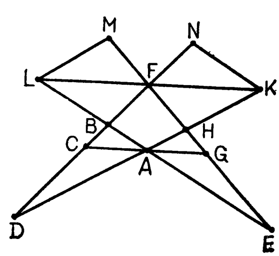


Рис. 38.

как AB к BC, то я утверждаю, что линия, проходящая через точки A, H, F, — прямая (рис. 37) **(5)**.

Проведем через H [прямую] KL, параллельную AD. Тогда AD относится к DC, как AB к BC **(6)**. Но AD относится к DC, как KL к LH, а AB относится к BC, как KH к HM. Поэтому KL относится к LH, как KH к HM, и последняя LH относится к LM, как KL к LH, т. е. как AD к DC. Переставляя **(7)**, получаем, что AD относится к HL, как CD к LM, т. е. как DF к FL. Но HL параллельна AD, поэтому линия, проходящая через A, H, F, — прямая, что и требовалось доказать.

. . . .

X. (Предложение 136). Проведем из [точки] F к двум прямым BAE, DAH две прямые DF, FE, и пусть [прямоугольник] на DF, BC относится к [прямоугольнику] на DC, BF, как [прямоугольник] на FH, GE к [прямоугольнику] на FE, GH. Я утверждаю, что линия, проходящая через C, A, G, — прямая (рис. 38) **(8)**.

Проведем через [точку] F [прямую] KL, параллельную CA, и пусть она встречает AB, AD в точках K, L. Проведем через L [прямую] LM, параллельную AD, и продолжим [прямую] EF до M. Наконец, проведем через K [прямую] KN, параллельную AB, и продолжим DF до N. Опять-таки в силу параллельности DF относится к FN, как DC к CB, откуда следует, что [прямоугольник] на DF, CB равен [прямоугольнику] на DC, FN. Но пусть другой [прямоугольник] — на DC, BF. Тогда [прямоугольник] на DF, BC относится к [прямоугольнику] на DC, BF, как [прямоугольник] на CD, FN к [прямоугольнику] на DC, BF, т. е. как FN к BF. Но по предположению [прямоугольник] на FD, BC относится к [прямоугольнику] на DC, BF, как [прямоугольник] на FH, GE к [прямоугольнику] на FE, GH. Поэтому в силу параллельности FN относится к FB, как KF к FL и как HF к FM. Поэтому [прямоугольник] на FH, GE относится к [прямоугольнику] на FM, GE, как [прямоугольник] на FH, GE к [прямоугольнику] на FM, GE. Поэтому [прямоугольник] на FE, GH равен прямоугольнику на FM, GE и FM относится к FE, как HG к CE. Поэтому, присоединяя и переставляя **(9)**, получим, что ME относится к EH, как FE к EC. Но ME относится к EH, как LE к EA, а LE относится к EA, как FE к EG. Отсюда следует, что AG параллельна KL. Но прямая CA также параллельна ей. Поэтому [линия] CAG — прямая, что и требовалось доказать.

. . . .

XII. (Предложение 138). ... Следует доказать, что если даны параллели AB, CD, и если на них падают прямые AD, AG, BC, BG, и если провести соединительные прямые ED, EC, то линия, проходящая через точки H, M, K, — прямая (рис. 39) **(10)**.

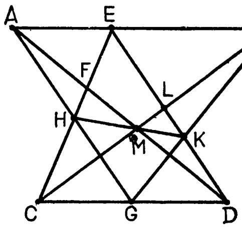


Рис. 39.

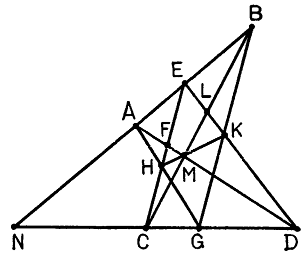


Рис. 40.

Действительно, так как DAG—треугольник, AE параллельна DG, а EC пересекает DG в C, то в силу предыдущей леммы DG относится к GC, как [прямоугольник] на CE, HF к [прямоугольнику] на CH, FE **(11)**. Опять-таки, так как CBG—треугольник, BE параллельна CD, а DE пересекает CGD в D, CG относится к GD, как [прямоугольник] на DE, LA к [прямоугольнику] на DK, LE. Поэтому, перевертывая, получим, что DG относится к CG, как [прямоугольник] на DK, LE к [прямоугольнику] на DE, LK. Но DG относится к GC так же, как [прямоугольник] на CE, HF к [прямоугольнику] на CH, FE. Поэтому [прямоугольник] на CE, HF относится к [прямоугольнику] на CH, FE, как прямоугольник на DK, LE к [прямоугольнику] на DE, KL. Но поскольку две прямые EC, ED пересекают две прямые CML, DMF и [прямоугольник] на CE, HF относится к [прямоугольнику] на CH, FE, как [прямоугольник] на DK, EL к [прямоугольнику] на DE, LK, поэтому в силу доказанного раньше линия, проходящая через точки H, M, K,—прямая.

XIII. (Предложение 139). Если же AB, CD не параллельны, а встречаются в N, то через точки H, M, K также проходит прямая (рис. 40) **(12)**.

Так как три прямые AN, AG, AD пересекаются выходящими из одной точки C двумя прямыми CE, CD, [прямоугольник] на CE, HF относится к [прямоугольнику] на CH, FE, как [прямоугольник] на CN, CD к [прямоугольнику] на ND, CG **(13)**. Опять-таки, так как три прямые BN, BC, BG пересекаются выходящими из одной точки D двумя прямыми DE, DN, [прямоугольник] на NC, GD относится к [прямоугольнику] на ND, GC, как [прямоугольник] на DK, EL к [прямоугольнику] на DE, KL. Но было доказано, что [прямоугольник] на NC, GD относится к [прямоугольнику] на ND, CG, как [прямоугольник] на CE, HF к [прямоугольнику] на CH, FE. Поэтому [прямоугольник] на CE, FH относится к [прямоугольнику] на CH, FE, как [прямоугольник] на DK, EL к [прямоугольнику на DE, KL. Поэтому в силу доказанного раньше, линия, проходящая через точки H, M, K,—прямая.

. . . .

XIX. (Предложение 145). На три прямые AB, AC, AD из одной точки E проведены EG, EB так, что EG относится к GH, как FE к FH. Я утверждаю, что также EB относится к BC, как ED к DC (рис. 41) **(14).**

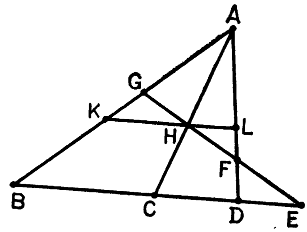


Рис. 41.

Проведем через H прямую KL параллельно BE. Тогда EG относится к GH, как EF к FH и в силу параллельности BE и KH EG относится к GH, как EB к KH, а в силу параллельности HL и DE EF относится к FH, как ED к HL. Поэтому EB относится к KH, как ED к HL, и, переставляя, находим, что EB относится к ED, как KH к HL. Но в силу параллельности KL и BD KH относится к HL, как BC к CD. Поэтому EB относится к ED, как BC к CD, и, переставляя, находим, что EB относится к BC, как ED к DC.

Примечания. 1. «Поризмы» — утерянное произведение Евклида, содержавшее, по всей вероятности, ряд предложений, относящихся к проективной геометрии.

2. Это предложение можно записать в виде

$$\frac{FB\cdot DC}{FD\cdot BC}=\frac{FE\cdot HG}{FH\cdot GE} \quad \text{или} \quad \frac{FB}{FD}:\frac{CB}{CD}=\frac{FE}{FH}:\frac{GE}{HG}.$$

В настоящее время отношение вида $\frac{FB}{FD}:\frac{CB}{CD}$, в котором FB, FD, CB, CD считаются ориентированными длинами отрезков прямой, называется *двойным* или *ангармоническим* отношением; двойное отношение является отношением двух простых отношений. Ориентированные длины отрезков и их простые и двойные отношения считаются действительными числами, причем двойное отношение

$$\overline{AB,\ CD}=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$$

положительно, когда пары точек A, B и C, D не разделяют друг друга (окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, не пересекаются), и отрицательно, когда пары точек A, B и C, D разделяют друг друга (указанные окружности пересекаются). В современных обозначениях предложение Паппа может быть записано в виде равенства двойных отношений

$$\overline{FC,\ BD}=\overline{FG,\ EH}.$$

Двойное отношение четырех точек прямой является важнейшим *проективным инвариантом* четырех точек и может быть определено без обращения к длинам отрезков. Так как четверка точек F, E, G, H получается из четверки точек F, B, C, D проектированием из точки K, предложение Паппа является частным случаем важной теоремы проективной геометрии о том, что *двойные отношения четверок точек не изменяются при проектировании.*

3. Пропорция «по равенству» — переход от пропорций $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}$ и $\frac{b}{c}=\frac{B}{C}$ к пропорции $\frac{a}{c}=\frac{A}{C}$.

4. «Перевертывание отношения» — переход от отношения $\frac{a}{b}$ к отношению $\frac{b}{a}$.

5. Фигура $ABCDEFGH$ состоит из «полного четырехсторонника» $AHCFEG$, т. е. четырехугольника $EGHF$, противоположные стороны которого продолжены до пересечения в точках A и C, и его диагоналей EHB, FGD и ABC. Первое утверждение этого предложения — теорема проективной геометрии о том, что две диагонали полного четырехсторонника пересекают третью диагональ в таких точках B и D, для которых вместе с вершинами четырехсторонника A и C, находящимися на этой диагонали, имеет место соотношение $\overline{AC, BD} = -1$. Четверки точек, для которых имеет место такое соотношение, называются гармоническими четверками (говорят также, что пара точек A, C гармонически разделяет пару точек B, D), а двойное отношение в этом случае называется гармоническим отношением. Второе утверждение предложения — теорема о том, что если две пары точек прямой гармонически делят друг друга, то эта четверка точек может быть получена указанным образом с помощью полного четырехсторонника.

6. По-видимому, Папп имеет в виду, что в силу 129-го предложения двойное отношение $\overline{AC, BD}$ равно двойному отношению четырех точек прямой GFD, получаемых проектированием точек A, B, C и D из точки E, т. е. точек G, F, точки пересечения прямых GFD и EHB и точки D, а это двойное отношение равно двойному отношению $\overline{CA, BD}$ точек, полученных проектированием предыдущей четверки точек на прямую $ABCD$ из точки H. Но нетрудно проверить, что при перемене местами точек одной из двух пар точек двойного отношения оно заменяется на противоположное и, следовательно, в нашем случае двойное отношение $\overline{AC, BD}$ совпадает с противоположным ему, т. е. равно ± 1 (для нас оно равно -1, так как пары точек A, C и B, D разделяют друг друга; а для Паппа оно равно 1).

7. См. прим. 5 к «Измерению круга» Архимеда (см. ч. III, п. 3 б).

8. Это теорема проективной геометрии о том, что если два проективных ряда точек, т. е. две прямые, между которыми установлено такое взаимно однозначное соответствие $A' = f(A)$, что для любых соответственных четверок точек этих прямых $\overline{AC, BD} = \overline{A'C', B'D'}$, точка пересечения этих рядов соответствует самой себе, то эти ряды проективны, т. е. соответствие между точками этих прямых устанавливается проектированием из некоторой точки (в данном случае такой точкой, называемой центром перспективы, является точка A, рис. 38).

9. См. прим. 5 к «Измерению круга» Архимеда (см. ч. III, п. 3 б).

10. Это — знаменитая теорема Паппа для шестиугольника, вписанного в пару параллельных прямых. В настоящее время эту теорему формулируют так: если шестиугольник $ADEBC$ вписан в пару прямых AEB и CGD, то точки пересечения противоположных сторон шестиугольника лежат на одной прямой. Теорема Паппа является частным случаем теоремы Паскаля (1640), в формулировке которой пара прямых заменяется коническим сечением, именно случаем, когда это коническое сечение распадается на пару прямых.

11. В 137-м предложении доказывается частный случай 129-го предложения, когда одна из проектирующих прямых параллельна прямой, на которую происходит проектирование: в этом случае точка пересечения этих прямых удаляется в бесконечность и одно из двойных отношений превращается в простое отношение. В нашем случае точки C, F и H прямой CE проектируются из точки A в точки C, D и G прямой CD, и если мы обозначим бесконечно удаленную точку прямой CD через N, то точка E проектируется в N, и мы можем записать $\overline{EH, CF} = \overline{NG, CD} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GC}}$.

12. Это — теорема Паппа для шестиугольника, вписанного в пару пересекающихся прямых.

13. Здесь имеет место равенство двойных отношений $\overline{EH, CF}$ и $\overline{NG, CD}$, записывающееся так же, как равенство двойных отношений в прим. 11 с той разницей, что здесь точка N — не бесконечно удаленная точка, а точка пересечения прямых AB и CD.

14. Это — частный случай 129-го предложения для случая гармонической четверки точек.

в. АСТРОЛЯБИЯ И СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

ИЗ «КНИГИ О ПОСТРОЕНИИ АСТРОЛЯБИИ» АХМАДА АЛ-ФЕРГАНИ (первая половина IX в.)

[№ 46, 48; перевод Н. Д. Сергеевой.]

Глава **I. О предпослании геометрических предложений, из которых выводится форма астролябии (1).**

Начнем с большого предложения, полезного в искусстве геометрии.

Начертим круг $ABCD$ и проведем его диаметр (рис. 42). Проведем через точку A линию EG, касательную к кругу. Проведем в круге произвольную хорду BH, проведем линии CB и HC и продолжим их в их направлении до линии GE. Они пересекут ее в точках K и F. Тогда я утверждаю, что треугольник CKF подобен треугольнику CHB, угол CKF равен углу CHB, а угол KFC равен углу HBC.

Доказательство этого. Опустим из точки B перпендикуляр на диаметр AC, это — BL. Проведем линию AB. Угол ABC — прямой, так как он в полукруге. Но на диаметр AC был опущен перпендикуляр BL, поэтому треугольники ABL и LBC подобны между собой и подобны треугольнику ABC. Поэтому угол ABC равен углу BLC. Но угол LBC равен углу AKC, так как линии AK и LB параллельны. Поэтому угол AKC равен углу BAL и равен углу BHC, так как они имеют одно основание. Поэтому угол AKC равен углу BAL. Но угол BCH общий, поэтому оставшийся угол HBC равен углу KFC. Это и есть то, что мы хотели [доказать].

Поскольку мы предпосылали это предложение, то докажем, что если для каждого конуса, основание которого — круг и около которого описана сфера, провести диаметр сферы из точки вершины конуса, а затем восставить в точке конца диаметра, диаметрально противоположной точке вершины конуса, плоскость, касательную к сфере, и продолжить поверхность конуса прямолинейно (2) до пересечения с касательной плоскостью к сфере, то это пересечение будет кругом.

Пример этого: конус $ABCD$, его основание — круг BCD, его диаметр — BD, вершина конуса — точка A, около него описана сфера $ABGHE$ (рис. 43) (3). Мы провели из точки вершины

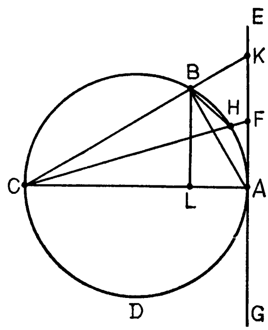


Рис. 42.

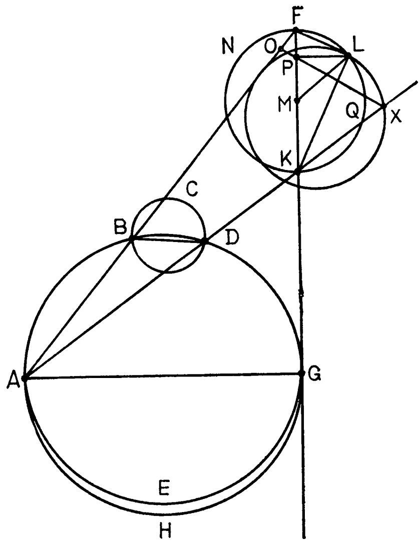


Рис. 43.

конуса диаметр сферы AG и восставили в точке G плоскость FQK из прямых линий, касающихся сферы в ней. Продолжим поверхность первоначального конуса, начинающуюся в точке A и кончающуюся в его основании BCD, прямолинейно до плоскости FQK. Тогда их пересечение $KLFN$. Тогда я утверждаю, что линия $KLFN$ — окружность круга.

Доказательство этого. Плоскость круга $ABGH$ делит и сферу и конус пополам. Продолжим ее прямолинейно до плоскости FQK. Тогда круг $ABGH$ — пересечение сферы и плоскости, которая пересекает ее, а его диаметр и диаметр сферы — линия AG, треугольник ABD — пересечение конуса и пересекающей его плоскости, а линия FK — пересечение плоскости $KLFN$ и пересекающей плоскости. Но ясно, что линия AB — самая короткая из линий, проведенных из точки A к основанию BCD, а линия AD — самая длинная из них. В этом примере мы пересекаем весь конус, вписанный в сферу, таким образом, что в плоскости, пересекающей конус, получаются две линии из конуса. Разделим линию FK пополам в точке M, проведем из M линию к какому-нибудь месту на линии $KLEN$ и докажем, что она равна линии KM. Проведем линии ML, KL и LF и продолжим прямолинейно поверхность конуса и плоскость, пересекающую все поверхности. Вообразим, что плоскость XLO пересекает плоскость $KLFN$ и конус в точке L и параллельна кругу BCD. Ясно, что плоская фигура XLO — круг в силу того, что доказал Мухаммад ибн Муса в его книге о сфере (4), линия XO — пересечение круга XLO и плоскости AGF, пересекающей все фигуры. Она пересекает линию KF в точке P.

Тогда плоскость AGF пересекает плоские фигуры кругов BCD и XLO, которые параллельны и вписаны в один конус. Линии XO и DB — их пересечения, а линия DB — диаметр круга BCD, поэтому линия XO — диаметр круга XLO. Плоские фигуры $KLFN$ и XLO проходят через точку L и они обе перпендикулярны к плоскости AGF, которая пересекает их под прямым углом по линиям XO и FK. Поэтому их пересечение есть перпендикуляр к плоскости AGF в силу того, что доказал Евклид (5). Это линия LP. Угол AGP — прямой в силу того, что линия AG — перпендикуляр к касательной плоскости FQK и угол, ограничиваемый ей с каждой линией, проведенной из точки в плоскости FQK, — прямой угол. Раньше было доказано, что угол GFA равен углу ADB. Угол ADB равен углу AXO, поэтому угол AXO равен углу GFA. Угол KPX равен углу FPO, поэтому оставшийся угол FOP равен углу XKP. Поэтому два треугольника XPK и PFO подобны. Поэтому произведение KP на PF равно произведению XP на PO, произведение XP на PO равно произведению LP на равное ей, так как линия LP — перпендикуляр к линии XO, а XO — диаметр круга XLO. Поэтому произведение KP на PF равно произведению LP на равное ей. Тем самым доказано, что угол KLF прямой. Но диаметр KF был разделен пополам в точке M, а из точки M была проведена линия ML, поэтому линия ML равна каждой из линий KM и MF, это рассуждение доказывает, что каждая из линий, выходящих из точки M к точкам линии $KLFN$, равна каждой из линий KM и MF. Поэтому линия $KLFN$ — окружность круга (6), диаметр которого KF, а центр — точка M. Это есть то, что мы хотели [доказать].

Поскольку предыдущая теорема о конусе доказана, нам остается доказать, что линия, выходящая из точки вершины конуса и проходящая через центр его основания на сфере, не проходит через центр круга, являющегося пересечением с конусом в касательной плоскости к сфере в точке G.

Вернемся к чертежу конуса и разделим диаметр основания конуса, вписанного в сферу, пополам в точке D (рис. 44). Проведем из точки A линию AD и продолжим ее вовне [сферы] до линии FK, так чтобы она пересекала ее в точке G. Отметим 2 точку там, где пересечение линии AG с кругом, это точка M. Линия CB делится пополам в точке D. Из точки A была проведена линия AD, оканчивающаяся на этой линии и не проходящая через

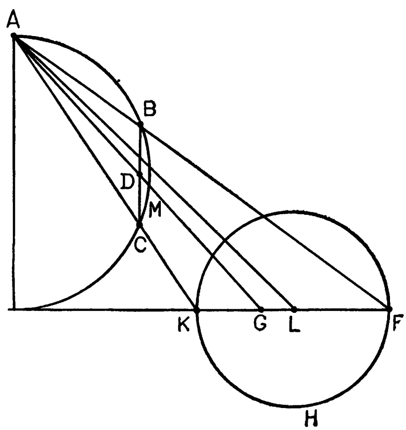


Рис. 44.

центр круга. Поэтому дуга CM меньше дуги MB. Поэтому угол CAM меньше угла MAB. Отсечем от угла MAB при линии AB угол BAL, равный углу CAD. Тогда я утверждаю, что точка L на линии FK—центр круга FHK.

Доказательство этого. Угол FAL равен углу CAD. Остается угол CDA, равный углу ALF, и треугольники ALF и ADC подобны. Поэтому CA относится к AF, как CD к FL. Но раньше мы доказали, что CA относится к AF, как BC к FK и как CD к FL. Поэтому, переставляя, получим, что DC относится к CB, как LF к FK. Но CD делит пополам линию BC, а FL делит пополам линию FK, причем FK—диаметр круга FHK. Поэтому линия AD, выходящая из точки вершины конуса и проходящая через центр основания конуса, вписанного в сферу, пересекает диаметр FK в точке E, не являющейся центром [круга]. Это и есть то, что мы хотели [доказать].

Примечания. 1. Астролябия (астурла̄б, от греческого ἀστρόλαβον ὄργανον «инструмент, схватывающий звезды»)—распространенный в средние века прибор, с помощью которого определялись координаты звезд. Наиболее распространенный вид астролябии представляет собой диск с лицевой и обратной сторонами. На обратной стороне астролябии вокруг центра диска вращается «алидада»—линейка с диоптрами—двумя дырочками для визирования; на ободе диска нанесены градусные деления. Подвешивая астролябию на шнурке и наводя алидаду на Солнце или звезду, измеряют высоту светила. На лицевой стороне астролябии закрепляется тонкая пластинка—«тимпан», на котором выгравированы изображения неподвижных кругов небесной сферы (горизонта, его параллелей—«альмукантаратов» и больших кругов, проходящих через зенит—«вертикалов») и кругов, переходящих в себя при суточном вращении небесной сферы (небесного экватора и двух его параллелей, касающихся эклиптики—тропика Рака и тропика Козерога). В центре тимпана вращается диск с прорезями—«паук», на котором изображены эклиптика (круг годичного видимого движения Солнца) и наиболее яркие звезды в виде концов острий, отходящих от обода паука или от изображения эклиптики. Изображения кругов небесной сферы на тимпане и пауке обычно производятся с помощью стереографической проекции из Южного полюса небесной сферы на плоскость, касательную к ней в Северном полюсе. Тимпан изготовлялся для определенной широты местности (угол между горизонтом и небесной сферой равен дополнению широты местности до 90°) и к астролябии обычно прилагался набор тимпанов для нескольких широт. Определив высоту Солнца или звезды, находили на пауке изображение Солнца (точки эклиптики, в которой Солнце находится в данный день) или звезды и поворачивали паук так, чтобы это изображение попало на изображение альмукантарата, соответствующего найденной высоте. Тогда вертикал, на который попадает это изображение, определяет вторую координату светила—его азимут. Угол поворота паука определяет время в астрономических часах, протекшее от полудня или полуночи до данного момента; точка эклиптики, в которой она пересекается с восточной половиной горизонта,—так называемый «гороскоп» для данного момента, с помощью которого производились астрологические предсказания. Трактат ал-Фергани посвящен изложению правил построения тимпана и паука астролябии. Приводимая здесь I глава трактата посвящена доказательству математических теорем о стереографической проекции. Первое предложение представляет собой вспомогательную лемму. В следующем предложении доказано, что при стереографической проекции окружности на сфере, не проходящие через центр проекции, проектируются на плоскость в виде окружностей. В 3-м предложении доказывается, что при этой проекции центр окружности на плоскости, являющейся проекцией окружности на сфере, не является проекцией центра последней окружности.

2. «Продолжить поверхность конуса прямолинейно» — продолжить все прямолинейные образующие конуса.

3. Чертеж ал-Фергани условен, изображенные на нем круги, находящиеся в различных плоскостях, повернуты так, что они стали параллельными плоскости чертежа. Приведем изображение построения ал-Фергани в перспективе (рис. 45).

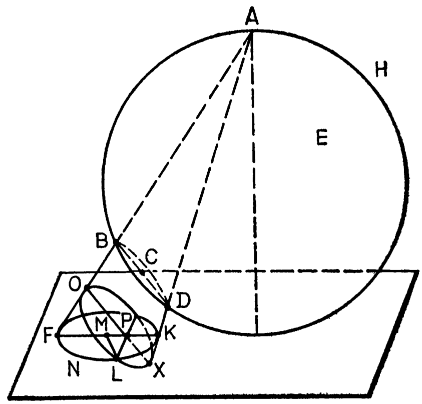


Рис. 45.

4. Мухаммад ибн Муса — один из трех братьев Бану Муса ибн Шакир — багдадских математиков начала IX в. Имеется в виду 10-е предложение «Книги измерения плоских и шаровых фигур» братьев Бану Муса [№ 6, с. 402—403]. Это же предложение имеется в «Конических сечениях» Аполлония (I книга, 4-е предложение). Тот факт, что ал-Фергани ни в этом случае, ни далее (см. прим. 6) не ссылается на Аполлония, свидетельствует, что он не был знаком с «Коническими сечениями» последнего (они были переведены на арабский язык во второй половине IX в., и авторы позднейших арабских сочинений об астролябиях уже ссылались на них).

5. Имеется в виду 19-е предложение XI книги «Начал» Евклида.

6. Фактически здесь ал-Фергани доказывает 5-е предложение I книги «Конических сечений» Аполлония (см прим. 10 к «Коническим сечениям» Аполлония), так как в силу 1-го предложения ал-Фергани плоскость круга $KLFN$ антипараллельна основанию конуса $ABCD$ Указанное свойство стереографической проекции было известно много ранее: оно используется в «Планисферии» Птолемея Однако в том тексте «Планисферия», который дошел до нас (и судя по предисловию ал-Фергани к его трактату, и в тех текстах, которые были известны ему), доказательство этого свойства не приводится.

6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

а. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ГИПЕРБОЛЫ

ИЗ «ВВЕДЕНИЯ В ИЗУЧЕНИЕ ПЛОСКИХ И ТЕЛЕСНЫХ МЕСТ» П. ФЕРМА (1636)

[№ 23, с. 137—140.]

Несомненно, что древние много писали о геометрических местах. Свидетелем этого является Папп, уверяющий в начале VII книги, что Аполлоний писал о плоских, а Аристей о телесных (1). Но если мы не ошибаемся, исследование мест было для них нелегким делом. Мы заключаем это из того, что они не дали достаточно общего выражения для многочисленных мест, как это будет видно из дальнейшего.

Поэтому мы подвергнем эту отрасль знания особому и специально для нее подходящему анализу, с тем чтобы впредь был открыт общий путь к изучению мест.

Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию (2). Существует только одна-единственная и простая прямая линия; наоборот, кривых линий бесконечно много: круг, парабола, гипербола, эллипс и т. д.

Всякий раз, когда описывающий место конец неизвестной величины находится на прямой или на окружности, место является плоским; когда же он описывает параболу, гиперболу или эллипс, место является телесным, а когда—какую-либо другую кривую, место называется линейным (3). Последний случай мы здесь разбирать не будем, ибо с помощью приведений познание линейного места очень легко выводится из исследования плоских и телесных мест.

Для установления уравнения удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин (4). Если при этом ни одна из неизвестных величин не будет превосходить квадрата, то, как это станет ясно из дальнейшего, место будет плоским или телесным.

Допустим (рис. 46), что NZM—данная по положению прямая и N—данная точка на ней. Пусть NZ равна неизвестной величине A, а проведенная под данным углом NZI прямая ZI пусть будет равна другой неизвестной величине E. Тогда, если

D на A равно B на E,

точка I находится на данной по положению прямой.

Действительно, отношение A к E равно отношению B к D. Поэтому отношение A к E является данным. Так как, кроме того, дан угол при Z, то вид треугольника MIZ и угол INZ будут даны. Но точка N и положение прямой NZ также даны. Следовательно, дано и положение прямой NI, и легко произвести синтез.

К этому уравнению приводятся все уравнения, часть членов которых дана, а часть содержит неизвестные A и E, умноженные на какие-нибудь данные величины или же взятые просто

Zpl — D на A равно B на E (5).

Если положить Zpl равным D на R, то

B относится к D, как R—A к E.

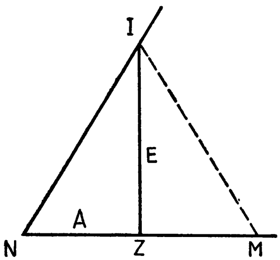


Рис. 46.

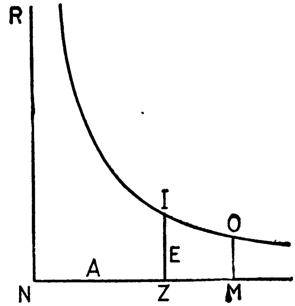


Рис. 47.

Положим MN равной R; тогда точка M будет данной и MZ будет равна $R-A$. Значит, отношение MZ к ZI будет дано; а так как угол при Z дан, то будет дан вид треугольника IZM. Если соединить еще прямой MI, то мы заключим, что эта прямая дана по положению. Следовательно, точка I будет находиться на данной по положению прямой. То же самое можно без труда вывести для всякого уравнения, в котором имеются члены, содержащие величины A или E **(6)**.

Это простое и первое уравнение мест, с помощью которого можно найти все прямолинейные места. Например, с его помощью предложение 7 первой книги Аполлония «О плоских местах» может быть теперь высказано и построено более общим образом.

В этом уравнении содержится следующее прекрасное предложение, найденное нами с его помощью. *Допустим, что имеется какое-либо число данных по положению прямых и что к ним из некоторой точки проведены под заданными углами отрезки; если сумма произведений этих проведенных прямых на данные равна данной площади, точка находится на данной по положению прямой* **(7)**.

Мы опускаем бесчисленные другие предложения, которые можно было бы с полным правом противопоставить предложениям Аполлония.

Второй порядок таких уравнений получается, если

$$A \text{ на } E \text{ равно } Zpl.$$

В этом случае точка I находится на гиперболе **(8)**.

Проведем (рис. 47) NR параллельно ZI. Возьмем на NZ какую-нибудь точку, например M, и проведем из нее MO параллельно ZI. Затем сделаем прямоугольник NMO равным Zpl. Опишем через точку O между асимптотами NR и NM гиперболу. Она будет дана по положению и пройдет через точку S, так как прямоугольник A на E или NZI равен прямоугольнику NMO. К этому уравнению приводятся все прочие уравнения, часть членов которых дана, а часть содержит A либо E или A на E **(9)**.

Примечания. Сочинение Ферма «Ad locos planos et solidos isagoge» было готово до конца 1636 г. и уже в следующем году стало известным в рукописи парижским математикам; напечатано оно было в 1679 г. в «Varia opera» Ферма, уже после его смерти. В этом небольшом труде Ферма одновременно с Декартом и независимо от него впервые начал разрабатывать аналитическую геометрию в собственном смысле слова, путем установления взаимно однозначного соответствия между алгебраическими уравнениями с двумя переменными и их графиками на плоскости, в которой введена система прямоугольных и, вообще говоря, косоугольных координат. Во «Введении...» рассмотрены общее линейное уравнение, общее уравнение окружности в прямоугольной системе и некоторые основные формы уравнений конических сечений, непосредственно выражающие их свойства, известные по трудам древних греков. Кроме того, Ферма на примерах показывает, как можно узнать природу и положение кривой, заданной более сложными уравнениями второй степени, с помощью алгебраических преобразований, соответствующих переносу начала координат или же повороту одной из осей. Принципиальный шаг вперед по сравнению с античной трактовкой проблемы заключался в переходе от словесно формулируемых «симптомов» (см. ч. III, п. 5а, прим. 6) и рассуждений, опирающихся на крайне ограниченные средства геометрической алгебры, к уравнениям и мощному аппарату новой буквенной алгебры, применимому к исследованию кривых любого порядка. Но Ферма (как и Декарт) еще недалеко продвинулся в этом направлении и, в частности, был далек от чисто аналитического построения теории кривых второго порядка.

1. Упоминаемые в VII книге «Математического сборника» Паппа (см. ч. III, п. 5б) сочинения Аполлония и Аристея не сохранились. Плоскими местами древние греки называли прямые и окружности, телесными местами они называли конические сечения, определявшиеся как сечения пространственного тела — кругового конуса.

2. Неизвестные величины (quantitates ignotae) — переменные координатные отрезки; термин «координаты» ввел Лейбниц (1692).

3. Линейными местами древние называли линии, отличные от «плоских» и «телесных» мест.

4. Так же, как Аполлоний, Ферма выбирал одну ось абсцисс с некоторой начальной точкой и направление ординат, причем ось ординат не фигурирует (ср. ч. III, п. 5а). Однако в отличие от Аполлония Ферма располагал координатную систему совершенно произвольно, не связывая ее специальным образом с рассматриваемыми им линиями. О знаках координат Ферма ничего не говорит, и вообще этот вопрос некоторое время оставался без рассмотрения, так что изображение незнакомых кривых по их уравнениям вне (как сказали бы мы) первого квадранта в ряде случаев представляло трудности. (Ср. прим. 6.)

5. Ферма пользуется алгебраической символикой Виета (см. ч. I, п. 7а): обозначает абсциссу буквой A, ординату — E, а данные величины — прописными согласными буквами латинского алфавита. Знак равенства у Ферма, как и у Виета, отсутствовал. Zpl — известная величина размерности плоской фигуры, сокращение выражения Z planum — «плоское Z». Подобно Виету, Ферма строго соблюдал античный принцип однородности.

6. Это утверждение Ферма доказывает для прямых с уравнением вида $ax+by=c$, где a, b, c положительны; уравнения вида $ax+by+c=0$ вовсе не рассматриваются.

7. Доказательство этого предложения средствами аналитической геометрии не представляет труда. В конце «Введения» Ферма заметил, что если бы он открыл изложенный им здесь метод до произведенной им ранее реконструкции двух книг Аполлония «О плоских местах», то данные им решения содержавшихся в этом сочинении задач были бы несомненно изящнее. Названную реконструкцию Ферма закончил в 1629 г., значит, координатный метод он разработал между 1629 и 1636 гг.

8. Уравнение гиперболы относительно асимптот $xy=a$ выражает одно из свойств этой кривой, встречающихся в «Конических сечениях» Аполлония.

Характерно, что Ферма рисует лишь ветвь равносторонней гиперболы, лежащую в первом квадранте.

9. Это утверждение Ферма доказывает, представив — в наших обозначениях — уравнение $d+xy=rx+sy$ в виде $(x-s)(r-y)=d-rs$, после чего, молчаливо предполагая $d>rs$, рассматривает ветвь гиперболы, лежащую под асимптотой $y=r$ и справа от асимптоты $x=s$.

6. УРАВНЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

ИЗ II КНИГИ «ГЕОМЕТРИИ» Р. ДЕКАРТА (1637)

№ 23, с. 29—35.

Какие кривые линии могут быть допущены в геометрии?

Древние хорошо заметили, что среди задач геометрии одни являются плоскими, другие телесными и третьи линейными (1); это значит, что одни из них можно построить, проводя лишь прямые линии и круги, тогда как другие требуют применения по меньшей мере какого-нибудь конического сечения, и, наконец, третьи — какой-нибудь другой, более сложной линии. Однако меня удивляет, что вместе с тем древние не различали разных порядков этих более сложных линий, и я не могу понять, почему они называли их механическими, а не геометрическими. Действительно, если считать, что это было вызвано необходимостью употреблять при их проведении какие-нибудь машины, то в силу тех же соображений пришлось бы исключить круги и прямые, так как и их начертить на бумаге можно лишь при помощи циркуля и линейки, которые тоже можно назвать машинами. Точно так же это различие не могло быть вызвано и тем, что необходимые для их проведения инструменты, более сложные, чем линейка и циркуль, не могут быть столь же точными: на этом основании следовало бы скорее исключить их уже из механики, стремящейся к точности выполнения рукою работ, чем из геометрии, преследующей лишь точность рассуждений, которая может быть, несомненно, столь же совершенна в случае этих явлений, как и в случае других.

. . . .

...Мне кажется совершенно ясным, что если — как это и делают — почитать геометрическим то, что вполне определенно и точно, а механическим то, что не таково, и если рассматривать геометрию как науку, которая учит вообще познанию мер всех тел, то из нее так же мало следует исключать самые сложные, как и самые простые линии, если только можно представить себе, что эти линии описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, — ибо

Р. Декарт

этим путем всегда можно точно узнать их меру (2). Возможно, что допустить линии, более сложные, чем конические сечения, древним геометрам помешало то обстоятельство, что из этих кривых они в первую очередь случайно познакомились со спиралью, квадратисой и им подобными. Эти кривые действительно принадлежат только механике и не относятся к тем, которые должны, на мой взгляд, быть здесь допущены, так как их представляют себе описанными двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы точно измерить... (3). Так как я надеюсь, что впредь те, кто сумеет пользоваться предполагаемым здесь геометрическим исчислением, не найдут уже достаточным того, на чем можно было бы остановиться в области плоских и телесных задач, то считаю своевременным предложить им обратиться к другим изысканиям, которые всегда дадут им материал для упражнения.

Взгляните на линии AB, AD, AF (рис. 48) и им подобные, которые я предполагаю описанными при помощи инструмента YZ, который составлен из нескольких линеек, соединенных таким образом, что, закрепив неподвижно на линии AN линейку, обозначенную YZ, можно растворить и складывать угол XYZ; при этом, когда угол сложен, точки B, C, D, F, G, H — все собираются в точке B, но по мере того как угол растворяется, линейка BC, соединенная под прямым углом с XY в точке B, толкает по направлению к Z линейку CD, передвигающую вдоль YZ, образуя всегда с нею прямые углы; а CD толкает DE, передвигающуюся таким же образом вдоль YX и всегда параллельную BC; DE толкает EF; EF толкает FG; последняя толкает GH, и можно вообразить себе бесчисленное количество других линеек, последовательно толкающих друг друга аналогичным образом, причем одни образуют всегда одинаковые углы с YX, а другие с YZ. По мере того как растворяется таким образом угол XYZ, точка B описывает линию AB, представляющую собою окружность, а точки D, F, H, в которых пересекаются другие линейки, описывают другие кривые линии — AD, AF, AH, из которых последние по порядку сложнее первой из них, а эта первая сложнее окружности. Но я не вижу ничего, что мешало бы составить столь же ясное и отчетливое понятие о способе описания первой кривой, как и о способе описания круга или, по крайней мере, конических сечений, а также ничего, что могло бы помешать понять вторую, третью и все остальные кривые, которые можно описать столь же хорошо, как и первую. Поэтому я не вижу, почему ими всеми нельзя было бы в равной мере пользоваться в геометрических рассуждениях **(4)**.

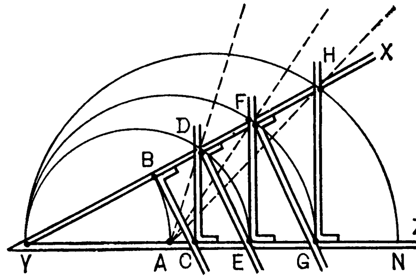


Рис. 48.

Способ, при помощи которого можно распределить все кривые линии по определенным родам и узнать отношение, существующее между всеми их точками и точками прямых.

Я мог бы привести здесь и другие способы проведения и кривых линий, возрастающих по степени сложности все более и более, до бесконечности. Но чтобы охватить совокупность всех встречающихся в природе кривых и распределить их по порядку по определенным родам, лучше всего указать на то обстоятельство, что все точки линий, которые можно назвать геометрическими, т. е. которые подходят под какую-либо точную и определенную меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии **(5)**. И если уравнение будет восходить лишь до прямоугольника двух неопределенных величин **(6)** или же до квадрата одной из них, то кривая будет первого и самого простого рода, к какому принадлежит только круг, парабола, гипербола и эллипс. Но если уравнение будет восходить до трех или четырех измерений обеих или одной из двух неопределенных величин—ибо здесь для обнаружения отношения одной точки и другой необходимы две такие величины,—то кривая будет второго рода. И если уравнение будет восходить до пяти или шести измерений, то она будет третьего рода, и так далее для других кривых, до бесконечности **(7)**.

Например, я хочу узнать, какого рода линия EC (рис. 49), которую я представляю себе описанной пересечением линейки GL и прямолинейной плоской фигурой $CNKL$, сторона KN которой неопределенно продолжена по направлению к C и которая, передвигаясь по лежащей под ней плоскости вдоль прямой, т. е. так, что ее диаметр KL всегда оказывается приложенным к какому-либо участку линии BA, продолженной в обоих направлениях, заставляет вращаться эту линейку GL вокруг точки G в силу того, что линейка соединена с фигурой таким образом,

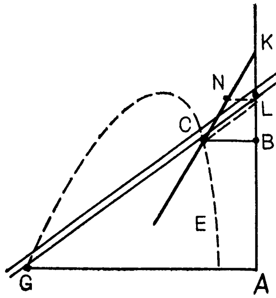


Рис. 49.

что постоянно проходит через точку L. Я выбираю некоторую прямую, например AB, чтобы к различным ее точкам отнести все точки этой кривой EC, и выбираю на ней некоторую точку, допустим A, чтобы начать с нее вычисление. Я говорю, что выбираю и ту и другую, потому что их можно брать произвольным образом. Действительно, хотя и существует много способов сделать уравнение более коротким и удобным, но все же, какими бы прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, чтобы линия оказалась того же самого рода, это легко доказать **(8)**. Выбрав затем на кривой произвольную точку, например C, к которой я предполагаю приложенным описывающий кривую инструмент, я провожу из точки C прямую CB, параллельную GA; и так как CB и BA суть две неопределенные и неизвестные величины, я называю одну из них y, а другую x. Но чтобы найти отношение одной из них к другой, я рассматриваю также известные величины, определяющие построение этой кривой, а именно GA, которую я называю ab, KL, которую я называю b, и NL, параллельную GA, которую я называю c. Затем я говорю, что как NL относится к LK или c к b, так CB, или y, относится к BK, которая, следовательно, есть $\frac{b}{c}y$; а BL будет $\frac{b}{c}y-b$; и AL будет $x+\frac{b}{c}y-b$. Кроме того, как CB относится к LB, или y к $\frac{b}{c}y-b$, так a, или GA, относится к LA, или $x+\frac{b}{c}y-b$. Таким образом, если перемножить вторую линию с третьей, то получится $\frac{ab}{c}y-ab$, что равно $xy+\frac{b}{c}yy-by$, получающемуся от перемножения первой линии с последней. Следовательно, искомое уравнение будет

$$yy=cy-\frac{c}{b}xy+ay-ac$$

и из него видно, что линия EC первого рода, и действительно она не что иное, как гипербола **(9)**.

Примечания. «Геометрия» Декарта, изданная вместе с его «Рассуждением о методе» (Discours de la méthode, Paris, 1637) в качестве третьего приложения выработанного им метода научного исследования, сыграла в развитии аналитической геометрии значительно большую роль, чем «Введение в изучение плоских и телесных мест» Ферма, отрывок из которого приведен выше. По ней и по ее латинскому переводу, изданному вместе с различными поясняющими и развивающими ее работами других авторов (Geometria à Renato des Cartes. Lugduni Batavorum, 1649, 2-е дополн. изд., Amstelodami, 1659), изучали новую алгебру и геометрию все крупные математики второй половины XVII в., включая Ньютона и Лейбница. Все основные результаты, вошедшие в «Геометрию», были известны Декарту не позднее 1632 г.

Координатный метод Декарта тот же, что и Ферма, но изложение аналитической геометрии во многом отличается. Оно менее систематическое, ибо разбросано по всем трем книгам «Геометрии», далеко не всегда идет от более простого к более сложному, но изложение богаче как общими идеями, так и конкретными примерами, видно уже из только что приведенных отрывков. Существенным преимуществом Декарта явилось употребление усовершенствованной им алгебраической символики и развитого им же «исчисления отрезков» (ч. I, п. 7б), позволившего отказаться от неудобного принципа однородности буквенной алгебры Виета.

1. О плоских, телесных и линейных геометрических местах и соответственно задачах см. примечания 1 и 3 к предыдущему отрывку.

2. Декарт полагал, что единственным общим методом математического исследования является алгебра, и в связи с этим ограничил класс плоских кривых, изучаемых в геометрии как общей науке измерения линиями, которые называет геометрическими. Изучение остальных механических кривых производится вне области геометрии с помощью тех или иных специальных приемов. Данной Декартом кинематической характеристике геометрических линий соответствует важная теорема кинематики механизмов, принадлежащая А. Кемпе (1876): при помощи плоских шарнирных механизмов, в которых движения начальных звеньев полностью определяют движения остальных, можно описывать дуги любых плоских алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. Несколько далее Декарт характеризует геометрические линии чисто математически: в прямолинейных координатах они выражаются алгебраическими уравнениями.

3. Лейбниц в 1684 г. подверг критике исключение «механических» линий из геометрии, так как и эти линии можно описать столь же точно, как «геометрические», а также выразить с помощью уравнений и подчинить вычислению. Правда, в этом случае уравнения — не алгебраические или определенной степени, но уравнения неопределенной степени (имеются в виду степенные бесконечные ряды) или же трансцендентные (transcendere — выходить за пределы). «Геометрические линии» Лейбниц назвал алгебраическими, а механические — трансцендентными [см. № 30, с. 173—174].

4. Этот инструмент Декарт изобрел между 1619 и 1621 гг. и в начале третьей части «Геометрии» строил с его помощью любое число средних пропорциональных между двумя даннымм отрезками $a:x_1=x_1:x_2=\ldots x_n:b$. По идее механизм Декарта сходен с мезолабием, предложенным в III в. до н. э. Эратосфеном для построения двух средних пропорциональных, к которому сводится задача об удвоении куба. Инструмент Декарта описывает кривые с уравнениями

$$r^2(x^2+y^2)^{2n-1}=x^{4n} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

5. Говоря об «уравнении», Декарт имеет в виду алгебраические уравнения.

6. Неопределенные величины (quantitées indeterminées) Декарта, как и неизвестные величины во «Введении...» Ферма, были названы Лейбницем переменными; этот термин получил широкое распространение благодаря «Анализу бесконечно малых» (1696) Лопиталя (см. ч. IV, п. 6д).

7. Здесь впервые дается общая классификация алгебраических кривых в зависимости от степени их уравнений (о ее роли в системе математики Декарта [см. № 26, т. II, с 30—33]). Отнесение к одному n-му роду кривых, степени уравнений которых равны $2n$ и $2n-1$, Декарт мотивировал тем, что кривые с уравнением степени $2n$ не сложнее кривых с уравнением степени $2n-1$, так что все трудности, связанные с четвертой степенью, приводятся к третьей степени и т. д. [№ 23, с. 35, 95 и след., 105 и след.].

Современная классификация алгебраических кривых по их порядкам принадлежит Ньютону (см. следующий отрывок).

8. Классификация алгебраических кривых по родам (или порядкам) имеет смысл, поскольку род (или порядок) инвариантен по отношению к выбору

системы прямолинейных координат. Доказательство этого важного предложения действительно легко провести, располагая линейными формулами преобразования координат. Такие формулы, правда, не для самого общего случая, вывел в своем комментарии к «Геометрии» Фр. ван Схоотен, подготовивший латинское издание этого труда (1-е изд. в 1649 г.).

9. Описание координатного метода и вывод уравнения гиперболы в этом примере не требуют пояснений. Заметим лишь, что асимптотами кривой служат ось абсцисс $y=0$, расположенная на чертеже Декарта вертикально, и прямая $cx+by=(a+c)b$.

Далее Декарт замечает, что при замене прямой CNK окружностью с центром L возникает конхоида, а если CNK есть парабола с диаметром kB, то некоторая кривая второго рода, уравнение которой $y^3-2ay^2-a^2y+2a^3=axy$ он выводит несколько далее: это — первое появившееся в печати уравнение кривой третьего порядка, которую Ньютон назвал трезубцем (см. следующий отрывок); в 3-й части «Геометрии» Декарт строит корни уравнений 6-й и 5-й степени как ординаты точек пересечения трезубца и некоторой окружности. Непосредственно после примера с гиперболой Декарт завершает начатое им в I книге решение задачи Паппа, которое дает ему повод подробно, хотя и не исчерпывающим образом исследовать уравнение 2-й степени относительно x, y. Опираясь на Аполлония, Декарт показывает, что к первому роду кривых принадлежат, вообще говоря, конические сечения (случаи «вырождения» конического сечения затронуты лишь мимоходом и уравнение прямой самостоятельно не рассмотрено,— этот и некоторые другие пробелы восполнил в первом же латинском издании «Геометрии» Фл. Дебон).

в. КРИВЫЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ИЗ «ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ЛИНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА» И. НЬЮТОНА (опубл. в 1704 г.)

[№ 38, с. 194—206.]

1. Порядки линий

Геометрические линии лучше всего различать по порядкам, соответственно степени уравнения, которым определяется зависимость между ординатами и абсциссами, или (что то же) по числу точек, в которых кривые могут пересекаться прямой (1). Вследствие этого линией первого порядка будет только прямая, линиями второго, или квадратного, порядка будут конические сечения и круг и третьего, или кубического, порядка — кубическая парабола, парабола Нейля (2), циссоида древних и другие, которые мы здесь собираемся перечислить. Кривая первого рода (если только прямую не относить к кривым) то же, что линия второго порядка, а кривая второго рода то же, что линия третьего порядка. А линия бесконечного порядка — та, которую прямая может пересечь в бесконечном числе точек, каковы спираль, циклоида, квадратриса и всякая кривая, которая производится через бесконечное число обращений радиуса или круга (3).

II. Свойства конических сечений принадлежат кривым высших порядков

Геометры повсюду излагают главным образом свойства конических сечений. Но свойства кривых второго и других родов аналогичны, как это выяснится из нижеследующего перечисления их главных свойств (4).

. . . .

5. *О гиперболических и параболических ветвях и их направлениях*

Все уходящие в бесконечность ветви кривых второго и высших родов, а ровно и первого бывают либо гиперболического, либо параболического типа. Гиперболической ветвью я называю ту, которая бесконечно приближается к какой-либо асимптоте, а параболической ту, которая лишена асимптоты. Эти ветви лучше всего распознаются с помощью касательных.

В самом деле, если точка касания уходит в бесконечность, касательная гиперболической ветви совпадает с асимптотой, а касательная ветви параболической сама удаляется в бесконечность, исчезает и не находится нигде (5). Поэтому асимптоты какой-либо ветви находятся с помощью определения касательной к этой ветви в бесконечно удаленной точке. Направление же бесконечной ветви находится с помощью определения положения какой-либо прямой, параллельной касательной, когда точка касания удаляется в бесконечность. В самом деле, эта прямая имеет то же направление, что бесконечная ветвь.

III. Приведение всех кривых второго рода к четырем типам уравнений

Все линии первого, третьего, пятого, седьмого и вообще нечетного порядка имеют по меньшей мере две бесконечные ветви, простирающиеся в двух прямо противоположных направлениях (6). Все линии третьего порядка имеют две такие ветви, уходящие в противоположных направлениях, в которых не идет ни одна из других бесконечных ветвей (кроме декартовой параболы) (7).

Тип I. Положим, что ветви эти гиперболического типа; пусть GAS (рис. 50) — их асимптота и пусть параллельно ей проведена какая-нибудь прямая CBc, которая ограничена с обеих сторон (если это возможно) кривой и рассекается в точке X пополам. Тогда геометрическое место точек X будет конической гиперболой (положим $X\Phi$), одной из асимптот которой является AG. Другая асимптота ее пусть будет AB.

Уравнение, которым определяется зависимость между ординатой BC и абсциссой AB (если AB означить через x, а BC

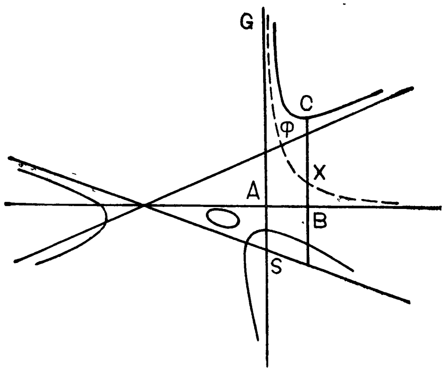


Рис 50.

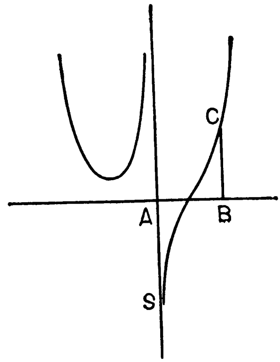


Рис. 51.

через y), всегда принимает форму:

$$xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d.$$

Здесь члены e, a, b, c, d означают известные величины со своими знаками $+$ и $-$, и любые из них могут выпасть, но только так, чтобы вследствие их отсутствия фигура не обращалась в коническое сечение. Упомянутая выше коническая гипербола может совпасть со своими асимптотами, т. е. точки X могут оказаться на прямой AB; в этом случае отсутствует член $+ey$.

Тип II. Если прямая CBc не может быть ограничена кривой с двух сторон (рис. 51), но встречает ее только в одной точке и если какую-нибудь данную по положению прямую AB, встречающую асимптоту AS в A, и затем еще какую-нибудь прямую BC, параллельную асимптоте и встречающую кривую в точке C, то уравнение, определяющее зависимость между ординатой BC и абсциссой AB, всегда принимает форму:

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Тип III. Положим, что противоположные ветви будут параболического типа. Проведем в направлениях обеих ветвей прямую CBc (рис. 52), ограниченную, если это возможно, с обеих

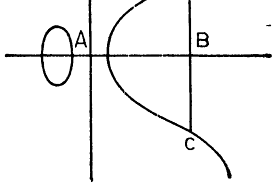


Рис. 52.

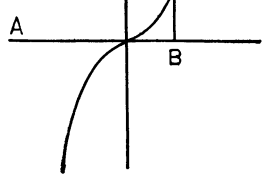


Рис. 53.

сторон кривой и делящуюся пополам в точке B. Геометрическое место точек B оказывается прямой линией. Пусть AB имеет своим концом некоторую данную точку A. Уравнение, которым определяется зависимость между ординатой BC и абсциссой AB, всегда принимает форму:

$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Тип IV. Пусть (рис. 53) эта прямая CBc, встречает кривую только в одной точке и поэтому не может ограничиваться кривой с двух сторон. Пусть эта точка есть C и пусть указанная прямая встречает в точке B некоторую другую данную по положению прямую AB, заканчивающуюся в какой-либо данной точке A. Уравнение, которым определяется зависимость между ординатой BC и абсциссой AB, всегда принимает форму:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \text{. . . . .} \quad (9)$$

13. О пяти расходящихся параболах

В третьем типе уравнение было

$$yy = ax^3 + bxx + cx + d.$$

Оно определит параболу, ветви которой взаимно расходятся, бесконечно удаляясь в противоположные стороны. Абсцисса AB есть ее диаметр. Существуют пять нижеследующих ее видов:

Если все корни $A\tau$, AT, At уравнения

$$ax^3 + bxx + cx + d = 0$$

вещественны и неравны, фигура представляет расходящуюся колоколообразную параболу с овалом у вершины (рис. 54). Это — шестьдесят седьмой вид.

Если два корня равны, то парабола переходит либо в узловую, соприкоснувшись с овалом (рис. 55), либо в точечную при бесконечном овале (рис. 56). Эти два вида — шестьдесят восьмой и шестьдесят девятый.

Если равны три корня, то парабола является остриевидной (рис. 57) в вершине. Это парабола Нейля, называемая обычно полукубической. Это — семидесятый вид.

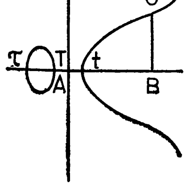


Рис. 54.

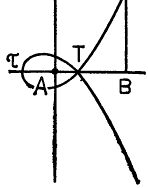


Рис. 55.

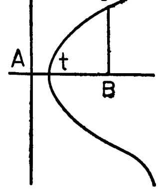


Рис. 56.

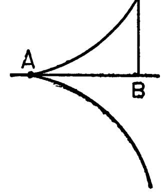


Рис. 57.

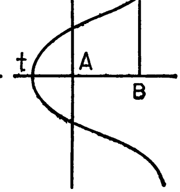


Рис. 58.

Если два корня мнимые, то получается чистая колоколообразная парабола (рис. 58), образующая семьдесят первый вид.

. . . .

V. Образование кривых с помощью теней

Если на бесконечную плоскость отбрасывать от светящейся точки тени фигур, то тенями конических сечений будут всегда тоже конические сечения; тени кривых второго рода будут всегда кривыми второго рода; тени кривых третьего рода будут всегда кривыми третьего рода и так далее до бесконечности.

И совершенно так же, как круг при отбрасывании тени производит все конические сечения, точно так пять расходящихся парабол с помощью своих теней производят и доставляют все другие кривые второго рода (**10**). Также можно найти более простые кривые других родов, которые образуют с помощью своих теней, отбрасываемых от светящейся точки на плоскость, все остальные кривые тех же родов.

О двойных точках кривых

Мы сказали, что кривая второго рода может пересекаться прямой в трех точках. Две из них иногда совпадают, например, в том случае, когда прямая проходит через бесконечно малый овал или через пересечение двух пересекающихся между собой или сходящихся в острие частей кривой.

В том случае, когда все прямые, идущие в направлении какой-либо бесконечной ветви, пересекают кривую только в одной точке (как это имеет место у ординат декартовой параболы, кубической параболы, а также у прямых, параллельных абсциссе гиперболизмов гиперболы и параболы), следует представлять себе, что эти прямые проходят через две другие, расположенные, так сказать, на бесконечном расстоянии точки кривой. Такого рода совпадающие между собой точки пересечения, находящиеся на конечном или на бесконечном расстоянии, мы будем называть двойными точками (**11**).

Примечания. Отдельные кривые третьего и высшего порядков были известны еще древним грекам (не выражавшим их, однако, с помощью уравнений в прямолинейных координатах, наподобие конических сечений) и исследованы средствами новой аналитической геометрии Декартом и его ближайшими последователями. Ньютон построил подробно развитую теорию кривых третьего порядка, выдвинув при этом ряд идей общего значения. «Enumeratio linearum tertii ordinis», отрывки из которого мы привели, было напечатано вместе с «Оптикой» Ньютона в 1704 г. Но еще за сорок лет до того, в конце 1664 г., едва закончив изучение второго латинского издания «Геометрии» Декарта и некоторых других сочинений, Ньютон пошел в изучении кривых третьего порядка значительно дальше своих предшественников. В ньютоновых рукописях 1667—1668 гг., недавно опубликованных Д. Т. Уайтсайдом [№ 91], содержатся уже почти все результаты, изложенные в «Перечислении»; из этих рукописей видно, с каким мастерством владел Ньютон формулами линейного преобразования координат (записанными без применения тригонометрических функций), посредством которого приводил общее уравнение кривой третьего порядка к каноническим формам. Окончательный текст «Перечисления» был подготовлен в середине 90-х годов; доказательства в нем отсутствуют, и этот пробел был восполнен усилиями ряда геометров XVIII в.

1. Здесь впервые предложена современная классификация алгебраических кривых.

2. Параболой Нейля называли полукубическую параболу.

3. Ньютон, сохранив декартов термин «геометрическая линия», отказался от названия «механическая линия» (ср. прим. 3 к предыдущему отрывку). Обращает на себя внимание осторожность, с какой Ньютон говорит о связи между порядком линии и возможным числом (действительных) точек ее пересечения с прямой.

4. Далее Ньютон переносит на алгебраические кривые высших порядков понятия диаметра, вершины, центра, оси, асимптоты и «прямой» и «поперечной» сторон (см. ч. III, п. 5а, прим. 9 и 11).

5. С точки зрения проективной геометрии параболическая ветвь касается бесконечно удаленной прямой, в то время как гиперболическая ветвь пересекается с бесконечно удаленной прямой и ее касательная в этой точке является ее асимптотой.

6. С точки зрения проективной геометрии «две бесконечные ветви, простирающиеся в двух прямо противоположных направлениях»,— это одна ветвь, пересекающаяся с бесконечно удаленной прямой.

7. Если μ — угловой коэффициент асимптоты кривой третьего порядка

$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+ex^2+2fxy+gy^2+hx+ky+l=0,$$

то $\mu=\mu'+\frac{c}{d}$ находится из уравнения

$$\mu'^3+3\left(\frac{b}{d}-\frac{c^2}{d^2}\right)\mu'+\left(2\frac{c^3}{d^3}-\frac{2bc}{d^2}+\frac{a}{d}\right)=0,$$

которое, смотря по тому, будет ли

$$H=4\left(\frac{b}{d}-\frac{c^2}{d^2}\right)^3+\left(2\frac{c^3}{d^3}-\frac{2bc}{d^2}+\frac{a}{d}\right)^2$$

отрицательно, положительно и равно нулю, имеет:

1) три действительных неравных корня,

2) два мнимо сопряженных и один действительный корень,

3) два или три равных действительных корня.

При $H<0$ кривая — гиперболического типа, она имеет в бесконечности три действительные различные точки, которым соответствуют гиперболические ветви. При $H>0$ кривая — эллиптического типа, она имеет в бесконечности одну действительную и две мнимо сопряженные точки, первой из этих точек соответствует гиперболическая ветвь, кривая состоит из этой ветви и замкнутого овала. При $H=0$ кривая — параболического типа, она касается бесконечно удаленной прямой и имеет ветвь с асимптотой или бесконечно удаленная прямая является для нее соприкасающейся прямой.

О «декартовой параболе», или трезубце, см. прим. 9 к предыдущему отрывку.

8. Далее перечислены и охарактеризованы 5—63-й виды гипербол, которые мы опускаем.

9. Мы опускаем следующие далее объяснения применяемых Ньютоном наименований различных форм, а из перечисленных 72 видов кривых третьего порядка приводим только 5 видов, принадлежащих III типу.

10. С точки зрения проективной геометрии это утверждение означает, что имеется пять проективных классов кривых третьего порядка. Пять расходящихся парабол — это 67—71-й виды III типа.

11. Здесь впервые вводится понятие о двойной точке алгебраической кривой. Далее Ньютон сообщает несколько теорем о проективном образовании кривых второго порядка и кривых третьего порядка, имеющих двойные точки.

г. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ИЗ II ТОМА «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» Л. ЭЙЛЕРА (1748)

[№ 57, т. II, с. 230—232.]

441. Таким образом, когда природа заданной кривой AM выражается каким-нибудь уравнением между координатами $AP = x$ и $PM = y$, то без труда можно получить уравнение для подобной ей кривой am. Действительно, пусть подобная абсцисса $ap = X$ и ордината $pm = Y$. Тогда по построению будет $x:X = 1:n$ и $y:Y = 1:n$, откуда получается

$$x = \frac{X}{n} \text{ и } y = \frac{Y}{n}.$$

Следовательно, если эти значения подставить в заданное уравнение между x и y, то получится уравнение между X и Y для подобных кривых. Поэтому, если считать, что в этом новом уравнении только координаты X и Y с буквой n создают размерность, то число размерностей будет повсюду равно нулю; или же если уравнение для освобождения от дробей умножить на какую-нибудь степень n, то получится уравнение, в котором количества X, Y и n повсюду дадут одинаковое число измерений. Но раньше мы видели, что в каждом уравнении для подобных кривых обе координаты повсюду образуют одно и то же число измерений вместе с той постоянной, при измерении которой получаются подобные кривые, так что это является критерием для уравнений, которые содержат в себе подобные кривые.

442. В соответствии с тем, как у подобных кривых гомологичные абсциссы и ординаты либо увеличиваются, либо уменьшаются в одном и том же отношении, в том случае, когда абсциссы следуют одному отношению, а ординаты другому, кривые уже не будут подобными. Но так как возникающие при этом кривые находятся между собою в некоторой связи, то мы назовем эти кривые аффинными **(1)**. Таким образом, аффинность содержит в себе подобие в качестве особого вида, так как аффинные линии переходят в подобные, когда те два отношения, которым следуют отдельно абсциссы и ординаты, становятся равными между собою. Стало быть, если дана какая-нибудь кривая линия AMB, то можно получить бесчисленные аффинные кривые (рис. 59 и 60) amb следующим способом: надо взять абсциссу ap таким обра-

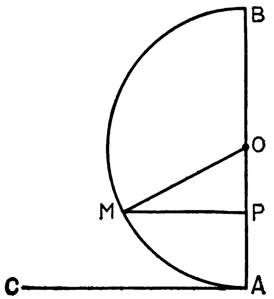


Рис. 59.

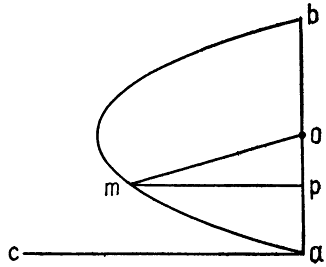


Рис. 60.

зом, чтобы было $AP:ap=1:m$; затем провести ординату pm таким образом, чтобы было $PM:pm=1:n$. Указанным путем, изменяя оба эти отношения $1:m$ и $1:n$ или же одно из них, можно получить бесчисленные кривые, которые будут аффинными по отношению к первой кривой AMB.

443. Пусть природа заданной кривой AMB выражается каким-нибудь уравнением между прямоугольными координатами $AP=x$ и $PM=y$ и пусть на аффинной кривой amb, описанной, как изложено выше, взята абсцисса $ap=X$ и ордината $pm=Y$; так как

$$x:X=1:m \text{ и } y:Y=1:n,$$

будем иметь

$$x=\frac{X}{m} \text{ и } y=\frac{Y}{n}.$$

Следовательно, если эти значения подставить в заданное уравнение между x и y, то получится общее уравнение между X и Y для аффинных линий. Для того чтобы более глубоко выявить природу этого уравнения, предположим, что уравнение для заданной кривой AMB образовано так, что ордината y равняется некоторой функции x, которая пусть $=P$, т. е. что $y=P$. Следовательно, если в P вместо x подставить $\frac{X}{m}$, то P будет функцией нулевого измерения от X и m и, значит, общее уравнение для аффинных кривых будет иметь такую структуру, что $\frac{Y}{n}$ будет равно функции нулевого измерения количества x и m, что сводится к тому же, функция нулевого измерения количеств Y и n будет равняться функции нулевого измерения количеств X и m.

444. Но различие между подобными кривыми линиями и аффинными состоит главным образом в том, что кривые, которые являются подобными по отношению к некоторой оси или по отношению к неподвижной точке, остаются подобными и по отношению к любым другим гомологичным осям или точкам. А кривые, которые являются лишь аффинными, оказываются таковыми только по отношению к тем осям, к которым их относят, и нельзя произвольно выбирать другие оси или другие гомологичные точки, к которым можно было бы отнести аффинность. Впрочем, следует отметить, что аналогично тому, как все подобные кривые линии относятся к одному и тому же порядку линий и даже к одному и тому же роду линий, аффинные линии всегда относятся к одному и тому же порядку и к одному и тому же роду. Для того чтобы это стало более ясным, следует проиллюстрировать подобие и аффинность на нескольких примерах, беря более известные кривые.

445. Итак, пусть заданная кривая представляет собою отнесенную к диаметру окружность, природа которой выражается уравнением $y^2=2cx-x^2$. Положим

$$x=\frac{X}{n} \text{ и } y=\frac{Y}{n},$$

тогда получающееся уравнение между X и Y охватит все подобные кривые. Мы будем тогда иметь

$$\frac{Y^2}{n^2}=\frac{2cX}{n}-\frac{X^2}{n^2},$$

т. е.

$$Y^2=2ncX-X^2.$$

Отсюда ясно, что все кривые, подобные окружности, также являются окружностями, у которых диаметры $2nc$ разнятся между собою как угодно. А для того чтобы найти кривые, аффинные окружности, положим

$$x=\frac{X}{m} \text{ и } y=\frac{Y}{n};$$

тогда получается

$$\frac{Y^2}{n^2}=\frac{2cX}{m}-\frac{X^2}{m^2}$$

или

$$m^2Y^2=2mn^2cX-n^2X^2;$$

последнее представляет собою общее уравнение эллипса, отнесенное к одной из его главных осей. Отсюда понятно, что все эллипсы являются кривыми линиями, аффинными окружностями. Стало быть, все эллипсы являются также линиями, аффинными друг другу. Равным образом можно также понять, что все гиперболы являются аффинными друг другу кривыми. Но эллипсы, а также гиперболы, у которых одинаково отношение между двумя главными осями, являются подобными друг другу кривыми.

446. Что касается параболы, которая выражается с помощью уравнения $y^2=cx$, то, конечно, ясно, что все подобные ей кривые тоже являются параболами, и к тому же все параболы суть кривые, подобные друг другу. Но если мы будем искать кривые, аффинные параболе, и положим

$$y=\frac{Y}{n} \text{ и } x=\frac{X}{m},$$

то получится уравнение $Y^2=\frac{n^2c}{m}X$; так как это последнее также является уравнением для параболы, то ясно, что те кривые, которые аффинны по отношению к параболе, одновременно подобны параболе. Таким образом, в данном случае подобие обладает столь же широким охватом, как и аффинность. То же самое имеет место у всех кривых линий, природа которых выражается с помощью уравнения, состоящего лишь из двух членов, как например, $y^3=c^2x$, $y^3=cx^2$, $y^2x=c^3$ и т. д. Таким образом, те кривые, которые обладают аффинностью то ли по отношению к параболическим, то ли по отношению к гиперболическим кривым, вместе с тем подобны этим линиям. Такого рода совпадения нет у кривых другого рода, как мы уже отметили это выше по отношению к окружности и эллипсу **(2)**.

Примечания. Второй том «Introductio in analysin infinitorum» Эйлера включает вопросы, которые обычно относят, как писал он в предисловии, к высшей геометрии: общую теорию кривых линий на основе аналитической геометрии, классификацию и исследование кривых второго, третьего и четвертого порядков, учение о поверхностях второго порядка (см. следующий отрывок), небольшую главу о важнейших трансцендентных кривых. Изложение в сравнении с трудами предшествующих авторов гораздо более близко к курсам аналитической геометрии конца XIX и начала XX в.; в частности, здесь впервые дано в широком объеме аналитическое построение кривых второго порядка; впрочем, общая теория их инвариантов еще отсутствует. Приведенный отрывок взят из XVIII главы «О подобии и аффинности кривых линий».

1. Термин «аффинность» ввел в геометрию Эйлер; латинское слово affinitas означает свойство, родство по мужу или жене. Архимед в сочинении «О коноидах и сфероидах» использовал простейшее аффинное преобразование — прямое сжатие фигур на плоскости к прямой при доказательстве некоторых теорем об эллипсе, в частности при определении его площади. Более общее эквиаффинное преобразование применил в «Книге о сечениях цилиндра и его площади» Сабит ибн Корра (IX в.), а его внук Ибрахим ибн Синан в «Книге об измерении параболы» (X в.) с помощью аффинного преобразования общего вида вычислил площади сегмента параболы. В Европе сжатие применяли С. Стевин и Григорий Сен Венсан, а аффинные преобразования общего вида появились в одном мемуаре Клеро, опубликованном в 1733 г. Вводя термин «аффинность», Эйлер подчеркивал, что между «аффинными кривыми» родство значительно меньше, чем между подобными и тем более между «подобными и равными», т. е. конгруэнтными, линиями. Эйлер рассматривает не самый общий вид аффинного преобразования, а преобразование, состоящее из двух прямых сжатий или растяжений по двум перпендикулярным направлениям.

2. С точки зрения проективной геометрии все конические сечения образуют единый класс «проективных» между собой кривых, с точки зрения аф-

финной геометрии конические сечения подразделяются на три класса «аффинных» между собой фигур — эллипсы, гиперболы и параболы, причем параболы, как отмечал еще Кеплер (см. ч. III, п. 7а), подобны друг другу.

Под «гиперболическими линиями» в конце абзаца имеются в виду кривые $y^m x^n = c^{m+n}$.

д. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА; ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИДЫ

ИЗ «ПРИЛОЖЕНИЯ О ПОВЕРХНОСТЯХ» ВО II Т. «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» Л. ЭЙЛЕРА (1748)

[№ 57, т. II, с. 353—358.]

113. Так как общее уравнение можно привести к более простому виду, меняя положение трех осей, которым параллельны координаты, то мы воспользуемся этим приведением для того, чтобы общее уравнение поверхностей второго порядка свести к простейшей форме, в которой, однако, как и в общей, будут содержаться все виды. Итак, поскольку общим уравнением для поверхности второго порядка является

$$\alpha z^2 + \beta yz + \gamma xz + \delta y^2 + \varepsilon xy + \zeta x^2 + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

то мы будем искать уравнение между тремя другими координатами p, q и r, которые, впрочем, пересекаются взаимно в той же точке, что и первые три. С этой целью в соответствии с § 92 **(1)** мы положим

$$x = p(\cos k \cos m - \sin k \sin m \cos n) + \\ + q(\cos k \sin m + \sin k \cos m \cos n) - r \sin k \sin n$$

и

$$y = -p(\sin k \cos m + \cos k \sin m \cos n) - \\ - q(\sin k \sin m - \cos k \cos m \cos n) - r \cos n,$$

а также

$$z = -p \sin m \sin n + q \cos m \sin n + r \cos n,$$

откуда получается следующее уравнение:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Произвольные углы k, m и n можно определить так, чтобы исчезали три коэффициента D, E и F ... **(2)**. Стало быть, таким образом, уравнение для поверхностей второго порядка приводится к следующему виду:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

. . . . **(3)**

123. Для определения следующих родов рассмотрим случай, когда один из коэффициентов A, B, C исчезает. Итак, пусть

будет $C=0$. Тогда общее уравнение, найденное в § 114, будет

$$Ap^2+Bq^2+Gp+Hq+Ir+K=0.$$

В этом уравнении, уменьшая или увеличивая координаты p и q, можно уничтожить члены Gp и Hq, но не Ir. Итак, в уравнении остается член Ir, и с его помощью можно уничтожить последний член K, так что будем иметь уравнение вида

$$Ap^2+Bq^2=ar.$$

Здесь надо рассмотреть два случая; первый, когда оба коэффициента A и B положительны, и второй — когда один из них отрицателен. Но как в том, так и в другом случае центр поверхности расположен на оси CD, но отодвинут на бесконечное расстояние **(4)**.

124. Пусть, во-первых, оба коэффициента A и B положительны. В этом случае получается четвертый род, который содержится в уравнении

$$Ap^2+Bq^2=ar.$$

Итак, первое главное сечение (рис. 61), которое получаем, когда положим $r=0$, исчезает, обращаясь в точку. Второе же главное сечение, которое получаем, положив $q=0$, и третье, которое получаем, положив $p=0$, будут параболами, а именно MAm и NAn. Так как все сечения этой поверхности, перпендикулярные осй AO, являются эллипсами, а сечения, проведенные через эту ось, суть параболы, мы будем называть тела этого рода эллиптико-параболическими **(5)**. Следует отметить два вида этого рода: один, когда $A=B$, и в этом случае получается тело вращения, которое называют параболическим коноидом **(6)**; другой — когда $a=0$, так что получается

$$Ap^2+Bq^2=b^2,$$

что дает цилиндры, как прямые, если $A=B$, так и наклонные, если A и B не равны.

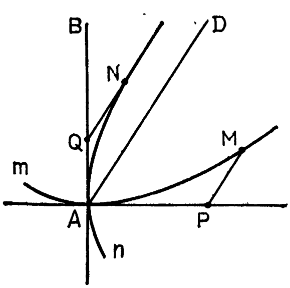


Рис. 61.

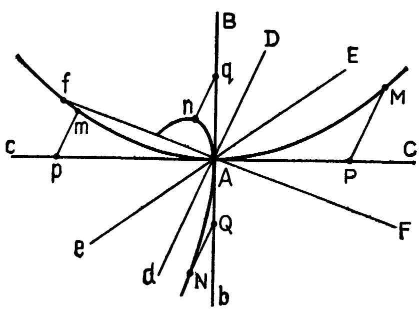


Рис. 62.

125. Пятый род содержится в уравнении

$$Ap^2 - Bq^2 = ar.$$

Его первое главное сечение в виде двух прямых линий Ee и Ff (рис. 62), пересекающихся в точке A, мы получим, положив $r = 0$. А все сечения, параллельные этому главному сечению, будут гиперболами, которые имеют центры на оси AD и заключены между прямолинейными асимптотами Ee и Ff. Таким образом, те две плоскости, которые пересекаются с плоскостью ABC по прямым Ee и Ff под прямым углом, сливаются на бесконечности с предложенной поверхностью, и, стало быть, для этой поверхности асимптотой являются две взаимно пересекающиеся плоскости. Остальные главные сечения, образуемые плоскостями ACD и ABd, являются параболами, и поэтому мы будем называть относящиеся к указанному роду поверхности параболически-гиперболическими **(6)**. В качестве асимптот они имеют две плоскости **(7)**. Видом этого рода (если $a = 0$, так что $Ap^2 - Bq^2 = b^2$) является гиперболический цилиндр **(8)**, все сечения которого, перпендикулярные оси AO, суть равные между собой гиперболы. Если, кроме того, взять $b = 0$, то получаются те же две асимптотические плоскости.

Примечания. Уравнение поверхности в пространственных координатах, именно некоторого параболоида вращения, впервые встречается у Ф. де Лагира (1679). В первой половине XVIII в. были установлены и исследованы уравнения некоторых других поверхностей и заложены общие основы аналитической геометрии в пространстве. Первое систематическое изложение вопроса дал Эйлер в «Приложении», из которого взят приведенный отрывок; здесь же впервые теория поверхностей второго порядка строится на основе их общего уравнения и его преобразования к каноническим формам.

1. В п. 92 «Приложения» даны общие формулы преобразования системы прямоугольных координат в пространстве путем поворота осей на три «эйлеровых угла» k, m, n и переноса начала; эти углы часто применяются в механике.

2. Это утверждение Эйлер оставляет без полного доказательства.

3. Мы опускаем следующее далее рассмотрение центральных поверхностей, т. е. поверхностей, у которых все три коэффициента A, B, C отличны от нуля. В этом случае путем переноса начала координат уравнение приводится к виду $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + K = 0$ или, отбрасывая мнимые поверхности, к виду $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2$. В зависимости от знаков A, B, C Эйлер различает три рода поверхностей: эллипсоид, в котором в качестве видов выделяются сфера и сфероиды (эллипсоиды вращения), «эллиптико-гиперболическую поверхность» (двуполостной гиперболоид), где в качестве видов выделяется конус ($a^2 = 0$) и гиперболоид вращения, и «гиперболо-гиперболическую поверхность» (однополостный гиперболоид), где в качестве видов также выделяется конус и гиперболоид вращения.

4. Таким образом, рассматриваемые поверхности могут быть получены из центральных предельным переходом, при котором центр становится бесконечно удаленной точкой координатной оси r.

5. «Эллиптико-параболическая поверхность» — эллиптический параболоид (современные названия поверхностей второго порядка по аналогии с применявшимся Эйлером термином «эллиптоид» были введены Г. Монжем и Ж. Н. П. Ашеттом, 1805). Приведем для наглядности чертеж Эйлера в перспективе (рис. 63).

6. Параболический коноид — параболоид вращения. Это название, как и название «сфероид» для эллипсоида вращения, восходит к трактату Архимеда

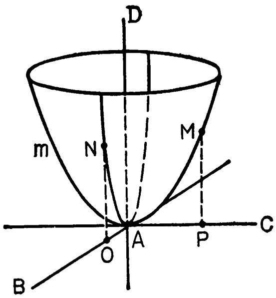


Рис. 63.

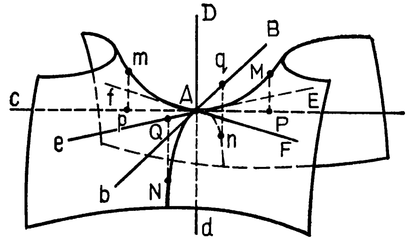


Рис. 64.

«О коноидах и сфероидах», где наши параболоид и двуполостной гиперболоид вращения называются соответственно прямоугольным и тупоугольным коноидами (ср. ч. III, п. 5а, прим. 1).

6. «Параболически-гиперболическая поверхность» — гиперболический параболоид рассматривается здесь впервые. Приведем чертеж Эйлера в перспективе (рис. 64).

7. С проективной точки зрения параболоиды — поверхности второго порядка, касающиеся бесконечно удаленной плоскости, причем эллиптический параболоид находится целиком по одну сторону от этой плоскости, а гиперболический параболоид пересекается с ней по паре своих прямолинейных образующих. Под асимптотическими плоскостями Эйлер понимает плоскости, для которых указанные бесконечно удаленные прямолинейные образующие являются бесконечно удаленными прямыми, однако эти плоскости определены с точностью до переноса и не являются асимптотическими плоскостями в точном смысле этого слова, асимптотической плоскостью параболоида можно считать только самую бесконечно удаленную плоскость.

Эйлер обнаружил на данной поверхности две действительные прямые *eE* и *fF*; семейства прямолинейных образующих этой поверхности были обнаружены и изучены У. Брейкенриджем в 1759 г. и более подробно А. Модюи в 1763 г., а затем Г. Монжем и др.

8. В случае гиперболического цилиндра из-за отсутствия члена *ar* свободный член не может быть устранен с помощью переноса системы координат.

7. СОЗДАНИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

а. БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫЙ ФОКУС ПАРАБОЛЫ

ИЗ ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЫ «ДОПОЛНЕНИЯ К ВИТЕЛО, В КОТОРЫХ ИЗЛАГАЕТСЯ ОПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ АСТРОНОМИИ» ИОГ. КЕПЛЕРА (1604)

[№ 86, с. 90—92; перевод Б. А. Розенфельда.]

4. *О конических сечениях.* Конусы бывают различные — прямоугольные, остроугольные и тупоугольные, а также прямые, или правильные, и наклонные, или неправильные, или сжатые (1),

о них, смотри Аполлония и Евтокия в комментариях к нему. Сечения же всех видов распадаются на пять видов. А именно: линия на поверхности конуса, образованная сечением, или прямая, или круг, или парабола, или гипербола, или эллипс. Такой порядок этих линий имеет причину в их свойствах, выражаясь более по аналогии, чем геометрически: прямая линия переходит в параболу через бесконечные гиперболы, а далее через бесконечные эллипсы в круг. В самом деле, самая тупая из гипербол — прямая линия, а самая острая — парабола, самый острый из эллипсов — парабола, а самый тупой — круг (2). Таким образом, парабола имеет по одну сторону от себя две бесконечные природы — гиперболу и прямую, а по другую сторону — две конечные, возвращающиеся в себя, — эллипс и круг. Сама же она обладает промежуточной природой, а именно сама она бесконечна, но с другой стороны, стремится к конечности и, чем дальше она продолжается, тем более она параллельна самой себе; ее ветви, если можно так выразиться, расходятся не так, как у гиперболы, у которой они расходятся в стороны, [у параболы] они сходятся в бесконечности, всегда более достигая, чем стремясь, в то время как гипербола, чем больше фактически охватывает своими ветвями, тем больше стремится.

Таким образом, у крайних членов — круга и прямой — там чистая кривизна, а здесь — чистая прямизна. Гипербола же, парабола и эллипс — промежуточные и частью прямые, частью кривые: в параболе поровну, в гиперболе больше прямизны, а в эллипсе больше кривизны. Поэтому, чем больше продолжать гиперболу, тем более она будет подобна прямой — своей асимптоте, а чем больше продолжать эллипс за его середину, тем более он стремится к форме круга и в конце концов возвращается к себе. Парабола же находится на промежуточном месте, всегда кривее гиперболы, если обе одинаково продолжать, и всегда прямее эллипса. И если круг и прямая находятся на краях, парабола находится посередине, и если все прямые подобны, так же как круги, то и все параболы подобны (3), отличаясь только величиной.

Во всех этих линиях имеются некоторые точки, заслуживающие особого рассмотрения, которые имеют некоторое определение, но не имеют названия, если только не применять вместо названия их определения или свойства. Прямые, проведенные из этих точек к точке касания касательной к сечению, образуют равные углы с ней, если соединить противоположные точки с одной и той же точкой касания. По причине [учения о] свете и устремляя глаза к механике, мы будем называть эти точки фокусами (4). Мы говорили о центрах, находящихся на осях сечений, когда в случае гиперболы и эллипса авторы [сочинений о] конических сечениях не называли центрами никаких других точек. Итак, у круга имеется один фокус A, он же и его центр (рис. 65). У эллипса имеются два фокуса, A и B, равноудаленные от центра фигуры и, чем острее эллипс, тем более удаленные. У параболы же имеется только один фокус D внутри сечения, а другой следует представлять себе на оси сечения внутри или вне его удаленным от первого на бесконечное расстояние, так что прямая HG или IG, проведенная из этого невидимого фокуса (5) к любой точке сечения, будет параллельна оси DK. У гиперболы внешний фокус тем ближе к внутреннему, чем гипербола тупее, причем тот из фокусов, который вне одного из противоположных сечений, — внутри другого, и наоборот.

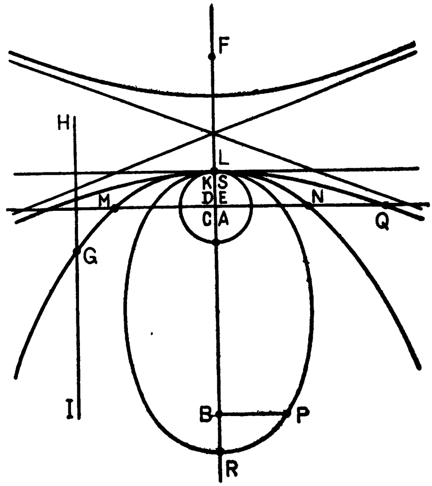


Рис. 65.

Итак, из аналогии следует, что для прямой линии оба фокуса (говорим так о прямой не обычным образом, а для полноты аналогии) совпадают на этой прямой. Один фокус имеется и в круге. В круге фокус — в его центре и наиболее удален от ближайшего [места] окружности, в эллипсе уже менее удален, в параболе еще меньше, и, наконец, на прямой фокус наименее удален от нее, т. е. лежит на ней. Итак, в крайних случаях круга и прямой фокусы совпадают; там фокус наиболее отстоит от круга, а здесь он лежит на прямой. В среднем случае фокусы находятся на бесконечном расстоянии, в случаях же эллипса и гиперболы фактически имеются оба фокуса, находящиеся на конечном расстоянии, причем в эллипсе второй фокус — внутри сечения, а в гиперболе — вне его, во всем отношения противоположны.

Линию MN, пересекающую ось в фокусе перпендикулярно оси, будем называть хордой, а высоту, протянутую от фокуса до ближайшей части сечения — вершины, т. е. ось BR, или DK, или ES, будем называть стрелой или осью. Тогда в круге стрела равна полухорде, в эллипсе полухорда BP больше стрелы BR, но стрела BR больше половины полухорды BR, т. е. четверти хорды. В параболе, как доказал Витело, стрела DK в точности равна четверти хорды MN, т. е. DN — удвоенная DK. В гиперболе EQ больше, чем удвоенная ES, поэтому стрела ES меньше четверти хорды EQ и всегда меньше, меньше во всех отношениях, пока не дойдет до прямой, у которой фокус падает на самое линию и высота фокуса или стрела исчезает, а хорда становится бесконечной, совпадая со своей дугой, если можно так выразиться, так как эта прямая линия. Итак, желательно подчинять геометрические рассуждения аналогии; я особенно люблю эти аналогии, моих вернейших учителей, свидетелей тайн природы; преимущественно же в геометрии следует им следовать, ибо они своими крайними случаями, речи о которых могут быть странными, охватывают бесконечные случаи и ясно обнаруживают перед нашими глазами сущность любой вещи.

Примечания. Сочинение Кеплера «Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur» (Francofurti, 1604) явилось первым из двух больших трудов Кеплера по оптике; второй, посвященный теории изобретенной тогда в Голландии подзорной трубы, вышел в 1611 г. В четвертой главе «Дополнений к Вителло» изложена математическая теория рефракции и в связи с этим рассмотрены некоторые свойства конических сечений. Вителло был крупным польским физиком и философом XIII в., «Оптика» которого, во многом примыкавшая к «Книге оптики» Ибн ал-Хайсама, пользовалась большой известностью и была трижды издана в XVI в.

1. Под «сжатым конусом» Кеплер понимал эллиптический конус, получающийся сжатием прямого кругового конуса к одной из плоскостей, проходящих через его ось.

2. Эти выражения Кеплера означают, что он считал прямую и параболу предельными случаями гиперболы, а параболу и окружность — предельными случаями эллипса.

3. Здесь Кеплер впервые формулирует это важное свойство парабол.

4. Здесь Кеплер впервые вводит термин «фокус», от латинского focus — «очаг, огонь». При этом Кеплер руководствовался известными оптическими свойствами параболических и эллиптических зеркал. По этой же причине Вителло и Ибн ал-Хайсам называли фокус параболы «местом зажигания».

5. Невидимый (caecus) фокус параболы — бесконечно удаленная точка, которую Кеплер рассматривает как точку пересечения пучка параллельных прямых. Слово caecus имеет также значение «слепой», поэтому возможно, что Кеплер ввел этот термин для идеальной точки по аналогии со средневековым термином для иррациональных чисел surdus — «глухой».

6. ИНВОЛЮЦИЯ

ИЗ «ЧЕРНОВОГО НАБРОСКА ПОДХОДА К ЯВЛЕНИЯМ, ПРОИСХОДЯЩИМ ПРИ ВСТРЕЧЕ КОНУСА С ПЛОСКОСТЬЮ» Ж. ДЕЗАРГА (1639)

[№ 73, с. 108—110; перевод П. С. Юшкевича.]

Если у дерева AH ствол A свободен по отношению к обеим ветвям (1) каждой из пар AC, AG; AF, AD; AB, AH (рис. 66), то тот же ствол, очевидно, свободен и по отношению к обоим узлам каждой из пар C, G; D, F; B, H; и оба узла каждой из этих пар C, G; D, F; B, H, очевидно, тоже отделены от обоих узлов любой другой пары (2).

И наоборот, если у какого-нибудь дерева оба узла любой пары C, G отделены от обоих узлов любой другой пары D, F, то и ствол A свободен по отношению к обоим узлам и обеим ветвям каждой из пар.

Отсюда, очевидно, следует, что если у какого-нибудь дерева HB дан вид какого-нибудь одного из всех этих положений ствола, ветвей и узлов друг относительно друга, но тем самым дан и вид всех других положений прочих из этих самых вещей.

И вообще, при каждом из этих обоих видов образования дерева [имеет место следующее].

Как какая-нибудь из ветвей AG относится к своей парной AC, так относится прямоугольник на любой паре побегов GD, GF, которые носит на себе эта произвольная ветвь AG, к своему соответствующему прямоугольнику CD, CF.

Действительно, ввиду равенства прямоугольников на обеих ветвях каждой из трех пар AB, AH; AC, AG; AD, AF четыре ветви AG, AF, AD, AC попарно пропорциональны. Отсюда следует, что как AG относится к AF или же AD к AC, так относится GD к CF и что как AF относится к AC или же AG к AD, так относится GF к CD.

Следовательно, ветвь AG находится в таком же отношении к парной с ней ветви AC, как соединение отношений побега GD к побегу CF и побега GF к побегу CD, что равно отношению прямоугольника на побегах пары GD, GF к прямоугольнику на побегах соответствующей пары CD, CF (4).

Отсюда следует, что прямоугольник на побегах GB, GH — близнец (5) прямоугольника GD, FG — так относится к своему соответствующему прямоугольнику CB, CH, близнецу прямоугольника CD, CF, как прямоугольник GD, GF — близнец прямоугольника GB, GH — относится к своему соответствующему прямоугольнику CD, CF — близнецу прямоугольника CB, CH (6).

Ибо, по доказанному, прямоугольник на побегах пары GB, GH относится к своему соответствующему прямоугольнику CB, CH, как ветвь AG к своей парной AC.

Кроме того, также доказано, что прямоугольник на побегах GD, GF относится к своему соответствующему прямоугольнику CD, CF, как та же самая ветвь AG к парной с ней AC.

Следовательно, прямоугольник на побегах GB, GH — близнец прямоугольника GD, GF — относится к своему соответствующему прямоугольнику CB, CH, как прямоугольник GD, GF к своему соответствующему прямоугольнику CD, CF.

Отсюда следует, что и прямоугольник на побегах FC, FG относится к своему соответствующему прямоугольнику DC, DG, как прямоугольник на побегах FB, FH к своему соответствующему прямоугольнику на побегах DB, DH. Именно это отношение равно отношению ветви AF к парной с ней AD.

Отсюда следует также, что прямоугольник на побегах HC, HG относится к своему соответствующему прямоугольнику BC, BG, как прямоугольник на побегах HD, HF к своему соответствую-

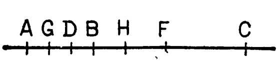


Рис. 66.

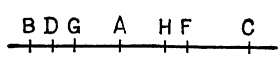


Рис. 67.

щему прямоугольнику BD, BF. Именно это отношение ветви AH к парной с ней ветви AB.

Инволюция. И таким образом, если на прямой AH даны три пары точек B, H; C, G; D, F такого свойства, что обе точки в каждой паре одновременно либо смешаны (рис. 67), либо отделены (7) по отношению к обеим точкам каждой другой пары, и если соответствующие друг другу прямоугольники из отрезков между этими точками относятся друг к другу так, как их близнецы, если их взять в том же самом порядке, то такое расположение трех пар точек на прямой называется здесь инволюцией (8).

Примечания. Оригинальные труды Дезарга по проективной геометрии привлекали внимание лишь очень немногих ученых XVII в. и получили в то время только незначительное развитие, прежде всего у юного Б. Паскаля (см. следующий отрывок). Пятьдесят напечатанных экземпляров «Чернового наброска» быстро исчезли из виду, и Лейбниц, интересовавшийся проективной геометрией, не смог через 35 лет после его издания найти в Париже ни одного экземпляра книги. В дальнейшем о Дезарге надолго забыли. Только случайно в 1845 г. М. Шаль обнаружил у одного парижского букиниста не совсем полную копию этого труда, переписанную для себя в 1679 г. геометром Ф. де Лагиром. И еще примерно через сто лет единственный сейчас экземпляр издания «Чернового наброска» 1639 г. столь же случайно был найден П. Муази в Парижской Национальной библиотеке, в каталогах которой эта книга не значилась [см. № 73, с. 87—91].

В приведенном отрывке изложены начала теории проективных преобразований, на которых Дезарг далее строит учение о конических сечениях, и в частности теорию поляр.

1. Дезарг называет «деревом» (arbre) прямую, на которой задано несколько пар точек, обладающих тем свойством, что произведения отрезков с началом в некоторой точке, называемой «стволом» (souche), и с концами в данных парах точек равны. Точки данных пар называются «узлами» (noeuds), а отрезки, соединяющие «ствол» с «узлами»—«ветвями» (branches); «ветви», соответствующие друг другу, называются «парными» (couplées). Здесь рассматривается «дерево» со «стволом A» и парами соответствующих «узлов» B и H, C и G, D и F, т. е. предполагается выполнение равенств

$$AB\cdot AH=AC\cdot AG=AD\cdot AF. \qquad (1)$$

2. «Отдельными» (буквально: распутанными, démuselés) называются две пары точек, не разделяющие друг друга.

3. «Побег» в терминологии Дезарга—отрезок между двумя «узлами». Здесь утверждается, что

$$\frac{AG}{AC}=\frac{GD\cdot GF}{CD\cdot CF}. \qquad (2)$$

4. «Соединение отношений» (la composée des raisons)—это образование составного отношения (см. ч. III, п. 5а, прим. 5). Таким образом, из равенства (1) получаются пропорции

$$\frac{AG}{AF}=\frac{AD}{AC}=\frac{GD}{CF} \quad \text{и} \quad \frac{AF}{AC}=\frac{AG}{AD}=\frac{GF}{CD},$$

а затем пропорция (2).

5. «Близнецы» (gémeaux)—это произведения «побегов», одни концы которых—одни и те же соответственные «узлы», а другие концы—разные пары

соответственных «узлов»; слово «близнец» можно было бы заменить словом «аналог».

6. Пропорция

$$\frac{GD\cdot GF}{CD\cdot CF}=\frac{GB\cdot GH}{CB\cdot CH}$$

может быть записана в виде равенства двойных отношений (см. ч. III, п. 5б, прим. 2):

$$\overline{GC,\ DF}=\overline{GC,\ BH},$$

и, так как в этой пропорции любая пара соответственных узлов можеть быть заменена любой другой, доказанная Дезаргом теорема означает, что установленное им соответствие между «узлами» «дерева» является проективным соответствием между точками этой прямой, причем в силу равноправия «узлов» каждой пары в этом двойном отношении каждую пару соответственных узлов можно поменять друг с другом. При такой замене каждое из двойных отношений заменяется на обратное, и отсюда следует, что все эти двойные отношения равны 1 или, если считать длины отрезков ориентированными, —1, т. е. соответственные четверки точек являются гармоническими.

7. О термине «отделены» см. прим. 2; словом «смешаны» переведен термин meslez.

8. Название «инволюция» (involution) для установленного Дезаргом проективного соответствия на прямой также ботанического происхождения и означает скрученное состояние молодых листьев. При надлежащем выборе начала отсчета на прямой инволюция отделенных пар точек может быть записана в виде

$$x'=\frac{a^2}{x}, \tag{3}$$

а инволюция смешанных пар точек — в виде

$$x'=-\frac{a^2}{x}. \tag{4}$$

Можно показать, что соответственные пары точек инволюции (3) высекаются из прямой окружностями с центрами на ней, ортогональными окружности $x^2+y^2=a^2$, а соответственные пары точек инволюции (4) высекаются из прямой окружностями, проходящими через точки $(0, a)$ и $(0, -a)$. В настоящее время инволюционным называется любое преобразование, совпадающее с обратным ему.

в. ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ

ИЗ «ОПЫТА О КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЯХ» Б. ПАСКАЛЯ (1640)

[№ 41, с. 602—607.]

Определение I. Если несколько прямых линий сходятся в одной точке или все параллельны между собой, то говорят, что все эти линии одного порядка (ordre) или одинакового расположения (ordonnance) и множество этих линий называется порядком линий или расположением линий (1).

. . . .

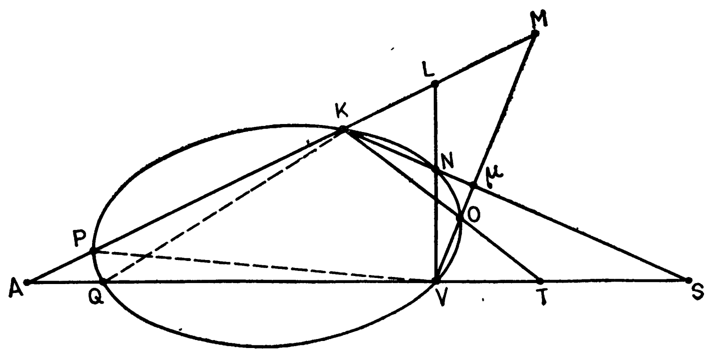


Рис. 68.

Лемма I. Если (рис. 68) в плоскости MSQ из точки M выходят две прямые MK, MV и из точки S выходят две прямые SK, SV, и если K есть точка пересечения прямых MK, SK, а V — точка пересечения прямых MV, SV и A — точка пересечения прямых MK, SV и μ — точка пересечения прямых MV, SK, и если через две из четырех точек A, K, μ, V, которые не находятся на одной прямой с точками M, S, как [например] через точки K, V, проходит окружность, пересекающая прямые MV, MK, SV, SK в точках O, P, Q, N, то я утверждаю, что прямые MS, NO, PQ суть одного порядка **(2)**.

Лемма II. Если через одну и ту же прямую проходят несколько плоскостей, пересекаемых другой плоскостью, то все линии пересечения этих плоскостей одного порядка с прямой, через которую проходят названные плоскости.

Установив эти две Леммы и некоторые легкие следствия из них, мы докажем, что если при тех же обстоятельствах, что и в первой Лемме, через точки K, V проходит какое-либо коническое сечение, которое пересекает прямые MK, MV, SK, SV в точках P, O, N, Q, то прямые MS, NO, PQ будут одного порядка,— это будет третьей Леммой.

Исходя из этих трех лемм и некоторых их следствий, мы приведем полные Начала [теории] конических сечений, а именно: все свойства диаметров и прямых сторон, касательных и т. д., восстановление Конуса почти по всем данным **(3)**, описание сечений Конуса при помощи точек и т. д. **(4)**.

Примечания. «Essai pour les coniques» шестнадцатилетнего Б. Паскаля, был издан в виде афиши на одном листе, напечатанной в 50 экземплярах, которые были прибиты на стенах домов или же розданы ученым. В «Опыте» имелось всего 53 строки текста и доказательства отсутствовали. Позднее Паскаль составил — но не вполне закончил — труд о конических сечениях, рукопись которого до сих пор не обнаружена. О содержании этого труда можно судить по письму Лейбница от 30 августа 1676 г. к племяннику Паскаля Э. Перье, приславшему эту рукопись Лейбницу для ознакомления, а также по некоторым сохранившимся фрагментам [см. № 41, с. 607—610].

1. Это определение и термин ordonnance Паскаль заимствовал у Дезарга. Мы теперь говорим о пучке прямых.

2. Такова первоначальная форма теоремы Паскаля в случае окружности; несколькими строками далее она распространяется на любые конические сечения. В привычной теперь формулировке эта теорема, которую Дезарг назвал «великой» и «Паскалью», гласит: во всяком выпуклом или звездчатом шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, точки пересечения трех пар противоположных сторон или их продолжений лежат на одной прямой. В «Опыте» Паскаля о шестиугольнике $PQVONK$ не говорится, но из заметок Лейбница мы знаем, что и такая формулировка была известна Паскалю и что он назвал эту вписанную фигуру «таинственным шестилинейником» (Hexagramma mysticum). Переводчик «Опыта» на русский язык Г. И. Игнациус дал реконструкцию вероятного вывода теоремы самим Паскалем [№ 41, с. 618—622].

3. Согласно тому же письму Лейбница, здесь имеется в виду построение конического сечения по данным диаметрам и параметрам.

4. Далее приведен ряд предложений, вытекающих из теоремы Паскаля, среди них — равносильное получению конического сечения с помощью двух проективных пучков лучей с центрами в точках V и K.

г. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗ «НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ» МОНЖА (1795)

[№ 35, с. 13—24.]

Предмет начертательной геометрии

1. Начертательная геометрия преследует две цели: во-первых, дать методы для изображения на листе чертежа, имеющего только два измерения, а именно длину и ширину, любых тел природы, имеющих три измерения — длину, ширину и высоту, при условии, однако, что эти тела могут быть точно заданы.

Во-вторых, дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из их формы и их взаимного расположения.

. . . .

Соображения, по которым определяется положение точки в пространстве. О методе проекций

2. Поскольку все тела природы могут быть рассмотрены как состоящие из точек, нашим первым шагом должно быть указание способа определения положения точки в пространстве.

. . . .

6. Проекцией точки на плоскости называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Если мы имеем в пространстве две заданные плоскости и нам даны на каждой из них проекции точки, положение которой должно быть определено, то тем самым эта точка будет вполне определена.

Действительно, если из проекции точки на первой плоскости восстановить перпендикуляр к этой плоскости, то очевидно, что он пройдет через данную точку; подобным же образом, если из проекции точки на второй плоскости восставить к ней перпендикуляр, он также пройдет через данную точку; следовательно, точка будет находиться одновременно на двух прямых, положение которых в пространстве известно; она будет единственной точкой их пересечения, и тем самым она будет вполне определена.

В последующих параграфах будут указаны способы легкого использования этого приема для применения только на одном листе чертежа.

. . . .

8. Высказанное здесь не зависит от положения плоскостей проекций и имеет место, каков бы ни был угол, составляемый этими двумя плоскостями. Но если угол, составляемый обеими плоскостями проекций, будет очень тупым, то угол, составленный перпендикулярными с ним плоскостями, окажется очень острым; на практике же маленькие ошибки могут вызвать очень большую неточность в определении положения прямой. Чтобы избежать этой причины неточности, плоскости проекций выбирают всегда перпендикулярными между собой, за исключением разве случаев, когда неперпендикулярные плоскости проекций представляют какие-либо упрощения.

Кроме того, поскольку большинство специалистов, применяющих метод проекций, привыкли иметь дело с положением горизонтальной плоскости и направлением линии отвеса, они обычно предполагают, что из двух плоскостей проекций одна горизонтальна, а другая вертикальна.

Необходимость изображать на чертеже обе проекции на одном и том же листе, а также выполнять на нем все построения привела специалистов к мысли вращать вертикальную плоскость вокруг своего пересечения с горизонтальной плоскостью, как на шарнире, до совмещения с горизонтальной плоскостью, и строить проекции не при таком совмещенном положении плоскостей.

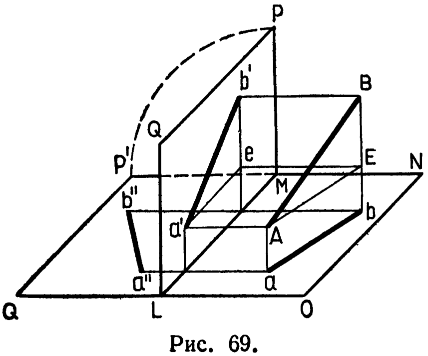


Рис. 69.

Поэтому вертикальная проекция фактически всегда изображается в горизонтальной плоскости, и нужно постоянно помнить, что она должна быть поднята и поставлена на место путем поворота на четверть оборота вокруг линии пересечения горизонтальной и вертикальной плоскостей. Для этого необходимо, чтобы это пересечение было изображено на чертеже с наибольшей ясностью.

Так, на рисунке 69 проекция $a''b''$ прямой AB не находится в плоскости, которая была бы действительно вертикальна; надо понимать, что эта плоскость повернута вокруг прямой LM до положения $LMP'Q'$ и вертикальная проекция $a'b'$ построена в этом положении плоскости (1).

Примечание. Свою систему начертательной геометрии Монж разработал в курсах, которые он читал многие годы в инженерной школе в Мезьере, а затем в парижских Нормальной и Политехнической школах. Издание этого курса длительное время было невозможно из-за цензурных соображений. Впервые лекции Монжа, читанные в Нормальной школе, были напечатаны в выпусках ее трудов за 1795 г., а затем изданы отдельной книгой в 1799 г. под названием «Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an III de la République»; термин «начертательная геометрия» принадлежит самому Монжу.

1. Здесь сжато сформулирован знаменитый метод Монжа ортогонального проектирования на две плоскости, который вскоре после выхода «Начертательной геометрии» получил широкое распространение; на нем основано большинство чертежей, применяющихся в технике.

д. ПРОЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ФИГУР

ИЗ «ТРАКТАТА О ПРОЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ФИГУР» Ж. В. ПОНСЕЛЕ (1822)

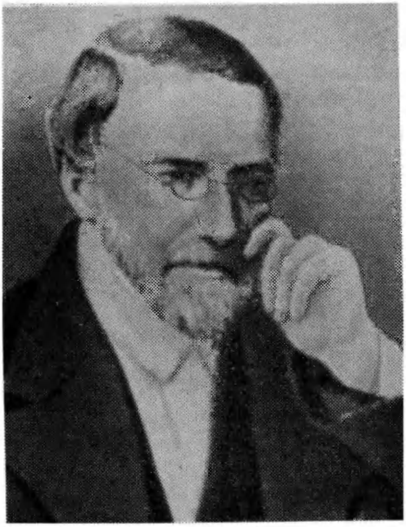
[№ 93, с. 3—12; перевод П. С. Юшкевича и Б. А. Розенфельда.]

1. В нижеследующем мы будем почти всегда придавать слову «проекция» то же значение, что и слову «перспектива»; поэтому проекция будет конической или центральной.

. . . .

В соответствии с этим мы представляем себе, что из некоторой данной точки, принимаемой за центр проекции, выходит пучок прямых линий, направленных ко всем точкам начерченной в некоторой плоскости фигуры; если пересечь этот пучок проектирующих прямых другой плоскостью, расположенной произвольным образом в пространстве, то на этой плоскости получится новая фигура, которая будет проекцией первой.

2. Эта проекция не изменяет, очевидно, ни корреляции (1), ни степени или порядка линий первоначальной фигуры, ни вообще всего вида графической зависимости между частями этой фигуры, относящихся только к неопределенному направлению линий, их взаимному пересечению, их касанию и т. д.; но она может изменить только форму, специальный вид самих линий и вообще всех зависимостей, относящихся к абсолютным и определенным величинам, таким, как раскрытия углов, постоянные параметры и т. д.



В Понселе

Так, например, то, что одна линия перпендикулярна другой в первоначальной фигуре, не дает основания заключить, что это будет иметь место на проекции этой фигуры на новую плоскость.

3. Все эти свойства центральной проекции выводятся чисто геометрически из ее собственной природы и из наиболее общепринятых понятий, и нет никакой нужды прибегать к алгебраическому анализу для их определения и доказательства: так, чтобы доказать, что линия порядка m остается линией того же порядка, при проекции достаточно заметить, что первая линия не может быть пересечена более чем в m точках произвольной прямой, проведенной в ее плоскости, и необходимо должно быть то же самое для второй, так как проекция прямой — всегда прямая линия, которая должна пройти через все точки, соответствующие точкам первой.

4. Согласно общепринятому в геометрии определению Аполлония коническим сечением или просто коникой называется линия, по которой произвольная плоскость пересекает какой-нибудь конус с круговым основанием; таким образом, коническое сечение есть не что иное, как проекция окружности и согласно предыдущему является также линией второго порядка, так как окружность может пересекаться любой, расположенной в ее плоскости прямой не более чем в двух точках.

5. Фигура, части которой имеют между собой только графические зависимости типа тех, о которых говорилось выше, т. е. зависимости, не уничтожаемые проектированием, будет в нижеследующем называться проективной фигурой.

Сами же эти зависимости и вообще все отношения или свойства, имеющие место в одно и то же время и у данной фигуры, и у ее проекции, будут аналогичным образом называться проективными отношениями или свойствами (2).

6. В силу того что мы говорили о проективных свойствах расположения, или графических, их всегда будет легко распознать просто по их заданию или по виду фигуры, и из их специальной природы непосредственно вытекает, что достаточно установить их, и доказать для какой-либо проекции фигуры, обладающей ими для того, чтобы они были, вообще говоря, приложимы и к самой этой фигуре, и ко всем возможным ее проекциям.

7. Что же касается проективных свойств, относящихся к отношениям величины, которые можно назвать метрическими (3), то достоверно, что a priori нельзя указать ничего, если они имеются во всех проекциях фигуры, обладающей ими; действительно, известное соотношение между отрезками секущих круга, относящееся только к неопределенным количествам, не является поэтому проективным отношением, так как хорошо известно, что оно не имеет места для произвольного конического сечения, проекции этого круга и причина этого в том, что это соотношение неявно зависит от параметра или радиуса.

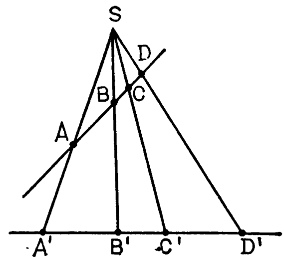


Рис. 70.

С другой стороны, из того, что данная фигура содержит в себе линии специального вида, как например окружность круга, нельзя заключить, что все соотношения, присущие ей, перестают иметь место в общих проекциях этой фигуры, так как, если эти отношения не основаны ни на какой определенной постоянной величине, так что они принадлежат всего одному роду, очевидно, будет иметь место обратное.

Поэтому, если фигура специального вида обладает некоторыми метрическими свойствами, нельзя утверждать a priori без предварительной проверки, ни что эти свойства существуют, ни что они прекращают существовать при различных проекциях первоначальной фигуры. Тем не менее важно уметь распознавать заранее, является ли то или иное обсуждаемое соотношение проективным или нет по своей природе, так как если мы докажем эти свойства для специальной фигуры, то их можно распространить на все возможные проекции этой фигуры.

. . . .

21. В качестве очень простого примера такого рода отношений рассмотрим четыре точки A, B, C, D (рис. 70), лежащие на одной прямой и связанные между собой пропорцией

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB},$$

т. е. такие точки, что отрезок AB делится точкой C и точкой D на пропорциональные отрезки (4).

Ясно, что это отношение принадлежит к специальному классу отмеченных в ст. 20 отношений. Следовательно, оно будет иметь место для всех проекций фигуры—свойство, которое было известно древним, как это вытекает из 145 предложения VII книги «Математического сборника» Паппа (5).

Примечания. Возрождению в XIX в. проективной геометрии, обусловленному все более широким применением на практике центральной и ортогональной проекции и подготовленному «Начертательной геометрией» Монжа, а также работами Л. Карно (см. следующее примечание), положил начало В. Понселе. Свой основоположный труд, из которого взяты приведенные отрывки, он почти полностью подготовил на протяжении 1813—1814 гг. в Саратове, где находился в качестве пленного военного офицера наполеоновской армии.

1. Корреляция (corrélation — «соотношение») — соответствие, устанавливаемое непрерывным преобразованием фигур. Применение такого соответствия для изучения свойств фигур без средств анализа, в синтетической форме, явилось предметом сочинения Л. Карно «О корреляции фигур в геометрии» (1801). На развитие проективной геометрии оказали также влияние «Геометрия положения» Карно (1803) и его же «Очерк теории трансверсалей» (1806).

2. Следует отметить различие между терминологией Эйлера, называвшего аффинными линии, полученные друг из друга аффинным преобразованием, и терминологией Понселе, называвшего проективной фигуру, у которой рассматриваются свойства, сохраняющиеся при проектировании, «проективные свойства»; мы сказали бы: свойства, сохраняющиеся при проективных преобразованиях.

Проективные преобразования в отдельных случаях применялись и ранее, например, Ньютоном, Э. Варингом и др. Понселе развил общую синтетическую теорию проективных преобразований. Аналитическая теория как аффинных, так и проективных преобразований была вскоре разработана в «Барицентрическом исчислении» А. Ф. Мебиуса (1827), который ввел термин «коллинеация» для точечных проективных преобразований и восходящий к Карно термин «корреляция» для проективных преобразований, переводящих точки в прямые и обратно.

3. Понселе различал «графические проективные свойства», определяемые без помощи расстояний и углов, например пересечение или касание линий, и «метрические проективные свойства», определяемые с помощью расстояний и углов, но сохраняемые при проектировании. К «проективным метрическим свойствам» относится двойное отношение четырех точек прямой (см. ч. III, п. 5б, прим. 2).

4. Здесь имеются в виду четыре точки прямой, образующие гармоническую четверку (см. ч. III, п. 5б, прим. 5).

5. Это предложение приведено выше. (см. ч. III, п. 5 б).

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

а. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

ИЗ «ИССЛЕДОВАНИЙ О КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ» Л. ЭЙЛЕРА (1767)

[№ 80, с. 1—22; перевод Б. А. Розенфельда.]

...вопрос о кривизне поверхности не допускает простого ответа, но требует одновременно бесконечности определений: поскольку через каждую точку поверхности можно провести бесконечно много направлений, следует узнать кривизну вдоль каждого из них, прежде чем можно будет составить правильную идею кривизны поверхности. Но через каждую точку поверхности можно провести бесконечно много сечений не только по отношению ко всем направлениям на самой поверхности, но и по отношению к их различным наклонениям к поверхности. Впрочем, в данном случае достаточно рассмотреть из всех этих бесконечных сечений только те, которые перпендикулярны поверхности, число которых, однако, также еще бесконечно. Для этого следует провести прямую линию, перпендикулярную поверхности (1), тогда все сечения, проходящие через эту линию, одновременно перпендикулярны поверхности, и для каждого из этих сечений следует определить кривизну или соприкасающийся радиус (2), тогда совокупность всех этих радиусов дает нам истинную меру кривизны в данной точке, причем следует обратить внимание на то, что каждый из этих радиусов обладает одним и тем же направлением, перпендикулярным поверхности, и что элементарные дуги всех сечений принадлежат к кратчайшим линиям, которые можно провести на поверхности.

Для того чтобы сделать эти исследования наиболее общими, я начну с определения соприкасающегося радиуса для произвольного плоского сечения, пересекающего поверхность; впоследствии я применю это решение к сечениям, перпендикулярным поверхности в какой угодно данной точке, и, наконец, я сравню между собой соприкасающиеся радиусы всех сечений по отношению к их взаимному наклонению, что дает нам возможность установить истинную идею кривизны поверхности. (3).

. . . .

VI. Размышление. 29. Пусть максимальный соприкасающийся радиус $=f$, соответствует сечению EF, а минимальный $=g$ — сечению GH, перпендикулярному предыдущему (рис. 71). Тогда для всякого другого сечения MN, наклоненного к первому под углом $EZM = \varphi$, соприкасающийся радиус r будет определен по двум предыдущим и по углу φ следующим образом:

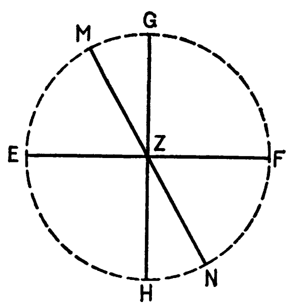


Рис. 71.

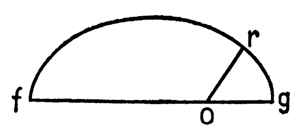


Рис. 72.

Общая формула

$$r=\frac{1}{L+M\cos 2\varphi},$$

если положить в ней $\varphi=0$, дает

$$L+M=\frac{1}{f},$$

а если положить $\varphi=90°$, мы получим

$$L-M=\frac{1}{g},$$

откуда находим

$$L=\frac{f+g}{2fg}, \quad M=-\frac{f-g}{2fg}$$

и окончательно

$$r=\frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2\varphi}.$$

Чтобы дать легкое построение этой формулы, соединим вместе максимальный и минимальный соприкасающиеся радиусы, полагая $Of=f$ и $Og=g$, и опишем на линии fg полуэллипс, один из фокусов которого находится в точке O (рис. 72). Тогда для сечения MN следует взять угол fOr, удвоенный по отношению к углу EZM, и линия Or будет равна соприкасающемуся радиусу для сечения MN (4). Таким образом, суждение о кривизне поверхностей, сначала казавшееся столь сложным, сводится для всякого элемента к определению двух соприкасающихся радиусов, один из которых максимальный, а другой — минимальный для этого элемента; эти две вещи определяют природу кривизны целиком, и мы получаем кривизну всех возможных сечений, перпендикулярных к предположенному элементу.

Но для того, чтобы вынести решение о максимальном или минимальном соприкасающемся радиусе, нужно иметь в виду, что это суждение должно быть установлено для обратной величины соприкасающегося радиуса $\frac{1}{R}$, так что если R то положителен, то отрицателен, значение $R=\infty$ или $\frac{1}{R}=0$ не является ни максимальным, ни минимальным.

Наконец, легко понять, что, подобно тому как у кривых линий имеются некоторые нерегулярности, связанные с двойными и кратными точками, у поверхностей также следует определить подобные случаи, не подчиняющиеся нашему правилу, которое, впрочем, является общим.

Примечания. Теорию кривизны плоских кривых разработали Гюйгенс, Ньютон и Лейбниц. Эйлер в своих «Recherches sur la courbure des surfaces», напечатанных в 16-м томе «Mémoires» Берлинской Академии наук за

1760 г. (1767), положил начало теории кривизны поверхностей. Статью, из которой взяты приведенные отрывки, Эйлер начинает с замечания, что вопрос о кривизне поверхности в какой-либо ее точке сложнее, чем определение кривизны плоской кривой. В случае плоской линии меру кривизны дает радиус соприкасающегося круга, между тем как в данной точке кривой поверхности может быть, вообще говоря, бесчисленно много разных кривизн; только сфера имеет единую кривизну, ту же, что ее большие круги. Для примера Эйлер указывает на обыкновенный цилиндр и на седлообразные поверхности, кривизна которых в одних направлениях «выпуклая», а в других «вогнутая».

1. «Прямая линия, перпендикулярная поверхности», в настоящее время называется нормалью.

2. Это выражение, означающее радиус соприкасающегося круга, восходит к терминологии Лейбница, поставившего общую проблему «соприкасания» различного порядка для плоских кривых (1686). Наш термин «радиус кривизны» применял еще около 1670 г. Ньютон.

3. В основной части работы Эйлер проводит чрезвычайно громоздкие вычисления радиуса кривизны сечения поверхности в данной ее точке произвольной плоскостью вида $z=\alpha x-\beta y+\gamma$ и затем радиуса кривизны сечения плоскостью, проходящей через нормаль. Далее он находит значения этого радиуса для «главного сечения», т. е. нормального сечения, перпендикулярного координатной плоскости xOy, для сечения плоскостью, проходящей через нормаль и перпендикулярной «главному сечению», и для сечения плоскостью, проходящей через нормаль и составляющей с «главным сечением» угол φ.

4. Это утверждение вытекает из сравнения найденных Эйлером формул зависимости r от φ с полярным уравнением эллипса

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

где p — параметр эллипса (см. ч. III, п. 5а, прим. 8), а ε — экцентриситет эллипса.

В настоящее время вслед за Ш. Дюпеном (1813) зависимость $k=\frac{1}{r}$ от $k_{\max}=\frac{1}{g}$, $k_{\min}=\frac{1}{f}$ и угла φ записывают в более изящной форме:

$$k=k_{\max}\cos^2\varphi+k_{\min}\sin^2\varphi.$$

6. ГАУССОВА КРИВИЗНА И ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ИЗ «ОБЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ О КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ» К. Ф. ГАУССА (1827)

[№ 39, с. 124—141]

1. Исследования, в которых рассматриваются направления различных прямых в пространстве, вообще говоря, достигают большой простоты и ясности, если прибегнуть к помощи шара радиуса, равного единице, описанного вокруг некоторого произвольного центра, причем отдельные точки этого шара должны представлять собой направления прямых, параллельных радиусам, к ним проведенным (1).

. . . .

6. Подобно тому как при перенесении направлений нормалей к кривой поверхности на поверхность шара, любой данной точке первой поверхности соответствует определенная точка на второй, так точно и любая линия или любая фигура на ней изобразится соответственной линией или фигурой на шаре. При сравнении двух фигур, взаимно друг другу соответствующих, из которых одна есть как бы изображение другой, можно различать два рода вопросов: в одних рассматривается только величина, в других, отрешившись от количественного соотношения, рассматривают одно положение.

Вопросы первого рода дают начало некоторым понятиям, которые нам кажется полезно ввести в учение о кривых поверхностях. А именно мы будем говорить, что некоторая часть кривой поверхности, ограниченная известным контуром, имеет *полную кривизну*, которая выражается площадью соответственной фигуры на шаровой поверхности. От этой полной кривизны строго следует отличать кривизну как бы специфическую, которую мы будем называть *мерой кривизны* (2). Эта последняя относится к *точке* на поверхности и означает частное, происходящее от деления полной кривизны элемента поверхности, прилежащего к точке, на самую площадь этого элемента, и, следовательно, указывает отношение бесконечно малых площадей на шаре и на кривой поверхности, взаимно друг другу соответствующих. Польза этих нововведений, как мы надеемся, вполне уяснится тем, что впоследствии будет нами изложено. Что же касается до терминологии, то мы думаем, что прежде всего следует обратить внимание на то, чтобы избежать всякой двусмысленности, вследствие чего мы и не считаем удобным строго придерживаться аналогии с терминологией, общепринятой (хотя не всеми одобряемой) в учении о плоских кривых, следуя которой мера кривизны должна попросту называться кривизной, а полная кривизна — амплитудой. Впрочем, отчего и не допустить некоторого простора в выражениях, лишь бы дело шло о предметах, имеющих значение, и название не было причиной ложного истолкования?

. . . . (3)

12. ...Итак, формула предыдущего номера сама собой приводит к замечательной (egregium) теореме. *Если кривая поверхность будет развернута на любую другую поверхность, то при этом мера кривизны в каждой ее точке остается неизменной* (4).

Очевидно также, что *любая конечная часть кривой поверхности после развертывания на другую поверхность сохранит ту же полную кривизну*.

Частный случай, которым до сих пор геометры ограничивали свои исследования, составляют поверхности, развертывающиеся на плоскость. Наша теория легко обнаруживает, что мера кривизны таких поверхностей в любой точке $= 0$.

. . . .

13. То, что мы изложили в предыдущем номере, имеет связь с особым способом рассматривания поверхностей, заслуживающим особого внимания геометров. А именно, когда поверхность рассматривается не как граница тела, но как само тело, одно измерение которого принимается исчезающим, гибкое, но нерастяжимое, то свойства поверхности зависят частью от формы, к которой она приведена и в которой изучается, частью независимы и остаются неизменными, в какую бы форму она ни изгибалась. К этим последним свойствам, рассмотрение которых открывает новое и плодотворное поле геометрии, должны быть отнесены мера кривизны и полная кривизна в том смысле, в каком эти выражения приняты нами (5). Далее, сюда же относится учение о геодезических линиях (6) и о многом другом, о чем мы будем говорить впоследствии. При таком способе рассмотрения плоскость и поверхности, развертывающиеся на плоскости, например цилиндрическая, коническая и т. д., рассматриваются как существенно тождественные.

Примечания. Гауссовы «Disquisitiones generales circa superficies curvas» во многом определили основное направление дифференциальной геометрии XIX и XX вв.—изучение внутренних свойств поверхностей, сохраняющихся при ее изгибании без растяжений и разрывов. Мы приводим несколько характерных мест из этой работы, коротко излагая в примечаниях содержание опущенных промежуточных текстов.

1. Вводимый здесь шар радиуса единица—так называемая сферическая индикатриса, широко применяемая в дифференциальной геометрии линий и поверхностей.

2. Введенная здесь «мера кривизны», т. е. предел отношения площади сферического изображения области поверхности к площади самой этой области при стягивании этой области в точку, в настоящее время называется гауссовой кривизной (иногда гауссову кривизну называют «полной кривизной» — термин, который Гаусс употреблял совсем в другом смысле).

3. В опущенных номерах Гаусс вводит криволинейные координаты на поверхности, обозначаемые им p, q, так что поверхность может быть задана функциями $x=x(p, q)$, $y=y(p, q)$, $z=z(p, q)$, в настоящее время объединяемыми в одну векторную функцию $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(p, q)$. Далее он определяет величины a, b, c и a', b', c', являющиеся частными производными указанных трех функций по p и q—эти величины являются координатами векторов $\boldsymbol{r}_p=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial p}$ и $\boldsymbol{r}_q=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q}$, и показывает, что координаты X, Y, Z точки сферического изображения точки поверхности, т. е. координаты единичного вектора $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности, пропорциональны величинам $bc'-cb'$, $ca'-ac'$, $ab'-ba'$, т. е. вектор $\boldsymbol{n}$ коллинеарен с векторным произведением $[\boldsymbol{r}_p \boldsymbol{r}_q]$. Обозначая d и δ дифференциалы, соответствующие двум направлениям на поверхности, Гаусс выражает «меру кривизны» формулой, которая равносильна нашей формуле $[d\boldsymbol{n}\, \delta\boldsymbol{n}]=k\,[d\boldsymbol{r}\, \delta\boldsymbol{r}]$. Она выражает также меру кривизны через главные кривизны T и V поверхности в данной точке, определенные Эйлером (см. ч. III, п. 6а) по формуле $k=TV$. Затем Гаусс определяет I и II квадратичные формы поверхности, первая из которых равна квадрату линейного элемента ds поверхности и имеет вид $ds^2=E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2$, где $E=\boldsymbol{r}_p^2$, $F=\boldsymbol{r}_p\boldsymbol{r}_q$, $G=\boldsymbol{r}_q^2$, а вторая имеет вид $D\,dp^2+2D'\,dp\,dq+D''\,dq^2$, где $D=\boldsymbol{r}_p\boldsymbol{r}_q\boldsymbol{r}_{pp}$, $D'=\boldsymbol{r}_p\boldsymbol{r}_q\boldsymbol{r}_{pq}$, $D''=\boldsymbol{r}_p\boldsymbol{r}_q\boldsymbol{r}_{qq}$. Вслед за тем «мера кривизны» записывается в виде

$k=\frac{DD''-D'D'}{(AA+BB+CC)^2}$, где A, B, C — координаты вектора $[\boldsymbol{r}_p \boldsymbol{r}_q]$, а также через величины E, F, G и их первые и вторые производные по p, q. Последняя формула доказана в номере 11.

4. Здесь теорема, доказанная в номере 11, формулируется как теорема о том, что «мера кривизны» не изменяется при изгибании.

5. Здесь вводится идея о так называемой теперь внутренней геометрии поверхности, т. е. идея геометрических свойств поверхности, которые инвариантны относительно ее изгибания. В силу самого определения к внутренней геометрии поверхности относятся длины линий на поверхности, углы между линиями и площади областей поверхности, т. е. интегралы $\int d\sigma$ от дифференциалов $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,dp\,dq$ по областям поверхности. В силу доказанной Гауссом теоремы к внутренней геометрии поверхности относится также гауссова кривизна k и «полная кривизна» в смысле Гаусса, т. е. интеграл $\int k\,d\sigma$ по области на поверхности.

6. Геодезические линии — кратчайшие линии на поверхности. В дальнейших номерах Гаусс выводит уравнение геодезических линий, коэффициентами которого являются коэффициенты E, F, G и их производные по p и q.

9. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ И ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

а. *ТРИ ГИПОТЕЗЫ О СУММЕ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА*

ИЗ ПЕРВОЙ КНИГИ «КОММЕНТАРИЕВ К ТРУДНОСТЯМ ВО ВВЕДЕНИЯХ КНИГИ ЕВКЛИДА» ОМАРА ХАЙЯМА (1077)

[№ 49, с. 119—125.]

Причина ошибки позднейших ученых в доказательстве этой предпосылки (1) состоит в том, что они не учитывали принципов, заимствованных у философа (2), и не оспаривали количества [утверждений], приведенных Евклидом в начале I книги, в то время как это количество недостаточно и имеется много необходимых утверждений, которые должны предшествовать [изложению] геометрии.

. . . .

И среди них: две сходящиеся прямые линии пересекаются и невозможно, чтобы две сходящиеся линии расходились в направлении схождения (3).

. . . .

Теперь мы должны принять двадцать восемь предложений книг «Начал», так как они не нуждаются в этой предпосылке. Но в ней нуждается двадцать девятое предложение, выражающее закономерность параллельных линий. Поэтому тот, кто хочет, пусть поставит первое предложение этой книги вместо двадцать девятого предложения I книги, включая его, если захочет Аллах, в содержание книги.

. . . .

Первое предложение, т. е. 29-е [предложение] I книги [«Начал»]. Дана [прямая] линия *AB* (рис. 73). Проведем линию *AC*, перпендикулярную *AB*, и линию *BD*, также перпендикулярную *AB* и равную линии *AC*. Они параллельны, как показано Евклидом в 26-м предложении (4). Соединим *CD* (5). Я утверждаю, что угол *ACD* равен углу *BDC*.

Доказательство. Соединим *CB* и *AD*. Тогда, так как *AC* равна *BD*, *AB* общая, а углы *A* и *B* прямые, то основания *AD* и *CB* равны и другие углы равны другим углам. Поэтому углы *EAB* и *EBA* равны, линии *AE* и *EB* равны, так же как оставшиеся *DE* и *EC*. Поэтому угол *EDC* равен [углу] *ECD*, [угол] *ACB* равен [углу] *ADB*, и углы *ACD* и *CDB* равны. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Отсюда следует, что если углы *CAB* и *DBA* равны, линии *AC* и *BD* также равны, углы *BDC* и *ACD* необходимо равны.

Второе предложение, т. е. 30-е «Начал».

Рассмотрим снова фигуру *ABDC*, разделим *AB* пополам в *E* (рис. 74) и проведем *EG* перпендикулярно *AB*. Я утверждаю, что *CG* равна *GD* и что *EG* перпендикулярна *DC*.

Доказательство. Соединим *DE* и *EC*. Так как *AC* равна *BD*, *AE* равна *EB* и углы *A*, *B* прямые, то основания *DE* и *EC* равны, и углы *AEC* и *BED* также равны, и оставшиеся [углы] *DEG* и *GEC* также равны, и линия *DE* равна *EC*, а *EG*—общая, откуда следует, что треугольник [*CEG*] равен треугольнику [*GED*] и их остальные соответственные стороны и углы также равны. Поэтому *DG* равна *GC* и угол *DGE* равен углу *CGE* и оба они прямые. Это и есть то, что мы хотели доказать.

Третье предложение, т. е. 31-е «Начал». Рассмотрим снова фигуру *ABCD*. Я утверждаю, что углы *ACD* и *BDC* прямые.

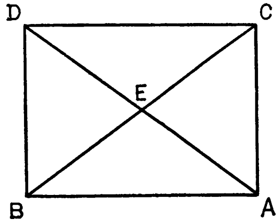


Рис. 73.

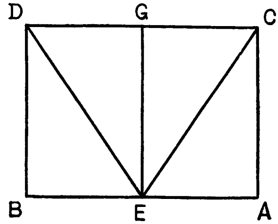


Рис. 74.

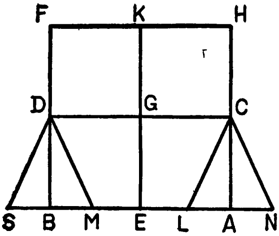


Рис. 75.

Доказательство. Разделим AB пополам в E, восставим перпендикуляр EG, продолжим его в его направлении, отложим GK, равную GE, и проведем HKF перпендикулярно EK (рис. 75).

Далее продолжим AC и BD. Они пересекут HKF в H и F, так как AC и EK параллельны (6), а расстояние между двумя параллельными не изменяется (7), и если мы будем продолжать до бесконечности AC, параллельную линии EK, и будем продолжать до бесконечности HK, параллельную линии GC, они, очевидно, необходимо пересекутся (8). Соединим CK, DK. Тогда, так как линия DG равна GC, а GK общая и в то же время перпендикулярна [к DG и GC], то основания DK и KC равны и углы GCK и GDK равны. Поэтому углы HCK и CKG также равны и дополнительные углы DKG и CKG равны и оставшиеся углы KHC и KFD также равны. Поэтому, так как линия DK равна KC, то CH равна DF и HK равна KF. Если углы ACD и BDC прямые, это истинно поневоле. Если же они не прямые, то каждый из них или меньше прямого, или больше его.

Пусть сначала они меньше прямого. Если мы наложим плоскую фигуру CF на плоскую фигуру CB, то GK наложится на GE так же, как HF на AB, причем HF будет равна линии NS, так как угол HCG больше угла ACG и линия HF больше AB. Точно так же, если эти две линии [CH и DF] продолжить до бесконечности, то каждая из соединяющих [их] линий в порядке последовательности будет больше, чем другая. Поэтому линии AC, BD будут расходиться. Точно так же линии AC, BD при продолжении в другом направлении будут расходиться, что доказывается совершенно так же, так как положения по обе стороны при наложении необходимо совпадают. Поэтому две прямые линии пересекают под прямыми углами прямую [линию], а затем по обе стороны от этой линии расстояние между ними увеличивается. Но это в силу аксиомы нелепо, если представить себе прямизну. Поэтому между этими двумя линиями имеется определенное расстояние. Это из того, что рассматривалось философом (9).

Пусть теперь каждый из [углов ACD и BDC] больше прямого. Тогда при наложении линия HF будет равна LM, которая будет меньше AB, так же как все соединяющие линии, и эти две линии будут сходиться. С другой стороны также будет схождение, так как положения по обе стороны при наложении совпадают. Если ты немного подумаешь, ты это поймешь. Но это, согласно сказанному выше, опять нелепо (10).

Поэтому две линии [AB и FH] не могут быть различными, т. е. они равны. Так как они равны, два угла также равны, вследствие чего они являются прямыми. Ты поймешь это при небольшом размышлении. Поэтому, чтобы избежать многословия, мы оставим этот вопрос. Тот, кто захочет провести подробное доказательство, сможет это сделать, не нуждаясь в нашей помощи.

. . . .

Так как доказано, что если дана прямая линия, в обоих концах которой восстановлены перпендикуляры и на этих перпендикулярах отложены произвольные равные линии, то расстояния между этими линиями перпендикулярны к ним и равны между собой, а две линии не сходятся и не расходятся; будем называть такие два перпендикуляра эквидистантными (11).

Примечания. Издавна многие математики считали V постулат I книги «Начал» Евклида, на котором в этом труде построена теория параллельных, недостаточно очевидным и еще в древности неоднократно предпринимались попытки его доказать. Эти попытки были развиты далее комментаторами «Начал» в странах ислама: ал-Аббасом ал-Джаухари, Сабитом ибн Коррой, Ибн ал-Хайсамом, Омаром Хайямом, Насир ад-Дином ат-Туси и другими учеными. Результатом этих исследований, продолжавшихся с IX по XV в., явилось установление важных новых взаимозависимостей в теории параллельных, в частности выявление ряда предложений, равносильных V постулату. Были разработаны также приемы рассуждений, возрожденные европейскими геометрами XVIII в., и получены отдельные предложения, по существу принадлежащие неевклидовым геометриям Лобачевского и Римана. В этом цикле работ учение о параллельных Хайяма занимает центральное положение, и по значению и хронологически.

Вторая и третья книги «Комментариев» Хайяма посвящены общей теории отношений (см. ч. IV, п. 1).

1. «Эта предпосылка» — V постулат Евклида о параллельных (см. ч. III, п. 2). Цитируемому далее тексту предшествует критика Хайямом некоторых доказательств V постулата, данных ранее.

2. «Принципы, заимствованные у философа» (имеется в виду Аристотель) — положение об основных понятиях математики, которые Хайям считал принадлежащими к компетенции философов, а не математиков. Далее Хайям приводит пять таких принципов, из которых три первые и последний мы опускаем, известные высказывания Аристотеля, оставляя только четвертый принцип, который Хайям кладет в основу своего учения о параллельных.

3. Этот принцип состоит из двух утверждений, каждое из которых эквивалентно V постулату. В дошедших до нас текстах Аристотеля подобного рода принцип не встречается.

4. Здесь имеется в виду 28-е предложение I книги «Начал» Евклида. Хайям называет 1-е предложение своего трактата 29-м предложением I книги «Начал», так как предлагает вставить его (и затем следующее за ним) после 28-го предложения I книги «Начал».

5. Рассматриваемый здесь четырехугольник с двумя прямыми углами при основании и двумя равными боковыми сторонами и выдвигаемые далее Хайямом три гипотезы о его верхних углах сыграли важную роль в предыстории неевклидовой геометрии. «Гипотеза прямого угла» имеет место в геометрии Евклида, «гипотеза острого угла» — в гиперболической геометрии Лобачевского, «гипотеза тупого угла» — в эллиптической геометрии Римана. Под влиянием этого трактата Хайяма этот четырехугольник и те же гипотезы о его углах рассматривал Насир ад-Дин ат-Туси, а со ссылкой на ат-Туси — Дж. Саккери (1733), по имени которого часто называют этот четырехугольник.

6. Прямые AC и EK параллельны в силу упоминавшегося 28-го предложения I книги «Начал» Евклида.

7. Утверждение, что два перпендикуляра не приближаются и не удаляются, — следствие четвертого «принципа, заимствованного у философа». Хайям провел это доказательство в начале I книги со ссылкой на этот прин-

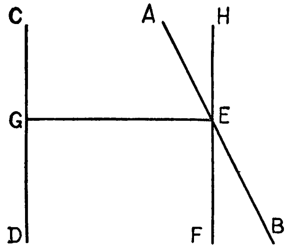


Рис. 76.

цип, хотя и до его формулировки. Заметим, что из этого утверждения можно вывести V постулат Евклида.

8. Из этого утверждения также можно вывести V постулат Евклида. Однако в доказательстве Хайяма оно не играет существенной роли, так как и при выполнении V постулата, и при его невыполнении можно построить такой «четырехугольник Хайяма», в котором указанные прямые пересекаются.

9. То есть это вытекает из «принципов, заимствованных у философа», в данном случае из четвертого принципа. Суть доказательства Хайяма состоит в следующем: перегибая чертеж по прямой CD, он показывает, что отрезок HF при гипотезе острого угла переходит в отрезок NS, больший, чем AB, а при гипотезе тупого угла — в отрезок ML, меньший, чем AB. Затем он перегибает полученную фигуру по прямой AB. Тогда оказывается, что при гипотезе острого угла два перпендикуляра к одной прямой AB расходятся в обе стороны от нее, а при гипотезе тупого угла они в обе стороны сходятся. Между тем и то и другое противоречит четвертому принципу и остается возможной лишь гипотеза прямого угла.

10. Намеченное Хайямом опровержение гипотезы тупого угла совершенно аналогично подробно проведенному им опровержению гипотезы острого угла. То, что основное внимание Хайям уделяет опровержению гипотезы острого угла, быть может, объясняется тем, что гипотезу тупого угла, не зависящую от V постулата, проще опровергнуть, исходя из так называемой 9-й аксиомы Евклида «Две прямые не содержат пространства» (в случае этой гипотезы два перпендикуляра к одной прямой пересекаются, а перегибая чертеж по этой прямой, мы получим, что эти перпендикуляры пересекаются в двух точках, симметричных относительно этой прямой).

11. Термином «эквидистантный» (находящийся на одном и том же расстоянии) переведен термин Хайяма «мутаха̄зӣ» в отличие от термина «мутава̄зӣ» — «параллельный».

Далее у Хайяма следует еще пять предложений. В 4-м предложении доказано, что в прямоугольнике, существование которого было установлено в 3-м предложении, противоположные стороны равны. Согласно 5-му предложению всякая прямая, перпендикулярная одной из двух «эквидистантных» прямых, перпендикулярна и другой. 6-е предложение гласит, что всякие две прямые, параллельные в смысле Евклида, т. е. не пересекающиеся, «эквидистантны». В 7-м предложении выведено, что если прямая падает на две параллельные прямые, то накрест лежащие углы равны, внешний угол равен соответственному внутреннему, а сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам (это 29-е предложение I книги «Начал» Евклида). И наконец, в 8-м предложении доказывается V постулат: в концах линии EG проведены две прямые EA и CG, причем сумма углов AEG и CGE меньше двух прямых (рис. 76); утверждается, что эти прямые пересекаются со стороны A. Если угол AEG меньше угла EGD, Хайям строит угол HEG, равный углу EGD. Тогда прямые HEF и DGC в силу 27-го предложения I книги «Начал» параллельны, откуда и вытекает, что прямая AB, пересекающая прямую HF, пересечет прямую CD со стороны A.

6. ЛАМБЕРТ О ГИПОТЕЗЕ ОСТРОГО УГЛА

ИЗ «ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ» И. Г. ЛАМБЕРТА (опубл. в 1786 г.)

[№ 75, с. 152—208; перевод Б. А. Розенфельда.]

Предварительные рассмотрения

§ 1. В настоящем сочинении речь идет о трудности, встречающейся в самых началах геометрии и уже со времен Евклида вызывавшей затруднения у тех, кто не просто слепо следовал учениям других, но хотел иметь основания быть убежденными и ни в чем не хотел жертвовать той строгостью, которую они находили в большинстве доказательств.

Эта трудность сразу бросается в глаза каждому, кто читает «Начала» Евклида, так как она кроется даже не в его предложениях, а в аксиомах, которые Евклид предпослал I книге. Среди этих аксиом принимает он в качестве 11-й как нечто совершенно ясное и не нуждающееся в доказательстве, что если две линии CD, BD (рис. 77) пересекаются прямой BC и оба внутренних угла DCB, DBC, вместе взятые, меньше двух прямых углов, линии CB, BD пересекаются в D или в стороне этих углов (1).

§ 2. Это основное утверждение бесспорно далеко не так ясно и очевидно, как остальные; и оно естественным образом создает впечатление, что оно не только требует доказательства, но в известной степени чувствуется, что читатель способен дать такое доказательство или что он должен был это сделать.

Но это, насколько я понимаю это дело, *первое* впечатление. Тот, кто прочтет Евклида дальше, должен удивляться не только тщательности и строгости его доказательств, но и известной благородной простоте в его изложении, тем более удивительно положение с 11-й аксиомой, когда убеждаются, что Евклид доказывал предложения, которые гораздо легче могли обойтись без доказательства.

. . . .

Пусть (рис. 78) в A и B — прямые углы; или, проведя AC перпендикулярно AB, берут AB произвольным, а угол dBA

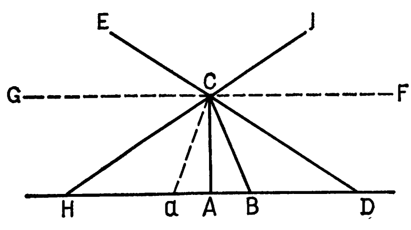


Рис. 77.

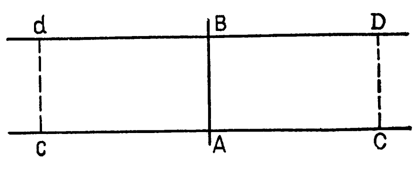


Рис. 78.

делают также $= 90$ гр.; тогда в силу упоминавшихся XXVII, XXVIII предложений BD, AC — линии, которые при произвольном продолжении их в обе стороны не пересекаются (2).

Далее легко показать, что если перегнуть чертеж по линии AB, угол dBA наложится на DBA так же, как cAB на CAB, а поэтому и Bd на BD, и Ac на AC, так как в A, B — прямые углы. Поэтому линии dD, cC по обе стороны от отрезка AB во всем равны и подобны друг другу, так что если что-то доказано с одной стороны, при сохранении тех же условий это будет иметь место и с другой стороны.

. . . .

§ 39. Я вернусь теперь к десятой фигуре (рис. 78) и сохраню предположение, что в A, B — прямые углы.

Пусть в C также прямые углы, причем AB и CD не пересекаются. Вопрос, собственно, остается об угле D, и мы должны с необходимостью принять три гипотезы (3). А именно, может быть:

$$\text{I}^\circ\ BDC = 90 \text{ гр.}$$
$$\text{II}^\circ\ BDC > 90 \text{ гр.}$$
$$\text{III}^\circ\ BDC < 90 \text{ гр.}$$

Я приму эти три гипотезы в этом порядке и выведу из них следствия. Будет показано, что эти следствия довольно далеко могут, а частью должны быть продолжены, прежде чем они приведут к quod est absurdum [что нелепо] и quod est contra hypothesin [что противоречит предположению].

. . . .

Третья гипотеза

§ 65. После рассмотрения двух первых гипотез можно предположить, что при третьей будут иметь место все более острые углы и все увеличивающиеся перпендикуляры. Однако невозможно даже предвидеть, как может быть доказана возможность этой гипотезы. Поэтому я только опишу то, что я нашел.

§ 66. Пусть снова в A, B, C (рис. 79), а также в каждой из точек E, J, G и т. д. — прямые углы; тогда в силу третьей гипотезы угол D или BDC острый (§ 39). Первое следствие, которое мы выведем из этого, это то, что $DC > AB$. Предположим, что $CD = AB$; отсюда, как в § 53, будет следовать, что BDC — прямой угол, что противоречит предположению. Примем теперь, что $CD < AB$. Тогда, если мы перегнем чертеж по среднему перпендикуляру, A наложится на C, B же попадет выше D, поэтому будет $NDC > 90$ гр., что еще более противоречит предположению. Поэтому $CD > AB$.

§ 67. Таким же образом $BD > AC$.

§ 68. Далее каждый из следующих перпендикуляров EF, GH не только больше, чем AB, но ни один из них не равен другому и каждый более удаленный GH больше каждого более близкого EF.

Предположу сначала, что $GH = EF$. В середине EG восставим перпендикуляр JK. Тогда в K—прямые углы, откуда следует, что и в D—прямые углы (§ 41). Но согласно предположению D—острый угол. Поэтому нельзя предполагать, что $GH = EF$.

Но нельзя, далее, предполагать и что $EF < DC$: тогда необходимо между AC и между CE имелись бы перпендикуляры, которые были бы равны друг другу. Но это противоречит доказанному ранее. На том же основании не может быть и $EF = CD$. Поэтому $EF > CD$. Таким же образом отсюда следует, что должно быть $GH > EF$. И так каждый перпендикуляр, попадающий между A, C, больше, чем AB, и меньше, чем CD, и т. д.

. . . .

§ 69. Рассматривая углы D, F, H и т. д. (рис. 79), мы находим, что они не только все острые, но и все неравные, каждый более удаленный H острее более близкого F.

То, что все они острые, без труда следует из того, что все перпендикуляры больше, чем AB, если предположить, например для угла F, что чертеж сложен так, что E наложилось на A; тогда F попадает выше B и, так как в B—прямые углы, должно быть $FBE < 90$ гр.

То, что, далее, никак два угла F, H не равные острые, следует из § 48, так как в этом случае линии HF, GE, продолженные по другую сторону A, пересекутся и в B будут острые углы. Но это противоречит предположению, поэтому не может быть $F = H$ (§ 48). Поэтому должно быть $H < F$.

. . . .

§ 73. При третьей гипотезе в каждом треугольнике сумма трех углов меньше, чем 180°. Каждый треугольник можно разделить на два прямоугольных, так как в каждом треугольнике по меньшей мере два угла необходимо должны быть острыми. Поэтому докажем сначала эту теорему для прямоугольных треугольников.

Пусть BAE—такой треугольник (рис. 80). Проведем HB перпендикулярно к BA, а HE—к EA. Тогда $BH > AE$ и $EH > AB$ (§ 66, 67).

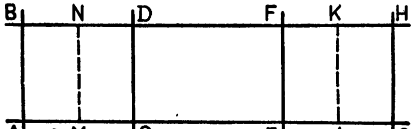


Рис. 79.

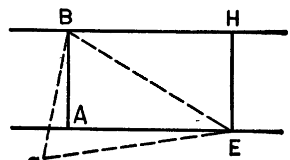


Рис. 80.

Перенесем треугольник BHE в положение EaB, так что BH наложится на Ea, а EH на Ba. Тогда aB попадет вне ABH, а aE — вне AEH. Поэтому угол

$$aBE > ABE$$
$$\text{и } aEB > AEB.$$

Следовательно, складывая,

$$aBE + aEB > ABE + AEB.$$

Но сумма этих четырех углов $= 180$ гр. Поэтому

$$aBE + aEB > 90 \text{ гр.}$$

и

$$ABE + AEB < 90 \text{ гр.}$$

Следовательно,

$$ABE + AEB + BAE < 180 \text{ гр.}$$

Опасение, что BH и EH могут не пересечься, мы здесь не будем обсуждать, так как если бы это было так, то линии Ba, Ea попали бы еще более вне BAE.

§ 74. Теперь в каждом треугольнике AGC (рис. 81) углы A, C острые. Из G опустим перпендикуляр GB на AC. Тогда

$$AGB + GAB + ABG < 180 \text{ гр.}$$
$$CGB + GCB + CBG < 180 \text{ гр.}$$

Поэтому сумма

$$AGC + GAC + GCA + ABG + CBG < 360 \text{ гр.}$$

Но

$$ABG + CBG = 180 \text{ гр.}$$

Поэтому

$$AGC + GAC + GCA < 180 \text{ гр.}$$

§ 75. Так как в равностороннем треугольнике ABC углы A, B, C равны, то при третьей гипотезе каждый из них меньше, чем 60 гр.

. . . .

§ 79. Легко видеть, что таким образом при третьей гипотезе можно идти еще дальше и что аналогичные теоремы можно найти и при второй гипотезе, но с совершенно противоположным результатом. Но я разыскивал эти следствия главным образом при третьей гипотезе, для того чтобы убедиться, не обнаружатся ли при этом противоречия. Из всего этого я вижу, что эту гипотезу совсем не легко опровергнуть. Я приведу еще несколько следствий, не рассматривая, насколько далеко можно продолжить их при второй гипотезе с надлежащими изменениями.

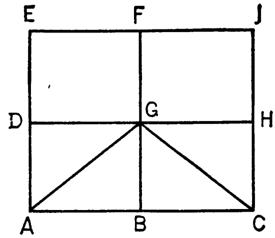


Рис. 81.

Наиболее выдающееся из этих следствий то, что если бы имела место третья гипотеза, мы имели бы абсолютную меру длины каждой линии, площади каждой поверхности и объема каждого телесного пространства (4). Это опровергает утверждение, которое некоторые неразумно считают аксиомой геометрии, поскольку до сих пор ни один человек не сомневался, что нет никакой абсолютной меры; правда, Вольф (5), определяя величину (quantitas), смог сделать вывод: quantitas dari sed non per se intelligi potest. [Количество может быть дано, но не познано через себя.] Однако эта теорема должна служить определением, так так она бесспорно дает величины, познаваемые через себя и обладающие определенной единицей. Разумеется, это имеет место и для линий, и для поверхностей, и для телесных пространств; я не верю, что для того, чтобы ввести это в геометрию, нужно исправить только одно определение.

§ 80. Для того чтобы доказать упомянутое следствие, пусть в A, B, C, D, E (рис. 81) — прямые углы; тогда в силу третьей гипотезы G, F, H, J — острые и притом $H < G$ и $J < H$, так же как $F < G$ и $J < F$. Теперь я утверждаю, что угол G — мера четырехугольника $ADGB$, если $AB = AD$, и также J — мера четырехугольника $ACJE$, если $AC = AE$.

Тогда при сохранении равенства сторон $AB = AD$ и прямых углов A, B, D острый угол G не будет иметь места ни для какого другого четырехугольника, кроме того, стороны AB, AD которого имеют абсолютную длину AB, AD. Если, например, мы возьмем бо́льшие стороны $AE = AC$ и построим в E, C прямые углы, то при третьей гипотезе угол $J < G$ и G не имеет места в J. Если же мы возьмем $AE = AC$ меньшими, чем $AD = AB$, то мы получим $J > G$ и G снова не будет иметь место в J.

Поэтому угол G является абсолютной мерой четырехугольника $ADGB$. Так как углы обладают мерой, познаваемой через себя, то, если, например, $AB = AD$ — парижский фут и при этом угол $G = 80$ гр., мы можем сказать, что следует сделать четырехугольник $ADGB$ настолько большим, чтобы угол G был бы $= 80$ гр.; и таким образом мы получим абсолютную длину парижского фута с помощью $AB = AD$.

Это следствие имеет нечто восхитительное, вызывающее желание, чтобы третья гипотеза была бы справедливой!

Однако я не хотел бы, несмотря на это преимущество, чтобы это было так, так как это вызвало бы бесчисленные неудобства. Тригонометрические таблицы были бы бесконечно обширными, подобие и пропорциональность фигур совершенно отсутствовали бы, ни одну фигуру нельзя было бы изобразить иначе, чем в ее абсолютной величине, астрономам было бы плохо и т. д.

§ 81. Однако все это Argumenta ab amore et inuidia ducta [аргументы, вызываемые любовью и ненавистью], что в геометрии, как и во всей науке, не должно иметь места.

Я вернусь снова к третьей гипотезе. При ней, как мы только что видели, в каждом треугольнике сумма трех углов меньше 180 гр. или двух прямых углов. Но разность до 180 гр. возрастает так же, как площадь треугольника; это можно выразить так: если из двух треугольников один имеет бо́льшую площадь, чем другой, то у первого сумма трех углов меньше, чем у другого (6).

§ 82. ...Добавлю только следующее замечание. При второй гипотезе имеют место совершенно аналогичные теоремы, только при ней в каждом треугольнике сумма трех углов больше 180 гр. Избыток всегда пропорционален площади треугольника.

Мне кажется замечательным, что вторая гипотеза выполняется, если вместо плоского треугольника взять сферический, так как у него сумма углов больше 180 гр. и избыток также пропорционален площади треугольника (7).

Еще более замечательным представляется мне, что то, что я говорю здесь о сферических треугольниках, доказывается независимо от трудности параллельных линий и не предполагая никаких аксиом, кроме той, что всякая плоскость, проходящая через центр сферы, делит его на две равные части.

Я почти должен был бы сделать из этого вывод, что третья гипотеза имеет место на какой-то мнимой сфере (8). По меньшей мере должно же быть что-то, из-за чего она на плоскостях так долго не позволяет себя опровергнуть, как это имело место со второй гипотезой.

Примечания. «Theorie der Parallellinien» Ламберта, наиболее замечательный труд по теории параллельных до открытия неевклидовой геометрии, была написана в 1766 г., но увидела свет только посмертно в 1786 г. Ламберт не опубликовал это сочинение, так как не был им вполне удовлетворен.

1. Ламберт называет 11-й аксиомой V постулат Евклида (см. ч. III, п. 2).

2. Здесь имеются в виду 27-е и 28-е предложения I книги «Начал» Евклида: если при пересечении двух прямых с третьей равны накрест лежащие углы, или же если при этом равны соответственные углы, или внутренние односторонние углы в сумме равны двум прямым, то первые две прямые параллельны.

3. Здесь Ламберт выдвигает три гипотезы, равносильные трем гипотезам Хайяма, ат-Туси и Саккери (см. ч. III, п. 9а, прим. 5): в случае, если угол C на рисунке 78 прямой, четырехугольник $DCcd$ на этом чертеже — четырехугольник Хайяма. Далее Ламберт показывает, что в случае гипотезы прямого угла имеет место геометрия Евклида, в случае гипотезы тупого угла прямые AC и BD при продолжении пересекаются, откуда следует, что при продолжении пересекаются и прямые Ac и Bd, что противоречит тому, что «две прямые не содержат пространства», и переходит к гипотезе острого угла.

4. «Абсолютная мера длины» — характерная особенность как гиперболической геометрии Лобачевского, имеющей место при гипотезе острого угла, так и сферической геометрии, в которой имеет место гипотеза тупого угла;

(если считать прямыми линиями дуги больших кругов сферы). Абсолютная единица длины по своим свойствам выделяется среди других отрезков, подобно тому как прямой угол — среди других углов. На сфере такой мерой может служить ее радиус, на плоскости Лобачевского — величина q, указанная в прим. 4 к следующему отрывку.

5. Речь идет о немецком философе и ученом Хр. ф. Вольфе.

6. Пропорциональность площади треугольника его угловому дефекту, т. е. разности между 180° и суммой его углов, — важнейший факт геометрии Лобачевского.

7. На сфере сумма углов треугольника всегда больше 180° и площадь сферического треугольника пропорциональна разности между суммой его углов и 180°.

8. Эта мысль Ламберта получила впоследствии подтверждение. Лобачевский установил, что формулы сферической тригонометрии переходят в формулы гиперболической тригонометрии при замене длин сторон треугольника a, b, c на мнимые ai, bi, ci, т. е. при замене радиуса сферы r на ri. Это связано с тем, что гиперболическую плоскость можно интерпретировать как поверхность сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, в котором расстояние между двумя точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяется выражением $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2}$ (см. статью Б. А. Розенфельда в [№ 27, т. II, с. 313—321]).

в. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

ИЗ «О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ» Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО (1829)

[№ 32, т. I, с. 185—186.]

...Кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий. Правда, что против ложных заключений от неясности первых и общих понятий в Геометрии предостерегает нас представление самих предметов в нашем воображении, а в справедливости принятых истин без доказательства убеждаемся простотою их и опытом, например астрономическими наблюдениями; однако же все это нисколько не может удовлетворить ум, приученный к строгому суждению. К тому и не в праве пренебрегать решением вопроса, покуда оно неизвестно и покуда не знаем, не послужит ли оно еще к чему другому.

Здесь намерен я изъяснить, каким образом думаю пополнить такие пропуски в Геометрии...

Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить (1).

[Там же с. 194—196.]

Н. И. Лобачевский

Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может быть $>\pi$. Остается предполагать эту сумму $=\pi$ или $<\pi$. То и другое может быть принято без всякого противоречия впоследствии, от чего и происходит две Геометрии: одна, *употребительная* до ныне по своей простоте, соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая, *воображаемая* (2), более общая и потому затруднительная в своих вычислениях, допускает возможность зависимости линий от углов. Если в одном прямолинейном треугольнике посчитать сумму углов π, то она будет такой уже и во всех. Напротив, допуская ее в одном менее π, легко доказать, что она уменьшается с возрастанием боков треугольника (3).

Всякий раз, следовательно, две линии встречаться на плоскости не могут, когда они с третьею составляют углы, которых сумма π. Они могут не пересекаться и в том случае, когда эта сумма $<\pi$, если к тому предположить сумму углов в треугольнике $<\pi$.

Итак, все линии на плоскости в отношении к одной могут быть разделены на *сходящиеся* и *несходящиеся*. Последние будут называться *параллельными*, если они представляют границу, или, иначе сказать, переход от одних к другим между всеми, выходящими из одной точки.

Воображаем из точки опущенный перпендикуляр a на данную линию и к этой параллельную из той же точки; означаем $F(a)$ угол между a и параллельной (4). Легко доказать, что для всякой линии a угол $F(a)=\frac{\pi}{2}$, если сумма углов в треугольнике $=\pi$; но в другом предположении угол $F(a)$ меняется с a, уменьшаясь до нуля с увеличением линии a и оставаясь постоянно $<\frac{\pi}{2}$. Чтобы распространить в сем последнем предположении означение $F(a)$ на все линии a, мы будем принимать

$$F(0)=\frac{\pi}{2}, \quad F(-a)=\pi-F(a).$$

Тогда для всякого острого угла A можно воображать положительную, а для всякого тупого A — отрицательную линию a, такую, чтоб $A=F(a)$.

Впрочем, в том и другом предположении параллельным линиям принадлежат следующие свойства.

Когда две линии параллельны, то пересечение проведенных через них плоскостей дает также линию, параллельную обеим.

Две, параллельные третьей, параллельны между собой.

Когда три плоскости пересекаются в параллельных линиях, то сумма плоскостных внутренних углов $= \pi$.

Предположение суммы углов в треугольнике $< \pi$ ведет к тому, что круг с увеличением полупоперечника приближается не к прямой линии, а к особенного рода кривой, которую назовем *предельной круга*. Сфера в таком случае будет приближаться к кривой поверхности, которую подобным образом назовем *предельной сферой* (5). Эта поверхность в пересечении с плоскостию дает или круг, или предельную круга.

Геометрия на предельной сфере совершенно та же, в каком виде мы ее знаем на плоскости. Предельная круга заменяет в последней прямую линию, а углы между плоскостей, в которых предельные лежат, заступают место углов между прямыми линиями (6)

Предельные кругов тем ближе подходят к прямым линиям, чем их дуги менее, так что разность в содержании к длине дуги можно сделать как угодно малой. И потому все, что принадлежит одним, принадлежит и другим, если принимать и те и другие чрезвычайно малыми (7).

Итак, если в природе существующая Геометрия такова, что две параллельные линии должны быть наклонены к третьей под углами, которых сумма $< \pi$, то Геометрия, употребительная нами, будет Геометрия чрезвычайно малых линий в сравнении с тем, при которых сумма углов треугольника может приметно разниться от π.

Примечания. Сочинение «О началах геометрии», появившееся в «Казанском вестнике» за 1829—1830 гг., явилось первой в мировой литературе публикацией, содержавшей систему неевклидовой (именно гиперболической) геометрии. Но еще несколькими годами ранее Лобачевский сделал сообщение о своем открытии в Казанском университете, профессором которого состоял. К заголовку работы, из которой взяты приведенные отрывки, сделано следующее авторское примечание: «Извлечено самим Сочинителем из рассуждения под названием: Exposition succincte des principes de la Géométrie, читанного им в заседании Отделения Физико-Математических наук, 12 февраля 1826 года»; далее, после тригонометрических формул под номером (17) стоит примечание: «Уравнение (17) и все, что за ним следует, прибавлено уже Сочинителем после к тому рассуждению, которое было им представлено 1826 года в Отделение Физико-Математических наук». Рукопись упоминаемого Лобачевским сочинения, представленного им в отделение физико-математических наук 24(12) февраля 1826 г., до сих пор не обнаружена.

В ряде последующих работ, печатавшихся вплоть до 1855 г., Лобачевский разработал гиперболическую геометрию с большой полнотой, а также показал ее применения к вычислению ряда трудных определенных интегралов. Независимо от Лобачевского к открытию неевклидовой геометрии пришли Гаусс, ничего не опубликовавший по этому вопросу, и Я. Бояи, выступивший в 1831 г. с небольшим исследованием, в котором была оригинально и чрез-

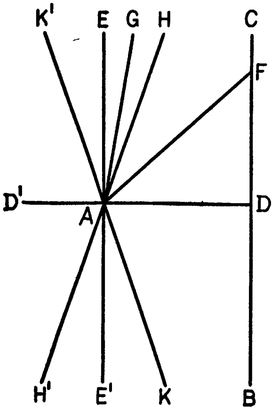


Рис. 82.

вычайно сжато развита гиперболическая геометрия [см. книгу В. Ф. Кагана, № 27]. Создание первой системы неевклидовой геометрии, при жизни ее творцов не вызвавшей интереса, а некоторыми учеными решительно отвергнутой, оказало, начиная с середины 60-х годов XIX в., огромное влияние на все развитие математики, а затем и физики. Уже в 1879 г. У. Клиффорд сравнил революцию, произведенную Лобачевским в математике, с революцией, которую произвел в астрономии Коперник. Следующей важнейшей вехой в истории геометрии явилось введение многомерных римановых пространств (см. следующий отрывок).

1. Слова Лобачевского «понятия приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить» направлены против идеалистических представлений об априорном, внеопытном характере наших понятий о пространстве, развивавшихся в древности Платоном, а в конце XVIII в. Кантом. Этим представлениям Лобачевский противопоставлял материалистическую точку зрения на опытное происхождение понятий математики вообще и геометрии в частности.

2. Здесь Лобачевский отличает новую систему геометрии, как «воображаемую», от «употребительной» геометрии Евклида. Вопрос о геометрических свойствах физического пространства, живо интересовавший Лобачевского, не мог быть решен в его время. Но он был убежден, что «новая геометрия... если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении» [№ 32, т. I, с. 209], т. е. является внутренне непротиворечивой абстрактной системой наподобие мнимых чисел, которые он также называл воображаемыми. И так же, как действительные числа являются частным видом воображаемых, так и евклидова геометрия есть частный (мы бы сказали: предельный) случай воображаемой геометрии.

3. Это предложение, как и многие другие, приведено в цитируемой работе без доказательства; соответствующие доказательства имеются в позднейших трудах Лобачевского.

4. Свое утверждение, включающее новое допущение о параллельных, Лобачевский не иллюстрирует здесь чертежом. Приведем чертеж из его «Геометрических исследований по теории параллельных линий», впервые изданных на немецком языке (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin, 1840). Здесь рассматривается множество прямых, проходящих через точку A, лежащую вне прямой BC, и лежащих в плоскости ABC. В прямом угле EAD прямые, проходящие через A, либо пересекают DC, как например AF, либо не пересекают DC, как прямая AE, перпендикулярная AD. Прямые первого рода Лобачевский называет в статье «О началах» сходящимися, прямые второго рода — несходящимися. Допуская, что, помимо AE, возможны и другие несходящиеся с DC прямые, например AG, Лобачевский заключает, что существует граничная прямая AH, по одну сторону которой лежат сходящиеся, а по другую — несходящиеся прямые. Граничная прямая AH (мы бы сказали: луч AH) называется параллельной BC в сторону DC; имеется симметричная относительно AD прямая (луч) AK, параллельная в сторону DB. Угол HAD называется углом параллельности [№ 32, т. I, с. 82—83].

В настоящее время непересекающиеся прямые плоскости Лобачевского, которые нельзя получить предельным переходом из пересекающихся, называются «расходящимися»; за теми же непересекающимися прямыми, которые можно получить указанным переходом, закрепился термин «параллельные».

4. Это — «функция Лобачевского», которую он впоследствии обозначал $\Pi(a)$. Несколько далее Лобачевский выражает эту функцию аналитически,

Несущественно меняя его обозначения, мы запишем его формулу, основную в гиперболической геометрии, в виде $\operatorname{tg}\frac{F(a)}{2}=e^{-\frac{a}{q}}$, где q — постоянная плоскости Лобачевского.

5. «Предельную круга», или «орицикл» (этот термин, происходящий от греческих слов ὅρος — «предел» и κύκλος — «круг», был введен самим Лобачевским), «предельную сферу», или «орисферу», можно определить соответственно как ортогональную траекторию пучка параллельных прямых плоскости Лобачевского и ортогональную поверхность связки параллельных прямых пространства Лобачевского.

6. Орисферу можно получить предельным переходом не только из сферы (при удалении ее центра в бесконечность), но и из так называемой эквидистантной поверхности — геометрического места точек, равноотстоящих от плоскости. Указанный здесь Лобачевским факт является частным случаем следующего, более общего факта: на сфере пространства Лобачевского имеет место та же геометрия, что и на сфере евклидова пространства; на каждой из двух полостей эквидистантной поверхности — та же геометрия, что и на плоскости Лобачевского (но с другой постоянной q, упомянутой нами в прим. 4); на орисфере, получаемой предельным переходом из обеих этих поверхностей, имеет место геометрия евклидовой плоскости.

7. Здесь подчеркнуто замечательное свойство пространства Лобачевского — то, что в малых участках геометрия этого пространства мало отличается от евклидовой (подобно тому как геометрия на сфере в малых участках мало отличается от геометрии плоскости).

г. СИСТЕМА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА

ИЗ «ОСНОВАНИЙ ГЕОМЕТРИИ» Д. ГИЛЬБЕРТА (1899)

[№ 22, с. 55—56.]

Введение. Геометрия, так же как и арифметика, требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются аксиомами геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений — это задача, которая со времен Евклида являлась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы. Задача эта сводится к логическому анализу нашего пространственного представления.

Настоящее исследование представляет собою новую попытку установить для геометрии полную и возможно более простую систему аксиом и вывести из этих аксиом важнейшие геометрические теоремы так, чтобы при этом стало совершенно ясно значение как различных групп аксиом, так и следствий, получающихся из отдельных аксиом.

§ 1. Элементы геометрии и пять групп аксиом

Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем *точками* и обозначаем A, B, C, ...; вещи второй системы мы называем *прямыми* и обозначаем a, b, c, ...;

вещи третьей системы мы называем *плоскостями* и обозначаем α, β, γ, ...; точки называются также *элементами линейной геометрии*, точки и прямые—*элементами плоской геометрии*, точки, прямые и плоскости—*элементами пространственной геометрии* или *элементами пространства*.

Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «лежать», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный». Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается *аксиомами геометрии* (I).

Аксиомы геометрии мы можем разбить на пять групп. Каждая из этих групп выражает определенные, связанные друг с другом основные результаты нашего опыта. Мы будем называть эти группы следующим образом;

I. 1—8-я аксиомы *соединения (принадлежности)*,
II. 1—4-я аксиомы *порядка*,
III. 1—5-я аксиомы *конгруэнтности*,
IV. аксиома *о параллельных*,
V. 1—2-я аксиомы *непрерывности*.

. . . . (2).

[Там же, с. 92—97.]

§ 9. Непротиворечивость аксиом

Аксиомы пяти групп, установленных в первой главе, не противоречат друг другу, т. е. с помощью логических умозаключений из них нельзя вывести положение, которое противоречило бы какой-либо одной из них. Чтобы убедиться в этом, мы образуем из действительных чисел систему вещей, в которой будут выполняться все аксиомы пяти групп (3).

Рассмотрим сначала поле Ω, образованное алгебраическими числами, которые получаются, если исходить из 1 и конечное число раз применять четыре арифметических действия—сложение, вычитание, умножение, деление—пятую операцию $|\sqrt{1+\omega^2}|$, где ω означает число, ранее полученное при помощи указанных пяти операций.

Мы рассматриваем пару чисел (x, y) поля Ω как точку; а отношение $(u:v:w)$ трех чисел поля Ω, если только u и v оба не равны нулю, как прямую; далее, пусть равенство

$$ux+vy+w=0$$

означает, что точка (x, y) лежит на прямой $(u:v:w)$; тогда, как легко видеть, аксиомы I_{1-3} и IV оказываются выполненными. Числа, принадлежащие полю Ω, действительны; принимая во внимание, что эти числа могут быть упорядочены по своей величине, мы легко можем так установить отношения порядка для наших точек и прямых, чтобы выполнялись также и все аксиомы группы II (аксиомы порядка). Действительно, пусть (x_1, y_1), (x_2, x_2), $(x_3, x_3), \ldots$ суть какие-то точки на некоторой прямой; будем считать, что они располагаются именно в этой последовательности на прямой, если числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или числа $y_1, y_2, y_3, \ldots$, взятые в этой последовательности, либо постоянно убывают, либо постоянно возрастают; далее, чтобы убедиться в выполнении аксиомы II_4, достаточно установить, что все точки (x, y), для которых $ux+vy+w$ меньше нуля, лежат по одну сторону от прямой $(u:v:w)$. а все точки (x, y), для которых $ux+vy+w$ больше нуля,—по другую сторону от этой прямой. Легко убедиться в том, что это правило согласуется с предыдущим условием, определяющим последовательность точек на прямой.

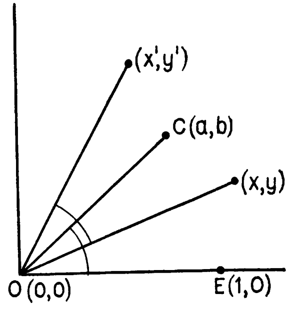


Рис. 83.

Откладывание отрезков и углов выполняется известными уже из аналитической геометрии способами. Преобразование вида

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b$$

дает параллельный перенос отрезков и углов, а преобразование

$$x' = x,$$
$$y' = -y —$$

зеркальное отображение относительно прямой $y=0$. Обозначим, далее, точку $(0, 0)$ буквой O, точку $(1, 0)$—буквой E и произвольную точку (a, b)—буквой C (рис. 83). Тогда произвольная точка (x, y) посредством вращения вокруг точки O на угол $\sphericalangle COE$ переходит в точку (x', y'), где

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} y,$$
$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} y.$$

Так как число $\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ также принадлежит полю Ω, то при наших предположениях выполняются аксиомы конгруэнтности III_{1-4} и очевидно, что аксиома о конгруэнтности треугольников III_5 и аксиома Архимеда V_1 при этом также выполняются. Что же касается аксиомы полноты, то она места не имеет (4).

Каждое противоречие, которое могло бы получиться из линейных и плоскостных аксиом I—IV, V_1, должно было бы тем самым проявиться в арифметике поля Ω (5).

Если мы в предыдущем изложении поле Ω заменим полем всех действительных чисел, то мы получим обычную декартову геометрию на плоскости (6).

. . . .

Итак, в декартовой геометрии на плоскости все аксиомы I—V, относящиеся к прямой и плоскости, выполняются.

Соответствующие исследования для геометрии в пространстве не представляют никаких трудностей.

. . . .

§ 10. Независимость аксиомы о параллельных (неевклидова геометрия)

. . . .

Аксиома IV о параллельных не зависит от остальных аксиом; это доказывается проще всего хорошо известным способом, а именно в качестве элементов пространственной геометрии принимают те точки, прямые и плоскости обыкновенной, построенной в § 9 (декартовой) геометрии, которые расположены внутри фиксированного шара, а конгруэнтности в этой геометрии заменяют такими линейными преобразованиями обыкновенной геометрии, которые указанный шар преобразуют самого в себя. При соответствующим образом установленных определениях убеждаются, что в этой «неевклидовой» геометрии выполняются все аксиомы, за исключением евклидовой аксиомы IV. Так как возможность обыкновенной геометрии была доказана в § 9, то отсюда следует также и возможность неевклидовой геометрии (7).

Примечания. Открытие неевклидовых систем геометрии и изучение вопроса о логической состоятельности привели в последней четверти XIX в. к глубокому пересмотру оснований геометрии. Аналогичная ситуация возникла в арифметике, частью в связи с разработкой теории действительных и обыкновенных комплексных чисел, частью в связи с созданием гиперкомплексных чисел с их парадоксальными свойствами (см. ч. I, п. 11б и ч. III, п. 10а). С конца 60-х годов прошлого столетия математики приступили к решению вопроса о возможности существования гиперболической геометрии; в поисках ответа был построен ряд евклидовых моделей, в которых геометрия Лобачевского получила полное истолкование. Такие модели были предложены Э. Бельтрами (1868), Ф. Клейном (1871—1873), А. Пуанкаре (1882) и другими учеными. Поскольку в истинности евклидовой геометрии не сомневались, найденные интерпретации рассматривались как доказательство непротиворечивости гиперболической геометрии. Модели были построены и для других неевклидовых систем. Вскоре наличие таких интерпретаций получило более точное значение: они доказывают не абсолютную непротиворечивость соответствующих неевклидовых систем, но то, что эти системы непротиворечивы постольку, поскольку непротиворечива геометрия Евклида. Далее последовал общий анализ исходных предложений и понятий геометрии, в том числе и евклидовой. Различные системы аксиом (разумеется, имеющие общие части) были даны прежде всего М. Пашем (1882), Дж. Пеано (1889), М. Пиери (1899), Д. Гильбертом (1899) и В. Ф. Каганом (1902). В ходе этих изысканий возникли новые точки зрения на смысл аксиом и определений исходных математических понятий и установлены стандартные требования, предъявляемые к отдельным системам аксиом (совместность и полнота системы, независимость аксиом). Вместе с тем стало ясным, что непротиворечивость геометрии в целом нельзя доказать внутри нее самой, но лишь путем ее интерпретации на моделях какой-либо отличной науки, например арифметики.

Аксиоматический метод изучения и построения математических теорий получил широкое распространение в XX в. и был успешно, хотя и в более ограниченной мере, распространен на механику и физику. Были выявлены и логические трудности, возникающие при аксиоматизации некоторых частей математики, а также принципиальные границы приложимости этого метода. Математика в целом не может быть ни построена на базе раз навсегда установленной системы аксиом, ни обоснована таким образом; критерием истинности математики в целом является ее опытная проверка всей совокупностью наук и всей практической деятельностью человечества. [См. об этом статьи А. Н. Колмогорова, № 29, и А. Д. Александрова, № 1.]

Мы приводим несколько отрывков принципиального характера из «Grundlagen der Geometrie» Д. Гильберта, впервые вышедших в 1899 г. В последующие издания автор внес различные улучшения и добавления. Русский перевод этого труда снабжен обширной статьей редактора и многочисленными примечаниями, во многих случаях уточняющими авторское изложение.

1. Читатель обратит внимание на отказ от определения исходных понятий точки, прямой и плоскости, свойства которых устанавливаются самими аксиомами (ср. ч. III, п. 2 и п. 10б, прим. 1).

2. Мы опускаем формулировки аксиом, которые можно найти во многих курсах геометрии, а также те теоремы, которые попутно доказываются Гильбертом.

3. Основная идея аналитического доказательства непротиворечивости системы аксиом Гильберта ясна из цитируемого отрывка. Проследить это доказательство в подробностях можно, обратившись к тексту «Оснований геометрии» и примечаний к § 9.

4. Об аксиоме Архимеда см. ч. IV, п. 1в. Аксиома линейной полноты, вторая аксиома непрерывности, сформулирована Гильбертом не вполне точно; см. об этом прим. 34 в цитируемом издании «Оснований геометрии» [№ 22, с. 434—440]. Ее нередко заменяют так называемой аксиомой Г. Кантора: всякая последовательность вложенных друг в друга и стягивающихся отрезков имеет хотя бы одну общую им точку. На основании аксиомы V_2 Гильберт доказывает теорему о полноте его системы.

5. Поле Ω называют теперь пифагоровым. Поскольку в «Началах» Евклида единственными средствами построения служат идеальные циркуль и линейка, все эти построения фактически производятся над пифагоровым полем, т. е. непрерывности в смысле классического математического анализа не требуется, Впрочем, вряд ли Евклид это имел в виду; несомненно, что все последующие ученые (и, вероятно, он сам) подразумевали, что объекты геометрии и их движения непрерывны. В отдельных случаях и в «Началах» выход за пределы пифагорова поля напрашивается сам собой [ср. № 26, т. I, с. 111].

6. Гильберт долгие годы пытался доказать непротиворечивость арифметики, и в добавлениях к «Основаниям геометрии» помещено несколько работ его по этому вопросу и по вопросам обоснования математики в целом.

7. Здесь имеется в виду упомянутая выше интерпретация Ф. Клейна. В § 11 Гильберт доказывает независимость аксиом конгруэнтности, в § 12 установлена независимость аксиом непрерывности и строится некоторая «неархимедова» геометрия.

д. АКСИОМАТИКА Г. ВЕЙЛЯ

ИЗ КНИГИ Г. ВЕЙЛЯ «ПРОСТРАНСТВО. ВРЕМЯ. МАТЕРИЯ» (1923)

[№ 102, с. 14—17; перевод Б. А. Розенфельда.]

§ 2. Основания аффинной геометрии

Перенос или сдвиг $\boldsymbol{a}$ пространства мы будем в дальнейшем обозначать вектором (1); позднее с этим названием мы будем связывать некоторое более общее понятие. То, что при сдвиге $\boldsymbol{a}$ точка P переходит в Q, будет выражаться также так: Q — конечная точка вектора $\boldsymbol{a}$, приложенного в P. Если P и Q — какие-нибудь две точки, то имеется один и только один сдвиг $\boldsymbol{a}$, переводящий P в Q; мы будем называть его вектором, определяемым точками P и Q, и обозначать $\overrightarrow{PQ}$.

Перенос $\boldsymbol{c}$, происходящий при последовательном выполнении переносов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, называется суммой $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Из определения суммы получается: 1) смысл умножения и деления вектора на целое число, 2) смысл операции, переводящей вектор $\boldsymbol{a}$ в противоположный $-\boldsymbol{a}$, 3) что следует понимать под вектором $\mathbf{o}$. а именно тождественное преобразование, оставляющее все точки неподвижными. Имеют место равенства $\boldsymbol{a}+\mathbf{o}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{o}$. Отсюда вытекает смысл символа $\pm\frac{m\mathrm{a}}{n}=\lambda\boldsymbol{a}$, в котором m и n — два какие угодно натуральные числа, а λ — дробь $\pm\frac{m}{n}$. С помощью требования непрерывности отсюда устанавливается, что следует понимать под вектором $\lambda\boldsymbol{a}$, где λ — произвольное действительное число. Мы устанавливаем следующую простую систему аксиом аффинной геометрии.

I. Векторы. *Два вектора* (2) $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *однозначно определяют вектор* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ — *их «сумму», число* λ *и вектор* $\boldsymbol{a}$ *однозначно определяют вектор* $\lambda\boldsymbol{a}$, *«λ-краткий* $\boldsymbol{a}$*»* (*умножение*). Эти операции удовлетворяют следующим законам:

α) *Сложение.*

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (*коммутативный закон*)
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (*ассоциативный закон*)
3. *Если* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{c}$ — *какие-нибудь два вектора, то имеется одно и только одно значение* $\boldsymbol{x}$, *для которого выполняется уравнение* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$. Оно называется разностью между $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ (возможность вычитания).

β) *Умножение.*

1. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (*первый дистрибутивный закон*)
2. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (*ассоциативный закон*)
3. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
4. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ (*второй дистрибутивный закон*)

Для рациональных множителей λ, μ законы β) вытекают из аксиом сложения, если умножение на эти множители определено с помощью сложения. В соответствии с принципом непрерывности мы будем применять их для произвольных вещественных чисел, но целесообразно формулировать их как отдельные аксиомы, так как в общем виде их нельзя *вывести* из аксиом сложения с помощью одних логических рассуждений. Воздерживаясь от сведения умножения к сложению, мы получаем возможность с помощью этих аксиом исключить из логической структуры геометрию непрерывности, которую так трудно определить точно. $\beta4$ содержит в себе теоремы подобия.

γ) «*Аксиома размерности*», занимающая следующее место в системе, будет сформулирована ниже.

II. Точки и векторы.

1. *Каждая пара точек* (3) *A и B определяет вектор* $\boldsymbol{a}$, *выражаемый символически в виде* $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$. *Если A — произвольная точка, а* $\boldsymbol{a}$ — *произвольный вектор, то имеется одна и только одна точка B, для которой* $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$.

2. *Если* $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$, *то* $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

В этих аксиомах участвуют две основные категории объектов — точки и векторы и три основных соотношения, которые выражаются символически в виде

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Все понятия, которые могут быть выведены из (1) с помощью одних логических рассуждений, принадлежат аффинной геометрии. Учение об аффинной геометрии состоит из всех теорем, которые могут быть логически выведены из этих аксиом и могут быть установлены дедуктивно на основе изложенного аксиоматического базиса. Эти аксиомы не все логически независимы друг от друга, например, аксиомы сложения векторов (Iα, 2 и 3) являются следствиями из тех аксиом (II), которые определяют соотношения между точками и векторами. Нашей целью, однако, было сделать векторные аксиомы I вполне самостоятельными, чтобы из них можно было бы вывести все факты, относящиеся только к векторам (а не к отношениям между векторами и точками).

Из аксиом сложения Iα мы можем вывести, что существует определенный вектор $\boldsymbol{o}$, который для всякого вектора $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{a}+\mathbf{o}=\boldsymbol{a}$. Из аксиом II следует, что $\overrightarrow{AB}$ равен этому вектору $\mathbf{o}$ тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают.

Если O — точка и $\boldsymbol{e}$ — вектор, отличный от $\mathbf{o}$, конечные точки всех векторов OP, имеющих вид $\xi\boldsymbol{e}$ (ξ — произвольное действительное число), образуют *прямую линию*. Это определение придает точке зрения на прямую, основанной на переносе, форму точного определения, основывающегося только на основных понятиях системы аффинных аксиом. Те точки P, для которых абсцисса ξ положительна, образуют одну половину прямой линии, проходящей через 0, т. е., для которых ξ отрицательна, образуют вторую половину. Если мы запишем e_1 вместо e и если e_2—другой вектор, не имеющий вида ξe_1, то конечные точки P всех векторов $\overrightarrow{OP}$, имеющих вид $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, образуют *плоскость* E (таким образом, плоскость также определяется на основе переноса с помощью сдвига одной прямой линии на другой). Если теперь мы будем перемещать плоскость E вдоль прямой линии, проходящей через 0, но не лежащей в E, плоскость опишет все пространство. В соответствии с этим если e_3—вектор, не представляемый в виде $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$, то всякий вектор может быть представлен одним и только одним способом в виде линейной комбинации e_1, e_2 и e_3, а именно

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3.$$

Таким образом, мы приходим к следующим определениям.

Конечное число векторов $e_1, e_2, \ldots, e_h$ называется *линейно независимым*, если

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_h e_h \qquad (2)$$

исчезает только тогда, когда все коэффициенты ξ исчезают одновременно. При этом предположении все векторы вида (2) образуют так называемое *h-мерное векторное многообразие*, *«натянутое»* на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_h$, h-мерное линейное векторное многообразие M может быть охарактеризовано без обращения к специальному базису e следующим образом:

1. Две основные операции—сложение двух векторов и умножение вектора на число—не выводят из многообразия, т. е. сумма двух векторов, принадлежащих к M, и произведение такого вектора на всякое действительное число лежат в M.

2. В M имеются h линейно независимых векторов, но всякие $h+1$ векторов линейно зависят друг от друга.

Из свойства (2) (которое может быть выведено из нашего первоначального определения с помощью элементарнейших теорем о линейных уравнениях) следует, что число измерений h является характеристичным для многообразия и не зависит от специального векторного базиса, на который мы его «натягиваем».

Аксиома размерности, пропущенная нами в приведенном выше списке аксиом, может быть теперь сформулирована в виде:

Имеются n линейно независимых векторов, но всякие $n+1$ векторов линейно зависят друг от друга,

или: *векторы образуют n-мерное линейное многообразие*. Если $n=3$, мы имеем аффинную геометрию пространства, если $n=2$ — плоскую геометрию, если $n=1$ — геометрию прямой линии.

. . . .

[Там же, с. 24—25.]

§ 4. Основания метрической геометрии

Для перехода от аффинной к метрической геометрии мы опять-таки должны исходить из источника наглядности. С ее помощью мы получаем для трехмерного пространства величину, называемую *скалярным произведением* двух векторов a и b. После выделения определенного вектора в качестве единичного мы измеряем длину a и длину (снабженную надлежащим знаком) ортогональной проекции b на a и перемножаем эти два числа друг на друга. Это означает, что можно сравнивать друг с другом длины не только на параллельных прямых линиях (как в аффинной геометрии), но также и тогда, когда они произвольно наклонены друг к другу. Для скалярного произведения выполняются правила:

$$\lambda \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}')\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b})$$

и аналогично для второго множителя; кроме того, имеет место коммутативный закон $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$. Скалярное произведение $\boldsymbol{a}$ с самим $\boldsymbol{a}$, т. е. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$, всегда положительно, за исключением случая, когда $\boldsymbol{a}=0$, и равно квадрату длины. Эти законы означают, что скалярное произведение двух произвольных векторов $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ является симметричной билинейной формой и что соответствующая квадратичная форма — положительно определенная. Таким образом, мы видим, что не длина, а квадрат длины вектора зависит простым рациональным образом от самого вектора — это квадратичная форма. В этом состоит действительное содержание *теоремы Пифагора*.

Скалярное произведение — не более чем симметричная билинейная форма, которой соответствует эта квадратичная форма. Поэтому может быть сформулирована следующая *метрическая аксиома: если выбран единичный вектор* $\boldsymbol{e}$, *отличный от нулевого, то всякие два вектора* $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *однозначно определяют число* $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=Q\ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$; *последнее, если рассматривать его как функцию двух векторов, является симметричной билинейной формой. Квадратичная форма* $(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})=Q\ (\boldsymbol{x})$, *соответствующая ей — положительно определенная.* $Q(\boldsymbol{e})=1$.

Будем называть Q основной метрической формой (4).

Примечания. Книга «Raum. Zeit. Materie» Г. Вейля, ученика Д. Гильберта, написанная в результате занятий математическими проблемами теории относительности, вышла первым изданием в 1918 г. и неоднократно переиздавалась с дополнениями. В этой книге дана аксиоматика аффинного пространства и на этой основе — аксиоматика евклидова пространства, а также определен важный частный случай пространств аффинной связности, называемый пространствами Вейля.

Приведенные отрывки взяты из 1 главы книги, озаглавленной «Евклидово пространство: его математическая формализация и его роль в физике».

1. Вектор в этом смысле — свободный вектор.

2. Здесь «векторы» — элементы любой природы, над которыми определены действия сложения и умножения на действительное число, удовлетворяющие группам аксиом (α), (β), (γ). Группа аксиом (α) означает, что векторы по сложению образуют коммутативную группу. Система объектов, удовлетворяющая этим трем группам аксиом, в настоящее время называется n-мерным линейным пространством.

3. Здесь точки, как и векторы, — элементы любой природы, причем векторы удовлетворяют аксиомам (I), а точки связаны с ними аксиомами (II).

4. Вейль определяет n-мерное евклидово пространство как n-мерное аффинное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, являющееся билинейной формой пары векторов, для которой соответствующая квадратичная форма («скалярный квадрат») является знакоопределенной формой.

10. АБСТРАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ТОПОЛОГИЯ

а. МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ГРАССМАНА

ИЗ «УЧЕНИЯ О ЛИНЕЙНОМ ПРОТЯЖЕНИИ, НОВОЙ ВЕТВИ МАТЕМАТИКИ» Г. ГРАССМАНА (1844)

[№ 84. с. 46—53; перевод Б. А. Розенфельда.]

§ 13, 14. Протяженные образы, отрезки и системы первой ступени

§ 13. ... Для того чтобы получить протяженную величину, я сошлюсь на образование линии. Здесь имеется образующая точка, принимающая различные положения в непрерывной последовательности; и совокупность точек, в которые переходит образующая точка в своем изменении, образует линию (1) ... Таким образом, точки линии кажутся существенно различными и как таковые обозначаются (различными буквами); но как различное всегда тесно связано с равным (хотя бы в смысле подчинения), так и здесь различные точки выступают как различные положения одной и той же образующей точки (2). Равным образом мы приходим в нашей науке к протяжению, если мы вместо входящих туда пространственных отношений поставим соответствующие понятийные (3).

Сначала вместо точки, т. е. особенного места, поставим здесь элемент, под которым мы будем понимать особенное, рассматривая как отличное от других особенных; при этом мы не будем придавать элементу в абстрактной науке никакого другого содержания; речь совсем не будет идти о том, что это собственно за особенное—это просто особенное без всякого реального содержания—или в каких отношениях одно из них отличается от другого—так как просто определяется как различное, без какого бы то ни было реального содержания, по отношению к которому оно отличалось бы. Это понятие элемента в нашей науке общее с учением о комбинациях (4), общим является и обозначение элементов (различными буквами). Различные элементы могут теперь одновременно рассматриваться как различные положения одного и того же образующего элемента, и это абстрактное различие положений соответствует различию места.

Г. Грассман

Переход образующего элемента от одного положения к другому мы также называем изменением; и это абстрактное изменение образующего элемента соответствует изменению места или движения точки в геометрии. И подобно тому как в геометрии при движении точки происходит прежде всего линия, а если подвергнуть полученные образы новому движению, можно получить пространственные образы высших ступеней, так и в нашей науке непрерывным изменением получают сначала протяженные образы первой ступени. В результате вышеизложенного мы можем сформулировать определение:

Под протяженным образом первой ступени понимается совокупность элементов, в которые образующий элемент переходит при непрерывном изменении.

В частности, мы называем образующий элемент в своем первом положении начальным элементом, в своем последнем положении—конечным элементом (5).

Из этого понятия тотчас же получается, что с каждым протяженным образом связан противоположный, образованный теми же элементами, но в обратном порядке, так что начальный элемент одного является конечным элементом другого. Или, выражаясь более определенно, если при изменении из a получается b, то имеется противоположный, переводящий b в a, и противоположным к протяженному образу является такой, который получается при противоположном изменении в обратном порядке, откуда видно, что эта противоположность взаимна (6).

§ 14. Протяженный образ будет рассматриваться теперь как нечто простое, если изменения, которым подвергнут образующий элемент, всегда равны друг другу; таким образом, если при изменении из элемента a получается другой элемент b и оба принадлежат этому простому протяженному образу, тогда равное изменение переводит b в элемент c того же протяженного образа и это равенство может иметь место и в том случае, когда a и b рассматриваются как непрерывно граничащие друг с другом, тогда это равенство имеет место сплошь при непрерывном порождении (7). Мы можем назвать такое изменение, при котором из одного элемента непрерывной формы получается соседний граничащий с ним, основным изменением, и тогда мы скажем: простой протяженный образ — такой, который получается при непрерывном продолжении одного и того же основного изменения.

В том же смысле, в котором полагаются равными изменения, будем полагать равными и порожденные ими образы и в этом смысле, а именно порожденные равными изменениями одним и тем же способом полагаются равными, мы будем называть простые протяженные образы первой ступени протяженными величинами или протяжениями первой ступени или отрезками (8). Простые протяженные образы относятся к протяженным величинам, если мы обращаем внимание не на элементы, из которых состоят первые, а только на способ их образования (9); и если два протяженные образа могут быть равны друг другу только, если они состоят из одних и тех же элементов, то две протяженные величины — также и тогда, когда они не содержат одних и тех же элементов, образуются одинаковым способом (т. е. одним и тем же изменением).

Наконец, совокупность всех элементов, которые могут быть получены продолжением одного и того же или противоположного основного изменения, мы называем системой (или областью) первой ступени (10). Отрезки, принадлежащие одной и той же системе первого порядка, все порождаются продолжениями или одного и того же основного изменения, или противоположного изменения.

Прежде чем перейти к соединению отрезков, мы хотим сделать понятия, установленные в предыдущих параграфах, более наглядным путем применения их к геометрии. Равенство способа изменения здесь представляется равенством направления, система первой ступени представляется здесь бесконечной прямой линией, простое протяжение первой ступени — ограниченной прямой линией. То, что мы там называли одного рода, здесь является параллельным, и параллельность здесь также обладает двумя сторонами, как параллельность в одном и том же и в противоположном направлении. Название отрезка мы можем сохранить в геометрии в соответственном смысле, а под равными отрезками понимать здесь ограниченные линии, имеющие равные направления и длины (11).

. . . .

§ 16. Системы высших ступеней

Для того чтобы получить соединение отрезков различного рода, я возьму теперь сначала два основных изменения различного рода и подвергну элемент первого основного изменения (или противоположному ему) произвольному продолжению, а измененный таким образом элемент подвергну второму способу изменения, также произвольно продолженному; совокупность таким образом образуемых элементов я называю системой второй ступени. Если я возьму далее третье основное изменение, которое не переводит тот же начальный элемент в элемент этой системы второй ступени и которое я поэтому буду называть независимым от первых двух, и подвергну произвольный элемент этой системы второй ступени этому третьему изменению (или противоположному ему), произвольно продолженному, то совокупность таким образом образуемых элементов является системой третьей ступени; и так как этот способ образования по идее применим без всякого ограничения, то я могу определить этим способом системы произвольно высоких ступеней (12).

При этом важно иметь в виду, что все элементы, образованные этим способом, должны рассматриваться не как уже данные, а как образуемые изначально и что все они, поскольку они изначально образуются различными изменениями, также и по идее представляются различными. Напротив, с другой стороны, ясно, что после того, как элементы образованы, они представляются уже данными и что их различие или тождественность может быть установлена только путем возвращения к их изначальному образованию.

Прежде чем теперь я перейду к нашей задаче, а именно к соединению различных способов изменения, я хочу прибегнуть к наглядности с помощью геометрических рассмотрений. А именно, ясно, что система второй ступени соответствует плоскости и плоскость можно мыслить образованной таким образом, что все точки прямой линии движутся в новом, в ней не содержащемся направлении (или в противоположном ему), причем вся совокупность таким образом образуемых точек составляет бесконечную плоскость. Поэтому плоскость представляется совокупностью параллелей, которые все пересекают данную прямую; очевидно, что так как эти параллели не пересекаются и не встречают второй раз первоначальную прямую, все таким образом образованные точки различны, так что аналогия полная. То же имеет место и для всего бесконечного пространства как системы третьей ступени, если точки плоскости двигать по новому, не лежащему в этой плоскости (или по противоположному); дальше геометрия не идет, но абстрактная наука не знает границ (13).

Примечания. В «Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik» Г. Грассмана (1844) была впервые подробно и систематически разработана геометрия евклидова пространства n измерений R_n; годом ранее набросок такой геометрии опубликовал А. Кэли. Крайне трудно и абстрактно написанная книга Грассмана долгое время не обращала на себя внимания математиков. Впоследствии, в 1862 г. он выпустил значительно переработанное и дополненное издание своего труда. Задавая точку в R_n, определяемую n действительными числами $x_1, x_1, \ldots, x_n$, выражением (гиперкомплексным числом) $x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, где e_k,— некоторые отличные друг от друга единичные элементы, Грассман построил исчисление введенных их геометрических величин и вместе с тем заложил начала алгебры таких гиперкомплексных чисел, частным случаем которой является алгебра кватернионов Гамильтона (см. ч.I, п. 11 б). В современной терминологии учение о линейном протяжении Грассмана можно охарактеризовать как весьма общее исчисление векторов в n-мерном пространстве; термин «вектор» восходит к Гамильтону.

1. Грассман понимает линию как непрерывное множество точек.

2. Здесь Грассман понимает линию как результат движения точки.

3. «Понятийные» (begrieflich) отношения — отношения многомерной геометрии, в отличие от «пространственных» отношений геометрии трехмерного пространства.

4. «Общее учение о комбинациях» — учение Лейбница о комбинаторном искусстве.

5. Понятие «протяженного образа первой ступени» чрезвычайно широко; мы бы сказали, что это множество элементов любой природы гомеоморфное отрезку и снабженное ориентацией. В дальнейшем это понятие будет специализировано в виде ориентированного отрезка, а начальный и конечный элементы — в виде начала и конца этого отрезка.

6. Здесь со всяким «протяженным образом первой ступени» сопоставляется противоположный ему образ, отличающийся только ориентацией.

7. Слова о «непрерывно граничащих друг с другом элементах» и о «непрерывном порождении» указывают на гомеоморфность рассматриваемого им «протяженного образа» отрезку; терминология Грассмана здесь крайне расплывчата.

8. Здесь вводится понятие, представляющее собой по существу класс эквивалентных протяженных образов первой ступени. При специализации этих образов в виде ориентированных отрезков новое понятие Грассмана, называемое им «протяженной величиной», «протяжением первой ступени» и просто «отрезком», становится (свободным) вектором.

9. Слова о том, что «мы обращаем внимание не на элементы, из которых состоят» протяженные образы, «а только на способ их образования», определяют характер эквивалентности этих образов и новое понятие, определяемое классом таких образов.

10. «Система (область) первой ступени» относится к «протяженному образу первой ступени», как прямая к ориентированному отрезку этой прямой.

11. Слово «отрезок» понимается здесь в смысле ориентированного прямолинейного отрезка.

12. Теперь Грассман определяет многомерные пространства любой размерности, опять-таки как непрерывные многообразия весьма общего характера.

13. Таким образом, Грассман специализирует общее понятие многомерного «протяжения» в виде аффинного пространства любого числа измерений. Заключительные слова текста указывают, что Грассман относил к геометрии только геометрию трехмерного пространства и его подпространств, а то, что мы называем геометрией многомерных пространств, называл не геометрией, а «учением о линейном протяжении».

6. РИМАНОВА КРИВИЗНА

ИЗ РЕЧИ «О ГИПОТЕЗАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ» Б. РИМАНА (1854, опубл. в 1868 г.)

[№ 45. с. 279—288.]

План исследования

Общеизвестно, что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий, тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом (1). При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным; не видно, является ли и в какой степени связь между ними необходимой; не видно также a priori, возможна ли такая связь.

... Причина этому обстоятельству, как я полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной. В связи с этим я поставил перед собой задачу: исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения и что пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины. Необходимым следствием отсюда является то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из двух мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта (2). В таком случае возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства,— задача, естественно, не вполне определенная, так как не исключено, что возможно несколько систем простых допущений, из которых каждая достаточна для установления метрических свойств пространства; важнейшая среди них, с точки зрения поставленной нами цели, есть система, положенная в основу геометрии Евклидом. Допущения, о которых идет речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они — не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие (которое, как бы то ни было, очень значительно в пределах наблюдения) надлежит подвергнуть исследованию и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого.

. . . .

1. Образование понятия величины возможно лишь в том случае, если предпослано некоторое общее понятие, связанное с допущением ряда различных состояний (3). В зависимости от того, существует ли или не существует непрерывный переход от одного состояния к другому, мы имеем дело с непрерывным или с прерывным многообразием; отдельные состояния называются в первом случае точками, во втором — элементами многообразия. Величины, которые образуют дискретное множество состояний, встречаются столь часто, что по крайней мере в более развитых языках для соответствующих понятий всегда имеются особые наименования (и именно потому при построении учения о дискретных величинах математики могли исходить из допущения однородности данных объектов). Напротив, надобность в образовании понятий, соответствующих случаю непрерывных многообразий, встречается сравнительно редко; из немногочисленных примеров многократно протяженных многообразий, встречающихся в обыденной жизни, укажем локализованные ощущения и цвета; гораздо чаще приходится прибегать к рассмотрению и исследованию подобного рода понятий в высших разделах математики.

Отдельные части многообразий могут быть выделены с помощью некоторых признаков или же количественных (квантитативных) различий. С количественной точки зрения сравнение осуществляется в случае дискретных многообразий посредством счета, в случае непрерывных — посредством измерения. Измерение заключается в последовательном прикладывании сравниваемых величин; поэтому возможность измерений обусловлена наличием некоторого способа переносить одну величину, принятую за единицу масштаба, по другой величине. Если такой способ не указан, то сравнивать две величины можно лишь в том случае, когда одна из них является частью другой, и тогда речь может идти лишь о «больше» или «меньше», а не о «сколько». Исследования, которые имеют своим предметом величины такого рода, образуют общего характера, независимую от мероопределения, часть учения о величинах: в ней величины не мыслятся существующими независимо от их положения и выраженными через единицу измерения, а должны быть представляемы как области в некотором многообразии (4). Такого рода исследования стали крайне необходимыми для многих отраслей математики, в частности для теории многозначных аналитических функций; недостаточное их развитие, несомненно, есть причина того, что знаменитая теорема Абеля (5), а также результаты, полученные Лагранжем, Пфаффом, Якоби в общей теории дифференциальных уравнений, долгое время не давали своих плодов.

С точки зрения цели, которую мы здесь имеем в виду, из этой общей части учения о протяженных величинах (где не делается никаких допущений, которые не содержались бы в самом понятии) достаточно особо выделить два пункта: первый относится к способу введения понятия многократно протяженной величины, второй касается того, как определение местонахождения в многообразии сводится к установлению ряда количественных (квантитативных) данных, причем выяснено будет и то, какому многообразию приписывается n-кратная протяженность (6).

2. Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причем от одного состояния определенным способом можно переходить ко всякому другому; тогда все эти состояния образуют просто протяженное или однократно-протяженное многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны — вперед и назад. Предположим дальше, что это многообразие в свою очередь может быть переведено в другое, вполне отличное от первого многообразия, притом также совершенно определенным образом, т. е. так, что каждая точка первого многообразия переходит в определенную точку второго; все состояния, которые могут быть получены при подобного рода операциях, образуют дважды протяженное многообразие. Также образуется и трижды протяженное многообразие: достаточно представить себе, что дважды протяженное многообразие определенным образом переводится в иное, вполне отличное многообразие. Легко понять, как можно продолжить это построение. Если условимся термину «определенный» противопоставлять в качестве противоположного термина «изменяемый», то можно характеризовать наше построение как составление изменяемости $n+1$ измерений из одной изменяемости n измерений и одной изменяемости одного измерения (7).

3. Теперь я покажу, как обратно изменяемость, связанная с некоторой данной областью, может быть разложена на изменяемость одного измерения и изменяемость меньшего числа измерений. Для этой цели представим себе переменную точку на некотором многообразии одного измерения (на этом последнем отсчет ведется от определенной начальной точки, и различные результаты измерения сравнимы между собою) и вообразим, что для каждой точки данного многообразия указывается некоторое положение упомянутой переменной точки с сохранением непрерывности; другими словами, на данном многообразии указывается некоторая непрерывная функция точки и притом такая, которая на некоторой части данного многообразия не может оставаться постоянной (8). В таком случае всякая система точек, в которых функция сохраняет постоянное значение, образует непрерывное многообразие меньшего числа измерений, чем данное. Эти многообразия при изменении значения функции непрерывно переходят одно в другое; поэтому можно считать, что из одного из них получаются все остальные, причем происходит это, вообще говоря, так, что каждая точка одного переходит в определенную точку другого (случаи исключения, исследование которых существенно, здесь оставляются в стороне). В итоге определение положения на данном многообразии приводится к определению числового

значения просто протяженной величины и определению положения на многообразии, протяженность которого меньшей кратности. Легко показать, что это многообразие будет иметь $n-1$ измерений, если данное многообразие их имеет n. Повторяя указанную операцию n раз, мы сводим определение положения на многообразии n-кратной протяженности к определению числовых значений n просто протяженных величин, т. е. определение положения на данном многообразии (если только такое определение возможно) — к указанию конечного числа числовых данных. Впрочем, существуют и такие многообразия, для которых определение положения требует указания бесконечного ряда или даже непрерывного множества числовых данных. Примером такого рода могут служить многообразия, образованные функциями в данной области, многообразия, образованные контурами геометрических фигур, и т. п. (9).

. . . .

После того как построено понятие n-кратно протяженного многообразия и установлено в качестве существенного признака n-мерности, что определение положения на многообразии приводится к определению числовых значений n просто протяженных величин, мы перейдем теперь ко второму из поставленных выше вопросов, а именно к исследованию метрических отношений, возможных на таком многообразии, и к выяснению условий, которые являются достаточными для установления этих отношений. Метрические отношения могут быть исследуемы посредством отвлеченных величин и поставлены во взаимную связь с помощью формул; однако при некоторых предположениях их можно свести к таким отношениям, которые, будучи рассматриваемы каждое в отдельности, допускают определенные геометрические представления, и, следовательно, становится возможным результаты вычислений выражать в геометрической форме. Поэтому, хотя (чтобы стоять на твердой почве) и нельзя вовсе избежать абстрактного исследования с помощью формул, все же результаты этого исследования будут здесь представлены, если можно так выразиться, в геометрическом одеянии. Для того и другого прочное основание заложено в знаменитом сочинении о кривых поверхностях г. тайного советника Гаусса (10).

1. Мероопределение подразумевает независимость величин от местоположения. Эта независимость может быть понимаема в различных смыслах: первое допущение, которое естественно принять и которое я здесь подвергну дальнейшему рассмотрению, заключается в том, что длины линии не зависят от их положения, так что каждая линия измерима посредством каждой. Если определение положения приведено к определению величин, т. е. положение точки на данном n-кратно протяженном многообразии определяется n переменными величинами x_1, x_2, x_3 и т. д. до x_n, то для определения линии нужно задать величины x как функ-

ции некоторой одной переменной. Тогда задача заключается в том, чтобы указать математическую формулу для длины линий. В таком случае неизбежно подразумевать, что каждая из величин x может быть выражена через некоторую единицу. Поставленную задачу я буду исследовать только при некоторых ограничениях. Во-первых, ограничусь рассмотрением таких линий, для которых отношения величин dx (взаимно соответствующих приращений величин x) изменяются непрерывно. Тогда можно разбить линии на такие элементы, в пределах которых отношения величин dx допустимо считать постоянными, и задача наша сводится к тому, чтобы указать общую формулу для линейного элемента ds, выходящего из любой данной точки; эта формула должна, следовательно, содержать величины x и величины dx. Во-вторых, я допущу, что длина линейного элемента остается неизменной с точностью до величины второго порядка, если все его точки испытывают одно и то же бесконечно малое перемещение; отсюда, в частности, вытекает, что когда все величины dx увеличиваются в одно и то же число раз, то и линейный элемент ds увеличивается во столько же раз (**11**). При сделанных допущениях линейный элемент сможет быть произвольной однородной функцией первой степени от величин dx, которая не изменяется, когда все величины dx меняют знаки, и в которой коэффициенты являются непрерывными функциями величин x.

Чтобы прийти к простейшим возможным случаям, я сначала нахожу формулу для $(n-1)$-кратно протяженных многообразий, отстоящих от начальной точки линейного элемента повсюду на одно и то же расстояние, т. е. ищу непрерывную функцию точки, которая отличает одно из таких многообразий от другого. Такая функция должна будет во все стороны от начальной точки или уменьшаться, или увеличиваться; я предположу, что она во все стороны увеличивается и, следовательно, в самой точке имеет минимум. Тогда, если только ее первые и вторые производные конечны, дифференциал первого порядка должен обращаться в нуль, а дифференциал второго порядка не может становиться отрицательным; я предположу, что он всегда положительный. Это дифференциальное выражение второго порядка остается постоянным, когда ds остается постоянным, и возрастает в квадратном отношении, когда величины dx и, следовательно, также и ds увеличиваются в одно и то же число раз; поэтому оно $=\mathrm{const}\cdot ds^2$, и, значит, $ds =$ квадратному корню из всегда положительной целой однородной функции второй степени (**12**) величин dx с коэффициентами — непрерывными функциями величин x. В частности, для пространства, если определять положение точки прямоугольными координатами, мы имеем: $ds=\sqrt{\Sigma(dx)^2}$; пространство, следовательно, подпадает под этот простейший случай. Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, соответствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвертой степени из дифференциального выражения четвертой степени. Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому я позволю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задается как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени.

Дифференциальное выражение рассматриваемого типа может быть преобразовано в другое выражение подобного типа, если n зависимых переменных приравнять некоторым функциям от n новых независимых переменных. Но, таким образом, нет возможности преобразовать всякое дифференциальное выражение во всякое: действительно, наше выражение содержит $n\frac{n+1}{2}$ коэффициентов, являющихся произвольными функциями независимых переменных; при введении же новых переменных мы сможем удовлетворить только n соотношениям, так что лишь n коэффициентов примут данные заранее значения. Поэтому $n\frac{n-1}{2}$ остальных коэффициентов зависят от природы исследуемого многообразия, и для установления отношений между ними требуются еще $n\frac{n-1}{2}$ функций точки на многообразии (13).

Те многообразия, для которых, как для плоскости и пространства, линейный элемент может быть приведен к виду $\sqrt{(dx)^2}$, образуют частный случай изучаемых нами многообразий; они, без сомнения, заслуживают особого наименования, и потому я буду многообразия, для которых квадрат линейного элемента приводится к сумме квадратов независимых дифференциалов, называть плоскими (14).

Для того чтобы было легче обозреть существенные особенности различных многообразий, представляемых в указанной форме, необходимо устранить особенности, возникающие из формы представления, что достигается надлежащим выбором переменных, совершаемым по определенному принципу.

2. Именно, вообразим, что построена система кратчайших линий, выходящих из произвольной начальной точки; тогда положение рассматриваемой переменной точки определится, если будут указаны начальное направление кратчайшей линии, на которой она лежит, и расстояние ее от начальной точки, отсчитываемое по этой кратчайшей линии; достаточно, следовательно, задать отношения величин dx^0, т. е. величин dx в начале кратчайшей линии, и длины s этой линии. Но вместо dx мы введем линейные комбинации $d\alpha$, составленные из них таким образом, чтобы

в начальной точке квадрат линейного элемента равнялся сумме их квадратов; независимыми переменными тогда будут: величина s и отношения величин $d\alpha$; и, наконец, вместо $d\alpha$ введем такие пропорциональные им величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы сумма их квадратов равнялась s^2. После введения этих переменных для бесконечно малых значений x квадрат линейного элемента примет вид $\sum dx^2$, причем член следующего порядка будет однородным выражением второй степени от $n\frac{n-1}{2}$ величин $(x_1dx_2-x_2dx_1)$, $(x_1dx_3-x_3dx_1), \ldots$, т. е. этот член будет уже бесконечно малой величиной четвертого порядка. Отсюда следует, что мы получим конечную величину, если разделим эту величину на квадрат площади бесконечно малого треугольника, в вершинах которого переменные имеют значения $(0, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$.

Эта величина сохраняет неизменное значение, поскольку величины x и dx содержатся в одних и тех же бинарных линейных формах или же поскольку обе кратчайшие линии от значений 0 к значениям x и от значений 0 к значениям dx лежат в одном и том же плоском элементе, и зависит, следовательно, только от местонахождения этого элемента. Она, очевидно, равна нулю, если рассматриваемое многообразие плоское, т. е. если квадрат линейного элемента приводится к виду $\sum dx^2$, и может потому служить мерой того, насколько многообразие по данному плоскостному направлению отклоняется от плоского многообразия. Будучи умножена на $-\frac{3}{4}$, она становится равной той величине, которую г. тайный советник Гаусс назвал мерой кривизны поверхности (15). Уже раньше было отмечено, что для введения мероопределения на n-кратно протяженном многообразии, представимом в указанной выше форме, необходимо задать $n\frac{n-1}{2}$ функций точки; поэтому если в каждой точке задается мера кривизны, соответствующая каждому из $n\frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений, то тем самым определяются и метрические отношения на многообразии.

. . . .

4. Прежде чем мы сделаем применение нашей теории к случаю пространства, необходимо еще изложить ряд соображений, касающихся общего случая плоских многообразий, т. е. таких многообразий, для которых квадрат линейного элемента представляется в виде суммы квадратов полных дифференциалов.

В случае плоского n-кратно протяженного многообразия мера кривизны в каждой точке относительно любого направления равна нулю; согласно предшествующему исследованию, для того чтобы метрические отношения были определены, достаточно знать, что в каждой точке относительно $n\frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений (таких, что соответствующие меры кривизны независимы между собой) мера кривизны равна нулю. Многообразия, для которых мера кривизны везде равна нулю, представляют собой частный случай многообразий, для которых мера кривизны всюду постоянна. Многообразия с постоянной мерой кривизны (16) могут быть характеризованы также тем свойством, что фигуры могут в них перемещаться без растяжений и сжатий. В самом деле, очевидно, что фигуры не смогли бы быть как угодно перемещаемы и вращаемы в многообразии, если бы мера кривизны не оставалась неизменной в каждой точке по любому направлению. С другой стороны, метрические отношения на многообразии полностью определяются мерой кривизны; поэтому, если в одной точке по всем направлениям мера кривизны остается той же, что и во всякой другой точке, то во всякой точке можно выполнить те же построения, что и в начальной точке, так что на многообразии с постоянной мерой кривизны фигуры способны занимать совершенно произвольные положения. Метрические отношения на таких многообразиях зависят только от числового значения меры кривизны: по поводу аналитического представления я позволю себе заметить, что если это числовое значение обозначено через α, выражение для линейного элемента может быть приведено к виду

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}.$$

Примечания. Пробная лекция Римана «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», прочитанная 10 июня 1854 г. на философском факультете Геттингенского университета, была опубликована только в 1868 г. по тексту, обнаруженному в бумагах Римана после его смерти Р. Дедекиндом. Риман стремился сообщить изложению возможно большую доступность, так как аудитория состояла в большинстве из лиц, не имеющих большой математической квалификации; Гаусс, бывший среди слушателей, оценил лекцию исключительно высоко. Лекции предпосланы глубокие общие замечания о взаимоотношении между теорией геометрических пространств и геометрией физического мира; к этой проблеме Риман возвращается в последней, опущенной нами части лекции, заканчивая ее словами: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке—физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день» [№ 45, с. 292]. Через этот порог наука переступила более чем шестьдесят лет спустя, когда теория римановых пространств получила применение в общей теории относительности А. Эйнштейна (1916). О значении данной работы Римана в развитии математики и физики см. комментарий Г. Вейля в [№ 45, с. 510—526] и указанную там литературу.

1. Ср. ч. III, п. 10, а, прим. 1.

2. Как и Г. Грассман (см. прим. 3 стр. 294), Риман применял термин «пространство» лишь в случае 3-мерного евклидова пространства.

3. Словом «состояние» переведен термин Bestimmungsweise, буквально «способ определения». Риман имеет в виду элемент многообразия (Mannigfaltigkeit), зависящий от некоторого числа параметров, т. е., на современном языке, точку, вообще говоря, многомерного пространства.

4. Риман имеет в виду исследования по топологии, одним из основоположников которой он был. Начала комбинаторной топологии поверхностей

были заложены им в «Теории абелевых функций» (1857); основы комбинаторной топологии многомерных многообразий были сформулированы им во «Фрагментах, относящихся к Analysis situs» и развиты его другом Э. Бетти (1871), а затем А. Пуанкаре (см. ч. III, п. 10 г).

5. Теорема Абеля гласит, что сумма «абелевых интегралов», т. е. интегралов вида $\int R(x, y)\,dx$, где $R(x, y)$ — одна и та же рациональная функция переменных x, y, связанных произвольным алгебраическим уравнением $f_n(x, y) = 0$, а пределы интегрирования связаны алгебраическими соотношениями, может быть представлена определенным числом p таких же интегралов. Число p Риман выделил в «Теории абелевых функций» как важнейшую характеристику кривой $f_n(x, y) = 0$ и той многосвязной поверхности, которая определяется этим уравнением в комплексной области; А. Клебш в 1865 г. назвал это число «родом». Для многосвязной поверхности род p является ее важнейшей топологической характеристикой.

6. Мы говорим теперь о пространстве n измерений.

7. «Изменяемость» (Veränderlichkeit) у Римана — то же, что «многообразие» (Mannigfaltigkeit).

8. Под «частью многообразия» понимается область той же размерности.

9. Здесь выдвигается идея бесконечномерного пространства и его реализации в виде многообразия функций, т. е., как сказали бы мы теперь, «функционального пространства».

10. Имеются в виду «Общие исследования о кривых поверхностях» Гаусса (см. ч. III, п. 8 б).

11. Это условие означает, что дифференциал дуги ds между точками с координатами x^i и $x^i + dx^i$ является однородной функцией первого порядка от дифференциалов dx^i.

12. Здесь Риман специализирует зависимость ds^i от dx^i в виде положительно определенной квадратичной формы $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где коэффициенты g_{ij} — функции координат x^i. Такое строение этой функции обеспечивает то, что в бесконечно малых окрестностях точек геометрия пространства, определенного Риманом, не отличается от геометрии n-мерного евклидова пространства. Здесь и далее по одинаковым индексам сверху и снизу предполагается суммирование.

13. На самом деле при переходе от координат x^i к координатам $x^{i'}$ коэффициенты g_{ij} преобразуются по закону $g_{i'j'} = g_{ij}\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$.

14. Этот класс римановых пространств в настоящее время называется пространствами нулевой кривизны.

15. Риман выбирает такие координаты, чтобы в некоторой точке коэффициенты g_{ij} были бы равны $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases}$ поэтому в окрестности этой точки

$$g_{ij} = \delta_{ij} + C_{ij,\,k}x^k + C_{ij,\,kl}x^k x^l + \ldots,$$

где x^k — фактически дифференциалы координат. Нетрудно проверить, что в соответственном степенном разложении ds^2 совокупность членов 0-го порядка имеет вид $\sum (dx^i)^2$, совокупность членов 1-го порядка отсутствует, а совокупность членов 2-го порядка представляет собой квадратичную форму величин $x^i dx^j - x^j dx^i$ или, если мы для единообразия обозначим бесконечно малые величины x^i через δx^i, квадратичную форму величин $\Delta x^{ij} = \delta x^i dx^j - \delta x^j dx^i$, которую можно записать в виде $\Delta\sigma^2 = \frac{1}{4} R_{ij,\,kl}\Delta x^{ij}\Delta^{kl}$. Здесь величины $R_{ij,\,kl}$ являются координатами так называемого «тензора Римана», или «тензора кривизны». Риманова кривизна представляет собой отношение дифференциальной формы $\Delta\sigma^2$ к дифференциальной форме, равной квадрату площади бесконечно малого параллелограмма, построенного на бесконечно малых векторах с координатами dx^i и δx^i (сам Риман говорит не о параллелограмме, а о треугольнике); она пропорциональна пределу отношения углового избытка геодезического треугольника к его площади при стягивании этого треугольника в точку, которому в случае двумерной поверхности трехмерного пространства равна гауссова кривизна поверхности в данной точке. Таким образом, риманова кривизна определена для каждого двумерного направления в каждой точке риманова пространства; она положительна в случае положительности упомянутого углового избытка геодезического треугольника и отрицательна в случае его отрицательности.

16. Здесь рассматриваются римановы пространства постоянной кривизны, т. е. такие, у которых риманова кривизна одна и та же для всех двумерных направлений во всех точках. Римановыми пространствами постоянной положительной кривизны являются сферы в многомерных евклидовых пространствах и эллиптические пространства, получаемые из этих сфер отождествлением диаметрально противоположных точек; римановыми пространствами постоянной отрицательной кривизны являются многомерные пространства Лобачевского (пространства Лобачевского называют также гиперболическими, а эллиптические пространства часто называют неевклидовыми пространствами Римана).

в. АБСТРАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ФРЕШЕ

ИЗ СТАТЬИ «О НЕКОТОРЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ» М. ФРЕШЕ (1906).

[№ 81а, с. 1—2; перевод Ф. А. Медведева.]

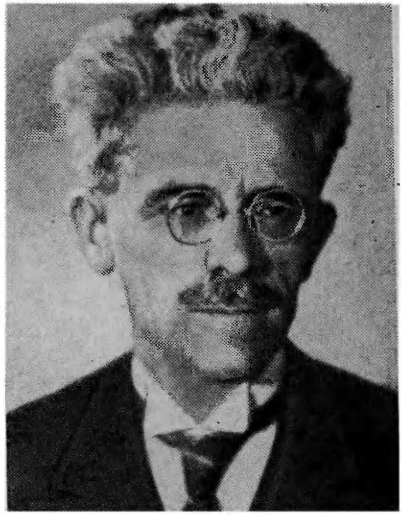
1. Мы скажем, что функциональная операция u определена на множестве ε элементов какой-либо природы (числа, кривые, точки и т. д.), если всякому элементу A из ε соответствует определенное числовое значение u:u (A). Разыскивание свойств этих операций образует объект функционального исчисления (1).

Настоящая работа является первой попыткой установления некоторых основных принципов функционального исчисления и применения их затем к некоторым конкретным примерам.

2. С этой целью прежде всего нужно обобщить теорию линейных множеств, которая привела к такому прогрессу в теории функций одного переменного. Можно было бы возразить, что спустя долгое время теория функций смогла бы перейти к рассмотрению точечных множеств. Но предварительное изучение множеств оказывается гораздо более необходимым в функциональном исчислении.

Если допустить это предварительное изучение множеств, то возникает одна трудность. Первое обобщение, которое представляется естественным, это понятие непрерывной функции. Однако, если хотят рассматривать операции, переменная которых—элемент произвольной природы, то нужно сначала знать, что следует понимать под соседним элементом или под пределом последовательности элементов. Это кажется невозможным: обычно дают специальное определение предела для каждой категории рассматриваемых элементов—точек, кривых и т. д. Я обошел эту трудность методом, аналогичным тому, который позволяет в теории абстрактных групп рассуждать о явно неопределенном виде композиции (2).

После этого я замечу, что почти все классические определения предела (но не все) могут быть сформулированы следующим образом: для рассматриваемой категории элементов всякой паре элементов A, B можно поставить в соответствие число $(A, B) \geqslant 0$, обладающее свойствами, весьма близкими к свойствам расстояния двух точек, а именно такое, что 1° A совпадает с B, если $(A, B) = 0$, 2° B стремится к A, если (A, B) стремится к нулю. Принимая эту гипотезу, менее общую, но тем не менее весьма широкую, получаем многочисленные более точные результаты (**3**).



М. Фреше

Только что указанный нами путь приводит нас к обобщению почти всех теорем о линейных множествах и о непрерывных функциях (по крайней мере тех, которые можно сформулировать независимо от природы рассматриваемых множеств).

Примечания. Докторская диссертация М. Фреше «Sur quelques points de calcul fonctionnel» (1906) стала отправным пунктом развития общей теории абстрактных пространств и вместе с тем разработки основных понятий функционального анализа; здесь были, в частности, сформулированы понятия метрического пространства, компактности, полноты и т. д. Мы приводим лишь вводные параграфы этого труда, указывающие направление всего исследования [1].

1. Фреше называет функциональным исчислением действия в пространствах, элементы которых — элементы любой природы, но фактически имеются в виду функции или кривые.

2. Фреше здесь имеет в виду, по-видимому, исследования Р. Дедекинда по общей теории колец, в частности его XI приложение к «Лекциям по теории чисел» П. Лежен Дирихле (изданное в 1879 г.), и подчеркивает, что применяет к понятию пространства принципы обобщения, сходные с теми, какие уже применялись в алгебре.

3. Многообразие, в котором определено расстояние (A, B), удовлетворяющее тем или иным аксиомам, в настоящее время называют метрическим пространством.

[1] Публикуемый здесь портрет М. Фреше любезно предоставлен нам Архивом Парижской Академии наук.

г. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА И ЧИСЛА БЕТТИ

ИЗ «ANALYSIS SITUS» А. ПУАНКАРЕ (1895)

[№ 43, с. 457; перевод А. Н. Боголюбова.]

Введение

Геометрия n измерений занимается исследованием действительности; в этом теперь никто не сомневается. Тела в гиперпространстве (1) поддаются точным определениям, подобно телам из обычного пространства, и если мы не можем их изобразить, то можем себе представить и изучать. И если, например, механика более трех измерений должна быть осуждена, как не имеющая смысла, положение гипергеометрии является совершенно иным.

Действительно, геометрия не имеет своей единственной целью непосредственное описание тел, воспринимаемых нашими органами чувств: прежде всего она является аналитическим исследованием некоторой группы и, следовательно, ничто не препятствует изучению иных групп, аналогичных и более общих (2).

Однако сразу же возникает вопрос: надо ли заменять язык аналитического исследования языком геометрии, который теряет все свои преимущества, как только исчезает возможность пользоваться чувствами? Оказывается, что этот новый язык более точен; кроме того, аналогия с обычной геометрией может создать ассоциации плодотворных идей и подсказать полезные обобщения.

. . . .

[Там же, с. 470—471.]

§ 5. Гомологии. Рассмотрим многообразие V p измерений (3); пусть далее W — многообразие q измерений ($q \leqslant p$), составляющее часть V. Предположим, что полная граница W состоит из λ связных многообразий $q-1$ измерений:

$$v_1, v_2, \ldots, v_\lambda \tag{4}$$

Выразим это обстоятельство с помощью обозначения

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\lambda \sim 0.$$

В более общем случае обозначение

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

где k — целые числа, а v — многообразия $q-1$ измерений, означает, что существует многообразие W q измерений, которое является частью V, полная граница которого состоит из k_1 многообразий, мало отличающихся от v_1, из k_2 многообразий, мало отличающихся от v_2, из k_3 многообразий, мало отличающихся от многообразия, противоположного к v_3, и из k_4 многообразий, мало отличающихся от многообразия, противоположного к v_4 (5).

Отношения этого вида можно называть *гомологиями* (6).

Гомологии можно комбинировать между собой подобно обычным уравнениям. Будем пользоваться также следующими обозначениями. Предположим, что существует гомология

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_p v_p \sim w_1 + w_2 + \ldots + w_q$$

и что многообразия $w_1, w_2, \ldots, w_q$ составляют часть границы V; иногда мы будем писать

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_p v_p \sim \varepsilon.$$

А. Пуанкаре

§ 6. Числа Бетти. Будем говорить, что многообразия

$$v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$$

с одним и тем же числом измерений, являющиеся частью V, *линейно независимы*, если они не связаны никакой гомологией с целыми коэффициентами.

Если существуют $P_m - 1$ *замкнутых* многообразий m измерений, являющихся частями V и линейно независимых, и если их существует только $P_m - 1$, мы будем говорить, что порядок связности многообразия V по отношению к многообразиям m измерений равен P_m.

Таким образом определяются, поскольку это касается многообразия V, m измерений $m-1$ чисел, которые я обозначу

$$P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$$

и которые являются порядками связности V по отношению к многообразиям

$$1, 2, \ldots, m-1$$

измерений. В последующем я буду называть их числами Бетти (7).

. . . .

[Там же, с. 531—532.]

§ 16. Теорема Эйлера. Известна теорема Эйлера, согласно которой если S, A и F — числа вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, то для последнего должно быть

$$S-A+F=2 \tag{8}$$

Эта теорема была обобщена адмиралом Жонкьером для случая невыпуклых многогранников (9). Если многогранник образует замкнутое многообразие двух измерений, число Бетти которого P_1, то

$$S-A+F=3-P_1.$$

Тот факт, что грани являются плоскими, не имеет, очевидно, никакого значения, и теорема одинаково приложима к криволинейным многогранникам; она приложима также к подразделениям какой-либо замкнутой поверхности на просто связные области (10). Эти области будут соответствовать граням многогранника; линии, служащие границей двух каких-либо из этих областей, соответствуют ребрам, а концы этих линий — вершинам.

Я предполагаю обобщить эти результаты на любое пространство.

Итак, пусть V — замкнутое многообразие n измерений. Подразделим его на некоторое число многообразий v_p, каждое p измерений; эти многообразия v_p не будут замкнутыми, и их границы будут образованы некоторым числом многообразий v_{p-1}, каждое $p-1$ измерений. В свою очередь, границы v_{p-1} будут образованы некоторым числом многообразий v_{p-2}, каждое $p-2$ измерений, и т. д.; я приду, наконец, к некоторому числу многообразий одного измерения, границами которых будет определенное число изолированных точек или многообразий нулевого измерения, которые я обозначу через v_0.

Многообразие V может иметь любые числа Бетти, но я требую, чтобы многообразия v_p, v_{p-1}, ..., v_1 были просто связными.

Через α_p, α_{p-1}, ..., α_1 и α_0 я обозначу число многообразий v_p, v_{p-1}, ..., v_1 и v_0.

Фигура, образованная всеми этими многообразиями, могла бы называться многогранником, так как очевидна аналогия с обычными многогранниками ...

Я собираюсь вычислить число

$$N=\alpha_p-\alpha_{p-1}+\alpha_{p-2}-\ldots\mp\alpha_1\pm\alpha_0.$$

. . . .

[Там же, с. 548.]

В общем случае мы будем иметь

$$N=P_{r-1}-P_{r-2}+\ldots+P_2-P_1,$$

если P нечетное, и

$$N=3-P_1+P_2-\ldots+P_{r-1},$$

если P четное (11).

Примечания. Сочинение А. Пуанкаре «Analysis situs» (1895) положило основание топологии многомерных пространств. Термин Analysis situs, применявшийся Риманом (см. прим. 4 к предыдущему отрывку), восходит в конечном счете к Лейбницу; термин «топология» был предложен И. Б. Листингом (1848). Общую оценку работ Пуанкаре по топологии см в статье П. С. Александрова [№ 43, с. 808—816].

1. Здесь Пуанкаре называет «гиперпространством» многомерное пространство, позже он применяет к нему термин «пространство». Геометрию многомерного пространства он именовал соответственно «гипергеометрией».

2. Имеются в виду группы геометрических преобразований, которые, согласно известной «Эрлангенской программе» (1872) Ф. Клейна, определяют различные геометрии как учения о свойствах, сохраняющихся инвариантными при преобразовании соответствующих групп.

3. Пуанкаре определяет p-мерное многообразие n-мерного евклидова пространства с помощью $n-p$ уравнений и некоторого числа неравенств между координатами. Абстрактное определение многообразия, не зависящее от пространства, в которое оно погружено, было введено Л. Э. Брауэром (1911).

4. Граница многообразия p измерений определяется как совокупность $(p-1)$-мерных многообразий, получаемых из данного заменой одного из определяющих его неравенств $\varphi \geqslant 0$ на уравнение $\varphi=0$.

5. Пуанкаре снабжает рассматриваемые многообразия ориентациями, причем связывает изменение ориентации с перестановкой двух из уравнений, определяющих многообразие. Многообразия с противоположной ориентацией он называет противоположными.

6. Термин «гомология» (по-гречески «согласие») в этом смысле введен Пуанкаре, раньше он применялся для обозначения специального вида проективного преобразования, переводящего один из двух треугольников, участвующих в теореме Дезарга, в другой.

7. Термин «числа Бетти» введен Пуанкаре по имени Э. Бетти, развившего в статье «О пространствах произвольного числа измерений» (1871) идею Римана о порядках связности многомерных многообразий. Заметим, что у Пуанкаре числа Бетти на 1 больше современных (изменение было произведено в 20-х годах XX в. С. Лефшецем и Дж. Александером). Далее Пуанкаре указывает, что двухмерная поверхность обладает единственным числом Бетти, совпадающим с порядком связности Римана, и если трехмерная область состоит из n областей, ограниченных замкнутыми поверхностями S_α с числами Бетти $2Q_\alpha+1$, то числами Бетти для трехмерной области являются $P_2=n$, $P_1=Q_1+Q_2+\ldots$ $\ldots+Q_n+1$, и в частности для внутренней области сферы $P_2=1$, $P_1=1$, для области, состоящей из двух сфер, $P_2=2$, $P_1=1$, для внутренней области тора $P_2=1$, $P_1=2$ и для области, состоящей из двух торов, $P_2=2$, $P_1=3$.

8. Эту теорему Эйлер впервые сообщил в письме к Х. Гольдбаху от 14 ноября 1750 г., а опубликовал вместе с доказательством в 4-м томе Novi Commentarii Петербургской Академии за 1752—1753 гг. (1758). В 1860 г. обнаружилось, что эта теорема была еще около 1620 г. известна Декарту, а из его бумаг — и Лейбницу.

9. Фактически это обобщение было произведено раньше С. Люилье (1812—1813).

10. Пуанкаре называет просто связной областью односвязную область, т. е. такую область, в которой всякий замкнутый контур можно непрерывно стянуть в точку.

11. Определив числа Бетти, Пуанкаре доказал их топологическую эквивалентность, т. е. их сохранение при взаимно-однозначных взаимно непрерывных преобразованиях (Пуанкаре ввел для таких преобразований термин «гомеоморфизм»), поэтому выражение определенного им аналога характеристики Эйлера N через числа Бетти доказывает топологическую инвариантность числа N.

ЛИТЕРАТУРА

Классики марксизма-ленинизма

I. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг. М., 1970.
II. *Ленин В. И.* Философские тетради. М., 1969.

Издания первоисточников и исследования

1. *Александров А. Д.* Геометрия.—Большая Советская Энциклопедия. Изд. 2-е. Т. 10, с. 533—550.
2. *Аристотель.* Аналитики первая и вторая. Пер. Б. А. Фохта. М., 1952.
3. *Аристотель.* Метафизика. Пер. А. В. Кубицкого. М.— Л., 1934.
4. [*Ар-Руми*]. Трактат об определении синуса одного градуса. Пер. с арабск. Б. А. Розенфельда. Статья и коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича.— «Историко-математические исследования», 1960, вып. 13, с. 533—556.
5. *Архимед.* Сочинения. Перевод, вступ. статья и коммент. И. Н. Веселовского. Перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. М., 1962.
5а. *Ахмедов А., Розенфельд Б. А.* Кто был автором «Трактата об определении синуса одного градуса»? — «Общественные науки в Узбекистане», 1975, № 10, с. 51—53.
6. *Бану Муса.* Книга измерения плоских и шаровых фигур. Пер. Джамаля ад-Даббаха.— «Историко-математические исследования», 1965, т. XVI, с. 389—426.
7. *Башмакова И. Г.* Арифметические книги «Начал» Евклида.— Там же, 1948, т. I, с. 296—328.
8. *Башмакова И. Г.* Диофант и диофантовы уравнения. М., 1972.
9. *Башмакова И. Г.* Из теории локальных методов.— «История и методология естественных наук», 1971, вып. XI, с. 21—36.
10. *Башмакова И. Г.* О доказательстве основной теоремы алгебры.— «Историко-математические исследования», 1957, вып. X, с. 257—304.
11. *Башмакова И. Г., Юшкевич А. П.* Происхождение систем счисления.— В сб.: Энциклопедия элементарной математики. Т. I. М.— Л., 1951, с. 11—74.
12. *Боревич З. И. и Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М., 1964.
13. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. Пер. И. Г. Башмаковой. Под ред. К. А. Рыбникова. М., 1963.
14. *Ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. Пер. И. Н. Веселовского. М., 1959.
15. *Ван дер Варден Б. Л.* Современная алгебра. В 2-х т. М.—Л., 1947.
16. *Веселовский И. Н.* Неевклидова геометрия в древности.— «История и методология естественных наук», 1971, вып. XI, с. 152—160.
17. *Вилейтнер Г.* Хрестоматия по истории математики. Пер. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича. Изд. 2-е. М.— Л., 1935.
18. *Вуссинг Г.* О генезисе абстрактного понятия группы.— «Историко-математические исследования», 1966, вып. XVII, с. 11—30.
19. *Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. Изд. 2-е. М., 1967.
20. *Галуа Э.* Сочинения. Пер. Н. Н. Меймана. Под ред. Н. Г. Чеботарева. М.— Л., 1936, с. 61—64.
21. *Гаусс К. Ф.* Труды по теории чисел. Пер. В. Б. Демьянова. Под общ. ред. И. М. Виноградова. Коммент. Б. Н. Делоне. М., 1959.
22. *Гильберт Д.* Основания геометрии. Пер. с 7-го нем. изд. И. С. Градштейна. Под ред. П. К. Рашевского. М.— Л., 1948.
23. *Декарт Р.* Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Р. Декарта. Пер., примеч. и статья А. П. Юшкевича. М.— Л., 1938.
24. *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.— Л., 1947.
24а. *Диофант.* Арифметика и Книга о многоугольных числах. Пер. И. Н. Веселовского. Ред. и коммент. И. Г. Башмаковой. М., 1974.

25. *Евклид*. Начала. Т. I—III. Пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского, при ред. участии И. Н. Веселовского. М.— Л., 1948—1950.
26. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. I—III. Под. ред. А. П. Юшкевича. М., 1970—1972.
27. *Каган В. Ф*. Основания геометрии. Ч. 1—2. М., 1949—1956.
28. *Клейн Ф*. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. I. Пер. Б. Лившица, А. Лопшица, Ю. Рабиновича, Л. Тумермана. М.— Л., 1937.
29. *Колмогоров А. Н*. Математика.— Большая Советская Энциклопедия. Изд. 2-е. Т. 26, с. 464—483.
30. *Лейбниц Г. В*. Избранные отрывки из математических сочинений. Пер. А. П. Юшкевича.— «Успехи математических наук», 1948, т. III, вып. I, с. 165—204.
31. *Лобачевский Н. И*. Три сочинения по геометрии. Под. общ. ред. А. П. Нордена. М. 1956.
32. *Лобачевский Н. И*. Полн. собр. соч. В 5-ти т. Гл. ред. В. Ф. Каган. М.— Л., 1946—1951.
33. *Мамфорд Д*. Абелевы многообразия. М., 1971.
34. Математика в девяти книгах. Пер., статья и примеч. Э. И. Березкиной.— «Историко-математические исследования», 1957, вып. X, с. 427—584.
35. *Монж Г*. Начертательная геометрия. Пер. В. Ф. Газе. Коммент. и ред. Д. И. Каргина. Под общ. ред. Т. П. Кравца. Л., 1947.
36. *Нейгебауэр О*. Лекции по истории античных математических наук. Т. I. Пер. с предисл. и примеч. С. Я. Лурье. М.— Л., 1937.
37. *Ньютон И*. Всеобщая арифметика. Пер., статья и коммент. А. П. Юшкевича. М.— Л., 1948.
38. *Ньютон И*. Математические работы. Пер., вводная статья и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.— Л., 1937.
39. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Ред. и вступ. статья А. П. Нордена. М., 1956.
40. *Ожигова Е. П*. Развитие теории чисел в России. Л., 1972.
41. *Паскаль Б*. Опыт о конических сечениях с приложением письма Лейбница к Э. Перье. Пер. и коммент. Г. И. Игнациуса.— «Историко-математические исследования», 1961, вып. XIV, с. 603—622.
42. Проблемы Гильберта. Сборник под общ. ред. П. С. Александрова. М., 1969.
43. *Пуанкаре А*. Избранные труды. Т. I—III. Под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда, И. Б. Погребысского, 1971—1973.
44. *Раик А. Е*. Очерки по истории математики в древности. Саранск, 1967.
45. *Риман Б*. Сочинения. Пер. под ред., с предисл., статьей и примеч. В. Л. Гончарова. М.— Л., 1948.
46. *Сергеева Н. Д., Карпова Л. М*. Доказательство ал-Фергани основной теоремы о стереографической проекции.— «Вопросы истории естествознания и техники», 1972, вып. 3 (40), с. 50—53.
47. *Суань цзин ши шу* (Математическое десятикнижье). Т. I. Под ред. Цзянь Бао-цуня. Пекин, 1963 (на китайском языке).
48. *Ал-Фаргани Ахмад*. Китаб фи-с-сана ал-астурла̄б. Рукопись б. Прусской государственной библиотеки (Западный Берлин), № 5790.
49. *Хайам Омар*. Трактаты. Пер. Б. А. Розенфельда. Под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича. Статья и коммент. Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича. М., 1961.
50. *Хассе Г*. Лекции по теории чисел. М., 1953.
51. *Хинчин А. Я*. Великая теорема Ферма. М.— Л., 1932.
52. *Ал-Хорезми Мухаммед*. Математические трактаты. Пер. Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда, с коммент. Б. А. Розенфельда. Ташкент, 1964.
53. *Чеботарев Н. Г*. Основы теории Галуа. М.— Л., 1934.
54. *Чебышев П. Л*. Полн. собр. соч. В 5-ти т. М.— Л., 1944—1951.
55. *Чебышев П. Л*. Избранные математические труды. М.— Л., 1946.
56. *Шмидт О. Ю., Курош А. Г*. Алгебра.— Большая Советская Энциклопедия. Изд. 2-е. Т. 2, с. 53—62.

57. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Изд. 2-е. Т. II. Пер. Е. Л. Пацановского. Ред. И. Б. Погребысского. М., 1961; Т. II. Пер. В. С. Гохмана. Ред., вступ. статья и примеч. И. Б. Погребысского. М., 1961.
58. *Эйлер Л.* Извлечение из мемуара Л. Эйлера «Доказательства, относящиеся к вычетам, происходящим от деления степеней на простые числа», пер. Я. М. Боровского,— «Историко-математические исследования», 1957, вып. 10, с. 247—256.
59. *Юшкевич А. П. и Башмакова И. Г.* Алгебра, или Вычисление конечных Лобачевского.— «Историко-математические исследования», 1949, вып. 2, с. 72—128.
60. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М., 1968.
61. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М., 1961.
62. *Яновская С. А.* Методологические проблемы науки. М., 1972.

63. *Abel N. H.* Œuvres complètes, publiées par Sylow et S. Lie, v. I. Christiania, 1881.
64. Algebra with arithmetic and mensuration. From sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. Translated by Henry Thomas Colebrooke. London, 1817.
65. Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis, v. I. Ed. et latine interpr. J. L. Heiberg, Lipsiae, 1891.
66. *Al-Biruni Abu'l — Rayhān.* Al-Qānūnu'l-Mas'ūdi. (Canon Masudicus), v. 1. Hyderabad-Dn., 1954.
67. *Al-Bīrūnī Abu'l-Rayhān.* The book of instruction in the elements of the art of astrology. Ed. and transl. by R. Wright. London, 1934.
68. *Bombelli R.* L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica. Bologna, 1572.
69. *Boole G.* Studies in logic and probability. London, 1952.
70. *Cardanus H.* Ars magna, sive de Regulis algebricis, Norimbergae, 1545.
71. *Cayley A.* The Collected Mathematical papers, v. II, Cambridge, 1889.
72. *Cayley A.* A Memoir on the theory of Matrices.— «Philosophical Transaction of the Royal Society of London», v. 148, part I, p. 17—37. London, 1858.
73. *Desargues G.* Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan. В книге: *R. Taton.* L'œuvre mathématique de G. Desargues. Paris, 1951, p. 99-180.
74. *Diophanti Alexandrini.* Opera omnia cum graecis commentariis, v. I. Ed. P. Tannery, Lipsiae, 1893.
75. *Engel F., Stäckel P.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1895.
76. *Euler L.* Eléments d'algèbre, t. II. Lyon, 1774.
77. *Euler L.* Opera omnia. Ser. I, t. 2, Lipsiae-Berolini, 1915.
78. *Euler L.* Opera omnia. Ser. I, v. 6, Lipsiae-Berolini, 1921.
79. *Euleri L.* Opera omnia. Ser. I, v. 26. Lausannae, 1953.
80. *Euleri L.* Opera omnia. Sér. I, v. 28, Lausannae, 1955.
81. *Fermat P.* Œuvres, publiées par... P. Tannery et Ch. Henry, t. I-IV. Paris, 1891-1912. Supplément aux t. I-IV, par. M. C. de Waard. Paris, 1922.
81a. *Fréchet M.* Sur quelques points du calcul fonctionnel — «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», t. 22, 1906, p. 1—74.
82. *Gauss C.-F.* Werke, t. II. Göttingen 1878.
83. *Girard A.* Invention nouvelle en algèbre. Amsterdam, 1629.
84. *Grassmann H.* Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig 1844.
85. *Hamilton W. R.* On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra,— «The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science», v. XXV, N 163, 1844, p. 10.
86. *Kepler Joh.* Gesammelte Werke. Bd. II. Hsg. von F. Hammer, München 1939.
87. *Lagrange J. L.* Œuvres, t. III. Paris, 1869.
88. *Legendre A. M.* Théorie des nombres. Paris, 1830,

89. *Lejeune-Dirichlet P. G.* Vorlesungen über Zahlentheorie. Braunschweig 1871.

89a. *Lejeune-Dirichlet P. G.* Werke. Bd. I. Berlin 1889.

90. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, herausg. und komm. von W. W. Struve.— «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik», Abt. A, Bd. I, Berlin 1930.

91. *Newton I.* The mathematical papers of Isaac Newton. v. I—V Ed. D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin. Cambridge, 1967—1972.

92. *Pappi Alexandrini.* Collectiones quae supersunt, t. II. Ed. F. Hultsch. Berolini, 1877.

93. *Poncelet J. V.* Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain. Paris, 1822.

94. *Ptolémée Claude.* Composition mathématique, t. I. Trad. par M. Halma. Paris, 1813.

95. *Serret J. A.* Cours d'algèbre supérieure, t. I. Paris, 1885, 5-e éd.

96. *Stevin S.* Les œuvres mathématiques. Leiden. 1634.

97. *Suter H.* Die Abhandlung des Abū Kāmil Shogā' b. Aslam «Über das Fünfeck und Zehneck». Bibliotheca mathematica, 3. Folge. Bd. 10, 1910, S. 15—42.

98. *Sylvester J. J.* The collected mathematical papers, v. I. Cambridge, 1904.

99. *Ṯabit b.* Qurra. Ein Werk über ebene Sonnenuhren, herausg., übers. und erläutert von K. Garbers.— «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik», Abt. A., Bd. 4, Berlin 1936.

100. *Viète Fr.* Introduction à l'art analytique. Première série des notes sur la logistique spécieuse, trad. par F. Ritter. «Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e phisiche», v. I, 1868, p. 223-276.

101. *Vieta Franciscus.* Opera mathematica. Lugduni Batavorum, 1646.

102. *Weyl H.* Raum. Zeit. Materie. 5. Aufl. Berlin. 1923.

103. *Wallis J.* Commercium epistolicum.— В кн.:. *Fermat P.* Œuvres, t. 3, Paris, 1896, p. 399—610.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Составители:

Адольф Павлович Юшкевич
Борис Абрамович Розенфельд
Изабелла Григорьевна Башмакова
Сергей Сергеевич Демидов
Юрий Александрович Белый

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Редактор *Э. К. Викулина*

Художник *М. К. Шевцов*

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технические редакторы *Л. Я. Медведев*, *В. В. Новоселова*

Корректор *А. А. Рукосуева*

Сдано в набор 6/V 1975 г. Подписано к печати 9/IV 1976 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага книжн.-журн. № 2. Печ. л. 20,0+0,25 форзац. Уч.-изд. л. 21,47+0,23 форзац. Тираж 40 тыс. экз. А05593.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28 на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинате Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 374.

Цена 85 коп.