ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

ХРЕСТОМАТИЯ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Математический анализ

$$\underset{n \to \infty}{P}\left(\left|p - \frac{m}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1$$

Теория вероятностей

ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Под редакцией А. П. Юшкевича

*Допущено Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1977

51 (09)
Х 91

Составители:
И. Г. Башмакова, Ю. А. Белый, С. С. Демидов,
Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич

Хрестоматия по истории математики. Математи-
Х 91 ческий анализ. Теория вероятностей. Пособие для студентов пед. ин-тов. Под ред. А. П. Юшкевича. М., «Просвещение», 1977.

224 с. с ил.

На обороте тит. л. сост.: И. Г. Башмакова, Ю. А. Белый, С. С. Демидов и др.

Хрестоматия составлена из подборки оригинальных текстов трудов математиков из области математического анализа и теории вероятностей. Значительная часть текстов переведена на русский язык впервые. Тексты снабжены историческими и математическими комментариями. В книге имеется именной указатель и список литературы.

$Х \frac{60602—326}{103 (03)—77}$ 34—76 51 (09)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Часть I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Инфинитезимальные методы в древности 11
   а. Квадратура параболы при помощи неделимых и теорем статики (Архимед) . . . . —
   б. Потенциальная бесконечность (Анаксагор, Аристотель) 15
   в. Аксиома измерения и общая теория отношений (Евклид) . . . 19
   г. Основная лемма метода исчерпывания (Евклид) 22
   д. Квадратура параболы при помощи геометрической прогрессии по методу исчерпывания (Архимед) 23
   е. Квадратура спирали Архимеда при помощи интегральных сумм 27
2. Бесконечные ряды в теории конфигурации качеств (Н. Орем) . . . 32
   а. Геометрические прогрессии и бесконечно малые величины . . . —
   б. Расходимость гармонического ряда 33
   в. Неограниченно протяженная фигура конечной площади 34
3. Предыстория исчисления бесконечно малых в XVII в. 37
   а. Введение логарифмов (Дж. Непер) . . . . —
   б. Измерение круга с помощью неделимых (И. Кеплер) 44
   в. Закон равномерно-ускоренного движения (Г. Галилей) 46
   г. Степенные суммы неделимых линий (Б. Кавальери) 49
   д. Объем бесконечно длинного тела (Э. Торичелли) 52
   е. Арифметизация метода неделимых (Дж. Валлис) 54
   ж. Интегрирование степенной функции (П. Ферма) 57
   з. Характеристический треугольник и интегрирование синуса (Б. Паскаль) 61
   и. Алгебраический метод касательных (Р. Декарт) 65
   к. Дифференциальный метод экстремумов и касательных (П. Ферма) 68
   л. Связь между квадратурами кривых и построением касательных (И. Барроу) 72
4. Определения понятия функции в XVII—XIX вв. 74
   а. Введение термина «функция» (Г. В. Лейбниц) . . . . —
   б. Функция как аналитическое выражение (И. Бернулли, Л. Эйлер) 75
   в. Функция и степенной ряд (Л. Эйлер) 77
   г. «Неправильные» кривые и функции (Л. Эйлер) . . . . —
   д. Функция и тригонометрический ряд (Д. Бернулли) 78
   е. Общее определение функции в классическом анализе (Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский, П. Лежен-Дирихле, Г. Ганкель, Э. Борель) 79
5. Метод флюксий и бесконечных рядов И. Ньютона 85
   а. Открытие биномиального ряда . . . . —
   б. Дифференцирование и интегрирование степенной функции . . . 89
   в. Бесконечный ряд для показательной функции 91
   г. Метод флюксий и бесконечных рядов 94
   д. Набросок алгоритма вычисления флюксий 98
   е. Метод первых и последних отношений 101
   ж. Момент произведения 107
6. Исчисление бесконечно малых Г. В. Лейбница 110
   а. Первый мемуар по дифференциальному исчислению . . . . . . —
   б. Интеграл 116
      1) Появление понятия интеграла в печати . . . . —
      2) Постоянная интегрирования 118
      3) Формула Лейбница—Ньютона . . . . —

в. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов 121
г. Принципы исчисления бесконечно малых 123
д. Из первого печатного курса дифференциального исчисления (Г. Ф. Лопиталь) 127
1) Постулаты дифференциального исчисления . . . . —
2) Правило проведения касательных 128
3) Правило И. Бернулли — Лопиталя . . . . —
е. Метод изоклин И. Бернулли 130
7. Бесконечные ряды в XVIII в. 133
а. Ряд Тейлора . . . . —
б. Разложение показательной функции в ряд; формулы Муавра и Эйлера (Л. Эйлер) 135
в. Определение показательной функции степенным рядом (Ж. А. да-Кунья) 142
г. Суммирование расходящихся рядов (Л. Эйлер) 146
8. Проблемы обоснования анализа в XVIII в. 153
а. Критическое выступление Дж. Беркли . . . . —
б. Теория пределов Ж. Даламбера (Ж. Даламбер, де ла Шаппель, С. Люилье, С. Е. Гурьев, Л. Карно) 155
в. Теория аналитических функций Лагранжа 160
9. Из истории математического анализа в XIX — XX вв. 171
а. Б. Больцано о проблемах обоснования математического анализа —
1) Анализ, геометрия и механика . . . . —
2) Определение непрерывной функции 174
3) Теорема Больцано — Вейерштрасса 175
4) Критерий сходимости последовательности Больцано — Коши 176
б. Из курсов анализа бесконечно малых О. Коши 178
1) Принципы построения анализа . . . . —
2) Основные понятия анализа 179
3) Бесконечные ряды 180
4) Об исчислении бесконечно малых 181
5) О ряде Тейлора 183
6) Абель о «Курсе анализа» Коши 184
в. Интегральная формула М. В. Остроградского 186
г. Основные понятия дифференциального исчисления по К. Вейерштрассу 188
д. Непрерывность и иррациональные числа (Р. Дедекинд) 193
10. Бесконечные множества и теория функций действительного переменного 195
а. Парадоксальное свойство множества квадратов натуральных чисел (Г. Галилей) . . . . —
б. Несчетность множества действительных чисел (Г. Кантор) . . . 197
в. Понятие мощности множества (Г. Кантор) 199
г. Теорема о C-свойстве измеримых функций (Н. Н. Лузин) . . . 201

Часть II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Введение понятия математического ожидания (Хр. Гюйгенс) . . . 205
2. Закон больших чисел Я. Бернулли 208
3. Неравенство П. Л. Чебышева и обобщение им закона больших чисел 214

Литература 218

Именной указатель 221

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1976 г. из печати вышла первая книга данной «Хрестоматии по истории математики», в которую вошли введение и три части всего издания: 1) Арифметика и алгебра; 2) Теория чисел и 3) Геометрия. Предлагаемая вниманию читателей вторая книга, как было указано в предисловии к первой, содержит две части: 1) Исчисление бесконечно малых и 2) Теория вероятностей.

Не повторяя по возможности сказанного в предисловии к первой книге «Хрестоматии», отметим здесь только несколько существенных моментов. Как и ранее, составители стремились учесть интересы как студентов—будущих учителей математики, так и более широкого круга любящих математику читателей, включая учеников старших классов средней школы и учащихся техникумов. К сожалению, обусловленный объем второй книги не позволил уделить много места теории вероятностей, которая представлена всего тремя текстами, правда весьма существенными. Более подробно охарактеризовано отрывками из классических сочинений исчисление бесконечно малых, от древности до первых десятилетий XX в.

Для читателей, которые не располагают первой книгой или не имеют ее под руками, отметим некоторые особенности структуры «Хрестоматии». По большей части тексты каждой из двух частей, образующих данную книгу, расположены хронологически; однако иногда под одним заголовком и в одном пункте собраны тексты различных времен, относящиеся к какой-либо проблеме или методу и т. п., и при переходе к следующему пункту хронологический порядок нарушается. Каждый отрывок начинается с русского названия сочинения, из которого он взят, после чего приведен соответствующий номер в «Литературе», помещенной вслед за всеми текстами. Затем следует текст первоисточника, а после него пояснительные примечания составителей «Хрестоматии». Все ссылки на сочинения, названные в «Литературе», даны под номерами, заключенными в квадратные скобки. В текстах первоисточников при переводе иногда приходилось для ясности добавлять отдельные слова, они также взяты в квадратные скобки; номера в круглых скобках относятся к примечаниям составителей. Если перевод сделан специально для

«Хрестоматии», фамилия переводчика названа в заглавии отрывка; в противном случае она имеется в «Литературе».

Ссылки на первую книгу «Хрестоматии» помечены коротко: к. I, с указанием соответствующей части и параграфа, и заключены в круглые скобки.

Годы рождения и смерти авторов отрывков и других упоминаемых в текстах и примечаниях лиц, а также оригинальная транскрипция иностранных фамилий даны в «Именном указателе», напечатанном в конце книги (в него не включены, однако, фамилии переводчиков книг, помещенных в «Литературе»).

Подробнее с историей многих вопросов, а также с биографиями ряда ученых, цитируемых в «Хрестоматии», читатель может познакомиться по некоторым книгам, названным в «Литературе». Назовем из них только трехтомную „Историю математики“, доведенную до 1800 г. [11], а также русские переводы книг Н. Бурбаки [4], Ф. Клейна [15] и Д. Стройка с дополнениями И. Б. Погребысского [37].

Как сказано в предисловии к первой книге, «Введение» было подготовлено нижеподписавшимся, I и II части—И. Г. Башмаковой и С. С. Демидовым, а III часть—Б. А. Розенфельдом. I часть второй книги составлена нижеподписавшимся, II часть — Ю. А. Белым. Впрочем, такое разделение труда не было очень строгим и в той или иной степени в подготовке всей «Хрестоматии» участвовали все составители.

Мы вновь выражаем нашу признательность за полезные советы действительному члену Академии педагогических наук СССР А. И. Маркушевичу, а также заведующему кафедрой математики и методики математики Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького доценту Г. П. Бевзу и сотруднику кафедры доценту А. С. Бугаю.

А. П. Юшкевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДРЕВНОСТИ

а. КВАДРАТУРА ПАРАБОЛЫ ПРИ ПОМОЩИ НЕДЕЛИМЫХ И ТЕОРЕМ СТАТИКИ

ИЗ «ПОСЛАНИЯ К ЭРАТОСФЕНУ О МЕХАНИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ» АРХИМЕДА (III в. до н. э.)

[№ 2, с. 299—302]

... Я счел нужным написать тебе и в этой же самой книге изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы (1). Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем. Действительно, кое-что из того, что ранее было мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако, получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная. Поэтому и относительно тех теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашел доказательство, а именно, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и равной высотой, немалую долю заслуги я уделяю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутой фигуры (2), хотя и без доказательства (3). И нам довелось найти публикуемые теперь теоремы тем же самым методом, как и предыдущие; поэтому я и решил написать об этом методе и обнародовать его, с одной стороны, для того, чтобы не оставались пустым звуком прежние мои упоминания о нем, а с другой, поскольку я убежден, что он может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам еще не приходили в голову.

Первым мы опишем то, что первым и было нами обнаружено при помощи механики, а именно, что всякий сегмент параболы составляет четыре трети треугольника с тем же основанием и равной высотой, а затем и каждую из теорем, полученных нами при помощи этого метода...

. . . .

3. Если центры тяжести любого количества величин находятся на одной прямой, то на этой же прямой будет находиться и центр тяжести величины, составленной из всех этих величин.

4. Центром тяжести всякой прямой будет ее середина.

5. Центром тяжести всякого треугольника будет точка, в которой пересекают друг друга прямые, проведенные из вершин треугольника к серединам его сторон.

. . . . (4)

Пусть ABC будет сегмент, заключающийся между прямой AC и параболой ABC; разделим AC пополам в D, параллельно диаметру проведем DBE и соединяющие прямые AB и BC (рис. 1). Я утверждаю, что *сегмент ABC составляет четыре трети треугольника ABC* (5).

Из точек A и C проведем AZ, параллельную DBE, и CZ, касательную к параболе; продолжим CB до K и отложим KV, равную CK. Вообразим равноплечий рычаг CV с серединой K и какую-нибудь прямую MX, параллельную ED.

Так как CBA — парабола, CZ — касательная к ней и CD — ордината, то EB равна BD (это доказывается в началах теории конических сечений); вследствие этого, а также вследствие того, что ZA и MX параллельны ED, прямая MN будет равна NX, а ZK равна KA. И поскольку CA относится к AX, как MX к XO [это доказывается в лемме (6)], а CA к AX, как CK к KN, и CK равна KV, то, значит, VK будет к KN, как MX к XO. И так как точка N есть центр тяжести прямой MX, ибо MN равна NX, то, следовательно, если взять прямую TH, равную XO и имеющую центр тяжести в V, так, чтобы TV равнялась VH, то прямая TVH уравновесит MX, остающуюся в своем положении, вследствие того, что отрезки VN обратно пропорциональны весам TH и MX, т. е. VK к KN будет, как MX к HT. Таким образом, точка K будет центром тяжести величины,

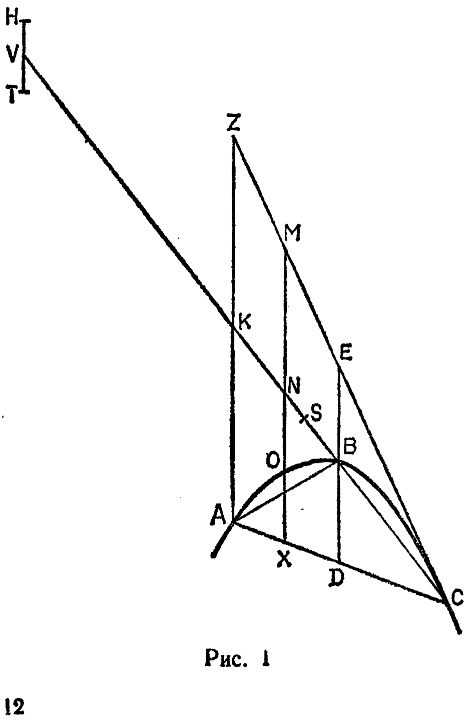


Рис. 1

составленной из обоих весов [TH и MX]. Аналогично и все проведенные параллельно ED прямые в треугольнике ZAC будут в своих положениях уравновешиваться со своими отрезками, отсеченными параболой, если перенести последние в V так, чтобы K была центром тяжести величины, составленной из каждой пары таких прямых. И так как треугольник CZA составляется из всех таких прямых, находящихся в треугольнике CZA, а сегмент ABC составляется из всех подобных XO прямых, взятых внутри параболы, то, значит, треугольник ZAC, оставаясь в своем положении, будет относительно точки K уравновешивать параболический сегмент, помещенный центром тяжести в V так, чтобы K была центром тяжести величины, составленной из них обоих (7). Разделим теперь CK в точке S так, чтобы CK была втрое больше KS; тогда точка S будет центром тяжести треугольника AZC (это доказано в сочинении «О равновесии»). Тогда, поскольку треугольник ZAC, оставаясь в своем положении, уравновешивает относительно K сегмент BAC, помещенный центром тяжести в V, и центр тяжести треугольника AZC будет в S, то, значит, треугольник AZC к сегменту ABC, помещенному центром в V, будет относиться, как VK к SK.

Но VK втрое больше KS: значит, и треугольник AZC будет втрое больше сегмента ABC. Но треугольник ZAC в четыре раза больше треугольника ABC, так как ZK равна KA, а AD равна DC; значит, сегмент ABC составляет четыре трети треугольника ABC.

Хотя это всем вышеприведенным рассуждением и не доказано, но все же оно производит впечатление, что окончательный вывод правилен; поэтому мы, видя недоказанность выведенного, но подозревая его правильность, предложим найденное нами и опубликованное ранее геометрическое доказательство (8).

Примечания. Идея бесконечности восходит к древнегреческой натурфилософии VI в. до н. э., от которой еще не отделились тогда различные науки, и в V в. она получила применение в математическом исследовании. Важной предпосылкой этого явилось теоретическое рассмотрение задач измерительной геометрии и арифметики. Греки могли получить правило вычисления объема пирамиды из Египта или Вавилона, где к нему пришли либо эмпирически, либо путем переноса на общий случай правила, обнаруженного в частных примерах (скажем, в простейшем случае, разбиением куба на три конгруэнтных пирамиды). Но вывод общей теоремы об объеме пирамиды, если за единицу объема принят какой-либо куб, невозможен без применения идеи бесконечного в той или иной форме. Бесконечные процессы и бесконечно малые величины требовались и при определении площадей криволинейных фигур, начиная с классической задачи квадратуры круга. Другой классической задачей явилось измерение диагонали квадрата по данной стороне. Вавилонские математики предложили практический способ приближенного извлечения квадратного корня из двух с любым приближением. В пифагорейской школе было доказано, что рациональное число, квадрат которого равен двум, не существует или же, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы; при этом процедура отыскания общей меры обоих отрезков бесконечна. Во всех таких геометрических задачах, как и при рассмотрении свойств физического мира, в особенности природы движения, идея бесконечности непосредственно переплеталась с идеями непрерывности и дискретности. Древнегреческие мыслители VI—V вв. до н. э. далеко продвинулись в изучении связанных со всем этим вопросов, хотя и не нашли окончательного ответа на них. Более того, в ходе исследований они открыли свойственные понятиям бесконечности, непрерывности и движения парадоксы и противоречия, памятником которых остались знаменитые апории (т. е. трудности) Зенона Элейского. Первые фундаментальные результаты состояли в различении потенциальной и актуальной бесконечности (см. следующий отрывок), введении понятия неделимых элементов величин и применении его к измерению площадей и объемов. Основы метода неделимых или математического атомизма (ἄτομος—неделимый) разработал во второй половине V в. до н. э. великий материалист Демокрит, один из создателей научной атомистики. Сочинения Демокрита не сохранились, а их изложение и отдельные цитаты из них, встречающиеся у более поздних авторов, допускают различное понимание. Мы не знаем, как Демокрит вывел предложения об объеме пирамиды и конуса, открытие которых ему со всей определенностью приписывает в приведенном отрывке Архимед. Но общая идея Демокрита мыслить величины составленными из множества элементарных частей и измерять величины с помощью сложения таких частей оказалась исключительно плодотворной и содержала в неразвитом виде последующие интеграционные приемы. Плодотворным, хотя и ограниченным по возможностям применения, явился, в частности, метод неделимых, основанный на представлении, что фигуры составлены из элементов низшей размерности—тела из параллельных друг другу плоских сечений, площади из параллельных между собой отрезков и т. п. В некоторых случаях употребление неделимых проще, чем вычисления с помощью точных предельных переходов. Мы иллюстрируем античный метод неделимых отрывком из одного сочинения Архимеда, где этот метод выступает в своеобразном соединении с предложениями механики, именно статики, в большой мере развитой тем же Архимедом.

О возникновении в математике идеи бесконечности см. [№ 11, т. I, с. 87—94]. Оригинальная, но во многом спорная реконструкция математического атомизма Демокрита дана в книге С. Я. Лурье [№ 27].

1. Послание Архимеда, адресованное александрийскому ученому Эратосфену, имя которого носит элементарный прием составления таблицы простых чисел, было найдено лишь в 1906 г. и год спустя опубликовано на языке оригинала, т. е. древнегреческом, И. Л. Гейбергом. Это сочинение знакомит с ролью, которую метод неделимых продолжал играть и после того, как в IV в. выводы с его помощью были признаны лишенными научной строгости.

В «Послании» Архимед сперва формулирует две найденные им теоремы: об объемах так называемого теперь цилиндрического копыта и тела, заключенного между двумя вписанными в данный куб цилиндрами со взаимно перпендикулярными осями. Далее он описывает в общих чертах метод, посредством которого произвел ряд квадратур, кубатур и определений центров тяжести, перечисляет нужные предложения статики и затем сообщает вывод нескольких открытых им результатов, уже опубликованных им с полными и точными доказательствами в других сочинениях. Конец «Послания», содержавший вывод упомянутых двух теорем, сохранился не полностью. Заметим: Архимед не утверждает, что метод «Послания» единственный, с помощью которого он производил свои, как мы бы сказали, интеграции.

2. Здесь в тексте стоит единственное число, хотя перед тем речь шла о двух теоремах относительно косинуса и пирамиды.

3. Слова «без доказательства» следует понимать в том смысле, что вывод Демокрита Архимед считал неубедительным.

4. Некоторые из лемм—всего их 11—содержатся как постулаты или предложения в более раннем сочинении Архимеда «О равновесии плоских фигур»; например, 5-я лемма—это 14-е предложение 1 книги названного труда.

5. Здесь и в следующих отрывках греческие буквы заменены латинскими.

6. На самом деле в леммах «Послания к Эратосфену» об этом свойстве не говорится; у Архимеда оно доказано в V предложении сочинения «Квадратура параболы» [№ 2, с. 79—80]. Как данное, так и применяемое несколько

далее свойство параболы без труда доказывается средствами аналитической геометрии.

7. Итак, площади здесь мыслятся составленными из параллельных прямых отрезков, не имеющих площади и в этом смысле далее неделимых. Из пропорций $\frac{VK}{KN}=\frac{MX}{XO}$, или, что то же, из равенства моментов отрезков TH и MX по отношению к точке K как точке опоры рычага VC Архимед смело заключает, что равны и моменты совокупностей всех таких отрезков, когда сегмент параболы BAC переносится и подвешивается в V, а треугольник AZC с центром в S остается в прежнем его положении. Если принять AC за ось абсцисс и AZ за ось ординат и обозначить $AX=x$, $XO=y$, $XM=Y$ и $AC=a$, так что $\frac{a}{x}=\frac{Y}{y}$, или $ay=xY$, то можно сказать, что рассуждения Архимеда соответствуют выражению искомого интеграла $a\int\limits_0^a y\,dx$ через интеграл $\int\limits_0^a Yx\,dx$, значение которого известно, именно равно площади треугольника AZC, умноженной на $\frac{a}{3}$.

Ведущим звеном вывода служит сравнение статических моментов неделимых и затем самих фигур. Применение неделимых (а не полосок, образующих вписанные и описанные около сегмента зигзагообразные фигуры) упрощает и сокращает рассуждения, весьма длинные и громоздкие в методе исчерпывания.

8. Вычисление площади сегмента параболы явилось первой точной квадратурой криволинейной фигуры в истории математики. В сочинении «Квадратура параболы» Архимед привел два доказательства данной теоремы. Первое из них представляет собой вариант «механического» вывода, облеченный в строгие формы метода исчерпывания (см. далее отрывок п. 1, д), для чего вместо ординат, «составляющих» сегмент параболы и оба треугольника, рассматриваются вписанные в сегмент и описанные около него фигуры, образованные из трапецеидальных полосок. Это показывает, что нестрогость изложенного в послании метода Архимед усматривал только в применении неделимых, а не в использовании статики. Другое, чисто математическое доказательство приведено нами далее в отрывке п. 1, д.

б. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

1. Анаксагор о беспредельно большом и беспредельно малом

ИЗ КОММЕНТАРИЯ СИМПЛИКИЯ (первая половина VI в.) К «ФИЗИКЕ» АРИСТОТЕЛЯ,

[№ 36, с. 293—294]

Вместе все вещи были беспредельные и по множеству и по малости. Ведь и малое было беспредельным. И когда все [вещи] были вместе, ничто не было различимо из-за малости, потому что все наполнял эфир и воздух, оба беспредельные: ведь в общей совокупности они самые большие как по количеству, так и по величине (1).

. . . .

И [о том], что в первоначалах нет ни наименьшего, ни наибольшего, он говорит [следующее]: «И у малого ведь нет ... и мала». Ибо если все во всем и все из всего выделяется, то из того, что считается наименьшим, выделится еще меньшее, а то, что считают наибольшим, выделится из большего, чем оно.

II. Аристотель о математической бесконечности

ИЗ «ФИЗИКИ» АРИСТОТЕЛЯ (середина IV в. до н. э.)

[№ 1, с. 52]

Вообще говоря, бесконечное существует таким образом, что всегда берется иное и иное, и взятое всегда бывает конечным, но всегда разным и разным.

. . . .

[Там же, с. 55]

Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного в отношении увеличения как не проходимого до конца, не отнимает у математиков их теории; ведь они не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: математикам надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, какой им желательно, и в такой же пропорции, в какой делится величайшая величина, можно разделить и какую угодно другую.

III. Критика математического атомизма

ИЗ АНОНИМНОГО СОЧИНЕНИЯ «О НЕДЕЛИМЫХ ЛИНИЯХ»
(вероятно, вторая половина IV в. до н. э.)

[№ 5, с. 25—27 (2)]

Таким образом, очевидно, что из приведенных [в пользу учения] доводов не следует ни необходимость существования неделимых линий, ни их вероятность. Из последующего это станет еще более ясным.

. . . .

Далее, все линии [отрезки] были бы в таком случае соизмеримыми. Ибо все они были бы измеримыми при помощи неделимых [линий], как те, которые соизмеримы [просто] по длине, так и те, которые соизмеримы [только] в степени... (3).

. . . .

Далее, раз из трех данных прямых образуется треугольник, то треугольник [можно] составить также из трех неделимых линий. Но в каждом равностороннем [треугольнике] высота [проведенная из вершины] проходит через середину [основания], а следовательно, и через середину неделимой [линии].

Далее, если из неделимых [линий] образовать квадрат и провести диагональ и опустить перпендикуляр [из одного из свободных углов на диагональ], то сторона квадрата в квадрате равна квадратам перпендикуляра и половины диагонали [взятым вместе], так что она [сторона квадрата] вовсе не является самой малой [линией]. . . .

Аристотель

Далее, присоединение одной линии [к другой] не могло бы увеличить всей линии. Ибо неделимые [линии], взятые в совокупности, не образуют ничего большего.

Далее, раз из двух неделимых [линий] не может быть образована непрерывная [линия], ибо все непрерывное должно допускать многократное деление, а всякая линия, исключая неделимую линию, [как признается] непрерывна (συνεχής), то не может существовать неделимых линий (4).

. . . .

Далее [в этом случае], не во всякой линии [имелась бы] точка (στιγμή). А именно неделимая [линия] [не могла бы] содержать точки, ибо если бы она содержала только одну точку, то линия [сама] была бы точкой, а если бы — несколько [точек], то она была бы делима. А если бы в неделимой [линии] не было ни одной точки, то их вообще не имелось бы ни в одной линии, ибо все прочие [линии] [составлены] из неделимых [линий].

. . . .

Далее, граница линии была бы линией, а не точкой (5). Действительно, граница — это есть последнее, т. е. неделимая [линия]. Но если бы граница была точкой, то и неделимая [линия] имела бы своей границей точку и одна линия была бы больше другой на одну точку . . . Чем, вообще, отличается точка от линии? Неделимая линия не обладает, кроме имени, никакими характерными признаками, отличающими ее от точки . . . Но из этих [доводов] ясно, что линия не может также [состоять] из точек. Ибо большая часть доводов подходит почти также [к точкам, как и к неделимым линиям].

. . . .

Далее, все тогда разлагалось бы и разрешалось на точки, и точка [была бы] частью тела, ибо [согласно теории] тело состоит из плоскостей, плоскости — из [прямых] линий, а линии — из точек...

Примечания. Характеристика потенциальной, становящейся бесконечности впервые встречается у философа, астронома и математика V в. до н. э. Анаксагора, примерно на поколение старшего, чем Демокрит. Конкретное применение в математике потенциально бесконечных величин началось, вероятно, в первой половине IV в., когда стало ясно, что устранить противоречия, связанные с математическим атомизмом, не удается. Во всяком случае, именно в это время актуально бесконечно большие и малые величины были отвергнуты, как средство математического доказательства. К отрывку из Анаксагора мы добавляем два высказывания о математической бесконечности Аристотеля, отражающие общепринятую в середине IV в. концепцию, и критику математического атомизма в сочинении, составленном в школе Аристотеля.

1. Сочинение Анаксагора «О природе» не сохранилось. Приведенный отрывок, по словам автора VI в. н. э. Симпликия, представляет собой цитату из самого начала I книги этого труда; из того же сочинения взяты и цитируемые Симпликием далее слова Анаксагора. Концепция Анаксагора вполне отчетлива: непрерывное (величины, вещи, стихии, пространство) не разлагается на дискретные неделимые элементы; множество вещей безгранично; в малом всегда имеется еще меньшее; а по отношению к большому всегда имеется еще большее.

2. Сочинение «О неделимых линиях», дошедшее под именем Аристотеля, было написано, вероятно, одним из его учеников. Оно направлено против ученика Платона — философа и математика Ксенократа, считавшего, что тела и геометрические фигуры состоят из мельчайших неделимых линий (ἄτομον γραμμῶν). Согласно Аристотелю, и Платон часто применял неделимые линии (в известных нам сочинениях Платона они не встречаются). Труды Ксенократа не сохранились. В цитируемом сочинении сперва приводятся некоторые доводы в пользу учения о неделимых линиях, после чего выдвигаются различные возражения. Все эти возражения показывают, что свойства неделимых элементов противоречат свойствам непрерывных фигур, вроде наличия высот у всякого треугольника и т. п.

3. В X книге «Начал» Евклида прямые отрезки называются соизмеримыми в степени, если соизмеримы площади построенных на них квадратов; так, соизмеримы в степени сторона и диагональ всякого квадрата. Автор заявляет, что учение о неделимых линиях противоречит существованию (в обычной геометрии) несоизмеримых отрезков.

4. Неделимые не удовлетворяют аксиоме измерения (см. следующий отрывок). Этот довод, отвергающий возможность составления непрерывных величин из неделимых элементов, по существу встречается уже у Зенона Элейского [№ 11, т. I, с. 90].

Понятие непрерывности не упоминается и не определяется в трудах греческих классиков математики. Аристотель в 5-й книге «Физики» [1] писал, что нечто является непрерывным (или: связанным), если границы двух вещей, которыми они соприкасаются, являются одной и той же. В таком определении непрерывности предвосхищается понятие о «связности» континуума, определяемого в современной топологии, как связное компактное множество.

5. Ср. определение точки у Евклида (к. I, ч. III, п. 2).

в. АКСИОМА ИЗМЕРЕНИЯ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ

ИЗ V КНИГИ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

[№ 10, т. I, с. 142—143]

Определения

. . . .

3. *Отношение* есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству (1).

4. Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга (2).

5. Говорят, что величины *находятся в том же отношении*: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке (3).

6. Величины же, имеющие то же отношение, пусть называются *пропорциональными*.

7. Если же из равнократных кратное первой превышает кратное второй, а кратное третьей не превышает кратного четвертой, то говорят, что первая ко второй *имеет бо́льшее отношение*, чем третья к четвертой (4).

8. *Пропорция* же состоит по меньшей мере из трех членов.

9. Когда же три величины пропорциональны, то говорят, что первая к третьей имеет *двойное* отношение первой ко второй.

10. Когда же четыре величины пропорциональны, то говорят, что первая к четвертой имеет *тройное* отношение первой ко второй и так далее, всегда, пока существует пропорция (5).

Примечания. Простейшие свойства величин, сформулированные в аксиомах I книги «Начал» Евклида (к. I, ч. III, п. 2), не исключают актуально бесконечных величин. Актуально бесконечно малые древние характеризовали тем, что они меньше всякой данной величины того же рода или еще тем, что сложение их в любом числе не может образовать никакой данной величины. Примером таких бесконечно малых служили, кроме «неделимых», так называемые роговидные углы между окружностями и касательными к ним прямыми. Роговидные углы встречаются у Евклида. В 8-м определении I книги он вводит углы между любыми пересекающимися линиями, лежащими в одной плоскости (правда, определение бессодержательно: углом просто называется «наклонение друг к другу двух линий»); в 9-м определении речь идет о частном случае прямолинейного угла. Затем в 16-м предложении III книги доказано, что перпендикуляр к диаметру в его конце не имеет других общих точек с кругом и что угол этого перпендикуляра с окружностью меньше всякого прямолинейного, в том смысле, что между окружностью и этим перпендикуляром не поместится никакая другая прямая. Вопрос об измерении роговидных углов и их сравнении с прямолинейными обсуждался затем более двух тысяч лет, одни полагали, что такие углы имеют величину, другие утверждали, что нет; теперь мы знаем, как можно построить их теорию на основании некоторых естественных определений [см. книгу Ф. Клейна № 16, т. II, с. 336—342]. Более нигде актуально бесконечно малые у Евклида не фигурируют, и, начиная с V книги, посвященной общей теории отношений, они в силу ее 4-го определения полностью исключаются из рассмотрения.

V книга посвящена общей теории отношений. Первоначально греки построили теорию отношений соизмеримых величин, которую Евклид излагает в VII книге и применяет затем к проблемам теоретической арифметики (ср. к. I, ч. II, п. 1). Открытие в пифагорейской школе несоизмеримых величин потребовало создания более общей теории отношений. По-видимому, первая такая теория была основана на применении алгоритма Евклида и приемов, равносильных представлению отношений в виде непрерывных дробей. Два отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ определялись как равные, если (говоря по-современному) в их разложениях в непрерывные дроби

$$\frac{a}{b}=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\ldots}}, \qquad \frac{c}{d}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ldots}}$$

равны все неполные частные $p_k=q_k$, $k=0, 1, 2, \ldots$. Изложение такой теории не сохранилось, но основные черты ее можно восстановить по отдельным упоминаниям о ней. Подобного рода теорию впоследствии развили математики арабского Востока в IX—XI вв., и О. Хайям доказал ее равносильность теории, изложенной в V книге «Начал» (в том же сочинении, в котором он построил свою теорию параллельных, см. к. I, ч. III, п. 9, а). Однако греки отказались от своей первой общей теории отношений, так как встретились при ее развитии с рядом трудностей. Вместо нее в первой половине IV в. до н. э. Евдокс разработал новую общую теорию отношений величин, которая и составляет предмет V книги евклидовых «Начал».

1. В этом определении существенно указание, что понятие отношения распространяется только на пары величин одного рода (в геометрии — на пары величин одной размерности).

2. Здесь в форме определения сформулирована аксиома измерения, исключающая актуально бесконечные величины: отношения имеют только такие величины a и b, что существуют натуральные числа m и n, для которых $na > b$ и $mb > a$. Мы формулируем аксиому не в симметричной форме: если даны произвольные величины a и b, $a < b$, то существует такое натуральное n, что $na > b$. Архимед высказал аксиому измерения дважды и несколько по-иному в «Квадратуре параболы» для площадей и в сочинении «О шаре и цилиндре» для линий, поверхностей и тел; у него она является «допущением». В аксиоматике Гильберта аксиома измерения — первая из двух аксиом непрерывности: взятая одна, она не обеспечивает непрерывности пространства. Аксиому непрерывности нередко называют по именам Архимеда и Евдокса, а удовлетворяющие ей величины — архимедовыми.

3. Итак, две величины a, b находятся в том же отношении, что и величины c, d, если для любых пар натуральных чисел m, n при выполнении одного из условий: 1) $ma > nb$; 2) $ma = nb$; 3) $ma < nb$ — выполняется и аналогичное из условий: 1) $mc > nd$; 2) $mc = nd$; 3) $mc < nd$. Евклид не дал содержательного определения самого понятия отношения, но установил, когда два отношения $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ те же (термин «равенство» он сохраняет за величинами и числами, хотя в 7-м определении упорядочивает область отношений, вводя понятие «больше»). 5-е определение Евклида принадлежит к числу определений с помощью абстракции, которые устанавливают основные свойства некоторой области объектов, не давая прямого определения самих этих объектов. Вместе с тем это определение типа равенства, ибо если обозначить отношение R, а «нахождение в том же отношении» знаком $\sim$, то выполняются, как и для равенства, условия: 1) $R \sim R$ (рефлексивность), 2) если $R_1 \sim R_2$, то и $R_2 \sim R_1$ (симметрия или переместительность; оба свойства вытекают из определения) и 3) если $R_1 \sim R_2$ и $R_2 \sim R_3$, то $R_1 \sim R_3$ (транзитивность; это доказано в 11-м предложении V книги). Подробнее об этом см. в статье С. А. Яновской [№ 45, с. 108—136]. В силу сказанного мы будем пользоваться записями вида $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и употреблять термин «равенство отношений».

В 5-м определении сравниваются кратные величин, составляющих отношения. Если вместо пар натуральных чисел m, n, множество которых Евклид по величине не упорядочил, ввести в рассмотрение рациональные числа $\frac{n}{m}$, то 5-е определение можно высказать так: отношения $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ равны, если они разбивают множество положительных рациональных дробей на тождественные классы: I класс дробей $\frac{n}{m}$, меньших как $\frac{a}{b}$, так и $\frac{c}{d}$; II класс дробей $\frac{n}{m}$, равных как $\frac{a}{b}$, так и $\frac{c}{d}$ (этот класс либо содержит одну дробь, либо в случае несоизмеримости a с b и c с d пуст) и III класс дробей $\frac{n}{m}$, больших как $\frac{a}{b}$, так и $\frac{c}{d}$. Как видно, отношения выполняют при этом ту же функцию, что и «сечения» в теории действительных чисел Дедекинда. Сходство теорий Евдокса и Дедекинда велико. Р. Липшиц через несколько лет после выхода в 1872 г. работы Дедекинда «Непрерывность и иррациональные числа» (см. далее, ч. I, п. 9, д) высказал даже мнение, что они отличаются лишь по форме. Дедекинд в переписке с Липшицем в 1876 г. показал, что эти две теории имеют много общего, но наряду с этим и существенные отличия. Одно из основных отличий состоит в том, что в теории Дедекинда область действительных чисел оказывается непрерывной в силу того, что каждое сечение множества рациональных чисел производится некоторым рациональным или иррациональным числом (вся конструкция Дедекинда имела целью обеспечить эту непрерывность). Между тем в теории Евдокса непрерывность не обеспечена и нельзя утверждать, что любое сечение в области соизмеримых отношений или рациональных чисел $\frac{n}{m}$ производится каким-либо отношением $\frac{a}{b}$. Теория отношений Евдокса играла в античной математике роль, аналогичную нынешней роли теории действительных чисел, она лежала в основе теории подобия фигур и их измерения, в частности, при помощи метода исчерпывания.

4. Иначе говоря, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, если существует такое рациональное число $\frac{n}{m}$, что $\frac{a}{b} > \frac{n}{m} \geqslant \frac{c}{d}$.

5. Для целей Евдокса и Евклида не требовалось разработать теорию операций над отношениями в том объеме, как это делается теперь для действительных чисел. Основная операция над отношениями — это их составление, соответствующее нашему умножению: если даны отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, то отношение $\frac{a}{c}$ называется составленным из них. В VI книге «Начал», пользуясь ее 12-м предложением о существовании четвертого пропорционального отрезка x к трем данным c, d, b $\left(\text{т. е. отрезка, удовлетворяющего пропорции } \frac{c}{d}=\frac{b}{x}\right)$, Евклид распространяет операцию составления на отношения отрезков $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: составленное из них отношение есть $\frac{a}{x}$. Это позволяет сформулировать и доказать одну из основных теорем теории подобия, которой посвящена VI книга,

именно 23-е предложение: равноугольные параллелограммы имеют друг к другу составное отношение их сторон. Существование четвертой пропорциональной для других классов величин Евклид не доказал, и операция составления двух произвольных отношений в «Началах» не определена[1].

В 9-м и 10-м определениях V книги речь идет о частном случае составных отношений. Двойное отношение возникает из $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$, когда $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ — оно соответствует нашему $\left(\frac{a}{b}\right)^2$; тройное отношение соответствует кубу и т. д. Потребности вычислений быстро привели к обобщению такой операции на извлечение корней, и уже Архимед говорил о полуторном отношении, что соответствует нашему $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$. Подробная теория дробно-рациональных отношений была развита Н. Оремом в XIV в.; на ее основе затем было создано учение о возведении в степень с произвольным показателем.

Античная теория отношений оставалась фундаментом теоретической арифметики вплоть до XVIII в., хотя неоднократно предпринимались попытки заменить ее основания (см. сказанное выше о Хайяме) или же ее усовершенствовать, с тем чтобы в большей мере сблизить понятия отношения и числа. [Подробнее см. № 11, т. I, с. 94—101, 216—218, 271, 275—276 и указанную там литературу.]

г. ОСНОВНАЯ ЛЕММА МЕТОДА ИСЧЕРПЫВАНИЯ

ИЗ X КНИГИ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

[№ 10, т. II, с. 102]

Предложение 1

Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины.

Пусть будут две неравные величины AB, C, из которых большая AB; я утверждаю, что если от AB отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше величины C (рис. 2).

Действительно, C, взятая [достаточное число раз] кратной, станет когда-нибудь больше AB (определение 4 книги V). Будем брать ее кратной; пусть DE будет кратной C и большей AB, и разделим DE на равные C [части] DI, IH, HE, и отнимем от AB бо́льшую половины [часть] BG, от AG же — бо́льшую половины [часть] GK, и будем делать это постоянно, пока деления в AB не сделаются равными по количеству делениям в DE.

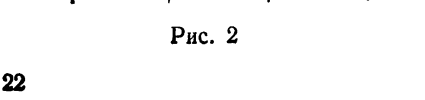


Рис. 2

[1] Определение такой операции, имеющееся под № 5 в VI книге, является, по единодушному мнению специалистов, вставкой значительно более позднего времени.

Пусть теперь деления AK, KG, GB будут равными по количеству [делениям] DI, IH, HE; и поскольку DE больше AB и от DE отнимается меньшая половины [часть] EH, от AB же большая половины [часть] BG, то, значит, остаток HD будет больше остатка GA. И поскольку HD больше GA и отнимаются от HD половина HI, от GA же большая половины [часть] GK, то, значит, остаток DI будет больше остатка AK. Но DI равно C; и значит, C больше AK. Значит, AK меньше C.

Архимед

Итак, от величины AB остается величина AK, являющаяся меньшей заданной меньшей величины C, что и требовалось доказать.

Подобным же образом докажется и если бы отнимаемые были половинами (1).

Примечания. Это одна из немногих общих теорем античного математического анализа, постоянно применяемая в методе исчерпывания (см. следующие отрывки). Ее можно высказать и так: пусть даны произвольные величины a и b, $a > b$, а также положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, каждое из которых меньше или равно $\frac{1}{2}$. Тогда существует такое число n, что $a\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n < b$. Поскольку значение b произвольно, то данное предложение позволяет образовать сколь угодно малую величину.

1. Сабит ибн Корра в сочинении «Об измерении параболических тел» (первая половина X в.) обобщил эту теорему Евклида: если от большей из двух данных неравных величин отнять любую ее часть, от остатка такую же его часть и т. д., то можно получить остаток, меньший, чем меньшая данная величина (ср. далее отрывок п. 2, а).

д. КВАДРАТУРА ПАРАБОЛЫ ПРИ ПОМОЩИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПО МЕТОДУ ИСЧЕРПЫВАНИЯ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ АРХИМЕДА «КВАДРАТУРА ПАРАБОЛЫ»

[№ 2, с. 93—94]

XXIV. *Всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с ним одно и то же основание и равную высоту.*

Пусть $ADBEC$ (рис. 3) будет сегмент, заключенный между прямой и параболой, а ABC—треугольник, имеющий с сегментом одно и то же основание и равную высоту; пусть площадь K составляет четыре трети треугольника ABC. Требуется доказать, что эта площадь равна сегменту $ADBEC$ (1).

Действительно, если она не равна, то будет или больше, или меньше. Пусть сначала сегмент $ADBEC$ будет, если возможно, больше площади K. Итак, я вписал треугольники ADB, BEC, как было сказано выше, в оставшиеся по краям сегменты, вписал другие треугольники, имеющие с этими сегментами те же самые основания и высоты, и затем в получающиеся после этого сегменты постоянно вписываю по два треугольника, имеющие с этими сегментами те же самые основания и высоты; тогда остающиеся сегменты сделаются когда-нибудь меньше того избытка, на который сегмент $ADBEC$ превосходит площадь K (2), так что вписанный многоугольник будет больше площади K, а это невозможно. Действительно, имеются площади, образующие непрерывную пропорцию в отношении четырех к одному, а именно первая—треугольник ABC, в четыре раза больший обоих треугольников ADB и BEC, вместе взятых, затем эти самые треугольники, которые в четыре раза больше треугольников, вписываемых в следующие сегменты, и так все время далее; ясно, что все эти площади вместе будут меньше, чем четыре трети от наибольшей площади [ABC], тогда как K составляет четыре трети от наибольшей площади. Значит, сегмент $ADBEC$ не будет больше площади K. Пусть теперь, если возможно, он будет меньше. Возьмем площадь Z, равную треугольнику ABC, затем площадь H, равную четверти Z, далее—O, равную четверти H, и будем так брать постоянно в непрерывной пропорции до тех пор, пока последняя площадь не окажется меньше того избытка, на который площадь K превосходит сегмент; пусть эта меньшая площадь будет I; тогда площади Z, H, O, I вместе с третью от I составят четыре трети от Z [предложение XXIII]. Но и K также составляет четыре трети от Z; значит, K будет равна площадям

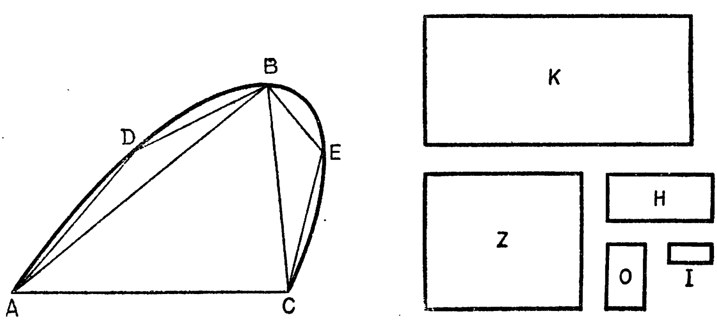


Рис. 3

Z, H, O, I, взятым вместе с третьей частью от I. Так как площадь K превосходит площади Z, H, O, I на величину, меньшую I, а сегмент $[ADBEC]$ — на величину, большую I, то ясно, что площади Z, H, O, I будут больше сегмента. Это же невозможно, так как доказано, что если взято любое количество площадей, образующих непрерывную пропорцию в отношении четырех к одному, причем наибольшая равна вписанному в сегмент треугольнику, то все эти площади вместе будут меньше сегмента [предложение XXII]; значит, сегмент $ADBEC$ не меньше площади K. Но доказано также, что он не будет и больше; значит, он будет равен площади K. Но площадь K составляет четыре трети треугольника ABC; значит, сегмент $ADBEC$ равен четырем третям треугольника ABC (3).

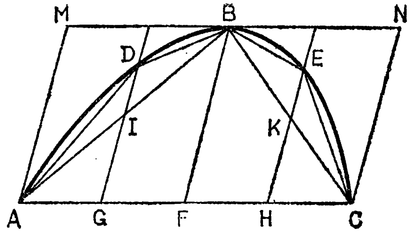


Рис. 4

Примечания. Как мы видели, Архимед произвел вычисление площади параболического сегмента прежде всего с помощью механического метода и применения неделимых (см. выше отрывок, п. 1, а). В сочинении «Квадратура параболы» он придал этому первоначальному выводу строгий вид, проведя его в соответствии с нормами метода исчерпывания, но этим не ограничился и сообщил еще доказательство, свободное от механических рассмотрений, которые мы и приводим.

1. Для понимания дальнейшего укажем некоторые предварительные теоремы Архимеда. В произвольный сегмент параболы ABC (рис. 4), с основанием AC которого сопряжен диаметр BF, вписан треугольник ABC. Этот треугольник составляет половину параллелограмма $AMNC$, образованного касательной в вершине B, основанием AC и отрезками AM, CN, параллельными диаметру FB. Отсюда следует XX предложение «Квадратуры параболы»: треугольник, имеющий с сегментом параболы общее основание и равную высоту, больше половины сегмента. Тем же свойством обладают два треугольника ABD и BCE, точно так же вписанные в два остающихся сегмента параболы ABD и BCE; и то же относится к треугольникам, аналогично вписанным в оставшиеся 4 сегмента, и т. д. В XXI предложении доказано, что $\triangle ABC$ в 8 раз больше каждого из треугольников ABD и BCE, или, что то же, $\triangle ABD + \triangle BCE = \frac{1}{4} \triangle ACB$. Это нетрудно доказать, записав уравнение параболы $y^2 = px$ в косоугольных координатах (ось абсцисс — BF, ось ординат — BN), взяв точку H в середине FC и сравнив площади $\triangle HCK$ и $\triangle KCE$. Если представить себе процесс вписывания треугольников продолженным, то возникает вписанный в сегмент параболы ABC многоугольник, образованный $\triangle ABC$, двумя треугольниками ABD и BCE, сумма площадей которых есть $\frac{1}{4} \triangle ABC$, далее четырьмя треугольниками, сумма площадей которых есть $\frac{1}{4}$ суммы площадей предшествующих двух треугольников, и т. д. Наконец, в XXIII предложении словесно выражено такое правило суммирования убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$: если $S = a + \frac{a}{4} + \ldots + \frac{a}{4^n}$, то $S + \frac{1}{3} \frac{a}{4^n} = \frac{4}{3} a$.

2. Это следует из XXI предложения «Квадратуры параболы» и I предложения X книги «Начал» Евклида (см. выше п. 1, г).

3 Здесь перед нами типичный пример доказательства по методу исчерпывания. Существует несколько довольно сходных схем применения этого метода; вот одна из них, изложенная в общем виде и наших обозначениях. Для определения неизвестной величины—площади или объема—X строятся две аппроксимирующие ее монотонные последовательности величин—вписанных и описанных—$\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$

$$u_n < X < v_n, \tag{1}$$

удовлетворяющие условию, что, какова бы ни была данная величина ε, для всех достаточно больших n

$$v_n - u_n < \varepsilon, \tag{2}$$

так что

$$X - u_n < \varepsilon, \quad v_n - X < \varepsilon. \tag{2'}$$

Последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ (или одна из них) выбираются так, что приближаются к некоторой известной величине S, так же как и X, заключенной между ними

$$u_n < S < v_n. \tag{3}$$

В таком случае

$$X = S.$$

Для доказательства приводятся к нелепости допущения, что $X \gtrless S$. Если принять $X > S$, то в силу (2′) при достаточно большом n будет

$$X - u_n < X - S, \text{ т. е. } u_n > S,$$

а это нелепо, ибо противоречит (3). Если же принять, что $X < S$, то при достаточно большом n будет $v_n - X < S - X$, т. е. $v_n < S$, а это нелепо, ибо противоречит (3). Следовательно, $X = S$.

В «Квадратуре параболы» схема несколько отличается в одном пункте: вместо неравенств (3) применяется равенство

$$u_n + r_n = S, \tag{3'}$$

в котором, какова бы ни была данная η, для всех достаточно больших n величина $r_n < \eta$. Допущение $X > S$ приводится к нелепости, как и раньше, допущение же $X < S$ оказывается нелепым потому, что тогда при некотором n было бы $r_n = S - u_n < S - X$, т. е. $X < u_n$, что противоречит (2′). На первый взгляд может представиться, что в такой модификации схемы существенна только последовательность $\{u_n\}$, но это неверно: при оценке разности $X - u_n$ фактически используется и последовательность $\{v_n\}$. Так, в рассматриваемом примере все оценки близости площади вписанного многоугольника к площади сегмента основаны на XXI предложении, в котором фигурирует вписанный треугольник ABC и описанный параллелограмм $AMNC$, и вообще рядом со вписанным многоугольником u_n постоянно незримо присутствует соответствующая ему описанная фигура v_n.

Первые дошедшие до нас доказательства по методу исчерпывания содержатся в «Началах» Евклида, а затем у многих авторов. Только Архимед применил описанную нами схему в 10 случаях. Однако ни один греческий математик не дал какого-либо общего ее описания; в каждом новом случае все рассуждения, включая двукратное приведение к нелепости, повторялись заново. Это вместе с полным отсутствием алгебраической символики сообщало античному методу исчерпывания чрезвычайную тяжеловесность. Теперь мы знаем, что этот метод был ранней формой проведения и доказательства предельных переходов, и все доказательства можно чрезвычайно упростить, введя отсутствовавшие в древности основные понятия последовательности, предела и бесконечно малой величины. Для нас из предельных равенств $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = S$ (соответствующие неравенствам (2) и (3)) немедленно следует, что $X = S$. Античный математик должен был всякий раз доказывать справедливость этого следствия от противного; впрочем, и наше доказательство теоремы о единственности предела ведется от противного. Попытки придать методу исчерпывания большую общность, краткость и легкость, сделанные в конце XVI и начале XVII в., тотчас повлекли за собой формулировку понятия предела и некоторых простейших теорем о пределах. В 1647 г. в печати появился термин «исчерпывание», который впервые применил Григорий Сен-Венсан, говоря, что количество вписанных в данное тело параллелепипедов можно так увеличить, чтобы они это тело исчерпали (exhaurire—исчерпывать).

Общий способ отыскания предела последовательности не существует. Античный запас алгебраических средств для предельных переходов был еще невелик. В квадратуре параболы таким средством служит суммирование бесконечной убывающей геометрической прогрессии. В следующем отрывке дан пример квадратуры, основанной на другом принципе и другой технике вычислений.

Отметим в заключение еще одно отличие античной теории квадратур от современной: понятие площади криволинейной фигуры в древности предполагалось очевидным и не определялось.

е. КВАДРАТУРА СПИРАЛИ АРХИМЕДА ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ АРХИМЕДА «О СПИРАЛЯХ»

[№ 2, с. 237—238]

X ... *Следствие.* Из этого ясно, что все квадраты на прямых, равных наибольшей, взятые вместе, будут меньше утроенных квадратов на всех одинаково возвышающихся одна над другой прямых, поскольку они будут втрое больше [чем квадраты на всех одинаково возвышающихся прямых], только после добавления некоторой величины, но они будут больше вместе взятых утроенных квадратов на всех таких прямых, кроме наибольшей, так как добавленная величина меньше утроенного квадрата на наибольшей (1). И, следовательно, если построить подобные фигуры на всех таких прямых, как на одинаково возвышающихся одна над другой, так и на прямых, равных наибольшей, то построенные на прямых, равных наибольшей, вместе взятые, будут меньше вместе взятых утроенных фигур на прямых, одинаково возвышающихся одна над другой, но будут больше вместе взятых утроенных всех таких фигур, за исключением лишь построенной на наибольшей прямой, ибо подобные фигуры имеют те же отношения, что и квадраты соответственных сторон.

. . . .

[Там же, с. 253—256]

XXIII. *Если взять площадь, заключенную между [дугой] спирали (рис. 5), меньшей описанной в течение одного оборота и не имеющей конца в начале спирали, и прямыми, проведенными из обоих концов этой [дуги] спирали [к началу спирали], то можно описать около этой площади плоскую фигуру, состоящую из по-*

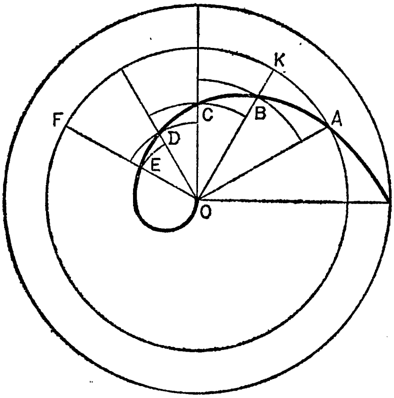


Рис. 5

добных секторов, и вписать в нее другую такую же, так, чтобы описанная фигура превосходила вписанную на [величину], меньшую всякой наперед заданной площади (2).

. . . .

Следствие. Из этого ясно, что около упомянутой площади можно описать, как указано, плоскую фигуру так, чтобы описанная фигура была больше этой площади на [величину], меньшую всякой наперед заданной площади, и затем вписать так, чтобы упомянутая площадь была больше вписанной фигуры на величину, меньшую всякой наперед заданной площади.

XXIV. *Площадь, заключенная между спиралью, описанной в течение первого оборота, и первой из прямых, находящихся на начале вращения, будет третьей частью первого круга.*

Пусть будет спираль *ABCDEO* (рис. 6), описанная в течение первого оборота, пусть точка *O* будет началом спирали, а *OA* — первая прямая из тех, которые находятся на начале вращения; круг *AKFHI* будет первым кругом, а круг *s* — его третьей частью (3). Требуется доказать, что вышеупомянутая площадь равна кругу *s*.

Действительно, если это не так, то она будет или больше, или же меньше. Пусть сначала она, если возможно, будет мень-

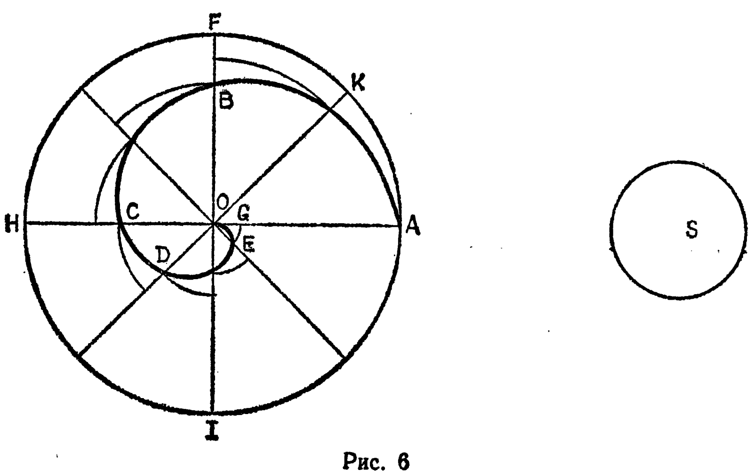


Рис. 6

ше. Тогда около площади, заключенной между спиралью $ABCDEO$ и прямой OA, можно описать плоскую фигуру, составленную из подобных секторов, так, чтобы описанная фигура была больше этой площади на величину, меньшую того избытка, на который круг s превышает упомянутую площадь. Опишем ее, и пусть из секторов, составляющих упомянутую фигуру, наибольшим будет OAK, а наименьшим OEG; ясно, что описанная фигура будет меньше круга s. Теперь продолжим прямые, образующие при O равные углы, вплоть до встречи их с окружностью круга; получатся некоторые линии, а именно проведенные из O до спирали, одинаково возвышающиеся одна над другой, из которых наибольшей будет OA, а наименьшей OE, и наименьшая будет равна разности [между двумя последовательными прямыми]; кроме того, имеются и некоторые другие линии, а именно доходящие из O до окружности круга, причем по количеству они будут равны первым, по величине же каждая из них будет равна наибольшей из первых; далее, на всех этих прямых, как на тех, которые одинаково возвышаются одна над другой, так и на тех, которые равны друг другу и наибольшей из первых, построены подобные секторы; значит, секторы, построенные на прямых, равных наибольшей, будут менее взятых вместе утроенных секторов, построенных на прямых, одинаково возвышающихся одна над другой; это доказано [следствие предложения X]. Но секторы на прямых, равных друг другу и наибольшей, равны кругу $AFHI$, секторы же на прямых, одинаково возвышающихся одна над другой, равны описанной фигуре; значит, круг $AFHI$ будет менее утроенной описанной фигуры. Но он в три раза больше круга s; значит, круг s будет меньше описанной фигуры. Но он не меньше, а больше; значит, площадь, ограниченная спиралью $ABCDEO$ и прямой AO, будет не меньше площади s.

Но она также будет и не больше. Действительно, пусть она будет, если возможно, больше. Тогда опять можно в площадь, заключенную между спиралью $ABCDEO$ (4) и прямой AO, вписать фигуру так, чтобы упомянутая площадь была больше вписанной фигуры на [величину], меньшую той, на которую упомянутая площадь более круга s. Впишем ее, и пусть из составляющих вписанную фигуру секторов наибольшим будет OPX, наименьшим же GOE; тогда ясно, что вписанная фигура будет больше круга s. Теперь продолжим прямые, образующие при O равные углы, пока они не попадут на окружность круга. Тогда опять получатся некоторые линии, одинаково возвышающиеся одна над другой, именно доходящие из точки O до спирали, из которых наибольшей будет OA, наименьшей же OE, причем наименьшая равна разности [двух последовательных линий], имеются также и другие линии, именно доходящие из O до окружности круга $AFHI$, причем по количеству они будут равны первым, по величине же каждая из них будет равна наибольшей из первых; и на всех этих прямых, как на тех, которые равны друг другу и наибольшей, так и на тех, которые одинаково возвышаются одна над другой, построены подобные секторы; значит, секторы, построенные на прямых, равных наибольшей, будут более чем в три раза больше тех секторов, которые построены на прямых, одинаково возвышающихся одна над другой, если исключить сектор на наибольшей; это доказано [следствие предложения X]. Но секторы, построенные на прямых, равных наибольшей, равны кругу $AFHI$, секторы же на прямых, одинаково возвышающихся одна над другой, кроме наибольшего, равны вписанной фигуре; значит, круг $AFHI$ будет более чем в три раза больше вписанной фигуры. Но он в три раза больше круга s; значит, круг s будет больше вписанной фигуры. Но он не больше, а меньше; значит, площадь, ограниченная спиралью $ABCDEO$ и прямой AO, не будет и больше круга s. Итак, круг s будет равен [площади, заключенной между спиралью и прямой AO] (5).

Примечания. Архимед обогатил инфинитезимальные приемы новым замечательным методом, которому предстояло в далеком будущем блестящее развитие — методом интегральных сумм. Мы иллюстрируем этот прием на определении площади первого витка спирали Архимеда, которое равносильно нашему вычислению интеграла вида $\int_0^a x^2\,dx$, рассматриваемого, как общий предел нижней и верхней интегральных сумм Римана — Дарбу. Метод интегральных сумм Архимед применил и в нескольких других задачах; среди его результатов имеется и вычисление, как сказали бы мы, интеграла $\int_0^a x\,dx$. Около 1000 г. работавший в Египте математик и физик Ибн ал-Хайсам, определяя объем тела вращения параболического сегмента вокруг касательной к вершине («параболического веретена»), получил при помощи того же метода результат, равносильный интегралу $\int_0^a x^4\,dx$. Читатель сравнит прием Архимеда с различными приемами, предложенными для интегрирования степенной функции $y=x^n$ в XVII в. (см. далее отрывки в разделе п. 3). Подчеркнем, что общего понятия определенного интеграла у Архимеда и других математиков до XVII в. не было, так же как общего понятия предела.

1. Приведенная квадратура спирали опирается на суммирование квадратов членов арифметической прогрессии, которое Архимед произвел в X предложении цитируемого сочинения «О спиралях». В этом предложении словесно сформулировано и доказано правило, которое можно коротко записать так:

$$n(nd)^2+(nd)^2+ds=3[d^2+(2d)^2+\ldots+(nd)^2],$$

где $s=d+2d+\ldots+nd$. Для дальнейшего требуется лишь приведенное нами следствие, которое соответственно принимает вид:

$$3[d^2+(2d)^2+\ldots+(n-1)^2d^2] < n(nd)^2 < 3[d^2+(2d)^2+\ldots+(nd)^2].$$

2. Архимед определил спираль, которая носит теперь его имя, кинематически. Это линия, описываемая точкой, равномерно движущейся, начиная с некоторого пункта, вдоль прямой, равномерно вращающейся на некоторой плоскости вокруг названного пункта. Такое определение соответствует нашему уравнению спирали $\rho=a\varphi$ в полярных координатах.

Доказательство XXIII предложения ясно из чертежа, на котором угол AOF, содержащий рассматриваемый сектор спирали OAE, разделен на n равных частей и в каждый возникающий при этом малый сектор спирали вписан и вокруг него описан круговой сектор. Разность между описанной около всего сектора OAE спирали и вписанной фигурами, т. е. разность между площадями круговых секторов OAK и ODE, меньше площади сектора OAK, а эту последнюю при достаточно большом n можно сделать «меньше всякой наперед заданной площади». Последние слова Архимеда совершенно равнозначны по смыслу «бесконечно малой» анализа XIX—XX вв., но в математическом словаре классиков греческой математики слово «бесконечный» отсутствовало.

3. Первой прямой Архимед называет отрезок, проходимый вдоль вращающейся прямой точкой, описывающей спираль, в течение первого оборота. Первым называется круг, описанный из начала спирали радиусом, равным первой прямой.

4. Мы опустили чертеж оригинала для этого случая, так как в нем нет необходимости.

5. Вывод Архимеда соответствует схеме, разъясненной в 3-м примечании к предыдущему отрывку. Разделим, следуя часовой стрелке, окружность «первого круга» $AIHF$ с радиусом, равным $OA=2\pi a$ (мы бы сказали — угол 2π), на n равных частей, обозначим радиус-векторы соответствующих точек спирали $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n=OA$, описанные и вписанные круговые секторы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, суммы $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sigma_к=u_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_к=v_n$, искомую площадь первого витка спирали X и площадь «первого круга» $3S$; при этом $\sigma_n=\dfrac{3S}{n}$. По построению и XXIII предложению данного сочинения будут выполнены первые два условия схемы

$$u_n < X < v_n \tag{1}$$

и при достаточно большом n

$$v_n-u_n < \varepsilon. \tag{2}$$

Далее, по определению спирали, т. е. уравнению $\rho=a\varphi$, радиус-векторы $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ образуют арифметическую прогрессию $a\Delta\varphi, 2a\Delta\varphi, \ldots, na\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$, а площади круговых секторов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ пропорциональны квадратам соответствующих радиус-векторов $\left(\sigma_k^2=\dfrac{\rho_k^2\Delta\varphi}{2}\right)$. Поэтому согласно следствию X предложения выполняется и третье условие схемы

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k=u_n < \frac{n\sigma_n}{3}=S < \sum_{k=1}^{n} \sigma_k=v_n, \tag{3}$$

и, значит, $X=S$.

Суммы Римана — Дарбу представлены в этом выводе площадями вписанной и описанной фигуры, а окончательный результат выражен через площадь круга данного радиуса. Такое сведение искомой величины к некоторой другой, в том или ином смысле более простой, стало нередким приемом интегрального исчисления (пример: приведение всех эллиптических интегралов к трем нормальным видам)

Общий результат Архимеда, в переводе на язык анализа, выражает площадь сектора в полярных координатах интегралом

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho^2 d\varphi}{2}$$

в частности, если $\rho = a\varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2\varphi^2}{2}\, d\varphi = \frac{4\pi^3 a^2}{3}.$$

При этом неравенства (3) можно переписать в виде

$$4\pi^3 a^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} < \frac{4\pi^3 a^2}{3} < 4\pi^3 a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3},$$

и вывод Архимеда неявно содержит в себе вычисление предела: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}{n^3}$ (ср. далее отрывок п. 3, г).

2. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ В ТЕОРИИ КОНФИГУРАЦИИ КАЧЕСТВ

а. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ИЗ «ВОПРОСОВ ПО ГЕОМЕТРИИ ЕВКЛИДА» Н. ОРЕМА (около 1350 г.)

[№ 72, с.1—2; перевод А. П. Юшкевича]

Во-первых, спрашивается, может ли величина бесконечно (in infinitum) убывать соответственно пропорциональным частям (1).

. . . .

...Первое положение таково, что если какое-либо отношение бесконечно возрастает, а предыдущий член не изменяется, то последующий член бесконечно убывает. Это явствует из того, что отношение между двумя членами может бесконечно возрастать двояко: либо благодаря бесконечному увеличению предыдущего члена, либо благодаря бесконечному убыванию последующего члена.

Второе положение таково, что если к какому-либо отношению прибавляется такое же, затем еще такое же и так до бесконечности, то оно бесконечно возрастает (2).

. . . .

Первое заключение таково, что если из некоторого количества вычесть его часть, от первого остатка такую же его часть, от второго остатка такую же его часть и так до бесконечности, то благодаря этому уменьшению до бесконечности таковое количество вполне (precise) уничтожится (3). Доказывается это тем, что взятое целое и первый остаток, и второй, и третий, и т. д. непрерывно пропорциональны ..., следовательно, отношение целого к остатку бесконечно возрастает, ибо составляется из них согласно второму положению, а один из членов, именно целое, мыслится неизменным, следовательно, остаток согласно первому положению до бесконечности убывает, значит, это целое количество вполне уничтожается (4).

[Там же, с. 3—5]

Соответственно спрашивается: может ли величина бесконечно возрастать путем сложения пропорциональных частей (5).

. . . .

Второе заключение таково, что если взять какое-либо количество, например фут, затем сложить с ним его треть и потом треть сложенного и так до бесконечности, то целое будет в точности (precise) фут с половиной или же [фут, взятый] в полуторном отношении; и для познания этого есть такое правило, что мы должны определить, насколько разнится вторая часть от первой и третья от второй и т. д., и обозначить это его обозначением (denominacio) и тогда отношение всей совокупности ко взятому [количеству] будет то же, как обозначения [т. е. взятого] к обозначению [т. е. разности]. Например: в данном [случае] вторая часть, которая есть треть первой, разнится от первой на две трети, следовательно, отношение целого к первой части или ко взятому то же, как три к двум, а это полтора (6).

6. РАСХОДИМОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА

[Там же, с. 5—6]

Третье заключение таково, что возможно, что с некоторым количеством складываются непропорциональные отношения меньших к большим и притом целое будет бесконечным; однако, если прибавляются пропорциональные, оно, как сказано, будет конечным. Например, пусть взятое количество есть фут, с которым в первую пропорциональную часть часа сложена половина фута, затем в другую [часть часа] треть, а затем четверть, и затем пятая, и так до бесконечности согласно порядку чисел; я говорю, что целое будет бесконечным, что доказывается так: здесь имеются бесконечно [многие] части, каждая из которых больше половины фута, следовательно, целое будет бесконечным. Предыдущее ясно, ибо 4-я и 3-я [части вместе] больше половины, подобным же образом от 5-й до 8-й и затем до 16-й (части) и так до бесконечности (7).

в. НЕОГРАНИЧЕННО ПРОТЯЖЕННАЯ ФИГУРА КОНЕЧНОЙ ПЛОЩАДИ

ИЗ «ТРАКТАТА О КОНФИГУРАЦИИ КАЧЕСТВ» Н. ОРЕМА (около 1350 г.)

[№ 33, с. 710—711]

Вообразим линию ab (рис. 7), мысленно разделенную до бесконечности на непрерывно пропорциональные части в отношении 4 к 1 так, что первая пропорциональная часть составляет три четверти целого, вторая—три четверти остатка, и так непрерывно до бесконечности. Например, если вся линия равна 64, то первая пропорциональная часть при таком делении была бы равна 48-ми, вторая — 12-ти, третья—3-м и четвертая—трем четвертям остатка, т. е. единицы, и т. д. Допустив это, вообразим на 1-й из этих частей линии ab униформную площадь определенной высоты, на 2-й части пусть находится площадь, вдвое более высокая, на 3-й—вчетверо более высокая, на четвертой — в 8 раз более высокая, и т. д. до бесконечности, удваивая так, чтобы высо́ты площадей пропорциональных частей непрерывно возрастали в отношении 2:1, а длины непрерывно убывали бы соответственно делению предмета в отношении 4:1. Тогда вторая часть площади имеет длину, соответствующую одной четверти длины первой, и высоту—вдвое бо́льшую, чем первая, а третья также относится ко второй, четвертая к третьей и т. д. Я утверждаю, стало быть, что суммарная площадь или фигура вдвое больше по всей площади, чем ее первая часть, т. е. та часть, которая находится на первой пропорциональной части линии ab. Пусть площадь, находящаяся на первой части, равна 48. Тогда площадь, находящаяся на второй части, если бы она не была выше первой, равнялась бы 12-ти. Однако она вдвое выше, чем первая, а следовательно, вторая площадь относится к первой, как 24 к 48. На том же основании третья равна 6, четвертая равна 3 и т. д. все в

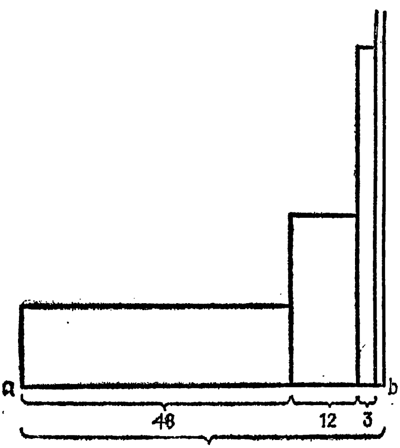


Рис. 7

той же пропорции 1:2. Отсюда может быть определено и отношение этих площадей согласно сказанному в главе 6 настоящей части. Итак, мы имеем, что 1-я часть вдвое больше второй, 2-я вдвое больше третьей, 3-я вдвое больше четвертой и т. д. непрерывно. Следовательно, 1-я часть составляет половину всей совокупности всех бесконечных частей, 2-я — половину остатка и т. д.

Следовательно, вся совокупность по всей площади вдвое больше первой части, что и требовалось доказать. То качество, которое по своей интенсивности было бы подобно или пропорционально высоте этой фигуры, было бы также ровно вдвое больше первой своей части.

И так же рассуждают о скорости; например, если бы двенадцатичасовой день был разделен так, что 1-я пропорциональная часть его равнялась 4 часам, 2-я составляла бы три четверти остатка и т. д. Допустим затем, что какое-либо движущееся движется в 1-ю из этих частей с определенной скоростью, во 2-ю — со скоростью вдвое большей, в 3-ю — с вчетверо большей скоростью, в четвертую со скоростью в 8 раз большею, в пятую с 16 раз большею скоростью и т. д. с интенсивностью, возрастающей до бесконечности. Я утверждаю, что если в 1-ю часть дня, разделенного указанным образом, оно проходило бы 1 лье, то за весь день в целом прошло бы ровно 2 лье, и тем не менее стало бы двигаться бесконечно быстро (8).

Примечания. Во второй и третьей четвертях XIV в. высокого развития достигла своеобразная теория, которую ученые Оксфордского университета называли калькуляциями (calculationes — вычисления), а парижские ученые — теорией широт и долгот форм или конфигурации качеств. Непосредственно связанная с аристотелевской натурфилософией, эта теория содержала наряду с метафизическими и богословскими частями обширные математические разделы. Основным в теории калькуляций было изучение неравномерно изменяющихся величин, в частности неравномерных движений, которые здесь впервые стали предметом специального исследования. Термин «движение» понимался при этом в широком смысле, как у Аристотеля, как изменение вообще; перемещение в пространстве называлось «местным движением», т. е. переменой места. Были созданы понятия средней и мгновенной скорости, а также ускорения «интенсивностей» форм или качеств и разработаны начала кинематики «местного движения». Выдающимся достижением явилось открытие закона равномерно ускоренного движения, которое, правда, рассматривалось тогда совершенно отвлеченно и не получило применения к изучению падения брошенного тяжелого тела — это сделал много позднее Галилей (см. далее отрывок п. 3,в). Были сделаны первые шаги в формировании понятия функции, выраженной кинематически или графически. Такое графическое изображение зависимостей было оригинально разработано в парижской Сорбонне Николем Оремом. Он представлял себе, что экстенсивность «линейного» качества предмета (например, его пребывание при движении во времени) изображается на плоскости долготами — отрезками некоторой прямой, а градусы его интенсивности (например, скорости) — широтами, перпендикулярами к этой прямой, восстановленными в концах долгот. При непрерывном изменении величины вершины широт описывают некоторую линию, которая вместе с отрезком линии долгот и двумя крайними широтами образует конфигурацию, характеризующую данный предмет и интенсивность его качества (так, площадь, в случае скорости, характеризует пройденный путь или пропорциональную ему среднюю скорость движения). Если движение «униформно», т. е. равномерно, то конфигурацией

Рис. 8

служит прямоугольник, верхнее основание которого параллельно прямой долгот. Если движение «униформно-дифформно», т. е. равномерно-неравномерно (мы бы сказали: равномерно-ускоренно), то конфигурацией будет трапеция с верхним основанием, наклоненным к прямой долгот; в частном случае, когда движение начинается с «не градуса», т. е. с нуля, получается треугольник. Остальные движения «дифформно-дифформны», т. е. неравномерно-неравномерны, и Орем предложил их некоторую классификацию, еще весьма несовершенную. У Орема намечалось обобщение этих идей на «плоскостные» и «телесные» качества, до некоторой степени родственные нашим функциям точки на плоскости или в трехмерном пространстве. Все это было, однако, еще далеко от аналитико-геометрического исследования геометрических образов с помощью координатного метода и уравнений кривых или поверхностей.

Математический аппарат рассматриваемых теорий был невелик, но его существенной особенностью являлось свободное владение некоторыми простейшими инфинитезимальными приемами, в частности некоторыми сходящимися бесконечными рядами, и открытое употребление бесконечно больших и малых величин. Мы приводим несколько отрывков, в которых Орем производит суммирование бесконечной убывающей геометрической прогрессии, а также излагает два замечательных открытия: расходимость гармонического ряда и существование неограниченно протяженных фигур с конечной площадью. Эти отрывки взяты из двух сочинений Орема. Одно из них «Qaestiones super geometriam Euclidis», не так давно полностью опубликованное Г. Бюсардом, написано в форме вопросов и ответов, связанных с «Началами» Евклида; здесь обсуждаются свойства континуума, проблемы теории конфигурации качеств, свойства роговидных углов; возможно, что это был курс лекций Орема в Сорбонне, читанных в середине XIV в. Другое, «Tractatus de configuratione qualitatum» содержит систематическое изложение теории; исследователи полагают, что оно было написано несколько позднее «Вопросов». Это второе сочинение и его изложение получили большую известность, и влияние его идей можно проследить вплоть до эпохи Галилея; труды калькуляторов также находили читателей еще в XVII в. и одного из них, Р. Суайнсхеда, высоко ценил Лейбниц.

Подробнее см. [№ 11, т. I, с. 269—284], а также статью В. П. Зубова в его публикации «Трактата» [№ 33] и его же труд «У истоков механики» в книге [№ 7, с. 3—173].

1. В своем комментарии к аксиомам «Начал» Евклида их переводчик с арабского Дж. Кампано из Новары (около 1260 г.) отметил, что величина может бесконечно убывать. Орем ставит вопрос о делении величины, например, отрезка $AB=a$ (см. рис. 8) на непрерывно пропорциональные части $AP_1:P_1P_2=P_1P_2:P_2P_3=\ldots=n:1$ (предполагается, что $n>1$) и показывает, что при этом части уменьшаются до бесконечности.

2. Речь идет о составлении по данному отношению $\frac{a}{b}>1$ двойного, тройного и т. д. отношений, т. е. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ и т. д. (см. выше отрывок п. 1, в).

3. Такое предложение в другой форме было высказано ранее Сабитом ибн Корра (см. выше на с. 23 примечание п.1 к отрывку 1, г): если от данной величины $AB=a$ и всех остатков отнимается всякий раз их $\frac{1}{n}$ часть, то пропорциональные части будут $a\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\frac{a}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\frac{a}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, ..., а соответствующие остатки $\frac{a}{n}$, $\frac{a}{n^2}$, $\frac{a}{n^3}$, ... Из «заключения» Орема непосредственно следует, что сумма бесконечной убывающей геометрической

прогрессии $a\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{a}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{a}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots$ равна a; соответствующее общее правило сформулировано Оремом в следующем отрывке.

4. Далее Орем приводит два примера, в которых $\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{n}=\frac{1}{1000}$. Правило суммирования бесконечной убывающей прогрессии было вновь доказано рядом последующих математиков — Виетом, Григорием Сен-Венсаном и др.

5. Далее Орем дает и обосновывает отрицательный ответ на этот вопрос.

6. Сумму s бесконечной прогрессии $a+\frac{a}{n}+\frac{a}{n^2}+\ldots$, $n>1$ Орем выражает пропорцией $\frac{s}{a}=\frac{a}{a-\frac{a}{n}}$. Предельный переход от частных сумм такой прогрессии s_m к s умели совершать и греки (см. выше п. 1, д), но в явном виде трактовка бесконечного ряда как совокупности и термин для его суммы («целое») появляются в рассматриваемых теориях. Наряду с геометрической прогрессией рассматривались и некоторые приводящиеся к ней ряды, вроде $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\ldots=\frac{7}{4}$ и т. п.

7. Данное Оремом доказательство того, что частные суммы гармонического ряда (термин У. Броункера, 1668) стремятся к бесконечности, отличается особенной простотой и изяществом. Впоследствии этот факт был независимо обнаружен и доказан П. Менголи (1650) и И. и Я. Бернулли (1698).

8. Орем приводит и другие, аналогичные конструкции бесконечно протяженных фигур конечной площади. Бесконечно протяженные криволинейные фигуры конечной площади или объема были открыты в середине XVII в. П. Ферма и Э. Торичелли.

3. ПРЕДЫСТОРИЯ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В XVII в.

а. ВВЕДЕНИЕ ЛОГАРИФМОВ

ИЗ КНИГИ ДЖ. НЕПЕРА «ПОСТРОЕНИЕ УДИВИТЕЛЬНЫХ ТАБЛИЦ ЛОГАРИФМОВ» (1619)

[№ 70, с.5, перевод Ю. А. Белого и А. П. Юшкевича]

1. Таблица логарифмов (tabula artificialis) — небольшая таблица, с помощью которой можно узнать посредством весьма легких вычислений все геометрические размеры и движения.

Она по справедливости названа небольшой, ибо по объему не превосходит таблицы синусов, весьма легкой, потому что с ее помощью избегают всех сложных умножений, делений и извлечений корня, и все вообще фигуры и движения измеряются

Джон Непер

посредством выполнения более легких сложения, вычитания и деления на два (1).

Она составлена из чисел, следующих в непрерывной пропорции (2).

[Там же, с. 9—12]

16. Если из полного синуса (3) с добавленными семью нулями ты вычтешь его 10 000 000-ую часть, а из полученного таким образом числа — его 10 000 000-ую часть и так далее, то этот ряд можно легко продолжить до ста чисел в геометрическом отношении, существующем между полным синусом и синусом, меньшим его на единицу, а именно между 10 000 000 и 9 999 999, и этот ряд пропорциональных мы назовем Первой таблицей.

Первая таблица

10000000.0000000
1.0000000

9999999.0000000
9999999

9999998.0000001
9999998

9999997.0000003
9999997

9999996.0000006
и т. д. до
9999900.0004950

Итак, из полного синуса с добавленными (для большей точности) семью нулями, а именно 10 000 000. 0000000 вычти 1.0000000, будет 9999999.0000000, из этого вычти 0.9999999, будет 9999998.0000001 и продолжай так до тех пор, пока не образуешь сто пропорциональных, последнее из которых, если расчет произведен правильно, будет 9999900.004950 (4).

17. Вторая таблица следует от полного синуса с шестью добавленными нулями через пятьдесят других чисел, пропорционально убывающих в отношении, которое является простейшим и возможно более близким к отношению между первым и последним числами Первой таблицы.

Поскольку первое и последнее числа Первой таблицы суть 10 000 000.0000000 и 9999900.004950, то в этом отношении трудно образовать пятьдесят пропорциональных чисел. Близким и в то же время простым отношением является 100000 к 99999, которое можно с достаточной точностью продолжить, добавив к полному синусу шесть нулей и последовательно вычитая из предшествующего его 100000-ую часть. Эта таблица содержит, кроме полного синуса, являющегося первым числом, еще пятьдесят пропорциональных чисел, последнее из которых (если ты не ошибешься) будет 9995001.222927 (5).

18. Третья таблица состоит из шестидесяти девяти столбцов и в каждом столбце расположено двадцать одно число, следующее в отношении, которое является простейшим и возможно более близким к отношению, существующему между первым и последним членами Второй таблицы.

Поэтому ее первый столбец может быть очень легко получен из полного синуса с пятью добавленными нулями и из последующих чисел вычитанием из них 2000-ой части (6).

. . . .

19. Первые числа всех столбцов следуют от полного синуса с добавленными четырьмя нулями в отношении, которое является простейшим и близким к отношению, существующему между первым и последним числами первого столбца.

Так как первое и последнее числа первого столбца суть 10000000.0000 и 9900473.5780, то простейшим и возможно более близким к их отношению будет 100 к 99. Соответственно этому следующие за полным синусом 68 чисел должны быть получены в отношении 100 к 99 вычитанием из каждого его сотой части.

20. В том же отношении должна быть образована прогрессия со второго числа первого столбца для вторых чисел всех столбцов, и с третьего для третьих, и с четвертого для четвертых, и соответственно с остальных для остальных.

Таким образом, из любого числа предыдущего столбца вычитанием его сотой части получается число того же порядка следующего столбца...

Пропорциональные Третьей таблицы:

Первый столбец	Второй столбец	Третий столбец	и т. д. до	69-го столбца
10000000.0000	9900000.0000	9801000.0000	и т. д. до	5048858.8900
9995000.0000	9895050.0000	9796099.5000	и т. д. до	5048858.8900
9990002.5000	9890102.4750	9791201.4503	и т. д. до	5043811.2932
9985007.4987	9885157.4237	9786305.8495	и т. д. до	5041289.3879
9980014.9950	9880214.8451	9781412.6967	и т. д. до	5038768.7435
и т. д. до	и т. д.	и т. д.		и т.д., наконец, до
	нисходя до	нисходя до	и т. д.	
9900473.5780	9801468.8423	9703454.1539,	наконец, до	4998609.4034

21. ... этих трех таблиц (после их составления) достаточно для вычисления таблицы логарифмов.

До сих пор мы объясняли, как легче всего ввести в таблицах синусы или натуральные числа, следующие в геометрической пропорции.

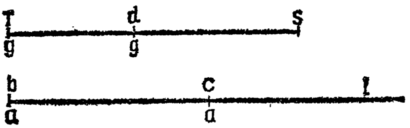


Рис. 9

22. Остается, по крайней мере в Третьей таблице, ввести рядом с убывающими в геометрической прогрессии синусами или натуральными числами их логарифмы, возрастающие в арифметической прогрессии.

[Там же, с. 14—17]

26. Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать, притом в течение времени, за какое полный синус убыл до данного синуса.

Пусть линия TS — полный синус (рис. 9), а dS на той же линии — данный синус и пусть g геометрически перемещается в некоторый определенный момент времени из T в d. Пусть также bi — другая линия, бесконечная в направлении i, вдоль которой из b арифметически движется a с той самой скоростью, какую g имела сперва, когда была в T, и пусть a перемещается из фиксированной b в направлении i и достигает в тот же момент точки c. Число, измеряющее линию bc, называется логарифмом данного синуса dS (7).

27. Поэтому логарифм полного синуса есть нуль.

. . . .

29. Найти пределы логарифма данного синуса.

Предыдущим было показано, что если данный синус вычесть из полного синуса, то остается меньший предел, а при умножении полного синуса на меньший предел и деления произведения на данный синус будет получен больший предел, как в следующем примере (8).

30. Отсюда первое пропорциональное из первой таблицы, которое есть 999999999, имеет свой логарифм в пределах между 1.0000001 и 1.0000000...(9).

31. При неощутимом различии между пределами они сами или любое число, находящееся между ними, может быть принято за истинный логарифм. Так, в предыдущем примере синус 9999999 имеет такой логарифм 1.0000000, или такой 1.00000010, или всего лучше 1.0000005...

32. Если имеется любое число синусов, убывающих от полного синуса в геометрической пропорции, и для одного из них логарифм или его пределы даны, можно найти их и для остальных синусов.

Это по необходимости вытекает из определений арифметического возрастания и геометрического убывания, а также определения логарифма...

Так что, если первый логарифм, соответствующий первому синусу после полного синуса, дан, второй будет вдвое большим, третий — втрое, и так далее, пока не станут известны логарифмы всех синусов...

. . . .

36. Логарифмы синусов, находящихся в одинаковом отношении, имеют одинаковые разности.

Это необходимо вытекает из определений логарифма и движений...

37. Так как у трех синусов, образующих непрерывную геометрическую пропорцию, квадрат среднего равен произведению крайних, то удвоенный логарифм среднего будет равен сумме логарифмов крайних. Поэтому, если даны логарифмы двух таких синусов, третий может быть найден...

38. Так как для четырех геометрически пропорциональных произведение средних равно произведению крайних, то для их логарифмов сумма средних равна сумме крайних. Поэтому, если даны три из этих логарифмов, можно узнать и четвертый...

39. Разность логарифмов двух синусов лежит между двумя пределами, причем полный синус относится к большему из них, как меньший синус относится к разности синусов, и полный синус относится к меньшему из них, как большой синус к разности синусов (**10**).

[Там же, с. 24—31]

47. Чтобы третья таблица стала полной и совершенной, ко всем ее натуральным числам следует приписать их логарифмы, после чего мы будем всегда называть ее радикальной таблицей...

Радикальные таблицы

Первый столбец		Второй столбец			69-столбец	
Натуральные	Логарифмы	Натуральные	Логарифмы		Натуральные	Логарифмы
10000000.0000	0	9900000.0000	100503.3	и остальные до	5048858.8900	6834225.8
9995000.0000	5001.2	9895030.0000	105504.6		5046333.4605	6839227.1
9990002.5000	10002.5	9890102.4750	110505.8		5043811.2932	6844228.3
9985007.4987	15003.7	9885157.4237	115507.1		5041289.3879	6849229.6
9980014.9950	20005.0	9880214.8451	120508.3		5038768.7435	6854230.8
и т. д. до	до	и т. д. до	до		и т. д. до	до
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .		. . . .	. . . .
9900473.5780	100025.0	9801468.8423	200528.2		4998609.4034	6934250.8

48. Когда радикальная таблица уже составлена, мы будем брать числа таблицы логарифмов только из нее.

Как две первые таблицы служили для образования третьей, так эта радикальная таблица послужит для построения главной логарифмической таблицы с большой легкостью и без ощутимых ошибок.

. . . .

51. Все синусы, находящиеся в отношении два к одному, имеют разностями их логарифмов 6931469,22...

52. Все синусы, находящиеся в отношении десять к одному; имеют разностями их логарифмов 23025842,34 (11).

. . . .

55. Как половина полного синуса относится к синусу половины данной дуги, так синус дополнения половины этой дуги относится к синусу полной дуги...

56. Удвоенный логарифм синуса дуги в 45 градусов есть логарифм половины полного синуса...

57. Сумма логарифмов половины полного синуса и синуса любой данной дуги равна сумме логарифмов синуса половины дуги и дополнения половины дуги (12).

Примечания. Первые таблицы логарифмов Дж. Непера были изданы под названием «Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio» («Описание удивительных таблиц логарифмов») в 1614 г. Они представляли собой восьмизначные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов углов первой четверти с шагом в одну минуту. Теорию логарифмов Непер изложил в другом сочинении «Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio» («Построение удивительных таблиц логарифмов»), посмертно опубликованном в 1619 г. и переизданном в 1620 г. его сыном Робертом Непером. «Построение» было написано, вероятно, раньше «Описания». Мы привели выдержки из «Построения», освещающие способ вычисления логарифмов, примененный Непером, данное им определение логарифма и некоторые свойства его логарифмов.

В «Построении» логарифм называется искусственным числом (numerus artificialis) в отличие от естественного, натурального числа (numerus naturalis) и таблица логарифмов именуется искусственной таблицей. Заглавие «Построения», содержащее слово логарифм, которое Непер систематически применял в «Описании», принадлежит, быть может, издателю. В переводе мы везде пользуемся словом «логарифм». Этот термин означает собственно указатель или число отношения (λόγου ἀριτμός) и обязан своим происхождением античной и средневековой теории отношений, в которой нашим $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ и т. д. соответствовали двойные, тройные, полуторные и т. д. отношения, составленные из $\frac{a}{b}$ (см. ч. I, п.1, в).

Независимо от Непера таблицы логарифмов были вычислены по-иному И. Бюрги (опубл. в 1620 г.).

Мы начинаем этот раздел «Хрестоматии» с логарифмов Непера, потому что как его определение логарифма, так и его вычисления по существу относятся к области математического анализа (см. далее 7 примечание).

1. Деление на два относится, конечно, к извлечению квадратного корня.

2. Мы опустили ряд пунктов, в которых разъяснены понятия арифметической и геометрической прогрессии, некоторые правила округления чисел и запись десятичных дробей с применением точки, разделяющей целую и дробную часть (ср. к. I, ч. I, п. 6д).

3. «Полный синус», sinus totus, т. е. линия синуса 90° или вертикальный радиус тригонометрического круга, у Непера взят равным 10^7. При этом значения синусов и других тригонометрических величин выражаются с требуемой точностью натуральными числами.

4. Построение таблицы логарифмов начинается с вычисления 101 члена геометрической прогрессии, первый член которой — полный синус, т. е. 10^7,

а остальные получаются из предыдущих умножением на $1-\frac{1}{10^7}$. Так образуется Первая вспомогательная таблица, заканчивающаяся числом 9999900,0004950.

5. Вторая прогрессия, начинающаяся опять-таки с 10^7, имеет знаменатель $1-\frac{1}{10^5}$. Эта таблица доводится до 51-го члена, именно до числа 9995001,222927. Здесь, как это впервые заметил почти через 200 лет Ж. Б. Био, при вычислении Непер допустил ошибку, отразившуюся на одном или двух последних знаках его логарифмических таблиц. На самом деле последнее число Второй таблицы должно быть 9995001,224804. Мы эту таблицу не приводим.

6. Числа первого столбца Третьей таблицы (мы его не приводим) имеют значения $10^7\left(1-\frac{1}{2000}\right)^n$, $n=0,\ 1,\ \ldots,\ 20$. Далее в п. 19 Непер образует первые числа всех столбцов, именно числа $10^7\left(1-\frac{1}{10}\right)^n$, $n=0,\ 1,\ \ldots,\ 69$.

7. В основе определения логарифма у Непера лежит кинематическая идея, обобщающая на непрерывные величины связь между геометрической прогрессией и арифметической прогрессией показателей ее членов. По отрезку TS и лучу bi движутся точки g и a, которые начинают движение из T и b с одинаковой скоростью v. Точка a движется равномерно со скоростью v, движение же точки g замедленно, причем ее скорость убывает пропорционально расстоянию dS, которое ей остается пройти до точки S.

Если обозначить отрезок $dS=x$, а логарифм Непера, т. е. отрезок $bc=y$, знаком Lx, то, с нашей точки зрения, функция $y=Lx$ определяется дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dx}{dt}=-\frac{vx}{10^7}, \tag{1}$$

где t — время; $v=\text{const}$ есть общая начальная скорость точек g и a и знак во втором уравнении взят в соответствии с тем, что x убывает при росте t. Поэтому

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{10^7}{x}, \tag{2}$$

откуда в соответствии с начальными условиями $x_0=10^7$, $y_0=0$

$$y=Lx=10^7\ln\frac{10^7}{x}=10^7\cdot\ln 10^7-10^7\ln x. \tag{3}$$

Вычисления Непера, с нашей точки зрения, представляли собой приближенное интегрирование дифференциального уравнения (2).

Все свойства логарифмов Непера получаются из последнего уравнения весьма просто; эти свойства несколько отличаются от привычных нам, так как $L\,1$ не равен нулю. Это же уравнение показывает, что логарифмы Непера отличаются от натуральных логарифмов.

8. В пп. 28—29 Непер устанавливает важные неравенства, определяющие границы логарифма данного синуса:

$$10^7-x<Lx<\frac{10^7}{x}(10^7-x). \tag{4}$$

9. Здесь Непер использует неравенства (4) для определения границ логарифма первого синуса, следующего за полным. В п. 31 он принимает его равным полусумме приведенных значений.

10. Соотношение

$$10^7\frac{x-y}{x}<Lx-Ly<10^7\frac{x-y}{y}$$

Непер широко использует для нахождения логарифмов чисел из Второй и Третьей таблиц. Используемый им прием заменяет интерполирование и дает результаты с погрешностью, которая может быть весьма просто оценена $\left(\text{относительная погрешность равна } \frac{(x-y)^2}{2y}\right)$.

11. Нетрудно видеть также, что $6931469.22 = L\,5000000$, а $23025842.34 = L\,1000000$. Эти значения несколько неточны, например, $L\,5000000 = 10^7 \ln 2 = 6931471.81$. Вообще из-за упомянутого небольшого просчета Непера его восьмизначные логарифмы должны быть увеличены примерно на $\frac{3}{8\cdot 10^6}$ их величины. Соотношения из п. 51 и 52 широко используются Непером при нахождении логарифмов синусов малых углов, не вошедших в Радикальную таблицу.

12. Соотношение $L\frac{1}{2}\cdot 10^7 + L\sin\alpha = L\sin\frac{\alpha}{2} + L\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ или иначе $L\sin\frac{\alpha}{2} = L\,5000000 + L\sin\alpha - L\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ дает Неперу другой путь для нахождения синусов углов, меньших 45°.

Об истории логарифмов и, в частности, введении системы десятичных логарифмов, важность и достоинства которой были ясны Неперу и которую еще при его жизни и по его совету начал вычислять Г. Бригс, см. № 11, т. II, с. 54—63.

6. ИЗМЕРЕНИЕ КРУГА С ПОМОЩЬЮ НЕДЕЛИМЫХ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ И. КЕПЛЕРА «НОВАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ ВИННЫХ БОЧЕК»

[№ 14, с. 114—115]

Теорема II. *Площадь круга при сравнении с квадратом диаметра имеет* [*к нему*] *отношение почти как* 11 *к* 14.

Архимед пользуется косвенным доказательством, приводящим к невозможности, о чем многие и много писали (1). Мне же кажется, что смысл этого [доказательства] следующий. Окружность круга BG содержит столько же частей, сколько точек,— именно бесконечное число. Каждую из них рассмотрим как основание некоторого равнобедренного треугольника с боковой стороной AB, и, таким образом, в площади круга окажется бесконечное множество треугольников, соединенных вершинами в центре A. Пусть, далее, окружность круга BG вытянута в прямую и пусть ей равна BC, а AB к ней перпендикулярна (рис. 10).

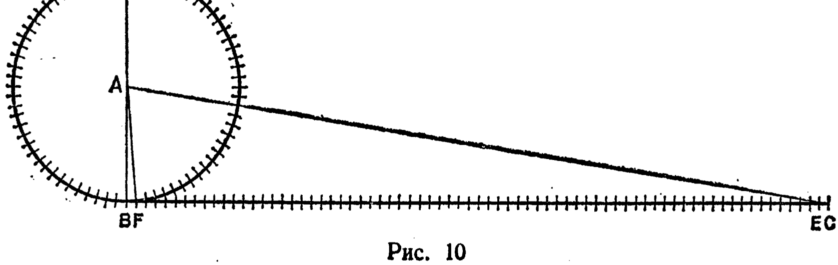


Рис. 10

Тогда основания всех этих бесчисленных треугольников, или секторов, будут представляться расположенными друг за другом по прямой BC; пусть одно из таких оснований будет BF и какое-нибудь равное ему — CE; наконец, соединим точки F, E, C с A. Таких треугольников ABF, ACE над прямой BC получится столько же, сколько секторов в площади круга, и их основания BF, EC и общая высота AB будут такие же, как у секторов; следовательно, все эти треугольники ABF, ACE и т. д. будут равновелики [друг другу], и каждый из них будет равновелик соответствующему сектору круга. А значит, и все вместе эти треугольники, имеющие основания на линии BC, т. е. треугольник BAC, всеми ими составленный, будет равновелик сумме всех секторов круга, т. е. составленной ими площади круга. Это самое и имеет в виду архимедово приведение к нелепости (2).

Иоганн Кеплер

Примечания. Новый расцвет инфинитезимальных методов в XVII в. явился одной из составных частей научной революции той эпохи, которую открыла гелиоцентрическая система мира Н. Коперника, а завершило (в известной мере) построение И. Ньютоном небесной механики на основе закона всемирного тяготения. Революция в области математики, выразившаяся в систематическом введении переменных величин и изучении функций с помощью исчисления бесконечно малых, была частью подготовлена предшествовавшим возрождением античных традиций и в том числе гораздо более глубоким, чем ранее, прочтением трудов Архимеда, но главным стимулом ее послужили многообразные задачи нового естествознания и новой техники. Метод исчерпывания древних вызывал восхищение своей безупречной строгостью. По Архимеду на первых порах учились искусству производить квадратуры и кубатуры, определять центры тяжести, измерять давление жидкости на плотины и т. д. Однако ученые Нового времени быстро увидели, что громоздкие античные процедуры не соответствуют возросшим требованиям астрономии, механики, оптики и других математических наук. Поиски более сильных и удобных методов велись в различных направлениях. Некоторые математики упростили самый метод исчерпывания, установив (в своеобразной терминологии) общее понятие предела и отдельные его свойства, вроде теоремы о единственности предела. Этого было недостаточно, и на рубеже XVI—XVII вв. в своеобразных формах возрождается математический атомизм, нестрогий, а иногда и не претендующий на строгость, но зато позволяющий сравнительно просто и весьма быстро найти ответ на целый ряд вопросов; впрочем, о математическом атомизме не забывали и в средние века. Одним из первых метод неделимых применил продолжатель дела Коперника, автор трех знаменитых законов эллиптического движения планет И. Кеплер. В «Новой астрономии» (Nova astronomia, 1609) Кеплер высказал второй закон примерно в таких словах: сумма всех расстояний от Солнца до частей пройденной планетой дуги орбиты относится к времени ее прохождения, как сумма всех таких расстояний ко времени полного обращения. Этих расстояний в обоих случаях бесконечно много, они играют роль неделимых элементов секториальных площадей. Кеплер не отождествляет сумму радиус-векторов с площадью, он собственно имел в виду, что отношение площади сектора, ограниченного орбитой и двумя радиус-векторами, выходящими из фокуса, в котором расположено Солнце, к площади, заключенной внутри орбиты, равно отношению сумм неограниченно больших совокупностей радиус-векторов, принадлежащих этим двум площадям. Такое отношение зависит от закона, по которому выбираются «части» или радиус-векторы $\left(\right.$мы бы сказали, от выбора аргумента φ в интеграле вида $\left.\int\limits_{\alpha}^{\beta} r\,d\varphi\right)$. Кеплер сделал такой выбор совершенно правильно, а само интегрирование произвел приближенно, складывая некоторые достаточно большие количества «расстояний». Прежде всего он решил задачу для случая эксцентрического круга и, разъясняя ход своих мыслей, указал, что Архимед, с его точки зрения, поступал в своем «Измерении круга» точно так же, разбивая круг на бесконечно много треугольников. Послание Архимеда к Эратосфену в то время не было известно (см. выше п. 1, а); тем замечательнее, что Кеплер усмотрел именно эту идею в античном методе исчерпывания.

Метод неделимых получил более широкое применение в чисто математическом труде Кеплера «Nova stereometria doliorum vinariorum» (1615), повод к составлению которого дали ему наблюдения над различными расходящимися между собой приемами измерения объема винных бочек («стереометрия» буквально значит измерение твердых тел). Содержание этого сочинения шире названия; лишь вторая и третья части его имеют своим предметом измерение бочек, в первой же с помощью неделимых определяются объемы большого числа тел: «яблока», возникающего при вращении кругового сегмента, большего, чем полукруг, вокруг своего основания; «лимона», который получается при вращении сегмента, меньшего, чем полукруг; «кольца» — тора и еще целого ряда тел вращения сегментов конических сечений. Заслуга Кеплера в возрождении метода неделимых была по достоинству оценена уже Б. Кавальери, который разработал этот прием более систематически. Эта заслуга не умаляется тем, что в отдельных случаях рассуждения Кеплера опираются только на аналогии или прикидки на глаз и, по его собственным словам, лишь правдоподобны, причем в одном таком случае (теорема XXV) он даже допустил ошибку.

Мы приводим простейший образчик рассуждений Кеплера, именно все ту же теорему о площади круга.

1. Вывод Архимеда см. в к. I, ч. III, п. 3, б.

2. Далее следует вычисление площади круга, диаметр которого равен 7 единицам.

в. ЗАКОН РАВНОМЕРНО УСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

ИЗ «БЕСЕД И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ, КАСАЮЩИХСЯ ДВУХ НОВЫХ ОТРАСЛЕЙ НАУКИ, ОТНОСЯЩИХСЯ К МЕХАНИКЕ И МЕСТНОМУ ДВИЖЕНИЮ» Г. ГАЛИЛЕЯ (1638).

[№ 6, т. II, с. 248—249]

Теорема I. Предложение I (1). *Время, в течение которого тело, вышедшее из состояния покоя и движущееся равномерно-ускоренно, проходит некоторое расстояние, равно времени, в течение которого это же расстояние было бы пройдено тем же телом* *при равномерном движении, скорость которого равняется половине величины наибольшей конечной скорости, достигаемой при первом равномерно ускоренном движении* (2).

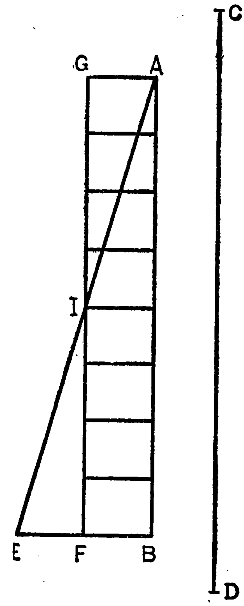


Рис. 11

Пусть линия AB представляет время, в течение которого тело, выйдя из состояния покоя в точке C, проходит при равномерно ускоренном движении расстояние CD (рис. 11). Отметим, далее, степени скорости, приобретаемые телом в конце каждой отдельной частицы времени AB; степени эти, постепенно увеличиваясь, возрастают в конце до величины EB, которую и отложим на линии, перпендикулярной к AB; соединив точки A и E и проведя линии, параллельные EB, на равных друг от друга расстояниях, отложенных на AB, мы представим таким способом возрастающие степени скорости, начиная от A. Разделим линию EB пополам в точке F и проведем линии FG и AG, параллельные AB и, соответственно, BF. Параллелограмм $AGFB$ будет равен треугольнику AEB, так как линия GF делит AE пополам в точке I; если поэтому продолжить параллельные линии, заключенные в треугольнике AEB, до линии IG, то сумма параллельных линий, заключенных в четырехугольнике, будет равна сумме тех же линий, заключенных в треугольнике AEB; в самом деле, сумма тех из них, кои заключены в треугольнике IEF, равна сумме заключенных в треугольнике GIA, остающиеся же части, заключенные в трапеции $AIFB$, являются общими. Так как каждому отдельному времени AB соответствует и отдельная точка на линии AB, а проведенные через эти точки параллели, заключенные в треугольнике AEB, представляют возрастающие степени скорости, в то время как такие же параллели, заключенные внутри параллелограмма, представляют равную им совокупность равномерных скоростей, то ясно, что все моменты скорости ускоренного движения представлены возрастающими параллельными линиями треугольника AEB, а равномерного движения—аналогичными линиями параллелограмма GB; то, чего недостает моментам в первое время движения (т. е. моментам, представленным параллельными линиями, заключенными в треугольнике AGI), возмещается моментами, представленными параллельными линиями треугольника IEF. Отсюда следует, что два тела пройдут равные расстояния в одно и то же время, если одно, выйдя из состояния покоя, будет двигаться равномерно ускоренно, а другое просто равномерно со скоростью, равной половине максимальной степени скорости, до-

Галилео Галилей

стигнутой при ускоренном движении, что и требовалось доказать (3).

Примечания. «Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali» (1638) Г. Галилея — основоположный в истории механики труд, с которого началась разработка динамики и теории сопротивления материалов. Но Галилей был не только механиком, физиком и астрономом, много сделавшим для обоснования и популяризации системы мира Коперника; это был также выдающийся математик, много размышлявший над проблемами континуума и бесконечности (ср. далее отрывок п. 10, а) и содействовавший развитию метода неделимых. Если замысел Галилея написать о неделимых специальный труд, о котором не раз говорится в его переписке с его учеником Б. Кавальери, осуществлен не был (это сделал как раз Кавальери), то в «Беседах» метод неделимых успешно применяется в механике, именно при выводе закона падения брошенных тел. Выше приведено соответствующее предложение, помещенное в «Дне третьем» этого сочинения, который начинается следующими знаменательными словами: «Мы создаем совершенно новую науку о предмете чрезвычайно старом. В природе нет ничего древнее *движения*, и о нем философы написали томов немало и немалых. Однако я излагаю многие присущие ему и достойные изучения свойства, которые до сих пор не были замечены, либо не были доказаны» [№ 6, т. II, с. 233]. Галилей называл эту новую науку наукой о местном движении.

1. «Предложение» — более общее понятие, чем «Теорема», и включает также «проблемы».

2. Эта теорема не раз высказывалась и доказывалась в трудах преподавателей Мертон-колледжа Оксфордского университета — У. Хейтсбери, Р. Суайнсхеда, Дж. Дамблтона, начиная с 30-х годов XIV в., а затем итальянцем Дж. Казали (1346) и Н. Оремом (около 1350), однако лишь как теорема о средней скорости «униформно-дифформного» движения, вне связи с проблемой падения брошенных тел (см. вводное примечание к отрывку п. 2). Впоследствии эта теорема встречается во многих рукописях и в печатных изданиях XVI в. Вывод Галилея близок к геометрическим доказательствам Орема и Казали, но идея неделимых у него выступает гораздо отчетливее, чем у его предшественников.

3. В следующем предложении доказано, что при тех же условиях расстояния, проходимые падающим телом, относятся между собою как квадраты времени и, как следствие, что расстояния, проходимые от начала движения за равные промежутки времени, относятся как числа 1:3:5: ... Это обстоятельство было отмечено Оремом в «Вопросах по геометрии Евклида». Теорема о том, что тело, брошенное под углом, движется по параболе, принадлежит всецело Галилею и высказана в «Дне четвертом» «Бесед» [№ 6, т. II, с. 305].

г. СТЕПЕННЫЕ СУММЫ НЕДЕЛИМЫХ ЛИНИЙ

ИЗ II КНИГИ СОЧИНЕНИЯ Б. КАВАЛЬЕРИ «ГЕОМЕТРИЯ, ИЗЛОЖЕННАЯ НОВЫМ СПОСОБОМ ПРИ ПОМОЩИ НЕДЕЛИМЫХ НЕПРЕРЫВНОГО» (1635)

[№ 12, с. 250—251]

Теорема XXIV. Предложение XXIV. *Пусть дан какой угодно параллелограмм и в нем проведена диагональ. Тогда все квадраты параллелограмма относятся ко всем квадратам любого из треугольников, образуемых указанной диагональю, как 3 к 1, причем за общую регулу берется одна из сторон параллелограмма* (1).

Пусть дан параллелограмм AG, пусть в нем проведена диагональ CE, пусть регулой служит какая угодно сторона, например, EG (рис. 12). Я утверждаю, что все квадраты AG в три раза больше всех квадратов любого из треугольников AEC или CEG. Разделим пополам стороны AC и CG в точках B и H. Проведем через точку B прямую BF, параллельную CG, а через H прямую DH, параллельную CA, которые пересекутся между собой в середине прямой CE в точке M. Итак, в фигуре или параллелограмме AG проведена прямая BF, делящая пополам все прямые, параллельные EG, и другая прямая CE, делящая те же прямые, за исключением прямой DH, на неравные части; поэтому сумма всех квадратов треугольника AEC со всеми квадратами треугольника CEG равна взятой дважды сумме всех квадратов [фигуры] AF со всеми квадратами двух треугольников CBM и EMF. Правда, DH не делится линией CE на неравные части, но это ни в каком случае не противоречит нашему утверждению, так как и для прямой DH, как и для тех, которые делятся на неравные части, верно то положение, что квадраты частей, на которые она рассечена, т. е. квадраты DM и MH, равны взятой дважды сумме квадрата половины, т. е. квадрата DM и того, что лежит между пересечениями и что в данном случае равно нулю, так как две пересекающие прямую линии BF и CE сходятся в точке M. Но все квадраты треугольника AEC равны всем квадратам треугольника CEG, так как эти треугольники имеют равные основания EG и AC и одну и ту же высоту, хотя и направленную в противоположные стороны. Поэтому все

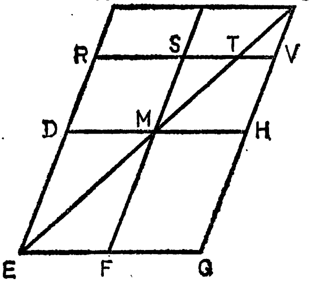


Рис. 12

Бонавентура Кавальери

квадраты треугольника *CEG* равны сумме всех квадратов [фигуры] *AF* со всеми квадратами треугольников *CBM* и *MEF*. Но все квадраты треугольника *BMC* равны всем квадратам треугольника *CMH*, а отношение всех квадратов треугольника *CEG* ко всем квадратам треугольника *CMH* равно тройному отношению *GC* к *CH* (2), и это потому, что треугольники *CEG* и *CMH* подобны друг другу; значит, поскольку эти величины относятся друг к другу как 2 к 1, все квадраты *CEG* относятся ко всем квадратам *CMH*, как 8 к 1, а ко всем квадратам *CMH* и *EMF*, или, что то же, *CBM* и *MEF*, как 4 к 1. Но все квадраты треугольника *CEG* равны [сумме] всех квадратов *AF* со всеми квадратами треугольников *CMB* и *MEF*, значит, эта [сумма] будет в четыре раза больше всех квадратов треугольников *CMB* и *MEF*. Следовательно, выделяя, получим, что все квадраты *AF* будут в три раза больше этих квадратов (3). Но все квадраты *AG* относятся ко всем квадратам *AF*, как квадрат *GE* к квадрату *EF*; иными словами, как 4 к 1 или как 12 к 3. Далее, все квадраты *AF* в три раза больше всех квадратов треугольников *BMC* и *MEF*: значит, все квадраты *AG* в двенадцать раз больше всех квадратов треугольников *BMC* и *MEF* и относятся ко всем квадратам *AF*, как 12 к 3. Следовательно, все квадраты *AG* относятся к сумме всех квадратов *AF* со всеми квадратами треугольников *CBM* и *MEF*, как 12 к 4. Но все квадраты *AF* со всеми квадратами треугольников *CBM* и *MEF* равны, как было доказано выше, всем квадратам треугольника *CEG* или *AEG*. Итак, все квадраты *AG* так относятся ко всем квадратам треугольника *CEG* или *AEC*, как 12 к 4 или как 3 к 1, что и требовалось доказать (4).

Примечания. Метод неделимых был подробно разработан в труде Б. Кавальери «Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota» (1635) и затем в примыкающих к этому сочинению «Шести геометрических этюдах» («Exercitationes geometricae sex», 1647). Сравнение площадей или объемов фигур у Кавальери сводится к сравнению совокупностей их неделимых элементов — «всех линий», параллельных какой-либо выбранной направляющей прямой, «регуле» в первом случае, и «всех плоскостей», параллельных некоторой направляющей плоскости во втором. Понятия неделимого и совокупности неделимых не были Кавальери четко определены; иногда неделимый элемент непрерывной величины рассматривается как образ, обладающий одним измерением меньше, чем порождаемая им при течении величина; иногда он наделяется бесконечной малой шириной или толщиной. Основное значение имели конкретные приемы вычисления отношений между совокупностями неделимых; при этом отношение всех линий двух плоских криволинейных трапеций, имеющих общее основание и ограниченных кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, вполне соответствует отношению интегралов $\int\limits_a^b f_1(x)\,dx:\int\limits_a^b f_2(x)\,dx$. Кавальери были известны трудности, возникающие при неподходящем выборе неделимых. В письме к Торичелли от 5 апреля 1644 г., а затем в «Этюдах» он, например, разобрал такой парадокс: если любой треугольник AGH разделить высотой HD на два ADH и HDG и провести в нем параллельно основанию AG отрезок IL, а из точек I и L опустить на AG перпендикуляры IC и LE, то все линии, как IC и LE, будут в ADH и HDG попарно равны, между тем эти треугольники и, значит, соответственные совокупности «всех линий», вообще говоря, не равны. В «Этюдах» рассмотрены также возражения против метода неделимых, сделанные П. Гульдином.

В «Геометрии» среди прочего материала содержатся общие предложения, равносильные вычислению интегралов $\int\limits_0^a x\,dx$ и $\int\limits_0^a x^2\,dx$. Именно в общей формулировке этих теорем, применяемых затем к различным задачам, был шаг вперед по сравнению с прежними интеграционными приемами.

1. Если обозначить $AC=a$, $AE=b$, $RT=x$ и $RE=t$, так что $x=\frac{at}{b}$, то сумме всех квадратов линий треугольника ACE соответствует интеграл $\int\limits_0^b k\frac{a^2t^2}{b^2}\,dt$, а сумме квадратов параллелограмма AG величина ka^2b (где k зависит от значения угла параллелограмма при вершине A). Таким образом, теорема выражает равенство $3\int\limits_0^b t^2\,dt=b^3$, а геометрически тот факт, что объем пирамиды втрое меньше объема параллелепипеда с теми же основанием (квадратом на AC, перпендикулярным к плоскости чертежа) и высотой.

В цитируемом нами переводе С. Я. Лурье сделал несущественные отступления от оригинала с целью облегчить чтение текста.

2. Т. е. равно кубу этого отношения. Здесь Кавальери опирается на следствие из XXII предложения, в котором доказано, что отношение «всех квадратов» в подобных треугольниках равно отношению кубов сходственных сторон.

3. «Выделяя» означает: «вычитая».

4. Если $AC=a$, $RT=x$, $TV=y$, $ST=z$, то рассуждения Кавальери можно передать следующим образом. Прежде всего $x^2+y^2=2\left(\frac{a}{2}\right)^2+2z^2$; следовательно, учитывая, что при смещении RV из положения AC в EG, отрезок ST опишет два равных треугольника BCM и MET:

$$\sum x^2+\sum y^2=2\sum\left(\frac{a}{2}\right)^2+4\sum z^2 \text{ или } \sum x^2=\frac{1}{4}\sum a^2+2\sum z^2,$$

и так как согласно следствию из XXII предложения $\sum z^2=\frac{1}{8}\sum x^2$, то

$$\sum a^2=3\sum x^2.$$

В IV книге «Геометрии» эта теорема применяется для квадратуры параболы и спирали Архимеда, причем во втором случае Кавальери употребил криволинейные неделимые: дуги окружностей с центром в начале спирали.

Впоследствии, занявшись определением объема «параболического веретена», которое не удалось Кеплеру, Кавальери распространил свой прием на «все квадратоквадраты» параллелограмма и треугольника (кубатура, произведенная Ибн ал-Хайсамом и упомянутая выше в вводном примечании к п. 1, е, в то время не была известна), а затем на «все кубы». По аналогии он сделал общее заключение для натуральных степеней, которое проверил на 6-й и 8-й степени. Однако обнародование этих открытий в «Этюдах» 1647 г. не произвело уже сенсации: к этому времени П. Ферма, Э. Торичелли и Ж. Роберваль проинтегрировали степенную функцию также для дробных и отрицательных показателей (см. отрывок п. 3, ж), и их результаты получили благодаря переписке довольно большую известность. К тому же Ферма и Торичелли применили более простые алгебраические методы вычислений, между тем как Кавальери в методе неделимых новой алгеброй не пользовался.

д. ОБЪЕМ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ТЕЛА

ИЗ СОЧИНЕНИЯ Э. ТОРИЧЕЛЛИ «ОБ ОСТРОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ТЕЛЕ» (1644)

[№ 76, т. I, с. 193; перевод А. П. Юшкевича]

Теорема. *Бесконечно длинное, острое гиперболическое тело, пересеченное плоскостью, перпендикулярной его оси, вместе с цилиндром, построенным на его основании, равно некоторому прямому цилиндру, диаметр основания которого равен поперечной стороне или же оси гиперболы* (1), *а высота равна радиусу основания самого́ острого тела.*

Пусть будет дана гипербола, асимптоты которой AB и AC образуют прямой угол (рис. 13). Возьмем на гиперболе произвольную точку D и проведем DC параллельно AB и DP параллельно AC. Затем станем вращать всю фигуру вокруг оси AB, причем одновременно возникнут острое гиперболическое тело EBD и цилиндр $FEDC$, построенный на его основании. Продолжим, далее, BA до H так, чтобы AH было равно всей оси или же поперечной стороне гиперболы. Затем на диаметре AH построим круг, перпендикулярный к асимптоте AC. [Наконец], представим себе, что на основании AH [т. е. на описанном круге] построен прямой цилиндр $ACGH$, высотой которого будет AC, т. е. радиус основания острого тела. Я утверждаю, что все тело $FEBDC$, хотя и бесконечно длинно, но все равно цилиндру $ACGH$.

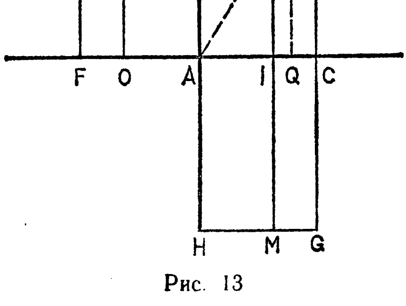


Рис. 13

Возьмем на прямой AC произвольную точку I и представим себе, что через I вокруг оси AB проведена цилиндрическая поверхность $ONLI$, содержащаяся в остром теле, и представим себе в цилиндре $ACGH$ круг IM, параллельный основанию AH.

Тогда названная цилиндрическая поверхность $ONLI$ будет относиться к кругу IM как прямоугольник OL, проведенный через ось к квадрату радиуса круга IM, т. е. как прямоугольник OL к квадрату полуоси гиперболы. Следовательно, согласно лемме (лемма I) они равны. И это верно всегда, где бы ни была взята точка I. Поэтому все цилиндрические поверхности, взятые вместе, т. е. само острое тело EBD вместе с цилиндром $FEDC$ на его основании, равны всем кругам, взятым вместе, т. е. цилиндру $ACGH$. Что и требовалось доказать.

Эванджелиста Торичелли

Примечания. Метод неделимых Кавальери получил развитие прежде всего у другого ученика Галилея—физика и математика Э. Торичелли. Мы приводим отрывок из небольшого сочинения Торичелли «De solido hyperbolico acuto», изданного вместе с рядом других работ в его «Геометрических трудах» («Opera geometrica», 1644). Здесь вторично в истории математики появляется бесконечно вытянутая фигура конечной величины, на этот раз, однако, не площадь, как у Орема (см. выше отрывок п. 2), но сбъем тела вращения бесконечной дуги ветви равносторонней гиперболы вокруг асимптоты. Торичелли представлял себе бесконечно вытянутую трубку составленной из бесчисленного множества цилиндрических поверхностей с общей осью на асимптоте. В применении такого рода криволинейных неделимых он имел предшественника в лице Кеплера, «Новая стереометрия винных бочек» которого осталась ему, однако, неизвестной.

1. О термине «поперечная сторона» см. 12 примечание в к. I, ч. III, п. 5, а.

2. Если взять AC за ось абсцисс и AB за ось ординат, уравнение гиперболы записать в виде $xy=a^2$ и координаты точки D обозначить x_0, y_0, то объем всей гиперболической трубки EDB можно выразить несобственным интегралом $\pi\int\limits_{y_0}^{\infty} x^2\,dy=\pi a^4\int\limits_{y_0}^{\infty}\frac{dy}{y^2}=\pi a^2 x_0$. Таков же объем служащего как бы основанием трубки цилиндра $CDEF$, и это обстоятельство Торичелли далее отмечает. Но Торичелли обошелся без вычислений, равносильных нахождению несобственного интеграла. Каждая неделимая поверхность, образуемая при вращении ординаты IL, имеет площадь $2\pi xy=2\pi a^2$, и Кавальери ставит ей в соответствие равную площадь круга с диаметром IM в цилиндре $ACGH$, сводя дело к вычислению $\int\limits_0^{x_0} 2\pi xy\,dx=\int\limits_0^{x_0} 2\pi a^2\,dx=2\pi a^2 x_0$. Впрочем, для любого

крупного математика связь результата Торичелли с интегрированием степени с показателем —2 была ясна.

Открытие Торичелли тем более парадоксальное, что площадь, вращение которой дает гиперболическое тело, бесконечна, поразило Кавальери, который в письме к Торичелли от 7 января 1642 г., благодаря за присланное доказательство, назвал его «воистину божественным».

Следует добавить, что во многих случаях Торичелли трактовал неделимые элементы фигур как однородные с ними бесконечно малые и также поступали многие другие математики: это открывало путь к возрождению метода интегральных сумм.

е. АРИФМЕТИЗАЦИЯ МЕТОДА НЕДЕЛИМЫХ

ИЗ «АРИФМЕТИКИ БЕСКОНЕЧНЫХ» ДЖ. ВАЛЛИСА (1656)

[№ 78, с. 15—17; перевод А. П. Юшкевича]

Предложение XIX. Лемма. Пусть предложен ряд количеств, [следующих] в *двойном* отношении арифметически-пропорциональных (или подобно ряду квадратных чисел), непрерывно возрастающих, начиная от точки или 0 (как 0, 1, 4, 9, 16, ...); требуется найти, какое отношение имеет этот ряд к ряду стольких же [количеств], равных наибольшему (1).

Будем вести исследование по способу наведения (как в предложении 1); получим:

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\quad \frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18},\quad \frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=$$

$$=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

и т. д.

Полученное отношение везде больше трети, т. е. $\frac{1}{3}$. Избыток же постоянно убывает с возрастанием числа членов, именно так:

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{36}\ \text{и т. д.}$$

Этот избыток есть отношение единицы к ушестеренному числу членов после 0. Итак:

Предложение XX. Теорема. Если предложен ряд количеств, [следующих] в *двойном* отношении арифметически-пропорциональных (или подобно ряду квадратных чисел), непрерывно возрастающих, начиная от точки или 0, то отношение его к ряду стольких же [количеств], равных наибольшему, превосходит *тройное* отношение [1 к 3]; а избыток равен отношению, какое имеет единица к ушестеренному числу членов после 0...

Джон Валлис

При возрастании числа членов этот избыток сверх трети непрерывно уменьшается, так что, наконец, станет, очевидно, меньше всякого, какой только можно назначить, а при продолжении до бесконечности совсем исчезнет. Итак:

Предложение XXI. Теорема. Если предложен бесконечный ряд количеств [следующих] в *двойном* отношении арифметически-пропорциональных (или подобно ряду квадратных чисел), непрерывно возрастающих, начиная от точки или 0, то он относится к ряду стольких же [количеств], равных наибольшему, как 1 к 3.

Предложение XXII. Следствие. Поэтому конус или пирамида относятся к цилиндру или призме (на том же или на равном основании и той же высоте) как 1 к 3. Мы предполагаем, что как конус, так и пирамида состоят из бесконечного числа плоских фигур, подобных и параллельных, составляющих ряд количеств [следующих] в двойном отношении арифметически-пропорциональных, наименьшее из которых — точка, наибольшее же основание; цилиндр же или призма состоят из стольких же [количеств], равных, очевидно, наибольшему из них. Следовательно, отношение равно 1 к 3, согласно предыдущему (2).

Примечания. С арифметической точки зрения в теоремах Кавальери обо «всех квадратах», «всех кубах» и т. д. неделимых параллелограмма и треугольника (см. выше отрывок п. 3, г) речь идет о том, что отношение

$$\frac{0^n+1^n+2^n+\ldots+m^n}{m^n+m^n+m^n+\ldots+m^n}$$

при $m \longrightarrow \infty$ стремится к $\frac{1}{n+1}$. Это последнее обстоятельство было ясно еще в 30-е годы Ферма, Робервалю, Декарту, но ни один из них не обнародовал свои результаты и первая публикация выпала на долю Дж. Валлиса. Широко образованный алгебраист Валлис (правильнее: Уо́ллис) существенно преобразовал метод неделимых, с которым познакомился в 1650 г. по сочинениям Торичелли, и уже в самом названии своего труда по теории квадратур противопоставил собственную арифметическую концепцию геометрической концепции Кавальери. Полное название книги Валлиса таково: «Арифметика бесконечных или новый метод исследования квадратуры криволинейных фигур и других труднейших математических задач» («Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problemata», 1656). Новый метод состоял в замене отношений совокупностей неделимых отношениями сумм арифметических рядов, точнее говоря, в отыскании пределов таких отношений, числители и знаменатели которых неограниченно возрастают. Концепция неделимых претерпела у Валлиса некоторое изменение. Так, в случае плоских фигур он делит площадь на бесконечное число параллелограммов бесконечно малой ширины, добавляя, что бесконечно малая или $\frac{1}{\infty}$ — значит нулевая (знак бесконечности ∞ принадлежит Валлису), а такие параллелограммы едва ли отличаются от линий. Термин «неделимые» Валлис продолжал применять, по его собственным словам, отчасти следуя Кавальери, отчасти ради краткости. Переход к пределу выступает у Валлиса с полной отчетливостью, хотя при этом он обходится без специального термина и каких-либо общих теорем. В своих рассуждениях Валлис часто пользуется неполной индукцией, даже в случаях, когда мог бы провести строгий вывод полностью. Такие наведения производятся в «леммах», после чего формулируются в «теоремах», и применяются к решению задач в «следствиях» (как в приведенном тексте). Валлис впервые раскрыл широкий простор применению неполной индукции в математике, как достаточно надежному средству творчества и в этом за ним последовали Ньютон, Эйлер и другие крупнейшие ученые. Применение индукции, а также смелых интерполяций позволило Валлису сделать и наиболее замечательное открытие, содержащееся в «Арифметике бесконечных», именно выразить число π как значение некоторой квадратуры (интеграла) в форме бесконечного произведения $\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\ldots}$.

Мы приводим отрывок, относящийся к интегрированию функции $y=x^2$.

1. Напомним, что составление двойного отношения означает возведение в квадрат.

2. В XXXIX и XL предложениях Валлис сходным образом выводит соответствующую теорему для суммы кубов натуральных чисел, после чего распространяет ее по неполной индукции на все последующие целые степени в XLIII и XLIV предложениях. При этом он делает оговорку, что не приводит тяжелых геометрических доказательств, но желающий может их получить посредством вписанных и описанных фигур. Общим приемом суммирования $\sum\limits_{k=1}^{m} k^n$ Валлис не располагал, он был опубликован впервые в «Искусстве предположений» Я. Бернулли (1713). Зная, что для функции $y=x^n$ и натурального n интеграл $\int\limits_0^x y\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{xy}{n+1}$, Валлис нашел $\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{n}}\,dy$ из очевидных геометрических соображений, которые можно выразить равенством $\int\limits_0^y x\,dy=xy-\int\limits_0^x y\,dx$, затем с помощью новых интерполяций он проинтегрировал рациональную степень $x^{\frac{m}{n}}$. [Подробнее см. статью Ф. Д. Крамара, № 22.]

ж. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ П. ФЕРМА «О ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ МЕСТ... С ПРИЛОЖЕНИЕМ УПОТРЕБЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОТНОШЕНИЯ К КВАДРИРОВАНИЮ БЕСЧИСЛЕННЫХ ПАРАБОЛ И ГИПЕРБОЛ» (после 1657, опубл. в 1679 г.)

[№ 60, т. I, с. 256—260; перевод А. П. Юшкевича]

Архимед не применял геометрических прогрессий, за исключением квадратуры параболы; при сравнении различных количеств он ограничивался арифметическими прогрессиями... я выяснил и доказал, что эта прогрессия весьма полезна для квадратур и я хочу представить современным математикам мое открытие, позволяющее с помощью абсолютно сходного метода квадрировать как параболы, так и гиперболы (1).

Весь метод основан на хорошо известном свойстве геометрической прогрессии, именно на следующей **теореме**:

Если дана геометрическая прогрессия с неограниченно убывающими членами, то разность между двумя последовательными членами этой прогрессии относится к меньшему из них, как больший к сумме всех следующих членов.

Установив это, мы прежде всего рассмотрим квадратуру гипербол: гиперболами мы по определению называем бесконечно многие кривые разного рода, как, например, $DSEF$ (рис. 14), свойство которых таково: если взять за асимптоты кривых пересекающиеся под произвольным углом RAC прямые AR и AC, которые, подобно самой кривой, можно продолжать произвольно до бесконечности, и если провести параллельно одной из асимптот произвольные прямые GE, HI, ON, MP, RS и т. д., то так же как какая-нибудь степень прямой AH относится к той же степени прямой AG, так какая-нибудь и притом такая же или же отличная от предыдущей степень прямой GE относится к той же степени прямой HI. При этом под степенями мы понимаем не только квадраты, кубы, квадрато-квадраты и т. д., показатели которых 2, 3, 4 и т. д., но и все простые корни, показатель которых равен единице (2).

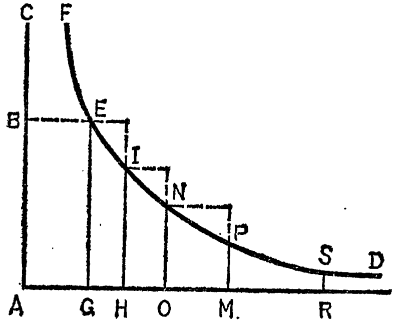


Рис. 14

Я утверждаю, что при помощи геометрического отношения можно найти квадратуры всех этих бесконечно многих гипербол, за исключением только одной, аполлониевой или первой, одинаковым и ко всем им применимым способом.

Пьер Ферма

Допустим, что, например, дана гипербола, обладающая тем свойством, что всегда прямая GE так относится к прямой HI, как квадрат прямой AH относится к квадрату прямой AG, и что прямая HI так относится к прямой ON, как квадрат OA относится к квадрату AH и т. д. (3).

Я утверждаю, что бесконечная площадь, основанием которой является GE и границами которой служат, с одной стороны, кривая ES, а с другой — бесконечная асимптота GOR, равна некоторой данной прямоугольной площади.

Представим себе члены некоторой простирающейся до бесконечности геометрической прогрессии: первым членом пусть будет AG, вторым — AH, третьим — AO и т. д. до бесконечности, и пусть эти члены будут настолько близки друг к другу, чтобы можно было согласно методу Архимеда приравнять (adaequare), как выражается Диофант, или же положить приближенно равными друг другу параллелограмм на GE и GH и смешаннолинейный четырехугольник $GHIE$ (4). [Допустим], далее, что первые из прямолинейных интервалов [разностей] между изменяющимися в геометрической прогрессии величинами, т. е. GH, HO, OM и т. д., почти равны между собою, так что может быть без труда применен посредством вписываний и описываний архимедов способ доказательства путем приведения к невозможному. Достаточно это доказать один раз навсегда, для того, чтобы больше не быть вынужденными снова напоминать и повторять тот прием, который достаточно хорошо знаком каждому геометру.

Исходя из этого, а также из того, что как AG относится к AH, так AH относится к AO и так AO относится к AM, получим, что как AG относится к AH, так и интервал GH к HO и интервал HO к OM и т. д. Но параллелограмм на EG и GH относится к параллелограмму на HI и HO, как параллелограмм на HI и HO к параллелограмму на NO и OM.

Действительно, так как отношение параллелограмма на GE и GH к параллелограмму на HI и HO получается из отношения прямой GE к прямой HI и отношения прямой GH к прямой HO и так как согласно вышеуказанному AG относится к AH, как GH относится к HO, то отношение параллелограмма на EG и GH к параллелограмму на HI и HO складывается из отношения GE к HI и из отношения AG к AH. Но GE относится к HI, по предположению, как квадрат AH к квадрату GA, или же, на основании непрерывной пропорциональности, как прямая AO относится к прямой GA.

Таким образом, отношение параллелограмма на EG и GH к параллелограмму на HI и HO получается из отношения AO к AG и AG к AH. Но из них обоих получается отношение AO к AH. Следовательно, параллелограмм на GE и GH относится к параллелограмму на HI и HO, как OA к HA или же как HA к AG.

Подобным же образом доказывается, что параллелограмм на HI и HO относится к параллелограмму на ON и OM, как AO к HA.

Но три прямые, выражающие собой отношения параллелограммов, т. е. прямые AO, HA, GA, образуют по предположению [непрерывную] пропорцию; следовательно, бесконечно многие параллелограммы, на GE и GH, на HI и HO, на ON и OM, все образуют непрерывную пропорцию с отношением [имеющимся и между] прямой HA к GA. Поэтому согласно основоположной теореме нашего метода, так же как GH, разность членов отношения, относится к меньшему члену GA, так и первый член ряда параллелограммов, т. е. параллелограмм на EG и GH, относится ко всем остальным бесконечно многим параллелограммам, т. е. на основании «приравнивания», по Архимеду, к фигуре, образуемой HI, асимптотой HR и простирающейся до бесконечности кривой IND.

Но если рассматривать прямую GE как общую ширину, то параллелограмм на GE и GH относится к параллелограмму на GE и GA, как HG к GA. Следовательно, так же как параллелограмм на GE и GH относится к упомянутой бесконечной фигуре с основанием HI, так тот же параллелограмм на GE и GH относится к параллелограмму на GE и GA.

Следовательно, параллелограмм на GE и GA, т. е. данная прямолинейная площадь, «приравнен» ранее названной фигуре. Если к этому прибавить [с обеих сторон] параллелограмм на GE и GH, который в силу крайней малости делений исчезает и обращается в ничто, то оказывается вполне истинной, легко подтверждающаяся посредством архимедова (разумеется, более хлопотливого) доказательства [теорема]: параллелограмм AE у гипербол такого рода равен фигуре, ограниченной основанием GE, асимптотой GR и простирающейся до бесконечности кривой ED (5).

. . . . (6)

... Подобным же образом можно провести доказательство и для всех других случаев, и этот метод изменяет только в случае первой (или аполлониевой и простой) гиперболы в силу того единственного обстоятельства, что для нее все параллелограммы

EH, *IO*, *NM* равны между собой, и так как члены прогрессии равны между собой, то между ними нет никакой разности, а в этой разности и заключается вся сокровенная суть (mysterium) дела (7).

[Там же, с. 266]

... Столь же легко находится общее правило и для гипербол. А именно для любой гиперболы параллелограмм *BG* относится к простирающейся до бесконечности фигуре *RGED*, как разность показателей степеней ординаты (applicatae) и абсциссы (diametri) к показателю степени ординаты (8).

Примечания. Квадратурой кривых $y=x^n$, где показатель целый и положительный, Ферма владел уже около 1629 г., причем для нее он пользовался неравенствами вида $\sum\limits_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum\limits_{k=1}^{m} k^n$. Распространение этого приема на дробные и отрицательные показатели наталкивалось на непреодолимые трудности. Около 1642 г. Ферма удалось решить и эту задачу. При этом он применил метод интегральных сумм, который употребил, вероятно, и в случае натуральных показателей, но изменил технику вычислений. Теперь он опирается на суммирование убывающей геометрической прогрессии, но по-иному, чем Архимед в квадратуре параболы. Интересной особенностью приема Ферма является деление промежутка интегрирования на неравные части, образующие геометрическую прогрессию. В делении промежутка интегрирования на неравные части Ферма имел только одного предшественника, о котором, впрочем, не знал: так поступил в IX в. Сабит ибн Корра, который при квадратуре параболы разделил отрезок оси абсцисс на отрезки, пропорциональные нечетным числам 1:3:5:7: ..., так что соответствующие ординаты кривой $y^2=kx$ относятся как натуральные числа 1:2:3:4: ... Свой прием Ферма иногда называл логарифмическим, вероятно, потому, что площади гиперболы $y=\frac{1}{x}$, начиная с ординаты какой-либо точки $M(x_0, y_0)$, т. е. $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}$, растут в арифметической прогрессии $\ln q$, $2\ln q$, $3\ln q$ ..., когда абсцисса x принимает значения x_0q, x_0q^2, x_0q^3, ... О своих открытиях для случая положительного показателя Ферма письменно сообщил в 1644 г. Торичелли (который и сам пришел к тем же результатам), но метод изложил только в сочинении, завершенном после 1657 г. «De aequatione localium transmutatione ... cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus», которое увидело свет после смерти Ферма в собрании его сочинений (1679). Мы приводим отрывок, относящийся к интегрированию степенной функции вида $y=\frac{1}{x^k}$, $k>1$. Он особенно интересен, поскольку в нем с помощью двойного предельного перехода вычисляется несобственный интеграл $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^k}$.

1. Кривые $y^m x^n = a^{m+n}$ называли параболами, если $\frac{n}{m} < 0$, и гиперболами, если $\frac{n}{m} > 0$.

2. То есть показатели вида $\frac{1}{n}$.

3. Ферма поясняет свой метод на примере кривой $yx^2=\text{const}$.

4. Большой знаток греческой математики, Ферма употребляет здесь слово adaequare, как перевод термина παρισότης, примененного в 11 и 14 задачах V книги «Арифметики» Диофанта (ср. к. I, ч. I, п. 3) в смысле приближения и почти равенства.

5. Словесные рассуждения Ферма можно передать так. В прямоугольных координатах дана кривая $y=\frac{1}{x^2}$ и на ней точка $E\left(x_0, \frac{1}{x_0^2}\right)$. На горизонтальной оси берутся точки G, H, O, M, ... с абсциссами $x_0, x_0q, x_0q^2, x_0q^3, \ldots, q>1$. Тогда высоты описанных прямоугольников EH, IO, NM, ... будут $\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{x_0^2q^2}, \frac{1}{x_0^2q^4}, \ldots$, их основания $x_0(q-1)$, $x_0q(q-1)$, $x_0q^2(q-1)$, ..., а общая площадь описанной фигуры выразится суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{q-1}{x_0}+\frac{q-1}{x_0q}+\frac{q-1}{x_0q^2}+\ldots$ и равна $\frac{q}{x_0}$; $\lim\limits_{q\to 1}\frac{q}{x_0}=\frac{1}{x_0}$ равен площади параллелограмма AE; другими словами, $\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x_0}$.

6. Мы опустили аналогичное вычисление площади под кривой $y=\frac{1}{x^3}$. Очевидно, что прием Ферма без труда распространяется на любые кривые $y=\frac{1}{x^n}$. Переход к общему случаю $y^mx^n=1$ дополнительно требует несложного алгебраического преобразования.

7. В случае $y=\frac{1}{x}$ рассматриваемая площадь бесконечна, интеграл $\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x}$ расходится. Также обстоит дело в случае $y^mx^n=1$, $0<\frac{n}{m}<1$, но при этом конечной является площадь, прилегающая к другой асимптоте, оси ординат; оси как бы меняются ролями.

8. Общее правило относится к кривым $y^mx^n=1$, $\frac{n}{m}>1$. Перед тем Ферма производит квадратуру парабол, поясняя свой метод на кривых $y^2=x$ и $y^3=x^2$.

з. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИНУСА

ИЗ «ТРАКТАТА О СИНУСАХ ЧЕТВЕРТИ КРУГА» Б. ПАСКАЛЯ (1659)

[№ 73, с. 60—62; перевод А. П. Юшкевича]

Лемма. *Пусть ABC* (рис. 15) *представляет собой четверть круга, радиус AB которого будет служить осью, а перпендикулярный к нему радиус AC—основанием. Пусть D будет произвольной точкой на дуге, и из этой точки пусть будут проведены синус DI к радиусу AC и касательная DE, на которой возьмем произвольным образом точки E, и из них опустим перпендикуляры ER на радиус AC. Тогда я утверждаю, что прямоугольник*

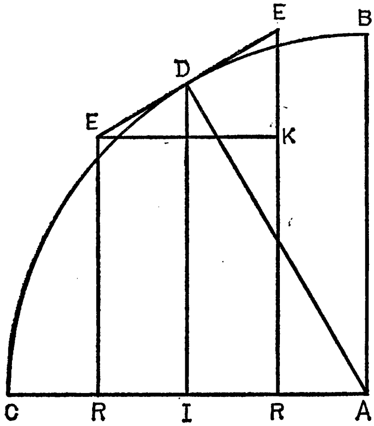


Рис. 15

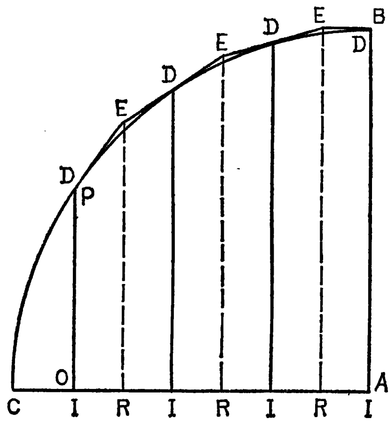


Рис. 16

на синусе DI и касательной EE равен прямоугольнику на части основания (заключающейся между параллелями) и на радиусе AB.

Действительно, радиус AD относится к синусу DI, как EE к RR или же к EK. Это явствует из прямоугольных и подобных треугольников DIA и EKE, так как угол EEK или EDI равен углу DAI (1).

Предложение I. *Сумма синусов какой-нибудь дуги четверти круга равна части основания между крайними синусами, умноженной на радиус* (2).

. . . . (3).

Доказательство предложения I. Я утверждаю, что сумма синусов DI (само собой разумеется, каждого умноженного на одну из равных дуг DD) равна прямой AO, умноженной на радиус AB (рис. 16).

Действительно, если провести во всех точках D касательные DE, каждая из которых пересекает соседнюю с ней в точке E, и опустить перпендикуляры ER, то видно, что каждый синус DI, умноженный на касательную EE, равен каждому расстоянию RR, умноженному на радиус AB. Следовательно, прямоугольники на синусах DI, каждый из которых умножен на свою касательную EE (которые все равны между собою), взятые все вместе, равны взятым вместе прямоугольникам, образованным из всех частей RR и радиуса AB, т. е. (так как одна из касательных EE служит множителем для каждого из синусов и радиус AB — множителем для каждого из отрезков) сумма синусов DI, умноженных каждый на одну из касательных EE, равна сумме расстояний RR или же AO, умноженному на AB. Но каждая касательная EE равна каждой из равных дуг DD. Следовательно, сумма синусов, умноженная на одну из малых равных дуг, равна расстоянию AO, умноженному на радиус.

Блез Паскаль

Замечание

Когда я говорю, что все расстояния RR, вместе взятые, равны AO, а также каждая касательная EE равна каждой из малых дуг DD, то не следует этому удивляться, так как достаточно хорошо известно, что хотя на деле этого равенства и не существует, если множество синусов конечно, но, тем не менее, это равенство существует, если это множество неограниченно (indéfinie). Ибо тогда сумма всех равных между собою касательных EE отличается от всей дуги BP или же от суммы всех равных дуг DD только на величину, меньшую любой заданной величины. То же самое имеет место и для суммы RR всего [отрезка] AO.

[Там же, с. 67]

Следствие. Из первого предложения следует, что сумма синус-верзусов (4) дуги равна избытку, на который дуга превосходит расстояние между крайними синусами, умноженному на радиус (5).

Я утверждаю (рис. 17), что сумма синус-верзусов DX равна избытку, на который дуга BP превосходит прямую AO, умноженному на AB.

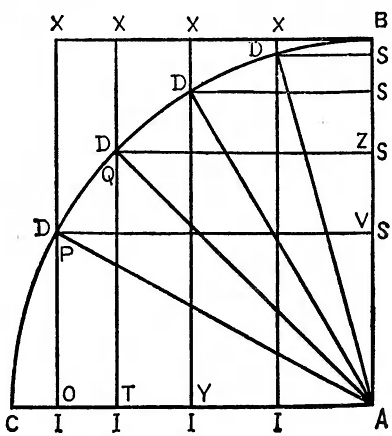


Рис. 17

Действительно, синус-верзусы — это не что иное, как избытки, на которые радиус превосходит прямые синусы. Следовательно, сумма синус-верзусов DX равна радиусу AB, взятому столько же раз, т. е. радиусу, умноженному на все малые равные дуги DD, т. е. умноженному на целую дугу BP без суммы прямых синусов DI или же без прямоугольника BA

на OA. Следовательно, сумма синус-верзусов DX равна прямоугольнику из радиуса AB и разности между дугой BP и прямой AO.

Примечания. В творчестве Б. Паскаля, как и Дж. Валлиса, сыграл большую роль метод неделимых. Однако, продолжая употреблять выражения «сумма ординат» или «сумма плоскостей» и т. п., Паскаль отошел от метода неделимых гораздо дальше, чем Валлис, и фактически оперировал интегральными суммами. В сборнике работ, среди которых был помещен и цитируемый «*Traité des sinus du quart de cercle*» (1659), паскалева концепция метода неделимых проведена последовательно, а в начале его специально сформулирована в общем виде. Когда говорят о «сумме нескончаемого множества (multitude indéfinie) линий», писал Паскаль, всегда имеют в виду некоторую прямую, на равные и неограниченно малые части которой умножаются эти линии. Мы приводим характерный в этом отношении отрывок из «Трактата», непосредственный математический результат которого, быть может, не так интересен (интегрирование синуса не было новым делом), но который сыграл большую роль в развитии исчисления бесконечно малых, оказав сильное стимулирующее влияние на Лейбница.

1. Паскаль представляет себе число делений неограниченным и стороны треугольника EKE бесконечно малыми. Тогда равенство $DI \cdot EE = AB \cdot RR$ можно записать в виде $y\,ds = r\,dx$ (1), где s — длина дуги, $AB = r$. В одном письме Э. В. фон Чирнгаузу от 1679 г. Лейбниц вспоминал, что, когда увидел чертеж Паскаля, его осенило лучом нового света; такой треугольник, составленный бесконечно малыми приращениями абсциссы, ординаты и дуги кривой, Лейбниц назвал характеристическим. При этом Лейбниц и его последователи употребляли характеристический треугольник в том виде, как он выступает на другом рисунке (с. 63). Впрочем, применение этого бесконечно малого треугольника не было изобретением Паскаля: к нему не раз прибегали уже ранее при определении касательных и в середине 50-х годов XVII в. при спрямлении кривых. Но на его чертежах характеристический треугольник выступает особенно отчетливо.

2. Из равенства (1) для нас немедленно следует $\int_{s_1}^{s_2} y\,ds = r\int_{x_1}^{x_2} dx$ (2). Если отсчитывать углы от радиуса против часовой стрелки, обозначить $\sphericalangle BAD = \varphi$ и принять $AB = 1$, то $y = \cos\varphi$, $x = \sin\varphi$, $\varphi = s$, так что I предложение Паскаля можно записать в виде $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1$. Аналогично, введя $\sphericalangle DAI = \psi$, можно получить равенство $\int_{\psi_1}^{\psi_2} \sin\psi\,d\psi = \cos\psi_1 - \cos\psi_2$.

3. В опущенном тексте Паскаль формулирует предложения, равносильные равенствам $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^n\varphi\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^{n-1}\varphi\,d\sin\varphi$ при $n = 2, 3, 4$ и т. д. или $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^n\varphi\,d\varphi = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sin^{n-1}\varphi\,d\cos\varphi$.

4. Синус-верзус на рисунке Паскаля — это отрезок DX, т. е. в наших обозначениях $r - r\cos\varphi$; прямым синусом назван отрезок ID.

5. То есть $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 - \cos\varphi)\,d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$.

и. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ

ИЗ «ГЕОМЕТРИИ» Р. ДЕКАРТА (1637)

[№ 9, с. 50—52]

Общий способ нахождения прямых линий, пересекающих данные кривые или же их касательные под прямыми углами.

Допустим, что CE—кривая линия и что требуется через точку C провести прямую, образующую с ней прямые углы. Я предполагаю, что это уже сделано и что искомая линия есть CP. Я продолжаю ее до точки P, где она встречает прямую GA, которую я считаю той прямой, к точкам которой относятся все точки линии CE; так что, положив MA или $CB \propto y$ и CM или $BA \propto x$ (рис. 18), я имею некоторое уравнение, выражающее отношение между x и y. Далее я полагаю $PC \propto s$ и $PA \propto v$ и, значит, $PM \propto v-y$; затем из прямоугольного треугольника PMC я имею, что ss, квадрат основания, равен $xx+vv-2vy+yy$, квадратам двух сторон, т. е. я имею, что $x \propto \sqrt{ss-vv+2vy-yy}$ или же $y \propto v+\sqrt{ss-xx}$. Пользуясь этим уравнением, я удаляю из уравнения, выражающего для меня отношение всех точек кривой CE к точкам прямой GA, одну из двух неопределенных величин x или y ... Таким образом, всегда получается уравнение, в котором имеется только одна неопределенная величина x или y.

Например, если CE есть эллипс, MA—отрезок его диаметра, для которого CM является сопряженной ординатой, r—его прямая сторона и q—поперечная (1), то согласно теореме 13 первой книги Аполлония имеем:

$$xx \propto ry-\frac{r}{q}yy.$$

Если отсюда удалить x, то останется:

$$ss-vv+2vy-yy \propto ry-\frac{r}{q}yy,$$

или же

$$yy+\frac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$$

равно ничему: ибо здесь лучше рассматривать все выражение вместе, чем приравнивать одну его часть другой (2).

[Там же, с. 54—56]

Найдя такое уравнение, мы вместо того, чтобы воспользоваться им для нахождения величин x или y или z, уже известных нам, поскольку известна точка C, применим его к отысканию v или s, определя-

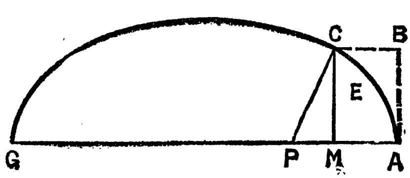


Рис. 18

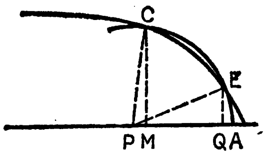


Рис. 19

ющих искомую точку P. Для этого нужно принять во внимание, что если точка P такова, как этого желают, то окружность, для которой она является центром и которая проходит через точку C, касается в ней кривой CE, не пересекая ее; но если эта точка P будет хоть немного ближе или дальше точки A, чем следует, то эта окружность пересечет кривую не только в точке C, но обязательно еще в какой-нибудь другой. Далее нужно также иметь в виду, что, когда эта окружность (рис. 19) пересекает кривую CE, уравнение, с помощью которого ищут величину x, или y, или другую, им подобную, допуская, что PA и PC известны, обязательно имеет два неравных корня. Так, например, если эта окружность пересекает кривую в точках C и E и если провести EQ параллельно CM, то названия неопределенных величин x и y будут столь же пригодны для линий EQ и QA, как и для CM и MA. Далее, в силу свойств круга PE равно PC, так что, если мы будем искать линии EQ и QA через PE и PA, которые предположим данными, то получим то же уравнение, какое получили бы, если бы искали CM и MA через PC и PA. Из этого, очевидно, вытекает, что значение x или y или другой подобной величины, принятой нами, будет в этом уравнении двояким, т. е., что будут иметься два неравных между собой корня, из которых один будет CM, а другой EQ, если мы ищем x, или же один будет MA, а другой QA, если мы ищем y, и т. д. Правда, если точка E расположена не на той же стороне кривой, что и C, то из двух корней лишь один будет истинным, другой же будет обратным или меньшим, чем ничто; но чем ближе эти две точки C и E друг к другу, тем меньше разность между этими двумя корнями и они, наконец, совершенно равны, если обе точки совпадают в одну, т. е. если круг, проходящий через точку C, касается в ней кривой CE, не пересекая ее.

Кроме того, следует принять во внимание, что, когда в уравнении есть два корня, оно обязательно имеет такой же вид, как если бы была умножена сама на себя величина, предполагаемая неизвестной, минус равная ей известная величина. Если при этом последнее выражение не будет иметь того же числа измерений, как предыдущее, то его умножают на другое выражение, имеющее недостающее ему число измерений; так что между каждым из членов одного выражения и каждым из членов другого можно будет получить свое особое уравнение.

Например, я утверждаю, что первое найденное выше уравнение, именно

$$yy+\frac{qry-2qvy+qvv-qss}{q-r},$$

должно иметь тот же вид, какой получается, если принять e равным y и умножить $y-e$ на самое себя, что дает

$$yy-2ey+ee.$$

Вследствие этого теперь можно сравнить между собой каждый из их членов в отдельности и сказать, что так как первый из них, yy, одинаков и в том и в другом уравнении, то второй, который в одном из них есть $\frac{qry-2qvy}{q-r}$, равен второму в другом, который есть $-2ey$. Если ищут величину v, представляющую собой величину линии PA (см. рис. 18), то отсюда имеют

$$v \propto e-\frac{r}{q}e-\frac{1}{2}r,$$

или же, поскольку мы приняли, что e равно v,

$$v \propto y-\frac{r}{q}y+\frac{1}{2}r.$$

И таким же образом можно было бы найти s при помощи третьего члена

$$ee \propto \frac{qvv-qss}{q-r},$$

но так как величина v достаточно определяет точку P, которую мы только и ищем, то нет нужды идти дальше (3).

[Там же, с. 58]

Мне ... хочется попутно сообщить вам, что идея введения двух одинакового вида уравнений с целью сравнить все члены одного с соответствующими членами другого и таким образом породить несколько уравнений из одного, пример чего вы здесь видели, может пригодиться в бесчисленном множестве других задач и не из последних в применяемом мною методе (4).

Примечания. Дифференциальные методы, связанные с решением задач на касательные и экстремумы, зародились также в Древней Греции, но получили здесь меньшее развитие, чем интеграционные. Регулярная разработка дифференциальных методов началась в 30-е годы XVII в., однако первым был опубликован алгебраический прием построения нормалей Декарта (1637). К проблеме нормалей Декарта привели занятия вопросом о форме линз, обладающими заданными преломляющими свойствами. Этой проблеме Декарт придавал очень большое значение и писал о ней в «Геометрии», что она является наиболее полезной и общей среди всех известных ему геометрических задач.

Метод нормалей Декарта, которым он владел уже в 1629 г., опирается на понятие о кратных корнях уравнений и в конечном счете—на представление, что касательная есть секущая с двумя или более слившимися точками пересечения с кривой, а также на изобретенный им метод неопределенных коэффициентов. Идея такова: если PC есть нормаль к кривой CE с уравнением $f(x, y)=0$ в точке $C(a, b)$ и нормаль пересекает ось абсцисс в точке $P(c, o)$, то окружность радиуса PC с центром в P имеет в точке C общую касательную с кривой CE. Поэтому уравнение, возникающее при исключении из уравнений $f(x, y)=0$ и $(x-c)^2+y^2=(a-c)^2+b^2$ одной из координат, должно иметь по крайней мере двойной корень. Если, скажем, после исключения y получается уравнение $F(x)=0$, то многочлен $F(x)$ может быть тождественно представлен в виде $F(x)\equiv(x-a)^2\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-2}\alpha_k x^k$, где α_k — неопределенные коэффициенты; после чего приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает уравнения для вычисления всех α_k и искомого значения c. В тексте Декарта несколько иные обозначения, ось ординат горизонтальна, а ось абсцисс не начерчена. Заметим, что целью Декарта является построение нормали; уравнение ее ему не требуется.

1. О терминах прямая и поперечная сторона см. примечания 8 и 12 в к. I, ч. III, п. 5, а. Напомним, что знак ∞ выражал у Декарта р а в е н с т в о.

2. Выгоду, доставляемую записью алгебраических уравнений в виде $y=f(x)$, Декарт еще раз подчеркнул в начале третьей, алгебраической части «Геометрии» (см. примечание 7 в к. I, ч. I, п. 7, б).

3. Применение метода Декарта упрощается, если определять не нормали, а касательные (зависимость между координатами которых линейная), и именно так поступил во 2-м издании латинском «Геометрии» (1659) Ф. ван Схоотен; впрочем, это было ясно и Декарту. Метод Декарта стимулировал важные исследования, в частности, И. Гудде, давшего в том же издании «Геометрии» общий прием отыскания кратных корней алгебраических уравнений любой степени и др. Однако применение метода Декарта принципиально ограничено в системе прямолинейных координат алгебраическими кривыми и даже для них оказывается весьма сложным. Вскоре алгебраический метод был вытеснен более гибким аналитическим приемом, хотя его еще долго продолжали излагать в учебниках аналитической геометрии, когда желали при определении касательных к коническим сечениям обойтись без дифференциального исчисления.

4. Декарт применил метод неопределенных коэффициентов, по-видимому, также в своем новом решении уравнения 4-й степени. Широкое употребление этого метода в анализе началось с Ньютона и Лейбница.

к. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ЭКСТРЕМУМОВ И КАСАТЕЛЬНЫХ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ П. ФЕРМА «МЕТОД ОТЫСКАНИЯ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ» (около 1637 г., опубл. в 1679 г.)

[№ 9, с. 154—155]

Все учение о нахождении наибольших и наименьших значений основывается на том, что принимают две буквенные неизвестные (1) и применяют следующее единственное правило:

Допустим, что A представляет собой какую-либо неизвестную в вопросе величину (поверхность либо тело, или же длину в соответствии с предложенным), и выразим максимум или минимум через члены, содержащие A в каких-либо степенях. Затем возьмем для первоначальной неизвестной значение $A+E$ и снова выразим максимум или минимум через члены, содержащие A и E в каких-либо степенях. Затем оба выражения для наибольшего или наименьшего значения приравняем, как говорил Диофант, друг другу (2) и отбросим общие члены (после чего в каждом члене на обеих сторонах будет стоять либо E, либо какая-нибудь его степень). Затем разделим все члены на E или же на высшую степень ее так, чтобы (по крайней мере) один из членов на какой-либо стороне был совершенно свободен от E. Затем на обеих сторонах отбросим члены, содержащие E или ее степени, а то, что останется, положим равным друг другу или же, если на одной из сторон ничего не останется, то — что сводится к тому же — положим отрицательные члены равными положительным. Решение последнего уравнения даст значение A; когда же последнее известно, то максимум или минимум получится на основании ранее проделанного решения (3).

Рис. 20

Приведем следующий пример: *прямую АС требуется так разделить в Е, чтобы прямоугольник АЕС был наибольшим.*

Прямую AC (рис. 20) назовем B. Одну часть B назовем A, так что другая будет $B—A$, а прямоугольник на отрезках, для которого требуется найти наибольшее значение, будет B на $A—Aq$. Положим теперь, с другой стороны, одну часть B равной $A+E$, так что другая будет $B—A—E$, и прямоугольник на отрезках будет B на $A—Aq.+B$ на E—два A на $E—Eq.$, что должно быть приравнено первому прямоугольнику B на $A—Aq$. Отбросив одинаковые члены, получим, что B на E равняется два A на $E+Eq$, а если все поделить на E, то получится, что B равняется два $A+E$. Если отбросить E, то B будет равно два A. Таким образом, решением вопроса является деление B пополам. И более общий метод привести невозможно.

О касательных к кривым линиям

Отыскание касательных в данных точках каких-либо кривых мы приводим к вышеизложенному методу (4).

ИЗ ЗАПИСКИ «МЕТОД НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ, РАЗЪЯСНЕННЫЙ И ПОСЛАННЫЙ Г. ФЕРМА Г. ДЕКАРТУ» (1638)

[№ 9, с. 172—173]

Общий метод нахождения касательных к кривым заслуживает того, чтобы объяснить его более ясно, чем это было сделано до сих пор.

Пусть дана кривая ZCA (рис. 21) с диаметром CB. Пусть на кривой дана также точка A, из которой к диаметру проведена ордината AB. Требуется найти касательную AD, которая встречается с продолженным диаметром в точке D.

Линии AB и BC даны; допустим, что BA называется B и что BC называется D. Допустим, что искомая линия BD называется A (5). Возьмем на касательной произвольную точку, вроде E, из которой проведем EF параллельно AB, и допустим, что линия BF есть E.

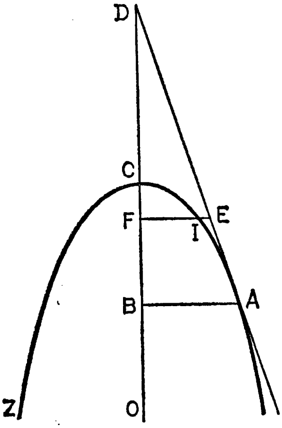


Рис. 21

Следовательно, CF будет $D-E$, FE будет $\frac{B \text{ на } A - B \text{ на } E}{A}$, и, какова бы ни была природа кривой, мы всегда будем давать линиям CF и FE те же названия, которые им дали сейчас.

Теперь ясно, что точка E линии EF, находящаяся на касательной, будет вне кривой, и, следовательно, линия EF будет больше или меньше ординаты, прилагающейся к кривой в точке F: больше, когда кривая выпуклая наружу, как в этом примере, и меньше, когда кривая выпуклая внутрь; ибо правило годится для всякого рода линий, и даже определяет в соответствии со свойством кривой, в какую сторону она обращена выпуклостью. Хотя линия FE не равна ординате, проведенной к кривой из точки F, я тем не менее принимаю ее как бы равной на самом деле ординате, затем сравниваю ее путем приравнивания с линией FI, в соответствии со специфическим свойством кривой...

Сделав это, я удаляю общие вещи и делю остаток на E. Я отбрасываю все, что остается в соединении с E, и приравниваю остальное и, таким образом, из этого последнего уравнения я узнаю значение A, а следовательно, линию BD и касательную (6).

Примечания. Одновременно или почти одновременно с тем, как Декарт придумал свой алгебраический метод нормалей, т. е. около 1629 г., Ферма изобрел прием отыскания экстремумов, формулировка которого, относящаяся к целым рациональным функциям, имеет также алгебраический характер, но который по существу является дифференциальным. Сходный алгоритм Ферма применил к определению касательных. Познакомившись с «Геометрией» Декарта, Ферма не позднее начала 1638 г. или конца 1637 г. переслал краткое письменное изложение своего метода Декарту и Робервалю и вскоре этот метод получил более широкую известность. В печати сведения о методе Ферма появились в курсе математики П. Эригона (1644), собственное изложение Ферма было напечатано под названием «Methodus ad disquerendam maximam et minimam» лишь в собрании его сочинений 1679 г.

1. Неизвестную или переменную величину Ферма называет здесь, подобно Кардано, positio — положение, добавляя: in notis, т. е. «в буквенных знаках». Напомним, что Ферма пользовался алгебраической символикой Виета (см. к. I, ч. I, п. 7, а).

2. О «приравнивании» по Диофанту см. выше 4 примечание к п. 3, ж.

3. Итак, Ферма приравнивает нулю выражение, которое получается, если в частном $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ отбросить все члены, содержащие множителем h или его высшие степени. Это равносильно необходимому условию экстремума дифференцируемой функции $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = 0$. Однако Ферма ничего не говорит здесь ни о предельном переходе, ни о бесконечно малых; впоследствии многие математики полагали, что он понимал здесь h или E, как своего

рода актуальную бесконечно малую, отбрасывание которой не нарушает справедливости равенства. В действительности, в этом случае, как и при квадратурах, Ферма был близок к идеям метода исчерпывания и вместе с тем к классическому анализу XIX в.: он оперировал потенциально бесконечно малыми. По своей идее доказательство правила, которое он провел на конкретном примере в одном письме к Бриляру де Сен-Мартену от 1643 г., сходно с современным: он располагает разности $f(x+\Delta x)-f(x)$ и $f(x-\Delta x)-f(x)$ по степеням Δx и показывает, что в случае экстремума в точке $x=x_0$ коэффициент при Δx должен быть равен нулю; более того, он связывает характер экстремума со знаком коэффициента при $(\Delta x)^2$ (если он не равен нулю), т. е. со знаком второй производной. Содержание этого письма Ферма осталось, по-видимому, никому, кроме адресата, неизвестным, и оно увидело свет лишь в XX в. [№ 60 дополн. том, с. 123—125]. Вывод условий экстремума, основанный на разложении функций в ряд Тейлора, предложили К. Маклорен (1742) и Л. Эйлер (1755); затем он был уточнен с привлечением остаточного члена формулы Тейлора (ср. далее п. 8, в). Ферма нашел также правило отыскания экстремумов неявных алгебраических функций, а в случае иррациональных функций предварительно избавлялся от радикалов.

То обстоятельство, что близ экстремума скорость изменения величины становится нулевой, отметили — в других выражениях — еще Н. Орем и И. Кеплер.

4. Далее Ферма показывает, как найти отрезок подкасательной на примере параболы. Говоря о приведении этой задачи к «вышеизложенному методу», Ферма имел в виду только процедуру «приравнивания» по Диофанту. Декарт понял эти слова по-иному, что повлекло за собой письменную полемику, в которой приняло участие еще несколько ученых. Мы приводим общую формулировку правила нахождения подкасательной, которую Ферма дал в записке, посланной Декарту через М. Мерсенна в июне 1638 г.

5. Читатель заметит неудобства алгебраической символики Виета, в которой величины обозначались теми же прописными буквами, какими принято было обозначать точки на чертеже.

6. Если ввести обозначения $CB=x$, $BA=y$, $CF=x-\Delta x$, $FI=y-\Delta y$, $DB=t$, то прием Ферма состоит в том, что в равенстве $\frac{FE}{BA}=\frac{DF}{DB}$, т. е. $\frac{FE}{y}=\frac{t-\Delta x}{t}$, он «приравнивает» FE и FI, т. е. составляет равенство $\frac{y-\Delta y}{y}=\frac{t-\Delta x}{t}$ или же $t=y:\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и затем, в согласии с уравнением кривой, вычисляет подкасательную, откидывая в $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ члены, содержащие Δx. Таким образом, его правило равносильно нашему выражению подкасательной $t=y:\frac{dy}{dx}$. Попутно Ферма замечает, что умеет определять направление выпуклости кривой. Обоснование правила отсутствует, но его можно провести на основании некоторых замечаний самого Ферма. Если взять ординату $F'E''$ справа от AB, симметричную с FE, то значение подкасательной можно оценить с помощью точных неравенств вида $y\frac{\Delta x}{\Delta y}<t<y\frac{\Delta x}{\Delta' y}$; при этом касательная в некоторой точке кривой рассматривается как прямая, по отношению к которой кривая в ее окрестности лежит с одной стороны. Впоследствии Ферма рассматривал и касательные в точке перегиба. Для примера Ферма находит подкасательную для кривой, заданной уравнением вида $f(x, y)=0$, именно для декартова листа $x^3+y^3=axy$, по правилу $t\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Правило нахождения касательной формулировалось затем в различных вариантах многими учеными, причем получил явное применение и характеристический треугольник, которого на чертежах Ферма нет. Современное выражение подкасательной в печати привел Г. Ф. Лопиталь (см., далее, отрывок п. 6, д).

л. СВЯЗЬ МЕЖДУ КВАДРАТУРАМИ КРИВЫХ И ПОСТРОЕНИЕМ КАСАТЕЛЬНЫХ

ИЗ «ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЛЕКЦИЙ, В КОТОРЫХ В ОСОБЕННОСТИ ОБЪЯСНЯЮТСЯ ОБЩИЕ СИМПТОМЫ КРИВЫХ» И. БАРРОУ (1670)

[№ 47, с. 78; перевод А. П. Юшкевича]

XI. Допустим, что ZGE представляет собой какую-либо линию с осью VD (рис. 22). Пусть сперва восстановленные к последней перпендикулярны (VZ, PG, DE), начиная от первого VZ, как-либо непрерывно (continuè) возрастают. Далее, пусть линия VIF будет такова, что всякий раз, когда мы проведем перпендикулярно к VD какую-либо прямую EDF (пересекающую кривые в точках E и F, а VD в точке D), прямоугольник на DF и какой-либо данной [прямой] R будет равен отсекаемой всякий раз части площади $VDEZ$. Кроме того, пусть будет $DE.DF::R.DT$ (1). Тогда, если провести прямую TF, она будет касаться кривой VIF.

Действительно, если на линии VIF взять какую-либо точку I (и притом сперва ниже точки F по направлению к началу V) и провести через нее прямые — IG, параллельную VZ, и KI, параллельную VD (которые пересекают данные линии, как это видно), то $LF.LK::(DF.DT)::DE.R$, или же $LF\times R=LK\times DE$. Но (в соответствии с условленными свойствами этих линий) $LF\times R$ равно площади $PDEG$; следовательно, $LK\times DE=PDEG \sqsupset DP\times DE$ (2). Поэтому $LK \sqsupset DP$ или $LK \sqsupset LI$.

Теперь возьмем какую-либо точку I над точкой F, а все остальное проделаем, как выше. Тогда путем совершенно аналогичных рассуждений получится, что $LK\times DE=PDEG \sqsubset DP\times DE$ и, значит, $LK \sqsubset DP$ или же чем LI. Из этого же явствует, что прямая $TKFK$ находится внутри (или же вовне) кривой $VIFI$.

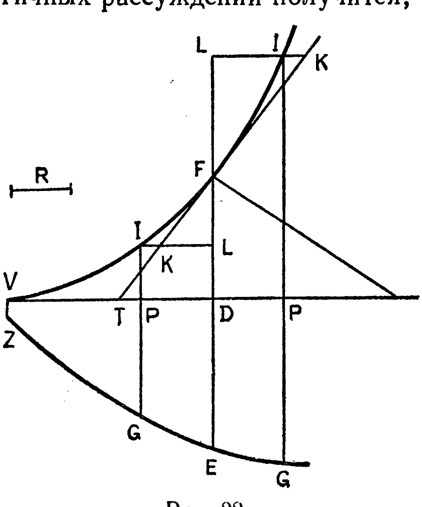


Рис. 22

Если все останется, как раньше, но ординаты (ordinatae) VZ, PG, DE и т. д. непрестанно уменьшаются, то подобными же умозаключениями мы придем к тому же самому выводу. Единственное различие будет состоять в том, что (в противоположность предшествующему) линия VIF будет обращена к оси VD своей вогнутостью (3).

Следствие. Заметим, что $DE\times DT$ равно площади $VDEZ$.

[Там же, с. 90]

XIX. Далее, допустим, что AMB представляет собой какую-либо кривую с осью AD (рис. 23) и что BD перпендикулярна к последней; кроме того, пусть линия KZL будет такова, что если взять на кривой AB какую-нибудь точку M и провести через нее прямую MT, касающуюся кривой AB, и затем провести прямую MFZ параллельно DB (которая пересекает линию KL в Z, а прямую DA в F) и взять некоторую линию R, то $TF.FM::R.FZ$. Тогда площадь $ADLK$ равна прямоугольнику на R и DB.

Исаак Барроу

Действительно, допустим, что $DH=R$, и построим прямоугольник $BDHI$. Затем возьмем на кривой AB неограниченно (indefinitè) малый отрезочек MN и проведем NG параллельно BD и MEX и NOS параллельно AD.

Тогда $NO.MO::TF.FM::R.FZ$, или же $NO\times FZ=MO\times R$, т. е. $FG\times FZ=ES\times EX$. Но так как все прямоугольники FG FZ отличаются от площади $ADLK$ сколь угодно мало (minimè) и все соответствующие прямоугольники $ES\times EX$ образуют прямоугольник $DHIB$, то утверждение достаточно ясно (4).

Примечания. Для нас взаимообратный характер дифференцирования и интегрирования, как отыскания первообразных, непосредственно вытекает из определения этих операций, а теорема о дифференцировании определенного интеграла по верхнему пределу устанавливает связь между дифференцированием и квадратурой площадей. Первоначально эти связи были выражены в геометрической форме как зависимость между задачами на квадратуры и на касательные или же в механической интерпретации. Это было по-разному сделано Э. Торичелли, П.Менголи, Дж. Грегори и И. Барроу. Мы приводим соответствующие тексты из X и XI лекций труда И. Барроу «Lectiones geometricae; in quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur» (1670) главным образом с целью показать, как выражали упомянутую зависимость до Ньютона и Лейбница и какой гигантский шаг вперед в смысле упрощения понятий и уяснения всей структуры

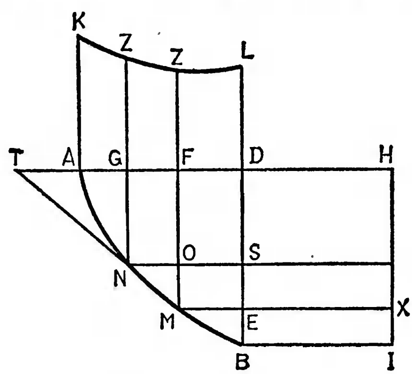


Рис. 23

анализа был сделан ими обоими (см. далее отрывки п. 5 и п. 6). Лекции Барроу содержали не мало интересных конкретных результатов, но по форме изложения были обращены более к прошлому, чем к будущему: ко времени их издания уже получили некоторую известность основоположные открытия Ньютона, а Лейбниц приступил к разработке дифференциального и интегрального исчисления несколько лет спустя. Впрочем, «Лекции» Барроу оказали некоторое влияние на Лейбница. Название книги Барроу «Лекции» не должно ввести современного читателя в заблуждение: значительная часть излагаемых в них вопросов и, в частности, рассматриваемые сейчас нами не входили тогда в программы университетских курсов. Взаимно обратную связь дифференцирования Барроу сперва доказывает кинематически, примыкая к Торичелли, а затем в геометрической форме, мы ограничиваемся последней.

1. Здесь форма записи $DE.DF::R.DT$, заимствованная у У. Отреда (1631), означает пропорцию $DE:DF=R:DT$ (такую форму записи предложил в 1696 г. Лейбниц).

2. Знаки $\rceil$ и $\lfloor$, также принадлежащие Отреду, означают «меньше чем» и «больше чем» (знаки $<$ и $>$ ввел Т. Гарриот, опубл. в 1631 г.).

3. Обозначив $VD=x$, $DF=y$, $DE=z$ и приняв $R=1$, теорему Барроу можно высказать так: если $y=\int\limits_0^x z\,dx$, то подкасательная $DT=t$ кривой VIF равна $y:z$, т. е. квадратура нижней кривой позволяет строить касательную к верхней, и наоборот. Или же: если $y=\int\limits_0^x z\,dx$, то $dy=z\,dx$. Этот результат содержится в равенстве $LF=$ пл. $PDEG$, если мыслить треугольник KLF бесконечно малым и криволинейную трапецию $PDEG$ прямоугольной (что вполне соответствует общему подходу Барроу к инфинитезимальным задачам). Чертеж для случая убывающих координат мы опускаем.

4. В этой теореме зависимость между дифференцированием и интегрированием доказывается в обратном порядке, причем теперь Барроу для простоты сразу рассматривает бесконечно малый характеристический треугольник NOM.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В XVII—XIX вв.

а. ВВЕДЕНИЕ ТЕРМИНА «ФУНКЦИЯ»

ИЗ СТАТЬИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА «РАССУЖДЕНИЯ О РАЗЛИЧИИ МЕЖДУ ОБЫКНОВЕННЫМ АНАЛИЗОМ И НОВЫМ ИСЧИСЛЕНИЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ» (1694)

[№ 23, с. 180]

... Вот более общая задача... Допустим, что дано отношение, скажем, m к n каких-либо двух функций линий ACC; найти линию. Я называю *функциями* (fonctions) всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой, каковы: абсцисса

AB или $A\beta$ (рис. 24), ордината BC или βC, хорда AC, касательная CT или $C\vartheta$ нормаль (perpendiculaire) CP или $C\pi$, подкасательная BT или $B\vartheta$, поднормаль BP или $\beta\pi$, resecta или отсекаемая касательной AT или $A\vartheta$, отсекаемая нормалью AP или $A\pi$ ... и бесконечное множество других, какие можно себе представить и построение которых более сложно... (1).

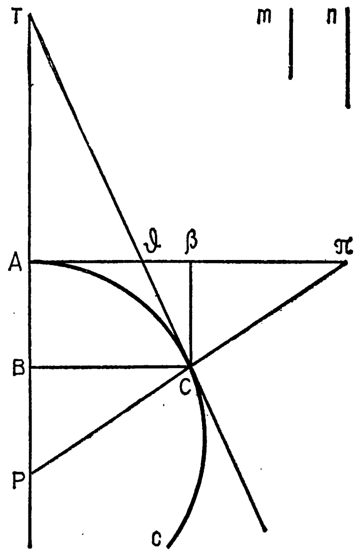


Рис. 24

6. ФУНКЦИЯ КАК АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ

ИЗ СТАТЬИ И. БЕРНУЛЛИ «ЗАМЕЧАНИЯ О ТОМ, ЧТО БЫЛО ДО СИХ ПОР СДЕЛАНО В РЕШЕНИИ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ» (1718)

[№ 51, т. I, с. 241]

Определение. *Функцией* переменной величины здесь называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных (2).

ИЗ I Т. «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» Л. ЭЙЛЕРА (1748)

[№ 40, с. 19]

... Весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций.

[Там же, с. 23—25]

1. Постоянное количество есть количество определенное, сохраняющее всегда одно и то же значение.

. . . .

2. Переменное количество есть количество неопределенное или всеобщее, которое содержит в себе решительно все определенные значения.

. . . .

3. ... Смысл переменного количества не будет исчерпан, если на его место не подставить все определенные значения. Таким образом, переменное количество охватывает собою решительно все числа, как положительные, так и отрицательные, как целые, так и дробные, как рациональные, так и иррациональные и трансцендентные. Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменного количества.

4. Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств (3).

Всякое аналитическое выражение, в котором, за исключением переменного количества z, все количества, составляющие это выражение, постоянны, будет функцией z; так,

$$a+3z, \quad az-4z^2, \quad az+b\sqrt{a^2-z^2}, \quad c^z$$

и т. д. будут функциями z.

5. Следовательно, функция переменного количества сама будет переменным количеством.

Так как вместо переменного количества можно подставлять все определенные значения, то функция принимает бесчисленно много определенных значений; не будет исключено ни одно определенное значение, какое функция могла бы принять, поскольку переменное количество охватывает также и мнимые значения. Так, хотя функция $\sqrt{9-z^2}$ при подстановке вместо z действительных чисел никогда не может принять значение больше трех, однако если давать z мнимые значения, как, например, $5\sqrt{-1}$, то нельзя указать никакого определенного значения, которое не могло бы быть получено из формулы $\sqrt{9-z^2}$ (4). Иногда, однако, встречаются функции только кажущиеся, которые удерживают всегда одно и то же значение, как бы ни изменялось переменное количество, как, например,

$$z^0, \ 1^z, \ \frac{a^2-az}{a-z};$$

они хотя ложным образом представляются на вид функциями, однако на самом деле являются количествами постоянными (5).

6. Основное различие функций состоит в способе составления их из переменного количества и количеств постоянных.

Оно, следовательно, зависит от действий, посредством которых количества могут друг с другом сочетаться и перемешиваться; действиями этими являются: сложение и вычитание, умножение и деление, возвышение в степень и извлечение корней; сюда надлежит отнести также решение уравнений. Кроме этих действий, называемых обычно алгебраическими, существует много других, трансцендентных, как-то: показательные, логарифмические и бесчисленные другие, доставляемые интегральным исчислением (6).

в. ФУНКЦИЯ И СТЕПЕННОЙ РЯД

ИЗ I Т. «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» Л. ЭЙЛЕРА (1748)

[№ 40, с. 67]

59. ... Как природа целой функции видна лучше всего, если эта функция разложена по различным степеням z, т. е. если она приведена к форме $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ и т. д., так эта же форма кажется наиболее удобной для восприятия разумом природных свойств всех остальных функций, если даже число членов окажется в действительности бесконечным. Ясно, что никакую нецелую функцию переменного z нельзя выразить конечным числом членов вида

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+ \qquad \text{и т. д.,}$$

потому что тогда функция была бы целой; если же кто-либо сомневается, что можно выразить функцию посредством бесконечного ряда членов подобного рода, то это сомнение устранится самим разложением той или иной функции. Но для большей общности этого утверждения следует допустить, кроме степеней переменного z с целыми положительными показателями, еще какие угодно степени. В таком случае не будет никакого сомнения в том, что всякая функция z может быть преобразована в такое бесконечное выражение:

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+ \qquad \text{и т. д.,}$$

где показатели α, β, γ, δ и т. д. обозначают любые числа (7).

г. «НЕПРАВИЛЬНЫЕ» КРИВЫЕ И ФУНКЦИИ

ИЗ II Т. «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» Л. ЭЙЛЕРА (1748)

[№ 40, с. 21]

9. Из вышеизложенного представления о кривых линиях тотчас же следует их деление на *непрерывные* и *прерывные* или *смешанные*. А именно *непрерывная* линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x. Но если кривая линия построена таким образом, что различные части ее ... выражаются с помощью различных функций x ..., то этого рода кривые линии мы будем называть прерывными или *смешанными* и *неправильными*, так как они не образуются на основе единого неизменного закона, а составляются из частей различных непрерывных кривых (8).

ИЗ III Т. «ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ» Л. ЭЙЛЕРА (1770)

[№ 42, с. 28—29]

37. ... Особенная сила интеграций, рассматриваемых в данной книге, в том и состоит, что при них могут встречаться и разрывные функции; так что надо полагать, что благодаря этому существенно новому исчислению границы анализа значительно расширяются...

38. ... природа задачи всегда дает возможность определить ту произвольную функцию, которая появляется в результате интегрирования. Так, если известна форма натянутой струны и мы ее внезапно отпускаем, ... то с помощью принципов механики можно определить форму струны в любой момент времени, а выполняется это при помощи некоторого интегрирования, в связи с которым появляется некоторая произвольная функция; а последнюю надо определить так, чтобы получалась в начальный момент движения заданная форма струны. А так как решение должно быть общим и отвечать любой начальной форме, то необходимо, чтобы оно было пригодно и в тех случаях, когда струна вначале имеет совершенно неправильную форму и не удовлетворяет никаким условиям непрерывности, что было бы невозможно, если бы при интегрировании не вводились бы такие находящиеся в нашем произволе функции, что дают возможность приспособиться даже к неправильным формам.

д. ФУНКЦИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

ИЗ ПИСЬМА Д. БЕРНУЛЛИ Л. ЭЙЛЕРУ (ранее 25 апреля 1754 г.)

[№ 55, с. 654; перевод А. П. Юшкевича]

Мы доказали, что всякая кривая, выраженная уравнением

$$y=\alpha\sin\frac{\pi x}{a}+\beta\sin\frac{2\pi x}{a}+\gamma\sin\frac{3\pi x}{a}+ \text{ и т. д.,}$$

удовлетворяет условию вопроса (9). Но нельзя ли сказать, что это уравнение охватывает все возможные кривые; нельзя ли, используя произвол количеств α, β, γ и т. д., провести кривую через сколько угодно данных точек? Разве уравнение такой природы менее общее, чем неопределенное уравнение

$$y=\alpha x+\beta xx+\gamma x^3+\text{и т. д.?}$$

... Итак, я говорю, что для решения вашей задачи: *найти последующее движение по данной какой-либо начальной фигуре*, следует определить количества α, β, γ, отождествляющие данную кривую с нашим неопределенным уравнением, и тотчас получатся частные изохронные колебания, из которых составится искомое движение.

ИЗ ПИСЬМА Д. БЕРНУЛЛИ ИОГАННУ III БЕРНУЛЛИ (от 25 июля) 1765 г.

[№ 77, с. 278]

Мой метод мне все более и более представляется общим, но лишь *потенциально*, ибо я согласен, что определение моих коэффициентов чаще всего окажется вне пределов анализа, или лучше вне его возможностей (10).

е. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ В КЛАССИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

ИЗ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ» Л. ЭЙЛЕРА (1755)

[№ 41, с. 38]

Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, ... все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями (11).

ИЗ СТАТЬИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО «ОБ ИСЧЕЗАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СТРОК» (1834)

[№ 24, т. 5, с. 43—44]

Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Кажется, нельзя сомневаться ни в истине того, что все в мире может быть представлено числами; ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражается аналитической функцией. Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе (12).

ИЗ СТАТЬИ П. ЛЕЖЕН-ДИРИХЛЕ «О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СОВЕРШЕННО ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПО СИНУСАМ И КОСИНУСАМ» (1837)

[№ 66, с. 133—124; перевод Ф. А. Медведева]

Будем понимать под a и b два фиксированных значения, а под x — переменную величину, принимающую все значения, расположенные между a и b. Если теперь каждому x соответствует одно-единственное конечное y и притом так, что когда x непрерывно пробегает интервал от a до b, $y=f(x)$ также постепенно (allmählich) изменяется, то y называется непрерывной (stetige oder continuirliche)[1] функцией от x для этого интервала. При этом совсем не обязательно, чтобы y на всем этом интервале зависела от x по одному и тому же закону, а также не обязательно представлять себе ее в виде зависимости, выраженной при помощи математических операций. Представленная геометрически (т. е. если мыслить x и y как абсциссу и ординату), непрерывная функция оказывается связной кривой, на которой всякой содержащейся между a и b абсциссе соответствует только одна точка. Это определение не приписывает какого-либо закона отдельным частям кривой; она может быть составлена из различного рода частей или же может быть мыслима совсем лишенной какого-либо закона... Если функция определена только для одной части интервала, то способ ее продолжения на остающийся интервал оказывается совершенно произвольным (**13**).

ИЗ «ИССЛЕДОВАНИЙ О БЕСКОНЕЧНО ЧАСТО КОЛЕБЛЮЩИХСЯ И РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ» Г. ГАНКЕЛЯ (1870)

[№ 63, с. 49; перевод А. П. Юшкевича]

y называется функцией x, если каждому значению переменной величины x внутри некоторого данного интервала соответствует определенное значение y; при этом безразлично, зависит ли y от x во всем интервале по одному и тому же закону или нет, или же может или не может быть эта зависимость выражена с помощью математических действий.

Это чисто номинальное определение, которое я в последующем буду называть по имени Дирихле... недостаточно, однако, для потребностей анализа, ибо функции такого рода не обладают какими-либо общими свойствами и тем самым все связи между значениями функции для различных значений аргумента отпадают (**14**).

ИЗ СТАТЬИ Э. БОРЕЛЯ «ИСЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ» (1912)

[№ 52, с. 159; перевод А. П. Юшкевича]

Результаты, полученные с конца XIX в., в избытке доказали, насколько упрощенным было мнение, что можно ограничить область математики изучением определенной категории

---

[1] Так как в последующем речь будет идти только о непрерывных функциях, то это прилагательное можно без ущерба опускать.

функций: непрерывных, дифференцируемых, аналитических и т. д. Для того чтобы такое ограничение не было одновременно произвольным и тщетным, нужно было бы, в самом деле, быть уверенным в его инвариантности по крайней мере относительно определенной категории аналитических преобразований. Но если нет оснований утверждать, что такое ограничение всегда останется невозможным, нужно признать, что при нынешнем состоянии науки его близкое осуществление мало правдоподобно. Такое осуществление потребовало бы, среди прочего, глубокого исследования с арифметической точки зрения всех иррациональных чисел, какие можно вводить в алгебру и анализ, а такое исследование едва намечено... В другом порядке идей г. Лебег извлек из рассмотрения десятичных разложений иррациональных чисел самого общего характера почти парадоксальные следствия; в частности, он вывел отсюда определение функции, никоим образом не представимой аналитически (15).

Эта почти-невозможность установить точное разграничение между аналитическими объектами, рассматриваемыми как «простые», и другими положила начало работам, значительно обогатившим наши знания в области анализа. Работы эти были необходимы; но они не во всех пунктах окончательные, и, на мой взгляд, было бы полезно заняться тем, что можно было бы назвать *патологией функций*. Дозволительно думать, что окончательной целью этих *патологических* исследований должно быть выделение функций, которые можно рассматривать как *здоровые*. И здесь мы наталкиваемся на трудности, далекие от того, чтобы быть решенными (16).

Примечания. Переменные величины и функции фактически применялись в математике в древности, задолго до того, как были выделены их общие понятия. Решающее значение в развитии математических наук имело то обстоятельство, что в XVII в. функции стали главным предметом исследования; это была определяющая особенность революции, происходившей тогда в математике. Впервые с полной отчетливостью переменные величины выступили на первый план у Декарта и Ферма. «Поворотным пунктом в математике,— писал Ф. Энгельс,— была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*» [№ 11, с. 224]. Прежде всего был глубже исследован класс целых рациональных, а затем иррациональных функций, к которым затем во все большем количестве стали добавляться различные виды трансцендентных. В последующем понятие функции существенно эволюционировало. Мы приводим подборку различных определений функции (как правило, одного переменного), начиная с первого появления этого термина в печати и вплоть до формулировок, предложенных в XIX в., и с небольшими изменениями, встречающимися в учебниках нашего времени.

1. Это первое определение термина функции, данное Лейбницем в статье «Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes», 1694 г. Слово «функция» происходит от латинского глагола fungi (fungor, functus sum) — выполнять, выражать, осуществлять и т. п. Лейбниц применил его уже в рукописях 1673 г. при решении задач на обратный метод касательных, т. е. задач об отыскании кривых по свойствам касательной. При этом он писал о линиях (отрезках), выполняющих

некоторую функцию по отношению к кривой, как подкасательная и др. Зависимость, выражаемую уравнением какой-либо кривой, Лейбниц называл здесь relatio — соотношение; этим словом пользовались тогда нередко. В печати термин functio появляется впервые, но мимоходом, в одной статье Лейбница 1692 г., в том же смысле, что в 1694 г. (в той же статье 1692 г. были введены термины постоянная, параметр, переменная и еще другие). На первых порах этот термин имел, таким образом, значение величины любого отрезка, определенным образом связанного с кривой в ее точке, включая отрезок абсциссы; это как бы геометрическая функция точки. Но анализ нуждался в термине для обозначения выражений, как-либо образованных из независимой переменной и постоянных, и уже в 1696—1698 гг. слово «функция» применяется в переписке между Лейбницем и И. Бернулли в этом понимании, причем для обозначения произвольных функций вводятся специальные знаки, вроде X или $\overset{1}{X}$, $\overset{2}{X}$, ... для функций x (предложение И. Бернулли). В таком же смысле стал пользоваться словом «функция» и Я. Бернулли. О трактовке переменных и функций Ньютоном (см. далее отрывки п. 5); термином «функция» он не пользовался.

2. Наиболее распространенным в XVII—XVIII вв. было понимание функции как выражения, образованного из переменной и постоянных с помощью тех или иных аналитических операций, круг которых со временем становился все более широким. В печати такого рода определение дал И. Бернулли в статье «Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres» (1718). В этой статье характеристика функции иногда обозначается буквой φ; при этом аргумент x приписывается без скобок, как потом поступали и другие математики XVIII и начала XIX в. Скобки ставились только при необходимости, например если аргумент двучленный, вроде $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$, — это пример из статьи Эйлера, в которой впервые в качестве знака функции берется буква f (1734—1735 гг.; опубл. в 1740 г.).

3. Определение Эйлера отличается от данного И. Бернулли явным употреблением слов «аналитическое выражение», содержание которых раскрывается в п. 6, а также тем, что, как Эйлер специально разъясняет в п. 3, оно охватывает и функции мнимого комплексного переменного.

4. При задании функции аналитическим выражением математики XVIII в. обыкновенно считали, что оно определяет функцию для всех значений аргумента (ср. далее 8-е примечание).

5. Эйлер еще не считал целесообразным включать в понятие переменной величины и постоянные.

6. Здесь Эйлер полнее раскрывает, что понимает под аналитическим выражением. Далее он приводит классификацию функций, ставшую общепринятой в учебниках математического анализа.

7. Заявляя, что любая функция анализа представима рядом по целым положительным степеням аргумента или, в крайнем случае, обобщенным степенным рядом, содержащим дробные и отрицательные степени, Эйлер отражал общую точку зрения математиков, начиная с Ньютона. Таким образом, Эйлер здесь отождествляет функции, возникающие в результате перечисленных им в п. 6 операций, с классом функций, впоследствии названных аналитическими (за исключением отдельных изолированных точек). Впрочем, Эйлеру были давно известны функции, вроде $y=(-1)^x$, не являющиеся аналитическими. Такие парадоксальные исключения он не счел нужным здесь упомянуть.

8. Уже во время печатания «Введения в анализ» Эйлер пришел к заключению, что аналитических функций для анализа недостаточно. Это было связано с задачей о малых поперечных колебаниях струны, которой он занялся вслед за Даламбером. Задача выражается линейным уравнением с частными производными 2-го порядка с теми или иными начальными и граничными (в случае конечной струны) условиями. Определение произвольных функций, входящих в общее решение уравнения, зависит от начальных условий и, в частности, от начальной формы струны. Это естественно поставило вопрос о возможности аналитически выразить любую связную линию — например, в случае, когда начальная форма оттянутой струны зигзагообразная. Полагая, что в случаях, когда различные части линии имеют различные уравнения, единое аналитическое представление линии невозможно (ср. 4-е примечание), Эйлер предложил различать две категории кривых и функций: «непрерывные», которые задаются всюду одним аналитическим законом, и «разрывные» или «смешанные», которые на различных участках задаются различными законами (позднее, видимо, он представлял себе случаи, когда они неаналитические ни в одном промежутке).

Как видно, непрерывность и разрывность в смысле Эйлера относятся исключительно к закону задания функции.

О «разрывных» функциях говорится в отрывке, заимствованном нами из II тома «Введения в анализ». Следующий отрывок взят из III т. «Institutiones calculi integralis» (1770), который посвящен интегрированию уравнений с частными производными; в нем Эйлер сжато разъясняет важность «разрывных» функций для анализа.

Мы оставляем в стороне тотчас возникшую между Эйлером и Даламбером полемику о природе произвольных функций, допустимых в анализе (Даламбер занял гораздо более ограничительную позицию), — полемику, в которой приняли участие Д. Бернулли, Ж. Л. Лагранж и другие ученые и которая продолжалась около полустолетия. Что касается мысли Эйлера, будто поведение аналитически заданной функции на каком-либо участке обязательно предопределяет ее ход во всей области существования, то она, эта мысль, была тесно связана с его убеждением, что аналитическое выражение, вообще говоря, есть аналитическая функция.

Как мы знаем теперь, аналитические функции действительно обладают этим свойством единственности. Однако уже в конце XVIII и начале XIX в. выяснилось, что «смешанные» или «разрывные» функции, определяемые в области своего задания несколькими аналитическими выражениями, могут быть вместе с тем определены и одним выражением, причем с помощью операций, известных во времена Эйлера (Ж. Шарль, 1785; Ж. Б. Фурье, 1807, см. 9-е примечание). С другой стороны, Эйлер был прав, полагая, что линия, описанная, как он говорил, «свободным влечением руки», не может быть в общем случае выражена с помощью степенного ряда.

Вопрос об аналитической представимости функций приобретает определенность после того, как указаны допускаемые при этом аналитические операции. В 1885 г. К. Вейерштрасс доказал, что любая непрерывная (в нашем смысле!) на отрезке функции может быть представлена как сумма равномерно сходящегося ряда целых алгебраических многочленов. Для разрывных (в нашем смысле!) весьма общие результаты об их аналитической представимости были получены А. Лебегом (1905), затем Н. Н. Лузиным и др. (ср. выше отрывок из статьи Э. Бореля, с. 80—81).

9. Исходя из физических соображений, Д. Бернулли выдвинул чрезвычайно плодотворную, как стало ясно впоследствии, идею представить общее решение задачи о струне в виде суммы бесконечного ряда по синусам кратных дуг («принцип наложения колебаний»). При этом он опирался на убеждение, что при надлежащем выборе коэффициентов ряда можно удовлетворить любому начальному условию, т. е. что произвольная гладкая функция может быть представлена рядом по синусам. Это вызвало возражения Эйлера и Даламбера; указывалось, например, что сумма ряда синусов, будучи нечетной периодической функцией, не может изображать четную функцию и т. д. В решение этого вопроса внес достаточную ясность только Ж. Б. Фурье, в 1807 г. доказавший, что многие функции, «разрывные» по Эйлеру, т. е. представленные на отдельных частях отрезка различными аналитическими выражениями, представимы также на всем этом отрезке одним и тем же тригонометрическим рядом. Это открытие получило более широкую известность, когда вышла в свет «Аналитическая теория тепла» («Théorie analytique de la chaleur», 1822) Фурье. После этого различение «непрерывных» и «разрывных» функций в смысле Эйлера потеряло значение. Вместе с тем возник кардинальной важности вопрос об условиях разложимости функций в тригонометрический ряд, исследование которого ока-

зало огромное влияние на все последующее развитие теории функций вплоть до наших дней (работы П. Лежен-Дирихле, Н. И. Лобачевского, Б. Римана, Г. Кантора, А. Лебега, Н. Н. Лузина, Д. Е. Меньшова и многих других ученых).

10. Д. Бернулли не знал, что прием вычисления коэффициентов ряда по синусам был указан в одной работе А. Клеро, опубликованной в 1759 г. Не знал этого и Эйлер, который вывел формулы «коэффициентов Фурье» для рядов по синусам и косинусам в 1777 г. (опубликовано в 1798 г.). Фурье вывел те же формулы в третий раз, не подозревая о результатах своих предшественников.

11. Наряду с понятием о функции, как аналитическом выражении, Эйлер выдвинул и другое, более общее определение ее как поэлементного соответствия между двумя числовыми множествами. Разумеется, такое представление по существу лежало в основе всех теоретико-функциональных рассуждений, и Эйлеру не раз пришлось пользоваться именно этим пониманием, а не определением функции как аналитического выражения. Так, например, обстояло дело в его ранних исследованиях по вариационному исчислению и в рассуждениях, с помощью которых он мотивировал в I главе I тома «Введения в анализ» предложение о существовании обратной функции, когда ее аналитическое выражение неизвестно, а также в случае задания функции с помощью произвольной кривой. Общее определение функции, впервые сформулированное в «Institutiones calculi differentialis» Эйлера (1755), было воспринято тем охотнее, что чем дальше, тем чаще приходилось иметь дело с функциями, аналитическое выражение которых оставалось неизвестным. Такое определение дается и в широко распространенном на рубеже XVIII и XIX вв. «Трактате дифференциального и интегрального вычисления» («Traité du calcul différentiel et du calcul intégral», t. I, 2e éd., 1810) С. Ф. Лакруа, который специально подчеркивал, что величина, как-либо зависящая от другой, называется ее функцией независимо от того, известны или неизвестны действия, позволяющие вычислить функцию по ее аргументу. К определению Эйлера восходят определения О. Коши (1821) и Ж. Б. Фурье (1822), а также приводимые нами более развернутые определения Лобачевского (1834) и Лежен-Дирихле (1837). Об определении функции у Эйлера см. статью Маркушевича [№ 28]; см. также статьи Ф. А. Медведева [№ 31] и А. П. Юшкевича [№ 32].

12. Статья Н. И. Лобачевского, из которой заимствован приводимый отрывок, посвящена установлению некоторых условий, достаточных для представимости функции рядом Фурье. Не удивительно, что именно в работе по этому вопросу понадобилась формулировка общего определения функции. Определение Лобачевского, как и Дирихле, отнесено только к непрерывным в нашем смысле функциям (слово «постепенно» у Лобачевского означает «непрерывно»). Это объясняется тем, что оба они рассматривали функции с конечным числом точек разрыва на данном отрезке.

13. П. Лежен-Дирихле также дал общее определение функции в работе по теории рядов Фурье «Über die Darstellung ganz willkürlichen Functionen nach Sinus—und Cosinusreihen» (1837). В этом определении впервые ясно говорится о задании функции в некоторой конкретной области значений аргумента, в данном случае в связи с применением к рядам Фурье на промежутке. Характерны, с одной стороны, полемическая направленность текста против прежней концепции «смешанной» функции, а с другой—слова Дирихле, что функция «может быть мыслима совсем лишенной какого-либо закона» (имеется в виду закон, выраженный аналитически).

14. «Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen» (1870) Г. Ганкеля сыграли заметную роль в раннем периоде теории функций действительного переменного. Именно благодаря Ганкелю общее определение функции как соответствия, сформулированное им самим без ограничения непрерывными функциями, получило имя Дирихле. Заметим, что Ганкель все еще рассматривает здесь функции на промежутке, а не на любом множестве значений аргумента.

Ганкель справедливо указал, что данное определение имеет чисто номинальный характер. Историческая роль этого определения была в том, что оно открывало простор все более усложнявшимся конструкциям теории функций. Но по существу, взятое в такой всеобщности, оно утрачивало какую-либо определенность и конкретное содержание.

15. В 1905 г. Лебег определил аналитически представимую функцию как такую, которую можно построить, применяя по определенному закону к переменной и постоянным счетное множество сложений, умножений и предельных переходов. Он показал, что измеримость функции в смысле Бореля необходима и достаточна для ее аналитической представимости, и построил пример ограниченной неизмеримой по Борелю функции, интегрируемой в смысле Римана (т. е. принадлежащей к числу функций, изучаемых в классическом анализе).

16. Мы привели этот отрывок из статьи Э. Бореля «Le calcul des intégrales définies», чтобы указать на трудности, возникшие в начале XX в. при исследовании объема и содержания общего определения функции. Дальнейшие работы в этом направлении были тесно связаны с развитием математической логики и спорами вокруг проблем обоснования математики, в частности по вопросу о допустимых средствах конструкции функций (многие математики отвергают законность и целесообразность упомянутой конструкции Лебега). Ср. гниги А. И. Маркушевича [№ 29, с. 20—32] и С. К. Клини [№ 17].

5. МЕТОД ФЛЮКСИЙ И БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ И. НЬЮТОНА

а. ОТКРЫТИЕ БИНОМИАЛЬНОГО РЯДА

ИЗ ПИСЬМА И. НЬЮТОНА от 24 октября (3 ноября) 1676 г. К Г. ОЛЬДЕНБУРГУ ДЛЯ СООБЩЕНИЯ ЕГО Г. В. ЛЕЙБНИЦУ

[№ 32, с. 233—236]

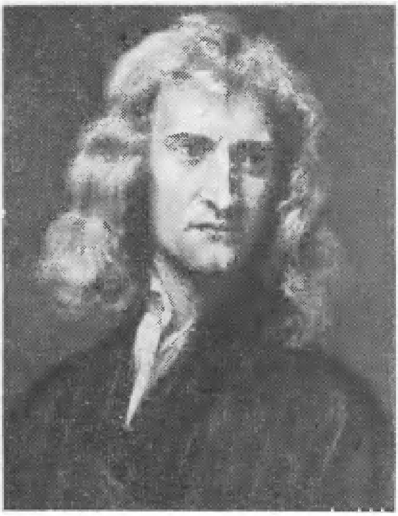
В начале моих занятий математикой я наткнулся при изучении работ нашего знаменитого Валлиса на рассмотрение рядов, с помощью интерполирования (intercalatione) которых он определял площади круга и гиперболы (1). Именно если бы для ряда кривых, у которых основание или общая ось $= x$, а ординаты $=$

$$\overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{0}{2}},\ \overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{1}{2}},\ \overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{2}{2}},\ \overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{3}{2}},\ \overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{4}{2}},\ \overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{5}{2}} \text{ и т. д.,}$$

мы могли проинтерполировать площади кривых, следующих через одну, т. е. площади, равные

$$x,\ x-\frac{1}{3}x^3,\ x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,\ x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7 \text{ и т. д.,}$$

то мы получили бы площади промежуточных кривых, из которых первая $\overline{1-xx}\,\Big|^{\frac{1}{2}}$ есть круг (2).



Исаак Ньютон

Для их интерполирования я отмечу, что во всех них первый член есть x, а вторые члены $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$ и т. д. образуют арифметическую прогрессию, откуда следует, что два первых члена интерполируемых рядов должны быть

$$x-\frac{\frac{1}{2}x}{3},\ x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3},\ x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$$

и т. д.

Относительно остальных интерполируемых членов замечу, что знаменатели 1, 3, 5, 7 и т. д. находятся в арифметической прогрессии, так что остается исследовать только числовые коэффициенты числителей. Последние же представляют собой для следующих через одну данных площадей цифры степеней числа одиннадцать, а именно 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, т. е., во-первых, 1, затем 1, 1, в-третьих, 1, 2, 1, в-четвертых, 1, 3, 3, 1, в-пятых, 1, 4, 6, 4, 1 и т. д.

Поэтому я принялся искать, как можно вывести в этих рядах из данных двух первых цифр остальные, и нашел, что если положить вторую цифру m, то остальные получаются посредством постоянного перемножения членов следующего ряда:

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5} \quad \text{и т. д.}$$

Например, пусть (второй член) $m=4$; тогда третий будет $4\times\frac{m-1}{2}$ или 6; $6\times\frac{m-2}{3}$, т. е. 4 будет четвертым, $4\times\frac{m-3}{4}$, т. е. 1 — пятым, $1\times\frac{m-4}{5}$, т. е. 0 — шестым, чем в этом случае ряд и заканчивается.

Это правило я и применил к вставляемым рядам. Так как для круга второй член был $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, то я положил $m=\frac{1}{2}$ и тогда получились члены

$$\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2} \text{ или } -\frac{1}{8};\ -\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3} \text{ или } +\frac{1}{16},\ +\frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$$

$$\text{или } -\frac{5}{128}, \text{ и так до бесконечности.}$$

Отсюда я и узнал, что искомая площадь кругового сегмента есть

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9}\ \text{и т. д.}$$

Таким же образом получаются так же вставляемые площади других кривых, как, например, площадь гиперболы и других кривых, следующих друг за другом через одну в ряду:

$$\overline{1+xx}\big|^{\frac{0}{2}},\ \overline{1+xx}\big|^{\frac{1}{2}},\ \overline{1+xx}\big|^{\frac{2}{2}},\ \overline{1+xx}\big|^{\frac{3}{2}}\ \text{и т. д.}$$

Таков же способ интерполирования и других рядов и то же делается в случае интервалов с двумя или несколькими недостающими членами.

Таково было начало моих размышлений по этому вопросу, и, конечно, все это ушло бы из моей памяти, если бы несколько недель назад я не заглянул в мои черновые тетради. После того как я выяснил это, я приступил вскоре к рассмотрению членов

$$\overline{1-xx}\big|^{\frac{0}{2}},\ \overline{1-xx}\big|^{\frac{2}{2}},\ \overline{1-xx}\big|^{\frac{4}{2}},\ \overline{1-xx}\big|^{\frac{6}{2}}\ \text{и т. д.,}$$

т. е.

$$1,\ 1-xx,\ 1-2xx+x^4,\ 1-3xx+3x^4-x^6,$$

и увидел, что их можно интерполировать таким же образом, как порождаемые ими площади, причем для этого нужно лишь отбросить в членах выражений для площадей знаменатели 1, 3, 5, 7 и т. д., так что коэффициенты членов интерполируемой величины $\overline{1-xx}\big|^{\frac{1}{2}}$, или $\overline{1-xx}\big|^{\frac{3}{2}}$, или вообще $\overline{1-xx}\big|^{m}$ получаются через непрерывное перемножение членов следующего ряда:

$$m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\ \text{и т. д.}$$

Поэтому (например) $\overline{1-xx}\big|^{\frac{1}{2}}$ равно

$$1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\ \text{и т. д.,}$$

а $\overline{1-xx}\big|^{\frac{3}{2}}$ равно

$$1-\frac{3}{2}xx+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6\ \text{и т. д.}$$

А $\overline{1-xx}\big|^{\frac{1}{3}}$ равно

$$1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\ \text{и т. д.}$$

Таким образом, общее приведение корней к бесконечным рядам по правилу, которое я изложил в начале первого письма, мне стало известно раньше, чем я узнал извлечение корней.

Но когда я узнал это, то не могло более оставаться от меня долго скрытым и остальное.

В самом деле, чтобы проверить эти действия, я умножил на самое себя

$$1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6 \text{ и т. д.;}$$

при этом получилось $1-xx$, так как все до бесконечности остальные члены при продолжении ряда исчезали. Точно так же дважды помноженный на самого себя ряд

$$1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6 \quad \text{и т. д.}$$

давал тоже $1-xx$. Желание подлинно доказать эти заключения привело меня к попытке рассмотреть, нельзя ли наоборот эти ряды, представляющие собой таким образом корни величины $1-xx$, извлечь из нее арифметическим путем. И дело хорошо удалось.

Форма действия при извлечении квадратного корня была следующая:

$$\begin{array}{l}
1-xx\left(1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6 \text{ и т. д.}\right. \\
\underline{1} \\
0-xx \\
\underline{-xx+\frac{1}{4}x^4} \\
-\frac{1}{4}x^4 \\
\underline{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8} \\
\phantom{-xx+-\frac{1}{4}x^4+}-\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8.
\end{array}$$

Установив это, я совершенно отказался от интерполирования рядов и стал употреблять только эти действия, как представляющие более естественную базу. Не упустил я и приведения посредством деления, что представляет собой вещь значительно более легкую.

Вскоре я подошел и к решению неявных уравнений и овладел ими (2). Отсюда я смог находить по данным площадям и дугам кривых ординаты и отрезки осей и другие прямые. Действительно, это не требовало ничего, кроме решения уравнений, выражавших площади или дуги через данные прямые (3).

Примечания. Введение бесконечных рядов имело для развития математического анализа неменьшее значение, чем первые методы квадратур или методы касательных и экстремумов. Систематическое исследование огромного числа новых функций оказалось возможным только благодаря их представлению как сумм бесконечных степенных рядов, и начиная с 60-х и 70-х годов

XVII в. ряды становятся столь же необходимым орудием аналистов, как бесконечно малые величины: умение дифференцировать и интегрировать степенную функцию вместе с ее представлением, как суммы степенного ряда, открывало пути к решению множества труднейших задач и к постановке все новых и новых вопросов. Первую работу такого рода опубликовал в 1668 г. Меркатор (Ник. Кауфман), получивший разложение логарифмической функции $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ почленным интегрированием прогрессии $\frac{1}{1+x}=1-x-x^2+\ldots$ Другим фундаментальным событием в теории рядов явилось открытие общего биномиального ряда, к которому в 1664—1665 гг. пришел И. Ньютон. В письме от 13 (23) июня 1676 г., предназначенном для Г. В. Лейбница, Ньютон записал общее биномиальное разложение в виде

$$\overline{P+PQ}\,|^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+ \text{ и т. д.,}$$

где буквы A, B, C, ... обозначают всякий раз предыдущий член, а черта над суммой $\overline{P+PQ}$ соответствует нашим скобкам. Попутно Ньютон сообщает о предложенном им обозначении дробных и отрицательных степеней. В приведенном нами отрывке из следующего письма, составленного для Лейбница, Ньютон, по его просьбе, разъяснил, как пришел к биномиальному разложению.

1. Речь идет об интерполяциях в «Арифметике бесконечных» Валлиса (1656), которые привели его к разложению числа π в бесконечное произведение (ср. выше с. 56). Отправным пунктом исследования Валлиса было рассмотрение квадратур, соответствующих интегралам вида $\int\limits_0^1(1-x^2)^n\,dx$ при целых положительных n, с целью посредством интерполирований получить $\int\limits_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{\pi}{4}$. Далее Ньютон рассказывает, как с помощью неполной индукции, проведенной в духе Валлиса, он пришел к открытию мультипликативного правила составления биномиальных коэффициентов (аддитивное правило $C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_m^{n-1}$ для целых положительных показателей было известно ранее). В отличие от Валлиса он рассматривает, как сказали бы мы, интегралы с переменным верхним пределом.

2. О методе Ньютона решения алгебраических уравнений см. к. I, ч. I, п. 8, б, а также [11], т. II, с. 47—51.

3. Ньютон не дал общего теоретического вывода биномиального разложения, но только проверил последнее на примерах, вроде $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ или $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. В XVIII в. было предложено довольно много доказательств биномиальной формулы, одно из которых приведено далее (в п. 7, в).

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ И. НЬЮТОНА «ОБ АНАЛИЗЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЧЛЕНОВ»
(1669 г., опубл. в 1711 г.)

[№ 32, с. 3]

Квадратура простых кривых (1)

Правило I. *Если* $ax^{\frac{m}{n}}=y$, *то* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=$ *площади ABD* (2).

[Там же, с. 22—23]

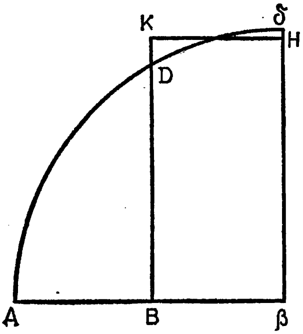


Рис. 25

Приготовление к доказательству первого правила.

Пусть (рис. 25) AB, основание некоторой кривой $AD\delta$, есть x; пусть, далее, к нему приложена перпендикулярно $BD=y$, а площадь $ABD=z$, как прежде. Пусть также $B\beta=o$, $BK=v$ и прямоугольник $B\beta HK$ (ov) равен пространству $B\beta\delta D$ (3). Таким образом, $A\beta=x+o$ и $A\delta\beta=z+ov$. Предпослав это, я из произвольной зависимости между x и z ищу y нижеизложенным способом

Доказательство . . . .

Пусть вообще $\frac{n}{m+n}\times ax^{\frac{m+n}{n}}=z$.

Если положить $\frac{na}{m+n}=c$ и $m+n=p$, то $cx^{\frac{p}{n}}=z$ или $c^n x^p=z$. Тогда по подстановке $x+o$ вместо x и $z+ov$ (или, что то же, $z+oy$) вместо z получается c^n на x^p+pox^{p-1} и т. д. $=z^n+noyz^{n-1}$ и т. д., причем я опускаю остальные члены, которые в конце концов исчезают. Далее, если отбросить равные $c^n x^p$ и z^n, а остальные разделить на o, то остается:

$$c^n p x^{p-1}=nyz^{n-1}\left(=\frac{nyz^n}{z}=\frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right),$$

или по разделении на $c^n x^p$:

$$px^{-1}=\frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}},\ \text{или}\ pcx^{\frac{p-n}{n}}=ny.$$

Заменяя вновь c его значением $\frac{na}{m+n}$, а $m+n$ его значением p, т. е. ставя m вместо $p-n$ и na вместо pc, ты получишь $ax^{\frac{m}{n}}=y$. Поэтому и обратно, если $ax^{\frac{m}{n}}=y$, то $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}=z$. Что и требовалось доказать (4).

Примечания. Приведенные тексты взяты из сочинения «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas», которое Ньютон летом 1669 г. передал И. Барроу (его лекции Ньютон ранее слушал в Кембриджском университете); «уравнения с бесконечным числом членов» — это разложения в степенные ряды. Барроу переслал сочинение далее в Лондон, и так оно получило некоторую известность среди английских ученых. Возникшая было мысль опубликовать «Анализ» вместе с «Лекциями» Барроу (1670) не осуществилась, и он был напечатан только в 1711 г.

Все основное содержание «Анализа» было разработано Ньютоном несколькими годами ранее, в 1665—1666 гг., а написал он этот небольшой труд скорее всего с целью закрепить за собой ранее сделанные открытия. Мы приводим здесь первое из трех данных в «Анализе» правил квадратур — именно квадратуры кривых $y=ax^{\frac{m}{n}}$ и доказательство этого правила. Читателю следует сравнить это доказательство с приведенными выше доказательствами Кавальери, Валлиса и Ферма (отрывки п. 3, г, 3, е и 3, ж).

1. Простые кривые — линии с уравнением $y=ax^{\frac{m}{n}}$. Во втором правиле речь идет о квадратуре сложных кривых, когда y есть сумма нескольких членов такого рода. Наконец, в третьем правиле рекомендуется для квадратуры всех других кривых предварительное приведение «к более простым членам», т. е. разложение в степенной ряд, и Ньютон далее сообщает приемы разложения в случаях, когда y есть рациональная функция x (путем деления числителя на знаменатель), иррациональная функция (даны примеры с извлечением квадратного корня) и еще когда y задан неявным алгебраическим уравнением вида $f(x, y)=0$, которое решается по способу «параллелограмма Ньютона» (см. [11], т. II, с. 49—51). Общей биномиальной формулой Ньютон в «Анализе» не пользуется.

Заметим, что интеграл выступает в «Анализе» под видом площади криволинейной трапеции, прилегающей к оси ординат и рассматриваемой как функция абсциссы правого конца ее основания.

2. Свое правило Ньютон относит и к случаю обыкновенной гиперболы: $y=\frac{1}{x}$, при этом площадь оказывается, как он пишет, равной $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\frac{1}{0}=$ бесконечности.

3. Буквой o Ньютон обозначал еще в 1664 г. бесконечно малое приращение аргумента, быть может по ее сходству с нулем. Ею пользовался в том же смысле Дж. Грегори, а еще ранее французский любитель математики Ж. де Богран.

4. Помимо вывода производной и интеграла степенной функции, рассуждение Ньютона содержит в геометрической форме (притом гораздо более простой, чем у Барроу, см. отрывок п. 3, л) теорему о взаимно обратной связи между интегрированием и дифференцированием (в данном случае между площадью криволинейной трапеции и ординатой кривой).

Природу и свойства бесконечно малых величин Ньютон в данном сочинении не уточняет. При фактическом переходе к пределу в доказательстве он ссылается на то, что члены, содержащие o, «в конце концов исчезают». В одном месте «Анализа» Ньютон мимоходом замечает, что не боится говорить о бесконечно малых линиях, «так как еще при употреблении метода неделимых геометры имели в виду только отношения» [№ 32, с. 17].

в. БЕСКОНЕЧНЫЙ РЯД ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ И. НЬЮТОНА «ОБ АНАЛИЗЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЧЛЕНОВ» (1669 г., опубл. в 1711 г.)

[№ 32, с. 17—19]

Если, например, я желаю по данной площади гиперболы $ABCD$ определить основание AB, я, обозначив эту площадь через z, определяю корень уравнения

$$z(ABCD)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4 \text{ и т. д.,}$$

пренебрегая членами, в которых x находится в высшей степени, чем те, в которых желательно иметь z в результате.

Так, например, если я хочу, чтобы z доходило в результате не выше чем до пятой степени, то я пренебрегаю всеми членами: $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$ и т. д., и определяю корень только из уравнения

$$\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0.$$

Я, как ты видишь, произвел анализ, соблюдая следующие два правила.

1. При подстановках я всегда опускаю те члены, которые, как я предвижу, не будут иметь никакого употребления. Для этого имеет место правило, что за первым членом, происходящим из какого-либо выражения, находящегося в той же строке, я прибавляю направо члены в числе, не большем, чем то число единиц, на которое отличается показатель степени этого первого члена от показателя высшей степени. Так, в приведенном выше примере, в котором высшая степень 5, я опустил все члены после z^5, после z^4 поставил один и два — после z^3.

Если извлекаемый корень x оказывается только в четных или только в нечетных степенях, то имеет место следующее правило: за первым членом, происходящим из какого-либо выражения, находящегося в той же строке, я прибавляю направо члены в числе, не большем, чем то число двоек, на которое отличается показатель степени этого первого члена от показателя высшей степени, или чем число таких троек, если показатели степеней x везде отличаются друг от друга на три, и аналогично в других случаях.

2. Если же p, q или r в получаемом уравнении имеются только в первых степенях, то их выражения, т. е. прочие прибавляемые к результату члены, я нахожу делением. Так это, как ты видишь, и выполнено.

Примечание. Обращение ряда

$$z=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

производится здесь по способу, сходному с методом Ньютона для решения численных алгебраических уравнений (см. к. I, ч. I, п. 8, б). Сперва берется, как указано, уравнение 5-й степени, члены которого записаны в верхнем отделении второго столбца таблицы, и в него подставляется $x=z+p$, где предполагается, что $p=\alpha z^2+\ldots$. Справа, в третьем столбце, выписаны члены, возникающие при подстановке $x=z+p$, причем сразу откидываются члены, которые не получат применения. Приравнивание, с учетом того, что $p=\alpha z^2+\ldots$, группы низших членов $\alpha z^2-\frac{1}{2}z^2$ нулю дает $\alpha=\frac{1}{2}$ и $p=\frac{1}{2}z^2+\ldots$ Затем принимается, что $p=\frac{1}{2}z^2+q$, где предполагается, что $q=\beta z^3+\ldots$. Подстановка $p=\frac{1}{2}z^2+q$ в члены, выписанные в нижнем отде-

<table>
<tr><td colspan="3">$x = z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \frac{1}{120} z^5$ и т. д.</td></tr>
<tr><td>$z + p = x$</td><td>$+\frac{1}{5} x^5$
$-\frac{1}{4} x^4$
$+\frac{1}{3} x^3$
$-\frac{1}{2} x^2$
$+x$
$-z$</td><td>$+\frac{1}{5} z^5$ и т. д.
$-\frac{1}{4} z^4 - z^3 p$ и т. д.
$+\frac{1}{3} z^3 + z^2 p + z p^2$ и т. д.
$-\frac{1}{2} z^2 - z p - \frac{1}{2} p^2$
$+z + p$
$-z$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{2} z^2 + q = p$</td><td>$+z p^2$
$-\frac{1}{2} p^2$
$-z^3 p$
$+z^2 p$
$-z p$
$+p$
$+\frac{1}{5} z^5$
$-\frac{1}{4} z^4$
$+\frac{1}{3} z^3$
$-\frac{1}{2} z^2$</td><td>$\frac{1}{4} z^5$ и т. д.
$-\frac{1}{8} z^4 - \frac{1}{2} z^2 q$ и т. д.
$-\frac{1}{2} z^5$ и т. д.
$+\frac{1}{2} z^4 + z^2 q$
$-\frac{1}{2} z^3 - z q$
$+\frac{1}{2} z^2 + q$
$+\frac{1}{5} z^5$
$-\frac{1}{4} z^4$
$+\frac{1}{3} z^3$
$-\frac{1}{2} z^2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$1 - z + \frac{1}{2} z^2 \Big) \frac{1}{6} z^3 - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{20} z^5 \Big(\frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \frac{1}{120} z^5$</td></tr>
</table>

лении второго столбца, дает члены нижнего отделения третьего столбца. С помощью последнего, учитывая, что $q = \beta z^3 + \ldots$, можно было бы аналогично найти $\beta z^3 - \frac{1}{6} z^3 = 0$, $\beta = \frac{1}{6}$ и т. д. Но Ньютон упрощает процедуру.

Из доставляемого членами нижнего отделения третьего столбца уравнения

$$\left(1-z-\frac{1}{2}z^2\right)q=\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5$$

он сразу находит с помощью деления, что $q=\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$. Закон образования коэффициентов разложения x достаточно ясен и, таким образом, из логарифмического ряда

$$z\,[=\ln(1+x)]=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

получается показательный

$$x\,[=e^z-1]=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots.$$

Ньютон не имел ни знаков логарифма показательной функции, ни специального названия последней (ср. далее отрывки п. 7, б и п. 7, в).

В конце сочинения Ньютон сделал несколько кратких замечаний о необходимости и возможности обосновать все полученные разложения, т. е. доказать, что разности между точным значением искомой величины и ее приближениями, или же значения p, q, r, ..., становятся «меньше всякой данной величины», если взяты достаточно малые значения переменных или достаточно близкие начальные приближения. Эти замечания не получили, однако, у Ньютона развития.

г. МЕТОД ФЛЮКСИЙ И БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ И. НЬЮТОНА «МЕТОД ФЛЮКСИЙ И БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ С ПРИЛОЖЕНИЕМ ЕГО К ГЕОМЕТРИИ КРИВЫХ ЛИНИЙ» (1670—1671 гг., опубл. в 1736 г.)

[№ 32, с. 25—26]

Введение о решении уравнений с помощью бесконечных рядов

... я нашел нелишним написать для молодых геометров эту книжку, в которой я пытаюсь раздвинуть пределы анализа (1) и развить дальше учение о кривых.

. . . .

И также как десятичные дроби обладают тем преимуществом, что выраженные в них обыкновенные дроби и корни приобретают в некоторой степени свойства целых чисел, так что с ними можно обращаться как с последними, так и буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения (дроби с составным знаменателем, корни составных величин или неявных уравнений и т. д.) можно с их помощью привести к роду простых количеств; именно, их оказывается возможным привести к бесконечному ряду дробей, у которых числители и знаменатели суть простые члены, и таким образом с небольшой затратой сил удается преодолеть трудности, в другом виде представляющиеся почти неодолимыми (2).

Поэтому я сперва покажу, как следует производить эти приведения... (3).

[Там же, с. 45—46]

Переход к методу флюксий

До сих пор речь шла о методе вычисления, который будет часто употребляться в последующем. Теперь для пояснения искусства анализа остается привести некоторые образцы задач, причем преимущественно таких, которых больше всего доставляет природа кривых. Но прежде всего следует заметить, что все заключающиеся в них затруднения можно свести к двум следующим проблемам относительно пути, описываемого местным движением, как либо ускоренным или замедленным (4).

I

Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

II

Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути.

Если, например, в уравнении $xx = yy$ y представляет длину пути, пройденного к определенному моменту времени, а время измеряется и представляется описываемым с помощью другого пространства x, возрастающего с равномерной скоростью $\dot{x}$, то $2x\dot{x}$ представляет собой скорость, с которой будет проходиться путь y в этот момент времени, и наоборот. Поэтому я буду в последующем рассматривать величины как порождаемые посредством непрерывного нарастания, подобно пути, который описывает тело или какая-либо движущаяся вещь.

Но так как мы здесь привлекаем к рассмотрению время лишь в той мере, в которой оно выражается и измеряется равномерным местным движением, и так как, кроме того, сравнивать друг с другом можно только величины одного рода, а также скорости, с которыми они возрастают или убывают, то я в нижеследующем рассматриваю не время, как таковое, но предполагаю, что одна из предложенных величин, однородная с другими, возрастает благодаря равномерному течению, а все остальные отнесены к ней как ко *времени*. Поэтому по аналогии за этой величиной не без основания можно сохранить название времени. Таким образом повсюду, где в дальнейшем встречается слово «время» (а я его очень часто употребляю ради ясности и отчетливости), под ним нужно понимать не время в его *формальном* значении, а только ту отличную от времени величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время.

В дальнейшем я буду называть *флюентами* или текущими величинами величины, которые я рассматриваю как постепенно и неопределенно возрастающие; обозначать я их буду последними буквами алфавита u, y, x и z, чтобы их было возможно отличать от других величин, которые рассматриваются в уравнениях как известные и определенные и которые поэтому обозначаются первыми буквами алфавита a, b, c и т. д. Скорости, с которыми возрастают вследствие порождающего их движения отдельные флюенты (и которые я называю *флюксиями* или просто *скоростями* или *быстротами*), я буду обозначать теми же буквами, но пунктированными, например, $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{x}$, т. е. для скорости величины u я пишу $\dot{u}$, аналогичным образом для скоростей других величин x, y и z соответственно пишу $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (5).

Предпослав это, я тотчас приступлю к изложению предмета и прежде всего дам решение двух только что предложенных проблем.

Проблема I

По данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями (6).

. . . .

[Там же, с. 51]

Проблема II

По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами (7).

Примечания. В 1670—1671 гг. Ньютон подготовил для печати систематическое и подробное изложение своего варианта исчисления бесконечно малых на латинском языке, правда, не вполне законченное, так как в ходе работы выяснилось, что невозможно найти издателя. Это сочинение увидело впервые свет в английском переводе: «The method of fluxions and infinite series; with its application to the geometry of curve—lines» (1736). Перевод с латинской рукописи сделал Дж. Колсон. Первоначальное заглавие труда неизвестно, оригинальная рукопись, опубликованная недавно [в № 71, т. III], сохранилась без первого листа; возможно, что название принадлежит Колсону и что слова о «приложении к геометрии кривых линий» включены в заголовок по образцу «Анализа бесконечно малых для познания кривых линий» Лопиталя (1696; см. далее отрывок п. 6, д). Несмотря на столь позднее издание «Метода флюксий», он получил некоторую известность еще в XVII в.: Ньютон разрешил знакомиться с рукописью отдельным английским математикам. Кроме того, он изложил основные понятия метода и подход к решению двух главных его проблем в письмах к Валлису от 27 августа (9 сентября) и 17 (27) сентября 1692 г., а Валлис опубликовал их в своей «Алгебре» в 1693 г.

В «Методе флюксий» основные понятия ньютонова математического анализа облечены в механическую или квазимеханическую форму. Анализ выступает как общее учение о движении в его наиболее отвлеченном понимании: его предметом является изучение текущих величин — флюент (от слова fluere — течь) в их взаимосвязи со скоростями течениями — флюксиями (fluxio — течение). Все флюенты рассматриваются как функции одной переменной — времени. Таким образом, двумя центральными понятиями анализа Ньютона были, говоря по-нашему, первообразная функция или интеграл (флюента) и производная функция (флюксия), существование которых гарантировалось такими их реальными прообразами, как текущие, переменные величины и скорости их течения или изменения (в частности, в механической или геометрической интерпретации). Само представление о текущих величинах восходит к выработанному еще в средние века представлению об образовании геометрических образов посредством течения. В сочинении Ньютона «Об анализе» (см. выше отрывок п. 5, б) слова «флюента» и «флюксия» не употребляются, быть может, чтобы не затруднить читателя этого небольшого трактата новой терминологией. Третьим основным понятием метода служит момент величины, ее бесконечно малое приращение. Слово momentum (из movimentum, от глагола movere — двигать, порождать, побуждать и т. д.) охватывает много значений: движущая сила, толчок, побудительное начало, часть, а также мгновение. Впрочем, механическая трактовка основных понятий анализа имела для Ньютона значение главным образом в вопросах его обоснования (ср. далее отрывок п. 5, е). Как движение, так и время рассматриваются в методе флюксий как любое количественное изменение и соответственно как всеобщий количественный аргумент, изменение которого считается равномерным. Формальные определения флюенты и флюксии Ньютон считал излишними, а их математическая взаимосвязь вытекала из операций, с помощью которых одни получаются из других.

1. У Ньютона (как и у Лейбница) термин «анализ», который Виет относил к алгебре (к. I, ч. III, отрывок п. 7, а), распространяется на исчисление бесконечно малых.

2. Как видно, убеждение математиков XVIII в. в представимости всех функций анализа степенными рядами (см. выше отрывки под п. 4) восходит к Ньютону.

3. Далее описаны приемы разложения в ряды, указанные ранее в сочинении «Об анализе», и к ним добавлено правило параллелограмма Ньютона для функций, заданных уравнениями $f(x, y)=0$, где $f(x, y)$ — целый алгебраический многочлен. Среди примеров имеются и разложения по дробным и отрицательным степеням аргумента.

4. Напомним, что местное движение — это обыкновенное механическое движение.

5. Обозначение флюксий с помощью точек Ньютон ввел только в конце 1691 г., когда готовил к печати «Рассуждение о квадратуре кривых» (см. далее отрывок п. 5, е). К этому его побудила, вероятно, необходимость применения флюксий не только первого, но и высших порядков. В оригинальной рукописи «Метода» флюксия каждой из флюент v, x, y, z обозначалась новой буквой l, m, n, r и т. п.: в «Методе флюксий» Ньютон обходился флюксиями первого порядка. Для обозначения флюксий высших порядков он также употреблял точки, например, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, ... (в печати — впервые в письмах, опубликованных Валлисом, см. выше). Эти обозначения Ньютона безраздельно господствовали в английской литературе до начала XIX в.; иногда они применяются и теперь — чаще в механике и векторном исчислении. Преимущества символики дифференциального исчисления весьма значительны (удобное распространение на дифференциалы и производные высших порядков, явное указание аргумента интегрирования и др.).

6. Далее Ньютон словесно формулирует правило дифференцирования функции $f(x, y, z, \ldots)$, равносильное нашему $\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}+\ldots$ (все переменные x, y, z рассматриваются как функции «времени» t). Правило доказывается на конкретном примере путем образования выражения $\frac{f(x+\dot{x}o,\ y+\dot{y}o)-f(x,\ y)}{o}$, где o принимается бесконечно малой величиной. «Члены, которые на нее умножены, — пишет Ньютон, — можно считать за ничто в сравнении с другими. Поэтому я ими пренебрегаю» (№ 32, с. 50). В ходе доказательства вводится понятие момента (упоминаемое один раз и в сочинении «Об анализе...») как бесконечно малого приращения величины и указывается, что моменты пропорциональны флюксиям, так что если момент x есть $\dot{x}o$, то моменты y, z, ... будут $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, ... Моменты Ньютона, очевидным

образом, соответствуют дифференциалам Лейбница (см. далее отрывок п. 6, а). Правила дифференцирования произведения и частного в «Методе флюксий» отсутствуют (ср. следующий отрывок). В случае рациональных или иррациональных выражений Ньютон приравнивал их вспомогательным флюентам, избавлялся от дробей и радикалов и, продифференцировав получившийся целый многочлен и введенные дополнительные соотношения, исключал вспомогательные переменные и их флюксии.

7. В этой проблеме речь идет об интегрировании дифференциального уравнения первого порядка. Основным методом служит представление решения в виде степенного (или обобщенного степенного) ряда. Приемы решения в квадратурах Ньютон почти не разработал.

д. НАБРОСОК АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФЛЮКСИЙ

ИЗ РУКОПИСИ И. НЬЮТОНА (около 1671 г.)

[№ 71, т. III, с. 330—338, перевод А. П. Юшкевича]

Аксиомы (1)

Акс. 1. [Количества], совместно порождаемые равными флюксиями, равны.

Акс. 2. [Количества], совместно порождаемые флюксиями, находящимися в данном отношении, относятся как флюксии.

Заметь, что под совместным порождением я разумею, что целые порождаются за одно время (2).

Акс. 3. Флюксия целого равна взятым вместе флюксиям частей (3).

Здесь заметь, что профлюксии (profluxiones) следует брать положительными, а дефлюксии (defluxiones) — отрицательными (4).

Акс. 4. Бóльшая флюксия — та, которая производит большее [количество].

Акс. 4. Одновременные моменты относятся как флюксии.

Теоремы

Теорема I. *Если четыре текущие количества постоянно пропорциональны, то сумма произведений каждого крайнего на флюксию другого равна сумме произведений каждого среднего на флюксию другого* (5).

Пусть $A.B::C.D$, тогда $A\times fl{:}D+D\times fl{:}A=B\times fl{:}C+$ $+C\times fl.{:}B$. Это можно доказать таким же образом, как решение проб. I (6), или же так. Допустим, что M есть момент A; тогда, поскольку моменты флюент относятся как флюксии, моментом B будет $\frac{fl:B}{fl:A}M$, моментом C будет $\frac{fl:C}{fl:A}M$ и моментом D будет $\frac{fl:D}{fl:A}M$. Значит, когда A в своем течении (profluendo) станет $A+M$, B станет $B+\frac{fl:B}{fl:A}M$, C станет $C+\frac{fl:C}{fl:A}M$

и D станет $D+\frac{fl:D}{fl:A}M$; причем по условию эти количества по-прежнему остаются пропорциональными. Перемножь поэтому между собой крайние и средние и получится

$$AD+\frac{fl:D}{fl:A}M+DM+\frac{fl:D}{fl:A}MM=$$
$$=BC+\frac{fl:C}{fl:A}BM+\frac{fl:B}{fl:A}CM+\frac{fl:B\times fl:C}{fl:A\times fl:A}MM.$$

Удали равные AD и BC, а оставшиеся равные [члены] умножь на $fl:A$ и раздели на M. Тогда будет

$$A\times fl:D+D\times fl:A+fl:D\times M=$$
$$=B\times fl:C+C\times fl:B+\frac{fl:B\times fl:C}{fl:A}M.$$

Отсюда по отбрасывании в силу бесконечной малости момента M [членов], умноженных на него [следует теорема].

Пусть $AB.AD::AE.AC$, тогда $AB\times fl:AC+AC\times fl:AB=$ $=AD\times fl:AE+AE\times fl:AD$. Допустим, что эти линии возрастают при течении на свои моменты Bb, Dd, Ee, Cc (рис. 26), тогда в силу их постоянной пропорциональности, а также постоянного равенства прямоугольников, образованных на крайних и средних, именно $AF=AG$ и $Af=Ag$ будут равны приращения этих прямоугольников $BFCf$ и $DGEg$; т. е. $Ab\times Cc\,(Cf)+$ $+AC\times Bb\,(bF)=Ad\times Ee\,(Eg)+AE\times Dd\,(dG)\ldots$. Или же $Ab+$ $+AC\times\frac{Bb}{Cc}=Ad\times\frac{Ee}{Cc}+AE\times\frac{Dd}{Cc}$. И так как флюксии относятся как моменты непрерывно порождаемых ими количеств, т. е.

$$\frac{Bb}{Cc}=\frac{flAB}{flAC},\quad \frac{Ee}{Cc}=\frac{flAE}{flAC}\quad \text{и}\quad \frac{Dd}{Cc}=\frac{flAD}{flAC},$$

будет $AB+AC\times\frac{flAB}{flAC}=AD\times\frac{flAE}{flAC}+AE\times\frac{flAD}{flAC}$.

Или же

$$Ab\times flAC+AC\times flAB=$$
$$=Ad\times flAE+AE\times flAD.$$

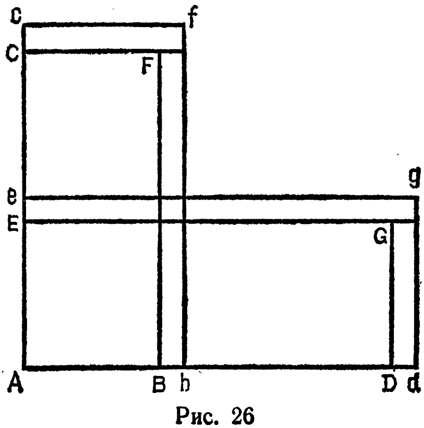


Рис. 26

Пусть теперь прямоугольники Af и Ag убывают до тех пор, пока не обратятся в первоначальные прямоугольники AF и AG, тогда Ab станет AB и Ad станет AD. Поэтому в последний момент этого бесконечно малого течения, т. е. в первый момент течения прямоугольников AF и AG, когда они начинают возрастать или убывать, будет

$$AB\times flAC+AC\times flAB=AD\times flAE+AE\times flAD, \text{ ч. т. д.}$$

. . . .

След. 6. Если имеется сколько-нибудь непрерывно пропорциональных, из которых одна есть данное количество, а остальные флюенты, то флюксии относятся друг к другу, как эти флюенты, умноженные на число членов, на какое они отстоят от данного члена. Пусть $A.B.C.D.E.F$ непрерывно пропорциональны, тогда если дано C, то $-2A.-B.D.2E.3F::fl:A.fl:B.fl:D.fl:E.fl:F$. (7).

. . . .

След. 7. Если два текущих количества перемножаются, то флюксия произведения составлена из флюксий множителей, попеременно умноженных на множители: $Fl:AB=B\times flA+A\times flB$. В самом деле, $1.A::B.AB$. Следовательно, по теор. I.

След. 8. Если текущее количество делится на текущее количество, флюксия частного получается посредством вычитания флюксии делителя, умноженной на делимое, из флюксии делимого, умноженной на делитель, и деления остатка на квадрат делителя: $Fl:\frac{B}{A}=\frac{A\times flB-B\times flA}{AA}$. В самом деле, $A.1::B.\frac{B}{A}$. Следовательно, по теор. I $A\times fl\frac{B}{A}+\frac{B}{A}flA=1\times fl:B$, ибо $B\times fl:1$ есть нуль. Вычти из обеих [частей] $\frac{B}{A}\times flA$ и остаток раздели на A, получится $fl:\frac{B}{A}=\frac{A\times flB-B\times flA}{AA}$.

След. 9. Флюксия корня относится к флюксии какой-либо степени, как корень к этой степени, умноженной на число измерений: $fl:A.flA^3::A.3A^3$ или $fl:\sqrt{3}:A.fl:A::\sqrt{3}:A.3A$ (8). И так же для других степеней. Явствует из след. 6 (9).

Примечания. Небольшой приведенный нами отрывок Ньютон, по-видимому, намеревался включить после некоторой обработки в текст «Метода флюксий и бесконечных рядов». Этот отрывок важен в нескольких отношениях. Прежде всего он содержит начала исчисления флюксий, равносильные правилам дифференцирования, которые Лейбниц опубликовал в своем первом мемуаре по дифференциальному исчислению (см. далее отрывок п. 6, а): из I теоремы о флюксиях величин, образующих геометрическую пропорцию, Ньютон выводит флюксии степени, произведения, частного и корня. Все это опирается на несколько аксиом, выражающих основные свойства флюксий и моментов. Кроме того, интересно, что Ньютон доказывает I теорему дважды: сперва на основе принципа отбрасывания бесконечно малых, а затем, перечеркнув этот вывод, с помощью рассуждений, основанных на переходе к пределу, которые он более детально разработал позднее (см. следующие отрывки).

Тексты, отмеченные сбоку вертикальной чертой, в рукописи Ньютона им зачеркнуты.

1. Аксиоматическое изложение новых отделов математических наук встречается в эту эпоху и до и после Ньютона. Так, например, излагал учение о падении тел Галилей (1638); аналогично построение метода флюксий у К. Маклорена (1742).

2. Ньютон предполагает, что начальные значения всех флюент равны нулю.

3. Это предложение о дифференцировании суммы или разности флюент, которое Ньютон относит к аксиомам.

4. Ньютон различает здесь возрастающие и убывающие флюенты, так сказать притекающие и истекающие.

5. Флюксия величины A нередко обозначается здесь $fl:A$, а в записи пропорций Ньютон, как и Барроу, следовал за Отредом, т. е. $A. B::C. D$ означает $A:B=C:D$.

6. Имеется в виду I проблема в «Методе флюксий» (см. предыдущий отрывок).

7. Отсюда, в частности, в 9-м следствии выводится флюксия степенной функции. Это следствие Ньютон включил в «Математические начала» (1686) (см. далее отрывок п. 5, ж).

8. Запись $\sqrt{3}:A$ означает $\sqrt[3]{A}$.

9. Рукопись содержит еще ряд теорем о флюксиях различных геометрических величин.

е. МЕТОД ПЕРВЫХ И ПОСЛЕДНИХ ОТНОШЕНИЙ

ИЗ «МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАЧАЛ НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ» И. НЬЮТОНА (1686)

[№ 22, с. 57—60]

1) О методе первых и последних отношений, при помощи которого последующее доказывается.

Лемма I. *Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны.*

Если это отрицаешь, то пусть они напоследок будут неравны и их последняя разность пусть будет D, следовательно, они не могут ближе подойти к равенству, как до этой заданной разности D, в противность предположению (1).

Лемма II. *Если в какую-либо фигуру $AacE$, ограниченную прямыми Aa и AE и кривой acE, вписывать любое число параллелограммов Ab, Bc, Cd и т. д., имеющих равные основания AB, BC, CD и т. д. и стороны Bb, Cc, Dd и т. д., параллельные стороне Aa фигуры, и дополнить параллелограммы $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$ и т. д., затем, уменьшая ширину этих параллелограммов, увеличивать их число до бесконечности, то я утверждаю, что последние отношения вписанной фигуры $AKbLcMdD$, описанной $AalbmcndoE$ и криволинейной $AabcdE$ друг к другу суть отношения равенства* (2).

Разность вписанной и описанной фигуры есть сумма параллелограммов Kl, Lm, Mn, ... (рис. 27), которая (вследствие равенства всех оснований) равна прямоугольнику, построенному на одном из оснований Kb, и сумме высот Aa, т. е. прямо-

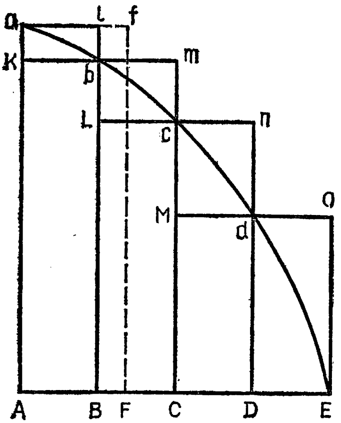


Рис. 27

угольнику $ABla$. Но этот прямоугольник, так как его ширина AB уменьшается бесконечно, становится менее любой заданной величины. Следовательно (по лемме I), фигура вписанная, фигура описанная и тем более заключающаяся между ними криволинейная будут между собой напоследок равны.

Лемма III. *Последние отношения тех же сумм параллелограммов суть отношения равенства и в том случае, когда ширины их AB, BC, CD, ... не равны между собою, но все уменьшаются бесконечно.*

Пусть AF равно наибольшей из ширин l и на ней построен параллелограмм $FAaf$. Этот параллелограмм будет больше разности фигуры вписанной и фигуры описанной; при бесконечном же уменьшении ширины его площадь становится менее площади любого заданного прямоугольника.

Следствие 1. Таким образом последняя сумма этих исчезающих параллелограммов вполне совпадает с площадью криволинейной фигуры.

Следствие 2. В еще большей мере прямолинейная фигура, ограниченная хордами дуг ab, bc, cd и т. д., напоследок совпадает с криволинейной фигурой.

Следствие 3. То же самое относится и к описанной прямолинейной фигуре, ограниченной касательными к сказанным дугам.

Следствие 4. Поэтому эти две последние фигуры (по отношению к периметру acE) не суть прямолинейные, но составляют криволинейные пределы прямолинейных (3).

Лемма IV. *Если в каждую из двух фигур $AacE$ и $PprT$ вписать (как выше) два ряда параллелограммов так, что число их то же самое, и если при бесконечном уменьшении ширин последние отношения параллелограммов одной фигуры к параллелограммам другой, каждого к ему соответствующему, между собою равны, то я утверждаю, что и самые фигуры $AacE$* и *$PprT$ находятся в том же отношении.*

В самом деле, в каком отношении находится каждый из параллелограммов одной фигуры (рис. 28) к ему соответствующему другой, в том же отношении друг к другу находятся и суммы всех их, т. е. одна фигура к другой, ибо (по лемме III) первая фигура к первой сумме и вторая ко второй сумме находятся в отношении равенства.

Следствие. Совершенно так же докажется, что если вообще две какого угодно рода величины будут разделены на одинаковое число частей и, при бесконечном возрастании числа их и уменьшении каждой из них, отношение их соответственно друг к другу, т. е. первой к первой, второй ко второй и т. д. по порядку, остается данным, то и самые целые будут находиться в том же данном отношении (4).

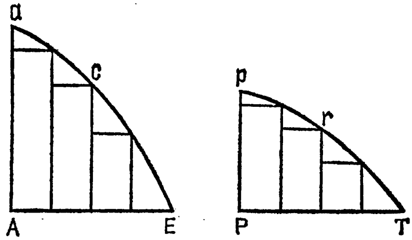


Рис. 28

. . . .

Лемма VI. *Если какая угодно заданная по положению дуга ACB стягивается хордой AB, и в какой-либо ее точке A, лежащей в области непрерывной кривизны, проведена касательная AD, продолженная в обе стороны, и если точки A и B приближаются друг к другу и совпадают, то я утверждаю, что угол BAD, заключенный между хордой и касательной, уменьшается бесконечно и под конец исчезает.*

Ибо, если бы этот угол не исчезал, между дугой *ACB* и касательной *AD* заключался бы угол, равный некоторому данному прямолинейному углу, и, следовательно, кривизна в точке *A* не была бы непрерывной, в противность предположению (рис. 29).

Лемма VII. *При тех же предположениях я утверждаю, что последнее отношение дуги, хорды и касательной друг к другу есть отношение равенства.*

. . . .

Следствие 3. Ввиду этого все эти линии, при всяком рассуждении о последних отношениях, могут быть взяты одна вместо другой (5).

. . . .

[Там же, с. 67—70]

Поучение

. . . .

Предыдущие леммы приведены, чтобы избежать утомительности длинных доказательств, основываясь по образцу древних на приведении к нелепости.

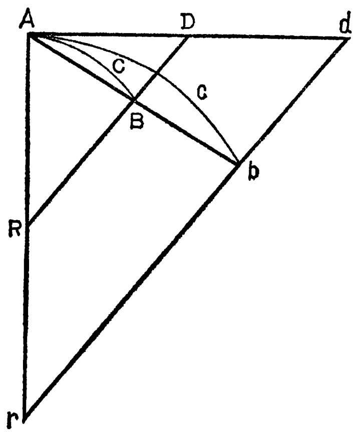


Рис. 29

Доказательства делаются более краткими и при помощи способа неделимых, но так как самая гипотеза неделимых грубовата (durior) и потому этот способ представляется менее геометричным, то я предпочитаю сводить доказательства всего последующего к первым и последним суммам и отношениям зарождающихся и исчезающих количеств, т. е. к пределам этих сумм и отношений; поэтому я и предпослал сколь можно краткие доказательства относительно этих пределов. Таким образом, достигается то же, что и по методу неделимых, и когда эти начала доказаны, мы можем ими пользоваться с большей уверенностью. Поэтому, если во всем последующем изложении я буду рассматривать какие-либо величины как бы состоящими из постоянных частиц или весьма малые кривые как прямые, то я буду иметь в виду не неделимые, но исчезающие делимые величины, и не суммы и не отношения определенных частей, но всегда лишь пределы сумм и отношений, и сущность этих доказательств всегда приводится к методу предыдущих лемм.

Возражают, что не существует последнего отношения исчезающих количеств, ибо то отношение, которое они имеют ранее исчезания, не есть последнее, после же исчезания нет никакого отношения. Но при таком и столь же натянутом рассуждении окажется, что у тела, достигающего какого-либо места, где движение прекращается, нет последней скорости, ибо та скорость, которую тело имеет ранее, нежели оно достигло места, не есть последняя, когда же достигло, то нет никакой скорости. Ответ простой: под последней скоростью я разумею ту, с которой тело движется не перед тем, как достигнуть последнего места, и движение прекращается, и не после того, а когда достигает, т. е. именно ту скорость, с которой тело достигает последнего места и с которой движение прекращается. Подобно этому под предельным отношением исчезающих количеств должно быть разумеемо отношение количеств не перед тем, как они исчезают, и не после того, но с которым исчезают. Точно так же и первое отношение зарождающихся количеств есть отношение, с которым они зарождаются. И первая или последняя сумма зарождающихся или исчезающих количеств есть та, с которой они начинают или прекращают быть (либо увеличиваться или уменьшаться). Существует предел, которого скорость в конце движения может достигнуть, но не может превзойти. Это и есть последняя скорость. Такова же причина существования предела всех зарождающихся или исчезающих количеств и отношений. И поскольку такой предел верный и определенный, то его нахождение есть задача истинно геометрическая. Все же геометрическое может быть законным образом применяемо при геометрических изысканиях и доказательствах.

Можно также возразить, что если существуют последние отношения исчезающих количеств, то существуют и последние величины их самих, и, следовательно, всякое количество должно состоять из неделимых, вопреки доказанному Евклидом в десятой книге «Начал» относительно несоизмеримых величин. Однако это возражение основано на неверном допущении. Последние отношения, с которыми исчезают количества, не суть на деле отношения последних количеств, но те пределы, к которым непрестанно приближаются отношения безгранично убывающих количеств и к которым они могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых не могут ни превзойти, ни достигнуть ранее, чем количества уменьшатся бесконечно. Дело объясняется проще на бесконечно больших количествах. Если два количества, разность которых задана, будут оба увеличиваться до бесконечности, то между ними существует последнее отношение, именно отношение равенства, однако нет самих последних или наибольших количеств с таким отношением. Поэтому если в последующем для большей простоты дела я буду говорить о наименьших, или исчезающих, или последних количествах, то остерегайтесь при этом разуметь количества определенной величины, но мыслите их себе непрестанно и безгранично уменьшающимися (6).

2) Вывод флюксии величины x^n.

ИЗ ВВЕДЕНИЯ К «РАССУЖДЕНИЮ О КВАДРАТУРЕ КРИВЫХ» И. НЬЮТОНА (около 1691 г., опубл. в 1704 г.)

[№ 32, с. 169]

III. *Величина x течет равномерно. Требуется найти флюксию величины x^n.*

В то же время, когда величина x в своем течении обращается в $x+o$, величина x^n переходит в $\overline{x+o}^n$, т. е. согласно методу бесконечных рядов в

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \text{ и т. д.}$$

Приращения

$$o \text{ и } nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \text{ и т. д.}$$

относятся между собой, как

$$1 \text{ к } nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \text{ и т. д.}$$

Если теперь эти приращения исчезают, то последнее их отношение будет 1 к nx^{n-1}, и поэтому флюксия величины x относится к флюксии величины x^n, как 1 к nx^{n-1} (7).

Пользуясь методом первых и последних отношений, можно с помощью аналогичных рассуждений получить в любых случаях флюксии как прямых, так и кривых линий, а также флюксии поверхностей, углов и других величин. Подобное построение анализа посредством конечных величин и исследование первых или последних отношений нарождающихся или исчезающих конечных величин согласно с геометрией древних, и я желал обнаружить, что в методе флюксий нет необходимости вводить в геометрию бесконечно малые фигуры.

Можно, правда, провести анализ на каких угодно фигурах, и конечных и бесконечно малых, которые представляют себе подобными исчезающим, так же как и на фигурах, которые в методах *неделимых* обычно считаются бесконечно малыми, но только при этом следует действовать с должной осторожностью.

Примечания. В ранних работах Ньютон применял бесконечно малые, не уточняя их природы, и свободно пользовался приемом отбрасывания бесконечно малых слагаемых. Он фактически не отказывался от этого приема и в последующих работах, однако только как средством исследования, а не доказательства. Уже около 1670 г., как мы видели, он переделывал в своих рукописях некоторые чисто инфинитезимальные выводы, прибегая к идее предельного перехода. Позднее, во введении к «Рассуждению о квадратуре кривых», написанном около 1691 г., он писал об отбрасывании бесконечно малых: «В математических вопросах не следует пренебрегать и самыми малыми ошибками» [№ 32, с. 168]. В основу метода флюксий и его приложений Ньютон положил учение о пределах, причем ввел в анализ самый термин limes — предел. Впервые он изложил несколько теорем о пределах в знаменитых «Математических началах натуральной философии» («Philosophiae naturalis principia mathematica», 1686), в которых устройство вселенной и прежде всего Солнечной системы объясняется с помощью закона всемирного тяготения. В «Математических началах» Ньютон привел лишь те предложения о пределах, которые были ему нужны для доказательств теорем механики. Здесь доказано в общей сложности 12 лемм (не считая следствий из них), причем 11 помещены в первом отделе I книги, а одна — в первом отделе II книги. Мы приводим прежде всего некоторые леммы I книги по изданию «Начал» 1726 г. и в переводе, несколько отличающемся от известного перевода А. Н. Крылова. К этому присоединен вывод флюксии степенной функции, данный Ньютоном во введении к «Рассуждению о квадратуре кривых» («Tractatus de quadratura curvarum», 1704) — это сочинение посвящено было главным образом интегрированию иррациональных функций.

Ньютон нигде не сообщил определения понятия предела, и у него почти нет общих теорем о свойствах пределов, которые считаются интуитивно ясными. Рассматривая, как правило, величины, изменяющиеся по времени непрерывно (слово «время» следует брать в абстрактном смысле универсального аргумента всех функций), Ньютон представлял себе, что ограниченные величины, вообще говоря, достигают своих пределов, если таковые существуют; он не исключал из рассмотрения и односторонние пределы.

Метод пределов Ньютона получил дальнейшее развитие в XVIII в. как в Англии, так и на континенте Европы, а затем в первой половине XIX в. был соединен с методом бесконечно малых Лейбница (см. далее отрывки п. 8, б и п. 9, б). О методе пределов Ньютона см. также статьи А. Н. Колмогорова [№ 18] и Ф. Д. Крамара [№ 20].

1. Содержание этой основной леммы таково: если при $t \to t_0$ разность функций $u(t)$ и $v(t)$ становится меньше любой данной величины (мы бы добавили: по абсолютному значению), то $\lim\limits_{t \to t_0} u(t) = \lim\limits_{t \to t_0} v(t)$; существование этих пределов или одного из них предполагается.

2. Ньютон различал последние отношения и первые отношения величин, иногда называя те и другие общим термином «предел», смысл этих понятий ясен из текста.

3. 2-я и 3-я леммы заменяют при квадратурах античные доказательства с их приведениями к нелепости.

4. Эта лемма, а также ее следствие, заменяющие аналогичное предложение метода неделимых, часто применяются в «Математических началах» для

определения, например, площади искомой кривой по известной площади другой кривой путем сравнения их координат.

5. Тот принцип, что при разыскании предела отношения бесконечно малых каждую можно заменить на равносильную величину, Ньютон применял и в других случаях; в «Методе флюксий» он его высказал в общей форме [№ 32, с. 101].

6. В «Поучении» Ньютон указывает общие преимущества метода пределов в сравнении с методом исчерпывания, с одной стороны, и методом неделимых — с другой, а затем разбирает возможные возражения против теории пределов. Вопрос о том, что следует понимать под отношением исчезающих величин (более точного определения которых Ньютон не дал, как и понятия предела), обсуждался на протяжении всего XVIII в. По Ньютону, переменные, вообще говоря, в конце концов достигают своих предельных значений и для обоснования существования предела отношения исчезающих количеств он апеллировал к очевидному с его точки зрения факту существования мгновенной (односторонней) скорости тела в момент остановки движения. Позднее понятие мгновенной скорости утратило наглядность и ясность и такие доводы потеряли в глазах математиков силу (ср. далее отрывок п. 8, б, с. 157).

7. Читатель сравнит это доказательство, опирающееся на биномиальное разложение при любом показателе n (и на допущение, что сумма бесконечного числа его членов, содержащих множитель o, стремится вместе с o к нулю), с доказательством в сочинении «Об анализе» (см. выше отрывок п. 5, б).

ж. МОМЕНТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ИЗ «МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАЧАЛ НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ» И. НЬЮТОНА (1686)

[№ 22, с. 331—333]

Лемма II. *Момент произведенного равен сумме моментов отдельных производящих сторон, умноженных на показатели их степеней и коэффициенты* (1).

Я называю произведенным всякое количество, которое в арифметике производится умножением, делением и извлечением корней из каких-либо сторон или членов; в геометрии же образованием объемов (contentorum) и сторон, крайних и средних пропорциональных, без сложения и вычитания. К такого рода количествам относятся: произведения, частные, корни, прямоугольники, квадраты, кубы, стороны квадратов и кубов и т. п. Я рассматриваю здесь эти количества как неопределенные и изменяющиеся и как бы возрастающие и убывающие от постоянного движения или течения и под словом «моменты» понимаю их мгновенные приращения или уменьшения, так что приращения почитаются за прибавляемые или положительные моменты, уменьшения — за вычитаемые или за отрицательные. Но остерегись принимать за таковые конечные частицы. Конечные частицы не суть моменты, но суть сами количества, из моментов происходящие. Надо понимать так, что это суть лишь едва-едва зарождающиеся начала конечных величин. На самом деле в этой лемме рассматривается не величина моментов, но лишь первое отношение зарождающихся (2). То же самое получится, если вместо моментов брать или скорости увеличений, или уменьшений (которые поэтому можно называть движениями, изменениями или флюксиями количеств), или же какие угодно конечные количества, этим скоростям пропорциональные (3). Коэффициентом какой-либо производящей стороны является количество, возникающее при приложении произведенного к этой стороне (4).

Таким образом, смысл леммы тот, что если моменты каких-либо возрастающих или убывающих непрерывным течением количеств A, B, C и т. д. или же пропорциональные им скорости изменения суть a, b, c и т. д., то момент или изменение произведенного прямоугольника AB будет $aB+bA$, момент же произведенного объема ABC будет $aBC+bAC+cAB$; моменты произведенных степеней A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2} и $A^{-\frac{1}{2}}$ соответственно будут: $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$. Вообще момент какой-либо степени $A^{\frac{m}{n}}$ будет $\frac{m}{n}aA^{\frac{n-m}{n}}$. Точно так же для произведенного A^2B момент будет $2aAB+bA^2$, для произведенного $A^3B^4C^2$ момент равен $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$ и для произведенного $\frac{A^3}{B^2}$ или A^3B^{-2} момент есть $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$ и т. д. Доказывается эта лемма следующим образом.

Случай 1. Пусть какой-либо возрастающий непрерывным движением прямоугольник AB, когда до сторон A и B не хватало по половине моментов $\frac{1}{2}a$ и $\frac{1}{2}b$, был $\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}b\right)$, т. е. $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$, после же того как стороны A и B увеличились на вторую половину своих моментов, прямоугольник стал $\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)$, т. е. $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. По вычитании из этого прямоугольника предыдущего получается избыток $aB+bA$. Следовательно, полные приращения сторон a и b производят приращение прямоугольника, равное $aB+bA$, ч. т. д. (5).

Случай 2. Если положить $AB=G$, то (согласно 1-му случаю) момент объема ABC или GC будет $gC+Gc$, т. е. (написав AB и $aB+bA$ вместо G и g) $aBC+bAC+cAB$. Это относится к объему со сколькими угодно сторонами, ч. т. д.

Случай 3. Если положить, что стороны A, B, C между собою равны, для A^2, т. е. прямоугольника AB, момент $aB+bA$, будет $2aA$ и для A^3, т. е. объема ABC, момент $aAC+bAC+cAB$ будет $3aA^2$. На основании такого же рассуждения момент какой угодно степени A^n есть naA^{n-1}, ч. т. д.

Случай 4. Так как $\frac{1}{A}\cdot A=1$, то момент $\frac{1}{A}$, проведенный к A, плюс $\frac{1}{A}$, проведенная к a (6), будет равен моменту 1, т. е. нулю; поэтому момент $\frac{1}{A}$, или, что то же, момент A^{-1}, есть $-\frac{a}{A^2}$. Вообще, так как $\frac{1}{A^n}\cdot A^n$ есть 1, то момент A^n, проведенного к A^n, вместе с $\frac{1}{A^n}$, проведенной к naA^{n-1}, будет нулем. Поэтому момент $\frac{1}{A^n}$, или A^{-n}, будет $-\frac{na}{A^{n+1}}$, ч. т. д.

Случай 5. И так как $A^{\frac{1}{2}}\cdot A^{\frac{1}{2}}=A$, то согласно 3-му случаю момент $A^{\frac{1}{2}}$, проведенный к $2A^{\frac{1}{2}}$, будет a; значит, момент $A^{\frac{1}{2}}$ будет $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$, или $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Вообще если положить $A^{\frac{m}{n}}$ равным B, то A^m будет равно B^n, поэтому maA^{m-1} равно nbB^{n-1} и maA^{-1} равно nbB^{-1} или $nbA^{-\frac{m}{n}}$, значит, $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ равно b, т. е. равно моменту $A^{\frac{m}{n}}$, ч. т. д.

Случай 6. Следовательно, момент какого угодно произведенного A^mB^n есть момент A^m, проведенный к B^n, вместе с моментом B^n, проведенным к A^m, т. е. $maA^{m-1}\cdot B^n+nbB^{n-1}\cdot A^m$, причем показатели степеней m и n могут быть числами целыми или дробными, положительными или отрицательными. Это же относится к объему (contento) со многими степенями, ч. т. д. (7).

Примечания. 1. В данной лемме Ньютон, превосходно владевший алгеброй Декарта, применяет терминологию, во многом восходящую к алгебре Виета. Произведение количеств он называет genita, от genere—порождать, производить, и мы перевели этот термин как «произведенное», чтобы отличить от произведения, которое Ньютон тут же называет factum (facere—делать, производить). Сомножители называются производящими сторонами или коэффициентами (ср. к. I, ч. I, п. 7, а). В лемме речь идет о дифференцировании произведения нескольких величин.

2. Описание бесконечно малых моментов, данное здесь Ньютоном, вызвало впоследствии целый ряд недоумений и возражений. Характерно, что Ньютон стремится сразу перейти от «едва-едва зарождающихся начал конечных величин» к их первым отношениям, т. е. пределам. Несколько далее, в примерах, он формулирует лемму в двух вариантах: как предложение о моменте (дифференциале) произведения и как предложение об изменении или флюксии (производной) произведения.

3. Это единственное место в «Математических началах», где встречается термин «флюксия», как скорость изменения количества.

4. Напомним, что приложение величин соответствовало в алгебре Виета делению. В данном случае, например, коэффициентом количества A в произведении ABC будет частное $ABC:A$, т. е. BC.

5. Как уже говорилось, момент величины у Ньютона соответствует ее дифференциалу и пропорционален флюксии (т. е. производной). Прием вычисления момента произведения, предложенный Ньютоном, позволял, казалось

бы, обойтись без отбрасывания бесконечно малых. В действительности дело обстояло сложнее: вычисленный таким образом результат не есть момент, т. е. дифференциал произведения. Пусть $A=f(t)$ и $B=\varphi(t)$. Рассмотрим фиксированное значение $t=t_0$ и обозначим приращения этих функций при изменении аргумента на Δt через $\Delta f(t_0)=a$ и $\Delta\varphi(t_0)=b$. Ньютон фактически вычисляет $f(t_0)\Delta\varphi(t_0)+\varphi(t_0)\Delta f(t_0)$, а не дифференциал $f(t_0)\,d\varphi(t_0)+\varphi(t_0)\,df(t_0)$, и нетрудно подсчитать, что эти два выражения отличаются как раз на величину, пренебрежения которой Ньютон стремился избежать.

Искусственный вывод теоремы о моменте произведения был подвергнут критике Дж. Беркли (ср. далее отрывок п. 8, а).

6. Проведение величин в алгебре Виета соответствует их перемножению.

7. Мы опустили здесь три следствия, первое из которых совпадает по содержанию с 6-м следствием в наброске алгоритма вычисления флюксий, приведенном выше в п. 5, д.

Заметим, что данная лемма позволяла Ньютону вывести момент и флюксию частного $\frac{A}{B}=A\cdot B^{-1}$, чего он не делает, так как в этом не нуждается.

6. ИСЧИСЛЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ Г. В. ЛЕЙБНИЦА

а. ПЕРВЫЙ МЕМУАР ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

ИЗ СТАТЬИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА «НОВЫЙ МЕТОД МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ, А ТАКЖЕ КАСАТЕЛЬНЫХ, ДЛЯ КОТОРОГО НЕ СЛУЖАТ ПРЕПЯТСТВИЕМ НИ ДРОБНЫЕ, НИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, И ОСОБЫЙ ДЛЯ ЭТОГО РОД ИСЧИСЛЕНИЯ» (1684)

[№ 23, с. 166—170]

Допустим, что даны ось AX и ряд кривых VV, WW, YY, ZZ и их перпендикулярные к оси ординаты VX, WX, YX, ZX, которые мы назовем соответственно v, w, y, z; отсекаемый на оси отрезок AX назовем x (рис. 30).

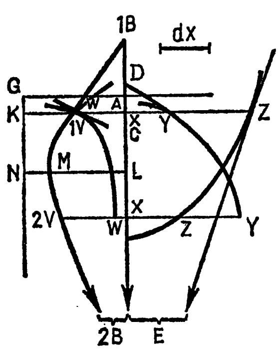


Рис. 30

Пусть VB, WC, YD, ZE будут касательные, пересекающие ось соответственно в точках B, C, D, E. Назовем произвольно взятую прямую dx, а другой отрезок, относящийся к dx так, как v (или w, или y, или z) относится к XB (или XC, или XD, или XE), назовем dv (или dw, или dy, или dz) или же разностью v (или w, или y, или z) (1). Если установить это, то правила исчисления будут следующими.

Если a представляет собой заданную постоянную величину (2), то da будет равно 0 и $d\overline{ax}$ равно adx. Если y равно v (или же каждая ордината кривой YY равна соответствующей ординате кривой VV), то dy равно dv. Далее, *Сложение* и *Вычитание:* если $z-y+w+x$ равно v, то $d\overline{z-y+w+x}$ или dv рав. $dz - dy + dw + dx$. *Умножение:* $d\overline{xv}$ рав. $x\,dv + v\,dx$ или, если положить y рав. xv, то dy рав. $x\,dv + v\,dx$. Можно по произволу пользоваться либо формулой с xv, либо же, для краткости, одной буквой, как, например, y. Заметим, что в этом исчислении с x и dx обращаются так же, как с y и dy или с какой-нибудь иной неопределенной буквой и ее дифференциалом (3). Заметим, также, что обратный переход от дифференциального уравнения получается лишь при некоторых условиях; но об этом в другом месте. Далее, *Деление:* $d\frac{v}{y}$ или же $\left(\text{если положить } z \text{ рав. } \frac{v}{y}\right) dz$ рав. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$ (4).

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Относительно *Знаков* нужно иметь в виду следующее. Если при вычислениях просто ставится вместо какой-нибудь буквы ее дифференциал, то сохраняются прежние знаки, и в случае $+z$ пишется $+dz$, а в случае $-z$ пишется $-dz$, как это ясно из только что рассмотренных сложения и вычитания. Но когда переходят к определению значений, т. е. когда принимают во внимание отношение (relatio) z к x (5), тогда выясняется, будет ли значение dz положительной величиной или же менее нуля, т. е. отрицательно. В последнем случае касательная ZE будет идти от точки Z не к A, но в противоположном направлении, книзу от X; это имеет место, когда при возрастающих x ординаты z убывают. А поскольку ординаты v то возрастают, то убывают, постольку dv будет количеством то положительным, то отрицательным. В первом случае касательная V_1B_1 будет направлена к A, во втором касательная V_2B_2 будет направлена в противоположную сторону. Ни того, ни другого не будет в промежуточном пункте M и в этот момент v ни возрастают, ни убывают, но находятся в стационарном положении. Тогда dv равн. 0, и все равно, будет ли величина положительной или отрицательной; ибо $+0$ рав. -0. В этом месте v, т. е. ордината

LM, *Максимальна* (или же, если к оси обращена выпуклая сторона, то *Минимальна*), а касательная к кривой в M не приближается к оси ни в направлении вверх от X к A, ни в противоположном направлении, книзу от X, но параллельна оси. Если dv относительно dx бесконечен, то касательная перпендикулярна к оси, т. е. является ординатой. Если dv и dx равны, то касательная образует с осью половину прямого угла. Если при возрастающих ординатах возрастают также их приращения или разности dv (т. е. при положительных dv положительны также разности разностей ddv или же при отрицательных dv отрицательны и ddv), то кривая обращена к оси своей *выпуклостью*, а в противном случае своей *вогнутостью*. Там, где приращение имеет максимум или минимум, т. е. приращения становятся из убывающих возрастающими, или наоборот, там находится *точка перегиба* и вогнутость с выпуклостью меняются местами,— если только при этом сами ординаты не становятся из возрастающих убывающими, или наоборот; в последнем случае сохраняется выпуклость или вогнутость. Случай, в котором приращения продолжают возрастать или убывать, а ординаты становятся из возрастающих убывающими, или наоборот, невозможен. Следовательно, точка перегиба имеет место, когда ни v, ни dv не равны 0, но ddv равен 0 (6). Поэтому в задаче о точке перегиба имеется три равных корня, а не два, как в задаче о максимуме. Все это зависит от правильного употребления знаков.

Иногда, как было указано ранее для *Деления*, следует применять *Двойные знаки*, прежде чем будет установлено, как их нужно употреблять далее. Если именно при возрастающих x отношения $\frac{v}{y}$ возрастают (убывают), то в $d\,\frac{v}{y}$, т. е. в $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$ следует писать двойные знаки с тем, чтобы эта дробь была положительной (отрицательной) величиной. Здесь $\mp$ выражает противоположное $\pm$, так что если первое есть $+$, то второе есть $-$, и наоборот. В одном и том же вычислении может встретиться несколько двузначностей, которые я различаю с помощью скобок. Если, например, $\frac{v}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{v}=w$, то

$$\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}+\frac{(\pm)y\,dz\,(\mp)\,z\,dy}{zz}+\frac{((+))\,x\,dv\,((\mp))\,v\,dx}{vv}=dw,$$

— в противном случае двузначности, происходящие от различных членов, перепутаются. При этом следует иметь в виду, что двойной знак сам по себе дает $+$, а вместе с противоположным ему дает $-$; вместе с другим двойным знаком он образует новую двузначность, зависящую от них обоих.

Степени: $dx^a = ax^{a-1}\,dx$. Например, $dx^3 = 3x^2\,dx$, $d\,\frac{1}{x^a} = -\frac{a\,dx}{x^{a+1}}$, например, если $w=\frac{1}{x^3}$, то $dw=\frac{-3dx}{x^4}$.

Корни: $d\sqrt[b]{x^a}=\frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$ (отсюда $d\sqrt[2]{y}=\frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, ибо в этом случае a есть 1 и b есть 2, а значит, $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ есть $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$; но, как это следует из природы показателей геометрической прогрессии, y^{-1} есть то же, что и $\frac{1}{y}$, а $\frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ есть $\frac{1}{2\sqrt[2]{y}}$).

$$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}=\frac{-a\,dx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}.$$

Впрочем, чтобы решить вопрос как для дробей, так и для корней, было бы достаточно правила для целочисленных степеней. Ибо степень бывает дробью, если показатель степени отрицательный, и она обращается в корень, если показатель степени дробный. Я предпочел вывести эти следствия сам, а не предоставить их другим, ибо они носят весьма общий характер и часто встречаются. Кроме того, в сложном деле лучше позаботиться о легкости.

Если знать, так сказать, *Алгоритм* этого исчисления, которое я называю *дифференциальным*, то все прочие дифференциальные уравнения (aequationes differentiales) смогут быть получены при помощи общего вычислительного приема, и можно будет находить максимумы и минимумы, а также касательные, не испытывая притом необходимости в устранении дробей или иррациональностей или других сложных выражений, как это приходилось, однако, делать, пользуясь доныне обнародованными методами (7). Доказательство всего этого будет легким для знакомого с этими вещами, если он только примет во внимание то недостаточно еще оцененное обстоятельство, что dx, dy, dv, dw, dz можно считать соответственно пропорциональными разностями или же мгновенными приращениями или уменьшениями x, y, v, w, z. Поэтому для каждого данного уравнения можно написать его дифференциальное уравнение. Это получится, если вместо каждого *члена* (т. е. части, участвующей в составе уравнения лишь при сложении или вычитании) просто поставить его дифференциальную величину, а вместо всякой другой величины (которая сама не является членом, но участвует в составе члена) применить, для составления дифференциальной величины члена, ее дифференциальную величину,— при этом не прямо, но согласно предписанному выше *Алгоритму*. Методы, обнародованные до сих пор, производить такой переход не позволяют. Они по большей части употребляют отрезок, вроде DX или какой-нибудь иной того же рода, а не отрезок dy, являющийся четвертым пропорциональным к DX, DY, dx, а благодаря этому все приходит в беспорядок. Поэтому они предлагают предварительно устранять дроби и иррациональности (в которые входят неопределенные величины). Очевидно также, что наш метод распространяется и на трансцендентные линии, которые не могут быть сведены к *Алгебраическому исчислению* или же которые не имеют никакой определенной степени (8), и притом распространяется самым общим способом, без каких-либо специальных, не всегда выполняющихся предпосылок. Для этого нужно только всегда держаться того, что найти *касательную* — значит провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало, или же провести продолженную сторону бесконечноугольного многоугольника, который для нас равнозначен *кривой*. А такое бесконечно малое расстояние можно всегда выразить с помощью какого-либо известного дифференциала, вроде dv, или же с помощью отношения к нему, т. е. с помощью некоторой известной касательной. Если бы y был, в частности, трансцендентной величиной, например ординатой циклоиды, и если бы он входил в вычисление, с помощью которого определялась z, ордината некоторой другой кривой, и требовалось бы найти dz или же через его посредство касательную ко второй кривой, то dz непременно можно было бы определить через dy, ибо касательная к циклоиде известна (9). А если бы мы допустили, что еще не имеем касательной к самой циклоиде, то ее можно было бы отыскать аналогично при помощи вычисления, основываясь на известном свойстве касательных к окружности (10).

. . . .

[Там же, с. 173]

... Но это лишь начала некоей много более высокой Геометрии, которая распространяется на труднейшие и прекраснейшие задачи прикладной Математики, и едва ли кому-либо удастся заняться с той же легкостью такими вещами, не пользуясь нашим дифференциальным исчислением или ему подобным. В качестве приложения я хочу добавить решение задачи, которую поставил перед Декартом Дебон и которую Декарт пытался, но не смог решить в 3 т. его переписки. Требуется найти линию WW, обладающую такой природой, что если WC есть проведенная к оси касательная, то XC всегда равно одному и тому же постоянному отрезку a. Именно: XW или w относится к XC или a, как dw к dx. Значит, если взять dx (который можно выбирать по произволу) постоянным или всегда одним и тем же, скажем b, т. е. если x или AX растут равномерно, то w рав. $\frac{a}{b}dw$. Таким образом, ординаты w пропорциональны dw, своим приращениям или разностям, т. е. если x образуют арифметическую прогрессию, то w образуют прогрессию геометрическую, или же если w суть числа, то x суть логарифмы. Следовательно, линия WW является логарифмической кривой (11).

Примечания. Лейбниц углубился в изучение современной ему математики уже в 26-летнем возрасте, осенью 1672 г., главным образом под влиянием бесед с Хр. Гюйгенсом. Алгебра и аналитическая геометрия Декарта, метод неделимых Кавальери и Валлиса, характеристический треугольник и интеграции Паскаля явились главным отправным пунктом его исследований, направленных на создание более общих инфинитезимальных методов в форме исчислений. В октябре — ноябре 1675 г. Лейбниц пришел к открытию первых начал дифференциального и интегрального исчисления. Метод флюксий Ньютона, опубликование которого задержалось на многие годы, оставался тогда Лейбницу неизвестным. Своими открытиями Лейбниц сперва делился лишь с немногими друзьями; в письме от 11 июня 1677 г., посланном Г. Ольденбургу для Ньютона, он изложил свои достижения, в частности приемы дифференцирования некоторых алгебраических функций, и применения дифференциалов к отысканию касательных и к квадратуре площадей. Все это не было для Ньютона новым, а особенного удобства в предложенном Лейбницем знаке дифференциала d он не усмотрел; на письмо Лейбница он не ответил. Друг Лейбница Э. фон Чирнгауз, с которым он был в регулярном общении, не оценил важности нового исчисления, так же как и Гюйгенс. Когда Чирнгауз сообщил некоторые результаты Лейбница, не упоминая его имени, в статьях, напечатанных в 1682 — 1683 гг., Лейбниц решил поторопиться с публикацией своих открытий и прежде всего поместил в незадолго перед тем основанном лейпцигском журнале «Acta eruditorum», т. е. «Труды ученых», статью, из которой мы приводим начальные страницы и заключение. Это был основоположный в развитии дифференциального исчисления мемуар «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus». В исчислении бесконечно малых Лейбница основными были понятия дифференциала функции, как ее бесконечно малого приращения, и интеграла, как суммы бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов, т. е. как определенного интеграла, причем прежде всего интеграла с переменным верхним пределом. Это сразу устанавливало взаимно обратную связь между дифференцированием и интегрированием. Созданию удобной символики Лейбниц постоянно придавал величайшее значение; выбранные им еще в 1675 г. знаки дифференциала d и интеграла $\int$ оказались исключительно удачными.

Мемуар о новом методе, написанный чрезвычайно сжато и без доказательств, представлял чрезвычайные трудности для чтения. Даже такой крупный математик, как Яков Бернулли, не сразу разобрался в его содержании. Но когда это ему удалось, он понял, какие здесь таились богатства, тотчас приобщил к ним своего младшего брата Иоганна и так началось формирование научной школы Лейбница.

1. Первоначально Лейбниц называл бесконечно малое приращение величины ее разностью — differentia (откуда происходит и знак дифференциала). Лейбниц определяет здесь дифференциал функции через подкасательную к соответствующей кривой $y=f(x)$ и dy можно записать формулой $dy=\frac{y\,dx}{s}$, где s — подкасательная, dx — произвольное приращение абсциссы. При таком определении можно было не говорить о бесконечно малых величинах. Фактически сам Лейбниц и его последователи рассматривали dx и dy как бесконечно малые приращения x и y и вычисляли дифференциалы с помощью принципа отбрасывания бесконечно малых (см. далее 4-е примечание).

Следует учесть, что Лейбниц не выбирал еще на оси абсцисс положительное направление, а подкасательные, независимо от их положения, рассматривал как положительные. С этим связаны его дальнейшие замечания о знаках и запись некоторых формул с двоякими знаками.

2. Лейбниц пишет здесь и далее «количество»; мы заменяем это слово на более привычную «величину».

3. Здесь сформулировано важное предложение об инвариантности формы дифференциала функции относительно преобразования аргумента функции.

4. Доказательства всех этих правил появились в печати только через 12 лет в «Анализе бесконечных малых» Лопиталя (см. далее отрывок п. 6, д).

5. Как видно, Лейбниц говорит здесь еще об отношении между переменными, а не о функции (см. выше отрывки п. 4).

6. Допускаемые в этом тексте неточности (несомненно, описки Лейбница) очевидны.

7. Ранее отмечалось, что дифференцирование рациональных и иррациональных функций сводилось в XVII в. к дифференцированию степенной функции с помощью предварительного избавления от дробей и радикалов. В дифференциальном исчислении такое приведение не требуется, и Лейбниц подчеркнул эту особенность своего алгоритма уже в заглавии данного мемуара.

8. Как говорилось (к. I, ч. III, отрывок п. 6, б), термины «трансцендентные» и «алгебраические» кривые принадлежат Лейбницу.

9. Циклоида, внимание к которой привлек Галилей (ему же принадлежит название кривой), часто служила в XVII в. образцом применения инфинитезимальных методов. В 1634 г. Роберваль произвел ее квадратуру, попутно введя синусоиду; в 1638 г. ее по-другому квадрировали Декарт и Ферма. Касательная к циклоиде была построена теми же французскими учеными, а также Торичелли и В. Вивиани. Ее спрямление произвели около 1657 г. Хр. Рен, Ферма и Г. ван Гейрет; объемы и центры тяжести связанных с нею тел вращения определил Б. Паскаль, Гюйгенс применил циклоиду в теории маятниковых часов, причем построил теорию эволют (опубл. в 1673 г.). В 1696 г., когда Иог. Бернулли поставил задачу о кривой быстрейшего спуска — брахистохроне, он сам, его брат Яков, Ньютон, Лейбниц и Лопиталь установили, что такой кривой является циклоида.

10. Мы опустили следующие далее примеры на касательные и экстремумы.

11. Здесь Лейбниц рассматривает одну из обратных задач на касательные, поставленных Декарту в 1638 г. Фл. Дебоном. О ее решении самим Декартом см. [№ 9, с. 192—196].

6. ИНТЕГРАЛ

1) Появление понятия интеграла в печати

ИЗ СТАТЬИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА «О ГЛУБОКО СКРЫТОЙ ГЕОМЕТРИИ И АНАЛИЗЕ НЕДЕЛИМЫХ, А ТАКЖЕ БЕСКОНЕЧНЫХ» (1686)

[№ 67, т. V, с. 230 — 231, перевод А. П. Юшкевича]

Вряд ли можно найти более полезное, краткое и более общее исчисление для трансцендентных проблем, в которых требуется отыскать с помощью вычисления размеры и касательные, чем мое *дифференциальное исчисление или анализ неделимых и бесконечных*, лишь небольшой образчик или же королларий которого содержится в моем методе касательных, опубликованном в Acta за октябрь 1684 г. (1). Оно было высоко оценено д-ром Крегом, который предположил, что в нем есть и большее, и на стр. 29 своей небольшой книги (2) попытался доказать теорему Барроу (о том, что сумма промежутков между ординатами и перпендикулярами к кривой, взятых на оси и приложенных к ней, равна половине квадрата конечной ординаты (3)). В этой попытке он несколько отклонился от своей цели, что в случае нового метода меня не удивляет; поэтому я полагаю, что смогу оказать ему и другим услугу, *сообщив здесь добавление к предмету, широкая польза которого несомненна*. Отсюда все замечательные теоремы и задачи такого рода вытекают столь легко, что обучать им и запоминать их нужно не более, чем заучивать различные теоремы обыкновенной геометрии тому, кто знает буквенную алгебру.

Я поступаю в этом вопросе следующим образом. Пусть будет ордината x, абсцисса y, промежуток между перпендикуляром и ординатой пусть будет p; согласно моему методу отсюда тотчас вытекает, что $pdy = xdx$, как нашел и д-р Крег (4). Если обратить дифференциальное уравнение в суммирующее, то будет $\int p\,dx = \int x\,dx$. Но из того, что я изложил в методе касательных, вытекает, что $d, \frac{1}{2}xx = x\,dx$; следовательно, и обратно, $\frac{1}{2}xx = \int x\,dx$ (у нас суммы и разности или $\int$ и d также взаимно обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении). Мы имеем, таким образом, что $\int p\,dy = \frac{1}{2}xx$, что и требовалось доказать. Я предпочитаю при этом употреблять dx и ему подобные, чем отдельные вместо них буквы, ибо этот dx есть некая модификация самого x и с его помощью получается, что в случае необходимости в вычисление входит одна только буква x с ее степенями и дифференциалами и выражаются трансцендентные отношения между x и другими величинами. Таким путем можно выражать посредством уравнений также и трансцендентные линии; например, если a будет дуга, x — синус-верзус, то $a = \int dx : \sqrt{2x - xx}$. Если ордината циклоиды будет y, то $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, каковое уравнение в совершенстве выражает отношение между ординатой y и абсциссой x, причем из него могут быть выведены все свойства циклоиды (5). Аналитическое исчисление распространяется таким образом и на те линии, которые до сих пор были исключены из него лишь по той причине, что его считали для этого непригодным (6). Отсюда получаются интерполяции Валлиса и бесчисленные иные следствия.

[Там же, с. 233]

...Перед тем как закончить, я здесь еще напомню, что в дифференциальных уравнениях, вроде приведенного несколько ранее $a = \int \overline{dx\sqrt{1 - xx}}$, не следует опрометчиво пренебрегать dx, потому что им можно пренебречь в случае, когда x считают возрастающим равномерно. Очень многие ошибались и преграждали себе путь к дальнейшему именно потому, что не сохраняли за неделимыми такого рода, как dx, надлежащую универсальность (так, чтобы ряд значений x можно было считать каким угодно). А между тем из одного этого вытекают бесчисленные равносильные преобразования (transmutationes et aequipotentiae) фигур (7).

2) Постоянная интегрирования

ИЗ СТАТЬИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА «ПОДХОДЯЩЕЕ ПОСТРОЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПАРАЦЕНТРИЧЕСКОЙ ИЗОХРОННОЙ КРИВОЙ» (1694)

[№ 23, с. 177]

...Из (8) и (9) получается $dt:\sqrt{at}=adz:\sqrt{a^3z-az^3}$ (10), откуда, суммируя, $2\sqrt{at}=aa\int dz:\sqrt{a^3z-az^3}+b$, где b есть *произвольно взятая постоянная величина* (8). Так можно поступать при суммировании, если это не запрещается условиями задачи. Поскольку я заметил, что это соблюдается недостаточно, то я хочу здесь об этом напомнить, ибо это важно для *общности решений*. В самом деле, при неизменных точках H и A задаче удовлетворяют бесчисленные кривые, которые могут изменяться при изменении отрезка b, причем (насколько могу судить) можно найти такую искомую кривую, которая проходит через заданную точку.

3) Формула Лейбница — Ньютона

ИЗ СТАТЬИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА «ДОПОЛНЕНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ИЛИ НАИБОЛЕЕ ОБЩЕЕ ВЫПОЛНЕНИЕ ВСЕХ КВАДРАТУР ПРИ ПОМОЩИ ДВИЖЕНИЯ, А ТАКЖЕ МНОГООБРАЗНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПО ДАННОМУ СВОЙСТВУ КАСАТЕЛЬНЫХ» (1693)

[№ 67, т. V, с. 298—299, перевод А. П. Юшкевича (9)]

Теперь я покажу, *что общая проблема квадратур сводится к отысканию линии, имеющей данный закон наклона*, т. е. у которой стороны определенного характеристического треугольника находятся в данном отношении. После того я покажу, *что эту линию можно описать посредством придуманного нами движения* (рис. 31). А именно, я представляю себе у каждой кривой $C(C)$ *двойной характеристический треугольник*, определенный TBC и неопределенно малый GLC (10); они подобные. Неопределенно малый [треугольник] образован сторонами GL и LC, элементами координат CF, CB и основанием или гипотенузой GC, элементом дуги. Определенный же [треугольник] TBC образован осью, ординатой или касательной и выражает угол, образуемый направлением кривой (или ее касательной) с осью

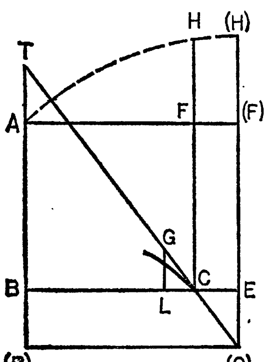


Рис. 31

или основанием, т.е. наклон кривой в рассматриваемой точке C. Требуется квадрировать область $F(H)$, заключенную между кривой $H(H)$, двумя параллельными прямыми FH и $(F)(H)$ и осью $F(F)$. Возьмем на оси фиксированную точку A и проведем через A перпендикулярно AF прямую AB как сопряженную ось. На каждой HF (продолженной, насколько требуется) возьмем точку C так, чтобы новая линия $C(C)$ обладала следующим свойством: если из точки C провести к (продолженной, если требуется) сопряженной оси сопряженную ординату CB (равную AF) и касательную CT, то лежащая между ними часть этой оси TB относится к BC, как HF к постоянному [отрезку] a, или же a на BT равняется прямоугольнику AFH (описанному вокруг трилинейника $AFHA$). Установив это, я утверждаю, что прямоугольник на a и $E(C)$, разности ординат кривой FC и $(F)(C)$, равен области $F(H)$. Таким образом, если продолженная линия $H(H)$ упирается в A, то трилинейник $AFHA$ квадрируемой фигуры равен прямоугольнику на постоянном [отрезке] a и ординате FC квадрирующей фигуры. Это тотчас показывает наше исчисление. Именно положим, что AF есть y, FH — z, BT — t, FC — x; тогда согласно нашему предположению $t = zy:a$; с другой стороны, согласно выраженной в нашем исчислении природе касательных, $t = y\,dx:dy$. Следовательно, $a\,dx = z\,dy$ и, значит, $ax = \int z\,dy = AFHA$. Таким образом, линия $C(C)$ является квадрирующей по отношению к линии $H(H)$, ибо ордината FC [линии] $C(C)$, проведенная к постоянному отрезку a, образует прямоугольник равной площади или же сумме ординат $H(H)$, приложенных к соответствующим абсциссам AF. Так как (по предположению) BT относится к AF, как FH к a, отношение же FH к AF (которое выражает природу квадрируемой фигуры) дано, то будет дано отношение BT к FH или к BC, а значит, и отношение BT к TC, т. е. отношение между сторонами треугольника TBC. Поэтому для всех квадратур, и значит выполнения измерений, нужно лишь по данному отношению сторон определенного характеристического треугольника TBC или же по данному закону наклона уметь описать кривую $C(C)$, которая, как мы показали, является квадрирующей (**11**).

Примечания. Понятие об интеграле и его символ, введенный Лейбницем еще осенью 1675 г., появились в печати два года спустя после мемуара о новом методе в статье «De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum» (1686).

В этой статье Лейбниц отчетливо подчеркнул взаимно обратный характер операторов d и S. Впрочем, слова «интеграл» и «интегрирование» здесь еще не употребляются: сперва Лейбниц говорил о сумме (откуда произошел и знак интеграла, как первая буква слова summa) и суммировании. Слово «интеграл» (от integer — целый) ввел И. Бернулли, и его приняли как Я. Бернулли (в печати оно впервые появляется в статье последнего в 1690 г.), так и Лейбниц. Мы приводим соответствующий отрывок из этой статьи, а также отрывок, где говорится о необходимости выписывать под знаком интеграла дифференциал переменной, по которой производится интегрирование (что, в другой терминологии, выражали еще Кавальери и Б. Паскаль).

В работе «О глубоко скрытой геометрии» с особенной силой выступает мысль, что новый «анализ бесконечных» (в такой комбинации эти два слова появляются именно здесь) распространяется на все трансцендентные величины, которые возникают, в частности, при интегрировании функций и дифференциальных уравнений. Здесь, между прочим, термин «характеристический треугольник» впервые публично отнесен к бесконечно малому треугольнику со сторонами dx, dy, ds.

1. Речь идет о «Новом методе», см. предыдущий отрывок.

2. В 1685 г. англичанин Дж. Крег опубликовал небольшую книгу «Метод определения квадратур фигур...» (Methodus figurarum ... quadraturas determinandi), в которой первым применил, со ссылкой на Лейбница, обозначения и терминологию дифференциального исчисления. Также поступал Крег и в других своих работах вплоть до 1708 г. Спор о приоритете в открытии исчисления бесконечно малых, разгоревшийся в начале XVIII в. между Ньютоном и Лейбницем, а также их сторонниками, повлек за собой, как упоминалось, полный отказ англичан от употребления исчисления бесконечно малых Лейбница, продолжавшийся до начала XIX в.

3. Речь идет, как сказали бы мы, о сумме произведений отрезков поднормали p на дифференциалы dx (здесь и далее Лейбниц берет ось y горизонтальной). Соответствующее предложение И. Барроу—первое в XI лекции его «Геометрических лекций» 1670 г. (см. выше отрывок п. 3, л).

4. Соотношение $p\,dy = x\,dx$ сразу следует из характеристического треугольника.

5. Не располагая знаками обратных тригонометрических функций, Лейбниц не мог аналитически выразить входящий в уравнение циклоиды интеграл.

6. Лейбниц возражает против исключения из геометрии трансцендентных (механических) кривых, как предлагал Декарт.

7. «Преобразования» фигур соответствуют в данном случае преобразованию интегралов с помощью подстановок.

8. В статье «Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica» (1694) Лейбниц, исследуя задачу об определении кривой, обладающей некоторым заданным механическим свойством, и выразив эту кривую с помощью эллиптического интеграла, впервые ввел произвольную постоянную интегрирования. Таким образом, он располагал и общим понятием неопределенного интеграла. В конце цитируемого отрывка высказано убеждение, что во множестве интегральных кривых можно выделить такую, которая проходит через данную точку.

9. Статья «Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum, similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione» (1693) представляет интерес в двух отношениях. Здесь описан первый интегрирующий механизм, а предварительно устанавливаются некоторые общие предложения интегрального исчисления. Мы приводим центральный математический отрывок статьи.

Прежде всего Лейбниц по-новому выражает связь между двумя основными понятиями анализа. Раньше у него речь шла об интеграле и дифференциале, теперь же об интеграле (как площади) и производной (как наклоне касательной, т. е. тангенсе угла, образуемой касательной с осью координат; ср. выше теорему Барроу, отрывок п. 3, л). Затем, опять-таки в геометрической форме, доказано правило вычисления определенного интеграла через разность значений первообразной функции при верхнем и нижнем пределах, которое мы называем правилом Ньютона—Лейбница. Ньютон высказал его в «Методе флюксий», притом также применительно к квадратуре кривых: «Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений z, соответствующих частям абсцисс, ограниченным началом и концом площади» [№ 23, с. 121]. Здесь z есть величина, флюксией (производной) которой является ордината y квадрируемой кривой.

10. Треугольник конечных размеров Лейбниц называет здесь triangulum assignabilis от assignare — назначать, наделять, определять и т. п.; бесконечно малый треугольник называется triangulum inassignabilis. Мы переводим соответственно: определенный и неопределенно малый треугольники.

11. Передадим вывод Лейбница в наших обозначениях. Положим $a=1$ и запишем уравнение квадрируемой кривой $H(H)$ $z=f(y)$. Пусть кривая $C(C)$ с уравнением $x=F(y)$ такова, что для ее подкасательной $BT:y=z$, т. е. что $z=\frac{dx}{dy}$. Эта кривая является квадрирующей для $H(H)$. Если обозначить еще $AF=c$ и $A(F)=d$, то результат Лейбница гласит, что

$$\int_c^d f(y)\,dy=F(d)-F(c),\ \text{где}\ dF(y)=f(y)\,dy\ \text{или}\ \frac{dF(y)}{dy}=f(y).$$

Далее Лейбниц переходит к описанию интегрирующего механизма.

в. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ИЗ СТАТЬИ Г. В. ЛЕЙБНИЦА «ДОПОЛНЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЕСЯ НА ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ С ПОМОЩЬЮ НОВОГО НАИБОЛЕЕ ОБЩЕГО МЕТОДА БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ» (1693)

[№ 23, с. 177—178]

Бесконечные ряды находили ранее вслед за их первым изобретателем голштинцем Николаем Меркатором с помощью делений и вслед за великим геометром Исааком Ньютоном с помощью извлечения корней (1). Я нашел, что бесконечные ряды можно получать удобнее и более общим образом, если принимать искомый ряд за уже найденный, с тем чтобы коэффициенты членов определять в дальнейшем. Таким образом всегда можно прийти к ряду, когда свойство линии дано не только с помощью обыкновенного исчисления, но и в случае, когда оно дано сколь угодно сложным суммарным или дифференциальным или дифференцио-дифференциальным и т. д. уравнением (2). Искомое при этом в точности выражается рядом, если брать его целиком, и с любым приближением, если применять часть ряда. Суть дела станет ясной из примера. Пример этот, правда, легкий и уже был рассмотрен ранее, но зато он удобен для уразумения дела. Именно мы найдем логарифм по числу или же число по логарифму.

Пусть отношение или число будет $a+x,:a$; тогда, на основании квадратуры гиперболы, логарифм $y=\int, a\,dx:,\ a+x$ и, следовательно, $dy=a\,dx:,\ a+x$, или $a\,dy:dx+x\,dy:dx-a=0$. Если по данному числу ищется логарифм, то положим $y=bx+cx^2+ex^3+fx^4$ и т. д. Тогда $dy:dx=b+2cx+3ex^2+4fx^3$ и т. д.

и, значит,

$$0=\left\{\begin{array}{l} a\,dy:dx=ab+2acx+3aex^2+4afx^3 \quad \text{и т. д.} \\ +x\,dy:dx=+bx+2cx^2+3ex^3 \quad \text{и т. д.} \\ \quad -a=-a \end{array}\right\}=0$$

Для того чтобы в развернутом уравнении, содержащем лишь одну неопределенную величину x, все члены уничтожились или чтобы *уравнение* стало *тождественным*, должно быть $ab-a=0$, т. е. $b=1$, $2ac+b=0$, т. е. $c=-1:2a$, $3ae+2c=0$, т. е. $e=1:3a^2$, $4af+3e=0$, т. е. $f=-1:4a^3$ и т. д. Следовательно, $y=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2a}+$ $+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^4}{4a^3}$ и т. д.

Если, наоборот, по данному логарифму y требуется найти число $a+x$, $:a$ или же x, то следует написать $x=ly+my^2+$ $+ny^3+py^4$ и т. д. Тогда $dx:dy=l+2my+3ny^2+4py^3$ и т. д. Но, согласно предыдущему, по-прежнему $a+x-a\,dx:dy=0$, и поэтому

$$0=\left\{\begin{array}{l} a+x=a+ly+my^2+ny^3+py^4 \quad \text{и т. д.} \\ -a\,dx:dy=-la-2amy-3any^2-4apy^3-5aqy^4 \quad \text{и т. д.} \end{array}\right\}=0$$

Для того чтобы в последнем уравнении уничтожились все члены и оно стало тождественным, должно быть $l=1$, $m=$ $=(l:2a=)\,l:2a$, $n=(m:3a=)\,l:2\cdot 3a^2$, $p=(n:4a=)\,l:2\cdot 3\cdot 4a^3$ и т. д. Следовательно,

$$x=\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot 2a}+\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2}+\frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a^3} \quad \text{и т. д.} \qquad \mathbf{(3,4)}$$

Примечания. Для Лейбница, как и для Ньютона, наиболее мощным средством аналитического исследования служили степенные ряды. Мы приводим для примера отрывок из статьи «Supplementum geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae methodi generalissimi per series infinitas» (1693), в которой степенные ряды применяются к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Лейбниц начинает с простейшего случая разложения в ряд интеграла $\int \frac{a\,dx}{x+a}$ и затем получает ряд показательной функции. Он опирается при этом на метод неопределенных коэффициентов Декарта (см. выше отрывок п. 3, и).

1. Лейбниц имеет в виду приемы, изложенные в письмах Ньютона 1676 г. (см. выше отрывок п. 5, а). О Меркаторе см. там же, с. 89.

2. Дифференцио-дифференциальное уравнение — уравнение 2-го порядка.

3. Ср. вывод показательного ряда у Ньютона (отрывок п. 3, в).

4. Далее Лейбниц разбирает несколько более сложные примеры:

$$a^2dy^2=a^2dx^2+x^2dy^2 \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dy}=\frac{y-z}{a}.$$

г. ПРИНЦИПЫ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

1) ИЗ ПИСЬМА Г. В. ЛЕЙБНИЦА К П. ВАРИНЬОНУ от 2 февраля 1702 г.

[№ 23, с. 191 — 193]

Я весьма обязан Вам, сударь, и Вашим ученым, оказавшим мне честь своими размышлениями над тем, что я написал одному другу по поводу возражений, помещенных в Journal de Trevoux, против исчисления разностей и сумм. Я не припомню как следует выражений, которыми мог там пользоваться, но целью моей было показать, что нет нужды ставить математический анализ в зависимость от метафизических споров, ни утверждать, что в природе существуют строго бесконечно малые линии в сравнении с нашими, ни, следовательно, утверждать, что существуют линии, бесконечно бо́льшие, чем наши [и все же ограниченные, поскольку мне казалось, что бесконечное в строгом смысле должно иметь свои корни в неограниченном, без чего я не вижу средства найти основание, подходящее для его различения от конечного] (1). Чтобы избежать этих тонкостей и сделать рассуждения общепонятными, я нашел, что достаточно объяснить здесь бесконечное через несравнимое, другими словами, достаточно представить себе величины, несравненно бо́льшие или меньшие, чем наши. Это даст сколь угодно порядков несравнимых, поскольку то, что несравненно меньше, бесполезно принимать в расчет по сравнению с тем, что несравненно больше его. Так, частица магнетической материи, проходящая через стекло, несравнима с песчинкой, а эта песчинка с земным шаром, а этот шар с небосводом (2). С этой целью я некогда привел в Лейпцигских трудах (Actes de Leipzig) леммы о несравнимых, которые можно трактовать, по желанию, либо как строго бесконечные, либо же только как величины, которые не принимаются в расчет по сравнению с другими (3). Но вместе с тем следует иметь в виду, что так как сами эти обыкновенные несравнимые ни в коей мере не являются неизменными или определенными и могут быть взяты в наших геометрических рассуждениях сколь угодно малыми, то они дают тот же результат, что и строгие бесконечно малые (4). В самом деле, если какой-либо противник желает возражать против наших утверждений, то из нашего исчисления следует, что ошибка будет меньше, чем любая ошибка, какую он сможет указать, ибо в нашей власти взять несравнимо малое достаточно малым для этой цели, поскольку такую величину всегда можно взять сколь угодно малой. Быть может, Вы, сударь, это и имеете в виду, говоря о неисчерпаемом, и в этом, без сомнения, состоит строгое доказательство применяемого нами исчисления бесконечно малых. Удобство последнего заключается в том, что оно прямо, ясно и, указывая на источник открытия, дает то, что древние, вроде Архимеда, находили обходным путем с помощью их приведений к нелепости, причем, не располагая таким исчислением, они не могли приходить к сложным истинам или решениям, хотя и обладали основой открытия. Отсюда следует, что если кто-нибудь не допускает бесконечных и бесконечно малых линий в строго метафизическом смысле и в качестве действительных вещей, тот может надежно пользоваться ими как идеальными понятиями, сокращающими рассуждения и сходными с так называемыми в обыкновенном анализе мнимыми корнями (вроде, например, $\sqrt{-2}$), которые, несмотря на то, что их называют мнимыми, не перестают от этого быть полезными и даже необходимыми для аналитического выражения действительных величин. Так, например, без привлечения мнимых невозможно выразить аналитическое значение прямой, необходимой для трисекции данного угла, и также нельзя было бы установить наше исчисление трансцендентных, не применяя готовых исчезнуть разностей, причем сразу берется несравнимо малое вместо того, что можно брать без конца все меньшим и меньшим. Таким же образом представляют больше трех измерений и даже степени, показатели которых не суть обыкновенные числа, — все это для установления идей, способных сокращать рассуждения и основывающихся на реальностях.

Не следует все же воображать, что наука о бесконечном унижается этим объяснением и сводится к фикциям, ибо постоянно остается, говоря языком схоластики, синкатегорематическая бесконечность. Например, остается верным, что 2 равняется $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ и т. д., что есть бесконечный ряд, в котором содержатся сразу все дроби с числителем 1 и со знаменателями, образующими двойную геометрическую прогрессию, хотя здесь употребляют все время лишь обыкновенные числа и хотя не вводят никакой бесконечно малой дроби или же дроби, знаменатель которой был бы бесконечным числом. И мнимые корни имеют свое основание в вещах, и покойный г. Гюйгенс, когда я сообщил ему, что $\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}}+\sqrt[2]{1-\sqrt{-3}}$ равняется $\sqrt[2]{6}$, нашел это столь удивительным, что ответил мне, что в этом кроется нечто для нас непостижимое. Также можно сказать, что бесконечные и бесконечно малые обоснованы так, что в геометрии и даже в природе все происходит, как если бы они представляли собой совершенные реальности. Об этом свидетельствует не только наш геометрический анализ трансцендентных, но еще мой закон непрерывности, в силу которого допустимо рассматривать покой как бесконечно малое движение (т. е. как равносильный роду своей противоположности), и совпадение — как бесконечно малое расстояние, и равенство — как последнее из неравенств и т. д. (5).

г) ИЗ НЕОПУБЛИКОВАННОЙ РУКОПИСИ «НЕКИЙ ОБЩИЙ ПРИНЦИП, ПОЛЕЗНЫЙ НЕ ТОЛЬКО В МАТЕМАТИКЕ, НО И В ФИЗИКЕ И Т. Д.»

[№ 23, с. 193—194]

Этот *принцип всеобщего порядка* коренится в бесконечном и весьма полезен в рассуждениях, хотя до сих пор применялся он недостаточно и значение его не было оценено во всей его широте. Он абсолютно необходим в геометрии, но с успехом действует и в физике, ибо высшая мудрость, являющаяся источником вещей, действует в согласии с совершеннейшей геометрией и соблюдает гармонию ни с чем несравнимой красоты. Поэтому я часто пользуюсь для проверки этим принципом, как своего рода пробным камнем, с помощью которого можно сразу же и при одном лишь внешнем рассмотрении вскрыть ложность многих дурно связанных мнений. Сформулировать этот принцип можно следующим образом: если среди *данных* или принятых явлений различие двух явлений может стать меньше всякой данной величины, то оно вместе с тем необходимо станет меньше всякой величины и у *искомых* или последующих, вытекающих из данных (6). Или же, если выразить общедоступнее: *если явления (или данные) непрерывно сближаются так, что напоследок одно переходит в другое, то это же должно произойти и с соответствующими последующими или результатами (или искомыми).* Это зависит от следующего, более общего принципа: *если упорядочены данные, то упорядочены и искомые.* Для того чтобы основание, на котором основывается применение этого правила, стало яснее, его следует проиллюстрировать на легких примерах (7).

Как известно, тенью или проекцией круга являются конические сечения, а проекция прямой есть прямая. Если, далее, прямая пересекает круг в двух точках, то и проекция прямой пересечет проекцию круга, скажем эллипс или гиперболу, в двух точках. Прямую, секущую круг, можно перемещать таким образом, чтобы она все более и более из него выступала, а точки пересечения все более и более сближались, покамест, наконец, не совпали бы,—в каковом случае прямая начнет выступать из круга или же его коснется. Но тогда и проекции точек пересечения прямой и круга, т. е. точки пересечения проекции прямой и проекции круга, будут непрерывно сближаться между собой, и когда, наконец, совпадут точки исходных пересечений, то совпадут и точки пересечения проекций. Значит, когда прямая коснется круга, проекция ее коснется конической линии, проекции круга. Так, с помощью легкого умосозерцания доказывается одна из важнейших теорем о конических сечениях, причем без околичностей и применения чертежей, и не по отдельности для каждого конического сечения, как обычно делают другие, но общим образом.

Возьмем *другой пример* из учения о конических сечениях. Как известно, случай ... эллипса можно сколь угодно приблизить к случаю параболы, так, чтобы различие между эллипсом и параболой стало менее любого данного различия, для чего нужно представить себе, что один из фокусов эллипса достаточно далеко отодвинется от другого, к нам ближайшего. Тогда все радиусы, исходящие из этого удалившегося фокуса, будут сколь угодно мало отличаться от параллелей. Поэтому, в силу нашего принципа, все геометрические теоремы об эллипсе смогут быть вообще применены к параболе, если только рассматривать последнюю как эллипс, один из фокусов которого бесконечно удален, или (если кто-либо хочет избежать выражения «бесконечный») как фигуру, отличающуюся от эллипса менее чем на любую данную величину.

Примечания. Как и многие другие новые и смелые научные теории, исчисление бесконечно малых с самого начала приобрело не только сторонников, но и противников. В Англии огромный авторитет Ньютона сдерживал при его жизни всякую критику, и выступление против метода флюксий Дж. Беркли состоялось почти через 10 лет после смерти его изобретателя (см. далее отрывок п. 8, а). Дифференциальное исчисление Лейбница вызвало возражения уже в 90-е годы XVII в. как в письмах, так и в печати и вскоре в бурных академических спорах (например, среди членов Парижской Академии наук в начале XVIII в.). Приводимое нами письмо Лейбница к П. Вариньону явилось ответом на письмо Вариньона от 28 ноября 1701 г., в котором тот писал о неблагоприятных откликах на одну заметку Лейбница, в которой отношение бесконечно малых величин к конечным иллюстрировалось сравнением песчинки с земным шаром и т. п. В своем ответе Лейбниц указывает на различные мыслимые подходы к идее бесконечности и бесконечной малости, не отдавая решительного предпочтения ни одному из них. Бесконечно малые можно толковать как несравнимые неархимедовы величины; как потенциально бесконечно малые (пренебрежение которыми порождает ошибки, меньшие любой заданной величины и, значит, в конце концов сводящиеся к нулю); их можно рассматривать также, как чисто фиктивные понятия, наподобие мнимостей, которые применяются ради их пользы и т. д. Какой-либо определенной системы обоснования исчисления бесконечно малых Лейбниц не выработал. В дополнение к цитируемому письму мы приводим еще отрывок из рукописи «Principium quoddam generale non in mathematicis tantum sed et physicis utile...», в которой Лейбниц изложил свой «принцип непрерывности».

1. Текст в квадратных скобках предполагалось при переписке черновика опустить.

2. Такие аналогии с весьма малыми, но вполне определенных размеров физическими величинами использовались некоторыми последователями Лейбница и в дальнейшем.

3. Лейбниц ссылается, по-видимому, на «Опыт о причинах небесных движений», напечатанный в Acta Eruditorum за 1689 г. [см. № 23, с. 187].

4. Как видно, Лейбниц не отдает предпочтения ни потенциально, ни актуально бесконечно малым. В наше время актуально бесконечно малые величины были, в известном смысле, реабилитированы и удалось построить систему «нестандартного анализа», оперирующего своеобразными неархимедовыми величинами [см. книгу А. Робинсона, № 74].

5. Эта мысль подробнее развита в следующем отрывке.

6. Не следует понимать это место, как определение непрерывности функции. У Лейбница такое истолкование принципа непрерывности не встречается.

7. Последующие примеры взяты из проективной теории конических сечений. Мы уже отмечали интерес Лейбница к проективной геометрии Б. Паскаля (см. к. I, ч. III, отрывок п. 7, в).

д. ИЗ ПЕРВОГО ПЕЧАТНОГО КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1) Постулаты дифференциального исчисления

ИЗ СОЧИНЕНИЯ Г. Ф. ДЕ ЛОПИТАЛЯ «АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ КРИВЫХ ЛИНИЙ» (1696)

[№ 25, с. 61 — 64]

Определение I. Переменными величинами называют такие величины, которые непрерывно увеличиваются или уменьшаются; наоборот, *постоянными* величинами называют такие величины, которые остаются одними и теми же, в то время как другие изменяются. Таким образом, в параболе ординаты и абсциссы представляют переменные величины, между тем как параметр есть величина постоянная.

Определение II. Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее *дифференциалом* (1) ...

Следствие

1. Очевидно, что дифференциал постоянной величины есть ничто или нуль, или (что то же самое) что постоянные величины не имеют дифференциала.

Предупреждение

В дальнейшем для обозначения дифференциала переменной величины, которая сама выражается одной буквой, мы будем пользоваться знаком или символом d; во избежание недоразумений этот знак d не будет иметь иного употребления в дальнейшей части книги...

I. *Требование или допущение*

2. Требуется чтобы две величины, отличающиеся друг от друга лишь на бесконечно малую величину, можно было брать безразлично одну вместо другой, или же (что то же самое) чтобы величина, которая увеличивается или уменьшается лишь на другую величину, бесконечно меньшую, чем она сама, могла быть рассматриваема как остающаяся той же самой величиной...

II. *Требование или допущение*

3. Требуется, чтобы можно было рассматривать кривую линию как совокупность бесконечного множества бесконечно малых прямых линий, или же (что то же самое) как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, определяющих образуемыми ими между собой углами кривизну линии...

2) Правило проведения касательных

[Там же, с. 77—78]

Определение. Если продолжить одну из маленьких сторон Mm (рис. 32) многоугольника, составляющего (§ 3) кривую линию, то эта продолженная таким образом маленькая сторона будет называться *касательной* к кривой в точке M или m.

Предложение I. Задача.

9. Пусть *кривая линия AM* (рис. 33) *такова, что отношение абсциссы AP к ординате PM выражается каким-либо уравнением, и пусть требуется провести в данной точке M этой кривой касательную MT.*

Проведем ординату MP и предположим, что прямая MT, встречающая диаметр в точке T, есть искомая касательная. Представим себе другую ординату mp, бесконечно близкую к первой, и проведем маленькую прямую MR, параллельную AP. Обозначим данные AP через x; PM через y (следовательно, Pp или $MR=dx$ и $Rm=dy$); в таком случае подобные треугольники mRM и MPT дадут:

$$mR\,(dy)\cdot RM\,(dx)::MP\,(y)\cdot pT=\frac{y\,dx}{dy}.$$

Но при помощи дифференциала данного уравнения мы найдем значение dx, выраженное в членах, которые все содержат множитель dy; если это выражение умножить на y и разделить на dy, то получится значение подкасательной PT, выраженное во вполне известных и свободных от дифференциалов членах; это значение и послужит для проведения искомой касательной MT (2).

3) Правило И. Бернулли — Лопиталя

[Там же, с. 308—309]

Предложение I. Задача.

163. *Пусть величина ординаты y кривой AMD* (рис. 34) ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) *выражается дробью, числитель и знаменатель которой обращаются в нуль при $x=a$, т. е. когда точка P совпадает с данной точкой B. Спрашивается, какой должна быть при этом величина ординаты BD.*

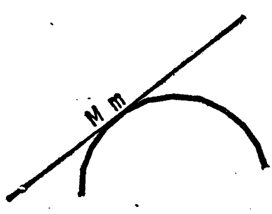


Рис. 32

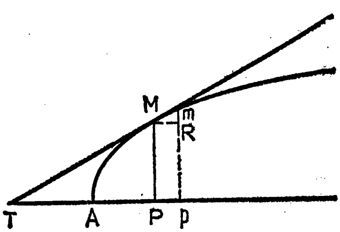


Рис. 33

Пусть имеются две кривые ANB и COB, общей осью которых является линия AB, причем ордината PN выражает числитель, а ордината PO — знаменатель общей дроби, подходящей для всех PM, так что

$$PM = \frac{AB \times PN}{PO}.$$

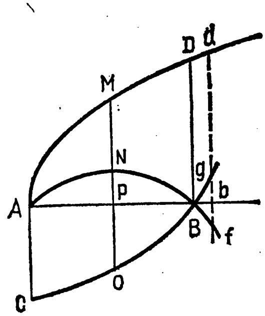


Рис. 34

Очевидно, что обе кривые пересекутся в точке B, так как по предположению и PN и PO обращаются в нуль, когда точка P совпадает с B. Если теперь представить себе ординату bd, бесконечно близкую к BD и пересекающую кривые ANB и COB в точках f и g, то получим:

$$bd = \frac{AB \times bf}{bg},$$

что не отличается (§ 2) от BD. Значит, остается найти отношение bg к bf. Но очевидно, что когда абсцисса AP обращается в AB, то ординаты PN и PO обращаются в нуль, а когда AP обращается в Ab, ординаты обращаются в bf и bg. Отсюда следует, что эти ординаты bf и bg суть дифференциалы ординат кривых ANB и COB в точках B и b. Следовательно, если взять дифференциал числителя и разделить его на дифференциал знаменателя, положив $x=a=Ab$ или AB, то мы получим искомое значение ординаты bd или BD. Что и требовалось найти (3).

Примечания. В распространении исчисления бесконечно малых большую роль сыграла книга Г. Ф. де Лопиталя «Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes» (1696), которая служила основным руководством по дифференциальному исчислению многие десятилетия. Пятое французское издание ее вышло в 1781 г., английский перевод в 1730 г. (причем дифференциалы были заменены на флюксии), в 1764 г. в Вене появился и латинский перевод; кроме того, было издано несколько комментариев к ней, из них один, составленный П. Вариньоном (1725). Этот успех был заслуженным; «Анализ бесконечно малых» обладал крупными педагогическими достоинствами; вместе с тем все его теоретическое содержание принадлежало Лейбницу и Иог. и Як. Бернулли. Особенно большую роль в подготовке книги сыграли лекции Иог. Бернулли, составленные им для Лопиталя в 1690—1692 гг. и широко использованные последним по обоюдному соглашению, а кроме того, обширная переписка между обоими, в которой обсуждались как общие вопросы, так и отдельные задачи. Часть лекций Бернулли, посвященная интегральному исчислению, была напечатана в собрании его сочинений в 1742 г., но лекции по дифференциальному исчислению остались тогда в рукописи и были изданы как исторический документ, только в 1922 г.

Мы приводим три отрывка из «Анализа бесконечно малых». В первом разъясняются основные понятия и принципы дифференциального исчисления. Два выставленных здесь «требования или допущения» регулярно применялись Лейбницем и его последователями и оба были сформулированы в лекциях Иог. Бернулли. В первом содержится принцип отбрасывания бесконечно малых, во втором кривая рассматривается как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон (он был высказан в печати еще Дж. Валлисом в его «Арифметике бесконечных», 1656 г.). Во втором отрывке выведена формула для отрезка подкасательной, а в третьем — правило «раскрытия неопределенностей» вида $\frac{0}{0}$.

1. Лопиталь употребил термин différence (разность), который везде, где следует по смыслу, переводится через «дифференциал».

2. В «Замечании» Лопиталь добавляет, что в случае положительного значения $y\frac{dx}{dy}$ точку T следует брать с той же стороны, что и начало A относительно P, в случае же отрицательного значения — с противоположной стороны, и поясняет это на примерах параболы $ax=y^2$ и гиперболы $a^2=xy$.

3. Это правило, до сих пор носящее имя Лопиталя, было сообщено ему Иог. Бернулли вместе с таким же выводом в записке, приложенной к письму от 22 июля 1694 г. [см. № 50, с. 235—236].

е. МЕТОД ИЗОКЛИН И. БЕРНУЛЛИ

ИЗ ПИСЬМА ИОГ. БЕРНУЛЛИ Г. Ф. ЛОПИТАЛЮ от конца декабря 1694 г.

[№ 50, с. 247—249]

... Что касается данного мною метода построения дифференциальных уравнений первого порядка (degrez), я думал, что объяснил его довольно понятно (1); поскольку, однако, бывает трудно понять общие методы, если они не применены к какому-либо частному случаю, я поясню вам мой метод на том же примере $xx\,dy+yy\,dx=aa\,dy$ (2).

Если бы это уравнение хотели построить обычным способом, нужно было бы попытаться отделить неопределенные x и y и их дифференциалы dx и dy, но, поскольку такое отделение удается произвести не всегда, этот метод оказывается бесполезным в данном примере, как и во многих других: поэтому-то я изыскал прием, который, не нуждаясь в подобном отделении, мог бы быть применен во всех примерах. Это делается так: я вижу, что если бы отношение dx и dy было бы выражено алгебраически, то для кривой $xx\,dy+yy\,dx=aa\,dy$ получилось бы чисто алгебраическое уравнение. Допустим же, что dx относится к dy, как постоянная и известная a к неопределенной и неизвестной m, так что неопределенное отношение a к m выражает все мыслимые отношения dx к dy. Тогда в данное дифференциальное уравнение можно будет подставить a и m вместо dx и dy, что дает такое алгебраическое уравнение $xx+yy=am$, которое, содержа три неопределенные, выражает не одну, а бесконечное множество кривых, которые я называю *направляющими* и которые в данном случае суть концентрические круги с радиусами $\sqrt{am}$. С помощью этих кругов, имеющих общий центр в начале абсцисс x, я буду строить бесчисленные требуемые кривые, соответствующие уравнению $xx\,dy+yy\,dx=aa\,dy$. Пусть ABC, ADL, AEM, AFN и т. д. суть бесконечно близкие направляющие круги (рис. 35). Приняв какой-либо из них, например ABC, за первый, я из произвольно взятой на его окружности точки C провожу маленькую линию LC, заканчивающуюся на следующей окружности DL, так, чтобы наклон линии LC к оси AB был равен отношению dy к dx, т. е. m к a или же ABq (3) к квадрату постоянной $R=a$; при этом LC будет бесконечно малой частью требуемой кривой. Основание этой процедуры ясно из сказанного выше. Чтобы найти вторую малую часть кривой, я провожу LM с наклоном к оси AB, равным отношению AD к квадрату R; чтобы найти третью, я делаю наклон MN равным отношению AE к квадрату R и так далее. Если действовать так без конца, то будет описана искомая кривая $CLMNOP$. Здесь следует заметить, что если, как в этом примере, наклоны CL, LM, MN убывают, то другие наклоны NO, OP, PQ будут возрастать, и наоборот, ибо наклоны CL, LM, MN равны наклонам PQ, OP, NO. Отсюда следует, что там, где кривая $CLMNOPQ$ касается какого-либо из направляющих кругов, она имеет точку перегиба N. Пользуясь теперь только что описанной кривой как образцом, я легко начерчу все бесчисленные другие, просто проводя lc, lc, lc и т. д. параллельно LC и ml, ml, ml и т. д. параллельно ML, и также другие. Я утверждаю, что все кривые $clmn$, $clmn$, $clmn$ и т. д. удовлетворяют предложенному уравнению $xx\,dy+yy\,dx=aa\,dy$

Иоганн Бернулли

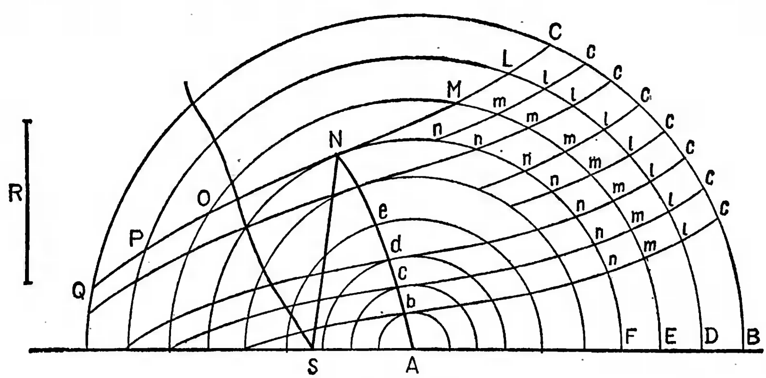


Рис. 35

и что каждая из них имеет точку касания, в которой касается какого-либо направляющего круга, точкой перегиба. Таким образом все эти точки образуют другую кривую $AbcdeN$, которая будет геометрической (4) не только в этом примере, но и во всех других. Чтобы определить эту кривую, нужно лишь на каждой направляющей кривой найти точку, в которой ее касательная имеет к оси наклон, равный отношению m к a, что делается с помощью обыкновенной геометрии. Положим $AS = r$, $SN = s$ и, значит, радиус

$$AF = \sqrt{rr + ss} \quad \text{и} \quad m = \frac{rr + ss}{a}.$$

По свойству круга

$$m \cdot a :: AS \cdot SN \ (5), \text{ т. е. } \frac{rr+ss}{a} \cdot a :: r \cdot s,$$

и это для природы кривой $AbcdeN$ дает $s^3 + rrs = aar$. То же уравнение найдется с помощью дифференциального исчисления, если искать точку перегиба по предложенному дифференциальному уравнению; однако только что данный мною метод более естественный, ибо не следует применять дифференциалы, когда задачу можно решить средствами обыкновенной геометрии.

Вот, таким образом, метод, найденный мною для общего построения дифференциальных уравнений. Он может широко использоваться на практике, когда удовлетворяются механическим построением, и чем больше проводится приближающихся друг к другу направляющих кривых, тем более приближаются к искомой истинной кривой. Кроме того, таким образом одинаково легко строются все дифференциальные уравнения, без применения каких-либо спрямлений и квадратур, между тем как обычный метод после преодоления величайшей трудности при отделении неопределенных (что, однако, чаще всего невозможно) требует еще спрямления или квадратуры, из-за чего его применение делается, так сказать, непрактичным.

Примечания. В 90-е годы XVII в. Лейбниц и братья Иог. и Яков Бернулли заметно продвинули вперед разработку приемов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом была поставлена проблема сведения решения к квадратурам. Это соответственно потребовало классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, и для некоторых классов уравнений I порядка удалось найти подстановки, позволяющие отделить переменные (однородные и линейные уравнения, уравнение Бернулли). Вместе с тем вскоре стало ясным, что сведение к квадратурам возможно лишь в отдельных случаях. Когда оно не удавалось, прибегали к помощи степенных рядов (ср. выше отрывок п. 6, в) или к геометрическому построению интегральных кривых. Этот последний прием был предложен Иог. Бернулли в одной статье 1694 г. (1) и пояснен в одном из его писем к Лопиталю от конца того же года. Мы приводим отрывок из этого письма. Интегральные кривые строятся с помощью изоклин в определяемом уравнением поле направлений. Помимо практического интереса, построения Бернулли имели теоретическое значение, убеждая в существовании бесчисленного множества интегральных кривых, каждая из которых однозначно определяется заданием какой-либо своей точки (первое аналитическое доказательство существования решения дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ при начальном условии $x=x_0$, $y=y_0$ и некоторых ограничениях, накладываемых на $f(x, y)$, дал в своих лекциях 1820—1830 гг. О. Коши, опубликовано в 1844 г). Более глубокое развитие метод изоклин получил в последней четверти XIX в., когда, по-видимому, был введен термин «изоклина», т. е. «равнонаклонная» линия (ἴσος — равный, одинаковый; κλίνω — наклоняю).

1. Имеется в виду статья «Общий прием построения всех дифференциальных уравнений первого порядка» («Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus»), 1694 г.

2. Этот пример часто приводится и в современных руководствах.

3. Запись ABq означает квадрат AB.

4. То есть алгебраической. В терминологии Декарта (1637 г.) выражение «геометрическая кривая» равносильно «алгебраической кривой» (термин Лейбница).

5. Т. е. в наших обозначениях, $m:a=AS:SN$ (см. примечание 1 к отрывку п. 3, л).

7. БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ В XVIII в.

а. РЯД ТЕЙЛОРА

ИЗ СОЧИНЕНИЯ Б. ТЕЙЛОРА «ПРЯМОЙ И ОБРАТНЫЙ МЕТОД ПРИРАЩЕНИЙ» (1715)

[№ 75, с. 21—23, перевод А. П. Юшкевича]

Предложение VII. Теорема III. Пусть z и x суть два переменных количества, из которых z равномерно возрастает на данные приращения $\underset{\cdot}{z}$, и пусть $n\underset{\cdot}{z}=v$, $v-\underset{\cdot}{z}=\grave{v}$, $\grave{v}-\underset{\cdot}{z}=\dot{v}$ и т. д. (1). Тогда я утверждаю, что в то время как z, возрастая, станет $z+v$, x, также возрастая, станет $x+\underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\underset{\cdot}{z}}+\underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\grave{v}}{1\cdot 2\cdot \underset{\cdot}{z}^2}+\underset{\therefore}{x}\frac{v\grave{v}\dot{v}}{1\cdot 2\cdot 3\underset{\cdot}{z}^3}+$ и т. д.

Доказательство

x	$\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\therefore}{x}$	и т. д.
$x+\underset{\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\therefore}{x}$	и т. д.	
$x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+2\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\therefore}{x}$	$\underset{\cdot\cdot}{x}+2\underset{\therefore}{x}+\underset{::}{x}$		
$x+3\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\therefore}{x}$	$\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+3\underset{\therefore}{x}+\underset{::}{x}$	и т. д.		
$x+4\underset{\cdot}{x}+6\underset{\cdot\cdot}{x}+4\underset{\therefore}{x}+\underset{::}{x}$	и т. д.			
и т. д.				

Последовательные значения x, полученные путем постоянного сложения, суть x, $x+\underset{\cdot}{x}$, $x+2\underset{\cdot}{x}+\underset{\cdot\cdot}{x}$, $x+3\underset{\cdot}{x}+3\underset{\cdot\cdot}{x}+\underset{\therefore}{x}$ и т. д., как ясно из действия, представленного в приложенной таблице.

Брук Тейлор

В этих значениях x численные коэффициенты членов x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$ и т. д. образуются таким же образом, как коэффициенты соответственных членов степени бинома. Если же показатель степени есть n, то (по ньютоновой теореме) коэффициенты будут $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$ и т. д.

Следовательно, в то время как z, возрастая, станет $z+nz$, т. е. $z+v$, x станет равным ряду $x+\frac{n}{1}\underset{\cdot}{x}+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\underset{\cdot\cdot}{x}+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n-2}{3}\underset{\therefore}{x}$ и т. д. Но $\frac{n}{1}=\left(\frac{n\underset{\cdot}{z}}{\underset{\cdot}{x}}=\right)\frac{v}{\underset{\cdot}{x}}$, $\frac{n-1}{2}=\left(\frac{n\underset{\cdot}{z}-\underset{\cdot}{z}}{2\underset{\cdot}{z}}=\right)\frac{\grave{v}}{2\underset{\cdot}{z}}$, $\frac{n-2}{3}=\left(\frac{n\underset{\cdot}{z}-2\underset{\cdot}{z}}{3\underset{\cdot}{z}}=\right)\frac{\dot{v}}{\underset{\cdot}{z}}$ и т. д. Поэтому, в то время как z, возрастая, станет $z+v$, x, возрастая, станет $x+\underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\cdot\underset{\cdot}{z}}+\underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\grave{v}}{1\cdot2\cdot\underset{\cdot}{z}^2}+\underset{\therefore}{x}\frac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1\cdot2\cdot3\cdot\underset{\cdot}{z}^3}$ $+$ и т. д.

Следствие I. Если оставить прежними $\underset{\cdot}{z}$, x, $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot\cdot}{x}$, $\underset{\therefore}{x}$ и т. д., но изменить знак v, то за такое же время, как z, убывая, станет $z-v$, x, убывая, станет $x-\underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\cdot\underset{\cdot}{z}}+\underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\grave{v}}{1\cdot2\cdot\underset{\cdot}{z}^2}-\underset{\therefore}{x}\frac{v\grave{v}\grave{\grave{v}}}{1\cdot2\cdot3\cdot\underset{\cdot}{z}^3}$ и т. д. или согласно нашему обозначению, заменяя $\grave{v}$, $\dot{v}$ и т. д. на $-\underset{\prime}{v}$, $-\underset{\prime\prime}{v}$ и т. д., $x-\underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\cdot\underset{\cdot}{z}}+\underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\underset{\prime}{v}}{1\cdot2\cdot\underset{\cdot}{z}^2}-\underset{\therefore}{x}\frac{v\underset{\prime}{v}\underset{\prime\prime}{v}}{1\cdot2\cdot3\cdot\underset{\cdot}{z}^3}$ и т. д.

Следствие II. Если вместо исчезающих приращений написать пропорциональные им флюксии и взять теперь все v, $\dot{v}$, $\grave{v}$, $\underset{\prime}{v}$, $\underset{\prime\prime}{v}$ и т. д. равными, то за время, когда в равномерном течении z станет $z+v$, x станет $x+\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\cdot\dot{z}^2}+\dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^3}$ и т. д. или же, изменив знак v, за время, когда z, убывая станет $z-v$, x, убывая, станет $x-\dot{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^2}{1\cdot2\cdot\dot{z}^2}-\dddot{x}\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^3}+$ и т. д. (2).

Примечания. Разложение в ряд, называемый теперь рядом Тейлора, было по существу известно около 1672 г. Дж. Грегори и, как недавно установил Д. Уайтсайд, имеется в одном рукописном тексте Ньютона, который он составил между концом 1691 и осенью 1692 г. и предполагал включить, но почему-то не включил в «Рассуждение о квадратуре кривых» (опубликовано в 1704 г.), [см. 11, т. III, с. 294—295]. Близко подошли к тому же ряду Лейбниц и Иог. Бернулли (1694). Из одного данного ими разложения интеграла $\int n(z)\,dz$ по степеням z ряд Тейлора можно получить с помощью несложного преобразования. Б. Тейлор пришел к знаменитому разложению, носящему его имя, самостоятельно: он сообщил о нем в одном письме к Дж. Мечину от 26 июля (6 августа) 1712 г., а затем опубликовал в сочинении «Methodus incrementorum directa et universa». Лишь после этого разложение, о котором идет речь, получило известность; Ж. Кондорсе назвал его теоремой Тейлора, С. Люилье — рядом Тейлора, и эти названия прочно укрепились в математической литературе.

Вывод Тейлора основан на применении интерполяционной формулы, найденной Дж. Грегори (1670) и Ньютоном. Ньютон опубликовал ее в «Математических началах натуральной философии» (1686) и в небольшом сочинении «Метод разностей» («Methodus differentialis»), составленном около 1675 г. и опубликованном в 1711 г. Эту формулу для приращения функции $x=f(z)$ при переходе от значения z к $z+v$ можно записать в виде

$$f(z+v)=f(z)+n\Delta f(z)+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f(z)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\Delta^3 f(z)+\ldots,$$

где $v=n\Delta z$, или в виде

$$f(z+v)=f(z)+v\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}+\frac{v(v-\Delta z)}{2}\,\frac{\Delta^2 f(z)}{\Delta z^2}+\frac{v(v-\Delta z)(v-2\Delta z)}{2\cdot 3}\,\frac{\Delta^3 f(z)}{\Delta z^3}+\ldots.$$

Полагая приращение Δz «исчезающим», Тейлор получил свое разложение; нестрогость такого вывода для нас очевидна.

1. Конечные разности величин Тейлор обозначал, ставя под ними точки; современные обозначения разностей ввел в своем «Дифференциальном исчислении» (1755) Л. Эйлер. Таким образом, $\underset{\cdot}{x}=\Delta x$, $\underset{\cdot\cdot}{x}=\Delta^2 x$, $\underset{\therefore}{x}=\Delta^3 x$ и т. д., $\underset{\cdot}{z}=\Delta z$, $\underset{\cdot\cdot}{z}=\underset{\therefore}{z}=\ldots=0$.

2. К. Маклорен во 2-м томе «Трактата о флюксиях» предложил другой вывод ряда Тейлора. Допуская возможность представления функции $y(z)$ рядом по степеням z с неопределенными коэффициентами

$$y=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots,$$

он нашел значения коэффициентов A, B, C ... с помощью последовательных дифференцирований и подстановки $z=0$. «Ряд Маклорена» он записал в виде

$$y=E+\frac{\dot{E}z}{\dot{z}}+\frac{\ddot{E}z^2}{1\times 2\dot{z}^2}+\frac{\dddot{E}z^3}{1\times 2\times 3\dot{z}^3}+\frac{\ddddot{E}z^4}{1\times 2\times 3\times 4\dot{z}^4}+\text{и т. д.},$$

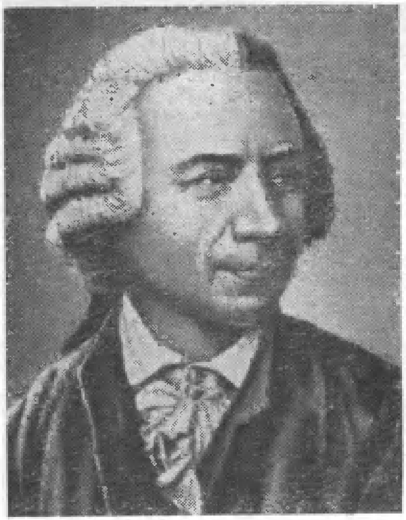
где E, $\dot{E}$, $\ddot{E}$, ... суть значения y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, ... при $z=0$ [см. № 69, т. II, с. 610—611]. Тем самым Маклорен установил, что степенной ряд, выражающий аналитическую функцию, — единственный и именно ее ряд Тейлора. Запись ряда Тейлора в символах дифференциального исчисления появляется у Эйлера. Об остаточном члене ряда Тейлора см. далее отрывок п. 8, в.

6. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В РЯД; ФОРМУЛЫ МУАВРА И ЭЙЛЕРА

ИЗ I ТОМА «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» Л. ЭЙЛЕРА (1748)

[№ 40, с. 88—90]

98. Значения показательного количества a^z в весьма сильной степени будут зависеть от величины постоянного числа a ... .



Леонард Эйлер

99. Еще гораздо бо́льшие скачки встречаются, когда постоянное a имеет отрицательное значение, например -2; тогда при подстановке вместо z целых чисел значения a^z будут попеременно положительными и отрицательными... Кроме того, если показателю z давать дробные значения, то степень $a^z=(-2)^z$ принимает то действительные, то мнимые значения; так, $a^{\frac{1}{2}}=$ $=\sqrt{-2}$ будет мнимым; $a^{\frac{1}{3}}=$ $=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$ — действительным; когда же показателю z даются иррациональные значения, то будет ли степень a^z давать действительные или мнимые количества, нельзя даже определить (1).

100. В силу указанных неудобств при подстановке вместо a отрицательных чисел будем считать a числом положительным, и притом бо́льшим, чем единица, так как к этому легко приводятся также те случаи, когда a есть число положительное, меньшее единицы. Если положить $a^z=y$, то при подстановке вместо z всех действительных чисел, заключающихся между пределами $+\infty$ и $-\infty$, y примет все положительные значения между $+\infty$ и 0. Если $z=\infty$, то $y=\infty$; когда $z=0$, то $y=1$, и при $z=-\infty$ будет $y=0$. Следовательно, и обратно, какое бы положительное значение ни принять для y, для z получится соответственное действительное значение, так что будет $a^z=y$, если же придать y отрицательное значение, то показатель z не может иметь действительного значения (2).

. . . .

102. Как по любому значению z может быть найдено значение y, соответствующее данному числу a, так и обратно можно найти значение переменного z, соответствующее любому заданному положительному значению переменного y так, чтобы $a^z=y$. Это значение переменного z, поскольку z рассматривается как функция y, обычно называется *логарифмом* переменного y. Итак, учение о логарифмах предполагает, что вместо a подставлено определенное постоянное число, которое поэтому носит название *основания* логарифмов; когда оно принято, то логарифмом любого числа y будет показатель степени a^z, такой, что сама степень a^z будет равна числу y; логарифм числа y обычно обозначается через ly. Итак, если

$$a^z = y, \quad \text{то} \quad z = ly \ldots \qquad (3)$$

[Там же, с. 101—102]

114. Так как $a^0 = 1$ и при возрастании показателя числа a одновременно увеличивается значение степени, если только a есть число, большее единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдет единицу. Если ω будет числом бесконечно малым, т. е. столь малой дробью, что она только-только не равна нулю, то

$$a^\omega = 1 + \psi,$$

причем ψ также будет бесконечно малым числом. Из предыдущей главы ясно, что если ψ не будет числом бесконечно малым, то и ω не может быть таким. Значит, будет либо $\psi = \omega$, либо $\psi > \omega$, либо $\psi < \omega$; это соотношение будет зависеть от количества a. Так как a нам пока еще не известно, то положим $\psi = k\omega$; тогда

$$a^\omega = 1 + k\omega,$$

и если за основание логарифмов взять a, то будет

$$\omega = l(1 + k\omega).$$

. . . .

115. Так как $a^\omega = 1 + k\omega$, то

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i,$$

какое бы значение ни подставить вместо i. Итак, будет

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1} k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2} k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3} k^3\omega^3 + \quad \text{и т. д.}$$

Если положить $i = \frac{z}{\omega}$, где z обозначает какое-либо конечное число, то, так как ω — число бесконечно малое, число i будет бесконечно большим; но $\omega = \frac{z}{i}$, так что ω будет дробью с бесконечно большим знаменателем, следовательно бесконечно малой, какой она и принята. Итак, подставим $\frac{z}{i}$ вместо ω; тогда будет

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1(i-1)}{1\cdot 2i} k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i} k^3z^3 + \\ + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i} k^4z^4 + \text{ и т. д.}$$

Равенство это будет верным, если вместо i подставить бесконечно большое число. Но вместе с тем k будет числом определенным, зависящим от a, как мы только что видели.

116. Так как i есть число бесконечно большое, то

$$\frac{i-1}{i}=1;$$

действительно, ясно, что, чем большее число подставим вместо i, тем ближе значение дроби $\frac{i-1}{i}$ будет подходить к единице; если i станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{i-1}{i}$ станет равна единице. Подобным же образом

$$\frac{i-2}{i}=1, \quad \frac{i-3}{i}=1$$

и так далее; отсюда следует, что

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}, \quad \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3}, \quad \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$$

и так далее. Подставляя эти значения, получим

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{и т. д.}$$

до бесконечности.

Это равенство вместе с тем показывает соотношение между числами a и k; действительно, если положить $z=1$, то будет

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+ \quad \text{и т. д.}$$

и если $a=10$, то приближенно $k=2{,}30258$, как мы нашли раньше (4).

[Там же, с. 113—114]

132. Так как

$$(\sin z)^2+(\cos z)^2=1,$$

то по разложении на множители получим

$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)=1;$$

эти множители, хотя и мнимые, имеют широчайшее применение при сложении и перемножении дуг. Пусть, например, требуется, найти произведение множителей

$$(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)(\cos y+\sqrt{-1}\sin y);$$

находим

$$\cos y\cos z-\sin y\sin z+\sqrt{-1}(\cos y\sin z+\sin y\cos z).$$

Но так как

$$\cos y\cos z-\sin y\sin z=\cos(y+z)$$

и

$$\cos y\sin z+\sin y\cos z=\sin(y+z),$$

то наше произведение

$$(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)=\cos(y+z)+\\+\sqrt{-1}\sin(y+z),$$

и подобным же образом

$$(\cos y-\sqrt{-1}\sin y)(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)=\\=\cos(y+z)-\sqrt{-1}\sin(y+z),$$

а также

$$(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)(\cos y\pm\sqrt{-1}\sin y)(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)=\\=\cos(x+y+z)\pm\sqrt{-1}\sin(x+y+z).$$

133. Отсюда следует, что

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)^2=\cos 2z\pm\sqrt{-1}\sin 2z$$

и

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)^3=\cos 3z\pm\sqrt{-1}\sin 3z,$$

и вообще будет

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\sin z)^n=\cos nz\pm\sqrt{-1}\sin nz. \quad (5)$$

Отсюда ввиду двойных знаков получаем

$$\cos nz=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n+(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

и

$$\sin nz=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n-(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Таким образом, если эти двучлены развернуть в ряды, то будет

$$\cos nz=(\cos z)^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times\\\times(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\cos z)^{n-6}\times\\\times(\sin z)^6+\text{ и т. д.}$$

и

$$\sin nz=\frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3+\\+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5-\text{ и т. д.}$$

134. Пусть z — бесконечно малая дуга; тогда $\sin z=z$ и $\cos z=1$; пусть, кроме того, число n будет бесконечно велико, дабы дуга nz была конечной величины. Положим $nz=v$; так как

$\sin z = z = \frac{v}{n}$, то будет

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{и т. д.}$$

и

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \text{и т. д.}$$

[Там же, с. 118—119]

138. Положим снова в формулах § 133 дугу z бесконечно малой и пусть n будет бесконечно большим числом i, так что iz получит конечное значение v. Итак, будет $nz = v$ и $z = \frac{v}{i}$; отсюда $\sin z = \frac{v}{i}$ и $\cos z = 1$; подставляя это, получим

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

и

$$\sin v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

В предыдущей же главе мы видели, что

$$\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z,$$

где e означает основание гиперболических логарифмов; если вместо z написать в одном случае $v\sqrt{-1}$, в другом $-v\sqrt{-1}$, то получим

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{и} \quad \sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Отсюда понятно, каким образом мнимые показательные количества приводятся к синусам и косинусам действительных дуг. Именно

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v$$

и

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v. \quad (6)$$

139. Теперь пусть n в тех же формулах § 133 будет уже не бесконечно большим, а бесконечно малым числом, т. е. $n = \frac{1}{i}$ при i бесконечно большом; тогда

$$\cos nz = \cos\frac{z}{i} = 1 \quad \text{и} \quad \sin nz = \sin\frac{z}{i} = \frac{z}{i},$$

потому что синус исчезающей дуги $\frac{z}{i}$ равен ей самой, а косинус равен единице. Подставив это, получим

$$1=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}+(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

и

$$\frac{z}{i}=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}-(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Если взять гиперболические логарифмы, то, как мы выше (§ 125) показали,

$$l(1+x)=i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i \text{ или } y^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}ly,$$

при подстановке y вместо $1+x$. Теперь, полагая вместо y в одном случае $\cos z+\sqrt{-1}\sin z$, в другом $\cos z-\sqrt{-1}\sin z$, получим

$$1=\frac{1+\frac{1}{i}l(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)+1+\frac{1}{i}l(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)}{2},$$

т. е. при исчезающих логарифмах $1=1$, так что отсюда ничего не вытекает. Другое же уравнение для синуса дает

$$\frac{z}{i}=\frac{\frac{1}{i}l(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)-\frac{1}{i}l(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)}{2\sqrt{-1}},$$

и вследствие этого $z=\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\frac{\cos z+\sqrt{-1}\sin z}{\cos z-\sqrt{-1}\sin z}$, откуда ясно, каким образом мнимые логарифмы приводятся к дугам круга.

Примечания. В I томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) Эйлер построил элементарную теорию всех простейших трансцендентных функций: показательной, логарифмической, тригонометрических (которые впервые были рассмотрены здесь в чисто аналитическом плане) и некоторых других. Основным средством исследования является при этом представление функций с помощью степенных рядов; используются также бесконечные непрерывные дроби и бесконечные произведения. Мы приводим параграфы, посвященные показательной функции, и некоторые примыкающие разделы: разложения в ряды синуса и косинуса, формулы Муавра и Эйлера.

Теория показательной функции начинается с рассмотрения некоторых основных свойств функции a^z, после чего выводится ее разложение в степенной ряд. Читатель обратит внимание на то, как вольно обращается Эйлер с бесконечными величинами и рядами. Он не обосновывает своих приемов, на наш взгляд, не всегда закономерных, но и не допускает ошибок в окончательных выводах. Мы не будем всякий раз отмечать такие отступления от норм строгости, выработанных в XIX в. Подобно Эйлеру, действовали, как правило, и другие математики его эпохи (ср. два следующих отрывка п. 7, в и п. 7, г).

1. Парадоксальные для той эпохи свойства функции $(-1)^x$ интересовали Эйлера издавна; он обсуждал их еще в 1728 г. в переписке со своим учителем

Иог. Бернулли. Что касается последних слов Эйлера, то следует иметь в виду, что как раз в это время он разрабатывал общую теорию логарифмической функции в комплексной области и результаты этих его исследований не могли быть включены во «Введение».

2. Констатировав таким образом непрерывность показательной функции, Эйлер далее излагает такие ее свойства, как $a^x a^y = a^{x+y}$ и т. п.

3. Здесь впервые дается привычное теперь определение логарифмической функции как обратной показательной.

4. Приведенный вывод, основанный на применении общей формулы бинома, близок к предложенному много ранее астрономом и математиком Э. Галлеем (1695). Далее Эйлер переходит к разложению $\lg(1+x)$, непосредственно связанному с его определением логарифмической функции как обратной показательной; этот вывод мы опускаем.

5. «Формулы Муавра» в другом менее удобном выражении были опубликованы А. де Муавром в 1707 г. и вновь в 1730 г. Путь, которым при этом шел Муавр, был совершенно другим. Как видно, Эйлер ограничивается доказательством формул только в случае целого положительного показателя.

6. Зависимости между показательной и тригонометрическими функциями в комплексной области были в основном установлены Эйлером по крайней мере за десять лет до выхода «Введения в анализ бесконечных», а занялся их изучением он еще на десять лет ранее. К открытию связи между обратными тригонометрическими функциями, т. е. дугами окружности, и «мнимыми логарифмами» близко подошел еще в 1702—1712 гг. Иог. Бернулли, который, однако, не смог сделать в этом направлении последний решающий шаг, так как ему была неясна природа логарифмов. Этот шаг он не сделал и в 1728 г., когда, в частности, обсуждал в переписке с Эйлером формулу $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \ln \frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\sin z}$, которой заканчивается приведенный нами отрывок из «Введения в анализ». Эйлер сумел преодолеть встретившиеся при этом трудности благодаря правильной трактовке понятия логарифма.

Историческая справедливость требует отдать должное Р. Коутсу, который еще в 1714 г. (опубликовано в 1717 г.) словесно высказал предложение, равносильное формуле $x\sqrt{-1} = \ln(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$. Широкое применение все эти соотношения получили только, начиная с работ Эйлера.

в. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СТЕПЕННЫМ РЯДОМ

ИЗ «МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАЧАЛ» Ж. А. ДА КУНЬЯ (1790)

[№ 56, с. 117—121, перевод А. П. Юшкевича]

Предложение I. *Всякий непрерывно пропорциональный ряд, первый член которого больше второго, сходится* (1).

. . . .

Следствие 1. Ряд $1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2\times3} + \frac{a^4}{2\times3\times4} + \frac{a^5}{2\times3\times4\times5}$ и т. д. всегда сходится, каково бы ни было число a.

Пусть c есть какой-либо член этого ряда и b число предшествующих ему членов, причем целое число b больше a. Продолжением данного ряда, после члена c, будет

$$c+\frac{ac}{b+1}+\frac{a^2c}{(b+1)(b+2)}+\frac{a^3c}{(b+1)(b+2)(b+3)} \text{ и т. д.};$$

но каждый член здесь не больше члена, соответствующего ему в ряду

$$c+\frac{ac}{b+1}+\frac{a^2c}{(b+1)(b+1)}+\frac{a^3c}{(b+1)(b+1)(b+1)}+\text{и т. д.},$$

а этот ряд сходящийся (9.1); значит,

$$c+\frac{ac}{b+1}+\frac{a^2c}{(b+1)(b+2)}+\frac{a^3c}{(b+1)(b+2)(b+3)}+\text{и т. д.}$$

и, следовательно,

$$1+a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{2\times 3}+\frac{a^4}{2\times 3\times 4}+ \quad \text{и т. д.}$$

сходятся.

Следствие 2. Ряд $a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+$ и т. д. сходится всякий раз, как $a<1$.

Определение II. Если a, b — два какие-либо числа и c — число, для которого

$$1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2\times 3}+\frac{c^4}{2\times 3\times 4}+ \text{ и т. д. } =a,$$

то ряд

$$1+bc+\frac{b^2c^2}{2}+\frac{b^3c^3}{2\times 3}+\frac{b^4c^4}{2\times 3\times 4}+\text{и т. д.}$$

обозначается a^b и число a^b называется степенью a, указанной показателем b ... (2).

Предложение. II. *Пусть a есть некоторое положительное число и*

$$b=2\left[\frac{a-1}{a+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5+\text{и т. д.}\right];$$

я утверждаю, что

$$a=1+b+\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{2\times 3}+\frac{b^4}{2\times 3\times 4}+\text{ и т. д.} \quad (3)$$

В самом деле, при замене $\frac{a-1}{a+1}$ на c, получается

$$b=2c+\frac{2}{3}c^3+\frac{2}{5}c^5+ \text{ и т. д.},$$

и $ac+c=a-1$; отсюда следует $c+1=a-ac=a(1-c)$ и $a=\frac{1+c}{1-c}$; но

$$\frac{1+c}{1-c}=1+2c+2c^2+2c^3+2c^4+ \text{ и т. д.},$$

что доказывается умножением делителя $1-c$ на частное $1+2c+$ $+2c^2+2c^3+$ и т. д.; значит,

$$a=1+2c+2c^2+2c^3+ \text{ и т. д.};$$

но при подстановке в ряд $1+b+\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{2\times3}+\frac{b^4}{2\times3\times4}$ и т. д. вместо b ряда $2c+\frac{2}{3}c^3+\frac{2}{5}c^5+$ и т. д. получается то же выражение $1+2c+2c^2+2c^3+$ и т. д.; значит, b есть число, для которого $a=1+b+\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{2\times3}+\frac{b^4}{2\times3\times4}$ и т. д. (4).

[Там же, с. 124—125]

Предложение VII. Если обозначить предыдущий член через A, то

$$(1+Q)^n=1+nQ+\frac{n-1}{2}AQ+\frac{n-2}{3}AQ+\frac{n-3}{4}AQ+ \text{ и т. д.}$$

при условии, что, когда n не есть целое положительное число, $Q<1$ (5).

Пусть

$$m=2\left(\frac{Q}{2+Q}+\frac{1}{3}\left(\frac{Q}{2+Q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{Q}{2+Q}\right)^5+ \text{ и т. д.}\right)$$

и, следовательно,

$$1+Q=1+m+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m^3+\frac{1}{24}m^4+ \text{ и т. д.}; \quad [9.2]$$

тогда

$$(1+Q)^n=1+mn+\frac{1}{2}(mn)^2+\frac{1}{6}(mn)^3+\frac{1}{24}(mn)^4+ \text{ и т. д.};$$ (9. опред. 2).

Но $\frac{Q}{2+Q}$ дает $\frac{1}{2}Q-\frac{1}{4}Q^2+\frac{1}{8}Q^3-\frac{1}{16}Q^4+\frac{1}{32}Q^5-$ и т. д. и, следовательно,

$$m=Q-\frac{1}{2}Q^2+\frac{1}{4}Q^3-\frac{1}{8}Q^4+\frac{1}{16}Q^5- \text{ и т. д.}$$

$$\frac{1}{12}Q^3-\frac{1}{8}Q^4+\frac{1}{8}Q^5- \text{ и т. д.}$$

$$+\frac{1}{80}Q^5- \text{ и т. д.},$$

т. е.

$$m=Q-\frac{1}{2}Q^2+\frac{1}{3}Q^3-\frac{1}{4}Q^4+\frac{1}{5}Q^5- \text{ и т. д.},$$

значит, это значение m будет сходящимся всякий раз, как $Q<1$ [9.1]. При подстановке этого значения m в выражение

$$(1+Q)^n=1+mn+\frac{1}{2}m^2n^2+\frac{1}{6}m^3n^3+\frac{1}{24}m^4n^4+\frac{1}{120}m^5n^5+ \text{ и т. д.}$$

получится

$$(1+Q)^n = 1+nQ-\frac{1}{2}nQ^2+\frac{1}{3}nQ^3-\frac{1}{4}nQ^4+\frac{1}{5}nQ^5-\text{и т. д.}$$
$$+\frac{1}{2}n^2Q^2-\frac{1}{2}n^2Q^3+\frac{11}{24}n^2Q^4-\frac{5}{12}n^2Q^5+\text{и т. д.}$$
$$+\frac{1}{6}n^3Q^3-\frac{1}{4}n^3Q^4+\frac{7}{24}n^3Q^5-\text{и т. д.}$$
$$+\frac{1}{24}n^4Q^4-\frac{1}{12}n^4Q^5+\text{и т. д.}$$
$$+\frac{1}{120}n^5Q^5+\text{и т. д.}$$
$$=1+nQ+\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)Q^2+\left(\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n\right)Q^3+$$
$$+\left(\frac{1}{24}n^4-\frac{1}{4}n^3+\frac{11}{24}n^2-\frac{1}{4}n\right)Q^4+$$
$$+\left(\frac{1}{120}n^5-\frac{1}{12}n^4+\frac{1}{24}n^3-\frac{5}{12}n^2+\frac{1}{5}n\right)\cdot Q^5+\text{и т. д.}$$
$$=1+nQ+\frac{n(n-1)}{2}Q^2+n\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}Q^3+n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}Q^4+$$
$$+n\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}Q^5+\text{и т. д.},$$

что доказывается путем производства указанных умножений; следовательно, когда $Q<1$,

$$(1+Q)^n=1+nQ+\frac{n-1}{2}AQ+\frac{n-2}{3}AQ+\frac{n-3}{4}AQ+\frac{n-4}{5}AQ+$$
$$\text{и т. д.}$$

Примечания. Математики XVIII в. трактовали бесконечные ряды во многом иначе, чем это делают теперь. Подобно нам, они имели ясное представление о сходимости ряда и понимали под его суммой предел частных сумм, если такой предел существует, правда, выражая это в несколько иной терминологии. При этом одни полагали, что можно пользоваться только сходящимися рядами, другие же привлекали для работы и расходящиеся ряды (см. следующий отрывок). Вместе с тем и те и другие обращались с бесконечными рядами, в частности со степенными рядами, точно так, как с конечными целыми алгебраическими многочленами. Предполагая, что анализ и алгебра управляются совершенно одинаковыми законами, они производили над степенными рядами любые алгебраические и аналитические преобразования и действия без всяких ограничений и нередко для любых значений переменных, т. е. и вне области их сходимости. Подавляющее большинство результатов при этом было верным либо потому, что производимые вычисления были на самом деле законными, либо потому, что от ошибок оберегала правильная интуиция. Современная теория сходимости рядов была систематически развита только в XIX в. О. Коши и его последователями (см. далее отрывки п. 9, б), хотя отдельные критерии сходимости были установлены еще в XVIII в. Лейбницем, Маклореном, Варингом и другими.

Мы приводим отрывок из IX книги «Principios mathematicos» (1790) португальского математика Ж. А. да Кунья (по французскому переводу его труда, оригинал которого нам остался недоступен). В отличие от подавляющего большинства своих современников этот ученый считал необходимым указывать промежутки сходимости исследуемых степенных рядов и применять их только в пределах этого промежутка. Особый интерес представляет его оригинальная теория показательной функции. Предвосхищая подход, характерный для современной теории аналитических функций, он прямо определяет показательную функцию как сумму сходящегося степенного ряда и уже отсюда выводит ее свойства. На этой основе он дал не менее оригинальный вывод биномиального ряда, выразив степенную функцию через показательную. Правда, да Кунья не всегда был последователен (например, его вывод разложения $\ln(1+x)$ в XXI книге исходит из допущения такого разложения); кроме того, при действиях над рядами он следовал обычной практике XVIII в. Следует добавить, что труд да Кунья не получил сколько-нибудь широкой известности ни в оригинале, ни во французском переводе, вышедшем в 1811 г.

1. Сходящаяся геометрическая прогрессия служит далее мажорирующим рядом, путем сравнения с которым доказывается сходимость показательного ряда. Следует иметь в виду, что у да Кунья, как и других математиков XVIII в., не было понятия «абсолютной величины» и потому их формулировки иногда неполны; так, говоря, например, что разложение $(1+x)^n$ всегда сходится при $x<1$, он имеет в виду, что $|x|<1$. Кроме того, следует иметь в виду, что да Кунья считал очевидным, что, как сказали бы мы, всякий абсолютно сходящийся ряд сходится при любых знаках членов.

2. Определение показательной функции, данное выше, можно распространить на все значения $a>0$, если всякое такое число a представимо рядом вида $1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2\times 3}+\dots$. Это и доказывается во II предложении.

3. Читатель заметит, что ряд, выражающий здесь величину b, имеет сумму $\ln a$.

4. Из пропущенных нами дальнейших теорем укажем четвертую, в которой посредством умножения соответствующих рядов доказано, что $a^b a^c = a^{b+c}$, откуда выводится, что $a^{b-c}=a^b:a^c$, $a^0=1$ и т. д.

5. В XVIII в. было предложено немало доказательств общей формулы бинома, в том числе несколько принадлежит Эйлеру. Вывод, предложенный да Кунья, один из наиболее интересных. Полное исследование сходимости биномиального ряда (в том числе в комплексной области) произвел Н. Г. Абель (1826).

г. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

ИЗ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ» Л. ЭЙЛЕРА (1755)

[№ 41, с. 99—101]

106. Для большей ясности рассмотрим разложение дроби $\frac{1}{1-x}$, содержащее сперва только конечное число членов. Итак, будем иметь:

$$\frac{1}{1-x}=1+\frac{x}{1-x},\quad \frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x},$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x},\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\frac{x^4}{1-x}\text{ и т. д.}$$

Если кто-нибудь пожелал бы сказать, что сумма конечного ряда $1+x+x^2+x^3$ есть $\frac{1}{1-x}$, то он отклонился бы от истины на количество $\frac{x^4}{1-x}$, а кто захотел бы утверждать, что сумма ряда

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^{1000}$$

равна $\frac{1}{1-x}$, тот ошибся бы на количество $\frac{x^{1001}}{1-x}$; эта ошибка, если x есть число, большее единицы, была бы очень велика.

107. Из этого ясно, что тот, кто хотел бы утверждать, что сумма ряда

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^\infty$$

равна $\frac{1}{1-x}$, тот отклонился бы от истины на величину $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$, которая, если $x>1$, будет бесконечно большой. Вместе с тем становится ясно, почему сумма бесконечного ряда $1+x+x^2+$ $+x^3+x^4+$ и т. д. действительно равна $\frac{1}{1-x}$, если x есть дробь, меньшая единицы. Ведь в этом случае погрешность $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$ становится бесконечно малой, т. е. нулем, и ею можно спокойно пренебречь; так, при $x=\frac{1}{2}$ получаем верный результат

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \text{ и т. д. } =\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Точно так же этим способом мы получим истинную сумму и остальных рядов, если x будет дробью, меньшей чем единица.

108. Так же разрешается вопрос о суммах расходящихся рядов с чередующимися знаками $+$ и $-$, которые получаются из той же формулы, если подставлять в нее вместо x отрицательные числа. Действительно, так как, если не брать в расчет последнего остатка, мы имеем

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\text{и т. д.},$$

то будет

$$A\ldots\ 1-1+1-1+1-1+ \quad \text{и т. д. } =\frac{1}{2},$$

$$B\ldots\ 1-2+4-8+16-32+ \quad \text{и т. д. } =\frac{1}{3},$$

$$C\ldots\ 1-3+9-27+81-243+ \quad \text{и т. д. } =\frac{1}{4}, \quad \text{и т. д.}$$

Но ясно, что сумма ряда B не может равняться $\frac{1}{3}$, ибо, чем больше членов мы берем, тем более суммы их удаляются от $\frac{1}{3}$. Между тем сумма каждого ряда всегда должна быть пределом, к которому мы тем ближе подходим, чем больше членов складываем.

109. Из этого некоторые заключили, что такие ряды — они называются расходящимися — вообще не имеют никакой определенной суммы, ибо, выполняя сложение членов, мы не имеем приближения к какому-либо пределу, который можно было бы принять за сумму бесконечного ряда. Так как эти суммы уже потому, что мы пренебрегаем последними остатками, являются, как было показано, ошибочными, то это мнение полностью согласуется с истиной. Однако против него можно с полным правом возразить, что упомянутые суммы, хотя они и оказываются совершенно несогласными с истиной, однако, никогда не приводят к ошибкам и что, напротив, приняв их, мы получаем множество замечательных вещей, которых мы должны были бы лишиться, если бы пожелали совсем отказаться от этих суммирований. Но ведь эти суммы, если они были бы ложными, не могли бы всегда приводить нас к истинным результатам, тем более, что они уклонялись бы от истины не на малое, а на бесконечное количество и, следовательно, они должны были бы бесконечно далеко уводить нас от истины. Так как этого, однако, не происходит, то нам остается развязать этот труднейший узел.

110. И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии «сумма». Действительно, если под «суммой» ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получить только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают, могут обнаруживать чередование знаков $+$ и $-$, в противном же случае они вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово «сумма» понимается в смысле результата сложения всех членов. Но в тех случаях, о которых мы упоминали, из неверных сумм получаются верные результаты не потому, что конечное выражение, скажем $\frac{1}{1-x}$, есть сумма ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т. д., а потому, что это выражение, если его разложить, дает именно такой ряд. Таким образом, здесь можно было бы вовсе отказаться от наименования «сумма».

111. Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. А именно мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1+x+x^2+x^3+$ и т. д. истинная его сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова «сумма» совпадет с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений.

2. ...Пусть предложен следующий общий ряд, сумму которого, известна она или нет, мы положим равной S, так что

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{и т. д.}$$

Теперь положим $x = \frac{y}{1+y}$; разложение в бесконечные ряды дает:

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \text{и т. д.},$$
$$x^2 = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + 5y^6 - 6y^7 + \text{и т. д.},$$
$$x^3 = y^3 - 3y^4 + 6y^5 - 10y^6 + 15y^7 - 21y^8 + \text{и т. д.},$$
$$x^4 = y^4 - 4y^5 + 10y^6 - 20y^7 + 35y^8 - 56y^9 + \text{и т. д.},$$
$$\text{и т. д.}$$

Подставив эти значения и расположив ряд по степеням количества y, мы получим

$$\begin{array}{rrrrrl} S = ay & -ay^2 & +ay^3 & -ay^4 & +ay^5 & \text{и т. д.}+ \\ & +\ b & -2b & +3b & -4b+ & \\ & & +\ c & -3c & +6c+ & \\ & & & +\ d & -4d+ & \\ & & & & +\ e. & \end{array}$$

3. Так как мы положили $x = \frac{y}{1+y}$, то $y = \frac{x}{1-x}$; после подстановки этого значения вместо y предложенный ряд

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{и т. д.}$$

преобразуется в ряд

$$S = a\frac{x}{1-x} + (b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3} + \quad \text{и т. д.},$$

в котором коэффициент $b-a$ второго члена есть первая разность количества a, взятая из ряда a, b, c, d, e и т. д.; ее мы выше обозначили через Δa; коэффициент третьего члена $c-2b+a$ есть вторая разность $\Delta^2 a$; коэффициент четвертого есть третья разность $\Delta^3 a$ и т. д. Таким образом, пользуясь последовательными разностями количества a, которые образуются из ряда a, b, c, d, e и т. д., мы преобразуем предложенный ряд к виду

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4}\Delta^3 a + \quad \text{и т. д.}$$

Следовательно, сумма этого ряда будет известна, если известна сумма предложенного ряда.

. . . .

7. Рассмотрим ряд, в котором знаки + и — чередуются и который получается из предыдущего, если x взять отрица-

тельным. Таким образом, пусть имеем ряд

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{и т. д.},$$

который получается, если в предшествующем ряде x взять отрицательным; возьмем, как и раньше, разности Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ и т. д. из ряда коэффициентов a, b, c, d, e и т. д., отнеся знаки только к степеням количества x. Тогда предложенный ряд преобразуется в ряд

$$S = \frac{x}{1+x} a - \frac{x^2}{(1+x)^2} \Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3} \Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4} \Delta^3 a + \text{и т. д.}$$

и мы видим, что предложенное уравнение можно суммировать в тех же случаях, как и предшествующее, а именно если ряд a, b, c, d и т. д. в конце концов дает постоянные разности.

8. Однако в этом случае преобразование позволяет удобнее найти приближенное значение предложенного ряда $ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5$ и т. д.; действительно, каково бы ни было число x, дробь $\frac{x}{1+x}$, по степеням которой располагается второй ряд, меньше единицы; если x равно 1, то $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$. Если же $x < 1$, то, положив $x = \frac{1}{n}$, будем иметь $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, так что ряд, полученный после преобразования, сходится всегда быстрее, чем предложенный. Рассмотрим прежде всего случай, когда $x = 1$, который для суммирования рядов является очень важным. Пусть

$$S = a - b + c - d + e - f + \text{и т. д.}$$

и пусть первые, вторые и следующие разности количества a, которые получаются из прогрессии a, b, c, d, e и т. д., обозначаются через Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$ и т. д.; тогда будет

$$S = \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \Delta a + \frac{1}{8} \Delta^2 a - \frac{1}{16} \Delta^3 a + \text{и т. д.}$$

Этот ряд, если он и не оборвется, легко даст сумму с очень большим приближением (1).

9. ...Пусть предложен следующий ряд Лейбница:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{и т. д.}$$

Так как в нем все члены равны, то все разности равны нулю, и так как $a = 1$, то $S = \frac{1}{2}$ (2).

. . . .

10. ...Пусть предложен геометрический ряд

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{и т. д.}$$

Первые разности 1, 2, 4, 8, 16 и т. д.

Вторые разности 1, 2, 4, 8 и т. д.

Третьи разности 1, 2, 4 и т. д.

Так как во всех разностях первый член равен единице, то сумма ряда выразится следующим образом:

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+ \text{ и т. д.}$$

Сумма последнего ряда равна $\frac{1}{3}$. Действительно, ряд этот возникает из разложения дроби $\frac{1}{2+1}$, тогда как предложенный ряд возникает из разложения дроби $\frac{1}{1+2}$.

. . . .

II. В первую очередь это преобразование чрезвычайно полезно для преобразования рядов, которые хотя и сходятся, но медленно, в другие ряды, которые сходятся гораздо быстрее. Так как при этом последующие члены меньше, чем предыдущие, то первые разности отрицательны; поэтому при последующих вычислениях нужно внимательно учитывать знаки.

I. Пусть предложен ряд

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+ \text{ и т. д.}$$

Первые разности $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\cdot3}, -\frac{1}{3\cdot4}, -\frac{1}{4\cdot5}, -\frac{1}{5\cdot6}$ и т. д.

Вторые разности $\frac{1}{3}, \frac{2}{2\cdot3\cdot4}, \frac{2}{3\cdot4\cdot5}, \frac{2}{4\cdot5\cdot6}$ и т. д.

Третьи разности $-\frac{1}{4}, -\frac{2\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}, -\frac{2\cdot3}{3\cdot4\cdot5\cdot6}$ и т. д.

Четвертые разности $+\frac{1}{5}$ и т. д.

И т. д.

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot8}+\frac{1}{4\cdot16}+\frac{1}{5\cdot32}+ \text{ и т. д.}$$

Оба эти ряда, как мы уже нашли во «Введении», представляют гиперболический логарифм двойки.

II. Пусть предложен ряд, из которого определяется длина окружности:

$$S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+ \text{ и т. д.} \quad (3)$$

Первые разности $-\frac{2}{1\cdot3}, -\frac{2}{3\cdot5}, -\frac{2}{5\cdot7}, -\frac{2}{7\cdot9}, -\frac{2}{9\cdot11}$ и т. д.

Вторые разности $+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}, \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7}, \frac{2\cdot 4}{7\cdot 9\cdot 11}$, и т. д.

Третьи разности $-\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}, -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$, и т. д.

И т. д.

Следовательно, сумма ряда будет

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 2}+\text{и т. д.}$$

или

$$2S=1+\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\text{и т. д.}$$

Примечания. Выше было сказано, что некоторые математики XVIII в. применяли расходящиеся ряды. К ним принадлежал и Эйлер, получивший с помощью расходящихся рядов целый ряд замечательных результатов, например, в теории дзета-функции (ср. к I, ч. II, п. 8, б). Мы приводим отрывки из фундаментального руководства Эйлера «Institutiones calculi differentialis» (1755), в которых он развивает свою концепцию расходящихся рядов. В первом отрывке, взятом из 3-й главы I части «Дифференциального исчисления», Эйлер предлагает некоторое обобщение понятия суммы рядов. Подход Эйлера к этой проблеме вполне современен. Расходящийся ряд не имеет суммы, понимаемой как предел частных сумм n первых членов ряда, но можно дать более широкое определение «суммы» или же метода «суммирования», которое совпадает с общеупотребительным в случае сходимости ряда и вместе с тем применимо к расходящимся рядам, т. е. ставит в соответствие с ними определенные выражения и числа. Как говорят теперь, Эйлер выдвинул по отношению к обобщенным приемам суммирования требование регулярности, обобщенный метод должен суммировать сходящийся ряд к его обычной сумме. Конкретно, Эйлер предложил понимать под суммой всякого ряда «конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд». Понимаемое широко, такое определение наталкивается на трудности, которые были отмечены еще в XVIII в.; Эйлер предложил его, вероятно, потому, что сходящийся степенной ряд обладает единственной порождающей его функцией. Другие отрывки, взятые из I главы II части того же труда, содержат предложенный Эйлером метод суммирования, позволяющий преобразовывать некоторые расходящиеся ряды в сходящиеся, а также улучшать сходимость последних.

Концепция Эйлера встретила возражения отдельных математиков еще в его время, но особенно резкой критике подверглась в первой половине XIX в., когда применение расходящихся рядов почти прекратилось. Такая реакция в эпоху начавшейся реформы оснований анализа была не удивительна, тем более что математики убедились тогда в принципиальной неправомерности чисто формальных приемов оперирования рядами. К тому же при неосмотрительном пользовании расходящимися рядами были получены и ошибочные результаты, даже самим Эйлером. Обоснование обобщенных методов суммирования, изобретенных Эйлером и некоторыми его современниками, как Хр. Гольдбахом и Д. Бернулли, было в XVIII в. вообще невозможно. Для этого требовалось прежде всего создание общей теории сходящихся рядов, а затем теории функций комплексного переменного и учения об аналитическом продолжении. В конце XIX и начале XX в. теория суммирования расходящихся рядов получила новое развитие и важные приложения в трудах Э. Чезаро, Э. Бореля, Г. Ф. Вороного, Л. Фейера и других ученых; при этом выяснилась принципиальная правота Эйлера, а вместе с тем его методы получили необходимое обоснование. Подробнее см. книгу Г. Харди [№ 38], особенно I—II и VIII—IX главы.

1. Этот метод суммирования Эйлер изложил в статье «О расходящихся рядах», представленной Берлинской Академии наук в 1746 г., но напечатанной только в 1760 г., после «Дифференциального исчисления». Недавно выяс-

нилось, что такой прием был известен еще Ньютону [см. № 71, т. IV, с. 606—607].

2. Этот ряд, возникающий из разложения $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots$ при $x=1$, был указан в 1703 г. Г. Гранди и возбудил споры, в которых приняли участие, помимо него, Лейбниц, Вариньон, Ник. I Бернулли и другие математики. Лейбниц, исходя из некоторых аналогий, считал его сумму равной $\frac{1}{2}$.

3. Это так называемый «ряд Лейбница»; его сумма, как показал Лейбниц в 1673 г., равна $\frac{\pi}{4}$. Такое представление было известно индийскому ученому Нилаканте около 1500 г.

8. ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ АНАЛИЗА В XVIII в.

а. КРИТИЧЕСКОЕ ВЫСТУПЛЕНИЕ ДЖ. БЕРКЛИ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ ДЖ. БЕРКЛИ «АНАЛИСТ, ИЛИ РАССУЖДЕНИЕ, ОБРАЩЕННОЕ НЕВЕРУЮЩЕМУ МАТЕМАТИКУ...» (1734)

[№ 48, т. III, с. 30—33, перевод А. П. Юшкевича]

20. ... Поскольку может показаться необъяснимым парадокс, что математики из ложных принципов выводят истинные предложения, правы в заключении и ошибаются в посылках, я постараюсь особливо пояснить, как это может быть, и показать, как ошибка может породить истину, хотя и не может породить науку.

21. Чтобы разъяснить этот пункт, мы, например, допустим, что требуется провести касательную к параболе, и рассмотрим, как это совершается с помощью бесконечно малых разностей. Пусть (рис. 36) AB есть кривая, абсцисса $AP=x$, ордината $PB=y$, разность абсциссы $PM=dx$, разность ординаты $RN=dy$. Допуская, что кривая есть многоугольник, и, следовательно, BN, приращение или разность кривой, есть прямая линия, совпадающая с касательной, а разностный треугольник BRN подобен треугольнику TPB, мы найдем подкасательную PT как четвертую пропорциональную к $RN:RB:PB$, т. е. к $dy:dx:y$. Значит, подкасательная

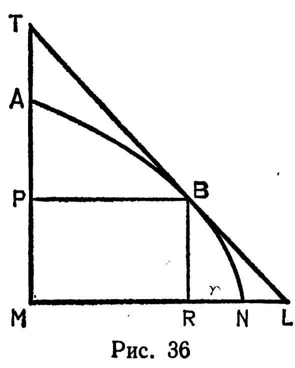


Рис. 36

будет $\frac{y\,dx}{dy}$. Но здесь имеется ошибка, возникшая из упомянутого ложного допущения, и поэтому значение PT получается больше действительного, ибо, на самом деле, треугольнику PBT подобен не RNB, а BLR и, значит, первым членом пропорции (вместо RN) должно быть RL, т. е. $RN+NL$, т. е. $dy+z$. Следовательно, правильное выражение для подкасательной должно быть $\frac{y\,dx}{dy+z}$. Таким образом, беря в делителе dy, мы сделали ошибку по недостатку, и эта ошибка была равна z, т. е. NL, линии, заключенной между кривой и касательной. Далее в силу природы кривой $yy=px$, где p предполагается равным параметру, и, значит, по правилу разностей $2y\,dy=p\,dx$ и $dy=\frac{p\,dx}{2y}$. Но если вы умножите $y+dy$ на самое себя и сохраните все произведение, не отбрасывая квадрата разности, то, подставив наращенные величины в уравнение кривой, получите, что на самом деле $dy=\frac{p\,dx}{2y}-\frac{dy\,dy}{2y}$. Таким образом, беря $dy=\frac{p\,dx}{2y}$, мы сделали ошибку по избытку, проистекавшую из ошибочного правила разностей. Величина этой второй ошибки есть $\frac{dy\,dy}{2y}=z$. Следовательно, обе эти ошибки, будучи равными и противоположными, уничтожают друг друга: первая ошибка по недостатку исправляется второй ошибкой по избытку.

22. ... Для доказательства, что z равно $\frac{dy\,dy}{2y}$, положим BR, или dx, равным m, а RN, или dy, равным n. По 33-му предложению первой книги «Конических сечений» Аполлония и из подобия треугольников $2x$ относится к y как m к $n+z=\frac{my}{2x}$. Таким же образом в силу природы параболы $yy+2yn+nn=xp+mp$ и $2yn+nn=mp$; значит, $\frac{2yn+nn}{p}=m$, и так как $yy=px$, то $\frac{yy}{p}$ равно x. Подставляя эти значения вместо m и x, мы получим

$$n+z=\frac{my}{2x}=\frac{2yy\,np+yn\,np}{2yyp},$$

т. е.

$$n+z=\frac{2yn+nn}{2y},$$

что после приведения даст

$$z=\frac{nn}{2y}=\frac{dy\,dy}{2y}, \quad \text{ч. и т. д.}$$

23. ... Наконец, замечу, что, какими конечными величинами ни принять разности, заключение все же получится то же самое. Следовательно, отбрасываемые величины законно откидываются не в силу их малости, но в силу иного основания, а именно благодаря противоположным ошибкам ...

П р и м е ч а н и я. Успехи математического анализа в первой трети XVIII в. были огромными, за исключением одной области — его оснований. Ни метод пределов и флюксий, ни исчисление бесконечно малых не были построены на прочном логическом фундаменте и это сознавали многие. Высказывания Ньютона о природе моментов и Лейбница о сущности бесконечно малых были неоднозначны и далеки от ясности: предельные отношения исчезающих величин по видимости требовали непонятного деления нуля («ничего») на нуль («ничто»); принцип отбрасывания бесконечно малых, казалось, противоречил очевидному для величин тождеству $a=a$. Дифференциал функции определяли как ее бесконечно малое приращение, а вычисляли как некоторую часть этого приращения. К. Маркс, исследовавший историю оснований анализа от Ньютона и Лейбница до Лагранжа, характеризовал создавшееся положение в следующих словах: «Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому» [№ I, с. 169].

Таким откликом явилось выступление против математического анализа со стороны философа Дж. Беркли, одного из крупнейших представителей субъективного идеализма и притом видного сановника английской церкви. Одной из целей Беркли было нанести удар по свободомыслящим ученым, в частности, по некоторым математикам (по-видимому, имелся в виду особенно Э. Галлей). Эта цель ясно выражена в полном заглавии изданного им в 1734 г. памфлета: «Аналист или рассуждение, обращенное к неверующему математику, где исследуется, более ли ясно воспринимаются или более ли очевидно выводятся предмет, принципы и умозаключения современного анализа, чем религиозные таинства и догматы веры» (Analyst: or a discourse addressed to an infidel mathematician. Etc.). Беркли желал доказать, что наука неверующих «аналистов», обнаруживающих противоречия в принципах богословия, сама не заслуживает доверия. В понятиях анализа он видел только фикции, и притом фикции противоречивые, а его окончательным выводом было, что математика может спокойно обойтись без нового анализа. Но, каковы бы ни были цели и выводы Беркли, он указал на действительно слабые пункты в основах современного ему исчисления бесконечно малых и тем самым привлек внимание к недостаткам в его понятиях и методах, к трудностям, связанным с идеей мгновенной скорости, к искусственному характеру вывода у Ньютона момента произведения (см. выше отрывок п. 5, ж) и т. д. Отрицать правильность результатов исчисления бесконечно малых было, однако, невозможно, и это обстоятельство Беркли объяснил тем, что в своих выводах аналисты допускают две взаимно уничтожающиеся ошибки. Так, при отыскании касательных они неверно вычисляют дифференциалы и неправильно же отождествляют отрезочек кривой с отрезком касательной. Мы приводим из «Аналиста» соответствующий пример. Впоследствии идеи компенсации ошибок положил в основу своей попытки обоснования анализа Л. Карно (см. далее п. 8, б, примечание 10).

6. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ Ж. ДАЛАМБЕРА

ИЗ СТАТЬИ Ж. ДАЛАМБЕРА И ДЕ ЛА ШАППЕЛЯ «ПРЕДЕЛ» (1765)

[№ 59, т. 2, с. 311—312, перевод А. П. Юшкевича]

П р е д е л (матем.). Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой ее не предположить, без того, однако, чтобы приближающаяся

Жан ле Рон Даламбер

величина могла когда-либо превзойти величину, к которой она приближается; таким образом, разность между такой величиной и ее пределом абсолютно неопределима (inassignable) ...(1).

1°. Если две величины представляют собой предел одного и того же количества, эти две величины равны между собой.

2°. Примем, что AB есть произведение двух величин A, B. Допустим, что C есть предел величины A и D — предел величины B. Я утверждаю, что $C \times D$, произведение пределов, будет необходимым образом пределом $A \times B$, произведения обеих величин A, B.

Два эти предложения, которые в точности доказаны в «Основаниях геометрии» (2), служат принципами при строгом доказательстве того, что при умножении полуокружности на ее радиус получается площадь круга...

Теория пределов есть основание истинной метафизики дифференциального исчисления. См. *Дифференциал*, *Флюксия*, *Исчерпание*, *Бесконечное*. Собственно говоря, предел никогда не совпадает или же никогда не оказывается равным количеству, пределом которого является, но оно все более и более к нему приближается и может отличаться от него сколь угодно мало (3). Например, круг есть предел вписанных и описанных многоугольников, ибо он никогда не совпадает строго с ними, хотя они и могут к нему приближаться до бесконечности. Это понятие может служить для разъяснения некоторых математических предложений. Например, говорят, что сумма убывающей геометрической прогрессии, первый член которой есть a и второй b, есть $\frac{a^2}{a-b}$. Это значение не есть, собственно говоря, сумма прогрессии, но предел этой суммы, т. е. количество, к которому она может приблизиться сколь угодно близко, никогда не дойдя до него в точности... (4). См. *Последовательность или ряд. Прогрессия.*

ИЗ СТАТЬИ Ж. ДАЛАМБЕРА «ДИФФЕРЕНЦИАЛ» (1654)

[№ 59, т, I, с. 524—525]

Нам важно заняться здесь метафизикой дифференциального исчисления. Эта метафизика, о которой столько писали, еще важнее и ее, быть может, еще труднее развить, чем сами правила этого исчисления...

Ньютон исходил из другого принципа, и можно сказать, что метод этого великого математика, данный в его исчислении флюксий, очень точен и ясен, хотя Ньютон и ограничился тем, что лишь бегло очертил его. Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нем метод первых и последних отношений, т. е. метод определения пределов отношений. Этот знаменитый ученый никогда поэтому не дифференцировал величины, а только уравнения, ибо всякое уравнение заключает в себе отношение между двумя переменными, и дифференцирование состоит только в определении пределов отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении двух переменных... (5).

ИЗ СТАТЬИ Ж. ДАЛАМБЕРА «ФЛЮКСИЯ« (1756)

[№ 59, т. 2. с. 78]

Вводить здесь движение — значит вводить идею чуждую и вовсе не требующуюся для доказательства; ведь мы не имеем четкой идеи о том, что такое скорость тела в каждое мгновение, когда эта скорость переменная... Когда скорость равномерная, это отношение пути ко времени... Но когда движение переменное... это отношение дифференциала пути к дифференциалу времени, отношение, о котором нельзя дать ясной идеи иначе, как с помощью идеи предела. Таким образом, необходимо обратиться к последней, чтобы получить четкую идею флюксии (6).

ИЗ СТАТЬИ Ж. ДАЛАМБЕРА «БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ» (1759)

[№ 59, т. 2, с. 210]

Бесконечно малое (геом.). Так в геометрии называют количества, которые рассматривают как меньшие, чем любая определенная величина. Под словом «дифференциал» мы в достаточной мере разъяснили, что это за так называемые (prétendues) количества, и мы доказали, что на самом деле они не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров (7).

ИЗ «ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИЗЛОЖЕНИЯ НАЧАЛ ВЫСШИХ ИСЧИСЛЕНИЙ С. ЛЮИЛЬЕ (1786)

[№ 68, с. 31—32 (8), перевод А. П. Юшкевича]

§ XIV. Чтобы сократить и облегчить вычисление с помощью более удобного обозначения, условились обозначать $\lim \frac{\Delta P}{\Delta x}$, предел отношения одновременных изменений p и x, еще по-другому, именно $\frac{dP}{dx}$; таким образом, $\lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$, или $\frac{dP}{dx}$, обозначают одно и то же.

Однако, пользуясь последним знаком, никогда не следует упускать из вида его истинное значение; и я полагаю, что, хотя его представляют в виде дроби, этот знак следует рассматривать не как составленный из двух членов dP и dx, но как единое и неразложимое выражение для значения предельного отношения ΔP к Δx.

ИЗ СТАТЬИ С. Е. ГУРЬЕВА «ОПЫТ СТРОГОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОДНОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ...» (1802)

[№ 62, с. 157]

Согласно 12 вспомогательным истинам метода пределов видно, что если над какой-нибудь увеличивающейся или уменьшающейся величиной, имеющей предел, производят некоторую операцию, то результат этой операции имеет пределом результат той же операции, произведенной над пределом увеличивающейся или уменьшающейся величины **(9)**.

ИЗ «РАЗМЫШЛЕНИЙ О МЕТАФИЗИКЕ ИСЧИСЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ» Л. КАРНО (1-е изд. 1797 г., 2-е изд. 1813 г.)

[№ 13, с. 196—197 (10)]

131. ... Очевидна та аналогия, которая должна существовать между теорией первых и последних отношений и методом бесконечно малых. То, что в последнем называют бесконечно малыми количествами, есть, очевидно, согласно данному их определению **(11)**, не что иное, как разность какого-нибудь количества и его предела, или, если угодно, количество, предел которого есть 0; а количества, последнее отношение которых есть отношение равенства, суть не что иное, как те, которые в анализе бесконечно малых называют бесконечно мало отличными друг от друга количествами.

132. Из этого также следует, что понятие бесконечно малого количества не менее ясно, чем понятие предела, потому что оно есть не что иное, как разность этого предела и количества, последним значением которого он является. Разница между тем, что называют собственно методом пределов и методом бесконечно малых, состоит в том, что в первом из них в вычислениях допускаются, действительно, только самые пределы, являющиеся всегда назначенными количествами, в то время как в методе бесконечно малых допускаются еще неназначенные количества, которые, по предположению, приближаются к ним непрерывно, а также разности этих неназначенных количеств и их пределов (12). Это обстоятельство дает методу бесконечно малых больше средств для видоизменения выражений и алгебраических преобразований, не создавая ни малейшей разницы в строгости приемов обоих методов.

Примечания. «Аналист» Беркли вызвал большое волнение в математическом мире и сообщил мощный толчок разработке оснований анализа. Английские последователи Ньютона тотчас встали на защиту метода флюксий, и между ними и Беркли началась острая полемика, осложнившаяся спорами между главными его оппонентами — Дж. Джюрином и Б. Робинсом. Оба они предложили несколько разнящиеся определения предела и доказали отдельные теоремы о предельных переходах. Откликом на «Аналист» явился и фундаментальный «Трактат о флюксиях» К. Маклорена (1742) [№ 69]. Далее дискуссия перенеслась главным образом на континент Европы, где были по-новому развиты или вновь созданы несколько концепций математического анализа. Мы остановились на одной из них, которой предстояло блестящее будущее в XIX в. и наиболее ярким представителем которой во второй половине XVIII в. был Ж. Даламбер. Сам он не дал систематического построения своего метода пределов, продолжавшего идеи Ньютона, но его краткие и отточенные статьи в знаменитой «Энциклопедии» Дидро (Даламбер также был некоторое время одним из ее редакторов) сыграли очень большую роль в подготовке теории пределов современного классического анализа. Мы приводим выдержки из его статей «Différentiel» (1754), «Fluxion» (1756), «Infiniment petit» (1759) и «Limite» (1765); впоследствии в 1787—1789 гг. они были перепечатаны в первых двух томах «Методической энциклопедии, расположенной по порядку предметов» [№ 59]. Кроме того, мы приводим еще два отрывка, о которых говорится в 8-м и 9-м примечаниях.

1. В последующем некоторые авторы, например С. Е. Гурьев (1799), указали, что в этом определении — очевидно, по недосмотру,— не сказано, что предел — величина постоянная. Характерно следующее обстоятельство: в определении имеются в виду монотонные последовательности величин, а не произвольные числовые последовательности. Ограничение определения предела возрастающими и убывающими последовательностями, на первых порах неудивительное, встречается во многих трудах по теории пределов XVIII в., в частности в первом издании «Элементарного изложения начал высших исчислений» С. Люилье (1786) и в «Опыте о усовершении элементов геометрии» С. Е. Гурьева (1799). Во втором издании книги Люилье (на латинском языке; 1795 г.) это ограничение отброшено.

2. Здесь де ла Шаппель, написавший первую часть статьи «Предел» (до слов: «Теория пределов есть основание» и т. д.), ссылается на свой учебник «Institutions de géométrie», первое издание которого вышло в 1746 г.

3. Поскольку речь идет о бесконечных монотонных последовательностях, такое свойство переменной (не совпадать с пределом) вполне естественно.

4. Аналогичное определение суммы ряда имелось у Маклорена.

5. В другой статье «Флюксия» Даламбер все же возражает против введения в анализ в качестве основного понятия флюксии — скорости. В одной работе 1759 г. Даламбер подверг также критике представление об «исчезающих величинах», о которых писали как Ньютон, так и Эйлер (см. [№ 57, с. 346—355]).

6. Отраженная в этом отрывке тенденция дать самостоятельное обоснование анализа, свободное от применения понятий механики (и геометрии), особенно отчетливо проявилась в «Теории аналитических функций» Лагранжа (см. далее отрывки в п. 8, в).

7. Говоря о бесконечно малых, Даламбер имеет в виду «несравнимые», актуально бесконечно малые величины. Такое понимание термина «бесконечно малые» было в XVIII в. весьма распространенным.

8. «Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs» С. Люилье было одним из лучших изложений анализа на основе теории пределов, написанных в XVIII в. Оно получило в 1786 г. премию на конкурсе по вопросу

о теории математической бесконечности, организованном по предложению Лагранжа Берлинской Академией наук. Здесь появляется общепринятый теперь символ предела, есть теорема о пределе частного и некоторые другие новинки. Дифференциалами Люилье не пользуется, хотя фактически не может обойтись без потенциально бесконечно малых — переменных, которые «не имеют предела малости» или же «могут быть сделаны меньше какой-бы то ни было определенной величины»; см. [№ 68, с. 21]. Термина «производная» у Люилье не было, он говорил о «дифференциальном отношении».

9. В этой формулировке С. Е. Гурьев, первый пропагандист метода пределов в России, имеет в виду уже не предел последовательности, а предел (непрерывной) функции. Мы бы записали его общее утверждение формулой

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Подводя итог перечисленным успехам метода пределов в XVIII в., следует добавить, что его применение ограничивалось попытками более строгого обоснования уже известных результатов. Принципиально новое значение теория пределов приобрела только в ходе реформы анализа в первой трети XIX в.

10. В упомянутом конкурсе Берлинской Академии наук принял участие и Л. Карно. В своем «Рассуждении о теории математического бесконечного» он сделал попытку доказать, что исчисление бесконечно малых школы Лейбница управляется общим законом компенсации ошибок, обязательно происходящей при некоторых условиях. «Рассуждение» Карно не удовлетворило берлинских математиков, во главе которых тогда стоял Лагранж, и рукопись его увидела свет только в 1971 г. (см. [№ 61, с. 169—267]). Но на его основе Карно впоследствии составил свои «Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal» (1797 г., второе переработанное издание 1813 г.). В «Размышлениях» также изложена теория компенсации ошибок, идею которой высказал, как мы видели, Беркли. Наряду с этим в них разбираются и сравниваются другие подходы к обоснованию анализа. Мы приводим отрывок, характеризующий отношение Карно к теории пределов. Карно впервые отметил, что понятия потенциальной бесконечно малой и предела неразрывно связаны и первый определил бесконечно малую как переменную, предел которой есть нуль. Это открывало путь к синтезу теории пределов и исчисления бесконечно малых — синтезу, который Карно безуспешно пытался осуществить в конкурсном сочинении и который удался О. Коши. В упрек методу пределов Даламбера и его последователей Карно ставил одно обстоятельство: фактический отказ от применения алгоритма бесконечно малых и дифференциалов. Что этот упрек не был лишен оснований, показывают хотя бы сочинения Люилье и Гурьева.

11. Здесь Карно отсылает читателя к § 14 «Размышлений», где дано определение потенциальной бесконечно малой.

12. Предложенное Карно разделение величин на назначенные (désignées) и неназначенные (non désignées) не сохранилось. Под назначенными величинами Карно понимал постоянные и обыкновенные переменные (координаты кривых, подкасательные, отрезки нормалей и т. п.), а неназначенными называет те, которые в ходе задачи считаются вплоть до конца решения неопределенными, как бесконечно малые, или их переменные отношения или суммы конечных и бесконечно малых величин и т. п.

в. ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА

ИЗ «ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ» Ж. Л. ЛАГРАНЖА (1797 г., 2-е изд. 1813 г.)

[№ 65, с. 15—16, перевод А. П. Юшкевича]

Функцией одной или нескольких величин называют всякое математическое выражение, в которое входят каким-либо образом эти величины, одни или вместе с другими величинами, значения которых считают данными и неизменными, тогда как величины, входящие в функцию, могут принимать все возможные значения...

Жозеф Луи Лагранж

Слово *функция* было применено первыми аналистами для общего обозначения степеней какой-либо одной величины. Затем это слово распространили по смыслу на любую величину, как либо образованную из другой величины. В таком общем значении его первыми применили Лейбниц и братья Бернулли, и оно является ныне общепринятым.

Если переменной, входящей в функцию, сообщают какое-либо приращение, прибавив к этой переменной неопределенную величину, и если функция алгебраическая, то ее можно разложить по степеням этой неопределенной величины с помощью обычных правил алгебры. Первым членом разложения будет предложенная функция, которую мы будем называть *первообразной функцией* (fonction primitive); следующие члены будут образованы различными функциями той же переменной, умноженными на последовательные степени неопределенной величины. Эти новые функции будут зависеть единственно лишь от первообразной функции, из которой они произведены, и их можно будет назвать *производными функциями* (fonctions dérivées). Вообще независимо от того, будет ли первообразная функция алгебраической или нет, она всегда может быть разложена или предположена разложенной таким же образом и тем самым породить производные функции. Рассмотрение функций с этой точки зрения составляет анализ более высокого рода, чем обыкновенный анализ, благодаря его общности и многочисленным применениям. Настоящий труд покажет, что анализ, называемый обычно трансцендентным или инфинитезимальным, есть по существу анализ первообразных и производных функций и что дифференциальное и интегральное исчисления представляют, собственно говоря, исчисление именно этих функций **(1)**.

[Там же, с. 21—29]

1. ... Рассмотрим fx, функцию какой-либо переменной x. Если вместо x подставить $x+i$, где i—какая-либо неопределенная величина, то функция станет $f(x+i)$ и по теории рядов ее можно будет разложить в ряд вида

$$fx+pi+qi^2+ri^3+\ldots,$$

в котором величины p, q, r, ... — коэффициенты при степенях i — будут новыми функциями x, произведенными от первообразной функции fx и независящими от неопределенной величины i.

2. Но, чтобы не выставлять никаких голословных утверждений, мы начнем с разбора самой формы ряда, который должен представлять разложение всякой функции fx, если в нее вместо x подставить $x+i$, и который согласно нашему предположению должен содержать лишь целые и положительные степени i.

Действительно, это предположение подтверждается при разложении различных известных функций; но никто, насколько мне известно, не пробовал его доказать a priori, что, однако, представляется мне тем более необходимым, что встречаются особые случаи, когда оно не имеет места. Впрочем, дифференциальное исчисление определенно основывается на том же предположении, и случаи, которые составляют исключение для последнего, как раз те же, в каких обвиняли в недостаточности и дифференциальное исчисление (2).

. . . .

3. Установив, таким образом, общий вид разложения функции $f(x+i)$, рассмотрим более специально, как составлено это разложение и что означает каждый из его членов.

Прежде всего видно, что, если угодно найти в этой функции то, что не зависит от величины i, нужно лишь положить $i=0$, что приводит ее к fx. Таким образом, fx есть часть $f(x+i)$, остающаяся при обращении величины i в нуль. Значит, $f(x+i)$ равна fx плюс величина, которая должна исчезать при $i=0$ и которая, значит, должна содержать или может почитаться содержащей множителем некоторую положительную степень i. А так как мы только что доказали, что в разложение $f(x+i)$ не могут входить никакие дробные степени i, то величина, о которой идет речь, может содержать множителем лишь целую и положительную степень i; следовательно, она будет вида iP, где P есть функция x и i, не обращающаяся в бесконечность при $i=0$.

Таким образом,

$$f(x+i)=fx+iP;$$

значит, $f(x+i)-fx=iP$ и, следовательно, делится на i; по разделении получится

$$P=\frac{f(x+i)-fx}{i}.$$

Так как P является новой функцией x и i, то в ней также можно будет отделить то, что не зависит от i и, следовательно, не исчезает, когда i обращается в нуль. Пусть P при $i=0$ обращается в p; p будет функцией x, но не i, и рассуждение, аналогичное предыдущему, докажет, что $P=p+iQ$, где iQ есть часть P, обращающаяся в нуль при $i=0$, а Q — новая функция x и i, не обращающаяся в бесконечность при $i=0$.

Значит, $P-p=iQ$ и, следовательно, делится на i; по разделении получится

$$Q=\frac{P-p}{i}.$$

Пусть q является значением Q при $i=0$; q будет функцией x, но не i, а часть Q, обращающаяся в нуль, когда i становится нулем, будет, как выше, иметь вид iR, где R есть функция x и i, которая не обратится в бесконечность при $i=0$ и найдется путем деления $Q-q$ на i, и т. д.

Процесс этот дает, что

$$f(x+i)=fx+iP,\ P=p+iQ,\ Q=q+iR,\ R=r+iS \text{ и т. д.},$$

откуда, подставляя последовательно

$$\begin{gathered} f(x+i)=fx+iP= \\ =fx+ip+i^2Q=fx+ip+i^2q+i^3R= \text{и т. д.}, \end{gathered}$$

что дает для разложения $f(x+i)$ ряд того вида, какой мы предположили вначале.

4. Пусть, например, $fx=\frac{1}{x}$; тогда

$$f(x+i)=\frac{1}{x+i}$$

и, значит,

$$\begin{gathered} iP=\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x}=-\frac{i}{x(x+1)},\quad P=-\frac{1}{x(x+i)},\quad p=-\frac{1}{x^2}, \\ iQ=-\frac{1}{x(x+i)}+\frac{1}{x^2}=\frac{i}{x^2(x+i)},\quad Q=\frac{1}{x^2(x+i)},\quad q=\frac{1}{x^3}, \\ iR=\frac{1}{x^2(x+i)}-\frac{1}{x^3}=-\frac{i}{x^3(x+i)},\quad R=-\frac{1}{x^3(x+i)},\quad r=-\frac{1}{x^4} \text{ и т. д.} \end{gathered}$$

Таким образом, получается

$$\begin{gathered} \frac{1}{x+i}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x(x+i)}= \\ =\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^2(x+i)}=\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}+\frac{i^2}{x^3}-\frac{i^3}{x^3(x+i)}= \text{и т. д.}, \end{gathered}$$

что получается и при действительном делении.

. . . .

6. Но главное преимущество изложенного нами метода заключается в том, что он показывает, как функции $p, q, r, \ldots$ получаются из главной функции fx, а особенно в том, что он

доказывает, что остатки iP, iQ, iR суть величины, которые должны обращаться в нуль при $i=0$. Отсюда выводится важное следствие, что в получающемся при разложении $f(x+i)$ ряде $fx+pi+qi^2+ri^3+$и т. д. можно всегда взять i настолько малым, чтобы любой член его был более суммы всех следующих за ним членов, и что это должно иметь место также для всех меньших значений i.

. . . .

На эту теорему следует смотреть как на один из фундаментальных принципов теории, которую мы намереваемся изложить; она молча предполагается в дифференциальном исчислении и в исчислении флюксий, и можно сказать, что именно этот пункт придает более всего силу этим исчислениям, особенно в их применении к геометрическим и механическим задачам (3). Сомнения в доказательстве этой теоремы, которые могли еще сохраниться, поскольку употребленный нами для нахождения остатков iP, iQ, iR, ... прием приложим лишь к алгебраическим функциям, будут устранены в гл. V, в которой мы дадим общее выражение для этих остатков и способ определения их границ (4).

[Там же, с. 31—36]

8. Мы видели, что разложение $f(x+i)$ порождает ряд других функций p, q, r, ..., которые все производятся главной функцией fx, и мы привели способ нахождения этих функций в частных случаях. Но, чтобы построить теорию на функциях этого рода, нужно отыскать общий закон их произведения (dérivation).

Возьмем для этого общую формулу

$$f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\text{и т. д.}$$

и предположим, что неопределенная x становится $x+o$, где o есть какая-либо неопределенная величина, не зависящая от i. Очевидно, что $f(x+i)$ обратится в $f(x+i+o)$ и вместе с тем видно, что тот же результат получился бы, если бы в $f(x+i)$ вместо i просто было поставлено $i+o$. Поэтому должен получиться один и тот же результат как при замене в ряду $fx+pi+$ $+ri^3+$ и т. д. i через $i+o$, так и при замене в нем x через $x+o$.

Первая подстановка дает

$$fx+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\ldots,$$

т. е. (если разложить степени $i+o$ и выписать для простоты лишь первые два члена каждой степени, ибо для необходимых нам определений будет достаточно сравнения этих членов)

$$\begin{aligned}&fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{и т. д.},\\&+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Чтобы произвести другую подстановку, положим, что функции fx, p, q, r, и т. д. при замене в них x через $x+o$ обращаются в $fx+f'xo+$ и т. д., $p+p'o+$ и т. д., $q+q'o+$ и т. д., $r+r'o+$ и т. д., причем мы учитываем в разложении лишь члены, содержащие первую степень o. Ясно, что та же формула обратится в

$$fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{и т. д.},$$
$$+f'xo+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\text{и т. д.}$$

Так как оба результата должны быть тождественны, каковы бы ни были значения i и o, то, сравнивая члены, содержащие множителями o, io, i^2o и т. д., мы получим

$$p=f'x,\quad 2q=p',\quad 3r=q',\quad 4s=r',\ \text{и т. д.}$$

Далее, ясно, что, так же как $f'x$ есть первая функция, производная от fx, так p' есть первая функция, производная от p, q' — первая функция, производная от q, r' — первая функция, производная от r и т. д. Поэтому, если для большей простоты и единообразия обозначить через $f'x$ первую функцию, производную от fx, через $f''x$ первую функцию, производную от $f'x$, через $f'''x$ первую функцию, производную от $f''x$ и т. д., то получится

$$p=f'x;\ \text{а отсюда}\ p'=f''x;$$

значит,

$$q=\frac{p'}{2}=\frac{f''x}{2},\ \text{а отсюда}\ q'=\frac{f'''x}{2};$$

значит,

$$r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''x}{2\cdot 3},\ \text{а отсюда}\ r'=\frac{f^{\mathrm{IV}}x}{2\cdot 3};$$

значит,

$$s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{\mathrm{IV}}x}{2\cdot 3\cdot 4},\ \text{а отсюда}\ s'=\frac{f^{\mathrm{V}}x}{2\cdot 3\cdot 4};$$

и так далее.

Следовательно, подставляя эти значения в разложение функции $f(x+i)$, мы получим

$$f(x+i)=fx+f'xi+\frac{f''x}{2}i^2+\frac{f'''x}{2\cdot 3}i^3+\frac{\overset{\mathrm{IV}}{f}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+\quad\text{и т. д.}$$

Это новое выражение обладает тем преимуществом, что показывает взаимную зависимость между членами ряда и особенно, как можно образовать все производные функции, входящие в ряд, если уметь образовать первую функцию, производную от какой-либо первообразной функции (5).

9. Мы будем называть функцию fx *первообразной функцией* по отношению к произведенным из нее функциям $f'x$, $f''x$, и т. д., а эти функции — *производными функциями* по отношению к ней.

Далее мы назовем первую производную функцию $f'x$ *первой функцией*, вторую производную функцию $f''x$ *второй функцией*, третью производную функцию $f'''x$ *третьей функцией* и так далее.

Таким же образом, если y принять за функцию x, мы будем обозначать ее производные функции через y', y'', y''', ...

Таким образом, когда x ставится $x+i$, y становится

$$y+y'i+\frac{y''i^2}{2}+\frac{y'''i^3}{2\cdot 3}+ \text{ и т. д.}$$

Итак, если только имеется средство получить первую функцию какой-либо первообразной функции, то простое повторение тех же действий даст все производные функции и, следовательно, все члены ряда, возникающего при разложении первообразной функции.

Впрочем, при хотя бы некотором знакомстве с дифференциальным исчислением видно, что производные по x функции y', y'', y''' и т. д. совпадают с выражениями $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

. . . .

10. Поскольку все сводится к отысканию первой производной функции данной функции, мы дадим общие правила образования производных функций важнейших количеств, применяемых в анализе.

Пусть сначала $fx=x^m$, тогда

$$f(x+i)=(x+i)^m.$$

С помощью простых правил арифметики или же первых действий алгебры легко доказать, что два первых члена степени m бинома $x+i$ суть $x^m+mx^{m-1}i$, будь m число целое или дробное, положительное или отрицательное (6); таким образом, получится

$$f'x=mx^{m-1}.$$

Отсюда точно так же найдется

$$f''x=m(m-1)x^{m-2}, \quad f'''x=m(m-1)(m-2)x^{m-3} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, по общей формуле пункта *8*

$$(x+i)^m=x^m+mx^{m-1}i+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}i^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}i^3+ \text{ и т. д.,}$$

а это и есть известная формула бинома, которая тем самым доказана для всех значений m.

11. Во-вторых, пусть $fx=a^x$, тогда

$$f(x+i)=a^{x+i}=a^x\cdot a^i;$$

таким образом, все сводится к отысканию первых двух членов ряда a^i по степеням i.

Положим для этого $a=1+b$; тогда по только что доказанной формуле

$$a^i=(1+b)^i=1+ib+\frac{i(i-1)}{2}b^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{2\cdot 3}b^3+\quad \text{и т. д.}$$

Перемножая i, $i-1$, $i-2$ и т. д. и располагая члены по степеням i, получим, что члены, умноженные на i, образуют ряд $i\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{и т. д.}\right)$.

Поэтому, если для краткости положить

$$A=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{и т. д.}=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\quad \text{и т. д.},$$

то два первых члена значения a^i в форме ряда будут $1+Ai$; следовательно,

$$f'x=Aa^x.$$

Отсюда повторением той же операции найдется

$$f''x=A\times Aa^x=A^2a^x,\ f'''x=A^3a^x\quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, получается, что

$$f(x+i)=a^{x+i}=a^x\left(1+Ai+\frac{A^2i^2}{2}+\frac{A^3i^3}{3}+\quad \text{и т. д.}\right).$$

Разделив на a^x и заменив i на x, получим известный ряд

$$a^x=1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\frac{A^3x^3}{2\cdot 3}+\text{ и т. д.}$$

12. Если в этой формуле взять $x=1$, получится

$$a=1+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{2\cdot 3}+\text{ и т. д.},$$

а если взять $x=\frac{1}{A}$, получится

$$a^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\text{ и т. д.}$$

Таким образом, величина $a^{\frac{1}{A}}$ равна постоянному числу, которое представляет собой значение a при $A=1$, и из предыдущего ряда находят, что

$$a^{\frac{1}{A}}=2{,}71828\ 18284\ 59045\ \ldots$$

Обыкновенно это число обозначают e, так что отношение между a и A выражается конечным образом с помощью уравнения $a^{\frac{1}{A}}=e$, что дает $a=e^A$.

Поэтому, если $fx = e^{mx}$, то $a = e^{m}$, $A = m$ и, значит,

$$f'x = me^{mx},\ f''x = m^2e^{mx},\ f'''x = m^3e^{mx} \text{ и т. д.}$$

Отсюда, как и выше, выводится, что

$$e^{mx} = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{2} + \frac{m^3x^3}{2\cdot 3} + \text{ и т. д.}$$

В уравнении $y = a^x$ x называется логарифмом y, причем a является основанием логарифмической системы, т. е. числом, логарифм которого есть единица (7).

[Там же, с. 67—69]

40. Отсюда, наконец, следует та новая и замечательная по своей простоте и общности теорема, что, обозначив u некоторую неизвестную величину, заключенную в границах между 0 и x, любую функцию x и каких-либо других величин можно последовательно разложить по степеням x таким образом,

$$\begin{aligned} fx &= f. + xf'u, \\ &= f. + xf' + \frac{x^2}{2} f''u, \\ &= f. + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + \frac{x^3}{2\cdot 3} f'''u, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

где величины $f.$, f', f'' и т. д. суть значения функции fx и ее производных $f'x$, $f''x$ и т. д. при $x = 0$.

. . . .

Таким образом, обозначив производные функции fz через fz', $f''z$ и т. д., получим

$$\begin{aligned} f(z + x) &= fz + xf'(z + u), \\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''(z + u), \\ &= fz + xf'z + \frac{x^2}{2} f''(z) + \frac{x^3}{2\cdot 3} f'''(z + u), \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

. . . .

Совершенство методов приближения, в которых применяются ряды, зависит не только от сходимости рядов, но еще от возможности оценить ошибку, происходящую от членов, которыми пренебрегают; и можно сказать, что в этом отношении почти все приближенные методы, употребляемые в геометрических и механических задачах, еще очень несовершенны. Предыдущая теорема во многих случаях сможет сообщить этим методам недостающее им совершенство, без чего их часто бывает опасно применять (8).

Примечания. В конце XVIII в. с обширной новой системой анализа выступил Ж. Л. Лагранж. Мы приводим несколько отрывков из его главного труда по этому вопросу, основное содержание которого он излагал в лекциях в парижской Политехнической школе, организованной в 1794 г. Полное название этого сочинения таково: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от какого-либо рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин» (« Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies » (1797). В 1813 г. эта книга вышла в несколько переработанном и дополненном издании, с которого и сделан наш перевод.

Основную идею своей программы Лагранж высказал за четверть века до выхода «Теории аналитических функций» в одной статье 1772 г., опубликованной в 1774 г. [64, с. 441—476]. Она заключалась в том, чтобы алгебраически доказать общую теорему Тейлора и далее строить анализ на разложениях функций в степенные ряды. При этом изучение структуры разложения функции u от $x+\xi$ по степеням ξ

$$u+u'\xi+\frac{u''}{2}\xi^2+\frac{u'''}{2\cdot 3}\xi^3+\ldots$$

показало Лагранжу, что входящие в коэффициенты разложения функции u, u', u'', u''', ... могут быть получены последовательно одна из другой по единому правилу: каждая есть коэффициент при первой степени ξ в разложении по степеням ξ предыдущей. Лагранж называл функции u', u'', u''' производными от начальной, первообразной функции u; обозначение с помощью штрихов он употребил еще ранее, около 1760 г.

Еще два математика, быть может под влиянием упомянутой статьи Лагранжа, предприняли, каждый по-своему, попытку построить анализ на таких же принципах. Одним из них был Ж. Кондорсе, готовивший в 1778—1782 гг. общий курс математического анализа, а другим — Л. Арбогаст, представивший в 1789 г. Парижской Академии наук «Опыт о новых началах дифференциального и интегрального исчисления, независимо от теорий бесконечно малых и пределов». Оба эти сочинения не увидели света и оба были далеки от той полноты изложения предмета, какую мы находим у Лагранжа.

«Теория аналитических функций» состоит из введения и трех частей, содержащих соответственно саму математическую теорию, ее приложения к геометрии и затем к механике; характерно полное отсутствие чертежей. По-видимому, выражение «аналитическая функция» впервые встречается в начале только что упомянутого труда Кондорсе (часть которого сохранилась между прочим в типографски отпечатанных листах). И Кондорсе и Лагранж понимали под аналитическими функциями функции, образуемые с помощью известных в анализе средств; впрочем, оба они, как и другие математики XVIII в., полагали, что все такие функции, вообще говоря, разложимы в ряд Тейлора. Впоследствии Вейерштрасс назвал аналитическими функции, представимые степенными рядами.

1. Мы опускаем следующий далее исторический очерк, содержащий сжатые характеристики и критику различных методов обоснования и построения анализа, начиная от Ньютона и Лейбница. В итоге Лагранж приходит к заключению, что «истинная теория» дифференциального исчисления еще не создана, мельком с похвалой упоминает о еще неопубликованном мемуаре Арбогаста и указывает, что в своей книге он развивает и обобщает свои прежние мысли, содержащиеся в статье 1772 г.

2. Целью Лагранжа здесь является обосновать разложимость произвольной функции анализа в ряд по натуральным степеням приращения аргумента. Он прежде всего хочет доказать, что при произвольных значениях аргумента x и его приращения i в разложении $f(x+i)$ не может быть, вообще говоря, дробных и отрицательных степеней i. Возможность разложения $f(x+i)$ по каким-либо степеням приращения математикам XVIII в. казалась совершенно

несомненной (ср. слова Эйлера на с. 77). Мы опускаем эти рассуждения Лагранжа, чисто формальные с современной точки зрения и неубедительные. Столь же формальными являются рассуждения в п. 3, где Лагранж переходит к изучению коэффициентов разложения в степенной ряд. В предположении, что такое разложение возможно, приемы Лагранжа позволяют в простейших случаях вычислить коэффициенты, как видно из примера в п. 4.

3. Эта теорема, регулярно применявшаяся и другими математиками, справедлива, если ряд сходится к данной функции. Впрочем, Лагранж пользуется в приложениях не этой теоремой, а выведенной им формулой Тейлора с остаточным членом (мы приводим ее на с. 168).

4. В V главе I части Лагранж рассматривает исключительные, по его мнению, случаи, когда разложение функции $f(x+i)$, о котором идет речь, не имеет места. Это может произойти, как он пишет (п. 30), только потому, что для некоторого значения x какая-либо из функций $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ (и все последующие) обращается в бесконечность, причем если первая обращающаяся в бесконечность производная имеет индекс n, то разложение содержит член вида i^m, $n-1 < m < n$, а если обращаются в бесконечность все эти функции, начиная с $f(x)$, то появляются члены с отрицательными степенями i.

В V (п. 28) главе Лагранж заявил также, что случай, когда функция $f(x)$ и все ее производные обращаются при некотором значении $x=a$ в нуль, возможен только, если функция тождественно равна нулю. Это утверждение, высказанное также Эйлером, опроверг Коши (см. далее отрывок п. 9, б).

5. Аналогичный вывод коэффициентов ряда Тейлора дал в не раз уже упомянутом неопубликованном труде Кондорсе.

6. Как видно, Лагранж оставляет вопрос о сходимости биномиального разложения полностью в стороне. Столь же формально оперирует он с биномиальным разложением в п. 11 при выводе производной показательной функции.

7. Далее выведены производные логарифмической функции, синуса и косинуса (с помощью формул Эйлера), правила дифференцирования произведения, частного, сложной и неявной функций.

8. Формула Тейлора с остаточным членом—один из важнейших результатов, содержащихся в «Теории аналитических функций». Лагранж широко пользуется ею в теории соприкасания кривых, при отыскании экстремумов и т. д. Следует все же иметь в виду, что Лагранж был далек от мысли применять остаточный член формулы Тейлора к исследованию вопроса о разложимости функций в степенной ряд.

«Теория аналитических функций» Лагранжа, в которой было предложено новое мономерное построение всей системы анализа и его важнейших приложений на единой основе, была встречена с большим интересом. Ее идеи восприняли составители многих руководств, начиная с упоминавшегося уже трехтомного трактата С. Ф. Лакруа (см. с. 84). Впрочем, Лакруа, как и многие другие авторы учебников, эклектически сочетали теорию Лагранжа с применением пределов и бесконечно малых. Вообще, предложение Лагранжа отказаться от использования бесконечно малых и пределов не встретило сочувствия. Современники, как например Л. Карно, во 2-м издании своих «Размышлений» (1813) указывали, что сам Лагранж фактически в той же «Теории аналитических функций», не говоря уже о других его сочинениях, употребляет потенциально бесконечно малые [№ 13 с. 214—215]. Несколько ранее, еще при жизни Лагранжа, умершего в 1813 г., против исключения из анализа бесконечности выступил в «Опровержении Теории аналитических функций Лагранжа» (1812) [см. № 79] польский математик И. Вронский, имя которого носит один важный специальный вид функциональных определителей. Вронский отметил также то обстоятельство, что, доказывая представимость любой функции ее рядом Тейлора, Лагранж заранее предполагал возможность такого представления. Вслед затем формально алгебраическая трактовка теории рядов была подвергнута принципиальной критике молодым поколением математиков. Таким образом, система обоснования анализа Лагранжа была отвергнута, но многочисленные фундаментальные конкретные открытия, входившие в эту систему, и развитые им приемы доказательств прочно вошли, с надлежащими уточнениями, в обиход.

9. ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В XIX—XX вв.

а. Б. БОЛЬЦАНО О ПРОБЛЕМАХ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗ СОЧИНЕНИЯ Б. БОЛЬЦАНО «ЧИСТО АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ, ЧТО МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЗНАЧЕНИЯМИ, ДАЮЩИМИ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОТИВОПОЛОЖНОГО ЗНАКА, ЛЕЖИТ ПО МЕНЬШЕЙ МЕРЕ ОДИН ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ КОРЕНЬ УРАВНЕНИЯ» (1817)

1) Анализ, геометрия и механика

[№ 63, с. 3—7]

В учении об уравнениях имеются две теоремы, относительно которых еще недавно можно было сказать, что их вполне правильное доказательство неизвестно. Одна из них — теорема: *между двумя любыми значениями неизвестной, которые дают результаты противоположного знака, всегда должен лежать по меньшей мере один действительный корень уравнения.* Другая гласит: *всякая алгебраическая рациональная целая функция одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени.* После нескольких неудачных попыток *Даламбера, Эйлера, де Фонсене, Лагранжа, Лапласа, Клюгеля и др.* в прошлом году г. *Гаусс* доставил нам, наконец, два доказательства последней теоремы, которые едва ли требуют желать лучшего. Правда, этот замечательный ученый подарил нам уже в 1799 г. доказательство этой теоремы, однако оно имело еще недостаток, который он сам признал, а именно: оно обосновывало чисто аналитическую истину *геометрическими соображениями.* Однако его два *новейших доказательства* целиком свободны от этого недостатка, так как тригонометрические функции, встречающиеся в последнем из них, могут и должны быть понимаемы чисто аналитически (1).

Другая теорема, о которой мы выше упомянули, не принадлежит, правда, к тем теоремам, которые до сих пор особенно занимали размышление ученых. Однако мы все же видим, что очень видные математики занимались этой теоремой и уже пытались дать для нее *различные* способы доказательства. Кто желает убедиться в этом, пусть сравнит только различные изложения этой теоремы, например, у *Кестнера, Клеро, Лакруа, Меттерниха, Клюгеля, Лагранжа,253еслинга* и др.

Что, однако, ни один из этих способов доказательства не может считаться достаточным, видно при более точном их рассмотрении.

Бернард Больцано

I. При *самом обыкновенном* способе доказательства опираются на истину, позаимствованную *из геометрии*: *именно, что всякая непрерывная* (kontinuierliche) *линия простой кривизны, чьи ординаты сначала положительны, а потом отрицательны (или наоборот), неизбежно должна пересекать ось абсцисс в какой-либо точке, лежащей между этими ординатами.* Против *верности*, а также против *очевидности* этой геометрической теоремы возражать нечего. Но столь же очевидно также, что нетерпимым нарушением *хорошего метода* является, когда истины *чистой* (или общей) математики (т. е. арифметики, алгебры или анализа) желают вывести из соображений, которые принадлежат только *прикладной* (или специальной) ее части, а именно — геометрии... Ведь, в самом деле, если учесть, что доказательства в науке вовсе не должны быть лишь *удостоверениями*, а, наоборот, *обоснованиями*, т. е. изложениями того объективного основания, которое имеет доказываемая истина, то станет ясным само собой, что подлинно научным доказательством или объективным основанием истины, которая верна для *всех* величин, безразлично, находятся ли они в пространстве или нет, никак не может быть истина, которая верна только для величин, находящихся в *пространстве*. Если придерживаться этого взгляда, то станет, наоборот, понятным, что подобное геометрическое доказательство, как в большинстве случаев, так и в настоящем, составляет настоящий круг. Ибо хотя геометрическая истина, на которую здесь ссылаются (как мы это уже признали), в высшей степени *очевидна*, а значит, не нуждается в *доказательстве* как *удостоверении*, она тем не менее нуждается в *обосновании*. Ведь ясно, что понятия, из которых состоит эта истина, настолько сложны, что ни на миг нельзя допустить, будто они принадлежат к тем *простым* истинам, называемым *основные принципы* или *основные истины*, именно потому, что они являются лишь основой, но сами не являются следствием других. Значит, она — *теорема* или *производная истина*, т. е. такая истина, которая имеет свое основание в некоторых других, а поэтому должна быть доказана в науке выведением из них. И вот если кто-либо подумает об объективном основании того, почему линия при только что отмеченных обстоятельствах пересекает свою ось абсцисс, то он, наверное, вскоре заметит, что это основание состоит ни в чем другом, как только в той общей истине, что каждая непрерывная (stetige) функция x, которая становится положительной для одного значения x, а отрицательной для другого значения x, должна стать нулем для какого-нибудь значения x, лежащего между ними (2). А это как раз та истина, которая должна быть здесь доказана. Совершенно ошибочно, значит, полагать, что последнюю можно выводить из первой (как это делается в том способе доказательства, который мы теперь рассматриваем); наоборот, первая должна выводиться из второй, если мы хотим излагать в науке истины так, как они связаны друг с другом, согласно их объективной связи.

II. Не менее неприемлемо доказательство, которое некоторые строят на понятии *непрерывности* функции, примешивая сюда понятия *времени* и *движения*. «Если,— говорят они,— две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ изменяются, согласно закону непрерывности, и если для $x=\alpha$, $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, но для $x=\beta$, $f(\beta)>\varphi(\beta)$, то должно существовать какое-нибудь значение u, лежащее между α и β, для которого $f(u)=\varphi(u)$. Если представим, что переменная величина x принимает в обеих этих функциях постепенно все значения, лежащие между α и β, причем в то же мгновение она принимает и там и тут то же значение, то в *начале* этого непрерывного изменения значений x имеет место $f(x)<\varphi(x)$, между тем как в конце $f(x)>\varphi(x)$. Но так как обе функции, благодаря своей непрерывности, должны пройти сначала через все средние значения, прежде чем прийти к высшему значению, то должен существовать какой-то *средний момент*, когда обе были друг другу равны». Это делают еще наглядным с помощью примера *движения* двух тел, из которых одно было сначала *позади* другого, а под конец *опередило* его и, следовательно, обязательно должно было когда-то пройти *мимо* него.

Никто, по-видимому, не станет отрицать, что понятие *времени*, а тем более *движения* столь же чужеродно в общей математике, как и понятие *пространства*. Тем не менее, если бы эти два понятия были здесь привлечены только ради *объяснения*, то мы ничего не имели бы против этого. Ибо и мы вовсе не преданы столь преувеличенному *пуризму*, который, чтобы сохранить науку чистой от всего чужеродного, требует, чтобы в ее изложении не вводили даже *выражения*, позаимствованного из чужой области и употребляемого хотя бы лишь в несобственном значении и для того, чтобы вещь обозначить короче и яснее, чем это возможно сделать описанием, составленным из одних специальных терминов, или же только, чтобы избежать неблагозвучности постоянного повторения тех же слов, или чтобы одним только названием, которое дают вещи, напомнить о примере, который может послужить для того, чтобы подтвердить утверждение. Отсюда можно сразу усмотреть, что мы также никак не считаем *примеры* и *приложения* чем-либо таким, что наносит ущерб совершенству научного изложения. Лишь одного требуем мы, однако, строго: чтобы никогда не выдвигали примеры вместо *доказательств* и чтобы никогда не основывали существо самого заключения на выражениях, употребленных только в несобственном смысле, и на побочных представлениях, которые они вызывают, так что заключение отпадает, как только меняют эти выражения.

Согласно этим взглядам можно было бы, пожалуй, еще извинить привлечение в вышеприведенном доказательстве понятия *времени*, так как на выражениях, которые от него переняты, не основано ни одно заключение, которое не имело бы места и без него. Ни в коем случае, однако, нельзя считать только что данное *наглядное представление* через *движение тела* чем-нибудь большим, чем только *примером*, который не доказывает самую теорему, а, напротив, сам должен быть сначала доказан с ее помощью.

2) Определение непрерывной функции

[Там же, с. 7—8]

Рассмотрим, оставляя этот пример в стороне, остальное рассуждение. *Прежде всего* заметим, что в его основу положено неправильное представление *непрерывности*. А именно согласно *правильному объяснению* под выражением, что *функция* $f(x)$ *изменяется по закону непрерывности для всех значений* x, *которые лежат внутри или вне известных границ*[1], понимают *лишь то, что если* x *— какое-нибудь из этих значений, то разность* $f(x+\omega)-f(x)$ *может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять* ω *столь малым, сколько мы хотим;* или пусть будет (согласно обозначениям, введенным нами в § 14 «Биномиальной теоремы», Прага, 1816), $f(x+\omega)=f(x)+\Omega$ (3). Что, однако, как это принимают в этом доказательстве, непрерывная функция никогда не достигает высшего значения без того, чтобы пройти сначала через все низшие, т. е. что $f(x+n\Delta x)$ может принимать всякое значение, лежащее между $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$, если принять n произвольно между 0 и $+1$, это, конечно, вполне *истинное* утверждение. Однако его нельзя рассматривать как *объяснение* понятия непрерывности, а, напротив, оно является *теоремой* о последней; а именно такой, кото-

[1] Имеются функции, которые непрерывно изменяются для *всех* значений своего корня, например $\alpha x+\beta x^2$. Но имеются и другие, которые изменяются по закону непрерывности только внутри или вне известных граничных значений своего корня. Так, $x+\sqrt{(1-x)(2-x)}$ изменяется непрерывно только для всех значений x, которые $<+1$ или $>+2$, но не для значений, лежащих между $+1$ и $+2$.

рая может быть доказана только после того, как предположим ту теорему, для доказательства которой ее здесь хотят применить (4). Ибо если M обозначает какую-нибудь величину, лежащую между $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$, то утверждение, что имеется какое-то значение n, лежащее между 0 и $+1$, для которого $f(x+n\,\Delta x)=M$, является лишь частным случаем общей истины, что если $f(x)<\varphi(x)$ и $f(x+\Delta x)>\varphi(x+\Delta x)$, то должно иметься какое-то среднее значение $x+n\,\Delta x$, для которого $f(x+n\,\Delta x)=\varphi(x+n\,\Delta x)$. Именно из этой общей истины получается это первое утверждение в частном случае, когда функция $\varphi(x)$ переходит в постоянную величину M.

3) Теорема Больцано — Вейерштрасса

[Там же, с. 13—14]

Вот сколь несовершенны все имеющиеся до сих пор доказательства теоремы, стоящей в заглавии этого сочинения. То же, которое я предлагаю здесь на суд ученых, содержит, как я льщу себя, не только простое *удостоверение*, но объективное *обоснование* доказываемой истины, т. е. оно подлинно научно[1].

Последующее представляет собой краткий обзор хода этого доказательства.

Доказываемая истина, что между двумя значениями α и β, которые дают результат противоположного знака, всегда лежит по меньшей мере один действительный корень, основывается, очевидно, на другой, *более общей*, что, если две непрерывные функции x, $f(x)$ и $\varphi(x)$ обладают таким свойством, что для $x=\alpha$, $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, а для $x=\beta$, $f(\beta)>\varphi(\beta)$, то всегда должно иметься значение x, лежащее между α и β, для которого будет $f(x)=\varphi(x)$. Однако, если $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, то вследствие закона непрерывности также еще будет $f(\alpha+i)<\varphi(\alpha+i)$, если только взять i достаточно малым. *Свойство малости* принадлежит, следовательно, функции i, которую представляет выражение $f(\alpha+i)$, при *всех* значениях i, которые меньше, чем определенное значение. Тем не менее это свойство не принадлежит ей для всех значений i без ограничения, а именно не для i, которое было бы $=\beta-\alpha$, так как $f(\beta)$ уже $>\varphi(\beta)$. Теперь имеет место *теорема*, что как только известное свойство M принадлежит всем значениям переменной величины i, которые меньше задан-

[1] Все же пусть не ожидают, что я, быть может, здесь уже следую *всем* правилам, которые мной самим были выдвинуты в «*Очерках более обоснованного изложения математики*» (II ч.) для построения *подлинно научного* изложения. Ибо, хотя я по-прежнему вполне убежден в верности этих правил, все же точное следование им возможно только там, где начинают изложение науки с ее *первых* теорем и понятий, а не там, где излагают лишь *некоторые* ее положения, выделенные из связи с целым, как это делается здесь. Это замечание само собой должно быть отнесено и к сочинению *о биномиальной теореме*.

ной величины, но не принадлежит *всем вообще* ее значениям, то имеется всегда некоторое *наибольшее* значение u, о котором можно утверждать, что все i, которые $< u$, обладают свойством M (5). Для этого самого значения i не может $f(\alpha+u)$ быть $< \varphi(\alpha+u)$, потому что иначе, согласно закону непрерывности, было бы также $f(\alpha+u+\omega) < \varphi(\alpha+u+\omega)$, если бы мы взяли только ω достаточно малым. И следовательно, не было бы верно, что u является наибольшим из тех значений, о которых верно утверждение, что все значения i, стоящие ниже его, делают $f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$, а $u+\omega$ было бы еще бо́льшим значением, для которого верно то же самое. Но еще меньше может быть $f(\alpha+u) > \varphi(\alpha+u)$, так как иначе должно было бы быть также $f(\alpha+u-\omega) > \varphi(\alpha+u-\omega)$, если взять ω достаточно малым, а следовательно, не было бы верно, что для всех значений i, которые $< u$, имеет место $f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$. Таким образом, должно быть $f(\alpha+u) = \varphi(\alpha+u)$, т. е. между α и β имеется значение x, а именно $\alpha+u$, для которого функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ становятся равными друг другу. Дело идет только еще о доказательстве упомянутой *теоремы*. Ее мы теперь докажем тем, что покажем, что те значения i, о которых можно утверждать, что все меньшие из них обладают свойством M, и те значения, о которых этого больше утверждать нельзя, могут быть настолько взаимно сближены, насколько мы бы ни пожелали. Для всякого, кто имеет правильное понятие *величины*, отсюда следует, что представление о i, как о наибольшем из тех, о которых можно сказать, что все стоящие ниже его, обладают свойством M, есть представление реальной, т. е. *действительной* величины.

4) Критерий сходимости последовательности Больцано — Коши

[Там же, с. 21]

Теорема. Если ряд величин

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots,\ F_{n+r}(x)$$

имеет такое свойство, что разность между его n-м членом $F_n(x)$ и всяким дальнейшим $F_{n+r}(x)$, как бы тот ни был удален от первого, остается меньшей, чем любая заданная величина, если мы взяли n достаточно большим, то имеется всегда определенная *постоянная величина*, причем только *одна*, к которой все больше приближаются члены этого ряда и к которой они могут подойти сколь угодно близко, если мы продолжим ряд достаточно далеко (6).

Примечания. В первые десятилетия XIX в. началась глубокая перестройка анализа, получившая некоторое завершение в 70-е годы. Основания анализа отделяются от геометрии и механики; тенденция самостоятельного развития исчисления бесконечно малых, наметившаяся уже в XVIII в., переходит в процесс его арифметизации. Одновременно на смену формальному оперированию бесконечными величинами и выражениями и т. д. приходит содержательное исследование и обоснование соответствующих понятий и методов, потребовавшее установления условий, при которых они имеют реальный смысл. Первостепенное значение приобретают аналитические доказательства существования различных объектов — суммы ряда, интеграла, корней алгебраических уравнений и т. д. Точная постановка и решение всех таких проблем, необходимость которой назрела как внутри математики, так и в сфере ее приложений, прежде всего в математической физике, потребовала слияния теории пределов с алгоритмом бесконечно малых, разработки общей теории сходимости числовых и функциональных рядов, выделения класса непрерывных функций, новой формулировки понятий производной, дифференциала, интеграла и на более поздней стадии создания теории иррационального и действительного числа. На ранней стадии реформы анализа особенно активными ее участниками явились Гаусс, Больцано и Коши, затем Абель и другие. Но в то время как Гаусс раскрывал новые пути в анализе главным образом на примерах отдельных исследований (доказательство основной теоремы алгебры, исследование сходимости гипергеометрического ряда и др.), Больцано и Коши выступили со специальными изысканиями по самим основаниям анализа. При этом Больцано, глубокий философ и логик, с особенной силой подчеркивал методологические принципы новых концепций, и сперва применил эти принципы к отдельным задачам, между тем как Коши дал первые систематические курсы классического анализа XIX в. Если в целом вклад Коши в математику вообще и в развитие математического анализа в частности был значительно больше вклада Больцано, то, с другой стороны, Больцано, гораздо более чем Коши интересовавшийся проблемами оснований математики, значительно глубже проник в теорию функций действительного переменного. Это особенно видно в его замечательном «Учении о функциях» («Funktionenlehre»), составленном около 1830 г., но опубликованном только сто лет спустя, в 1930 г. К. Рыхликом. Достаточно сказать, что в названном труде построен пример непрерывной на отрезке функции, не имеющей производной, как писал он, для стольких значений аргумента, что между двумя любыми из них существует такое же третье (Рыхлик доказал, что функция Больцано недифференцируема ни в одной точке отрезка). Впоследствии примеры нигде не дифференцируемых функций были опубликованы Вейерштрассом и затем Г. Дарбу (1875). Наконец, Больцано первый осознал, что анализ нуждается в развитой теории действительного числа, и дал рукописный набросок такой теории; эта рукопись издана в 1962 г.

Мы приводим несколько отрывков из брошюры Больцано «Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege» (1817). В первом отрывке изложена общая точка зрения автора на необходимость совершенно самостоятельного обоснования анализа. Во втором выделен класс непрерывных в нашем смысле слова функций. Третий отрывок содержит, среди прочего, формулировку теоремы Больцано — Вейерштрасса, а в четвертом высказан критерий сходимости последовательности Больцано — Коши.

1. О гауссовых доказательствах основной теоремы алгебры см. к. I, ч. I, п. 9. Мы опускаем здесь и далее многочисленные библиографические ссылки Больцано, которые к тому же недостаточно полны для современного читателя.

2. Термин «непрерывная функция» здесь употреблен в современном смысле, а не в понимании Эйлера (см. выше отрывки п. 4г, с. 77—78).

3. В определении Больцано подразумевается, что речь идет об абсолютном значении разности $f(x+\omega)-f(x)$ Коши опубликовал определение непрерывной функции в 1821 г. Заметим, что оба они определяют прежде всего непрерывность функции на некотором промежутке, мы начинаем с определения непрерывности в точке.

4. В «Учении о функциях» Больцано на примере показал, что функция, принимающая все значения между нижней и верхней гранями, может и не быть на соответствующем отрезке непрерывной. Первый опубликованный пример такого рода принадлежит Г. Дарбу (1875).

5. Это и есть теорема Больцано—Вейерштрасса, которую теперь формулируют в терминах теории множеств (всякое ограниченное бесконечное множество имеет по меньшей мере одну предельную точку). Далее Больцано приводит доказательство теоремы, с нашей точки зрения, не полное (не достает общей теории действительных чисел).

6. В формулировке знаменитого критерия сходимости последовательности Больцано также опередил Коши на четыре года. Доказательство достаточности критерия у Больцано опять-таки неполное. Значение этого критерия Больцано—Коши в общей теории рядов общеизвестно.

6. ИЗ КУРСОВ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ О. КОШИ

1) Принципы построения анализа

ИЗ I ЧАСТИ «КУРСА АНАЛИЗА В ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЙ КОРОЛЕВСКОЙ ШКОЛЕ» О. КОШИ (1821)

[№ 54, т. III, с. II—V, перевод А. П. Юшкевича]

Что касается методов, то я стремился придать им всю строгость, требуемую в геометрии, с тем, чтобы никогда не прибегать к доводам, исходящим из общности алгебры. Хотя доводы такого сорта обыкновенно допускаются, особенно при переходе от сходящихся рядов к расходящимся и от действительных количеств к мнимым выражениям, но я думаю, что в них можно видеть лишь индуктивные приемы, позволяющие иногда предчувствовать истину, но плохо согласующиеся с хваленой точностью математических наук. Следует заметить еще, что им присуща тенденция присвоить алгебраическим формулам неограниченный простор, между тем как в действительности большинство этих формул справедливо только при известных условиях и для известных значений входящих в них количеств. Определяя эти условия и значения и точно устанавливая смысл употребляемых мной знаков, я устраняю всякую неопределенность; и тогда различные формулы представляют лишь соотношения между действительными количествами—соотношения, которые всегда легко проверить, подставляя числа вместо самих количеств. Правда, чтобы остаться верным этим принципам, я должен был допустить многие предложения, которые, быть может, сперва покажутся несколько жесткими. Например, я говорю в VI главе, что расходящийся ряд не имеет суммы; в VII главе, что мнимое уравнение есть только символическое выражение двух уравнений между действительными количествами... Но те, кто прочитает мой труд, убедятся, надеюсь, что предложения такого рода, вызывая счастливую необходимость внести в теорию больше точности и полезным образом ограничить слишком широкие утверждения, обращаются на пользу анализа и доставляют многие вопросы для немаловажных исследований. Так, прежде чем приступить к суммированию каких-либо рядов, я должен был рассмотреть, в каких случаях ряды можно суммировать, или, другими словами, каковы условия их сходимости; и в этом вопросе я установил общие правила, которые, на мой взгляд, заслуживают некоторого внимания.

Огюстен Коши

2) Основные понятия анализа

[Там же, с. 19]

Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению, так что в конце концов отличаются от него сколь угодно мало, то последнее называют *пределом* всех остальных. Так, например, иррациональное число есть предел различных дробей, дающих все более и более близкие его значения. В геометрии площадь круга есть предел, к которому стремятся площади вписанных многоугольников при постоянном возрастании числа их сторон и т. д.

Если последовательные числовые значения переменной неограниченно убывают, так что становятся меньше любого данного числа, эта переменная становится тем, что называют *бесконечно малой* или *бесконечно малым количеством*. Переменная этого рода имеет пределом нуль.

Если последовательные числовые значения переменной все более и более возрастают, так что становятся больше любого данного числа, говорят, что эта переменная имеет пределом *положительную бесконечность*, обозначаемую символом ∞, если речь идет о положительной переменной, и *отрицательную бесконечность*, обозначаемую знаком $-\infty$, если речь идет об отрицательной переменной. Положительная и отрицательная бесконечности вместе называются *бесконечными величинами*.

[Там же, с. 43]

Пусть $f(x)$ есть функция переменной x, и предположим, что для всякого значения x между двумя данными пределами эта функция неизменно принимает единственное и конечное значение. Если, исходя из значения x между этими пределами, сообщить переменной x бесконечно малое приращение α, сама функция будет иметь приращением разность

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

которая будет зависеть одновременно и от новой переменной α, и от значения x. Функция $f(x)$ будет непрерывной функцией переменной x между двумя указанными ее пределами, если для всякого значения x, промежуточного между этими пределами, числовое значение разности

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

неограниченно убывает вместе с числовым значением α. Другими словами, *функция $f(x)$ остается непрерывной относительно x между данными пределами, если между этими пределами бесконечно малое приращение переменной порождает всегда бесконечно малое приращение самой функции.*

Говорят также, что функция $f(x)$ есть непрерывная функция переменной x в соседстве с каким-либо ее частным значением, если она непрерывна между двумя пределами x, заключающими это значение, как бы ни были близки эти пределы.

Наконец, если функция $f(x)$ перестает быть непрерывной в соседстве с каким-либо частным значением переменной x, говорят, что тогда она становится *разрывной* и что для этого частного значения имеет место *разрыв непрерывности* (1).

3) Бесконечные ряды

[Там же, с. 114—116]

Рядом называют неограниченную последовательность количеств

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,$$

получающихся одни из других по определенному закону ... Пусть

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

есть сумма n первых членов, где n — какое-либо целое число. Если при постоянном возрастании значений n сумма S_n неограниченно приближается к известному пределу S, ряд называется сходящимся, а этот предел — суммой ряда. Наоборот, если при неограниченном возрастании n сумма S_n не приближается ни к какому определенному пределу, ряд будет расходящимся и не будет иметь суммы ...

В соответствии с установленными выше принципами, чтобы ряд

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots \tag{1}$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы при возрастании значений n сумма

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$$

неограниченно стремилась к фиксированному пределу S; другими словами, необходимо и достаточно, чтобы для бесконечно больших значений числа n суммы S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, ... отличались от предела S и, значит, между собою на бесконечно малые количества. Но последовательные разности между суммой S_n и каждой из следующих определяются соответственно уравнениями

$$S_{n+1} - S_n = u_n,$$
$$S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$
$$S_{n+3} - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$

. . . .

Следовательно, чтобы ряд (1) сходился, прежде всего необходимо, чтобы общий член u_n неограниченно убывал при увеличении n; но этого условия недостаточно. Нужно еще, чтобы при возрастающих значениях n различные суммы

$$u_n + u_{n+1}$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\cdots\cdots$$

т. е. суммы величин

$$u_n, \ u_{n+1}, \ u_{n+2}, \ \ldots ,$$

взятых, начиная с первой из них, в любом числе, в конце концов получали числовые значения, меньшие всякого определенного предела. Наоборот, если все эти различные условия выполняются, сходимость ряда обеспечена (2).

4) Об исчислении бесконечно малых

ИЗ «КРАТКОГО ИЗЛОЖЕНИЯ ЛЕКЦИЙ ПО ИСЧИСЛЕНИЮ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ В ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЙ КОРОЛЕВСКОЙ ШКОЛЕ» О. КОШИ (1823)

[№ 54, т. IV, с. 9—11, перевод А. П. Юшкевича]

Этот труд, предпринятый по просьбе Учебного совета Политехнической королевской школы, содержит конспект лекций, читанных мной в этой школе по исчислению бесконечно малых. Он будет состоять из двух томов, соответствующих двум годам, образующим цикл преподавания. Ныне я публикую первый том, разбитый на сорок лекций, из которых первые двадцать объемлют дифференциальное исчисление, а двадцать последних — часть интегрального исчисления (3). Методы, которым я следовал, отличны в некоторых отношениях от тех, какие излагаются в сочинениях этого рода. Главной целью моей было примирить строгость, которую я поставил себе правилом в моем «Курсе анализа» с простотой, вытекающей из непосредственного рассмотрения бесконечно малых величин. По этой причине я счел необходимым отбросить разложения функций в бесконечные ряды во всех случаях, когда получающиеся ряды не сходятся, и я был принужден перенести формулу Тейлора в интегральное исчисление, ибо эту формулу можно считать общей, лишь если содержащийся в ней ряд приводится к конечному числу членов и дополняется некоторым определенным интегралом. Я знаю, что знаменитый автор «Аналитической механики» положил упомянутую формулу в основание своей теории *производных функций*. Но, несмотря на все почтение, внушаемое столь выдающимся авторитетом, большинство геометров в настоящее время признает сомнительными результаты, к которым может привести употребление расходящихся рядов, и мы добавим, что в некоторых случаях теорема Тейлора дает как будто разложение функции в сходящийся ряд, но между тем сумма ряда существенно отличается от предложенной функции (см. конец 38-й лекции). Впрочем, лица, прочитавшие мое сочинение, убедятся, надеюсь, что принципы дифференциального исчисления и его наиболее важные приложения можно легко изложить без привлечения рядов.

В интегральном исчислении я нашел нужным дать общее доказательство существования интегралов или первообразных функций, прежде чем знакомить с их различными свойствами. Чтобы достигнуть этого, сперва потребовалось установить понятие интегралов между данными пределами или определенных интегралов (4). Так как последние могут иногда оказаться бесконечными или неопределенными, то было существенно исследовать, в каких случаях они сохраняют единственное и конечное значение (5).

[Там же, с. 22—23]

Если функция $y=f(x)$ остается непрерывной между двумя данными пределами переменной x и если, придав этой переменной какое-либо значение между двумя этими пределами, сообщить ей бесконечно малое приращение, то сама функция получит бесконечно малое приращение. Следовательно, если положить тогда $\Delta x=i$, то два члена отношения разностей

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i} \tag{1}$$

будут бесконечно малыми количествами. Но, в то время как оба эти члена будут неограниченно и одновременно приближаться к пределу нуль, само отношение может сходиться к некоторому другому пределу, положительному или отрицательному. Этот предел, если он существует, имеет для каждого частного значения x определенное значение, но он изменяется вместе с x... Форма новой функции, служащей пределом отношения $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, будет зависеть от формы предложенной функции $y=f(x)$. Чтобы отметить эту зависимость, новую функцию называют производной функцией и ее обозначают с помощью штриха символом y' или $f'(x)$.

[Там же, с. 27—28]

Пусть по-прежнему $y=f(x)$ есть функция независимой переменной x, i—бесконечно малая величина, а h—конечная. Если положить $i=\alpha h$, α тоже будет бесконечно малой и мы будем иметь тождественно

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h},$$

откуда получим, что

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}h. \qquad (1)$$

Предел, к которому сходится правая часть уравнения (1), когда переменная α неограниченно приближается к нулю, а величина h остается постоянной, называется дифференциалом функции $y=f(x)$ (6). Этот дифференциал обозначают с помощью характеристики d следующим образом:

$$dy \text{ или } df(x).$$

Легко получить его значение, если известно значение производной функции y' или $f'(x)$. Действительно, взяв пределы обеих частей уравнения (1), мы найдем вообще, что

$$df(x)=hf'(x). \qquad (2)$$

В частном случае, когда $f(x)=x$, уравнение (2) приводится к

$$dx=h. \qquad (3)$$

Значит, дифференциал независимой переменной x есть не что иное, как постоянная h. Таким образом уравнение (2) перейдет в

$$df(x)=f'(x)\,dx, \qquad (4)$$

или, что то же, в

$$dy=y'\,dx. \qquad (5)$$

Из последних уравнений следует, что производная $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точности равна $\frac{dy}{dx}$, т. е. отношению дифференциала функции к дифференциалу переменной, или, если угодно, коэффициенту, на который нужно умножить второй дифференциал, чтобы получить первый. Поэтому производную функцию называют иногда *дифференциальным коэффициентом*.

5) О ряде Тейлора

[Там же, с. 229—230]

Можно было бы думать, что если ряд (6) сходится (7), то он всегда имеет суммой $F(x)$, и что в случае, когда различные его члены один за другим обращаются в нуль, то обращается в нуль и сама функция $F(x)$. Однако, чтобы убедиться в противном, достаточно заметить, что второе условие будет выполнено, если предположить, что

$$F(x)=e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

а первое, если принять

$$F(x)=e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}.$$

Между тем функция $e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ не есть тождественный нуль, и ряд, выведенный в последнем предположении, имеет суммой не двучлен $e^{-x^2}+e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, но его первый член e^{-x^2} (8).

6) Абель о «Курсе анализа» Коши

ИЗ «ИССЛЕДОВАНИЙ О РЯДЕ $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$ $+\ldots$» *Н. Г. АБЕЛЯ (1826)*

[№ 46, с. 5]

Мы прежде всего установим некоторые необходимые теоремы о рядах. При этом путеводной нитью нам будет служить превосходный труд Коши «Курс анализа в политехнической школе, который должен быть прочитан каждым аналистом, любящим строгость в математическом исследовании.

[Там же, с. 9]

В приведенном выше сочинении г. Коши (стр. 131) имеется следующая теорема: «Если различные члены ряда $u_0+u_1+u_2+$ $+u_3+\ldots$ суть функции одной переменной величины x и притом непрерывные функции этой переменной вблизи какого-либо ее значения, для которого ряд сходится, то и сумма S ряда вблизи этого значения есть непрерывная функция x» (9).

Мне представляется, что эта теорема допускает исключения. Например, ряд

$$\sin\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi-\ldots$$

терпит разрыв для всякого значения φ, равного $(2m+1)\pi$, где m — целое число. Как известно, имеется множество рядов с такими свойствами (10).

Примечания. Наибольшее значение в распространении новых идей обоснования математического анализа в первой половине XIX в. имели труды О. Коши и прежде всего его лекции в парижской Политехнической школе, литературно оформленные в его учебных руководствах «Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique, 1[e] partie. Analyse algébrique» (1821) и «Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur l'analyse infinitésimale» (1823). Мы приводим отрывки из обоих сочинений, которые характеризуют общие установки Коши. В предисловии к первому руководству, представляющему собой введение в анализ бесконечно малых, Коши отчетливо противопоставляет свою концепцию формализму, преобладавшему в XVIII в.; эта концепция поясняется определениями начальных понятий анализа и теории рядов. В предисловии ко второму труду автор подчеркивает важность произведенного синтеза метода пределов и метода бесконечно малых и отмечает некоторые новые вещи, которые читатель найдет в изложении интегрального исчисления. Особо подчеркнут ставший классическим пример функции, разложение которой в ряд Тейлора сходится, но имеет сумму, неравную этой функции.

Коши указал пути, по которым шла в течение долгого времени работа по новому обоснованию анализа, но его формулировки нередко близки к прежним, бывшим в ходу у его предшественников; ε, δ-формулировки введены были Вейерштрассом. Более того, в отдельных случаях у Коши встречаются ошибочные утверждения. Мы приводим один такой пример, на который указал Н. Г. Абель в своих «Untersuchungen über die Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\text{» (1826).}$$

1. Далее Коши доказывает непрерывность основных элементарных функций и среди прочего формулирует теорему о свойстве непрерывной на отрезке (x_0, X) функции принимать любое значение b, промежуточное между значениями $f(x_0)$, $f(X)$. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, пишет Коши, достаточно сослаться на очевидный факт, что кривая $y=f(x)$ один или несколько раз пересечет в пределах указанного отрезка прямую $y=b$. Такое рассуждение, как мы видели, не удовлетворило бы Больцано. Впрочем, в одном из приложений к курсу Коши дает аналитическое доказательство теоремы (недостаточное).

2. Теорию сходимости рядов Коши построил в большом объеме. Выводы его не всегда полноценны. Одно неверное предложение Коши указано в отрывке из работы Абеля (с. 184).

3. Второй том лекций не вышел.

4. В XVIII в. распространено было определение интеграла как функции, имеющей данный дифференциал своим дифференциалом. Интеграл с произвольной аддитивной постоянной называли полным, а интеграл с фиксированной постоянной — частным. Определенный интеграл выступил как разность значений двух частных интегралов с одной и той же постоянной. Все это соответствовало обычной практике вычисления интегралов. Постепенно, особенно в связи с вычислением различных специальных интегралов, определенные интегралы становятся самостоятельными объектами теории, вводятся термины «определенный интеграл» (Лаплас, 1782), «пределы интеграла» и некоторые обозначения (которые впоследствии заменило современное обозначение $\int\limits_a^b$, введенное Фурье, 1816 г.). Возрождению концепции интеграла как суммы, на долгие десятилетия утратившей основное значение, содействовала разработка приемов приближенного интегрирования и теория кратных интегралов (см. далее п. 9, в). Парадоксальные результаты, получавшиеся при вычислении несобственных интегралов по формуле Ньютона—Лейбница, явились одним из стимулов, побудивших Коши обратить положение вещей и в основу положить определение интеграла как предела интегральных сумм. К своему классическому определению определенного интеграла непрерывной функции на данном отрезке Коши подошел уже в одной работе 1814 г. Аналитическое доказательство существования интеграла, содержащееся в 20-й лекции «Краткого изложения», явилось первой среди теорем существования такого рода; современным критериям строгости оно не вполне удовлетворяет, но может быть без труда уточнено. В 26-й лекции Коши переходит к интегралам с переменным верхним пределом и доказывает существование первообразной для всякой непрерывной функции. Здесь лежат истоки теории интеграла, развитой далее Риманом, Борелем, Лебегом, Лузиным и др.

5. В 21—25-й лекциях Коши разработал начала теории несобственных интегралов.

6. Такое необычное определение дифференциала, отдельное от определения производной, используется теперь иногда в векторном исчислении для векторной функции скалярного аргумента.

7. У Коши ряд (6) это $F(0)+\frac{F'(0)}{1}x+\frac{F''(0)}{1\cdot 2}x^2+\dots$.

8. Поскольку выражение $e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x=0$ теряет смысл, мы определили бы функцию Коши следующим образом:

$$F(0)=0, \quad F(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ при } x\neq 0.$$

Как сама эта функция, так и все ее производные любого порядка равны нулю при $x=0$. Пример этот направлен против утверждения Лагранжа, что функция, для которой $F(0)=F'(0)=F''(0)=\dots=0$, должна быть тождественно равна нулю (см. выше с. 170). Классический пример Коши доказал, что при разложении функции в степенной ряд принципиально необходимо исследовать остаточный член формулы Тейлора.

9. В уточненной формулировке теорема Коши справедлива: сумма равномерно сходящегося ряда функций, непрерывных в некоторой области, в этой области непрерывна. Коши не располагал понятием равномерной сходимости (как и понятием равномерной непрерывности функции).

10. Сумма ряда $\sin\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}-\dots$ равна $\frac{\varphi}{2}$ внутри отрезка $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, нулю — на его концах и имеет период 2π.

в. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА М. В. ОСТРОГРАДСКОГО

ИЗ «ЗАМЕТКИ ПО ТЕОРИИ ТЕПЛОТЫ» М. В. ОСТРОГРАДСКОГО (1828 г.; опублик. в 1831 г.)

[№ 34, с. 62—63]

Возьмем внутри области, ограниченной какой-нибудь поверхностью, бесконечно малый элемент ω и обозначим через x, y, z прямоугольные координаты этого элемента, а через p, q, r — функции x, y, z, конечные во всей рассматриваемой нами области (1).

Рассмотрим тройной интеграл

$$\int\left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)\omega;$$

можно положить $\omega=dz\,dy\,dx$ (2).

Возьмем сначала интеграл

$$\int dx\,dy\int\frac{dr}{dz}dz.$$

Для его вычисления рассмотрим четырехугольную призму, перпендикулярную к плоскости xy и имеющую основанием параллелограмм $dy\,dx$ на этой плоскости. Эта призма пронизывает весь объем и пересекает его поверхность в нескольких точках, число этих точек непременно четное, так как объем, по предположению, ограничен со всех сторон. Обозначим z_1, z_2, z_3, ..., z_{2n} значения z, соответствующие точкам пересечения призмы с поверхностью, и предположим, что они расположены в порядке возрастания, причем z_1 — самое малое. Пусть R_1, $R_2, \ldots$, R_{2n} будут значения r при последовательных заменах $z=z_1$, $z=z_2$, ..., $z=z_{2n}$. Получим

М. В. Остроградский

$$\int dy\,dx \int \frac{dr}{dz} = \int (R_2 + R_4 + \ldots + R_{2n})\,dy\,dx -$$
$$- \int (R_1 + R_3 + \ldots + R_{2n-1})\,dy\,dx.$$

Обозначая через ν угол между внешней нормалью к поверхности и положительной полуосью z, а через s — дифференциальный элемент этой поверхности, получим

$$\int \frac{dr}{dz}\,\omega = \int R \cos \nu \cdot s,$$

причем интеграл в правой части берется по поверхности.

Если обозначим через P и Q значения p и q на поверхности объема, а через μ и λ — углы, образуемые внешней нормалью к поверхности сфероида (3) с положительными полуосями x и y, то получим также

$$\int \frac{dp}{dx}\,\omega = \int P \cos \lambda \cdot s,$$
$$\int \frac{dq}{dy}\,\omega = \int Q \cos \mu \cdot s$$

и, следовательно,

$$\int \left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz}\right) \omega = \int (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu)\, s.$$

Интеграл в правой части берется только по поверхности.

Примечания. Двойные и тройные интегралы, введенные во второй половине XVIII в. Эйлером и Лагранжем, быстро получили широкое применение, особенно в механике и математической физике. Общая теория кратных интегралов была создана в XIX в., выдающийся вклад в нее внесли Гаусс, М. В. Остроградский, Дж. Грин и др. Мы приводим вывод формулы преобразования тройного интеграла по объему в двойной интеграл по поверхности, данный М. В. Остроградским в его заметке « Note sur la théorie de la chaleur» содержащей широкое обобщение метода решения уравнений математической физики, предложенного Фурье в его «Аналитической теории тепла» (1822). Как это обобщение, так и интегральная формула были изложены Остроградским еще ранее, чем в «Заметке», в двух работах, представленных им в 1826 и 1827 гг. Парижской Академии наук (но опубликованных в русском переводе с рукописей только в 1965 г.) [см. 43, с. 278]. Впоследствии Остроградский распространил свою формулу на интегралы любой кратности (1834 г., опубликовано в 1838 г.). Формула Остроградского, сформулированная в векторной форме, принадлежит к числу основных также в векторном исчислении.

Идея вывода Остроградского совершенно ясна. Что касается деталей вывода, то они показывают, что Остроградский, превосходно знавший труды Коши, не считал необходимым проведение всех рассуждений, которых потребовало бы точное соблюдение всех правил новой теории интегрирования, излагаемых в учебных руководствах.

1. В теореме молчаливо предполагается и непрерывность соответствующих частных производных.

2. Остроградский обозначал обыкновенные и частные производные одинаково прямым d (круглые ∂ ввел в употребление К. Г. Якоби, с 1841 г.), а кратные интегралы — одним знаком $\int$.

3. Сфероидом здесь названо произвольное тело с гладкой поверхностью.

г. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПО К. ВЕЙЕРШТРАССУ

ИЗ КОНСПЕКТА ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ, ПРОЧИТАННОЙ К. ВЕЙЕРШТРАССОМ В 1861 г.

[№ 58, с. 101 — 105, перевод А. П. Юшкевича]

Дифференциальное исчисление

В противоположность неизменяющейся величине или постоянной, которая может принимать только одно значение, *переменной величиной* называется такая, которая может принимать не только несколько отдельных, но бесконечно много значений. Может случиться, что переменная величина может принимать любое возможное положительное или отрицательное значение, тогда она называется *неограниченно* переменной величиной. Переменная величина может также быть ограниченно переменной и иметь нижнюю или верхнюю границу, или же одновременно обе. Значения, которые может принимать переменная величина, могут принадлежать одной или нескольким непрерывным последовательностям, если переменная величина может принимать все возможные значения между двумя границами. Дифференциальное исчисление занимается только такими непрерывно изменяющимися величинами.

Две переменные величины могут находиться в такой связи, что каждому определенному значению одной принадлежит определенное значение другой, тогда последняя называется *функцией* первой. Это отношение можно распространить на несколько переменных величин; согласно этому различают функции одной и многих переменных величин. Если одному значению переменной величины постоянно принадлежит только одно значение другой, то последняя называется однозначной функцией первой. Если одному значению одной величины принадлежит несколько значений другой, то последняя называется многозначной функцией первой. Функция имеет место, когда одна переменная величина изменяется вообще определенно, как только берется определенное изменение другой.

Карл Вейерштрасс

. . . .

Если $f(x)$ есть функция x и x — определенное значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$; разность $f(x+h)-f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x в $x+h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению еще меньших, чем δ, $f(x+h)-f(x)$ становится меньше, чем какая-либо сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции (**1**). Ибо говорят, что некоторая величина может стать бесконечно малой, если ее абсолютное значение может стать меньше какой-либо произвольно взятой малой величины. Если некоторая функция такова, что бесконечно малым изменениям аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции, то говорят, что она — *непрерывная функция* аргумента или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом.

. . . .

Теорема. *Если непрерывная функция x имеет для определенного значения аргумента x_1 определенное значение функции y_1, а для другого определенного значения x_2 определенное значение функции y_2 и если y_3 — произвольное значение между y_1 и y_2, то между x_1 и x_2 должно лежать по меньшей мере одно такое значение x_3, для которого функция принимает значение y_3.*

Для доказательства служат следующие леммы.

Если $y=f(x)$ — непрерывная функция x и $y_0=f(x_0)$ не нуль, то для всех значений x, которые лежат в соседстве с x_0, т. е. для которых разность $x-x_0$ по абсолютному значению не превосходит некоторой определенной границы, значения функции $f(x)$ будут иметь тот же знак, что $f(x_0)$.

. . . .

Основные понятия дифференциального исчисления

Полное изменение $f(x+h)-f(x)$, которое испытывает функция $f(x)$ в силу того, что x переходит в $x+h$, можно, вообще говоря, разложить на две части, из которых одна пропорциональна изменению аргумента h, т. е. состоит из h и множителя, не зависящегося от h и постоянного относительно h, так что будет бесконечно малой, когда будет бесконечно малым h, или же будет бесконечно малой одновременно с h, другая же будет не только сама по себе бесконечно малой, когда будет бесконечно малым h, но будет еще бесконечно малой, если ее разделить на h.

Если обозначить h величину, которая может принимать бесконечно малые значения, и $\varphi(h)$ есть произвольная функция h с тем свойством, что для бесконечно малых значений h она также будет бесконечно малой (т. е. сколь бы малой ни была взята величина ε, всегда можно определить такую величину δ, что $\varphi(h)$ будет меньше ε для всех значений h, абсолютное значение которых меньше δ), то может случиться, что $\frac{\varphi(h)}{h}$ также является функцией h, которая для бесконечно малых значений h сама будет бесконечно мала; в этом случае говорят, что $\varphi(h)$ бесконечно мала относительно h для бесконечно малых значений h.

Первая часть всего изменения функции, пропорциональная изменению аргумента, называется *дифференциальным изменением* или *дифференциалом* и обозначается предшествующим функции характеристическим d, между тем как предшествующая Δ означает все изменение. Аналогично, поскольку простейшей функцией x является сама x, вместо h также пишут dx, и это совершенно независимая от x величина, которая может стать бесконечно малой. Чем меньше берется dx или h, тем менее будет отличаться дифференциальное изменение от всего изменения; путем уменьшения dx различие можно сделать меньшим любой сколь угодно малой величины; поэтому дифференциал определяли как изменение, которое претерпевает функция, когда ее аргумент изменяется на бесконечно малую величину (2).

Таким образом, дифференциал функции имеет вообще вид $df(x)=p\cdot dx$; множитель p, на который надлежит умножить дифференциал аргумента, чтобы возник дифференциал функции, называется *дифференциальным коэффициентом* или дифференциальным частным. Вообще говоря, он опять-таки есть некоторая функция x, и, так как он произведен определенным образом из $f(x)$, он называется *производной* функции и пишется $f'(x)$. Эта функция, таким образом, вполне независима от изменения аргумента (3).

Теорема. *Если для определенного значения x аргумента функция имеет дифференциальное частное, то при том же значении x у нее не может быть другого, отличного от этого дифференциального частного.*

. . . .

Если дифференциал функции поделить на дифференциал аргумента, то получится дифференциальный коэффициент...:

$$\frac{df(x)}{dx} = p = f'(x).$$

Леммы для определения дифференциалов

1. Если $f_1(h)$ и $f_2(h)$—две функции, которые становятся бесконечно малыми, одновременно с их аргументом, то такой же функцией является их сумма $f_1(h)+f_2(h)$.

Допустим, что ε—любая сколь угодно малая величина; разложим ее на две части $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ и определим δ так, чтобы для всех значений h, по абсолютному значению не превосходящих δ, было как $f_1(h) < \varepsilon_1$, так и $f_2(h) < \varepsilon_2$, тогда $f_1(h)+f_2(h) < \varepsilon_1+\varepsilon_2$. Это предложение верно и при сложении нескольких таких функций, становящихся бесконечно малыми одновременно с h.

2. Если $f(h)$—функция, которая становится бесконечно малой одновременно с h, и A обозначает величину, постоянную относительно h, то $Af(h)$ также будет бесконечно мало вместе с h.

3. Произведение $F(h)\cdot f(h)$, в котором $f(h)$ есть функция h, становящаяся бесконечно малой вместе с h, и $F(h)$—какая-либо функция h, которая при бесконечно малых значениях h не становится бесконечно большой, также есть функция, становящаяся бесконечно малой вместе с h.

4. Если $f_1(h)$ и $f_2(h)$—функции h, которые для бесконечно малых значений h становятся бесконечно малыми, и A есть независимая от h величина, не равная нулю, то частное $\frac{f_1(h)}{A+f_2(h)}$ также есть функция, становящаяся бесконечно малой при бесконечно малых значениях h.

. . . .

Дифференциалы высших порядков

Если для функции $f(x)$ найдена производная $f'(x)$, то дифференциал ее есть $f'(x)\,dx$. Величины x и dx полностью независимы друг от друга, так что dx можно рассматривать как постоянную относительно x. Поэтому произведение $f'(x)\,dx$ можно вновь продифференцировать по x и получается $d(f'(x))\,dx = dx \cdot df'(x)$. Результат называют вторым дифференциалом данной функции или же дифференциалом второго порядка и его пишут так: $d^2 f(x)$. Если производная $f'(x) = f''(x)$, то $d^2 f(x) = d(df(x)) = f''(x)\,dx^2$.

. . . .

Исследование хода функций

. . . .

Предполагается, что x есть величина, непрерывно изменяющаяся между двумя границами, а $f(x)$ и $f'(x)$ — ее две непрерывные, однозначные функции.

I. Теорема. *Если при x_0, определенном значении x, производная функция $f(x)$ не равна нулю, то в окрестности x_0 постоянно имеются значения x, для которых $f(x)$ больше $f(x_0)$, а также такие, для которых $f(x)$ меньше $f(x_0)$.*

. . . .

II. Теорема. *Если для двух определенных значений x_1 и x_2 аргумента $f(x_1)$ равна $f(x_2)$, то между x_1 и x_2 обязательно имеется по меньшей мере одно значение x_0, для которого первая производная $f'(x)$ равна нулю* (4).

Примечания. Мы привели отрывки из конспекта лекции по дифференциальному исчислению, прочитанной К. Вейерштрассом в летнем семестре 1861 г. в Берлинском Королевском ремесленном институте. Конспект был составлен учеником Вейерштрасса Г. А. Шварцем и хранится теперь в Институте Миттаг-Леффлера в Швеции (Karl Weierstrass: Differentialrechnung. Ausarbeitung der Vorlesung an dem König. Gewerbeinstitut zu Berlin im Sommersem. 1861 von H. A. Schwarz). Шварцу было тогда 18 лет и конспект он составил для себя лично, а не для печати. Все слабые пункты и недостатки, содержащиеся в рукописи, Шварц в специальном замечании к ней берет на себя.

Современное изложение начал дифференциального исчисления, с его ε, δ-техникой формулировок и доказательств, восходит, как известно, к лекциям Вейерштрасса в Берлинском университете, обработки которых были изданы его слушателями. Публикуемый нами в русском переводе текст является наиболее ранним среди известных в настоящее время; его обнаружил недавно П Дюгак (Париж). Изложение Вейерштрасса не нуждается в особых комментариях; заметим только, что в то время он не построил еще свою теорию действительного числа.

1. Вейерштрасс первый ввел в обиход «абсолютные значения» действительных чисел и самый знак $|a|$.

2. Любопытно заметить, что определение дифференциала функции, равносильное его определению как главной линейной части ее приращения, впервые сформулировал в своих «Началах математики» (1790) Х. А. да Кунья.

3. Впоследствии, когда Вейерштрасс построил пример непрерывной и нигде недифференцируемой функции, он специально подчеркивал достоинства своего определения производной. Он полагал, что обычное определение ее как предела $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ лежало в основе ошибочного убеждения в том, что непрерывная функция, вообще говоря, дифференцируема.

4. Это первая или одна из первых формулировок так называемой «теоремы Ролля». Далее Вейерштрасс приводит формулу конечных приращений (Лагранжа) и ее обобщение на случай n-кратно дифференцируемой функции, для которой

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \varepsilon(x-x_0)), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Эту формулу он называет здесь «поистине основной теоремой всего анализа».

д. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ИЗ РАБОТЫ Р. ДЕДЕКИНДА «НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА» (1872)

[№ 8, с. 9—10]

Рассуждения, составляющие предмет этого маленького сочинения, относятся к осени 1858 г. Тогда я, в качестве профессора Союзного Политехникума в Цюрихе, в первый раз обязан был по своему положению излагать элементы дифференциального исчисления и при этом чувствовал живее, чем когда-либо, недостаток в действительно научном обосновании арифметики. При изложении понятия о приближении переменной величины к постоянному пределу, и именно при доказательстве того положения, что величина, которая возрастает постоянно, но не сверх всяких границ, должна приближаться к некоторому пределу, я прибегал к геометрической наглядности. Да и теперь я из дидактических оснований считаю такое привлечение геометрической наглядности при первом обучении дифференциальному исчислению необычайно полезным, даже неизбежным, если не хотят потратить слишком много времени. Но никто не станет отрицать того, что этот способ введения в изучение дифференциального исчисления не может иметь никакого притязания на научность.

Во мне тогда это чувство неудовлетворенности преобладало в такой степени, что я принял твердое решение думать до тех пор, пока не найду чисто арифметического и вполне строгого основания для начал анализа бесконечных. Говорят часто, что дифференциальное исчисление занимается непрерывными величинами, однако же нигде не дают определения этой непрерывности, и даже при самом строгом изложении дифференциального исчисления доказательства не основывают на непрерывности, а апеллируют более или менее сознательно, либо к геометрическим представлениям, либо к представлениям, которые берут свое начало в геометрии, либо, наконец, основывают доказательства на положениях, которые сами никогда не были доказаны чисто арифметическим путем. Сюда относится, например, и вышеупомянутое положение. Более точное изыскание убедило меня в том, что это или всякое другое эквивалентное ему предложение может

Р. Дедекинд

до известной степени рассматриваться как достаточный фундамент для анализа бесконечных. Все сводится только к тому, чтобы открыть настоящее начало этого положения в элементах арифметики и вместе с этим приобрести действительное определение существа непрерывности. Это мне удалось 24 ноября 1858.

[Там же, с. 17]

Предыдущее сравнение области R рациональных чисел с прямой привело к открытию в первой изъянов (Lückenhaftigkeit), неполноты, или разрывности, между тем как прямой мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чем же, собственно, состоит непрерывность? Все и заключается в ответе на этот вопрос, и только в этом ответе мы приобретаем научное основание для исследования *всех* непрерывных областей. Смутными разговорами о непрерывной связи малейших частиц, конечно, ничего не достигнешь. Дело идет о том, чтобы дать точный признак непрерывности, который мог бы служить базисом действительных дедукций. Долгое время я напрасно об этом думал, но, наконец, нашел искомое. Разные лица, вероятно, оценят эту находку различно, но все же я думаю, что большинство найдет ее содержание весьма тривиальным. Оно состоит в следующем: в предыдущих параграфах обращено было внимание на то, что каждая точка p прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т. е. в следующем:

«Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса,— это рассечение прямой на два куска».

[Там же, с. 25]

Кроме этих свойств, область $\mathfrak{R}$ обладает еще *непрерывностью*, т. е. имеет место следующее предложение:

IV. Если система $\mathfrak{R}$ всех действительных чисел распадается на два класса $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ такого рода, что каждое число α_1 класса

a_1, меньше каждого числа α_2 класса a_2, то существует одно и только одно число α, производящее это разложение.

Примечание. Необходимость в создании теории иррациональных и действительных чисел была осознана примерно в одно время несколькими математиками — Р. Дедекиндом (1858), К. Вейерштрассом (не позднее середины 60-х годов), затем Ш. Мерэ, Г. Кантором и другими. Еще ранее к такому же выводу пришел, как говорилось, Больцано, набросок теории которого близок к теории, опубликованной Мерэ (1869; 1872) и независимо Кантором (1872). Мы приводим предисловие Дедекинда к его работе «Stetigkeit und irrationale Zahlen» (1872) и оттуда же две формулировки: основного свойства непрерывности прямой и теоремы о непрерывности области действительных чисел. Приводить изложение самой «теории сечений» по Дедекинду нет необходимости: она, с некоторыми уточнениями, излагается во многих современных руководствах.

10. БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

а. ПАРАДОКСАЛЬНОЕ СВОЙСТВО МНОЖЕСТВА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ИЗ «БЕСЕД И МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ, КАСАЮЩИХСЯ ДВУХ НОВЫХ ОТРАСЛЕЙ НАУКИ, ОТНОСЯЩИХСЯ К МЕХАНИКЕ И МЕСТНОМУ ДВИЖЕНИЮ» Г. ГАЛИЛЕЯ (1638)

[№ 6, т. II, с. 140—141]

Симпличио. У меня сейчас рождается сомнение, кажущееся мне неразрешимым. Мы знаем наверное, что одни линии могут быть больше других; представляя их себе составленными из бесконечного множества точек, мы должны признать, что можно найти однородные величины, бóльшие, нежели бесконечность, потому что бесконечность точек большей линии должна превышать бесконечность точек меньшей линии. Такое признание одной бесконечности большей, нежели другая бесконечность, представляется мне совершенно непостижимым.

Сальвиати. Сказанное вами относится к числу затруднений, происходящих вследствие того, что, рассуждая нашим ограниченным разумом о бесконечном, мы приписываем последнему свойства, известные нам по вещам конечным и ограниченным. Между тем это неправильно, так как такие свойства, как бóльшая или меньшая величина и равенство, неприменимы к бесконечному, относительно которого нельзя сказать, что одна бесконечность больше или меньше другой или равна ей. В подтверждение этого положения мне пришел в голову пример, который я для большей ясности изложу в форме вопросов, обращенных к синьору Симпличио, указавшему на затруднения.

. . . .

...Если я скажу, что количество всех чисел вместе—квадратов и не квадратов—больше, нежели одних только квадратов, то такое утверждение будет правильным; не так ли?

Симпличио. Ничего не могу возразить против этого.

Сальвиати. Если я теперь спрошу вас, сколько квадратов, то можно по справедливости ответить, что их столько же, сколько существует корней, так как каждый квадрат имеет свой корень и каждый корень свой квадрат; ни один квадрат не может иметь более одного корня и ни один корень более одного квадрата.

Симпличио. Совершенно верно.

Сальвиати. Но если я спрошу, далее, сколько корней, то вы не станете отрицать, что их столько, сколько всех чисел вообще, потому что нет ни одного числа, которое не могло бы быть корнем какого-либо квадрата; установив это, приходится сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел, так как столько же корней, а корнями являются все числа. А между тем ранее мы сказали, что всех чисел больше, чем квадратов, так как бо́льшая часть их не квадраты. Действительно, число квадратов непрерывно и в весьма большой пропорции убывает по мере того, как мы переходим к большим числам; так, из чисел до ста квадратами являются десять, т. е. одна десятая часть; до десяти тысяч квадратами будет лишь одна сотая часть; до одного миллиона—только одна тысячная часть. А в отношении бесконечного числа, если бы только мы могли постичь его, мы должны были бы сказать, что квадратов столько же, сколько всех чисел.

Сагредо. Что же нужно сделать, чтобы найти выход из такого положения?

Сальвиати. Я не вижу возможности никакого другого решения, как признать, что, поскольку бесконечно много чисел вообще, бесконечно много квадратов, бесконечно много корней, то ни множество квадратов не меньше множества всех чисел, ни последнее не больше первого; в конечном выводе—свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности, и применимы только к конечным количествам.

Примечание. «Беседы и математические доказательства» написаны в форме бесед между перипатетиком, т. е. последователем школы Аристотеля Симпличио (Симпликий, ученый VI в., был комментатором Аристотеля и Евклида) и выражающими взгляды автора Сагредо и Сальвиати (так звали двух друзей Галилея). В ходе обсуждения проблем, связанных с бесконечностью, рассматривается парадокс, о котором идет речь в цитируемом отрывке. Различные парадоксы бесконечного были обнаружены еще в древности и в средние века; например, устанавливалось, как сказали бы мы, взаимно однозначное соответствие между точками двух неравных отрезков. В примере Галилея обнаруживается равномощность двух счетных арифметических множеств, из которых одно является частью другого. Соображения Сальвиати весьма остроумны; лучший «выход из положения» нашел только Г. Кантор в последние десятилетия XIX в. (см. следующий отрывок).

6. НЕСЧЕТНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ИЗ СТАТЬИ Г. КАНТОРА «ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СОВОКУПНОСТИ ВСЕХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ» (1874)

[№ 53, с. 115—118; перевод Ю. А. Белого]

Под действительным алгебраическим числом понимается в общем случае действительная числовая величина ω, удовлетворяющая нетождественному уравнению вида:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (1)$$

где n, a_0, a_1, $\ldots$, a_n суть целые числа; мы можем при этом мыслить числа n и a_0 положительными, коэффициенты a_0, a_1, $\ldots$ $\ldots$, a_n не имеющими общего делителя и уравнение (1) неприводимым; этим достигается, что в соответствии с известными положениями арифметики и алгебры уравнение (1), которому удовлетворяет некоторое действительное алгебраическое число, является вполне определенным; наоборот, как известно, некоторому уравнению вида (1) принадлежит самое большее столько удовлетворяющих ему действительных алгебраических чисел ω, сколько их указывает степень n. Действительные алгебраические числа образуют вместе совокупность числовых величин, которую обозначим (ω); как следует из простых соображений, она имеет такое свойство, что в любой близости какого-либо задуманного числа α расположено бесконечно много чисел из (ω); тем более поразительным на первый взгляд должно бы быть замечание, что совокупность (ω) может быть однозначно поставлена в соответствие совокупности всех целых положительных чисел ν, которую обозначим через (ν), так, что каждому алгебраическому числу ω соответствует определенное целое положительное число ν и, наоборот, каждому положительному целому числу ν соответствует вполне определенное действительное алгебраическое число ω, так что, если выразить то же самое другими словами, совокупность (ω) можно себе представить в форме бесконечного закономерного ряда:

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \ldots, \ \omega_\nu, \ \ldots, \qquad (2)$$

в котором встречаются все отдельные члены из (ω) и каждый из них находится на определенном месте в (2), которое задает-

Георг Кантор

ся соответствующим индексом. Коль скоро найден закон, по которому может быть представлено такое соответствие, оно может быть по желанию модифицировано; поэтому будет достаточно, если я в § 1 сообщу тот способ соответствия, который, как мне кажется, наименее хлопотливый.

Чтобы применить это свойство совокупности всех действительных алгебраических чисел, я присоединяю к § 1 второй параграф, в котором показываю, что, если дан любой ряд действительных числовых величин вида (2), можно в каждом данном интервале $(\alpha\ldots\beta)$ определить числа η, которые *не* содержатся в (2); объединяя содержание обоих этих параграфов, получаем новое доказательство предложения, доказанного впервые Лиувиллем (1), что в каждом данном интервале $(\alpha\ldots\beta)$ имеется бесконечно много *трансцендентных*, т. е. не алгебраических действительных чисел. Далее предложение в § 2 служит основанием того, что совокупность действительных числовых величин, образующих так называемый континуум (например, все действительные числа, которые $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$), не может быть приведена в однозначное соответствие с совокупностью (ν); так я обнаружил отчетливое различие между так называемым континуумом и такой совокупностью (Inbegriff), как собрание (Gesamtheit) всех действительных алгебраических чисел.

Примечание. Приводимый здесь отрывок статьи «Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen» Г. Кантора (1874) занимает важное место в истории теории множеств. В этой работе было сформулировано и доказано, что мощность континуума превосходит мощность множества алгебраических действительных чисел. Тем самым впервые было установлено, что существуют бесконечные множества различной мощности. Это сообщило смысл всем дальнейшим исследованиям по теории множеств.

В этой ранней теоретико-множественной работе мы встречаемся с неустановившейся еще терминологией: Кантор не употребляет еще и термина «множество», «Menge» которое, впрочем, применял в случае точечных множеств ранее (1872); он использует вместо него термины «Gesamtheit» и «Inbegriff» (совокупность и собрание). Нет терминов «мощность» (появляется в статье 1878 г., см. далее) и «счетный» (появляется в статье 1882 г.). Вывод теоремы о несчетности континуума можно найти в любом учебнике по теории множеств; поэтому следующее далее доказательство Кантора (по методу вложенных отрезков) мы опускаем. Подробнее по истории вопроса см. книгу Ф. А. Медведева [№ 30].

1. Доказательство существования трансцендентных чисел Ж. Лиувиль опубликовал в 1844 г.

в. ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

ИЗ СТАТЬИ Г. КАНТОРА «К УЧЕНИЮ О МНОГООБРАЗИЯХ» (1878)

[№ 53, с. 119—121; перевод А. П. Юшкевича]

Если два вполне определенных многообразия (1) M и N можно поэлементно поставить в соответствие друг с другом однозначно и полностью (что, когда это возможно одним способом, всегда также может быть сделано и многими другими), то да позволено будет в дальнейшем употреблять выражение, что эти многообразия имеют *равную мощность*, или еще что они *эквивалентны* (2). Под *составной частью* многообразия M мы понимаем любое другое многообразие M', элементы которого суть также элементы M. Если два многообразия M и N не равной мощности, то либо M имеет равную мощность с некоторой составной частью M', либо N с некоторой составной частью M; в первом случае мы называем мощность M *меньшей*, а во втором называем ее *большей*, чем мощность N.

Если рассматриваемые многообразия *конечные*, т. е. состоят из конечного количества элементов, то, как легко видеть, понятие мощности соответствует понятию численности (Anzahl) и, следовательно, *целого положительного числа* (Zahl), так как два таких многообразия имеют равную мощность тогда и только тогда, когда равны численности их элементов. Составная часть конечного многообразия всегда имеет меньшую мощность, чем само многообразие; это свойство теряет силу для *бесконечных*, т. е. составленных из бесконечного количества элементов многообразий. Из одного того обстоятельства, что некоторое бесконечное многообразие M есть составная часть другого N или может быть однозначно и полностью поставлена в соответствие с таковою, ни в коем случае нельзя заключить, что его мощность меньше, чем у N; это заключение справедливо только если известно, что мощность M не равна мощности N; то обстоятельство, что N есть составная часть M или может быть однозначно и полностью поставлена таковой в соответствие, столь же недостаточно для того, чтобы мощность M была больше, чем у N.

Чтобы напомнить простой пример, пусть M есть последовательность положительных чисел ν, N — последовательность положительных четных целых чисел 2ν; здесь N — составная часть M и тем не менее M и N равной мощности.

Последовательность положительных целых чисел ν, как это легко показать, имеет наименьшую из всех мощностей, какие встречаются у бесконечных многообразий. Тем не менее класс многообразий, имеющих эту наименьшую мощность, чрезвычайно богат и обширен... (3).

В отношении многообразий этого класса справедливы следующие легко доказуемые **теоремы**:

Если M — многообразие мощности последовательности положительных целых чисел, то и любая бесконечная составная часть M имеет одинаковую с M мощность.

Если M′, M″, M‴... есть конечная или простая бесконечная последовательность многообразий, каждое из которых обладает мощностью последовательности положительных целых чисел, то и многообразие, возникающее при объединении M′, M″, M‴..., имеет ту же мощность.

В последующем рассматриваются только мощности так называемых непрерывных n-кратных многообразий.

. . . .

Как покажет наше исследование, элементы n-кратно протяженного непрерывного многообразия можно однозначно и полностью определить посредством одной-единственной действительной непрерывной координаты t (4).

[**Там же**, с.132]

С помощью индуктивного приема, в изложение которого мы здесь ближе не вдаемся, можно подойти к теореме о том, что число классов линейных многообразий, получающихся при таком принципе разбиения, конечно, а именно равно *двум* (5).

Примечания. Статья «Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre» (1878) — вторая из цикла работ Г. Кантора по общей теории множеств. В ней определяются понятия равных и неравных мощностей, доказаны три важные теоремы о счетных множествах и множествах мощности континуума и впервые выдвигается гипотеза о мощности континуума.

1. Термин «многообразие» (Mannigfaltigkeit) Кантор применил вслед за Риманом.

2. Выражение мощность (Mächtigkeit) Кантор, как он указал в другом месте, заимствовал у Я. Штейнера, применившего его в том же смысле к частному случаю некоторого проективного соответствия.

3. Далее Кантор приводит целый ряд примеров счетных множеств.

4. Это известная теорема об эквивалентности континуумов различного числа измерений.

5. В таких выражениях Кантор высказывал знаменитую гипотезу о мощности континуума, согласно которой эта мощность следует непосредственно за мощностью счетных множеств. Попытки Кантора доказать свое предположение оказались безуспешными. В 1900 г. Гильберт поставил гипотезу континуума первой в списке проблем. С тех пор этой гипотезе было посвящено множество исследований, тесно связанных с разработкой математической логики. В 1963 г. П. Коэн доказал, что вопрос о том, справедлива или нет континуум-гипотеза, в некотором смысле неразрешим. См. об этом в сборнике «Проблемы Гильберта» [№ 35, с. 67—82].

г. ТЕОРЕМА О C-СВОЙСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗ КНИГИ Н. Н. ЛУЗИНА «ИНТЕГРАЛ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД» (1915)

[№ 26, с. 65—66]

Строение измеримых функций

Измеримые функции, которые мы будем рассматривать, мы предполагаем определенными и *конечными* почти всюду на [0,1]. Все теоремы, которые мы имеем в виду здесь привести, легко могут быть обобщены на тот случай, когда функции заданы не на области [0,1], а на произвольном измеримом множестве $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M}=\mu>0$ (1). Но мы не станем вводить этого обобщения, чтобы не усложнять изложения.

Введем для изучения структуры измеримых функций следующее определение, имеющее для нас большое значение. Мы говорим, что функция $f(x)$, рассматриваемая in abstracto [отвлеченно], определенная и конечная почти всюду на [0,1], *обладает на* [0,1] *C-свойством* (2), если, каково бы ни было положительное число ε, малое по желанию, существует на [0,1] совершенное множество P, обладающее следующими двумя свойствами:

$$\left.\begin{array}{l}1^\circ.\ \text{Функция } f(x) \text{ есть функция, непрерывная на } P\\ 2^\circ.\ \operatorname{mes} P>1-\varepsilon.\end{array}\right\}\ (C)$$

В нашей работе, помещенной в журнале «Математический сборник»[1], мы доказали следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ конечная почти всюду на [0,1] была измеримой функцией, необходимо и достаточно, чтобы она обладала (C)-свойством.*

Следовательно (C)-свойство является характеристическим свойством для класса всех измеримых функций, конечных почти всюду. Таким образом, принимая во внимание определение (C)-свойства, мы приходим к следующему основному результату:

Основная теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$, конечная почти всюду на [0,1], была измеримой функцией, необходимо и достаточно, чтобы, как бы мало ни было положительное число ε, существовало на [0,1] совершенное множество P, обладающее свойствами:*

$$1^\circ.\ f(x) \text{ непрерывна на } P.$$
$$2^\circ.\ \operatorname{mes} P>1-\varepsilon.$$

Как очевидное следствие этой теоремы имеем: *Если $f(x)$ есть измеримая функция, конечная почти всюду на измеримом множестве $\mathfrak{M}$, $\operatorname{mes}\mathfrak{M}=\mu>0$, множество $\mathfrak{M}$ есть сумма счетного числа совершенных множеств P_1, P_2, P_3, ..., не имеющих попарно*

---

[1] См.: Математический сборник, т. 28, с. 280 (3). См. также: Comptes rendus: «Sur les propriétés des fonctions mesurables», 17 июня 1912 г. (4).

Н. Н. Лузин

общих точек и таких, что на каждом из них в отдельности функция $f(x)$ есть непрерывная функция, и нуль-множества $\mathfrak{N}$, т. е.

$$\mathfrak{M} = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) + \mathfrak{N},$$
$$\operatorname{mes} \mathfrak{N} = 0.$$

Эти результаты[1] позволяют глубоко проникнуть в строение *произвольной* измеримой функции, конечной почти всюду...

Примечания. С конца XIX и начала XX в. теория множеств оказывала большое влияние на прогресс математики и математического анализа в частности. На ее фундаменте быстрое развитие получила и теория функций действительного переменного, предметом которой явилось исследование во всей возможной широте основных понятий и операций анализа — таких, как функция, производная, интеграл, различные типы аналитического представления функций и в особенности разложений и тригонометрические ряды и т. д. Первая крупная школа теории функций, идейными руководителями которой были Э. Борель, А. Лебег и Р. Бэр, возникла во Франции. В 10-е годы XX в. началось формирование новой большой школы в России и СССР. Создателями этой школы явились в первую очередь Д. Ф. Егоров и особенно Н. Н. Лузин. Крупным событием в истории теории функций стал выход книги Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), которую он представил в качестве магистерской диссертации, но за которую Ученый совет физико-математического факультета Московского университета весной 1916 г. присудил ему сразу степень доктора чистой математики. Мы приводим из диссертации Лузина теорему о (C)-свойстве: всякая измеримая функция, конечная почти всюду на некотором отрезке, может быть изменена на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы она стала на этом отрезке непрерывной.

Это характеристическое свойство измеримых функций, известное ранее Борелю и Лебегу, приобрело в руках Лузина, а затем его учеников и последователей исключительное значение и стало важным средством построения и дальнейшего исследования теории функций как действительного, так и комплексного переменного, а затем и в других вопросах анализа. Подробнее об этом см. в статье Н. К. Бари и Л. А. Люстерника и в комментариях Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова к цитируемому нами изданию книги Н. Н. Лузина [№ 26].

1. Запись $\operatorname{mes} \mathfrak{M}$ означает меру множества $\mathfrak{M}$ (mesure — мера).

2. Название «C-свойство» связано с тем, что буква C — начальная в слове continuité — непрерывность.

3. Имеется в виду статья Н. Н. Лузина «К основной теореме интегрального исчисления», напечатанная в «Математическом сборнике» за 1912 г; в этой статье Лузин доказал теорему о (C)-свойстве.

4. Как раз в этой французской статье Н. Н. Лузин ввел название «la propriété (C)», т. е. «свойство (C)».

---

[1] Мысль об этих свойствах измеримых функций была сообщена мне Д. Ф. Егоровым. См.: Математический сборник, т. 28, с. 282.


ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
$P_{n\to\infty}\left(\left|p \quad \frac{m}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1$
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

ИЗ СОЧИНЕНИЯ ХР. ГЮЙГЕНСА «О РАСЧЕТАХ В АЗАРТНОЙ ИГРЕ» (1657)

[№ 49, с. 4—13; перевод Ю. А. Белого]

Предложение 1. *Если я имею равные шансы на получение* a *или* b, *то цена моему ожиданию равна* $\frac{a+b}{2}$ (1).

Чтобы это предложение не только доказать, но и построить с самого основания, я положу мое ожидание равным x. Тогда, если я имею x, я должен достичь такого же ожидания снова, сколь скоро я веду игру при тех же условиях. Пусть теперь я играю против другого лица при условии, что каждый из нас ставит сумму x, и выигравший всю ставку должен дать проигравшему сумму a. Эта игра совершенно справедлива, и ясно, что при этих условиях я одинаково ожидаю получить сумму a в случае моего проигрыша, как сумму $2x-a$ в случае выигрыша (так как в этом случае я получаю всю ставку $2x$, из которой я должен отдать сумму a второму игроку). Однако, если $2x-a$ имело такую же цену, как и b, то я мог бы на a надеяться так же, как и на b. Итак, я полагаю $2x-a=b$ и тогда получаю $x=\frac{a+b}{2}$ как цену моему ожиданию. Доказательство просто. Именно если я имею сумму $\frac{a+b}{2}$, то я могу играть с другим лицом, которое также хочет поставить $\frac{a+b}{2}$, на том условии, что выигравший возвращает проигравшему сумму a. Таким образом, мое ожидание получить a (в случае проигрыша) равно ожиданию получить b в случае выигрыша; в последнем случае я получаю всю ставку $a+b$, из которой должен отдать сумму a второму игроку...

Предложение 2. *Если я имею одинаковые шансы на получение* a, b *или* c, *то цена моему ожиданию равна* $\frac{1}{3}(a+b+c)$...

Предложение 3. *Если число случаев, в которых я получаю сумму* a, *равно* p *и число случаев, в которых я получаю сумму* b, *равно* q, *и я полагаю, что все случаи могут получиться одинаково легко, то цена моему ожиданию равна* $\frac{pa+qb}{p+q}$ (2).

Чтобы это правило отыскать, я снова полагаю x равным цене моего ожидания. Следовательно, если игра справедлива,

Христиан Гюйгенс

я должен прийти к тому же ожиданию x. Пусть теперь число игроков, взятых со мной вместе, равно $p+q$. Каждый из игроков ставит сумму x, так что полная ставка равна $px+qx$, и у каждого одинаковая надежда на выигрыш. Далее я прихожу к соглашению с q игроками, что каждый из них должен дать мне сумму b в случае своего выигрыша и, наоборот, что я каждому должен возвратить ту же сумму, если выиграю я. Подобным образом я договариваюсь с каждым из оставшихся $p-1$ игроков, что каждый из них выплачивает мне сумму a в случае его выигрыша и, наоборот, я возвращаю каждому из них ту же сумму, если становлюсь победителем. Так как при этих условиях ни один из игроков не имеет преимуществ перед другими, то игра совершенно справедлива. Очевидно, что я имею только q случаев, в которых получаю сумму b, $p-1$ случаев, в которых получаю сумму a, и один случай, в котором получаю $px+qx-qb-(p-1)a$ (если я выигрываю, я получаю всю ставку $px+qx$ и должен из нее каждому из q игроков возвратить сумму b, каждому из остальных $p-1$ игроков возвратить сумму a, следовательно, всего я должен выплатить $qb+(p-1)a$). Если теперь $px+qx-qb-(p-1)a$ было бы равно a, то я имел бы p шансов на a (так как я уже имел $p-1$ шансов на a) и q шансов на b, и так я снова пришел бы к моему прежнему ожиданию.

Итак, если я положу

$$px+qx-qb-(p-1)a=a,$$

то цена моему ожиданию будет

$$x=\frac{pa+pb}{p+q},$$

что выше и утверждалось.

Задача 4. A играет с B с условием, что тот, который первым выиграет трижды, получит всю ставку. И вот A выиграл уже два раза, а B еще только один раз, и я хочу знать, как должна быть справедливо разделена ставка, в случае если оба на этом игру прекращают (3).

Чтобы ответить на поставленный вопрос о справедливом разделении ставки между обоими игроками, у которых шансы на выигрыш не равны, начнем с более простого случая.

Следует сначала принять во внимание число игр, кто первым выигрывает 20 партий; т. к. A уже выиграл 19 партий, а другой выиграл только 18, то очевидно, что шансы на выигрыш A настолько же лучше, чем у B, как и в случае предложенного задания, когда A из 3-х партий уже выиграл две, а B — только одну, ведь в обоих случаях A не хватает только одной партии, а B — двух.

Чтобы вычислить часть ставки, причитающуюся каждому из игроков, нужно принять во внимание те случаи, которые могли бы иметь место в случае продолжения игры. Если A выигрывает следующую партию, то он будет иметь предписанное количество выигрышей и получает всю ставку, которую можно обозначить через a. Если же следующую партию выигрывает B, то шансы на выигрыш становятся одинаковыми у обоих игроков (так как каждому из них не хватает всего одной партии) и каждому из них причитается по $\frac{1}{2}a$. Значит, A имеет столько же шансов выиграть эту первую игру, сколько и проиграть ее, т. е. получить ожидания a и $\frac{1}{2}a$. Согласно первому предложению это эквивалентно сумме обеих половин, т. е. $\frac{3}{4}a$, и на долю его противника остается, следовательно, $\frac{1}{4}a$ ... Отсюда следует, что тот из игроков, который хочет занять место A в игре, должен дать ему $\frac{3}{4}a$, а тот, который хочет выиграть одну партию прежде, чем второй выиграет две, должен поставить три против одного.

Примечания.

Хр. Гюйгенс одним из первых приступил к обоснованию теории вероятностей. В сочинении «De ratiociniis in ludo aleae», впервые опубликованном в 1657 г. в качестве приложения к книге его учителя Ф. ван Схоотена «Математические этюды» и явившемся по существу единственным пособием по теории вероятностей до начала XVIII в., Гюйгенс пишет: «Во всяком случае, я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории».

Сочинение состоит из введения и 14 предложений, из которых выше приводятся полностью или частично первых четыре.

1. В этом предложении вводится и определяется понятие математического ожидания для дискретных случайных величин. Напомним, что математическим ожиданием $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ, принимающей значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, и вероятности $P_1, P_2, \ldots, P_n$ называется сумма $\sum_{k=1}^{n} \xi_k P_k$.

2. В этом и последующих предложениях Гюйгенс рассматривает задачу о справедливом распределении ставки, исходя из предположения, что ее следует делить пропорционально вероятностям выигрыша всей ставки при продолжении игры.

3. Задачи о справедливом распределении ставки между игроками, прекращающими ту или иную азартную игру — в кости или в карты — до окончания заранее согласованного количества партий, долгое время занимали математиков, и в ходе их исследования были созданы некоторые основные понятия теории

вероятностей, среди них понятие математического ожидания. Такие задачи появляются в сочинениях итальянских математиков Л. Пачоли (1494), Дж.Кардано (1539), Н. Тарталья (1556). В 1654 г. их обсуждали в своей переписке Б. Паскаль и П. Ферма; совпадение их результатов, полученных разными способами, дало Паскалю, жившему в Париже, повод шутливо заметить: «Я вижу, что истина одна и та же в Тулузе и в Париже» (Ферма был жителем Тулузы). Будучи в 1655 г. в Париже, Гюйгенс услышал об этих новых исследованиях французских ученых, но методы их остались ему неизвестными, и он разработал свои начала теории азартных игр совершенно самостоятельно.

В оригинальном тексте игроки названы «я» и «другой», в переводе вместо этого они именуются A и B, как это делает в других случаях и сам Гюйгенс.

2. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ Я. БЕРНУЛЛИ

ИЗ КНИГИ Я. БЕРНУЛЛИ «ИСКУССТВО ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ» (1713)

[№ 3, с. 13—14, 21—40]

Сила доказательности, свойственная какому-либо доводу, зависит от числа случаев, при которых он может существовать или не существовать, доказывать или не доказывать или даже доказывать противное. Поэтому и степень достоверности или вероятность, обусловливаемая этим доводом, может быть выведена из тех случаев... совершенно так же, как высчитывается судьба игроков в играх, зависящих от случая...

. . . .

Все дело сводится к тому, чтобы для правильного составления предположений о какой-либо вещи были точно исчислены как числа случаев, так и было бы определено, насколько одни случаи могут легче встретиться, чем другие. Но здесь мы, по-видимому, встречаем препятствие, так как только крайне редко это возможно сделать и почти нигде не удается, кроме игр, зависящих от случая, которые первые изобретатели, постаравшись сделать безобидными, устроили так, чтобы были совершенно известны числа случаев, влекущие выигрыш или проигрыш, а сами случаи могли бы встретиться одинаково легко. В большинстве же других явлений, зависящих или от действия сил естественных, или от свободной воли людей, не имеет места ни то, ни другое... Кто из смертных когда-либо определит как число случаев, число, например, болезней и насколько одна болезнь легче погубит человека, чем другая... Результат в этих случаях зависит от причин совершенно скрытых и сверх того, вследствие бесконечного разнообразия их сочетаний, всегда ускользающих от нашего познания, и было бы совершенно безумно желать что-либо узнать таким путем. Но здесь нам открывается другая дорога для достижения искомого. И что не дано вывести a priori, то по крайней мере можно получить a posterori, т. е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах. Потому что нужно предполагать, что некоторое явление впоследствии в стольких же случаях может случиться или не случиться, в скольких при подобном же положении вещей раньше оно было отмечено случившимся или не случившимся... Этот опытный способ определения числа случаев по наблюдениям не нов и не необычен... то же все постоянно соблюдают в повседневной практике.

Яков Бернулли

Далее, всякому ясно и то, что для такого рассуждения о каком-либо явлении недостаточно взять одно или другое наблюдение, но требуется большой запас наблюдений. Потому-то даже самый ограниченный человек по какому-то природному инстинкту сам собой и без всякого предварительного обучения... знает, что, чем больше принято во внимание таких наблюдений, тем менее опасность не достичь цели. Хотя это, естественно, всем известно, однако доказательство, извлекаемое из научных оснований, вовсе не так обычно, и потому нам предстоит его здесь изложить. Причем я счел бы для себя малой заслугой, если бы остановился на доказательстве того, что все знают. Здесь для рассмотрения остается нечто, о чем до сих пор, может быть, никто и не думал. Именно остается исследовать, будет ли при таком увеличении числа наблюдений вероятность достичь действительного отношения между числами случаев, при которых какое-либо событие может случиться или не случиться, постоянно возрастать так, чтобы, наконец, превзойти всякую степень достоверности, или же задача, так сказать, имеет свою асимптоту, т. е. имеется такая степень достоверности, которую никогда нельзя превзойти, как бы ни умножались наблюдения... Чтобы не понимать этого превратно, следует заметить, что соотношение между числами случаев, которые мы желаем определить опытом, понимается не в смысле точного отношения... но до известной степени приближенного, т. е. заключенного в двух границах, которые можно взять сколь угодно тесными...

Вот, следовательно, какова задача, которую я здесь решил обнародовать, после того как уже в течение 20 лет владел ее решением... (1) . . . .

Чтобы изложить данное доказательство с возможной краткостью и ясностью, я постараюсь свести все к чистой математике, извлекая из нее следующие леммы...

Лемма 1. Пусть дан ряд скольких угодно чисел 0, 1, 2, 3, 4 и т. д., следующих, начиная от нуля, в естественном порядке, из которых крайнее и наибольшее пусть будет $r+s$, какое-либо среднее r и два ближайших к нему числа с обеих сторон $r+1$ и $r-1$. Пусть, далее, этот ряд будет продолжен до тех пор, пока крайний член не сделается равным какому-нибудь кратному числу $r+s$, т. е. пока не сделается равным $nr+ns$. В том же отношении увеличатся среднее число r и рядом с ним стоящие $r+1$ и $r-1$, так что вместо них получатся nr, $nr+n$, $nr-n$ и первоначальный ряд. 0, 1, 2, 3, 4, ..., $r-1$, $r, r+1, \ldots, r+s$ обратится в такой:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ nr-n,\ \ldots,\ nr,\ \ldots,\ nr+n,\ \ldots\ nr+ns.$$

С возрастанием n таким образом будет увеличиваться как число членов, которые лежат между средним nr и одним из предельных $nr+n$ или $nr-n$, так и число тех, которые идут от этих пределов до крайних членов $nr+ns$ или нуль. Но, однако, никогда (как бы велико ни было взято n) число членов за большим пределом $nr+n$ не будет более чем в $s-1$ раз и число членов перед меньшим пределом $nr-n$ не будет более чем в $r-1$ раз превышать число заключенных между средним nr и одним из пределов $nr+n$ или $nr-n$. Ибо после вычитания ясно, что между пределом и крайним членом $nr+ns$ имеется $ns-n$ промежуточных членов и между меньшим пределом и крайним 0 имеется $nr-n$ промежуточных членов, между средним и каждым из пределов n промежуточных членов. Но всегда $ns-n:n=$ $=s-1:1$ и $nr-n:n=r-1:1$. Откуда следует и т. д.

Лемма 2. Всякая целая степень какого-либо двучлена $r+s$ выражается числом членов, на единицу большим числа единиц в показателе степени. Ибо квадрат содержит 3 члена, куб 4, биквадрат 5 и т. д., как известно.

Лемма 3. В любой степени этого двучлена (по крайней мере такой, которой показатель равен двучлену $r+s=t$ или его кратному, напр., $nr+ns=nt$) некоторый член M будет наибольшим, если числа предшествующих ему и следующих за ним членов находятся в отношении s к r, или, что то же, если в этом члене показатели букв r и s находятся в отношении самих количеств r и s; более близкий к нему член с той и другой стороны больше более удаленного с той же стороны; но тот же член M имеет к более близкому меньшее отношение, чем более близкий к более удаленному при равном числе промежуточных членов... (2).

Лемма 4. В степени двучлена с показателем nt число n может быть взято столь большим, чтобы отношение наибольшего члена M к двум другим L и Λ, отстоящим от него налево и направо на h членов, превзошло всякое данное отношение... (3).

Лемма 5. Предположив то же, что выше, можно представить такое большое число n, чтобы сумма всех членов от среднего и наибольшего M до обоих членов L и Λ включительно имела к сумме всех других вне пределов L и Λ, взятых в каком угодно числе, отношение, большее всякого заданного... (4).

Главное предложение... Чтобы избежать утомительного многословия, я назову случаи, когда какое-либо событие появляется, *плодотворными* или *благоприятными*, а *неплодотворными* или *неблагоприятными* те, в которых то же событие не появляется. Равным образом назову те опыты *плодотворными* или *благоприятными*, когда обнаруживается один из благоприятных случаев, и *неплодотворными* или *неблагоприятными* те, в которых наблюдается один из неблагоприятных случаев. Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно, как r к s, или к числу всех случаев — как r к $r+s$ или r к t, каковое отношение заключается в пределах $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$. Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (c раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадет в эти пределы, а не вне их, т. е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более чем $\frac{r+1}{t}$ и не менее чем $\frac{r-1}{t}$.

Доказательство. Положим число необходимых наблюдений равным nt; требуется определить, каково будет ожидание или вероятность, что все они будут благоприятными без исключения, затем за исключением 1, 2, 3, 4 и т. д. неблагоприятных. Так как при каждом наблюдении имеется, по предположению, t случаев, из них r благоприятных и s неблагоприятных и отдельные случаи одного наблюдения могут сочетаться с отдельными случаями другого, после чего опять сочетаться с отдельными случаями 3-го, 4-го и т. д., то легко видеть, что для этого годится правило, присоединенное к примечаниям предложения XIII первой части, и его второе следствие, содержащее общую формулу, с помощью которой находится вероятность отсутствия неблагоприятных наблюдений $r^{nt}:t^{nt}$;

вероятность одного неблагоприятного наблюдения $\frac{nt}{1}r^{nt-1}s:t^{nt}$;

двух $\frac{nt(nt-1)}{1\cdot 2}\cdot r^{nt-2}s^2:t^{nt}$;

трех $\frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot r^{nt-3}\cdot s^3:t^{nt}$ и т. д.

Поэтому (по отбрасывании общего делителя t^{nt}) ясно, что степени вероятностей или числа случаев, при которых может статься, что все опыты благоприятны или все, за исключением одного, двух, трех, четырех и т. д. неблагоприятных, по порядку выражаются через

$$r^{nt},\quad \frac{nt}{1} r^{nt-1}s,\quad \frac{nt(nt-1)}{1\cdot 2} r^{nt-2}s^2,\quad \frac{nt(nt-1)(nt-2)}{1\cdot 2\cdot 3} r^{nt-3}s^3 \quad \text{и т. д.,}$$

т. е. как раз теми самыми членами двучлена степени nt, которые только что исследованы в наших леммах, откуда уже все остальное ясно. Именно из природы ряда явствует, что число случаев, которые с ns неблагоприятными наблюдениями дают nr благоприятных, есть сам наибольший член M, так как ему предшествует ns членов, а за ним следует nr, по лемме 3. Равным образом ясно, что числа случаев, при которых оказалось или $nr+n$, или $nr-n$ благоприятных наблюдений, причем остальные неблагоприятны, выражаются членами L и Λ, отстоящими на n членов по обе стороны от наибольшего. Следовательно, ясно также, что общее число случаев, при которых оказывается не более $nr+n$ и не менее $nr-n$ благоприятных наблюдений, выражается суммой членов, заключенных между пределами L и Λ; общее число остальных случаев, при которых оказывается или больше или меньше благоприятных наблюдений, выражается суммой остальных членов вне пределов L и Λ. Так как степень двучлена может быть взята столь большой, чтобы сумма членов, заключенных между обоими пределами L и Λ, превосходила более чем в c раз сумму всех остальных, из этих пределов выходящих, по леммам 4-й и 5-й, то, следовательно, можно взять столь большое число наблюдений, чтобы число случаев, при которых отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех, оказывается не выходящим из пределов $\frac{nr+n}{nt}$ и $\frac{nr-n}{nt}$ или $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$, превышало более чем в c раз число остальных случаев, т. е. сделалось более чем в c раз вероятнее, что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех заключается в пределах $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$, а не вне пределов, что и следовало доказать.

В применении этого к отдельным численным примерам достаточно ясно само собою, что, чем большие берутся в одном и том же отношении числа r, s и t, тем уже могут быть сделаны границы $\frac{r+1}{t}$ и $\frac{r-1}{t}$ отношения $\frac{r}{t}$ (5).

. . . .

... Откуда, наконец, вытекает то удивительное, по-видимому, следствие, что, если бы наблюдения над всеми событиями продолжать всю вечность, причем вероятность, наконец, перешла бы в полную достоверность, то было бы замечено, что в мире все управляется точными отношениями и постоянным законом изменений, так что даже в вещах, в высшей степени случайных, мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость и, скажу я, рок (6).

Примечания. Основоположный в теории вероятностей труд Я. Бернулли, первого из знаменитой «династии» швейцарских математиков XVII — XVIII вв. «Ars conjectanti» [№ 49], был издан в 1713 г., через восемь лет после смерти автора, его племянником Николаем I Бернулли. Сам Бернулли указывал, что в то время, когда писал четвертую часть этого сочинения, он уже в течение 20 лет владел решением задачи, составляющей ее главное содержание, т. е. своим законом больших чисел. Рукописи Я. Бернулли по теории вероятностей, подготовленные к печати проф. Б. Л. ван дер Варденом, полностью подтверждают это: базельский математик сделал свои замечательные открытия в этой области еще в середине 80-х годов XVII в. Мы приводим из IV части «Искусства предположений» некоторые общие суждения, а затем вывод знаменитой теоремы Якова Бернулли, заключающей его книгу и представляющей собой первое математическое выражение тех закономерностей, которые возникают при наступлении большого числа отдельных независимых случайных событий. Позже (1837) С. Пуассон доказал более общее предложение, назвав его законом больших чисел. Важное дальнейшее обобщение этого закона было дано в 1866 г. П. Л. Чебышевым (см. далее п. 3).

1. В этих рассуждениях Я. Бернулли подходит к постановке своей задачи, раскрывая статистический смысл понятия вероятности.

2. Лемма 3 доказывается автором на основании известных свойств разложения степени бинома $(r+s)^{nt}$.

3. Рассмотрим доказательство леммы 4 для случая M. Так как

$$M=\frac{nt(nt-1)\ldots(nr+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot ns}\,r^{ns}s^{ns}=\frac{nt(nt-1)\ \ldots\ (ns+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot ns}\,r^{nr}\cdot s^{ns},$$

а

$$L=\frac{nt(nt-1)\ \ldots\ (nr+n+1)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot(ns-n)}\,r^{nr+n}s^{ns-n},$$

то

$$\frac{M}{L}=\frac{nt(nt-1)(nt-r)\ \ldots\ (nr+1)\cdot 1\cdot 2\ \ldots\ (ns-n)\cdot r^{nr}s^{ns}}{nt(nt-1)\ \ldots\ (nr+n+1)\cdot 1\cdot 2\ \ldots\ ns\cdot r^{nr+n}s^{ns-1}}=$$

$$=\frac{(nr+n)(nr+n+1)\ \ldots\ (nr+1)\,s^{n}}{(ns-n+1)(ns-n+2)\ldots\ ns\cdot r^{n}}=\frac{(nrs+ns)(nrs+ns-s)\ \ldots\ (nrs+s)}{(nrs-nr+r)(nrs-nr+rr)\ \ldots\ nrs}.$$

Далее Бернулли указывает, что отношение $M:L$ будет бесконечно большим при $n\longrightarrow\infty$, «ибо тогда исчезают числа 1, 2, 3, и пр. по сравнению с n и сами числа $nr\pm n\mp 1$, $nr\pm n\mp 2$, $nr\pm n\mp 3$ и пр. $ns\mp n\pm 1$, $ns\mp n\pm 2$, $ns\mp n\pm 3$ и пр. будут иметь те же значения, что и $nr+n$ и $ns\mp n$». После этого, отбросив эти числа и производя сокращения, Я. Бернулли получает

$$\frac{M}{L}=\frac{(rs+s)(rs+s)(rs+s)\ \ldots\ rs}{(rs-r)(rs-r)(rs-r)\ \ldots\ rs},$$

в котором количество сомножителей в числителе и знаменателе равно n «вследствие чего это отношение будет бесконечной степенью $\frac{rs+s}{rs-r}$ и потому бесконечно большим». Отсюда и получается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{L}=\infty$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{\Lambda}=\infty$.

4. Доказательство этой леммы проводится Я. Бернулли с помощью двух предыдущих лемм.

5. В современной формулировке теорема Я. Бернулли гласит: если вероятность наступления события E в последовательности независимых испытаний постоянна и равна p, то для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью, близкой к достоверности, можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний n разность $\frac{m}{n} - p$ по абсолютной величине окажется меньшей, чем ε, т. е.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right| < \varepsilon\right\} > 1-\delta,$$

где δ — любое малое число.

Теорему Бернулли, в виду ее особой важности, вместе с ее первоначальным доказательством привел в своем «Исчислении вероятностей» (1-е изд. 1913 г.) А. А. Марков, добавив к этому два других, современных вывода. Интересная историческая справка: по инициативе А. А. Маркова наша Академия наук в 1913 г. отметила двухсотлетие закона больших чисел и опубликовала русский перевод IV части «Ars conjectandi» [№ 3]. В такой форме А. А. Марков выразил свое отрицательное отношение к царскому режиму, противопоставив празднование важного юбилея в истории науки казенному юбилею — трехсотлетию дома Романовых, которое официально отмечалось в том же 1913 г.

6. Таким образом, Я. Бернулли был сторонником философского детерминизма.

3. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА И ОБОБЩЕНИЕ ИМ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

ИЗ МЕМУАРА П. Л. ЧЕБЫШЕВА «О СРЕДНИХ ВЕЛИЧИНАХ» (1867)

[№ 39, т. II, с. 431—437]

Теорема. *Если математические ожидания величин x, y, z, ... суть a, b, c, ... , а математические ожидания квадратов x^2, y^2, z^2, ... суть a_1, b_1, c_1, ...,*

то вероятность, что сумма

$$x+y+z+\ldots$$

заключается в пределах

$$a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots},$$
$$a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots}$$

при всяком значении α остается больше $1-\frac{1}{\alpha^2}$ (1).

. . . .

Если мы изобразим через N число величин x, y, z, ..., и, полагая в доказанной сейчас теореме $\alpha = \frac{\sqrt{N}}{t}$, разделим на N как сумму $x+y+z$, так и пределы ее

$$a+b+c+\ldots+\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots},$$
$$a+b+c+\ldots-\alpha\sqrt{a_1+b_1+c_1+\ldots-a^2-b^2-c^2-\ldots},$$

то из этой теоремы получим следующую относительно средних величин:

Теорема. *Если математические ожидания величин x, y, z, ..., x^2, y^2, z^2, ... суть*

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots,$$

то вероятность, что среднее арифметическое N величин x, y, z, ... от среднего арифметического математических ожиданий этих величин разнится не более как на

$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

при всяком значении t, будет превосходить $1-\frac{t^2}{N}$.

Так как дроби

$$\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N},\quad \frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}$$

означают средние величины количеств

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots,\quad a^2,\ b^2,\ c^2,\ \ldots,$$

то всякий раз, когда математические ожидания

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\quad a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots$$

не превосходят какого-либо конечного предела, выражение

$$\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

будет иметь конечную величину, как бы велико ни было число N, и, следовательно, в этом случае, принимая за t величину достаточно большую, мы можем сделать количество

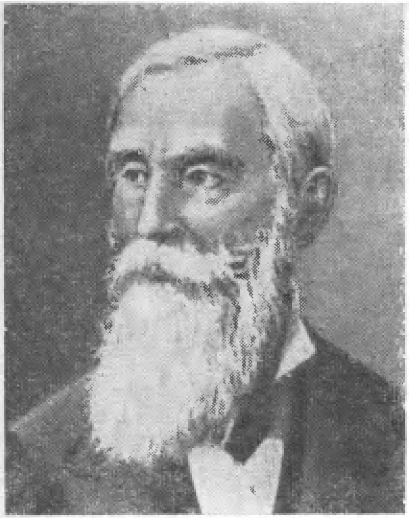
$$\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{N}-\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{N}}$$

по желанию малым. А так как при всяком t с увеличением числа N до ∞ дробь $\frac{t^2}{N}$ приводится к нулю, то на основании предыдущей теоремы получается следующая:

Теорема. *Если математические ожидания величин*

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\quad u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2,\ \ldots,$$

не превосходят какого-либо конечного предела, то вероятность, что среднее арифметическое N таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа N до ∞, приводится к единице (2).



П. Л. Чебышев.

В частном предположении, что величины

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

приводятся к 1 или 0, смотря по тому, имеет ли место какое-нибудь событие E или нет в 1-м, 2-м, 3-м, ... *испытании*, мы замечаем, что сумма

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N$$

будет давать число *повторений* события E в N испытаний, а среднее арифметическое

$$\frac{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N}{N}$$

представит отношение числа *повторений* события E к числу испытаний. Чтобы приложить к этому случаю последнюю теорему, изобразим через

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_N$$

вероятности события E в 1-е, 2-е, 3-е, ..., N-е испытание. При таком знакоположении для определения математических ожиданий величин

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_N,\ \ldots,$$

$$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2,\ \ldots,\ u_N^2,\ \ldots$$

находим

$$P_1\cdot 1+(1-P_1)\cdot 0,\quad P_2\cdot 1+(1-P_2)\cdot 0,\quad P_3\cdot 1+(1-P_3)\cdot 0,\ \ldots$$

$$P_1\cdot 1^2+(1-P_1)\cdot 0^2,\quad P_2\cdot 1^2+(1-P_2)\cdot 0^2,\quad P_3\cdot 1^2+(1-P_3)\cdot 0^2,\ \ldots,$$

откуда видно, что эти математические ожидания равны

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$

и что среднее арифметическое первых N ожиданий есть

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_N}{N},$$

т. е. среднее арифметическое вероятностей P_1, P_2, P_3, ..., P_N.

Вследствие этого на основании предыдущей теоремы мы приходим к такому заключению: *вероятность, что отношение числа повторений события к числу испытаний разнится от средней арифметической величины вероятности события в эти испытания менее чем на какую-нибудь данную величину, с увеличением числа испытаний до бесконечности приводится к единице* (3).

В частном случае, где вероятность события во все испытания одна и та же, отсюда получается теорема Бернулли (4).

Примечания. Статья «О средних величинах», представленная П. Л. Чебышевым Петербургской Академии наук в 1866 г., была напечатана в следующем году во II т. «Математического сборника». Мы приводим из нее формулировку важного «неравенства Чебышева», которое теперь доказывается во всех учебниках теории вероятностей, и вывод на его основе широко обобщенного закона больших чисел.

1. Это и есть неравенство Чебышева. Оно было впервые ясно высказано, доказано и применено к выводу обобщенного закона больших чисел Чебышевым, но несколько ранее его получил в менее общей форме Ж. Бьенэме в работе о методе наименьших квадратов (1853). В формулировке этой и следующих теорем Чебышева не отмечена предполагаемая независимость величин $x, y, z, \ldots$.

Неравенство Чебышева в современной форме обычно записывается следующим образом:

$$P(|\xi-\bar{\xi}|\leqslant\varepsilon)\geqslant 1-\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},$$

где случайная величина ξ имеет конечную дисперсию $D(\xi)$, а ε — любое данное положительное число.

2. Закон больших чисел Чебышева в привычном теперь виде записывается:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{Mx_1+Mx_2+\ldots+Mx_n}{n}\right|\leqslant\varepsilon\right)=1;$$

он устанавливает, что при достаточно больших n с вероятностью, близкой к достоверности, можно полагать, что среднее арифметическое случайных величин сколь угодно мало колеблется около некоторого постоянного числа — среднего их математических ожиданий.

3. Высказанный здесь закон больших чисел С. Пуассона (1837) оказывается, таким образом, частным случаем предложения Чебышева. Собственное доказательство Пуассона было далеко не строгим, первый точный вывод опубликовал в 1846 г. Чебышев.

4. Статья «О средних величинах» и вторая работа Чебышева по теории вероятностей (1887), в которой он распространил на суммы случайных величин предельную теорему Муавра—Лапласа, открыли новую эпоху в развитии теории вероятностей. А. Н. Колмогоров пишет: «Вывел русскую теорию вероятностей на первое место в мире Пафнутий Львович Чебышев. С методологической стороны основной переворот, совершенный Чебышевым, заключался не только в том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства предельных теорем (выводы Муавра, Лапласа и Пуассона были с формально логической стороны совсем не безупречны, в отличие, впрочем, от Бернулли, который свою предельную теорему доказал с исчерпывающей арифметической строгостью), но главным образом в том, что Чебышев всюду стремился получать точные оценки отклонений от предельных закономерностей, возможных хотя бы и при большом, но конечном числе испытаний, в виде безусловно правильных при любом числе испытаний. Далее Чебышев впервые ясно оценил и использовал всю силу понятий «случайной величины» и «математического ожидания» (среднего значения) случайной величины. Понятия эти были известны и ранее и являются производными от основных понятий «события» и «вероятности». Но случайные величины и их математические ожидания подчинены гораздо более удобному и гибкому алгоритму» [№ 19, с. 56].

Предельные теоремы Чебышева были затем распространены на более широкие классы случайных величин А. А. Марковым, А. М. Ляпуновым, С. Н. Бернштейном, А. Я. Хинчиным, А. Н. Колмогоровым и другими учеными.

ЛИТЕРАТУРА

Классики марксизма-ленинизма

I. *Маркс К.* Математические рукописи. М., 1968.

II. *Энгельс Ф.* Диалектика природы. М., 1969.

Издания первоисточников и исследования

1. *Аристотель.* Физика. Пер. В. П. Карпова. М., Соцэкгиз, 1936.

2. *Архимед.* Сочинения. Перевод, вступит. статья и комментарии И. Н. Веселовского. Перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. М., Физматгиз, 1962.

3. *Бернулли Я.* Часть четвертая сочинения «Ars conjectandi». Пер. Я. В. Успенского. СПб., 1913.

4. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. Пер. И. Г. Башмаковой. Под ред. К. А. Рыбникова. М., ИЛ, 1963.

5. *Вилейтнер Г.* Хрестоматия по истории математики. Пер. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича. Изд. 2-е. М.—Л., ОНТИ, 1935.

6. *Галилей Г.* Избранные труды. Т. 2. М., Физматгиз, 1964.

7. *Григорьян А. Т., Зубов В. П.* Очерки развития основных понятий механики. М., Изд-во АН СССР, 1962.

8. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. Изд. 4-е. Пер. С. О. Шатуновского. Одесса, 1923.

9. *Декарт Р.* Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Р. Декарта. Пер., примеч. и статья А. П. Юшкевича. М.—Л., ОНТИ, 1938.

10. *Евклид.* Начала. Т. I—III. Пер. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И. Н. Веселовского. М.—Л., ГИТИ 1948—1950.

11. *История математики* с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. I—III. Под ред. А. П. Юшкевича. М., «Наука», 1970—1972.

12. *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. С приложением «Опыта IV» о применении неделимых к алгебраическим степеням. Пер. со вступит. статьей и коммент. С. Я. Лурье. М.—Л., ГИТТЛ, 1940.

13. *Карно Л.* Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. Пер. Н. М. Соловьева. Ред. и статья А. П. Юшкевича. Изд. 2-е. М.—Л., ГТТИ, 1936.

14. *Кеплер И.* Новая стереометрия винных бочек. Пер. Г. Н. Свешникова. Вступит. статья М. Я. Выгодского. М.—Л., ГТТИ, 1935.

15. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. Пер. Б. Лившица, А. Лопшица, Ю. Рабиновича, Л. Тумермана. М.—Л., ОНТИ, 1937.

16. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Том второй. Геометрия. Пер. под ред. Д. А. Крыжановского. М.—Л., 1934.

17. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. Пер. под ред. В. А. Успенского. М., ИЛ, 1957.

18. *Колмогоров А. Н.* Ньютон и современное математическое мышление.— В сб. Московский университет—памяти Исаака Ньютона. М., Издание МГУ, 1946, с. 27—42.

19. *Колмогоров А. Н.* Роль русской науки в развитии теории вероятностей.— «Уч. зап. МГУ», 1947, вып. 91, с. 53—64.

20. *Крамар Ф. Д.* Вопросы обоснования анализа в трудах Валлиса и Ньютона.— «Историко-математические исследования», вып. III, 1950, с. 486—508.

21. *Крамар Ф. Д.* Интеграционные методы Джона Валлиса.—«Историко-математические исследования», 1961, М., Физматгиз, вып. XIV, с. 11—110.

22. *Крылов А. Н.* Собр. трудов. Т. VII (*Ис. Ньютон.* Математические начала натуральной философии). М.—Л., Изд-во АН СССР, 1936.
23. *Лейбниц Г. В.* Избранные отрывки из математических сочинений. Пер. А. П. Юшкевича.—«Успехи математических наук», 1948, т. III, вып. 1, с. 165—204.
24. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч. В 5-ти томах. Гл. ред. В. Ф. Каган. М.—Л., ГИТТЛ, 1946—1951.
25. *Де л'Опиталь Г. Ф.* Анализ бесконечно малых. Пер. Н. В. Леви. Ред. и статья А. П. Юшкевича. М.—Л., ГТТИ, 1935.
26. *Лузин Н. Н.* Интеграл и тригонометрический ряд. Ред. Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
27. *Лурье С. Я.* Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1935.
28. *Маркушевич А. И.* Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера.—В сб.: Леонард Эйлер. М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 98—132.
29. *Маркушевич А. И.* Элементы теории аналитических функций. М., ГИТТЛ, 1944.
30. *Медведев Ф. А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М., «Наука», 1965.
31. *Медведев Ф. А.* Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле.—«Историко-математические исследования», 1975, М., «Наука», вып. XX, с. 232—245.
32. *Ньютон И.* Математические работы. Пер., вводная статья и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.—Л., ОНТИ, 1937.
33. *Орем Н.* Трактат о конфигурации качеств. Пер., статья и коммент. В. П. Зубова.—«Историко-математические исследования», 1958, вып. XI, с. 601—731.
34. *Остроградский М. В.* Полное собрание трудов. Т. I. Киев, 1959.
35. Проблемы Гильберта. Сборник под общ. ред. П. С. Александрова. М., Физматгиз, 1969.
36. *Рожанский И. Д.* Анаксагор. М., «Наука», 1972.
37. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. Пер. и доп. И. Б. Погребысского. Изд. 2-е. М., «Наука», 1969.
38. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Пер. Д. А. Райкова. Статья С. Б. Стечкина. М., ИЛ, 1951.
39. *Чебышев П. Л.* Полн. собр. соч. В 5-ти томах. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1944—1951.
40. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. I. Изд. 2-е. Пер. Е. Л. Пацановского. Ред. И. Б. Погребысского, Физматгиз. М., 1961; Т. II. Пер. В. С. Гохмана. Ред., вступит. статья и примеч. И. Б. Погребысского. М., Физматгиз, 1961.
41. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. Пер. и статья М. Я. Выгодского. М.—Л., ГИТТЛ, 1949.
42. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. Т. III. Пер. и статья Ф. И. Франкля. М., Физматгиз, 1958.
43. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М., «Наука», 1968.
44. *Юшкевич А. П.* О развитии понятия функции.—«Историко-математические исследования», вып. XVII, 1966, с. 123—150.
45. *Яновская С. А.* Методологические проблемы науки. М., «Мысль», 1972.
46. *Abel N. H.* Oeuvres complètes, publiées par L. Sylow et S. Lie, v. I. Christiana, 1881.
47. *Barrow I.* Lectiones geometricae; in quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur. Londini... 1670.
48. *Berkeley G.* The works, v. III. Ed. by A. C. Fraser. London, 1901.
49. *Bernoulli Jac.* Ars conjectandi. Basileae, 1713.
50. *Bernoulli Joh.* Der Briefwechsel. Bd. I. Hsg. von O. Spiess. Basel, 1955.
51. *Bernoulli Joh.* Opera omnia. Vol. I—IV. Lausannae-Genevae, 1742.
52. *Borel E.* Le calcul des intégrales définies.—«Journ. d. Mathém. pures et appliquées» (6), 8, 1912, p. 159-210.

53. *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen. Hsg. von E. Zermelo. Berlin, 1932.
54. *Cauchy A.* Oeuvres complètes. II série, t. III-IV. Paris, 1897-1899.
55. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[e] siècle, v. 2. Publié par P. H. Fuss. St.-Pétersbourg, 1843.
56. *Da Cunha J. A.* Principes mathématiques. Trad. par J. M. d'Abreu. Bordeaux, 1811.
57. *D'Alembert J.* Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires, t. 2. Paris, An XIII (1805).
58. *Dugac P.* Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Paris, 1972.
59. Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières, t. II, Nouv. éd. Padoue, 1789.
60. *Fermat P.* Oeuvres, publiées par... P. Tannery et. Ch. Henry, t. I-IV. Paris, 1891-1912. Supplément aux t. I-IV, par M. C. de Waard. Paris, 1922.
61. *Ch. C. Gillispie.* Lazare Carnot Savant... with an essay ... by *A. P. Youschkevitch.* Princeton, 1971.
62. *S. Gouriev.* Essai de démontrer rigoureusement un théorème fondamental des équations de conditions de la différentielle des fonctions à plusieurs variables...—«Nova Acta Academiae Petropolitanae», 1802, t. XIII, p. 154—165.
63. *B. Bolzano.* Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.— *Hankel H.* Untersuchungen über die unendlich oft oszillirienden und unstetigen Funktionen. Ostwald's Klassiker, Nr. 153. Leipzig, 1905.
64. *Lagrange J. L.* Oeuvres t. III. Paris, 1869.
65. *Lagrange J. L.* Oeuvres, t. IX, Paris, 1881.
66. *Lejeune-Dirichlet P. G.* Werke. Bd. I. Berlin, 1889.
67. *Leibnizens* mathematische Schriften. Hsg. von C. I. Gerhardt. 2. Abt., Bd. I. Halle, 1858.
68. *L'Huilier S.* Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin, 1786.
69. *Maclaurin C.* A treatise of fluxions, v. I—II. Edinburgh, 1742.
70. *Neper J.* Mirifici logarithmorum canonis descriptio. Lugduni, 1620.
71. *Newton I.* The mathematical papers of Isaac Newton, v. I—VI. Ed. D. T. Whiteside with the assistance in publication of M. A. Hoskin. Cambridge, 1967—1974.
72. *Oresme N.* Quaestiones super geometriam Euclidis. Ed. by H. L. L. Busard. Leiden, 1961.
73. *Pascal B.* Oeuvres, publiées ... par L. Brunschvicg, P. Boutroux et F. Gazier, v. IX. Paris, 1914.
74. *Robinson A.* Non-standard analysis. Amsterdam, 1966.
75. *Taylor B.* Methodus incrementorum directa et inversa. Londini, 1715.
76. *Torricelli E.* Opere. Ed. da G. Loria e G. Vassura. Vol. I, p. I. Faenza 1919.
77. *Truesdell C.* The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638—1788. Turici, 1960.
78. *Wallis J.* Arithmetica infinitorum. Oxonii, 1656.
79. *Wronski J.* Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Paris, 1812.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абель (Niels Hendrik Abel, 1802—1829) 146, 177, 184, 185, 219
Анаксагор (V в. до н. э.) 15, 18, 219
Арбогаст (Louis François Antoine Arbogast, 1759—1803) 169
Аристотель (384—322 до н. э.) 15—18, 35, 196, 218
Архимед (287—212 до н. э.) 11, 14, 15, 20, 22, 23, 25—27, 30—32, 45, 46, 51, 59, 60, 218

Бари Нина Карловна (1901—1961) 202
Барроу (Isaac Barrow, 1630—1677) 72—74, 90, 91, 101, 116, 120, 219
Белый Юрий Александрович (р. 1925) 37, 197, 205
Беркли (George Berkeley, 1685—1753) 110, 126, 153, 155, 159, 160, 219
Бернштейн Сергей Натанович (1880—1968) 217
Бернулли Д. (Daniel Bernoulli, 1700—1782) 78, 79, 83, 84, 152
Бернулли Иоганн I (Johann I Bernoulli, 1667—1748) 75, 82, 115, 116, 119, 123—132, 135, 142, 161, 219
Бернулли Иоганн III (Johann III Bernoulli, 1744—1807) 79
Бернулли Николай I (Nikolaus I Bernoulli, 1687—1759) 153, 213
Бернулли Яков (Jacob Bernoulli, 1654—1705) 37, 82, 115, 116, 119, 129, 132, 161, 208, 209, 213, 214, 216—219
Био (Jean-Baptiste Biot, 1774—1862) 43
Богран де (Jean de Baugrand, ум. 1640) 91
Больцано (Bernhard Bolzano, 1781—1848) 171, 175—178, 185, 220
Борель (Emile Borel, 1871—1956), 80, 83, 85, 152, 186, 202, 219
Бригс (Henry Briggs, 1561—1630) 44
Бриляр де Сен-Мартен (Brillard de Saint-Martin, XVII в.) 71
Броункер (Брóнкер, William Brouncker, 1620—1684) 37
Бурбаки (Nicolas Bourbaki — коллективный псевдоним группы современных французских ученых XX в.) 218
Бьенэме (Irénéé — Jules Bienaymé, 1796—1878) 217
Бэр (René Baire, 1879—1932) 202
Бюрги (Jost Bürgi, 1552—1632) 42
Бюсард (Hubertus Busard, род. 1923) 36

Валлис (Уóллис, John Wallis, 1616—1703) 52, 55, 64, 85, 89, 91, 96, 97, 115, 117, 129, 218, 220
ван дер Варден (Bartel L. van der Waerden, р. 1903) 213
Варинг (Уэ́ринг, Edward Waring, 1734—1798) 145
Вариньон (Pierre Varignon, 1654—1722) 123, 126, 129, 153
Вейерштрасс (Karl Th. W. Weierstrass, 1815—1897) 83, 169, 175, 177, 178, 185, 188, 189, 192, 193, 195
Вивиани (Vincenzo Viviani, 1622—1703) 116
Виет (François Viète, 1540—1603) 37, 70, 71, 97, 109
Вилейтнер (Heinrich Wieleitner, 1874—1931) 218
Вороной Георгий Федосьевич (1868—1908) 152
Вронский (Jósef Hoene-Wronski, 1778—1853) 170, 220

Галилей (Galileo Galilei, 1564—1642) 35, 36, 46, 48, 53, 100, 116, 195, 197, 218
Галлей (Хэ́ли, Edmund Halley, 1656—1742) 142, 155
Ганкель (Hermann Hankel, 1839—1873) 80, 84, 220
Гарриот (Хариот, Thomas Harriot, 1560—1621) 74
Гаусс (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855) 171, 177, 187
Гейберг (J. L. Heiberg, 1854—1928) 14
ван Гейрег (Hendrik van Heuraet, 1633—1660) 116
Гиллиспи (Ch. Gillispie, XX в.) 220
Гильберт (David Hilbert, 1862—1943) 20, 200
Гольдбах (Christian Goldbach, 1690—1764) 152
Грегори (James Gregory, 1638—1675) 73, 91, 134, 135
Григорий Сен Венсан (Gregorius a St. Vincentio, 1584—1667) 27, 37
Григорьян Ашот Тигранович (р. 1910) 218
Грин (George Green, 1793—1841) 188
Гудде (Хюдде, Jan Hudde, 1628—1704) 68

Гульдин (Paul Guldin, 1577—1643) 51
Гурьев Семен Емельянович (1764?—1813) 158, 159, 160, 220
Гюйгенс (Хéйхенс, Christian Huygens, 1629—1695) 114—116, 124, 205—208

Даламбер (Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783) 82, 83, 155—157, 159, 160, 171, 220
Дамблтон (John of Dumbleton, первая половина XIV в.) 48
Дарбу (Gaston Darboux, 1842—1917) 30, 31, 177
Дебон (Florimond Debaune, 1601—1652) 114, 116
Дедекинд (Richard Dedekind, 1831—1916) 21, 193—195, 218
Декарт (René Descartes, 1596—1650) 55, 65, 67—71, 81, 109, 114, 116, 120, 122, 133, 218
Демокрит из Абдер (ок. 460— ок. 380 до н. э.) 11, 14, 18
Джюрин (James Jurin, 1684—1750) 159
Дидро (Denis Diderot, 1713—1784) 159
Диофант (III в. н. э.) 61, 68, 71
Дирихле Лежен (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805—1859) 79, 80, 84, 220
Дюгак П. (Pierre Dugac, XX в.) 192, 220

Евдокс Книдский (ок. 406— ок. 355 до н. э.) 11, 20, 22
Евклид (ок. 300 до н. э.) 18—23, 26, 36, 48, 196, 218
Егоров Дмитрий Федорович (1869—1931) 202

Зенон Элейский (490?—430? до н. э.) 14, 18
Зубов Василий Павлович (1899—1963) 36, 218

Ибн Корра Абу-л-Хасан Сабит ал-Харрани (836—901) 23, 36, 60
Ибн ал-Хайсам Абу Али ал-Хасан (965—1039) 30, 52

Кавальери (Bonaventura Cavalieri, ок. 1598—1647) 46, 48, 49, 50—53, 54, 55, 91, 115, 120, 218
Казали (Casali, 1721—1802) 48
Кампано (Giovanni Campano, XIII в.) 36
Кантор Георг (Georg Cantor, 1845—1918) 84, 195, 197—200, 220
Кардано (Girolamo Cardano, 1501—1576) 208
Карно (Lazare Carnot, 1753—1823) 155, 158, 160, 170, 218, 220
Кáуфман, см. Меркатор
Кеплер (Johannes Kepler, 1571—1630) 44, 45, 46, 52, 53, 71, 218
Кестнер (Abraham Gotthelf Kästner, 1719—1800) 171
Клейн (Felix Klein, 1849—1925) 20, 218
Клеро (Alexis Claude Clairaut, 1713—1768) 84, 171
Клини (Stephen Cole Kleene, XX в.) 85, 218
Клюгель (Georg Simon Klügel, 1739—1812) 171
Колмогоров Андрей Николаевич (р. 1903) 106, 217, 218
Колсон (John Colson, 1680—1760) 96
Кондорсе (M. J. Antoine Nicolas Caritat de Condorcet, 1743—1794) 135, 169, 170
Коперник (Nicolaus Copernicus, 1473—1543) 45, 48
Коутс (Roger Cotes, 1682—1716) 142
Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857) 84, 133, 145, 160, 170, 176—179, 181, 184—186, 220
Коэн (Paul Cohen, XX в.) 200
Крамар Феодосий Дементьевич (р. 1911) 106, 218
Крег (John Craig, 1660—1731) 116, 117, 120
Крылов Алексей Николаевич (1863—1945) 106, 219
Ксенократ (396—314 до н. э.) 18
Кунья да (José Anastacio da Cunha, 1744—1787) 142, 145, 146, 192, 220

Лагранж (Joseph Louis de Lagrange, 1736—1813) 83, 155, 159, 160, 161, 169, 170, 171, 186, 187, 193, 220
Лакруа (Sylvester François Lacroix, 1765—1843) 84, 170, 171
Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749—1827), 185, 217
Лебег (Henri Lebesgue, 1875—1941) 81, 83, 84, 85, 186, 202
Лейбниц (Gottfried Willhelm Leibniz, 1646—1716) 36, 64, 68, 73, 74, 81, 82, 85, 89, 97—98, 100, 106, 110—111, 115—116, 118—123, 126, 127, 129, 132, 133, 135, 145, 150, 153, 155, 160, 161, 169, 185, 219, 220
Липшиц (Rudolf Lipschitz, 1832—1903) 21
Лиувилль (Joseph Liouville, 1809—1882) 198
Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) 79, 84, 219
Лопиталь (Guillaume de L'Hôpital, 1661—1704) 71, 96, 115, 116, 127—130, 219
Лузин Николай Николаевич (1883—1950) 83, 84, 186, 201, 202, 219

Лурье Соломон Яковлевич (1890—1965) 14, 51, 219
Люилье (Simon L'Huilier, 1750—1840) 135, 157, 159, 160, 220
Люстерник Лазарь Аронович (р. 1899) 202
Ляпунов Александр Михайлович (1857—1918) 217

Маклорен (Меклóрин, Colin Maclaurin, 1698—1746) 71, 100, 135, 145, 159, 220
Марков Андрей Андреевич (1856—1922) 214, 217
Маркс Карл (1818—1883) 155, 218
Маркушевич Алексей Иванович (р. 1908) 84, 85, 219
Медведев Федор Андреевич (р. 1923) 79, 84, 219
Менголи (Pietro Mengoli, 1625—1686) 37, 73
Меньшов Дмитрий Евгеньевич (р. 1892) 84, 202
Меркатор (Nikolaus Mercator, Kauffmann, 1620—1687), 89, 121, 122
Мерсенн (Marin Mersenne, 1588—1648) 71
Мерэ (Charles Meray, 1835—1911) 195
Меттерних (Klemens von Metternich, 1773—1859) 171
Мечин (John Machin, 1680—1751) 135
Миттаг-Леффлер (Magnus Gösta Mittag-Leffler, 1846—1927) 192
Муавр (Abraham de Moivre, 1667—1754) 141, 142, 217

Непер (John Neper, 1550—1617) 37, 42, 43, 220
Непер (Robert Neper, XVII в.) 42
Нилаканта (XV—XVI вв.) 153
Ньютон (Isaac Newton, 1643—1727) 45, 68, 73, 74, 82, 85, 86, 89—94, 96—98, 100—101, 105—107, 109—110, 115—116, 118, 120—122, 126, 134, 135, 153, 155, 157, 159, 169, 185, 218, 219, 220

Ольденбург (Henry Oldenburg, 1615—1677), 85, 115
Орем (Nicole Oresme, ок. 1323—1382) 22, 32, 34, 35, 36, 37, 48, 53, 71, 219, 220
Остроградский Михаил Васильевич (1801—1862) 186—188, 219
Отред (William Oughtred, 1574—1660) 74

Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662) 61, 63, 115, 116, 120, 127, 208, 220
Пачоли (Luca Pacioli, 1445?—1514) 208
Платон (429—348 до н. э.) 18
Пуассон (Siméon Denis Poisson, 1781—1840) 213, 217

Рен (Christopher Wren, 1632—1723) 116
Реслинг (Resling) 171
Риман (Bernhard Riemann, 1826—1866) 30, 31, 84, 85, 186
Роберваль (Gilles Personne de Roberval, 1602—1675) 52, 55, 70, 116
Робинс (Benjamin Robins, 1707—1751) 159
Робинсон (A. Robinson, XX в.) 126, 220
Рожанский Иван Дмитриевич (р. 1913) 219
Ролль (Michele Rolle, 1652—1715) 193
Рыхлик (Karel Rychlik, XX в.) 177

Сагредо (Sagredo, XVII в.) 196
Сальвиати (Salviati, XVII в.) 196
Сен Венсан, см. Григорий Сен Венсан
Сен-Мартен, см. Бриляр де Сен-Мартен
Симпликий (ум. 549) 15, 18, 196
Стройк (Dirk J. Struik, род. 1894) 219
Суайнсхед (Richard Swineshead, ок. 1350) 36, 48
ван Схоотен (Frans van Schooten, 1615—1660) 68, 207

Тарталья (Niccolo Tartaglia, 1500—1557) 208
Тейлор (Brook Taylor, 1685—1731) 71, 133—135, 169, 170, 182, 183, 185, 186, 220
Торичелли (Evangelista Torricelli, 1608—1647) 37, 51, 52, 53, 54, 55, 60, 73, 74, 116, 220
Трусделл К. (C. Truesdell, XX в.) 220

Уайтсайд (Derek Thomas Whiteside, р. 1932) 134

Фейер (Leopold Fejér, 1880—1959) 152
Ферма (Pierre de Fermat, 1601—1665) 37, 52, 55, 57, 58, 60, 61, 63—71, 81, 91, 116, 208, 220
Фонсене де (François Daviet de Foncenex, 1734—1799) 171
Фурье (Joseph B. J. Fourier, 1768—1830) 83, 185, 188

Хайям Омар (1048—1131) 20, 21
Харди (Godfrey Harold Hardy, 1877—1947) 152, 219

Хейтсбери (William Huytesbury, ок. 1313—1372) 48
Хинчин Александр Яковлевич (1894—1959) 217

Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) 213, 214, 216—217, 219
Чезаро (Ernesto Cesaro, 1859—1906) 152
Чирнгауз (Ehrenfried Walter von Tschirnhaus 1651—1708) 64, 115

де ла Шапелль (de la Chapelle, 1710—1792) 155, 159

Шарль (Jacques A. C. Charles, 1746—1823) 83
Шварц (Hermann Amandus Schwarz, 1843—1921) 192
Штейнер (Jacob Steiner, 1796—1863) 200

Эйлер Леонард (Leonhard Euler, 1707—1783) 75, 77—79, 82—84, 135, 136, 141, 142, 146, 152, 159, 170, 171, 177, 187, 219
Энгельс Фридрих (1820—1895) 81, 218
Эратосфен из Кирены (276—194 до н. э.) 11, 14, 46
Эригон (Pierre Hérigone, ум. около 1643) 70

Юшкевич Адольф Павлович (р. 1906) 32, 37, 52, 54, 57, 61, 72, 78, 80, 84, 98, 116, 118, 133, 142, 153, 157, 160, 178, 181, 188, 199, 219

Якоби (Karl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851) 188
Яновская Софья Александровна (1896—1966) 21, 219

ИБ № 149

Составители:

Изабелла Григорьевна Башмакова
Юрий Александрович Белый
Сергей Сергеевич Демидов
Борис Абрамович Розенфельд
Адольф Павлович Юшкевич

ХРЕСТОМАТИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Редактор *Э. К. Викулина*
Художник *М. К. Шевцов*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *В. В. Новоселова*
Корректор *Т. Н. Смирнова*

Сдано в набор 13/IX 1976 г. Подписано к печати 7/I 1977 г. 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Печ. л. 14,0+0,25 форзац. Уч.-изд. л. 16,42+0,41 форзац. Тираж 58 тыс. экз. Заказ № 286.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Отпечатано с матриц ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28 на Саратовском ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинате Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 83 коп.