РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Учебное издание

Санкт-Петербург
2009

ББК 22.161.6
З 17

Учебное пособие печатается по рекомендации Учебно-методического объединения по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки Российской Федерации

Рецензенты:

д.ф.-м.н., профессор **Будаев В. Д.** (РГПУ им. А. И. Герцена)
д.ф.-м.н., профессор **Флегонтов А. В.** (РГПУ им. А. И. Герцена)

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Метод разделения переменных в математической физике. – СПб., 2009. – 92 с. – ISBN 978–5–94777–211–1

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и преподавателей и может быть использовано для изучения дисциплин, связанных с решением дифференциальных уравнений в частных производных в самых разнообразных отраслях прикладной науки. Оно также будет полезно при подготовке к семинарам, факультативным занятиям и при самостоятельном изучении вопросов данной тематики. Материал книги может быть широко использован на лекциях и практических занятиях по курсу математической физики.

Целью настоящей книги является изложение основных принципов решения линейных и нелинейных уравнений математической физики, а также изучение современных направлений развития этой отрасли знаний.

Библиогр. 14 назв.

ISBN 978–5–94777–211–1

Предисловие авторов

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся в сфере естественнонаучных дисциплин по научным, техническим и образовательным профилям. Материал пособия соответствует справочным изданиям авторов [1, 2], получившим широкую известность, но недостаточно удобным для учебной работы в силу их большого объема и огромного количества материала, не входящего в учебные программы. Вместе с тем можно отметить, что несмотря на сравнительное обилие учебников и монографий по математической физике, изложение ряда вопросов, весьма востребованных в приложениях, можно найти лишь в специальных статьях. Данная работа в известной степени восполняет этот пробел.

Во введении обсуждается ряд общих вопросов, связанных с идеологией метода разделения переменных для различных типов дифференциальных уравнений и с его применимостью в конкретных задачах.

Основное содержание работы распределено по трем главам. В первой главе подробно рассматривается общая схема метода Фурье (т. е. метода разделения переменных для линейных уравнений математической физики). Все утверждения сформулированы для уравнений 2-го порядка, наиболее часто встречающиеся в разнообразных приложениях, однако (с некоторыми оговорками) приведенный алгоритм пригоден и для линейных уравнений высших порядков. В конце главы (в отличие от двух следующих глав) мы не помещаем заданий для самостоятельной работы, так как вполне доступны классические сборники задач по математической физике [3, 4, 5]. Во второй и третьей главах метод разделения переменных применяется для поиска классов точных частных решений нелинейных уравнений математической физики. Здесь в конце ряда разделов приведено достаточное для проведения практических занятий количество задач – в других источниках, за исключением работы [2], задачи по этой теме отсутствуют.

Литературные источники разделены на две категории – “общие” и “рекомендуемые”. На “общие” источники в тексте дается конкретная ссылка, тогда как “рекомендуемые” источники помещены списком в конце соответствующего раздела (по необходимости). Это не означает, что в настоящей работе материалы из этих источников не используются – напротив, некоторые примеры и задачи заимствованы именно из них.

Введение

0.1. Логика разделения переменных

Из методов решения дифференциальных уравнений метод разделения переменных (РП), наверное, появился раньше всех. Являясь базовым методом, он успешно применяется и в современной практике, а в последнее время получил дальнейшее развитие.

Первоначально применимость метода РП ограничивалась уравнениями, которые можно привести к равенству выражений, зависящих от разных переменных. Для обыкновенных дифференциальных уравнений это равенство дифференциала выражения, зависящего только от искомой функции, дифференциалу выражения, зависящего только от независимой переменной:

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx, \tag{0.1.1}$$

для уравнений в частных производных – равенство между собой функций от разных **независимых** переменных, например, в случае уравнений колебаний струны

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{0.1.2}$$

подстановка решения в виде произведения $w = X(x)T(t)$ приводит к уравнению

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{0.1.3}$$

(штрих обозначает производную по соответствующей переменной).

Естественно, дальнейший ход рассуждений существенно зависит от того, какую задачу мы решаем – в первом случае ищется функция $y = y(x)$, поэтому почленное интегрирование (0.1.1) приводит к общему решению (в неявном виде) обыкновенного уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C,$$

а во втором случае ищется функция **двух независимых** переменных $w(x, y)$, которая (нами) представляется в виде произведения $w(x,t) = X(x)T(t)$. Из равенства (0.1.3) следует, что

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = C. \tag{0.1.4}$$

Кроме этого, мы всегда должны помнить, что найденное решение – частное; и даже если таких решений найдено бесконечно много (например, счетное множество), то ниоткуда не следует, что мы нашли **все** решения, т. е. с помощью найденного набора можно найти решение, удовлетворяющее любым (допустимым) краевым и начальным решениям. При этом соотношение (0.1.4) приводит к **двум** обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} X'' - CX &= 0, \\ T'' - a^2CT &= 0 \end{aligned} \tag{0.1.5}$$

с соответствующими условиями – по пространственной переменной (x) в ограниченной области это обычно краевые условия, и тем самым количество решений первого уравнения (и, вообще говоря, их существование) остается под вопросом.

В классических задачах математической физики, как правило, краевые условия таковы, что система (0.1.5) имеет счётное множество решений. Так, если мастер, изготовивший гитару, малые колебания струны которой описываются уравнением (0.1.2) – не сумасшедший, концы струны закреплены на корпусе гитары, и краевые условия имеют вид

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, \\ w(l,t) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{0.1.6}$$

Рассмотрим последовательно три случая решения первого уравнения системы (0.1.5), когда константа разделения переменных C больше, равна или меньше нуля.

1. $C > 0$. Общее решение уравнения имеет вид $X = C_1e^{\sqrt{C}x} + C_2e^{-\sqrt{C}x}$, для удовлетворения краевых условий необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \text{при} \quad x = 0 \qquad C_1 + C_2 = 0, \\ \text{при} \quad x = l \qquad C_1e^{\sqrt{C}l} + C_2e^{-\sqrt{C}l} = 0. \end{cases} \tag{0.1.7}$$

   Система (0.1.5) однородна, поэтому для существования решения необходимо равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{C}l} & e^{-\sqrt{C}l} \end{vmatrix} = 0,$$

   что возможно лишь в случае $C = 0$, а это, в свою очередь, противоречит исходному предположению $C > 0$.

2. $C = 0$. Общее решение имеет вид $X = C_1x + C_2$. В данном случае очевидно, что нетривиальных решений нет, так как прямая $C_1x + C_2$ не может пересекать другую прямую (ось абсцисс x) в двух различных точках ($x = 0$ и $x = l$).

3. $C < 0$. Общее решение имеет вид

$$X = C_1 \sin\left(\sqrt{-C}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{-C}x\right),$$

для удовлетворения краевых условий необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \text{при} \quad x = 0 \qquad C_2 = 0, \\ \text{при} \quad x = l \qquad C_1 \sin\left(\sqrt{-C}l\right) = 0. \end{cases} \tag{0.1.8}$$

Из второго уравнения следует существование счётного множества значений константы разделения переменных $C = -\dfrac{\pi^2 k^2}{l^2}$, $k = 1, 2, \ldots$, при которых существует нетривиальное решение системы (0.1.5).

В силу этого обстоятельства при проведении процедуры разделения переменных часто сразу пишут $C = -\lambda^2$, т. е. $\lambda = \pi k/l$.

И ещё одно замечание о том, что поставленные условия не могут быть “какие угодно”. Для решения задачи о колебании струны надо задать начальное отклонение струны от положения равновесия $w(x, 0) = \varphi(x)$ и начальную скорость струны $w_t(x, 0) = \psi(x)$ в каждой точке интервала $[0, l]$. Совершенно очевидным выглядит условие согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, так как концы струны закреплены в любой момент времени $t \geqslant 0$. Аналогично, должно выполняться и условие $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

0.2. Задача Штурма–Лиувилля

В большинстве классических задач математической физики для поиска функции $X(x)$ возникает **задача Штурма–Лиувилля**: найти значения λ, при которых существует нетривиальное решение задачи

$$L(X) + \lambda\rho X = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

а также найти эти решения (собственные числа и собственные функции). Здесь

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] - q(x)X,$$

$k(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ – непрерывные на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ функции. Обычно $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$, хотя функция $k(x)$ может обращаться в нуль на одном из концов отрезка, в этом случае эта точка является **особой**, и постановка краевой задачи имеет свои особенности. Справедливы следующие утверждения [6]:

1. Существует счётное множество собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n,$$

которым соответствуют собственные функции $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\ldots$, $X_n(x)$.
2. При $q > 0$ все собственные значения λ_n положительны.
3. Собственные функции $X_m(x)$ и $X_n(x)$ при $m \neq n$ ортогональны между собой с весом $\rho(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, т. е.

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x) dx = 0, \qquad (m \neq n).$$

4. ***Теорема разложимости В. А. Стеклова***.
Произвольная функция $F(x)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничным условиям $F(0) = F(l) = 0$, разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x),$$

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|} \int_0^l F(x) X_n \rho(x) dx, \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) \rho(x) dx.$$

В силу пп. 3, 4 собственные функции задачи Штурма–Лиувилля образуют ортогональный базис гильбертова пространства, и любой его элемент представим рядом Фурье по этому базису. Поэтому становится возможным удовлетворить любому (разумному) начальному условию, например, $w(x, 0) = \varphi(x)$, подставив в это условие слева произвольную суперпозицию частных решений

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) \right|_{t=0},$$

а справа – разложение функции φ

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

и найдя коэффициенты A_n приравниванием соответственных подобных.

Теперь перед переходом к основной (более строгой и сжатой) части изложения метода Фурье нам остаётся лишь рассмотреть некоторые аспекты применимости разделения переменных в зависимости от свойств уравнения. Если коэффициенты исходного уравнения с частными производными – постоянные, то, как правило, проблем с разделением переменных не возникает (простейший пример – уравнение Лапласа в декартовой системе координат). Однако при переходе к криволинейным системам координат в уравнении возникают коэффициенты Ламе – функции независимых переменных (вид оператора Лапласа в различных криволинейных системах координат приведен в приложении к книге [6]). Аналогичная ситуация возникает и при наличии переменного потенциала, например, в уравнении Шрёдингера. Возможность разделения переменных тесно связана с **симметрией** исходного уравнения [7]. В этой книге подробно рассматриваются уравнения Лапласа, Гельмгольца, Шрёдингера и ряд других, и указываются все системы координат, в которых переменные делятся.

0.3. Несколько слов о нелинейных уравнениях

Для нелинейных уравнений до последнего времени отсутствовала сколько-нибудь содержательная теория разделения переменных. Очевидно было только то, что отсутствие принципа суперпозиции не позволяет получить решения заданных краевых задач с помощью линейной суперпозиции сколь угодно большого количества “стандартных” частных решений. Однако для ряда уравнений получались даже общие решения.

Рассмотрим, например, уравнение

$$w\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{0.3.1}$$

и попытаемся найти решения вида

$$w(x,y) = X(x)Y(y). \tag{0.3.2}$$

При непосредственно подстановке, с учётом того, что $w_x = X'Y$, $w_y = XY'$, $w_{xy} = X'Y'$ (штрих обозначает производную по соответствующей переменной), получаем $XX'YY' = aXX'YY'$. Отсюда следует, что при $a = 1$ получается тождество – выражение (0.3.2) является **общим** решением уравнения (0.3.1), тогда как при $a \neq 1$ решений такого вида нет вообще. Однако из этого ещё не следует, что метод разделения переменных не дает решения при других значениях параметра a. Будем искать решения вида

$$w(x,y) = \Phi\big(X(x) + Y(y)\big). \tag{0.3.3}$$

Тогда после подстановке этого выражения в уравнение (0.3.1) получим (после сокращения на $X'Y'$):

$$\Phi\Phi'' = a\big(\Phi'\big)^2,$$

где штрих означает производную функции Φ по её аргументу $\omega = X+$ $+Y$. Общее решение этого (обыкновенного) дифференциального уравнения имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} (C_1\omega + C_2)^{\frac{1}{1-a}}, & a \neq 1, \\ \exp(C_1\omega + C_2), & a = 1. \end{cases}$$

Окончательно, "убирая" лишние константы C_1 и C_2 в произвольные функции $X(x)$ и $Y(y)$, получаем **общее** решение уравнения (0.3.1) при любом a:

$$w(x,y) = \begin{cases} \big(X(x) + Y(y)\big)^{\frac{1}{1-a}}, & a \neq 1, \\ \exp\big(X(x) + Y(y)\big), & a = 1. \end{cases} \tag{0.3.4}$$

Легко видеть, что переобозначение $e^X \to X$, $e^Y \to Y$ приводит решение (0.3.4) при $a = 1$ к виду (0.3.2). Решение вида (0.3.3) называется решением с функциональным разделением переменных.

В завершение этого не очень краткого введения отметим, что если метод разделения переменных для линейных задач математической физики является одним из основных инструментов классической теории, то в применении к нелинейным уравнениям этот метод получил широкое распространение лишь недавно. Тем не менее его перспективность стала уже очевидной – методами обобщённого и функционального разделения переменных получено огромное число точных решений ряда востребованных в приложениях уравнений, причем оказывается, что многие из них не могут быть получены даже таким мощным методом, как групповой анализ.

Глава 1. Метод разделения переменных в линейных уравнениях (метод Фурье)

1.1. Общее описание метода разделения переменных

Многие линейные задачи математической физики решаются методом разделения переменных. На рис. 1 (см. следующую страницу) изображена схема применения этого метода для решения нестационарных краевых задач, описываемых линейными однородными уравнениями второго порядка параболического и гиперболического типов с однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями. Для простоты рассматриваются задачи с двумя независимыми переменными x и t, где $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $t \geqslant 0$.

Задачи, которые можно решить методом разделения переменных по указанной схеме, описываются линейными однородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка

$$\alpha(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \big[c(x) + \gamma(t)\big]w \qquad (1.1.1)$$

с линейными однородными граничными условиями

$$\begin{cases} s_1\partial_x w + k_1 w = 0 & \text{при} \quad x = x_1, \\ s_2\partial_x w + k_2 w = 0 & \text{при} \quad x = x_2 \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

и произвольными начальными условиями

$$w = f_0(x) \quad \text{при} \quad t = 0, \qquad (1.1.3)$$

$$\partial_t w = f_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \qquad (1.1.4)$$

Для уравнений параболического типа, которым соответствует $\alpha(t) \equiv 0$ в (1.1.1), выставляется только одно начальное условие (1.1.3).

Опишем теперь более подробно основные этапы применения метода разделения переменных. Будем считать, что коэффициенты уравнения (1.1.1) и граничных условий (1.1.2) удовлетворяют условиям:

$$\alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t),\ a(x),\ b(x),\ c(x) \text{ – непрерывные функции,}$$

$$\alpha(t) \geqslant 0, \quad 0 < a(x) < \infty, \quad |s_1| + |k_1| > 0, \quad |s_2| + |k_2| > 0.$$

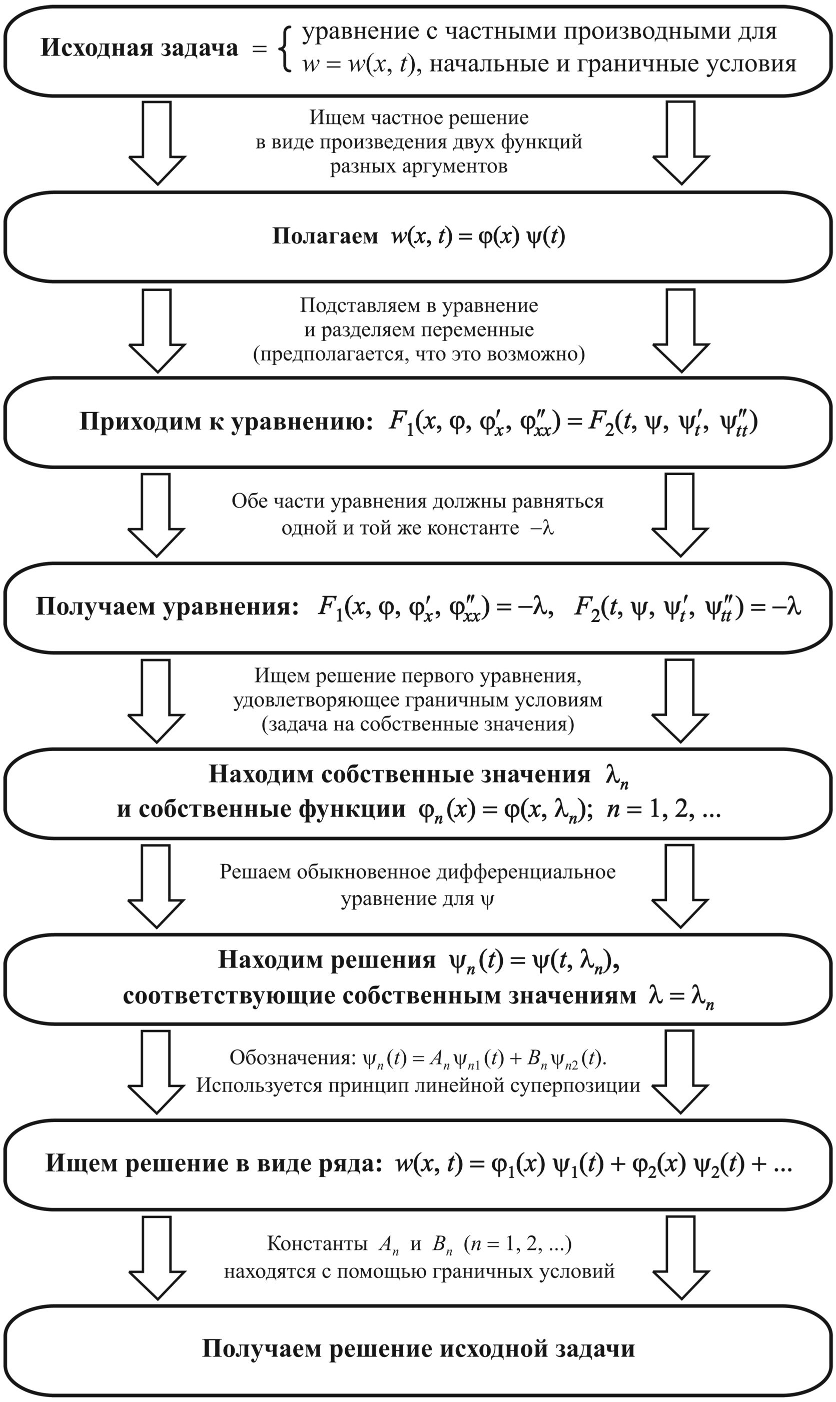

Рис. 1. Схема решения линейных краевых задач методом разделения переменных (для уравнений параболического типа функция F_2 не зависит от ψ''_{tt} и $B_n = 0$).

Замечание 1. Метод разделения переменных используется также для решения линейных краевых задач, которые описываются эллиптическими уравнениями вида (1.1.1), когда $\alpha(t) < 0$, $a(x) > 0$, с граничными условиями (1.1.2) по переменной x и аналогичными граничными условиями по переменной t. При этом полностью сохраняются все результаты общей стадии решения, описанной в разд. 1.2.

Замечание 2. В различных приложениях встречаются уравнения вида (1.1.1), имеющие коэффициент, обращающийся в бесконечность на границе области: $b(x) \to \infty$ при $x \to x_1$ (остальные коэффициенты уравнения ограничены). В этом случае первое граничное условие (1.1.2) заменяется условием ограниченности решения при $x \to x_1$. Подобная ситуация имеет место в пространственных задачах с осевой и центральной симметрией, когда решение зависит только от радиальной координаты.

1.2. Поиск частных решений. Получение уравнений и граничных условий

Метод основан на поиске частных решений уравнения (1.1.1) в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t). \tag{1.2.1}$$

После разделения переменных и элементарных преобразований для функций $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ получим линейные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x + [\lambda + c(x)]\varphi \;=\; 0, \tag{1.2.2}$$

$$\alpha(t)\psi''_{tt} + \beta(t)\psi'_t + [\lambda - \gamma(t)]\psi \;=\; 0, \tag{1.2.3}$$

в которые входит свободный параметр λ. В обозначениях, принятых на рис. 1, уравнения (1.2.2) и (1.2.3) записываются так: $\varphi F_1(x,\varphi,\varphi'_x,\varphi''_{xx})+$ $+\lambda\varphi = 0$ и $\psi F_2(t,\psi,\psi'_t,\psi''_{tt}) + \lambda\psi = 0$.

Подставив (1.2.1) в (1.1.2), получим граничные условия для функции $\varphi = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} s_1\varphi'_x + k_1\varphi = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_1,\\ s_2\varphi'_x + k_2\varphi = 0 \quad &\text{при} \quad x = x_2. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (1.2.2) вместе с линейными однородными граничными условиями (1.2.4) представляет собой задачу на собственные значения.

1.3. Решение задачи на собственные значения. Ортогональность собственных функций

Пусть $\tilde\varphi_1 = \tilde\varphi_1(x,\lambda)$ и $\tilde\varphi_2 = \tilde\varphi_2(x,\lambda)$ – линейно независимые частные решения уравнения (1.2.2). Тогда общее решение этого уравнения можно представить в виде линейной комбинации

$$\varphi = C_1\tilde\varphi_1(x,\lambda) + C_2\tilde\varphi_2(x,\lambda), \tag{1.3.1}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставим решение (1.3.1) в граничные условия (1.2.4). В результате для определения коэффициентов C_1 и C_2 получим линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{12}(\lambda)C_2 = 0, \\ \varepsilon_{21}(\lambda)C_1 + \varepsilon_{22}(\lambda)C_2 = 0, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

где $\varepsilon_{ij}(\lambda) = \left[s_i(\tilde{\varphi}_j)'_x + k_i\tilde{\varphi}_j\right]_{x=x_i}$. Чтобы система (1.3.2) имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\varepsilon_{11}(\lambda)\varepsilon_{22}(\lambda) - \varepsilon_{12}(\lambda)\varepsilon_{21}(\lambda) = 0. \tag{1.3.3}$$

Решая трансцендентное уравнение (1.3.3) находим **собственные значения** $\lambda = \lambda_n$, где $n = 1,\, 2,\, \ldots$ При этих значениях существуют нетривиальные решения уравнения (1.2.2):

$$\varphi_n(x) = \varepsilon_{12}(\lambda_n)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda_n) - \varepsilon_{11}(\lambda_n)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda_n), \tag{1.3.4}$$

которые называются **собственными функциями** (эти функции определяется с точностью до постоянного множителя).

Для удобства дальнейшего анализа уравнение (1.2.2) представим в виде

$$[p(x)\varphi'_x]'_x + [\lambda\rho(x) - q(x)]\varphi = 0, \tag{1.3.5}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ определяются по формулам

$$p(x) = \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right], \quad q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right],$$

$$\rho(x) = \frac{1}{a(x)}\exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right]. \tag{1.3.6}$$

Из исходных предположений (см. конец разд. 1.1) следует, что $p(x)$, $p'_x(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ – непрерывные функции, $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$.

Относительно задачи на собственные значения (1.3.5), (1.2.4) известно следующее:

1. Все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ вещественны и $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. (Поэтому может быть лишь конечное число отрицательных собственных значений.)
2. Система собственных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$ является ортогональной на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ с весовой функцией $\rho(x)$, т. е.

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \tag{1.3.7}$$

3. При выполнении условий

$$q(x) \geqslant 0, \quad s_1 k_1 \leqslant 0, \quad s_2 k_2 \geqslant 0, \tag{1.3.8}$$

отрицательных собственных значений нет. Если $q \equiv 0$, $k_1 = k_2 = 0$, то наименьшим собственным значением будет $\lambda_1 = 0$, которому отвечает собственная функция $\varphi_1 = \text{const}$. В остальных случаях при выполнении условий (1.3.8) все собственные значения положительны [первое неравенство в (1.3.8) выполняется, если $c(x) \leqslant 0$].

Дальнейшая процедура построения решений нестационарных краевых задач несколько различается для параболических и гиперболических уравнений; соответствующие результаты описаны далее в разд. 1.4 и 1.5 (а для эллиптических уравнений – в разд. 1.6).

1.4. Решение краевых задач для уравнений параболического типа

Рассмотрим краевую задачу для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[c(x) + \gamma(t)\bigr]w, \tag{1.4.1}$$

(это уравнение получается из уравнения (1.1.1) при $\alpha(t) \equiv 0$ и $\beta(t) = 1$) с однородными граничными условиями (1.1.2) и начальным условием (1.1.3). Пусть функция w имеет непрерывную производную по t и две непрерывных производных по x и является решением задачи (1.4.1), (1.1.2)–(1.1.3). Тогда должны выполняться условия согласования граничных условий (1.1.2) и начального условия (1.1.3):

$$[s_1 f_0' + k_1 f_0]_{x=x_1} = 0, \qquad [s_2 f_0' + k_2 f_0]_{x=x_2} = 0. \tag{1.4.2}$$

В двух случаях должны выполняться также дополнительные условия согласования

$$\begin{aligned} &[a(x)f_0'' + b(x)f_0']_{x=x_1} = 0 \quad \text{при} \quad s_1 = 0,\\ &[a(x)f_0'' + b(x)f_0']_{x=x_2} = 0 \quad \text{при} \quad s_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Здесь штрихами обозначены производные по x.

Сначала ищутся частные решения уравнения (1.4.1) в виде произведения (1.2.1), где функции $\varphi(x)$ определяются путем решения задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения (1.2.2) с граничными условиями (1.2.4). Решение уравнения (1.2.3) при $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) = 1$ и $\lambda = \lambda_n$, удовлетворяющее условию нормировки

$\psi_n(0) = 1$, определяется формулой

$$\psi_n(t) = \exp\left[-\lambda_n t + \int_0^t \gamma(\xi)\,d\xi\right]. \tag{1.4.4}$$

Решение исходной нестационарной краевой задачи (1.4.1), (1.1.2), (1.1.3) для уравнения параболического типа ищется в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x)\,\psi_n(t), \tag{1.4.5}$$

где A_n – постоянные коэффициенты, а функции $w_n(x,t) = \varphi_n(x)\,\psi_n(t)$ представляют собой частные решения вида (1.2.1), которые удовлетворяют граничным условиям (1.1.2). В силу принципа линейной суперпозиции ряд (1.4.5) также будет решением исходного уравнения с частными производными, удовлетворяющим граничным условиям.

Для определения коэффициентов A_n подставим ряд (1.4.5) в начальное условие (1.1.3). В результате имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_0(x).$$

Умножим обе части этого равенства на $\rho(x)\varphi_n(x)$ и проинтегрируем полученное выражение по x на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Учитывая свойство ортогональности собственных функций (1.3.7), находим коэффициенты

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_0(x)\,dx, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n^2(x)\,dx. \tag{1.4.6}$$

Формула для определения весовой функции $\rho(x)$ приведена в (1.3.6).

Формулы (1.4.5), (1.3.4), (1.4.4), (1.4.6) дают формальное решение нестационарной краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) при $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) = 1$.

Пример 1. Рассмотрим первую краевую задачу на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.4.7}$$

с общим начальным условием (1.1.3) и однородными граничными условиями первого рода

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \tag{1.4.8}$$

Функцию $\psi(t)$ в частном решении (1.2.1) находим по формуле (1.4.4), подставив в нее $\gamma(t)=0$:

$$\psi_n(t) = \exp(-\lambda_n t). \tag{1.4.9}$$

Функции $\varphi_n(x)$ определяются путем решения задачи на собственные значения (1.2.2), (1.2.4) при $a(x)=1$, $b(x)=c(x)=0$, $s_1=s_2=0$, $k_1=$ $=k_2=1$, $x_1=0$, $x_2=l$:

$$\varphi''_{xx}+\lambda\varphi=0; \qquad \varphi=0 \quad \text{при} \quad x=0, \qquad \varphi=0 \quad \text{при} \quad x=l.$$

В результате получим собственные функции и собственные значения:

$$\varphi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n=1,\,2,\,\ldots \tag{1.4.10}$$

Решение задачи (1.4.7)–(1.4.8), (1.1.3) находим по формулам (1.4.5), (1.4.6), (1.4.10) с учетом равенства $\|\varphi_n\|^2=l/2$:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right),$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_0(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\,d\xi. \tag{1.4.11}$$

Если функция $f_0(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой и выполнены условия согласования начальных и граничных условий (1.4.2) и (1.4.3), тогда ряд (1.4.11) сходится и допускает однократное дифференцирование по t и двукратное – по x. В этом случае формула (1.4.11) дает классическое гладкое решение задачи (1.4.7)–(1.4.8), (1.1.3). [Если $f_0(x)$ не является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией или если не выполнены условия согласования начальных и граничных условий, тогда ряд (1.4.11) может сходится к разрывной функции и будет определять только обобщенное решение.]

1.5. Решение краевых задач для уравнений гиперболического типа

Для уравнений гиперболического типа решение краевой задачи (1.1.1)–(1.1.4) ищется в виде

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\left[A_n\psi_{n1}(t)+B_n\psi_{n2}(t)\right]. \tag{1.5.1}$$

где A_n и B_n – постоянные коэффициенты, а $\psi_{n1}(t)$, $\psi_{n2}(t)$ – частные решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1.2.3) для функции ψ (при $\lambda = \lambda_n$), которые удовлетворяют начальным условиям

$$\psi_{n1}(0) = 1, \quad \psi'_{n1}(0) = 0; \qquad \psi_{n2}(0) = 0, \quad \psi'_{n2}(0) = 1. \tag{1.5.2}$$

Заметим, что здесь, как и для параболического уравнения, должны выполняться условия (1.4.2), (1.4.3), к которым следует добавить условия согласования граничных условий (1.1.2) и начального условия (1.1.4):

$$[s_1 f_1' + k_1 f_1]_{x=x_1} = 0, \qquad [s_2 f_1' + k_2 f_1]_{x=x_2} = 0.$$

Подставим решение (1.5.1) в начальные условия (1.1.3)–(1.1.4). В результате имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) = f_0(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x) = f_1(x).$$

Умножим эти равенства на $\rho(x)\varphi_n(x)$ и проинтегрируем полученные выражения по x на отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Учитывая свойство ортогональности собственных функций (1.3.7), находим коэффициенты ряда (1.5.1):

$$A_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_0(x)\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\varphi_n(x) f_1(x)\, dx, \tag{1.5.3}$$

где формула для вычисления величины $\|\varphi_n\|$ приведена в (1.4.6).

Формулы (1.5.1), (1.3.4), (1.5.3) дают формальное решение нестационарной краевой задачи (1.1.1)–(1.1.4) при $\alpha(t) > 0$.

Пример 2. Рассмотрим смешанную краевую задачу на отрезке $0 \leqslant \leqslant x \leqslant l$ для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.5.4}$$

с общими начальными условиями (1.1.3)–(1.1.4) и однородными граничными условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \tag{1.5.5}$$

Функции $\psi_{n1}(t)$ и $\psi_{n2}(t)$ описываются линейным уравнением [см. (1.2.3) при $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = \gamma(t) = 0$, $\lambda = \lambda_n$]:

$$\psi''_{tt} + \lambda\psi = 0$$

вместе с начальными условиями (1.5.2). Имеем

$$\psi_{n1}(t) = \cos\bigl(\sqrt{\lambda_n}\,t\bigr), \quad \psi_{n2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\bigl(\sqrt{\lambda_n}\,t\bigr). \qquad (1.5.6)$$

Функции $\varphi_n(x)$ определяем путем решения задачи на собственные значения (1.2.2), (1.2.4) при $a(x) = 1$, $b(x) = c(x) = 0$, $s_1 = k_2 = 0$, $s_2 = k_1 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = l$:

$$\varphi''_{xx} + \lambda\varphi = 0; \qquad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \varphi'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

В результате получим собственные функции и значения:

$$\varphi_n(x) = \sin(\mu_n x), \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi(2n-1)}{2l}, \quad n = 1,\,2,\,\ldots \qquad (1.5.7)$$

Решение задачи (1.5.4)–(1.5.5), (1.1.3)–(1.1.4) находим по формулам (1.5.1), (1.5.3) с учетом равенства $\|\varphi_n\|^2 = l/2$:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\bigl[A_n\cos(\mu_n t) + B_n\sin(\mu_n t)\bigr]\sin(\mu_n x), \quad \mu_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l},$$
$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_0(x)\sin(\mu_n x)\,dx, \quad B_n = \frac{2}{l\mu_n}\int_0^l f_1(x)\sin(\mu_n x)\,dx. \qquad (1.5.8)$$

Если функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ имеют соответственно три и две непрерывные производные и выполнены условия согласования начальных и граничных условий, тогда ряд (1.5.8) сходится и допускает двукратное дифференцирование по каждой независимой переменной. В этом случае формула (1.5.8) дает классическое гладкое решение задачи (1.5.4)–(1.5.5), (1.1.3)–(1.1.4).

1.6. Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа

1.6.1. Решение задачи с одним неоднородным граничным условием. Рассмотрим теперь линейную краевую задачу для эллиптического уравнения[1]

$$a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha(y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \beta(y)\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[c(x) + \gamma(y)\bigr]w = 0 \qquad (1.6.1)$$

[1]Это уравнение отличается от уравнения (1.1.1) только переобозначением одной независимой переменной $t \rightleftharpoons y$ и знаками функций α и β.

с однородными граничными условиями (1.1.2) по переменной x и смешанными (одним однородным и одним неоднородным) граничными условиями по переменной y:

$$\begin{cases} \sigma_1 \partial_y w + \nu_1 w = 0 & \text{при} \quad y = y_1, \\ \sigma_2 \partial_y w + \nu_2 w = f(x) & \text{при} \quad y = y_2. \end{cases} \tag{1.6.2}$$

Считаем, что коэффициенты уравнения (1.6.1) и граничные условия (1.1.2) и (1.6.2) удовлетворяют следующим условиям:

$$a(x),\ b(x),\ c(x)\ \alpha(y),\ \beta(y),\ \gamma(t) – \text{непрерывные функции},$$
$$a(x) > 0,\ \alpha(y) > 0,\ |s_1| + |k_1| > 0,\ |s_2| + |k_2| > 0,$$
$$|\sigma_1| + |\nu_1| > 0,\ |\sigma_2| + |\nu_2| > 0.$$

Метод основан на поиске частных решений уравнения (1.6.1) в виде произведения функций разных аргументов

$$w(x, y) = \varphi(x)\, \psi(y). \tag{1.6.3}$$

Для функции $\varphi = \varphi(x)$, как и ранее, приходим к задаче на собственные значения (1.2.2), (1.2.4); процедура ее решения подробно описана в разд. 1.3. Далее считаем, что λ_n и $\varphi_n(x)$ получены. Функции $\psi_n = \psi_n(y)$ находятся путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\alpha(y)\psi''_{yy} + \beta(y)\psi'_y + [\gamma(y) - \lambda_n]\psi = 0 \tag{1.6.4}$$

с однородным граничным условием

$$\sigma_1 \psi'_y + \nu_1 \psi = 0 \quad \text{при} \quad y = y_1, \tag{1.6.5}$$

которое является следствием первого условия (1.6.2). Функции ψ_n определяются с точностью до произвольного множителя.

Используя принцип линейной суперпозиции, решение краевой задачи (1.6.1), (1.6.2), (1.1.2) ищем в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x) \psi_n(y), \tag{1.6.6}$$

где A_n – произвольные константы. По построению, ряд (1.6.6) будет удовлетворять уравнению (1.6.1), граничным условиям (1.1.2) и первому граничному условию (1.6.2). Чтобы определить коэффициенты ряда A_n, подставим выражение (1.6.6) во второе граничное условие (1.6.2). Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n \varphi_n(x) = f(x), \qquad B_n = \sigma_2 \frac{d\psi_n}{dy}\bigg|_{y=y_2} + \nu_2 \psi_n(y_2). \tag{1.6.7}$$

Далее действуем по той же схеме, что и в разд. 1.4, а именно, умножим (1.6.7) на $\rho(x)\varphi_n(x)$, а затем проинтрегрируем полученное выражение по отрезку $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ с учетом ортогональности собственных функций (1.3.7). В результате получим

$$A_n = \frac{1}{B_n\|\varphi_n\|^2}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\varphi_n(x)f(x)\,dx, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\varphi_n^2(x)\,dx, \quad (1.6.8)$$

где весовая функция $\rho(x)$ определена в (1.3.6).

Пример 3. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6.9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &w = 0 \ \text{ при } \ x = 0, \qquad w = 0 \qquad \text{при } \ x = l_1; \\ &w = 0 \ \text{ при } \ y = 0, \qquad w = f(x) \ \text{ при } \ y = l_2 \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

в прямоугольной области $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$.

Частные решения уравнения (1.6.9) ищутся в виде (1.6.3). Для функции $\varphi(x)$ имеем задачу на собственные значения

$$\varphi''_{xx} + \lambda\varphi = 0; \qquad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad x = l_1.$$

Решив ее, получим собственные функции и значения:

$$\varphi_n(x) = \sin(\mu_n x), \qquad \mu_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l_1}, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots \quad (1.6.11)$$

Функции $\psi_n = \psi_n(y)$ находятся путем решения задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с однородным граничным условием

$$\psi''_{yy} - \lambda_n\psi = 0; \qquad \psi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (1.6.12)$$

которые являются частным случаем (1.6.4)–(1.6.5) при $\alpha(y) = 1$, $\beta(y) = \gamma(y) = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\nu_1 = 1$. Нетривиальные решения задачи (1.6.12) имеют вид

$$\psi_n(y) = \operatorname{sh}(\mu_n y), \qquad \mu_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l_1}, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots \quad (1.6.13)$$

Используя формулы (1.6.6), (1.6.8), (1.6.11), (1.6.13) и учитывая равенства $B_n = \psi_n(l_2) = \operatorname{sh}(\mu_n l_2)$, $\rho(x) = 1$, $\|\varphi_n\|^2 = l/2$, находим решение исходной задачи (1.6.9)–(1.6.10):

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu_n x)\operatorname{sh}(\mu_n y),$$

$$A_n = \frac{2}{l_1 \operatorname{sh}(\mu_n l_2)} \int\limits_0^{l_1} f(x) \sin(\mu_n x)\, dx, \qquad \mu_n = \frac{\pi n}{l_1}.$$

1.6.2. Обобщение на случай, когда все граничные условия являются неоднородными. Рассмотрим теперь линейную краевую задачу для эллиптического уравнения (1.6.1) с неоднородными граничными условиями общего вида

$$\begin{aligned}
s_1 \partial_x w + k_1 w &= f_1(y) \quad \text{при} \quad x = x_1,\\
s_2 \partial_x w + k_2 w &= f_2(y) \quad \text{при} \quad x = x_2,\\
\sigma_1 \partial_y w + \nu_1 w &= f_3(x) \quad \text{при} \quad y = y_1,\\
\sigma_2 \partial_y w + \nu_2 w &= f_4(x) \quad \text{при} \quad y = y_2.
\end{aligned} \tag{1.6.14}$$

Решение этой задачи является суммой решений четырех вспомогательных более простых задач для уравнения (1.6.1), каждая из которых соответствует трем однородным и одному неоднородному граничным условиям в (1.6.14), см. табл. 1. Решение каждой вспомогательной задачи строится по схеме, изложенной в разд. 1.6.1, начиная с поиска решений в виде произведения функций разных аргументов (1.6.3), которые описываются уравнениями (1.2.2) и (1.6.4). Параметр разделения λ находится путем решения задачи с однородными граничными условиями на собственные значения, см. табл. 1. Решение каждой вспомогательной задачи ищется в виде ряда (1.6.6).

ТАБЛИЦА 1.

Описание вспомогательных задач для уравнения (1.6.1) и задач для соответствующих функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, определяющих частные решения вида (1.6.3). Для словосочетания “однородное граничное условие” используется сокращение *ОГУ*.

Вспомогательная задача	Функции, которые равны нулю в граничных условиях (1.6.14)	Задача на собственные значения с однородными граничными условиями	Другая задача с одним однородным граничным условием (для полученных λ_n)
Задача 1	$f_2(y) = f_3(x) = f_4(x) = 0$, функция $f_1(y)$ – задана	определяются функции $\psi_n(y)$ и значения λ_n	определяются функции $\varphi_n(x)$, удовлетворяющие *ОГУ* при $x = x_2$
Задача 2	$f_1(y) = f_3(x) = f_4(x) = 0$, функция $f_2(y)$ – задана	определяются функции $\psi_n(y)$ и значения λ_n	определяются функции $\varphi_n(x)$, удовлетворяющие *ОГУ* при $x = x_1$
Задача 3	$f_1(y) = f_2(y) = f_4(x) = 0$, функция $f_3(x)$ – задана	определяются функции $\varphi_n(x)$ и значения λ_n	определяются функции $\psi_n(y)$, удовлетворяющие *ОГУ* при $y = y_2$
Задача 4	$f_1(y) = f_2(y) = f_3(x) = 0$, функция $f_4(x)$ – задана	определяются функции $\varphi_n(x)$ и значения λ_n	определяются функции $\psi_n(y)$, удовлетворяющие *ОГУ* при $y = y_1$

Глава 2. Метод обобщенного разделения переменных

2.1. Введение

2.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных. Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{2.1.1}$$

Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t). \tag{2.1.2}$$

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков также имеют точные решения вида (2.1.1) или (2.1.2). Подобные решения будем называть соответственно **решениями с мультипликативным** и **аддитивным разделением переменных**.

Литература к разделу 2.1.1:

- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
- Маркеев А. П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 414 с.
- Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.

2.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях. В отдельных случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (2.1.1) или (2.1.2) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате получают обыкновенные дифференциальные уравнения для искомых величин.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

<u>**Пример 4**</u>. Уравнение теплопроводности со степенно́й нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.1.3}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Подставив (2.1.1) в уравнение (2.1.3), приходим к выражению

$$\varphi\psi'_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi'_x)'_x.$$

Разделяя переменные путем деления обеих частей на $\varphi\psi^{k+1}$, получим

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая – только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = C, \quad \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi} = C, \tag{2.1.4}$$

где C – произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (2.1.4), получим решение вида (2.1.1) уравнения (2.1.3).

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (2.1.1) нелинейного уравнения (2.1.3) полностью аналогична процедуре, используемой для решения линейных уравнений, в частности, для уравнения (2.1.3) при $k = 0$. Случаи решений с подобным разделением переменных будем называть *простейшими*.

<u>**Пример 5**</u>. Волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{2.1.5}$$

имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (2.1.2) в уравнение (2.1.5). После деления обеих частей на $e^{\lambda\psi}$ приходим к равенству

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x,$$

левая часть которого зависит только от переменной t, а правая – только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C, \tag{2.1.6}$$

где C – произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (2.1.6), получим решение уравнения (2.1.5) вида (2.1.2).

Пример 6. Уравнение теплопроводности в анизотропной среде с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = aw\ln w \tag{2.1.7}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$w = \varphi(x)\psi(y). \tag{2.1.8}$$

Подставим выражение (2.1.8) в уравнение (2.1.7). После деления на $\varphi\psi$ и переноса отдельных слагаемых в разные части полученного равенства, получим

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной x, а правая – только от y. Приравнивая их постоянной величине, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Задачи к разделу 2.1.2:

А. Найти решения с аддитивным разделением переменных следующих уравнений:

1) $f(x)w_x^2 + g(y)w_y^2 = h_1(x) + h_2(y)$,
2) $f(x)w_x^n + g(y)w_y^m = aw$,
3) $[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = 0$,
4) $[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = aw$,
5) $w_t = aw_{xx} + b(w_x)^2 + c$,
6) $w_t = [f(x)w_x]_x + a(w_x)^2 + bw$,
7) $w_t = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w}$,
8) $w_t = a(w_{xx})^k$,
9) $w_{tt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + b$,
10) $w_{tt} + aw_t = b(e^{\lambda w}w_x)_x$,

11) $w_{xt} = a(e^{\lambda w} w_x)_x + be^{\lambda w}$,

12) $w_{tt} = w_{xxx} + f(w_x) + aw$.

B. Найти решения с мультипликативным разделением переменных следующих уравнений:

1) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,

2) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,

3) $w_t = a(w^n w_x)_x + bw$,

4) $w_t = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw$,

5) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x$,

6) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw$,

7) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}$,

8) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw$.

9) $w_{xt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}$.

Литература к разделу 2.1.2:

- Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР, 1959, т. 125, №. 3, с. 492–495.
- Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. – Boston: Academic Press, 1989. – 673 p.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

2.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях. Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях происходит иначе, чем в линейных уравнениях. Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 7. Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - aw^3, \tag{2.1.9}$$

где $f(t)$ – произвольная функция.

Ищем точные решения в виде произведения функций разных аргументов. Подставим (2.1.1) в (2.1.9) и поделим обе части полученного равенства на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результате имеем

$$\frac{\psi_t'}{f\psi} = \frac{\varphi_{xx}''}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi_x')^2 - a\varphi^2]. \tag{2.1.10}$$

В общем случае данное выражение нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. Это, однако, не означает, что уравнение (2.1.9) не имеет решений вида (2.1.1).

1. Прямой проверкой можно убедиться, что функционально-дифференциальное уравнение (2.1.10) при $a>0$ имеет решение

$$\varphi(x)=C\exp\bigl(\pm x\sqrt{a}\,\bigr),\quad \psi(t)=\exp\left[a\int f(t)\,dt\right], \qquad (2.1.11)$$

где C – произвольная постоянная. Решение (2.1.11) для φ обращает в нуль выражение в квадратных скобках в (2.1.10), что позволяет разделить переменные.

2. Имеется более общее решение функционально-дифференциального уравнения (2.1.10) при $a>0$:

$$\begin{cases} \varphi(x)=C_1\exp\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr)+C_2\exp\bigl(-x\sqrt{a}\,\bigr), \\ \psi(t)=e^F\left(C_3+8aC_1C_2\displaystyle\int e^{2F}\,dt\right)^{-1/2}, \quad F=a\displaystyle\int f(t)\,dt, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Функция $\varphi=\varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (2.1.10), которые зависят от x, одновременно будут равны некоторым постоянным:

$$\frac{\varphi''_{xx}}{\varphi}=\text{const},\quad (\varphi'_x)^2-a\varphi^2=\text{const}.$$

Это обстоятельство и позволяет разделить переменные. Отметим, что функция $\psi=\psi(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли $\psi'_t=af(t)\psi-$ $-4aC_1C_2\psi^3$.

3. Аналогично, имеется другое решение функционально-дифференциального уравнения (2.1.10) при $a<0$:

$$\begin{cases} \varphi(x)=C_1\sin\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr)+C_2\cos\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr), \\ \psi(t)=e^F\left[C_3+2a(C_1^2+C_2^2)\displaystyle\int e^{2F}\,dt\right]^{-1/2}, \quad F=a\displaystyle\int f(t)\,dt, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Функция $\varphi=\varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (2.1.10), зависящие от x, будут равны константам. Отметим, что функция $\psi=\psi(t)$ описывается уравнением Бернулли $\psi'_t=af(t)\psi-a(C_1^2+C_2^2)\psi^3$.

Пример 8. Рассмотрим уравнение третьего порядка с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+c\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \qquad (2.1.12)$$

Будем искать точные решения уравнения (2.1.12) с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$w = f(x) + g(y). \tag{2.1.13}$$

Подставив (2.1.13) в (2.1.12), имеем

$$g'_y f''_{xx} + a f'_x g''_{yy} = b f'''_{xxx} + c g'''_{yyy}. \tag{2.1.14}$$

Данное выражение нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов.

Нетрудно догадаться, что функционально-дифференциальному уравнению (2.1.14) можно удовлетворить в следующих двух случаях:

$$\begin{array}{ll} \text{если} \;\; g'_y = C_1 \;\; \Longrightarrow \;\; g(y) = C_1 y + C_2, \quad f(x) = C_3 \exp(C_1 x/b) + C_4 x, \;\; \text{и} \\ \text{если} \;\; f'_x = C_1 \;\; \Longrightarrow \;\; f(x) = C_1 x + C_2, \quad g(y) = C_3 \exp(a C_1 y/c) + C_4 y, \end{array}$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – произвольные постоянные. В указанных случаях два члена из четырех в (2.1.14) обращаются в нуль, что позволяет разделить переменные.

Уравнение (2.1.12) имеет также более сложное точное решение вида (2.1.13):

$$w = C_1 e^{-a\lambda x} + \frac{c\lambda}{a} x + C_2 e^{\lambda y} - ab\lambda y + C_3,$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \lambda$ – произвольные постоянные. Механизм разделения здесь иной: оба нелинейных члена в левой части (2.1.14) содержат одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку слагаемые, которые нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. При сложении нелинейных членов указанные слагаемые сокращаются, что в итоге и приводит к разделению переменных:

$$\begin{array}{c} + \begin{array}{rcl} g'_y f''_{xx} & = & C_1 C_2 a^2 \lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} - C_1 b (a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} \\ a f'_x g''_{yy} & = & -C_1 C_2 a^2 \lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} + C_2 c \lambda^3 e^{\lambda y} \end{array} \\ \hline g'_y f''_{xx} + a f'_x g''_{yy} = -C_1 b (a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} + C_2 c \lambda^3 e^{\lambda y} = b f'''_{xxx} + c g'''_{yyy} \end{array}$$

Пример 9. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$(1 + w^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - 2w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2w\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = aw(1 - w^2). \tag{2.1.15}$$

Ищем точное решение уравнения (2.1.15) с разделяющимися переменными в виде произведения функций разных аргументов

$$w = f(x) g(y). \tag{2.1.16}$$

Подставив (2.1.16) в (2.1.15), получим соотношение

$$(1 + f^2g^2)(gf''_{xx} + fg''_{yy}) - 2fg[g^2(f'_x)^2 + f^2(g'_y)^2] = afg(1 - f^2g^2), \quad (2.1.17)$$

которое нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов. Тем не менее уравнение (2.1.15) имеет решения вида (2.1.16). Прямой проверкой можно убедиться, что функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$, удовлетворяющие нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} (f'_x)^2 = Af^4 + Bf^2 + C, \\ (g'_y)^2 = Cg^4 + (a - B)g^2 + A, \end{cases} \quad (2.1.18)$$

где A, B, C – произвольные постоянные, обращают функционально-дифференциальное уравнение (2.1.17) в тождество [надо использовать следствия уравнений (2.1.18): $f''_{xx} = 2Af^3 + Bf$, $g''_{yy} = 2Cg^3 + (a - B)g$].

Замечание. Уравнение (2.1.15) заменой $u = 4\,\mathrm{arctg}\,w$ сводится к нелинейному уравнению теплопроводности с источником синусоидального вида $\Delta u = a\sin u$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые особенности решений с разделением переменных. В разд. 2.2–2.4 будут описаны достаточно общие методы построения таких и более сложных решений нелинейных уравнений с частными производными.

Литература к разделу 2.1.3:

- Steuerwald R. Über enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation // Abh. Bayer. Akad. Wiss. (Muench.), 1936, Vol. 40, pp. 1–105.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

2.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных

2.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных уравнений. Для простоты изложения ограничимся здесь описанием случая уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной w (одна из независимых переменных может играть роль времени).

Линейные уравнения математической физики с разделяющимися переменными допускают точные решения в виде суммы

$$w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \quad (2.2.1)$$

где $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ – соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$, как и функции $\psi_i(y)$, при разных значениях i не связаны друг с другом.

Многие нелинейные уравнения с частными производными с квадратичными и степенны́ми нелинейностями вида

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[w] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[w] + \dots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[w] = 0, \quad (2.2.2)$$

где $\Pi_i[w]$ – дифференциальные формы, представляющие собой произведения целых неотрицательных степеней функции w и ее частных производных w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{xxx}, ..., также имеют точные решения вида (2.2.1). Такие решения будем называть **решениями с обобщенным разделением переменных**. Для нелинейных уравнений, в отличие от линейных, функции $\varphi_i(x)$ при различных значениях i обычно связаны друг с другом [и с функциями $\psi_j(y)$]. В общем случае функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ заранее не известны и подлежат определению в ходе исследования. Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (2.2.1) для наиболее простых случаев $n = 1$ и $n = 2$ (при $\psi_1 = \varphi_2 = 1$) рассмотрены в разд. 2.1.2 и 2.1.3.

Отметим, что наиболее часто встречается решение с обобщенным разделением переменных специального вида

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$$

(в правой части независимые переменные можно поменять местами). В частном случае $\chi(x) = 0$ это решение переходит в решение с мультипликативным разделением переменных, а в случае $\varphi(x) = 1$ – в решение с аддитивным разделением переменных.

Замечание 1. Выражения вида (2.2.1) часто используются в прикладной и вычислительной математике для построения приближенных решений дифференциальных уравнений методом Галеркина (и его различными модификациями).

Замечание 2. Решения вида (2.2.1) могут допускать также уравнения, имеющие отличные от (2.2.2) нелинейности (см. пример 18 из разд. 2.5).

2.2.2. Общий вид функционально-дифференциальных уравнений. В общем случае после подстановки выражения (2.2.1) в дифференциальное уравнение (2.2.2) для определения функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \dots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \quad (2.2.3)$$

где функционалы $\Phi_j(X)$ и $\Psi_j(Y)$ зависят соответственно от переменных x и y:

$$\begin{aligned}\Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\bigr),\\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\bigl(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \dots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\bigr).\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Здесь для наглядности формулы выписаны для случая уравнения второго порядка (2.2.2); для уравнений старших порядков в правые части формул (2.2.4) войдут соответствующие старшие производные функций φ_i и ψ_j.

Далее в разд. 2.4, 2.5 будут описаны два общих метода решения функционально-дифференциальных уравнений вида (2.2.3), (2.2.4). Кроме того, в разд. 2.3, 2.6 будут рассмотрены два специальных метода, не обладающих общностью (при использовании этих методов меньше объем вычислений).

Замечание. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнение (2.2.3)–(2.2.4) входят несколько функций (и их производных), зависящих от разных аргументов.

Литература к разделу 2.2.2:

- Титов С. С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика. – Саратов: Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.
- Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // ЖВМиМФ, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.
- Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // ЖВМиМФ, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.
- Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, Vol. 125A, № 2, pp. 225–246.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

2.3. Упрощенная схема построения точных решений, основанная на априорном задании одной системы координатных функций

2.3.1. Описание упрощенной схемы построения точных решений. Для построения точных решений уравнений вида (2.2.2) с квадратичной или степенно́й нелинейностью, которые не зависят явно от x (т. е. все $f_i = \text{const}$), можно использовать следующий упрощенный подход. Решения ищем в виде конечных сумм (2.2.1). Предположим, что система координатных функций $\varphi_i(x)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad \varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad \varphi_i(x) = \sin(\alpha_i x), \quad \varphi_i(x) = \cos(\beta_i x). \quad (2.3.1)$$

Конечные наборы этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (2.2.1), где λ_i, α_i, β_i рассматриваются как свободные параметры. Вторая система функций $g_i(y)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений, получаемых подстановкой выражения (2.2.1) в рассматриваемое уравнение.

Указанный подход не имеет той общности, которой обладают методы, описанные далее в разд. 2.4 и 2.5. Однако явное задание одной системы координатных функций $\varphi_i(x)$ резко упрощает процедуру построения точных решений [при этом отдельные решения вида (2.2.1) могут быть потеряны]. Важно отметить, что известные к настоящему времени точные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнений с частными производными с квадратичной нелинейностью в подавляющем большинстве задаются координатными функциями вида (2.3.1) (обычно при $n = 2$).

2.3.2. Примеры построения решений нелинейных уравнений старших порядков. Рассмотрим конкретные примеры использования упрощенной схемы построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений старших порядков.

Пример 10. Уравнения ламинарного пограничного слоя на плоской пластине сводятся к одному нелинейному уравнению третьего порядка для функции тока [8, 9]:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \quad (2.3.2)$$

Ищем точное решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x, y) = x\psi(y) + \theta(y), \quad (2.3.3)$$

которое отвечает простейшим функциям $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$ при $n = 2$ в формуле (2.2.1). Подставив (2.3.3) в (2.3.2), после перегруппировки членов имеем

$$x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] + [\psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy}] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству при любых значениях x, надо приравнять нулю оба выражения в квадратных скобках. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\psi = \psi(y)$ и $\theta = \theta(y)$:

$$
\begin{aligned}
&(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} = 0,\\
&\psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy} = 0.
\end{aligned}
$$

Эта система имеет, например, точное решение

$$\psi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \quad \theta = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4,$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – произвольные постоянные.

Пример 11. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{2.3.4}$$

где $f(x)$ – произвольная функция. В частном случае $n = 3,\ f(x) = \nu = \mathrm{const}$ оно совпадает с уравнением пограничного слоя (2.3.2).

Ищем точное решение уравнения (2.3.4) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \theta(x), \tag{2.3.5}$$

которое отвечает функциям $\psi_1(y) = e^{\lambda y},\ \psi_2(y) = 1$ в формуле (2.2.1). Подставив (2.3.5) в (2.3.4), после элементарных алгебраических действий получим

$$\lambda^2 e^{\lambda y}\varphi[\theta'_x + \lambda^{n-2} f(x)] = 0.$$

Этому равенству можно удовлетворить при

$$\theta(x) = -\lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \quad \varphi(x)\text{– произвольная функция}, \tag{2.3.6}$$

где C – произвольная постоянная. (Другой случай, когда $\varphi = 0,\ \psi$ – любое, малоинтересен.) Формулы (2.3.5)–(2.3.6) описывают точное решение уравнения (2.3.4):

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \tag{2.3.7}$$

содержащее произвольную функцию $\varphi(x)$ и две произвольные постоянные C и λ.

Пример 12. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \tag{2.3.8}$$

где $f(t)$ – произвольная функция. В частном случае $n = 3$ и $f(t) = \mathrm{const}$ оно встречается в гидродинамике (см., например, [10]).

Ищем точное решение уравнения (2.3.8) вида

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t). \tag{2.3.9}$$

Подставив (2.3.9) в (2.3.8), имеем

$$\varphi_t' - \lambda\varphi\psi = \lambda^{n-1}f(t)\varphi.$$

Выразим отсюда ψ и подставим в (2.3.9). В результате получим решение уравнения (2.3.8):

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi_t'(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

где $\varphi(t)$ – произвольная функция, λ произвольная постоянная.

Задачи к разделу 2.3:

1. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$w_x = yF(x, w_y) + G(x, w_y)$.

Указание. Решение искать в виде $w = \varphi(x)y + \psi(x)$.

2. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$w_x = w_y^2 - aw^2 + f(x)w$.

Указание. Решение искать в виде $w = \varphi(x) + \psi(x)e^{\lambda y}$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + b$,

c) $w_t = a(ww_x)_x + bw$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x + g(t)$ и $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений конвективной теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x + cw + k$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x + g(t)$ и $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности (значение $n = 1$ соответствует решению с осевой симметрией, а $n = 2$ – решению с центральной симметрией):

a) $w_t = ax^{-n}(x^n w w_x)_x$,
b) $w_t = ax^{-n}(x^n w w_x)_x + b$,
c) $w_t = ax^{-n}(x^n w w_x)_x + bw$.
Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x^2 + g(t)$.

6. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения
$w_t = aw_{xx} + bw_x^2 + cw + s$.
Указание. Решение искать в виде $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных линейного уравнения
$w_t + f(t)x^{-1}w_x = aw_{xx}$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = x^2 + \varphi(t)$,
b) $w = x^4 + \varphi(t)x^2 + \psi(t)$,
c) $w = x^{2n} + \varphi_{2n-2}(t)x^{2n-2} + \cdots + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_0(t)$.

8. При каком значении параметра a нелинейное уравнение
$w_t = ww_{xx} + aw_x^2 + b$
имеет решение с обобщенным разделением переменных вида $w = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t)$?

9. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения
$w_t = w_{xx} + w_x^2 + aw^2$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = f(t) + g(t)e^{\lambda x}$,
b) $w = f(t) + g(t)\sinh(\lambda x)$,
c) $w = f(t) + g(t)\cosh(\lambda x)$,
d) $w = f(t) + g(t)\sin(\lambda x + C)$.

10. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа–Ампера:
$w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + f(x)$.
Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)y + \psi(x)$ и $w = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x)$.

11. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа–Ампера:
$w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + f(x)y^k$.
Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)y^m + \psi(x)$.

12. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения стационарного трансзвукового газового потока:

$aw_x w_{xx} + w_{yy} = 0.$

Указание. Решения искать в виде

a) $w = f(y)x^m + g(y)$,

b) $w = f(y) + g(y)x^{3/2} + h(y)x^3$,

c) $w = f(y) + g(y)x + h(y)x^2 + p(y)x^3$.

13. Найти решение с обобщенным разделением переменных уравнения стационарного пограничного слоя с градиентом давления:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = \nu w_{yyy} + ae^{\beta x}.$

Указание. Решение искать в виде $w = f(x)e^{\lambda y} + g(x)e^{-\lambda y} + Ax + By + C$.

14. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения движения вязкой жидкости (следствие уравнений Навье–Стокса, w – функция тока):

$w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w$, где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = f(x)y + g(x)$,

b) $w = f(x)e^{\lambda y} + g(x)$

(в этих формулах независимые переменные x и y можно поменять местами).

Литература к разделу 2.3.2:

- Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // ЖВМиМФ, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.
- Полянин А. Д. Точные решения и преобразования уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя // Теор. основы хим. технол., 2001, т. 35, № 4, с. 339–348.
- Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // Доклады РАН, 2001, т. 380, № 4, с. 491–496.
- Полянин А. Д., Журов А. И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН, 2002, т. 382, № 5, с. 606–611.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists (Supplement B). – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

2.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования

2.4.1. Описание метода дифференцирования. Процедура решения функционально-дифференциальных уравнений вида (2.2.3)–(2.2.4) состоит из трех последовательных этапов.

1. Предположим, что $\Psi_k \not\equiv 0$. Поделим уравнение (2.2.3) на Ψ_k и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов:

$$\widetilde{\Phi}_1(X)\widetilde{\Psi}_1(Y) + \widetilde{\Phi}_2(X)\widetilde{\Psi}_2(Y) + \cdots + \widetilde{\Phi}_{k-1}(X)\widetilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0,$$

$$\widetilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \widetilde{\Psi}_j(Y) = [\Psi_j(Y)/\Psi_k(Y)]'_y.$$

Повторим аналогичную процедуру еще $(k-3)$ раз. В итоге приходим к двучленному уравнению с разделяющимися переменными

$$\widehat{\Phi}_1(X)\widehat{\Psi}_1(Y) + \widehat{\Phi}_2(X)\widehat{\Psi}_2(Y) = 0. \qquad (2.4.1)$$

Теперь надо рассмотреть две ситуации.

Невырожденный случай: $|\widehat{\Phi}_1(X)|+|\widehat{\Phi}_2(X)| \not\equiv 0$, $|\widehat{\Psi}_1(Y)|+|\widehat{\Psi}_2(Y)| \not\equiv$ $\not\equiv 0$. Тогда решения уравнения (32) определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\widehat{\Phi}_1(X) + C\widehat{\Phi}_2(X) = 0, \quad C\widehat{\Psi}_1(Y) - \widehat{\Psi}_2(Y) = 0,$$

где C – произвольная постоянная. Предельному случаю $C = \infty$ соответствуют уравнения $\widehat{\Phi}_2 = 0$, $\widehat{\Psi}_1 = 0$.

Два вырожденных случая:

$$\begin{aligned} &\widehat{\Phi}_1(X) \equiv 0,\ \ \widehat{\Phi}_2(X) \equiv 0 \implies \widehat{\Psi}_{1,2}(Y) \text{ – любые;} \\ &\widehat{\Psi}_1(Y) \equiv 0,\ \ \widehat{\Psi}_2(Y) \equiv 0 \implies \widehat{\Phi}_{1,2}(X) \text{ – любые.} \end{aligned}$$

2. Полученные решения двучленного уравнения (2.4.1) надо подставить в исходное функционально-дифференциальное уравнение (2.2.3)–(2.2.4), чтобы убрать "лишние" постоянные интегрирования [они появляются из-за того, что уравнение (2.4.1) получено из (2.2.3) путем дифференцирования].

3. Случай $\Psi_k \equiv 0$ надо рассмотреть отдельно (поскольку уравнение на первом этапе делилось на Ψ_k). Аналогично следует исследовать все другие случаи тождественного обращения в нуль функционалов, на которые делились промежуточные функционально-дифференциальные уравнения.

Замечание 1. Приведенное в разделе 2.2 функционально-дифференциальное уравнение (2.2.3)–(2.2.4) может не иметь решений.

Замечание 2. На каждом этапе число членов рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения можно понижать путем дифференцирования как по переменной y, так и по переменной x. На первом этапе, например, можно предположить, что $\Phi_k \not\equiv 0$. Поделив уравнение (2.2.3) на Φ_k и продифференцировав по x, получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов.

2.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных. Ниже даны конкретные примеры использования описанного метода для построения точных решений нелинейных уравнений с обобщенным разделением переменных.

Пример 13. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{2.4.2}$$

где $f(x)$ – произвольная функция. В частном случае $n = 3$, $f(x) = \text{const}$ оно совпадает с уравнением стационарного пограничного слоя на плоской пластине для функции тока.

Ищем точное решение уравнения (2.4.2) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x). \tag{2.4.3}$$

Подставив (2.4.3) в (2.4.2) и сократив на φ, получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\varphi'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - \chi'_x\psi''_{yy} = f(x)\psi^{(n)}_y. \tag{2.4.4}$$

Поделим обе части уравнения (2.4.4) на $f = f(x)$, затем продифференцируем по x. В результате имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - (\chi'_x/f)'_x\psi''_{yy} = 0. \tag{2.4.5}$$

Невырожденный случай. Разделяя в (2.4.5) переменные, получим

$$(\chi'_x/f)'_x = C_1(\varphi'_x/f)'_x,$$
$$(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - C_1\psi''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, приходим к следующим выражениям:

$$\psi(y) = C_4e^{\lambda y} - C_1, \quad \varphi(x)\text{– любая}, \quad \chi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\int f(x)\,dx + C_3, \tag{2.4.6}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, λ – постоянные интегрирования. Подставив (2.4.6) в (2.4.4), находим связь между константами: $C_2 = -\lambda^{n-2}$. Учитывая сказанное, а также формулы (2.4.3) и (2.4.6), в итоге имеем решение уравнения (2.4.2) вида (2.4.3):

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ – произвольная функция, C, λ – произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Из уравнения (2.4.5) имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x = 0, \qquad (\chi'_x/f)'_x = 0, \qquad \psi(y) \text{ – любая.} \tag{2.4.7}$$

Интегрируя дважды первые два уравнения (2.4.7), получим

$$\varphi(x) = C_1 \int f(x)\,dx + C_2, \qquad \chi(x) = C_3 \int f(x)\,dx + C_4, \tag{2.4.8}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Подставив выражения (2.4.8) в (2.4.4), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\psi = \psi(y)$:

$$C_1(\psi'_y)^2 - (C_1\psi + C_3)\psi''_{yy} = \psi^{(n)}_y. \tag{2.4.9}$$

Формулы (2.4.3), (2.4.8) и уравнение (2.4.9) описывают точное решение уравнения (2.4.2).

Пример 14. Двумерные стационарные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости сводятся к одному нелинейному уравнению четвертого порядка для функции тока [8]:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{2.4.10}$$

Будем искать точные решения уравнения (2.4.10) с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(x) + \psi(y). \tag{2.4.11}$$

Подставив (2.4.11) в (2.4.10), имеем

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}. \tag{2.4.12}$$

Продифференцируем обе части (2.4.12) по x и y. В результате получим

$$\psi''_{yy}\varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx}\psi''''_{yyyy} = 0. \tag{2.4.13}$$

Невырожденный случай. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ и $\psi''_{yy} \not\equiv 0$, разделяя в (2.4.13) переменные, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{2.4.14}$$
$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{2.4.15}$$

которые имеют решения различного вида в зависимости от величины константы интегрирования C.

1. Решение уравнений (2.4.14), (2.4.15) при $C = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 y^2 + B_4 y^3, \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

где A_k, B_k – произвольные постоянные ($k = 1, 2, 3, 4$). Подставив (2.4.16) в (2.4.12), находим значения постоянных:

$$\begin{array}{lll} A_4 = B_4 = 0, & A_n, B_n \text{– любые} & (n = 1, 2, 3); \\ A_k = 0, & B_k \text{– любые} & (k = 1, 2, 3, 4); \\ B_k = 0, & A_k \text{– любые} & (k = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

Первые два набора постоянных определяют два известных полиномиальных решения уравнения (2.4.10) второй и третьей степени относительно независимых переменных [8]:

$$\begin{aligned} w &= C_1 x^2 + C_2 x + C_3 y^2 + C_4 y + C_5, \\ w &= C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4, \end{aligned}$$

где C_1, …, C_5 – произвольные постоянные.

2. Решение уравнений (2.4.14), (2.4.15) при $C = \lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2 x + A_3 e^{\lambda x} + A_4 e^{-\lambda x}, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2 y + B_3 e^{\lambda y} + B_4 e^{-\lambda y}. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Подставим (2.4.17) в (2.4.12). После сокращения на λ^3 и приведения подобных членов получим

$$A_3(\nu\lambda - B_2)e^{\lambda x} + A_4(\nu\lambda + B_2)e^{-\lambda x} + B_3(\nu\lambda + A_2)e^{\lambda y} + B_4(\nu\lambda - A_2)e^{-\lambda y} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах нулю, находим значения постоянных:

$$\begin{array}{llll} A_3 = A_4 = B_3 = 0, & A_2 = \nu\lambda & & \text{(случай 1)}, \\ A_3 = B_3 = 0, & A_2 = \nu\lambda, & B_2 = -\nu\lambda & \text{(случай 2)}, \\ A_3 = B_4 = 0, & A_2 = -\nu\lambda, & B_2 = -\nu\lambda & \text{(случай 3)}. \end{array}$$

(Остальные постоянные могут принимать произвольные значения.) Указанные наборы постоянных определяют три решения уравнения (2.4.10) вида (2.4.11):

$$\begin{aligned} w &= C_1 e^{-\lambda y} + C_2 y + C_3 + \nu\lambda x, \\ w &= C_1 e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_2 e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3, \\ w &= C_1 e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_2 e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3, \end{aligned}$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \lambda$ – произвольные постоянные.

3. Решение уравнений (2.4.14), (2.4.15) при $C=-\lambda^2<0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=A_1+A_2x+A_3\cos(\lambda x)+A_4\sin(\lambda x),\\ \psi(y)&=B_1+B_2y+B_3\cos(\lambda y)+B_4\sin(\lambda y).\end{aligned}\qquad(2.4.18)$$

Подстановка выражений (2.4.18) в (2.4.12) не дает новых действительных решений.

Вырожденные случаи. В случаях $\varphi''_{xx}\equiv 0$ и $\psi''_{yy}\equiv 0$ уравнение (2.4.13) обращается в тождество соответственно для любой функции $\psi=\psi(y)$ и любой функции $\varphi=\varphi(x)$. Эти случаи надо рассматривать отдельно. Например, при $\varphi''_{xx}\equiv 0$ имеем $\varphi(x)=Ax+B$, где $A,\ B$ – любые. Подставив эту функцию в (2.4.12), приходим к уравнению $-A\psi'''_{yyy}=\nu\psi''''_{yyyy}$. Его общее решение описывается формулой $\psi(y)=C_1\exp(-Ay/\nu)+C_2y^2+C_3y+C_4$. В итоге имеем еще одно решение уравнения (2.4.10) вида (2.4.11):

$$w=C_1e^{-\lambda y}+C_2y^2+C_3y+C_4+\nu\lambda x\qquad(A=\nu\lambda,\ B=0),$$

которое с помощью группового анализа было получено В. В. Пухначевым [11].

Пример 15. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t}=aw\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+c.\qquad(2.4.19)$$

Ищем точные решения уравнения (2.4.19) с разделяющимися переменными вида

$$w=\varphi(t)+\psi(t)\theta(x).\qquad(2.4.20)$$

Подставив (2.4.20) в (2.4.19), после элементарных преобразований имеем

$$\varphi'_t-c+\psi'_t\theta=a\varphi\psi\theta''_{xx}+\psi^2[a\theta\theta''_{xx}+b(\theta'_x)^2].\qquad(2.4.21)$$

Поделим обе части этого выражения на ψ^2, а затем продифференцируем по t и x. В результате получим

$$\left(\frac{\psi'_t}{\psi^2}\right)'_t\theta'_x=a\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'_t\theta'''_{xxx}.$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (K – произвольная постоянная)

$$\theta'''_{xxx}=K\theta'_x,\qquad(2.4.22)$$

$$\left(\frac{\psi'_t}{\psi^2}\right)'_t=aK\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'_t.\qquad(2.4.23)$$

Общее решение уравнения (2.4.22) дается формулами

$$\theta = \begin{cases} A_1x^2 + A_2x + A_3 & \text{при } K = 0, \\ A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0, \\ A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0, \end{cases} \tag{2.4.24}$$

где A_1, A_2, A_3 – произвольные постоянные. Интегрируя уравнение (2.4.23), находим (B произвольна):

$$\begin{aligned} &\varphi(t) \text{ – любая}, \quad \psi = \frac{B}{t + C_1} && \text{при} \quad K = 0, \\ &\psi(t) \text{ – любая}, \quad \varphi = B\psi + \frac{1}{aK}\frac{\psi'_t}{\psi} && \text{при} \quad K \neq 0. \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

Подставив решения (2.4.24) и (2.4.25) в (2.4.21), можно “убрать” лишние константы и определить функции φ и ψ. В итоге получим:

1. Решение при $a \neq -b$, $a \neq -2b$:

$$w = \frac{c(a + 2b)}{2(a + b)}(t + C_1) + C_2(t + C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \\ - \frac{(x + C_3)^2}{2(a + 2b)(t + C_1)} \qquad (\text{для } K = 0),$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

2. Решение при $b = -a$:

$$w = \frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi(A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x}) \qquad (\text{для } K = \lambda^2 > 0),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4A_1A_2e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме. В частных случаях $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$ имеем $\psi = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}ac\lambda^2t^2 + C_2t\right)$.

3. Решение при $b = -a$:

$$w = -\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi[A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x)] \qquad (\text{для } K = -\lambda^2 < 0).$$

Функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4(A_1^2 + A_2^2)e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме.

Замечание. Структуру решений уравнения (2.4.19) другим методом описал V. A. Galaktionov [12].

Задачи к разделу 2.4:

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_x = aw_y^2 + bww_y + f(x)$,

b) $w_x = aw_y^n + f(x)w$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x) + \psi(x)\theta(y)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + b$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения конвективной теплопроводности:

$w_t = a(ww_x)_x + bw_x$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

4. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного волнового уравнения:

$w_{tt} = a(ww_x)_x$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения пограничного слоя с градиентом давления:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = \nu w_{yyy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = f(t)w_{xxx}$,

b) $w_t + aww_x + bw_{xtt} = 0$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = a\exp(\lambda w_{xx})$,

b) $w_{tt} = a\exp(\lambda w_{xx})$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(x)\theta(t) + g(x)$ (обе части уравнений надо прологарифмировать).

Литература к разделу 2.4:

- Полянин А. Д., Журов А. И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН, 2002, т. 382, № 5, с. 606–611.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

2.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

2.5.1. Предварительные замечания. Описание метода расщепления. При уменьшении числа членов функционально-дифференциального уравнения (2.2.3)–(2.2.4) с помощью дифференцирования возникают "лишние" постоянные интегрирования, которые надо убирать на заключительном этапе. Кроме того, порядок полученного уравнения может быть выше порядка исходного. Чтобы избежать этих трудностей, решение функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению билинейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простые задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

1. На первом этапе рассмотрим уравнение (2.2.3) как билинейное функциональное уравнение, зависящее от двух переменных X и Y, где $\Phi_n = \Phi_n(X)$ и $\Psi_n = \Psi_n(Y)$ – искомые величины ($n = 1, \ldots, k$).

Можно доказать (например, путем дифференцирования по схеме, описанной в разд. 2.4, совместно с индукцией), что билинейному функциональному уравнению (2.2.3) можно удовлетворить только в случае, когда величины $\Phi_n = \Phi_n(X)$ $(n = 1, \ldots, k)$ связаны линейными зависимостями. Учитывая это обстоятельство, нетрудно показать, что билинейное функциональное уравнение (2.2.3) имеет $(k-1)$ различных решений:

$$\begin{cases} \Phi_i(X) = C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \cdots + C_{i,k-m}\Phi_k(X), \\ \Psi_{m+j}(Y) = -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \cdots - C_{m,j}\Psi_m(Y), \\ i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k-m; \quad m = 1, 2, \ldots, k-1, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

где $C_{i,j}$ – произвольные постоянные. Функции $\Phi_{m+1}(X)$, ..., $\Phi_k(X)$, $\Psi_1(Y)$, ..., $\Psi_m(Y)$, стоящие в правых частях равенств (2.5.1), задаются произвольно. Видно, что при фиксированном m решение (2.5.1) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных.

2. На втором этапе последовательно подставляем функционалы $\Phi_i(X)$ и $\Psi_j(Y)$ из (2.2.4) во все решения (2.5.1). В результате получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений[2] для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(y)$. Решая эти системы, находим решения с обобщенным разделением переменных вида (2.2.1).

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (2.2.3) при фиксированном k является одним и тем же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.

Замечание 2. При фиксированном m решение (2.5.1) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных $C_{i,j}$. При заданном k наибольшее число произвольных постоянных имеют следующие решения:

Номер решения	*Число произв. постоянных*	*Условия на* k
$m = \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{4}k^2$	k – *четное число*,
$m = \frac{1}{2}(k \pm 1)$	$\frac{1}{4}(k^2 - 1)$	k – *нечетное число*.

Именно эти решения билинейного функционального уравнения чаще всего приводят к нетривиальным решениям с обобщенным разделением переменных в нелинейных уравнениях с частными производными.

Замечание 3. Билинейное функциональное уравнение (2.2.3) и его решения (2.5.1) играют важную роль в методе функционального разделения переменных (см. главу 3).

Для наглядности на Рис. 2 изображены основные этапы построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

[2]Обычно эти системы являются переопределенными.

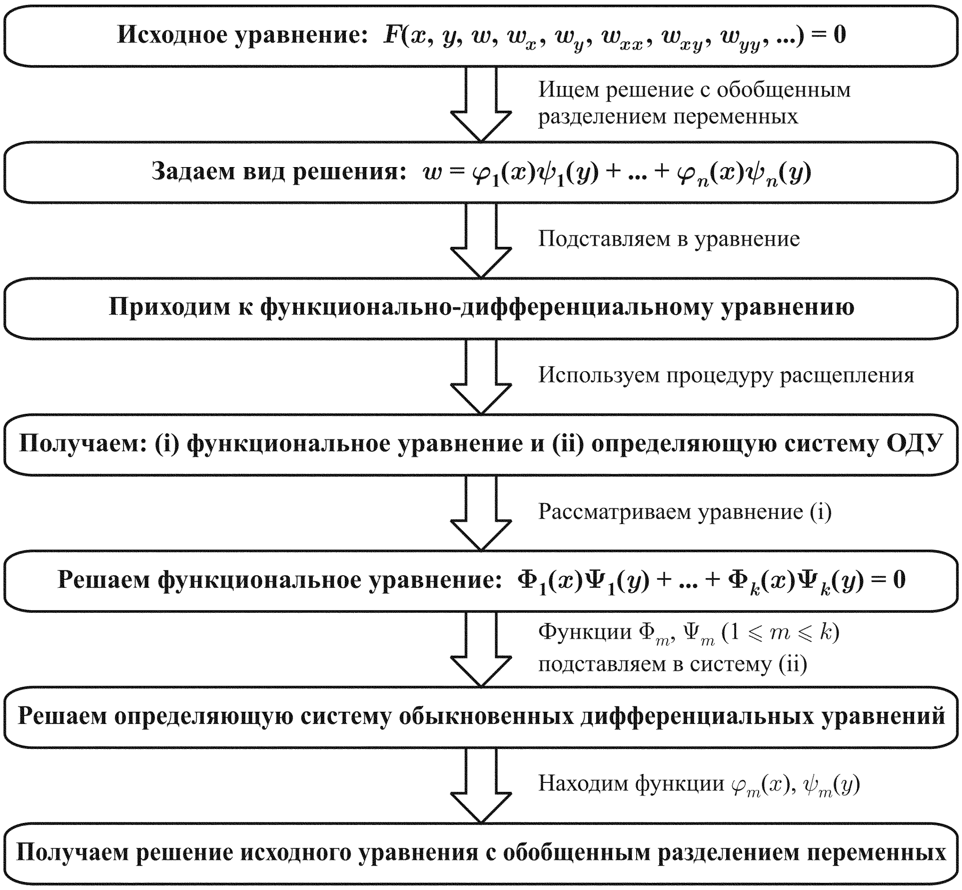

Рис. 2. Общая схема построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления. Использовано сокращение: ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения.

2.5.2. Решения простейших функциональных уравнений и их применение. Приведем решения нескольких простейших функциональных уравнений вида (2.2.3), которые понадобятся далее для решения конкретных нелинейных уравнений с частными производными.

1. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0 \tag{2.5.2}$$

где все Φ_i – функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i – функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

где A_1, A_2 – произвольные константы. Функции в правых частях равенств (2.5.3) считаются произвольными. В первом решении сделаны переобозначения: $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 = C_{2,1}$, а во втором решении – переобозначения: $A_1 = -1/C_{1,2}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,2}$ [сравни с решениями (2.5.1) при $k = 3$].

2. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{2.5.4}$$

где все Φ_i – функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i – функции другого аргумента, имеет решение

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, &&\Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4,\\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, &&\Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m [см. решение (2.5.1) при $k = 4$, $m = 2$, $C_{1,1} = A_1$, $C_{1,2} = A_2$, $C_{2,1} = A_3$, $C_{2,2} = A_4$]. Функции в правых частях равенств (2.5.5) считаются произвольными.

Уравнение (2.5.4) имеет также два других решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = A_1\Phi_4,\ \ \Phi_2 = A_2\Phi_4,\ \ \Phi_3 = A_3\Phi_4,\ \ \Psi_4 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3;\\ \Psi_1 = A_1\Psi_4,\ \ \Psi_2 = A_2\Psi_4,\ \ \Psi_3 = A_3\Psi_4,\ \ \Phi_4 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2 - A_3\Phi_3. \end{gathered} \tag{2.5.6}$$

В первом решении сделаны переобозначения: $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 = C_{2,1}$, $A_3 = C_{3,1}$, а во втором решении – переобозначения: $A_1 = -1/C_{1,3}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,3}$, $A_3 = C_{1,2}/C_{1,3}$.

3. Решения функционального уравнения

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 + \Phi_5\Psi_5 = 0, \tag{2.5.7}$$

можно найти по формулам (2.5.1) при $k = 5$. Покажем простой способ получения решений, который удобно использовать на практике, исходя непосредственно из уравнения (2.5.7). Будем считать, что функциональные коэффициенты Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются линейными комбинациями коэффициентов Φ_4 и Φ_5:

$$\Phi_1 = A_1\Phi_4 + B_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4 + B_2\Phi_5, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4 + B_3\Phi_5, \tag{2.5.8}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные. Подставим выражения (2.5.8) в (2.5.7) и соберем члены, пропорциональные Φ_4 и Φ_5:

$$(A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + A_3\Psi_3 + \Psi_4)\Phi_4 + (B_1\Psi_1 + B_2\Psi_2 + B_3\Psi_3 + \Psi_5)\Phi_5 = 0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3,\\ \Psi_5 &= -B_1\Psi_1 - B_2\Psi_2 - B_3\Psi_3. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Формулы (2.5.8), (2.5.9) дают одно из решений уравнения (2.5.7). Аналогичным образом находятся и другие решения.

Пример 16. Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(t)w + g(t), \qquad (2.5.10)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – произвольные функции.

Ищем решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t) + \chi(t). \qquad (2.5.11)$$

Подставив (2.5.11) в (2.5.10), после элементарных операций получим

$$a\psi^2(\varphi\varphi'_x)'_x + a\psi\chi\varphi''_{xx} + (f\psi - \psi''_{tt})\varphi + f\chi + g - \chi''_{tt} = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде функционального уравнения (2.5.4), где

$$\begin{array}{llll} \Phi_1 = (\varphi\varphi'_x)'_x, & \Phi_2 = \varphi''_{xx}, & \Phi_3 = \varphi, & \Phi_4 = 1, \\ \Psi_1 = a\psi^2, & \Psi_2 = a\psi\chi, & \Psi_3 = f\psi - \psi''_{tt}, & \Psi_4 = f\chi + g - \chi''_{tt}. \end{array} \qquad (2.5.12)$$

Подставив в решение (2.5.5) выражения (2.5.12), получим переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $\chi = \chi(t)$:

$$\begin{cases} (\varphi\varphi'_x)'_x = A_1\varphi + A_2, \\ \varphi''_{xx} = A_3\varphi + A_4, \\ f\psi - \psi''_{tt} = -A_1 a\psi^2 - A_3 a\psi\chi, \\ f\chi + g - \chi''_{tt} = -A_2 a\psi^2 - A_4 a\psi\chi. \end{cases} \qquad (2.5.13)$$

Первые два уравнения (2.5.13) совместны только при

$$A_1 = 6B_2, \quad A_2 = B_1^2 - 4B_0B_2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 2B_2, \qquad (2.5.14)$$

где B_0, B_1, B_2 – произвольные постоянные, и имеют в этом случае решение

$$\varphi(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0. \qquad (2.5.15)$$

Подставив выражения для коэффициентов (2.5.14) в два последних уравнения (2.5.13), получим систему для определения функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$:

$$\begin{cases} \psi''_{tt} = 6aB_2\psi^2 + f(t)\psi, \\ \chi''_{tt} = [2aB_2\psi + f(t)]\chi + a(B_1^2 - 4B_0B_2)\psi^2 + g(t). \end{cases} \qquad (2.5.16)$$

Формулы (2.5.11), (2.5.15) и система (2.5.16) определяют точное решение уравнения (2.5.10) с обобщенным разделением переменных. Первое уравнение (2.5.16) решается независимо; оно линейно в случае $B_2 = 0$ и интегрируется в квадратурах при $f(t) = \mathrm{const}$. Второе уравнение (2.5.16) линейно относительно χ (при известном ψ).

При $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, $\chi \not\equiv 0$ и произвольных f и g уравнение (2.5.10) не имеет других решений вида (2.5.11).

Замечание. Можно показать [12], что уравнение (2.5.10) имеет более общее решение вида

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t), \qquad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x, \tag{2.5.17}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи обозначают производные по t)

$$\begin{cases} \psi_1'' = 6a\psi_1^2 + f(t)\psi_1, \\ \psi_2'' = [6a\psi_1 + f(t)]\psi_2, \\ \psi_3'' = [2a\psi_1 + f(t)]\psi_3 + a\psi_2^2 + g(t). \end{cases} \tag{2.5.18}$$

Второе уравнение (2.5.18) имеет частное решение $\psi_2 = \psi_1$. Поэтому его общее решение можно записать в виде [13]

$$\psi_2 = C_1\psi_1 + C_2\psi_1 \int \frac{dt}{\psi_1^2}.$$

Частному случаю $C_2 = 0$ отвечает решение, полученное в примере 7.

<u>**Пример 17**</u>. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \tag{2.5.19}$$

которое встречается в гидродинамике.

Ищем точные решения уравнения (2.5.19) вида

$$w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{2.5.20}$$

Подставив (2.5.20) в (2.5.19), имеем

$$\varphi_t'\theta_x' - \varphi\psi\theta_{xx}'' + \varphi^2\bigl[(\theta_x')^2 - \theta\theta_{xx}''\bigr] - \nu\varphi\theta_{xxx}''' = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к функциональному уравнению (2.5.4), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \varphi_t', \;\; \Phi_2 = \varphi\psi, \quad\;\; \Phi_3 = \varphi^2, \qquad\qquad\quad \Phi_4 = \nu\varphi, \\ &\Psi_1 = \theta_x', \;\; \Psi_2 = -\theta_{xx}'', \;\; \Psi_3 = (\theta_x')^2 - \theta\theta_{xx}'', \;\; \Psi_4 = -\theta_{xxx}'''. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Подставив эти выражения в (2.5.5), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, \\ \varphi\psi = A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi, \\ (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} = -A_1\theta'_x + A_3\theta''_{xx}, \\ \theta'''_{xxx} = A_2\theta'_x - A_4\theta''_{xx}. \end{cases} \tag{2.5.22}$$

Можно показать, что два последних уравнения (2.5.22) имеют совместные решения только при линейной связи между функцией θ и ее производной:

$$\theta'_x = B_1\theta + B_2. \tag{2.5.23}$$

Шесть постоянных $B_1,\ B_2,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ должны удовлетворять трем условиям:

$$\begin{aligned} &B_1(A_1 + B_2 - A_3B_1) = 0, \\ &B_2(A_1 + B_2 - A_3B_1) = 0, \\ &B_1^2 + A_4B_1 - A_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Интегрируя уравнение (2.5.23), получим

$$\theta = \begin{cases} B_3\exp(B_1x) - \dfrac{B_2}{B_1} & \text{при } B_1 \neq 0, \\ B_2x + B_3 & \text{при } B_1 = 0, \end{cases} \tag{2.5.25}$$

где B_3 – произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (2.5.22) находим функции φ и ψ:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{A_2\nu}{C\exp(-A_2\nu t) - A_1} & \text{при } A_2 \neq 0, \\ -\dfrac{1}{A_1t + C} & \text{при } A_2 = 0, \end{cases} \qquad \psi = A_3\varphi + A_4\nu, \tag{2.5.26}$$

где C – произвольная постоянная.

Формулы (2.5.25), (2.5.26) и соотношения (2.5.24) позволяют найти следующие решения уравнения (2.5.19) вида (2.5.20):

$$w = \frac{x + C_1}{t + C_2} + C_3 \qquad \text{при}\quad A_2 = B_1 = 0,\ B_2 = -A_1;$$

$$w = \frac{C_1e^{-\lambda x} + 1}{\lambda t + C_2} + \nu\lambda \qquad \text{при}\quad A_2 = 0, B_1 = -A_4, B_2 = -A_1 - A_3A_4;$$

$$w = C_1e^{-\lambda(x+\beta\nu t)} + \nu(\lambda + \beta) \qquad \text{при}\quad A_1 = A_3 = B_2 = 0,\ A_2 = B_1^2 + A_4B_1;$$

$$w = \frac{\nu\beta + C_1e^{-\lambda x}}{1 + C_2e^{-\nu\lambda\beta t}} + \nu(\lambda - \beta) \qquad \text{при}\quad A_1 = A_3B_1 - B_2,\ A_2 = B_1^2 + A_4B_1,$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \beta,\ \lambda$ – произвольные постоянные (их можно выразить через $A_k,\ B_k$).

Исследование второго вырожденного решения (2.5.6) функционального уравнения (2.5.4) с учетом (2.5.21) приводит к двум решениям дифференциального уравнения (2.5.19):

$$w = \frac{x}{t+C} + \psi(t),$$
$$w = \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi_t'(t)}{\lambda\varphi(t)} + \nu\lambda,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – произвольные функции, $C,\ \lambda$ – произвольные постоянные.

Пример 18. Рассмотрим уравнение с экспоненциальной нелинейностью по старшей производной:

$$w_t = f(x)\exp(aw_{xx}). \tag{2.5.27}$$

Ищем точные решения вида

$$w = \varphi(x) + \psi(x)\theta(t). \tag{2.5.28}$$

Подставим (2.5.28) в (2.5.27), поделим обе части полученного выражения на $f(x)$, а затем прологарифмируем. Считая $\psi/f > 0$, после элементарных преобразований имеем

$$a\varphi''_{xx} - \ln(\psi/f) + a\theta\psi''_{xx} - \ln\theta'_t = 0. \tag{2.5.29}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно записать в виде (2.5.2), положив

$$\Phi_1 = a\varphi''_{xx} - \ln(\psi/f),\ \ \Phi_2 = \psi''_{xx},\ \ \Phi_3 = 1,\ \ \Psi_1 = 1,\ \ \Psi_2 = a\theta,\ \ \Psi_3 = -\ln\theta'_t.$$

Подставив эти выражения в первое решение (2.5.3), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Phi_1 = a\varphi''_{xx} - \ln(\psi/f) = A_1, \quad \psi''_{xx} = A_2, \quad \ln\theta'_t = A_1 + A_2 a\theta.$$

Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2a}A_1x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)\ln\frac{\psi(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
\psi(x) &= \frac{1}{2}A_2x^2 + C_1x + C_2,\\
\theta(t) &= -\frac{1}{A_2a}\ln\bigl(C_5 - A_2ae^{A_1}t\bigr).
\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Формулы (2.5.28), (2.5.30) описывают точное решение уравнения (2.5.27).

Задачи к разделу 2.5:

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений тепло- и массопереноса:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
d) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
e) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$.
Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных волновых уравнений:

a) $w_{tt} = a(ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw$,
d) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw^2$,
e) $w_{tt} + aw_t = b(ww_x)_x$.
Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка:

$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = f(t)w_{xxx}$,
Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений пограничного слоя степенной жидкости:

a) $w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = a(w_{yy})^n w_{yyy}$,
b) $w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = a(w_{yy})^n w_{yyy} + f(x)$.
Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$.

5. Найти решения с аддитивным разделением переменных нелинейных уравнений четвертого порядка, которые встречаются в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости:

a) $w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w$,
b) $w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w + f(y)$,
где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = a\exp[f(x)w_{xx}]$,
b) $w_t = a\exp[f(t)w_{xx}]$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\theta(t) + \psi(x)$ (обе части уравнений надо прологарифмировать).

Литература к разделу 2.4:

- Розендорн Е. Р. Некоторые классы частных решений уравнения $z_{xx}z_{yy} + a\nabla z = 0$ и их приложения в задачах метеорологии // Вестник МГУ, Сер. 1 (математика и механика), 1984, № 2, с. 56–58.
- Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с обобщенным разделением переменных // Доклады РАН, 2001, т. 380, № 4, с. 491–496.
- Полянин А. Д., Журов А. И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН, 2002, т. 382, № 5, с. 606–611.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

2.6. Метод Титова–Галактионова

2.6.1. Описание метода. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного оператора. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F[w], \tag{2.6.1}$$

где $F[w]$ – нелинейный дифференциальный оператор вида

$$F[w] \equiv F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right). \tag{2.6.2}$$

Определение. Конечномерное линейное подпространство

$$\mathcal{L}_k = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\}, \tag{2.6.3}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации линейно-независимых функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$, называется инвариантным относительно оператора F, если $F[\mathcal{L}_k] \subseteq \mathcal{L}_k$. Это означает, что существуют функции $f_1, \ldots, f_k$, такие что

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x) \tag{2.6.4}$$

для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$.

Пусть линейное подпространство (2.6.3) инвариантно относительно оператора F. Тогда уравнение (2.6.1) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{2.6.5}$$

где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{2.6.6}$$

Здесь штрих обозначает производную по t.

Следующий пример иллюстрирует описанный метод построения решений с обобщенным разделением переменных.

Пример 19. Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + kw^2 + bw + c. \tag{2.6.7}$$

Покажем, что при $k > 0$ дифференциальный оператор $F[w] = aw_{xx}+(w_x)^2+kw^2+bw+c$ (определяющий правую часть уравнения) имеет двумерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_2 = \{1, \cos(x\sqrt{k}\,)\}$. Действительно, для произвольных C_1 и C_2 справедливо равенство

$$F\big[C_1 + C_2\cos(x\sqrt{k}\,)\big] = k(C_1^2+C_2^2)+bC_1+c+C_2(2kC_1-ak+b)\cos(x\sqrt{k}\,).$$

Поэтому уравнение (2.6.7) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(x\sqrt{k}\,), \tag{2.6.8}$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1' &= k(\psi_1^2 + \psi_2^2) + b\psi_1 + c, \\ \psi_2' &= \psi_2(2k\psi_1 - ak + b). \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Замечание 1. При $k > 0$ дифференциальный оператор $F[w]$ имеет трехмерное инвариантное подпространство
$\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(x\sqrt{k}\,), \cos(x\sqrt{k}\,)\}$.

Замечание 2. При $k < 0$ дифференциальный оператор $F[w]$ имеет трехмерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(x\sqrt{k}\,), \operatorname{ch}(x\sqrt{k}\,)\}$.

Замечание 3. Более общее уравнение (2.6.7), где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ – произвольные функции и $k = \text{const} < 0$, также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (2.6.8), где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6.9).

2.6.2. Некоторые обобщения. Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение вида

$$L_1[w] = L_2[U], \qquad U = F[w], \tag{2.6.10}$$

где $L_1[w]$ и $L_2[U]$ – линейные дифференциальные операторы по переменной t вида

$$L_1[w] \equiv \sum_{i=0}^{m_1} a_i(t)\frac{\partial^i w}{\partial t^i}, \qquad L_2[U] \equiv \sum_{j=0}^{m_2} b_j(t)\frac{\partial^j U}{\partial t^j}, \tag{2.6.11}$$

а $F[w]$ – нелинейный дифференциальный оператор по переменной x

$$F[w] \equiv F\left(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right), \tag{2.6.12}$$

который может зависеть параметрическим образом от t.

Пусть линейное подпространство (2.6.3) инвариантно относительно оператора F, т. е. для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$ имеет место равенство

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(t, C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x). \tag{2.6.13}$$

Тогда уравнение (2.6.10) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида (2.6.5), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1\big[\psi_i(t)\big] = L_2\big[f_i(t, \psi_1, \ldots, \psi_k)\big], \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{2.6.14}$$

Пример 20. Рассмотрим уравнение

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.6.15}$$

которое при $a_2(t) = k_2$, $a_1(t) = k_1/t$ используется для описания трансзвуковых газовых течений (t играет роль пространственной переменной).

Уравнение (2.6.15) является частным случаем уравнения (2.6.10), где $L_1[w] = a_2(t)w_{tt} + a_1(t)w_t$, $L_2[U] = U$, $F[w] = w_x w_{xx}$. Можно показать, что нелинейный дифференциальный оператор $F[w]$ допускает трехмерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$. Поэтому уравнение (2.6.15) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x^{3/2} + \psi_3(t)x^3,$$

где функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' = \dfrac{9}{8}\psi_2^2, \\ a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' = \dfrac{45}{4}\psi_2\psi_3, \\ a_2(t)\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' = 18\psi_3^2. \end{cases}$$

Замечание. Оператор $F[w]$ допускает также четырехмерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$, которому соответствует решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3.$$

См. также пример 21 при $a_0(t) = 0$, $k = 1$, $n = 2$.

Пример 21. Рассмотрим более общее уравнение n-го порядка

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} + a_0(t)w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^n w}{\partial x^n}. \tag{2.6.16}$$

Нелинейный оператор $F[w] = (w_x)^k w_x^{(n)}$ допускает двумерное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $(\varphi_x')^k \varphi_x^{(n)} = \varphi$. Поэтому уравнение (2.6.16) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются двумя независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' + a_0(t)\psi_1 = 0,$$
$$a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' + a_0(t)\psi_2 = \psi_2^{k+1}.$$

Много других примеров подобного рода, а также некоторые детализации и обобщения описываемого метода, можно найти в цитируемой ниже литературе. Основные трудности, возникающие при использовании метода Титова – Галактионова для построения точных решений конкретных уравнений, состоят в отыскании линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора. Кроме того, исходное уравнение может отличаться от уравнений рассматриваемого типа (не всегда можно выделить подходящий нелинейный оператор $F[w]$).

Задачи к разделу 2.6:

1. Показать, что нелинейный дифференциальный оператор

$$F[w] = (a_1 w_x + a_2 w + a_3)w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w_x + a_6 w + a_7$$

допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$. Используя это обстоятельство, найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

$w_t = aww_{xx}$,
$w_t = aww_{xx} + b$,
$w_t = aww_{xx} + bw$,
$w_t = aww_{xx} + bw_x$,
$w_t = a(ww_x)_x$,
$w_t = a(ww_x)_x + b$,
$w_t = a(ww_x)_x + bw$,
$w_t = a(ww_x)_x + bw_x$,
$w_{tt} = aww_{xx}$,
$w_{tt} = a(ww_x)_x$,
$w_{tt} = aww_{xx} + b$,
$w_{tt} = a(ww_x)_x + b$.

2. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$$F[w] = (a_1 w_x + a_2 w + a_3)w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w_x + a_6 w^2 + a_7 w + a_8$$

допускает инвариантные линейные подпространства

a) $\mathcal{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,
b) $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,
c) $\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$?

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = w_{xx} + aw_x^2 + bw^2$,
b) $w_t = ww_{xx} + bw^2 + c$,
c) $w_t = ww_{xx} + bw_x^2 + c$,
d) $w_t = (ww_x)_x + aw^2 + b$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.

4. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$$F[w] = a_1 w_{xx}^2 + a_2 w_x w_{xx} + a_3 ww_{xx} + a_4 w_x^2 + {} \\ + a_5 ww_x + a_6 w^2 + a_7 w_x + a_8 w + a_9$$

допускает инвариантные линейные подпространства

a) $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$,
b) $\mathcal{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$,
c) $\mathcal{L}_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$,
d) $\mathcal{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,
e) $\mathcal{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,

f) $\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$,
g) $\mathcal{L}_3 = \{1, \mathrm{ch}(\lambda x), \mathrm{ch}(2\lambda x)\}$,
h) $\mathcal{L}_3 = \{1, \cos(\lambda x), \cos(2\lambda x)\}$,
i) $\mathcal{L}_2 = \{1, f(x)\}$?

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:
a) $w_t = a w_{xx}^2$,
b) $w_{tt} = a w_{xx}^2 + b$,
c) $w_t = w_{xx}^2 + w^2$,
d) $w_t = w w_{xx} - \frac{3}{4} w_x^2 + \frac{4}{3} w^2$.
Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи из пунктов c), d), f) и h).

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений с кубической нелинейностью:
a) $w_t = 2w^2 w_{xx} - w w_x^2$,
b) $w_{tt} = 2w^2 w_{xx} - w w_x^2 + a$.
Указание. Показать, что нелинейный оператор $F[w] = 2w^2 w_{xx} - w w_x^2$ допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

Литература к разделу 2.6:

- Титов С. С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики // Аэродинамика. – Саратов: Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.
- Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // ЖВМиМФ, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.
- Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, Vol. 125A, №2, pp. 225–246.
- Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear equations with quadratic nonlinearities // Differential and Integral Equations, 1995, Vol. 8, № 8, pp. 1997–2024.
- Svirshchevskii S. R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations // Phys. Lett. A, 1995, Vol. 199, pp. 344–348.
- Svirshchevskii S. R. Invariant linear subspaces and exact solutions of nonlinear evolutions equations // Nonlinear Math. Phys., 1996, Vol. 3, № 1–2, pp. 164–169.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

Глава 3. Метод функционального разделения переменных

3.1. Структура решений с функциональным разделением переменных

Нелинейные уравнения, полученные заменой $w = F(z)$ из линейных уравнений математической физики с разделяющимися переменными для функции $z = z(x, y)$, будут иметь точные решения вида

$$w(x, y) = F(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y). \tag{3.1.1}$$

Многие нелинейные уравнения с частными производными, которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (3.1.1). Такие решения будем называть **решениями с функциональным разделением переменных**. В общем случае функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, $F(z)$ в (3.1.1) заранее не известны и подлежат определению.

Основная идея метода: дифференциально-функциональное уравнение, полученное в результате подстановки выражения (3.1.1) в рассматриваемое уравнение с частными производными, надо привести к стандартному билинейному функциональному уравнению (2.2.3) из разд. 2.2 [или к дифференциально-функциональному уравнению вида (2.2.3)–(2.2.4) из разд. 2.2].

Замечание 1. При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ и $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $F(\varphi(x)\psi(y)) = F_1(\varphi_1(x) + \psi_1(y))$, где $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(y) = \ln\psi(y)$.

Замечание 2. При построении решений с функциональном разделением переменных вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ считается, что $\varphi \neq \text{const}$ и $\psi \neq \text{const}$.

Замечание 3. Функция $F(z)$ может описываться как одним обыкновенным дифференциальным уравнением, так и переопределенной системой уравнений (при анализе надо учитывать обе эти возможности).

3.2. Решения с функциональным разделением переменных специального вида

3.2.1. Решения типа обобщенной бегущей волны. Примеры. Для упрощения анализа некоторые функции в (3.1.1) можно задавать априорно, а другие определять в процессе решения. Такие решения будем называть **решениями с функциональным разделением переменных специального вида**.

Ниже указаны наиболее простые решения $w = F(z)$ с функциональным разделением переменных специального вида (x и y можно поменять местами):

$z = \psi_1(y)x + \psi_2(y)$ (аргумент z линеен по x);

$z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y)$ (аргумент z квадратичен по x);

$z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y)$ (аргумент z содержит экспоненциальную функцию x).

Первое решение будем называть решением типа обобщенной бегущей волны. В последней формуле вместо $e^{\lambda x}$ могут стоять также функции $\operatorname{ch}(ax+b)$, $\operatorname{sh}(ax+b)$, $\sin(ax+b)$.

После подстановки любого из указанных выражений в рассматриваемое уравнение надо исключить x с помощью выражения для z. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами y и z. Его решение в ряде случаев можно получить при помощи методов, описанных в главе 2.

Для наглядности общая схема построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений изображена на Рис. 3 (см. на следующей странице).

Замечание 1. Алгоритм, изображенный на Рис. 3, может использоваться также для построения точных решений более общего вида[3] $w = \sigma(t)F(z) + \varphi_1(t)x + \psi_1(t)$, где $z = \varphi_2(t)x + \psi_2(t)$.

Замечание 2. Решение с обобщенным разделением переменных (см. главу 2) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $F(z) = z$.

Рассмотрим примеры нелинейных уравнений, допускающих точные решения с функциональным разделением переменных частного вида, когда сложный аргумент z линеен или квадратичен по одной из независимых переменных.

Пример 22. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{3.2.1}$$

Ищем точные решения уравнения (3.2.1) с функциональным разделением переменных специального вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{3.2.2}$$

[3]Указанное решение содержит в себе, как частные случаи, все наиболее распространенные решения: решения типа бегущей волны, автомодельные решения, обобщенные автомодельные решения, решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (а также многие инвариантные решения).

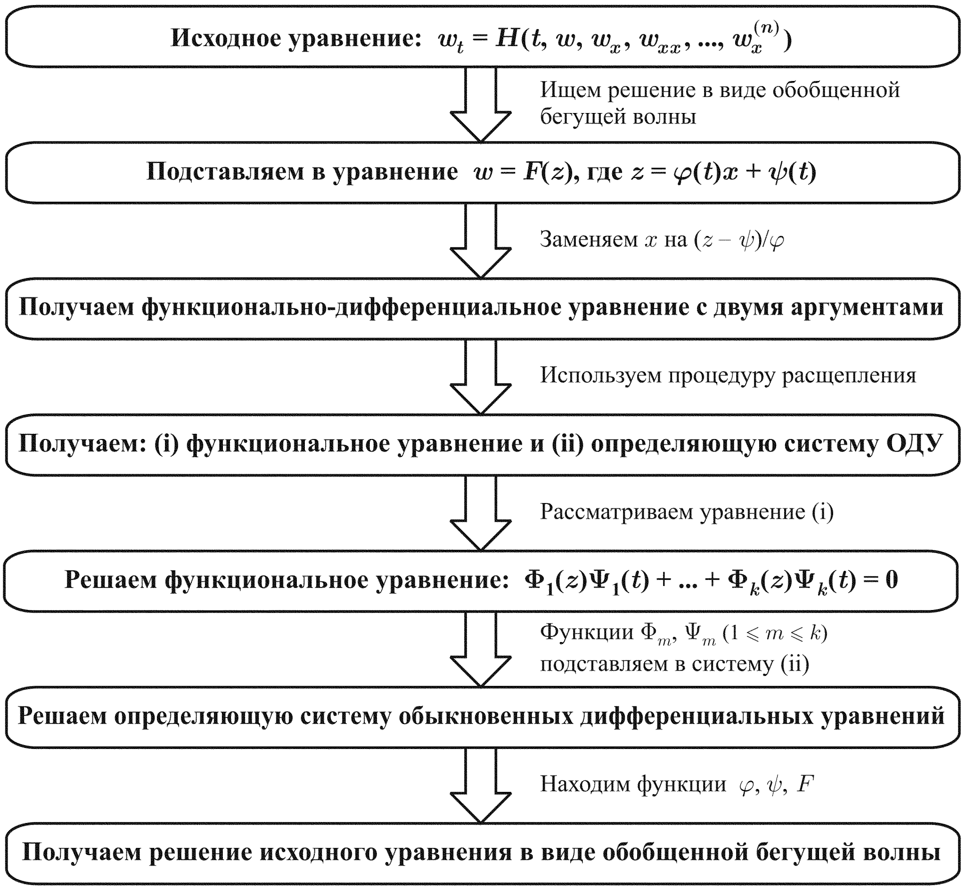

Рис. 3. Алгоритм построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений. Использовано сокращение: ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения.

Требуется найти функции $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и правую часть уравнения $\mathcal{F}(w)$.

Подставив выражение (3.2.2) в (3.2.1) и поделив на w'_z, имеем

$$\varphi'_t x + \psi'_t = \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \tag{3.2.3}$$

Выразим в (3.2.2) x через z и подставим его в (3.2.3). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными t и z:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi} z + \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = 0,$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение (2.5.4) из разд. 2.5, где

$$\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, \quad \Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = 1,$$

$$\Psi_1 = 1, \qquad \Psi_2 = z, \qquad \Psi_3 = \frac{w''_{zz}}{w'_z}, \quad \Psi_4 = \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (2.5.5) из разд. 2.5, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -\psi'_t + \dfrac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2, & -\dfrac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4, \\ \dfrac{w''_{zz}}{w'_z} = -A_1 - A_3 z, & \dfrac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = -A_2 - A_4 z, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ – произвольные постоянные.

Случай 1. При $A_4 \neq 0$ решение системы (3.2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = \pm\left(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\right)^{-1/2}, \\ &\psi(t) = -\varphi(t)\left[A_1\int\varphi(t)\,dt + A_2\int\frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right], \\ &w(z) = C_3\int\exp\left(-\frac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\right)dz + C_4, \\ &\mathcal{F}(w) = -C_3(A_4 z + A_2)\exp\left(-\frac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\right), \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ – произвольные постоянные. Зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ задается двумя последними выражениями в параметрическом виде (z играет роль параметра). При $A_3 \neq 0$ функцию источника $\mathcal{F}(w)$ в (3.2.5) можно выразить через элементарные функции и функцию, обратную интегралу вероятностей.

В частном случае $A_3 = C_4 = 0,\ A_1 = -1,\ C_3 = 1$ функцию источника можно представить в явном виде:

$$\mathcal{F}(w) = -w(A_4\ln w + A_2). \tag{3.2.6}$$

Решение уравнения (3.2.1) в этом случае можно получить также с помощью группового анализа [14].

Случай 2. При $A_4 = 0$ решения первых двух уравнений (3.2.4) имеют вид

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3 t + C_1}}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3 t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3 t + C_1),$$

а решения остальных уравнений описываются двумя последними формулами (3.2.5) при $A_4 = 0$.

Пример 23. Рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(t)\mathcal{F}(w).$$

содержащее произвольные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Решения ищем в виде (3.2.2). В этом случае в системе (3.2.4) изменятся только первые два уравнения, а функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ будут описываться двумя последними формулами (3.2.5).

Пример 24. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{G}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \mathcal{F}(w)$$

также имеет решения вида (3.2.2). Искомые величины описываются системой (3.2.4), в которой w''_{zz} надо заменить на $[\mathcal{G}(w)w'_z]'_z$. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (3.2.5). Одна из двух функций $\mathcal{G}(w)$ или $\mathcal{F}(w)$ может быть задана произвольно, а другая находится в процессе решения. В частном случае $\mathcal{F}(w) = \mathrm{const}$ можно получить $\mathcal{G}(w) = C_1e^{2kw} + (C_2w + C_3)e^{kw}$.

Пример 25. Аналогичным образом рассматривается нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w).$$

Как и ранее, решения ищутся в виде (3.2.2). В этом случае в системе (3.2.4) величины φ^2 и w''_{zz} надо заменить соответственно на φ^n и $w_z^{(n)}$. В частности, при $A_3 = 0$ помимо уравнения с логарифмической нелинейностью вида (3.2.6) получим и другие уравнения.

Пример 26. Для нелинейного уравнения n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x},$$

поиск точного решения вида (3.2.2) приводит к следующей системе уравнений для определения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $w(z)$, $\mathcal{F}(w)$:

$$\begin{aligned} &-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^n + A_2\varphi, && -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4\varphi, \\ &\frac{w_z^{(n)}}{w'_z} = -A_1 - A_3z, && \mathcal{F}(w) = -A_2 - A_4z, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – произвольные постоянные.

При $n = 3$, положив $A_3 = 0$ и $A_1 > 0$, в частности получим $\mathcal{F}(w) = -A_2 - A_4\arcsin(kw)$.

Пример 27. Можно искать решения уравнения (3.2.1) с квадратичной зависимостью сложного аргумента по x:

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t). \tag{3.2.7}$$

Подставим это выражение в (3.2.1). В результате приходим к уравнению, которое содержит члены с x^2 (и не содержит членов, линейных по x). Исключив из полученного уравнения x^2 с помощью (3.2.7), имеем

$$-\psi_t' + \frac{\psi}{\varphi}\varphi_t' + 2\varphi - \frac{\varphi_t'}{\varphi}z + 4\varphi z\frac{w_{zz}''}{w_z'} - 4\varphi\psi\frac{w_{zz}''}{w_z'} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w_z'} = 0.$$

Для решения этого функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами применим метод расщепления, описанный в разд. 2.5. Можно показать, что уравнение (3.2.1) с логарифмической нелинейностью (3.2.6) имеет решение вида (3.2.7).

Пример 28. Рассмотрим нелинейное уравнение m-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{n-1}\frac{\partial^m w}{\partial y^m},$$

которое в частном случае $f(x) = \text{const}$, $m = 3$ описывает пограничный слой степенно́й жидкости на плоской пластине (w – функция тока, x и y – продольная и поперечная координаты, n – реологический параметр; значение $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости).

Поиск точного решения вида

$$w = w(z), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x)$$

приводит к равенству $\varphi_x'(w_z')^2 = f(x)\varphi^{2n+m-3}(w_{zz}'')^{n-1}w_z^{(m)}$, которое не зависит от функции ψ. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\varphi(x) = \left[\int f(x)\,dx + C\right]^{\frac{1}{4-2n-m}}, \quad \psi(x) \text{ – произвольна,}$$

а функция $w = w(z)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения $(w_z')^2 = (4 - 2n - m)(w_{zz}'')^{n-1}w_z^{(m)}$.

Пример 29. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{n+1} w}{\partial x^n \partial y} = f(w). \tag{3.2.8}$$

Ищем решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(y)x + \psi(y). \tag{3.2.9}$$

Подставим (3.2.9) в (3.2.8), а затем исключим x с помощью выражения для z. В результате после деления на $w_z^{(n+1)}$ и перегруппировки членов получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами:

$$\varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y + \varphi^{n-1}\varphi'_y\left(z + n\frac{w_z^{(n)}}{w_z^{(n+1)}}\right) - \frac{f(w)}{w_z^{(n+1)}} = 0. \qquad (3.2.10)$$

Оно сводится к трехчленному билинейному функциональному уравнению, которое имеет два решения (см. разд. 2.5). В соответствии с этим рассмотрим два случая.

1. В первом случае выражение в круглых скобках и последнюю дробь в (3.2.10) приравниваем к константам. В результате после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
&(z - C_1)w_z^{(n+1)} + nw_z^{(n)} = 0,\\
&C_2w_z^{(n+1)} - f(w) = 0,\\
&\varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y + C_1\varphi^{n-1}\varphi'_y - C_2 = 0,
\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 0$ (это соответствует сдвигу по z и переобозначению функции ψ) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}
&w = A\ln|z| + B_{n-1}z^{n-1} + \cdots + B_1z + B_0,\\
&f(w) = AC_2n!(-1)^nz^{-n-1},\\
&\psi(y) = C_2\varphi(y)\int\frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}} + C_3\varphi(y),
\end{aligned} \qquad (3.2.11)$$

где A, B_m, C_3 – произвольные постоянные, $\varphi(y)$ – произвольная функция.

Первые две формулы в (3.2.11) дают параметрическое представление для функции $f(w)$. В частном случае при $B_{n-1} = \cdots = B_0 = 0$ после исключения z приходим к экспоненциальной зависимости

$$f(w) = \alpha e^{\beta w}, \qquad \alpha = AC_2n!\,(-1)^n, \quad \beta = -(n+1)/A.$$

В силу (3.2.11) соответствующее решение уравнения (3.2.8) будет иметь функциональный произвол.

2. Во втором случае (3.2.10) распадается на три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{n-1}\varphi'_y = C_1,\\
&\varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y = C_2,\\
&(C_1z + C_2)w_z^{(n+1)} + C_1nw_z^{(n)} - f(w) = 0,
\end{aligned} \qquad (3.2.12)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Решения двух первых уравнений имеют вид

$$\varphi = (C_1 nt + C_3)^{1/n}, \qquad \psi = C_4 (C_1 nt + C_3)^{1/n} - \frac{C_2}{C_1}.$$

Эти формулы вместе с последним уравнением (3.2.12) дают автомодельное решение вида (3.2.9).

Задачи к разделу 3.2.1[4]:

1. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:
$w_t = f(w) w_x + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = w(z),\ \ z = \varphi(t) x + \psi(t)$,
b) $w = w(z),\ \ z = \varphi(x) t + \psi(x)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:
$w_t = f(w) w_x^2 + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = w(z),\ \ z = \varphi(t) x + \psi(t)$,
b) $w = w(z),\ \ z = \varphi(t) x^2 + \psi(t)$.

3. Подробно рассмотреть и проделать все необходимые выкладки в примерах 2–5.

4. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений:
a) $w_t = [f(w) w_x]_x + g(w) w_x$,
b) $w_t = [f(w) w_x]_x + g(w) w_x + h(w)$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t) x + \psi(t)$.

5. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:
$w_t = [f(w) w_x^n]_x + g(w)$.
Указание. Решение искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t) x + \psi(t)$.

6. Найти решения типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений третьего порядка:
a) $w_t = f(w) w_{xxx} + g(w)$,
b) $w_t = f(w) w_{xxx} + g(w) w_x$,
c) $w_t = [f(w) w_{xx}]_x + g(w)$,

[4]Ниже функции f, g, h подлежат определению.

d) $w_t = [f(w)w_{xx}]_x + g(w)w_x$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$,

c) $w_t = aw_{xx} + bxw_x + f(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

Литература к разделу 3.2.1:

- Полянин А. Д., Журов А. И. Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики // Доклады РАН, 1998, т. 360, № 5, с. 640–644.
- Полянин А. Д., Журов А. И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике // Доклады РАН, 2002, т. 382, № 5, с. 606–611.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists (Supplement B). – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

3.2.2. Решение путем сведения к уравнениям с квадратичной нелинейностью. В ряде случаев поиск решения в виде (3.1.1) удается провести в два этапа. Сначала ищется преобразование, сводящее исходное уравнение к уравнению с квадратичной (иногда степенно́й) нелинейностью. Затем решение полученного уравнения ищется методами, описанными в разд. 2.3–2.6.

Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удается получить с помощью подстановок вида $w = F(z)$. Наиболее распространенные подстановки имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&w = z^\lambda && \text{(для уравнений со степенной нелинейностью)},\\
&w = \lambda \ln z && \text{(для уравнений с экспоненциальной нелинейностью)},\\
&w = e^{\lambda z} && \text{(для уравнений с логарифмической нелинейностью)},
\end{aligned}
$$

где λ – постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида функции $F(z)$ в выражении (3.1.1).

Пример 30. Нелинейное уравнение теплопроводности с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w \ln w$$

заменой $w = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(t)z,$$

которое допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t),$$

где $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, а функции $\psi_k(t)$ описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Много нелинейных уравнений различного типа, сводящихся с помощью подходящих преобразований к уравнениям с квадратичной нелинейностью, описано в цитируемой ниже литературе.

Задачи к разделу 3.2.2:

1. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности со степенно́й нелинейностью:

a) $w_t = (w^k w_x)_x + aw^{1-k}$,

b) $w_t = (w^k w_x)_x + aw + bw^{1-k}$,

c) $w_t = (w^k w_x)_x + aw^{1+k} + b + cw^{1-k}$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $u = w^k$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с логарифмической нелинейностью:

a) $w_t = w_{xx} + aw\ln w + b$,

b) $w_t = w_{xx} + aw\ln^2 w$,

c) $w_t = w_{xx} + aw\ln^2 w + bw\ln w + cw$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $w = e^u$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с экспоненциальной нелинейностью:

a) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + a$,

b) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + a + be^{-\lambda w}$,

c) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + ae^{\lambda w} + b + ce^{-\lambda w}$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $u = e^{\lambda w}$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

Литература к разделу 3.2.2:

- Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // ЖВМиМФ, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

- Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // ЖВМиМФ, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.
- Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, Vol. 125A, №2, pp. 225–246.
- Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear equations with quadratic nonlinearities // Differential and Integral Equations, 1995, Vol. 8, № 8, pp. 1997–2024.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

3.3. Метод дифференцирования

3.3.1. Основные идеи метода. Редукция к уравнению стандартного вида. В общем случае подстановка выражения (3.1.1) в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными приводит к функционально-дифференциальному уравнению с тремя аргументами (первые два аргумента – x и y – обычные, а третий аргумент – z – сложный). Во многих случаях полученное уравнение методом дифференцирования удается свести к функционально-дифференциальному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y). Для решения уравнения с двумя аргументами используются методы, описанные в разд. 2.3–2.6.

3.3.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных. Рассмотрим конкретные примеры использования метода дифференцирования для построения точных решений нелинейных уравнений с функциональным разделением переменных.

Пример 31. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]. \tag{3.3.1}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{3.3.2}$$

Подставим (3.3.2) в (3.3.1). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение с тремя переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx}\mathcal{F}(w) + (\varphi'_x)^2 H(z), \tag{3.3.3}$$

где

$$H(z) = \mathcal{F}(w)\frac{w''_{zz}}{w'_z} + \mathcal{F}'_z(w), \qquad w = w(z). \tag{3.3.4}$$

Дифференцируя (3.3.3) по x, имеем

$$\varphi'''_{xxx}\mathcal{F}(w) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[\mathcal{F}'_z(w) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z = 0. \tag{3.3.5}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными можно рассматривать как функциональное уравнение (2.5.2) из разд. 2.5, которое имеет два различных решения. Поэтому надо рассмотреть два случая.

Случай 1. Решения функционально-дифференциального уравнения (3.3.5) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\mathcal{F}'_z + 2H = 2A_1\mathcal{F}, \qquad H'_z = A_2\mathcal{F},\\ \varphi'''_{xxx} + 2A_1\varphi'_x\varphi''_{xx} + A_2(\varphi'_x)^3 = 0,\end{gathered} \tag{3.3.6}$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные.

Первые два уравнения (19) линейны и не зависят от третьего уравнения. Их общее решение имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{F} = \begin{cases} e^{A_1 z}(B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) & \text{при } A_1^2 > 2A_2,\\ e^{A_1 z}(B_1 + B_2 z) & \text{при } A_1^2 = 2A_2,\\ e^{A_1 z}[B_1\sin(kz) + B_2\cos(kz)] & \text{при } A_1^2 < 2A_2,\end{cases}\\ H = A_1\mathcal{F} - \frac{1}{2}\mathcal{F}'_z, \qquad\qquad k = \sqrt{|A_1^2 - 2A_2|}.\end{gathered} \tag{3.3.7}$$

Подставим выражение для H из (3.3.7) в (3.3.4). Получим дифференциальное уравнение для определения функции $w = w(z)$. В результате интегрирования имеем

$$w = C_1 \int e^{A_1 z}|\mathcal{F}(z)|^{-3/2}dz + C_2, \tag{3.3.8}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Формула (3.3.7) для $\mathcal{F}$ вместе с выражением (3.3.8) задают зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ в параметрической форме.

Рассмотрим подробнее случай $A_2 = 0$ и $A_1 \neq 0$ $(k = |A_1|)$. Из формул (3.3.7) и (3.3.8) получим

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(z) = B_1 e^{2A_1 z} + B_2, \quad H = A_1 B_2,\\ w(z) = C_3(B_1 + B_2 e^{-2A_1 z})^{-1/2} + C_2 \quad (C_1 = A_1 B_2 C_3).\end{gathered} \tag{3.3.9}$$

Исключая z, имеем

$$\mathcal{F}(w) = \frac{B_2 C_3^2}{C_3^2 - B_1 w^2}. \tag{3.3.10}$$

Первый интеграл последнего уравнения (3.3.6) при $A_2 = 0$ имеет вид $\varphi''_{xx} + A_1(\varphi'_x)^2 = \mathrm{const}$, а его общее решение описывается формулами

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1}\ln\left[\frac{D_2}{D_1}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\bigl(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3\bigr)}\right] \qquad \text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 > 0;\\
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1}\ln\left[-\frac{D_2}{D_1}\frac{1}{\cos^2\bigl(A_1\sqrt{-D_2}\,x + D_3\bigr)}\right] \quad \text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 < 0;\\
&\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1}\ln\left[-\frac{D_2}{D_1}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\bigl(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3\bigr)}\right] \qquad \text{при} \quad D_1 < 0, \quad D_2 > 0,
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

где D_1, D_2, D_3 – постоянные интегрирования. Во всех трех случаях выполняются соотношения

$$(\varphi'_x) = D_1 e^{-2A_1\varphi} + D_2, \qquad \varphi''_{xx} = -A_1 D_1 e^{-2A_1\varphi}. \tag{3.3.12}$$

Подставим выражения (3.3.9) и (3.3.12) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (3.3.3). Учитывая вид переменной z (3.3.2), получим уравнение для функции $\psi = \psi(t)$:

$$\psi'_t = -A_1 B_1 D_1 e^{2A_1\psi} + A_1 B_2 D_2.$$

Интегрируя, находим решение

$$\psi(t) = \frac{1}{2A_1}\ln\frac{B_2 D_2}{D_4\exp(-2A_1^2 B_2 D_2 t) + B_1 D_1}, \tag{3.3.13}$$

где D_4 произвольная постоянная.

Формулы (3.3.2), (3.3.9) (для w), (3.3.11), (3.3.13) определяют три решения нелинейного уравнения (3.3.1) с функцией $\mathcal{F}(w)$ вида (3.3.10) [напомним, что эти решения соответствуют частному случаю $A_2 = 0$ в (3.3.7) и (3.3.8)].

Случай 2. Решения функционально-дифференциального уравнения (3.3.5) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\varphi'''_{xxx} = A_1(\varphi'_x)^3, \qquad \varphi'_x\varphi''_{xx} = A_2(\varphi'_x)^3,\\
&A_1\mathcal{F} + A_2(\mathcal{F}'_z + 2H) + H'_z = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Первые два уравнения (3.3.14) совместны в двух случаях:

$$\begin{aligned}
&A_1 = A_2 = 0 \implies \varphi(x) = B_1 x + B_2,\\
&A_1 = 2A_2^2 \qquad \implies \varphi(x) = -\frac{1}{A_2}\ln|B_1 x + B_2|.
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Первое решение в (3.3.15) в конечном итоге приводит к решению уравнения (3.3.1) типа бегущей волны $w = w(B_1 x + B_2 t)$, а второе решение – к автомодельному решению вида $w = \widetilde{w}(x^2/t)$. В этих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (3.3.1) произвольна.

Замечание. Более общее нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \mathcal{G}(w)$$

также имеет решение вида (3.3.2). Для искомых функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с тремя независимыми переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx}\mathcal{F}(w) + (\varphi'_x)^2 H(z) + \mathcal{G}(w)/w'_z,$$

где функция $H(z)$ определяется по формуле (3.3.4). Дифференцируя последнее равенство по x, получим

$$\varphi'''_{xxx}\mathcal{F}(w) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[\mathcal{F}'_z(w) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z + \varphi'_x[\mathcal{G}(w)/w'_z]'_z = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными можно трактовать как билинейное функциональное уравнение (2.5.4) из разд. 2.5 с $\Phi_1 = \varphi'''_{xxx}$, $\Phi_2 = \varphi'_x\varphi''_{xx}$, $\Phi_3 = (\varphi'_x)^3$, $\Phi_4 = \varphi'_x$.

Пример 32. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{F}(w). \qquad (3.3.16)$$

Ищем точные решения в виде

$$w = w(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(t). \qquad (3.3.17)$$

Подставив выражение (3.3.17) в (3.3.16), получим

$$\psi''_{tt} - \varphi''_{xx} + \left[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\right] g(z) = h(z), \qquad (3.3.18)$$

где

$$g(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad h(z) = \mathcal{F}\big(w(z)\big)/w'_z. \qquad (3.3.19)$$

Продифференцировав уравнение (3.3.18) сначала по t, а затем по x и разделив на $\psi'_t\varphi'_x$, имеем

$$2(\psi''_{tt} - \varphi''_{xx})\, g'_z + \left[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\right] g''_{zz} = h''_{zz}.$$

Исключая $\psi''_{tt} - \varphi''_{xx}$ из этого уравнения с помощью (3.3.18), получим

$$\left[(\psi'_t)^2 - (\varphi'_x)^2\right](g''_{zz} - 2gg'_z) = h''_{zz} - 2g'_z h. \qquad (3.3.20)$$

Это равенство может выполняться только в двух случаях:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad g''_{zz} - 2gg'_z = 0, \quad h''_{zz} - 2g'_z h = 0;\\
&2) \quad (\psi'_t)^2 = A\psi + B, \quad (\varphi'_x)^2 = -A\varphi + B - C,\\
&\qquad h''_{zz} - 2g'_z h = (Az + C)(g''_{zz} - 2gg'_z),
\end{aligned}
\tag{3.3.21}
$$

где A, B, C – произвольные постоянные. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай 1. Первые два уравнения (3.3.21) позволяют найти $g(z)$ и $h(z)$. Интегрируя, из первого уравнения имеем $g'_z = g^2 + \text{const}$. Интегрируя далее, получим

$$g = k, \tag{3.3.22}$$

$$g = -1/(z + C_1), \tag{3.3.23}$$

$$g = -k\,\text{th}(kz + C_1), \tag{3.3.24}$$

$$g = -k\,\text{cth}(kz + C_1), \tag{3.3.25}$$

$$g = k\,\text{tg}(kz + C_1), \tag{3.3.26}$$

где C_1 и k – произвольные постоянные.

Второе уравнение (3.3.21) имеет частное решение $h = g(z)$. Поэтому его общее решение определяется по формуле [13]

$$h = C_2 g(z) + C_3 g(z) \int \frac{dz}{g^2(z)}, \tag{3.3.27}$$

где C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

Из соотношений (3.3.19) определяются функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ в виде

$$w(z) = B_1 \int G(z)\,dz + B_2, \quad \mathcal{F}(w) = B_1 h(z) G(z),$$

$$\text{где} \quad G(z) = \exp\left[\int g(z)\,dz\right], \tag{3.3.28}$$

B_1 и B_2 произвольны (функция $\mathcal{F}$ задана в параметрической форме).

Исследуем подробнее случай (3.3.24). Согласно (3.3.27) находим

$$h = A_1(z + C_1)^2 + \frac{A_2}{z + C_1}, \tag{3.3.29}$$

где $A_1 = -C_3/3$, $A_2 = -C_2$ – любые. Подставляя выражения (3.3.24) и (3.3.29) в (3.3.28), получим

$$w = B_1 \ln|z + C_1| + B_2, \quad \mathcal{F} = A_1 B_1 (z + C_1) + \frac{A_2 B_1}{(z + C_1)^2}.$$

Исключая из этих соотношений z, находим явный вид правой части уравнения (3.3.16):

$$\mathcal{F}(w) = A_1 B_1 e^u + A_2 B_1 e^{-2u}, \quad \text{где} \quad u = \frac{w - B_2}{B_1}. \tag{3.3.30}$$

Для наглядности далее полагаем $C_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ и введем обозначения $A_1 = a$, $A_2 = b$. Таким образом, имеем

$$w(z) = \ln|z|, \quad \mathcal{F}(w) = ae^w + be^{-2w}, \quad g(z) = -1/z, \quad h(z) = az^2 + b/z. \tag{3.3.31}$$

Осталось определить функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$. Подставим выражения (3.3.31) в функционально-дифференциальное уравнение (3.3.18). Учитывая зависимость (3.3.17), после элементарных преобразований получим

$$[\psi''_{tt}\psi - (\psi'_t)^2 - a\psi^3 - b] - [\varphi''_{xx}\varphi - (\varphi'_x)^2 + a\varphi^3] + (\psi''_{tt} - 3a\psi^2)\varphi - \psi(\varphi''_{xx} + 3a\varphi^2) = 0. \tag{3.3.32}$$

Дифференцируя (3.3.32) по t и x, приходим к уравнению с разделяющимися переменными[5]

$$(\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t)\varphi'_x - (\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x)\psi'_t = 0,$$

решение которого описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t &= A\psi'_t, \\ \varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x &= A\varphi'_x, \end{aligned}$$

где A – константа разделения. Каждое из этих уравнений можно два раза проинтегрировать:

$$\begin{aligned} (\psi'_t)^2 &= 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2, \\ (\varphi'_x)^2 &= -2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_3\varphi + C_4, \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. Исключая с помощью (3.3.33) производные из уравнения (3.3.32), находим связи между константами: $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2 + b$. Таким образом, функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными уравнениями первого порядка с кубической нелинейностью

$$\begin{aligned} (\psi'_t)^2 &= 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2, \\ (\varphi'_x)^2 &= -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b. \end{aligned}$$

[5] Для решения уравнения (3.3.32) проще всего использовать результаты решения функционального уравнения (2.5.4) из разд. 2.5 [см. формулы (2.5.5)–(2.5.6)].

Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции.

Для остальных случаев в (3.3.23)–(3.3.26) исследование проводится аналогичным образом.

Случай 2. Интегрируя первые два уравнения (3.3.21) (для второго случая), имеем два решения:

$$\begin{cases} \psi = \pm\sqrt{B}\,t + D_1, \\ \varphi = \pm\sqrt{B-C}\,t + D_2, \end{cases} \quad \text{при} \quad A = 0;$$
$$\begin{cases} \psi = \dfrac{1}{4A}(At + D_1)^2 - \dfrac{B}{A}, \\ \varphi = -\dfrac{1}{4A}(Ax + D_2)^2 + \dfrac{B-C}{A}, \end{cases} \quad \text{при} \quad A \neq 0; \tag{3.3.34}$$

здесь D_1 и D_2 – произвольные постоянные. В обоих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (3.3.16) является произвольной. Первое решение (3.3.34) соответствует решению типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$, а второе приводит к решению вида $w = w(x^2 - t^2)$.

Задачи к разделу 3.3:

1. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_t = f(w)w_x + g(w)$,
b) $w_t = f(w)w_x^2 + g(w)$,
c) $w_t^2 = f(w)w_x^2 + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,
b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$ (для первого уравнения см. также замечание в конце примера 31).

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x$,
b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений параболического типа:

a) $w_t = [f(w)w_x^n]_x$,
b) $w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z),\ \ z = \varphi(x) + \psi(t)$.

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений гиперболического типа:

a) $w_{xy} = f(w)$,

b) $w_{xy} = w_x w_y f(w)$,

c) $w_{xy} = w_x^n f(w)$,

Указание. Решения искать в виде $w = w(z),\ \ z = \varphi(x) + \psi(y)$.

Литература к разделу 3.3:

- Grundland A. M., Infeld E. A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions // J. Math. Phys., 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.
- Miller W. (Jr.), Rubel L. A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. Phys. A, 1993, Vol. 26, pp. 1901–1913.
- Zhdanov R. Z. Separation of variables in the non-linear wave equation // J. Phys. A, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.
- Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. – Новосибирск: Наука, 1994. – 319 с.
- Doyle Ph. W., Vassiliou P. J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation // Int. J. Non-Linear Mech., 1998, Vol. 33, № 2, pp. 315–326.
- Estévez P. G., Qu C. Z., Zhang S. L. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source // J. Math. Anal. Appl., 2002, Vol. 275, pp. 44–59.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

3.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными

3.4.1. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению стандартного вида. Общая процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанная на методе расщепления, состоит из нескольких этапов, кратко описанных ниже.

1. Выражение (3.1.1) подставляется в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными. В результате получается функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами (первые два аргумента – x и y – обычные, а третий аргумент – z – сложный).
2. Функционально-дифференциальное уравнение с помощью элементарных дифференциальных подстановок (основанных на выделении величин, содержащих искомые функции и их производные одного ар-

гумента) сводится к чисто функциональному уравнению с тремя аргументами x, y, z.

3. Функциональное уравнение с тремя аргументами методом дифференцирования сводится к функциональному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y), которое рассматривалось в разд. 4.2.
4. Строится решение функционального уравнения с двумя аргументами из п. 3° (используются формулы, приведенные в разд. 2.5).
5. Полученное в п. 4° решение вместе с использованными в п. 2° дифференциальными подстановками образует систему (обычно переопределенную) обыкновенных дифференциальных уравнений. Строится решение этой системы.
6. Решение системы из п. 5° подставляется в исходное функционально-дифференциальное уравнение из п. 1°. В результате определяются связи между постоянными интегрирования и находятся все искомые величины.
7. Отдельно рассматриваются возможные вырожденные случаи (возникающие при нарушении использованных при решении предположений).

Замечание. Наиболее сложной является третья стадия, которую не всегда удается реализовать.

Метод расщепления сводит решение функционально-дифференциального уравнения с тремя аргументами к решению чисто функционального уравнения с тремя аргументами (путем его сведения к стандартному функциональному уравнению с двумя аргументами) и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. исходная задача распадается на несколько более простых задач. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных методом расщепления рассмотрены в разд. 3.5.

3.4.2. Функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида. Подстановка выражения

$$w = F(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(y)$$

в нелинейные уравнения с частными производными во многих случаях приводит к функционально-дифференциальным уравнениям вида

$$\Phi_1(x)\Psi_1(y,z) + \Phi_2(x)\Psi_2(y,z) + \cdots + \Phi_k(x)\Psi_k(y,z) + \\ + \Psi_{k+1}(y,z) + \Psi_{k+2}(y,z) + \cdots + \Psi_n(y,z) = 0, \quad (3.4.1)$$

где функционалы $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(y,z)$ зависят соответственно от переменных x и y, z:

$$\Phi_j(x) \equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi, \varphi'_x, \varphi''_{xx}\bigr), \quad \Psi_j(y,z) \equiv \Psi_j\bigl(y, \psi, \psi'_y, \psi''_{yy}, F, F'_z, F''_{zz}\bigr) \tag{3.4.2}$$

(данные выражения соответствуют уравнению второго порядка).

Решение уравнения (3.4.1) целесообразно искать методом расщепления. На первом этапе будем рассматривать (3.4.1) как чисто функциональное уравнение, без учета зависимостей (3.4.2). Предположим, что $\Psi_1 \not\equiv 0$. Поделим уравнение (3.4.1) на Ψ_1 и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов, содержащих функции Φ_m:

$$\Phi_2(x)\Psi_2^{(2)}(y,z) + \cdots + \Phi_k(x)\Psi_k^{(2)}(y,z) + \Psi_{k+1}^{(2)}(y,z) + \cdots + \Psi_n^{(2)}(y,z) = 0, \tag{3.4.3}$$

где $\Psi_m^{(2)} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\right) + \psi'_y \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\right)$.

Продолжая аналогичную процедуру, в итоге можно получить уравнение, не зависящее явно от x:

$$\Psi_{k+1}^{(k+1)}(y,z) + \cdots + \Psi_n^{(k+1)}(y,z) = 0, \tag{3.4.4}$$

где $\Psi_m^{(k+1)} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\right) + \psi'_y \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\right)$.

Уравнение (3.4.4) можно рассматривать как уравнение с двумя независимыми переменными y и z. Если $\Psi_m^{(k+1)}(y,z) = Q_m(y)R_m(z)$ для всех $m = k+1, \ldots, n$, то для решения уравнения (3.4.4) можно использовать результаты разд. 2.2–2.5.

Литература к разделу 3.4:

- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists (Supplement B). – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

3.5. Решения некоторых нелинейных функциональных уравнений и их приложения в математической физике

В этом разделе исследуются некоторые функциональные уравнения с тремя аргументами, которые чаще всего встречаются при функциональном разделении переменных в нелинейных уравнениях математической физики. Эти результаты использованы для построения точных решений некоторых классов нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн.

3.5.1. Функциональное уравнение $\boldsymbol{f(x)+g(y)=Q(z)}$, где $\boldsymbol{z=\varphi(x)+\psi(y)}$. Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задается, а другая ищется; одна из двух функций $g(y)$ и $\psi(y)$ задается, а другая ищется; функция $Q(z)$ ищется[6].

Дифференцируя уравнение по x и по y, получим $Q''_{zz}=0$. Поэтому его решение имеет вид

$$f(x)=A\varphi(x)+B, \quad g(y)=A\psi(y)-B+C, \quad Q(z)=Az+C, \tag{3.5.1}$$

где A, B, C – произвольные постоянные.

3.5.2. Функциональное уравнение $\boldsymbol{f(t)+g(x)+h(x)Q(z)+}$ $\boldsymbol{+R(z)=0}$, где $\boldsymbol{z=\varphi(x)+\psi(t)}$. Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению с двумя независимыми аргументами

$$g'_x+h'_xQ+h\varphi'_xQ'_z+\varphi'_xR'_z=0. \tag{3.5.2}$$

Такие уравнения рассматривались в разд. 4.3–4.6. Поэтому имеют место соотношения [их можно получить после переобозначений из формул (2.5.4) и (2.5.5), приведенных в разд. 4.5]:

$$\begin{aligned} g'_x&=A_1h\varphi'_x+A_2\varphi'_x,\\ h'_x&=A_3h\varphi'_x+A_4\varphi'_x,\\ Q'_z&=-A_1-A_3Q,\\ R'_z&=-A_2-A_4Q, \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – произвольные постоянные. Интегрирование системы (3.5.3) и подстановка полученных решений в исходное функциональное уравнение дает приведенные ниже результаты.

Случай 1. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3=0$ в (3.5.3):

$$\begin{aligned} &f=-\frac{1}{2}A_1A_4\psi^2+(A_1B_1+A_2+A_4B_3)\psi-B_2-B_1B_3-B_4,\\ &g=\frac{1}{2}A_1A_4\varphi^2+(A_1B_1+A_2)\varphi+B_2,\\ &h=A_4\varphi+B_1,\\ &Q=-A_1z+B_3,\\ &R=\frac{1}{2}A_1A_4z^2-(A_2+A_4B_3)z+B_4, \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

[6]В подобных уравнениях со сложным аргументом считается, что $\varphi(x)\neq\mathrm{const}$ и $\psi(y)\neq\mathrm{const}$.

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ – произвольные функции, A_k, B_k – произвольные постоянные.

Случай 2. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3 \neq 0$ в (3.5.3):

$$\begin{aligned}
&f = -B_1 B_3 e^{-A_3\psi} + \left(A_2 - \frac{A_1 A_4}{A_3}\right)\psi - B_2 - B_4 - \frac{A_1 A_4}{A_3^2},\\
&g = \frac{A_1 B_1}{A_3} e^{A_3\varphi} + \left(A_2 - \frac{A_1 A_4}{A_3}\right)\varphi + B_2,\\
&h = B_1 e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},\\
&Q = B_3 e^{-A_3 z} - \frac{A_1}{A_3},\\
&R = \frac{A_4 B_3}{A_3} e^{-A_3 z} + \left(\frac{A_1 A_4}{A_3} - A_2\right) z + B_4,
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ – произвольные функции, A_k, B_k – произвольные постоянные.

Случай 3. Функциональное уравнение имеет также вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + B_2, \quad h = A_2, \quad R = -A_1 z - A_2 Q - B_1 - B_2, \tag{3.5.6}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $Q = Q(z)$ – произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные, и вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + A_2 h + B_2, \quad Q = -A_2, \quad R = -A_1 z - B_1 - B_2, \tag{3.5.7}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $h = h(x)$ – произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные постоянные. Вырожденные решения (3.5.6) и (3.5.7) можно получить из исходного уравнения и его следствия (3.5.2) с помощью формул (2.5.6) из разд. 2.5.

Пример 33. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{3.5.8}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{3.5.9}$$

Подставим (3.5.9) в (3.5.8). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w(z))}{w'_z}.$$

Представим его в виде функционального уравнения, исследуемого в настоящем разделе

$$f(t) + g(x) + h(x)Q(z) + R(z) = 0, \quad \text{где} \quad z = \varphi(x) + \psi(t), \qquad (3.5.10)$$

в котором

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2,$$
$$Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z. \quad (3.5.11)$$

Используем решения уравнения (3.5.10). Подставив выражения (3.5.11) для g и h в (3.5.4)–(3.5.7), получим переопределенные системы уравнений для определения функции $\varphi = \varphi(x)$.

Случай 1. Система

$$\varphi''_{xx} = \frac{1}{2}A_1A_4\varphi^2 + (A_1B_1 + A_2)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = A_4\varphi + B_1,$$

полученная из (3.5.4) и соответствующая значению $A_3 = 0$ в (3.5.3), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\begin{cases} \varphi = C_1x + C_2 & \text{при} \;\; A_2 = -A_1C_1^2,\; A_4 = B_2 = 0,\; B_1 = C_1^2, \\ \varphi = \dfrac{1}{4}A_4x^2 + C_1x + C_2 & \text{при} \;\; A_1 = A_2 = 0,\; B_1 = C_1^2 - A_4C_2,\; B_2 = \dfrac{1}{2}A_4, \end{cases} \qquad (3.5.12)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Первое решение (3.5.12) при $A_1 \neq 0$ соответствует правой части уравнения (3.5.8), которая содержит функцию, обратную к интегралу вероятностей [вид правой части определяется из двух последних соотношений (3.5.4) и (3.5.11) для Q и R]. Второе решение (3.5.12) соответствует правой части уравнения (3.5.8) вида $\mathcal{F}(w) = k_1w\ln w + k_2w$. В обоих случаях первое соотношение (3.5.4) с учетом равенства $f = -\psi'_t$ представляет собой линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которого является сумма экспоненциальной функции и константы.

Случай 2. Система

$$\varphi''_{xx} = \frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi} + \left(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\right)\varphi + B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = B_1e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},$$

полученная из (3.5.5) и соответствующая $A_3 \neq 0$ в (3.5.3), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$
\begin{aligned}
&\varphi = \pm\sqrt{-A_4/A_3}\,x + C_1 && \text{при условии}\,1^\circ,\\
&\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln|x| + C_1 && \text{при условии}\,2^\circ,\\
&\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln\left|\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{A_3A_4}\,x + C_1\right)\right| + C_2 && \text{при условии}\,3^\circ,\\
&\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln\left|\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-A_3A_4}\,x + C_1\right)\right| + C_2 && \text{при условии}\,4^\circ,\\
&\varphi = -\frac{2}{A_3}\ln\left|\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-A_3A_4}\,x + C_1\right)\right| + C_2 && \text{при условии}\,5^\circ,
\end{aligned}
$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Эти решения соответствуют правой части уравнения (3.5.8), задаваемой в параметрической форме. Условия $1^\circ - 5^\circ$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ\quad A_2 = \frac{A_1A_4}{A_3},\ B_1 = B_2 = 0,\\
&2^\circ\quad A_1 = \frac{A_3^2}{2},\ A_2 = A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = 4A_3^{-2}e^{-A_3C_1},\\
&3^\circ\quad A_1 = \frac{A_3^2}{2},\ A_2 = \frac{A_3A_4}{2},\ B_2 = 0,\ A_3A_4 > 0,\\
&4^\circ\quad A_1 = \frac{A_3^2}{2},\ A_2 = \frac{A_3A_4}{2},\ B_2 = 0,\ A_3A_4 < 0,\\
&5^\circ\quad A_1 = \frac{A_3^2}{2},\ A_2 = \frac{A_3A_4}{2},\ B_2 = 0,\ A_3A_4 < 0,
\end{aligned}
$$

Случай 3. Вырожденным решениям функционального уравнения (3.5.6) и (3.5.7) соответствуют решения нелинейного уравнения теплопроводности (3.5.8) типа бегущей волны [функция $\mathcal{F}(w)$ – произвольна] и решения линейного уравнения (3.5.8) с источником вида $\mathcal{F}(w) = k_1w + k_2$.

Замечание. Можно искать более сложные решения уравнения (3.5.8) с функциональным разделением вида

$$w = w(z),\quad z = \varphi(\xi) + \psi(t),\quad \xi = x + at.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (3.5.8) также приводит к функциональному уравнению (3.5.10), в котором x надо переобозначить на ξ и положить

$$
\begin{aligned}
f(t) = -\psi'_t,\quad g(\xi) = \varphi''_{\xi\xi} - a\varphi'_\xi,\quad h(\xi) = (\varphi'_\xi)^2,&\\
Q(z) = w''_{zz}/w'_z,\quad R(z) = f(w(z))/w'_z.&
\end{aligned}
$$

Дальнейшая процедура построения решения проводится так же, как в примере 33.

Пример 34. Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{F}(w), \tag{3.5.13}$$

которое встречается в задачах конвективного тепло- и массообмена ($a = \mathrm{const},\ b = \mathrm{const}$), в задачах теплопереноса в анизотропных средах ($b = a'_x$), в пространственных задачах теплопроводности с осевой и центральной симметрией ($a = \mathrm{const},\ b = \mathrm{const}/x$).

Поиск точных решений уравнения (3.5.13) вида (3.5.9) приводит к функциональному уравнению (3.5.10), где

$$\begin{aligned}
&f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = a(x)\varphi''_{xx} + b(x)\varphi'_x(x),\\
&h(x) = a(x)(\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.5.4)–(3.5.7), получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых величин.

Замечание. В примерах 33–34 построение точных решений различных уравнений математической физики сводилось к одному и тому же функциональному уравнению. Это наглядно демонстрирует полезность выделения и независимого рассмотрения отдельных функциональных уравнений (и целесообразность разработки методов решения функциональных уравнений со сложным аргументом).

3.5.3. Функциональное уравнение $f(t) + g(x)Q(z) + h(x)R(z) = 0$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Дифференцируем уравнение по x. Получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными x и z:

$$g'_x Q + g\varphi'_x Q'_z + h'_x R + h\varphi'_x R'_z = 0, \tag{3.5.14}$$

которое с точностью до очевидных переобозначений совпадает с уравнением (2.5.4) из разд. 2.5.

Невырожденный случай. Решение уравнения (3.5.14) можно получить с помощью формул (2.5.5) из разд. 2.5. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
g'_x &= (A_1 g + A_2 h)\varphi'_x,\\
h'_x &= (A_3 g + A_4 h)\varphi'_x,\\
Q'_z &= -A_1 Q - A_3 R,\\
R'_z &= -A_2 Q - A_4 R,
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

где $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ – произвольные постоянные.

Решение системы (3.5.15) имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) &= A_2 B_1 e^{k_1\varphi} + A_2 B_2 e^{k_2\varphi}, \\ h(x) &= (k_1 - A_1) B_1 e^{k_1\varphi} + (k_2 - A_1) B_2 e^{k_2\varphi}, \\ Q(z) &= A_3 B_3 e^{-k_1 z} + A_3 B_4 e^{-k_2 z}, \\ R(z) &= (k_1 - A_1) B_3 e^{-k_1 z} + (k_2 - A_1) B_4 e^{-k_2 z}, \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

где $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ – произвольные постоянные, а k_1 и k_2 – корни квадратного уравнения

$$(k - A_1)(k - A_4) - A_2 A_3 = 0. \tag{3.5.17}$$

В вырожденном случае при $k_1 = k_2$ члены $e^{k_2\varphi}$ и $e^{-k_2 z}$ в (3.5.16) надо заменить соответственно на $\varphi e^{k_1\varphi}$ и $z e^{-k_1 z}$. В случае чисто мнимых или комплексных корней уравнения (3.5.17) в решении (3.5.16) надо выделить действительную (или мнимую) часть.

Подставив (3.5.16) в исходное функциональное уравнение

$$f(t) + g(x)Q(z) + h(x)R(z) = 0, \text{ где } z = \varphi(x) + \psi(t), \tag{3.5.18}$$

получим условия, которым должны удовлетворять свободные коэффициенты, и найдем функцию $f(t)$:

$$\begin{aligned} &B_2 = B_4 = 0 &&\Longrightarrow\ f(t) = [A_2 A_3 + (k_1 - A_1)^2] B_1 B_3 e^{-k_1\psi}, \\ &B_1 = B_3 = 0 &&\Longrightarrow\ f(t) = [A_2 A_3 + (k_2 - A_1)^2] B_2 B_4 e^{-k_2\psi}, \\ &A_1 = 0 &&\Longrightarrow\ f(t) = (A_2 A_3 + k_1^2) B_1 B_3 e^{-k_1\psi} + (A_2 A_3 + k_2^2) B_2 B_4 e^{-k_2\psi}. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

В решения (3.5.16), (3.5.19) входят произвольные функции $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$.

Вырожденный случай. Функциональное уравнение (3.5.18) имеет также вырожденное решение

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad g = A_2 B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad h = B_1 e^{-A_1\varphi}, \quad R = -B_2 e^{A_1 z} - A_2 Q,$$

где $\varphi = \varphi(x),\ \psi = \psi(t),\ Q = Q(z)$ – произвольные функции, $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ – произвольные постоянные, и вырожденное решение

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad h = -B_1 e^{-A_1\varphi} - A_2 g, \quad Q = A_2 B_2 e^{A_1 z}, \quad R = B_2 e^{A_1 z},$$

где $\varphi = \varphi(x),\ \psi = \psi(t),\ g = g(x)$ – произвольные функции, $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ – произвольные постоянные. Вырожденные решения можно получить из исходного уравнения и его следствия (3.5.14) с помощью формул (2.5.6) из разд. 2.5.

Пример 35. Для нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}(w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \mathcal{G}(x)$$

поиск точных решений вида (3.5.9) приводит к функциональному уравнению (3.5.18), где

$$f(t) = -\psi'_t,\quad g(x) = (\varphi'_x)^2,\quad h(x) = \mathcal{G}(x),$$
$$Q(z) = \mathcal{F}(w)w'_z,\quad R(z) = 1/w'_z,\quad w = w(z).$$

Пример 36. Для нелинейного уравнения теплопроводности (3.3.1) [см. пример 31 из разд. 3.3.2] поиск точных решений вида $w = w(z)$, $z = \varphi(x)+\psi(t)$ приводит к функционально-дифференциальному уравнению (3.3.3), которое приводится к функциональному уравнению (3.5.18), если положить

$$f(t) = -\psi'_t,\quad g(x) = \varphi''_{xx},\quad h(x) = (\varphi'_x)^2,$$
$$Q(z) = \mathcal{F}(w),\quad R(z) = \frac{[\mathcal{F}(w)w'_z]'_z}{w'_z},\quad w = w(z).$$

3.5.4. Функциональное уравнение $f(x) + g(y) + h(x)P(z) + s(y)Q(z) + R(z) = 0$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$. Дифференцируем уравнение по y. Полученное выражение делим на $\psi'_y P'_z$ и дифференцируем по y. В результате приходим к уравнению с двумя аргументами y и z, которое рассматривалось в главе 2 [см. уравнение (2.2.3) и его решения (2.5.1)].

Пример 37. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[b(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = \mathcal{F}(w). \tag{3.5.20}$$

Поиск точных решений уравнения (3.5.20) вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$, приводит к функциональному уравнению

$$f(x)+g(y)+h(x)P(z)+s(y)Q(z)+R(z) = 0, \text{ где } z = \varphi(x)+\psi(y) \tag{3.5.21}$$

в котором

$$f_1(x) = a(x)\varphi''_{xx} + a'_x(x)\varphi'_x,\quad f_2(y) = b(y)\psi''_{yy} + b'_y(y)\psi'_y,$$
$$g_1(x) = a(x)(\varphi'_x)^2,\quad g_2(y) = b(y)(\psi'_y)^2,$$
$$P(z) = Q(z) = w''_{zz}/w'_z,\quad R(z) = -\mathcal{F}(w)/w'_z,\quad w = w(z).$$

Не проводя полного анализа уравнения (3.5.20), ограничимся здесь изучением решений с обобщенным разделением переменных, которые существуют при произвольной правой части $\mathcal{F}(w)$.

Сделав замену $z = \zeta^2$, ищем решения уравнения (3.5.20) вида

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y). \tag{3.5.22}$$

Учитывая соотношения $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} = \dfrac{\varphi'_x}{2\zeta}$ и $\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} = \dfrac{\psi'_y}{2\zeta}$, из (3.5.20) получим

$$\big[(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y\big]\frac{w'_\zeta}{2\zeta} + \big[a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2\big]\frac{\zeta w''_{\zeta\zeta} - w'_\zeta}{4\zeta^3} = \mathcal{F}(w),$$
$$\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}\big(w(\zeta)\big). \tag{3.5.23}$$

Для разрешимости этого функционального уравнения потребуем, чтобы выражения в квадратных скобках были функциями от ζ:

$$(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y = M(\zeta), \quad a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2 = N(\zeta).$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и по y, приходим к уравнению $(M'_\zeta/\zeta)'_\zeta = 0$, общее решение которого имеет вид $M(\zeta) = C_1\zeta^2 + C_2$. Аналогично находим $N(\zeta) = C_3\zeta^2 + C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные. В итоге получим

$$(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y = C_1(\varphi + \psi) + C_2, \quad a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2 = C_3(\varphi + \psi) + C_4.$$

Разделение переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi(x)$, $a(x)$, $\psi(y)$, $b(y)$:

$$\begin{aligned} (a\varphi'_x)'_x - C_1\varphi - C_2 &= k_1, \qquad & (b\psi'_y)'_y - C_1\psi &= -k_1,\\ a(\varphi'_x)^2 - C_3\varphi - C_4 &= k_2, \qquad & b(\psi'_y)^2 - C_3\psi &= -k_2. \end{aligned}$$

Эта система всегда интегрируется в квадратурах и может быть преобразована к виду

$$\begin{cases} (C_3\varphi + C_4 + k_2)\varphi''_{xx} + (C_1\varphi + C_2 + k_1 - C_3)(\varphi'_x)^2 = 0,\\ (C_3\psi - k_2)\psi''_{yy} + (C_1\psi - k_1 - C_3)(\psi'_y)^2 = 0;\\ a = (C_3\varphi + C_4 + k_2)(\varphi'_x)^{-2},\\ b = (C_3\psi - k_2)(\psi'_y)^{-2}, \end{cases} \tag{3.5.24}$$

где уравнения для функций φ и ψ не зависят от a и b и могут решаться независимо. Не проводя полного исследования системы (3.5.24), отметим простой частный случай, когда она интегрируется в явном виде.

При $C_1 = C_2 = C_4 = k_1 = k_2 = 0$, $C_3 = C \neq 0$ имеем

$$a(x) = \alpha e^{\mu x}, \quad b(y) = \beta e^{\nu y}, \quad \varphi(x) = \frac{Ce^{-\mu x}}{\alpha \mu^2}, \quad \psi(y) = \frac{Ce^{-\nu y}}{\beta \nu^2},$$

где α, β, μ, ν – произвольные постоянные. Подставив эти выражения в (3.5.23) и учитывая вид переменной ζ (3.5.22), получим уравнение для функции $w(\zeta)$:

$$w''_{\zeta\zeta} - \frac{1}{\zeta} w'_\zeta = \frac{4}{C} \mathcal{F}(w).$$

Система (3.5.24) имеет также другие решения, приводящие к различным выражениям для функций $a(x)$ и $b(y)$.

Задачи к разделу 3.5:

1. Решить функциональные уравнения:
a) $f(x+y) = f(x) + f(y) - af(x)f(y)$,
b) $f(x)g(y) = h(x+y)$,
c) $f(x)g(y) + h(y) = f(x+y)$,
d) $f(x)g(y) = h\big(\varphi(x) + \psi(y)\big)$,
e) $f(x) + g(y) = h\big(\varphi(x)\psi(y)\big)$,
где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ – искомые функции.

Указание. Использовать метод дифференцирования и результаты раздела 3.5.

В упражнениях 2–8 функции f и g подлежат определению.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:
a) $w_t = f(w)w_x + g(w)$,
b) $w_t = f(w)w_x^n + g(w)$,
c) $w_t^2 = f(w)w_x^n + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:
a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,
b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:
a) $w_t = [f(x)w_x]_x + g(w)$,
b) $w_t = aw_{xx} + bx^n w_x + f(w)$, $\quad n = 1, 0, -1$.

Указание. Эти уравнения являются частными случаями уравнения (58).

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = x^{-n}[x^n f(w) w_x]_x$,

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w) w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

6. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = [f(w) w_x^n]_x + g(w)$.

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w) w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейного волнового уравнения $w_{xt} = f(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$, а затем использовать результаты решения функционального уравнения d) из первого упражнения.

8. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка:

$w_{xxt} = f(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Полученное функционально-дифференциальное уравнение свести к функциональному уравнению (3.5.21).

Литература к разделу 3.5:

- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.
- Полянин А. Д., Журов А. И. Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики // Доклады РАН, 1998, т. 360, № 5, с. 640–644.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
- Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

Список литературы

[1] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнением математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

[2] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решение нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

[3] Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 420 с.

[4] Сборник задач по математической физике / под ред. В. С. Владимирова. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

[5] Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 128 с.

[6] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

[7] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. – М.: Мир, 1981. – 344 с.

[8] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 848 с.

[9] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

[10] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.

[11] Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае // ПМТФ, 1960, №. 1, с. 83–90.

[12] Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, Vol. 125A, №. 2, pp. 225–246.

[13] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

[14] Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // ЖВМиМФ, 1982, т. 22, №. 6, с. 1393–1400.

EqWorld

Мир математических уравнений

http://eqworld.ipmnet.ru

Редактор: А. Д. Полянин

Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- **Точные решения**
- **Методы решения**
- **Вспомогательные разделы**
- **Программы**
- **Образование**
- **Об этом сайте**
- **Для авторов**
- **Информация**

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие авторов 3

Введение 4

0.1. Логика разделения переменных 4

0.2. Задача Штурма–Лиувилля 6

0.3. Несколько слов о нелинейных уравнениях 8

Глава 1. Метод разделения переменных в линейных уравнениях (метод Фурье) 10

1.1. Общее описание метода разделения переменных 10

1.2. Поиск частных решений. Получение уравнений и граничных условий 12

1.3. Решение задачи на собственные значения. Ортогональность собственных функций 12

1.4. Решение краевых задач для уравнений параболического типа 14

1.5. Решение краевых задач для уравнений гиперболического типа 16

1.6. Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа 18

Глава 2. Метод обобщенного разделения переменных 23

2.1. Введение 23

2.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных 29

2.3. Упрощенная схема построения точных решений, основанная на априорном задании одной системы координатных функций 31

2.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования 37

2.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления 44

2.6. Метод Титова–Галактионова 53

Глава 3. Метод функционального разделения переменных 59

3.1. Структура решений с функциональным разделением переменных 59

3.2. Решения с функциональным разделением переменных специального вида 59
3.3. Метод дифференцирования 69
3.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными 76
3.5. Решения некоторых нелинейных функциональных уравнений и их приложения в математической физике 78
Литература 89
EqWorld 90
Содержание 91

ООО «Книжный Дом»
Лицензия на издательскую деятельность
Серия ИД №05377 от 16.07.2001 г.
191186 Санкт-Петербург, ул. М. Конюшенная 5
тел. (812)380-73-00, 380-73-22

Подписано в печать 10.12.2009 Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная Объем 5,75 уч. изд. л. Тираж 100 экз.