РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

Зайцев В. Ф.

ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие к спецкурсу

1

Санкт-Петербург 1996

УДК 517.9

Рекомендовано в качестве учебного пособия к спецкурсу “Современный групповой анализ дифференциальных уравнений” методическим советом математического факультета Российского государственного педагогического университета им.А.И.Герцена.

В настоящем спецкурсе (спецкурс-1) излагаются вводные понятия и теоремы, необходимые для изучения современного группового анализа, но отсутствующие в основной программе физических и математических факультетов педагогических университетов. Спецкурс-1 может быть прочитан студентам (начиная с третьего курса, в том числе и студентам тьюторских групп), стажерам, аспирантам первого года обучения, слушателям ФПК, а также всем специалистам смежных и прикладных специальностей, интересующимся групповым анализом.

Рецензент: *заведующий кафедрой математического анализа Ленинградского областного педагогического института заслуженный деятель науки Российской федерации доктор физико-математических наук, профессор Н.М.Матвеев.*

Групповой анализ изучает симметрию – фундаментальное свойство любого явления или процесса. В равной степени это касается и модели – уравнения, описывающего это явление или процесс. Более того, модель как математическая абстракция, как правило, более идеализирована, чем оригинал, и в силу этого обстоятельства обладает симметрией более высокого порядка. Симметрийные методы исследования эффективны практически для всех типов уравнений – от алгебраических до интегро-дифференциальных.

На уровне неформальных понятий ***симметрию*** можно определить как свойство оставаться неизменным под действием каких-либо преобразований. Неизменным или ***инвариантным*** может быть отдельное уравнение либо класс уравнений, причем в последнем случае каждый элемент класса не обязательно преобразуется “в себя”, а может переходить в другой элемент того же класса; таким образом определяется ***преобразование эквивалентности*** на классе.

Основными задачами практического группового анализа дифференциальных уравнений являются: 1) разработка регулярных (алгоритмических) методов поиска всех видов симметрий уравнений; 2) решение обратных задач – поиск классов уравнений, имеющих априорную симметрию заданного вида; 3) установление общих принципов использования найденных симметрий в практических задачах.

§1. Основные определения.

В этом разделе мы приведем необходимые понятия и определения общей алгебры и теории топологических групп. Следует помнить, что эти сведения ни в коей мере не заменяют специальную литературу, посвященную указанным областям математики, а лишь очерчивают круг смежных направлений, лежащих в основании современного группового анализа.

Определение* 1.** Множество G называется ***группой, если на этом множестве задана бинарная операция $a \circ b = c$ для любых $a, b \in G$ так, что $c \in G$ (алгебраическая полнота), и удовлетворяющая следующим ***аксиомам группы***:

1. Операция ассоциативна: для любых $a, b, c \in G$ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

2. Множество G содержит левую единицу, общую для всех элементов группы, т.е. такой элемент e, что $e \circ a = a$ для всякого элемента $a \in G$.

3. Для всякого элемента $a \in G$ существует левый обратный элемент, т.е. такой элемент $\overline{a} \in G$, что $\overline{a} \circ a = e$.

Легко доказать, что левая единица является также и правой единицей, т.е. для любого $a \in G$ $a \circ e = a$; левый обратный элемент $\overline{a}$ к элементу a является также и правым обратным: $a \circ \overline{a} = e$. Очевидно также, что $\overline{\overline{a}} = a$.

Определение* 2**. Множество G является ***топологической группой, если на нем заданы две структуры – группы и топологического пространства, согласованные условием непрерывности групповых операций, а именно, для всякой пары $(a, b) \in G \times G$ отображение $(a, b) \to a \circ \overline{b}$ должно быть непрерывным.

Определение* 3. *Преобразованием называется отображение $\sigma : X \to$ $\to X$ некоторого множества X (вообще говоря, наделенного некоторой структурой) в себя. При этом каждый элемент $x \in X$ переводится в некоторый (не обязательно отличный от x) элемент $y \in X$, $y = \sigma * x$.

Определение* 4**. ***Группой преобразований называется пара (G, X), где G – группа, X – множество, и каждому $a \in G$ соответствует преобразование $x \to a * x$ множества X такое, что $(a \circ b) * x = a * (b * x)$ для всех $a, b \in G$ и $x \in X$. Обычно говорят о ***действии*** группы G на множестве X. Классы эквивалентности группы преобразований называются ***орбитами***. Так, орбита элемента $x \in X$ определяется как множество $\{a_i * x\}$, где $\{a_i\} = G$.

Определение* 5**. ***Непрерывной группой преобразований называется топологическая группа гладких или аналитических локальных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$, гладко или аналитически зависящих от параметров. Если Q_x – орбита элемента $x \in X$ и x_a – ее элемент, соответствующий значению a параметра преобразования, то любая окрестность x_a содержит некоторый элемент x_b, $b \neq a$.

Определение* 6**. Группа преобразований называется ***дискретной, если любая орбита Q_x не содержит предельных элементов, т.е. у каждого ее элемента найдется окрестность, не содержащая никакого другого элемента этой орбиты.

Определение* 7**. Пусть G – группа, H – произвольное множество, и каждому элементу $a \in G$ сопоставлен элемент $\tilde{a} = \sigma * a \in H$ так, что все соотношения между элементами в G выполняются и для их образов в H (например, $\sigma * (a \circ b) = \tilde{a} \circ \tilde{b}$). Тогда H – тоже группа, а σ называется ***гомоморфизмом или ***гомоморфным отображением*** из G в H.

Если отображение σ ***сюръективно***, т.е. каждый элемент из H является образом по крайней мере одного элемента из G, то говорят о ***гомоморфизме*** из G ***на*** H. Те элементы $a_i \in G$, которые имеют один и тот же образ $\tilde{a}$ в H, можно объединить в класс A. При этом мы получим ***разбиение*** группы G на классы, которые взаимно-однозначно соответствуют элементам множества H. Класс A называется также ***прообразом*** элемента $\tilde{a}$.

§2. Группы Ли.

Рассматриваются обратимые преобразования в плоскости (x, y):

$$\tilde{x} = \varphi(x, y, a), \quad \tilde{y} = \psi(x, y, a), \tag{2.1}$$

зависящие от вещественного параметра a, причем

$$\varphi\Big|_{a=0} = x, \qquad \psi\Big|_{a=0} = y. \tag{2.2}$$

Пусть функции φ и ψ – гладкие функции параметра a. Говорят, что преобразования (2.1) образуют (локальную) ***однопараметрическую группу*** G, если последовательное выполнение двух преобразований равносильно применению третьего преобразования того же вида (2.1). Как будет доказано далее, путем подходящего выбора параметра a это групповое свойство может быть записано в виде:

$$\tilde{\tilde{x}} = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, b) = \varphi(x, y, a+b), \quad \tilde{\tilde{y}} = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, b) = \psi(x, y, a+b), \tag{2.3}$$

т.е. групповой операцией $\circ$ является обычное сложение (аддитивная групповая операция). Тогда, очевидно, обратное к (2.1) преобразование получается простым изменением знака параметра a:

$$x = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, -a), \qquad y = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, -a).$$

Разложим функции φ, ψ в ряд Тейлора по параметру a в окрестности точки $a = 0$ и запишем ***инфинитезимальное*** (бесконечно-малое) преобразование в виде

$$\tilde{x} \approx x + \xi(x, y)a, \qquad \tilde{y} \approx y + \eta(x, y)a, \tag{2.4}$$

где

$$\xi(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y, a)}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \quad \eta(x, y) = \frac{\partial\psi(x, y, a)}{\partial a}\bigg|_{a=0}. \tag{2.5}$$

Вектор (ξ, η) с компонентами (2.5) является касательным вектором в точке (x, y) к орбите $(\tilde{x}, \tilde{y})$ (т.е. к кривой, описываемой преобразованными точками) и поэтому называется ***касательным векторным полем*** группы G.

<u>Теорема 1</u> (*С.Ли*). Пусть функции φ, ψ удовлетворяют групповому свойству (2.3) и имеют разложение (2.4). Тогда они являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (называемых уравнениями Ли)

$$\frac{d\varphi}{da} = \xi(\varphi,\ \psi), \qquad \frac{d\psi}{da} = \eta(\varphi,\ \psi) \tag{2.6}$$

с начальными условиями (2.2). Обратно, для любого гладкого векторного поля (ξ, η) решение задачи Коши (2.6), (2.2) (а это решение существует и единственно) удовлетворяет групповому свойству (2.3).

<u>Доказательство</u>. Пусть выполнено групповое свойство (2.3). Придав параметру a приращение Δa, запишем равенства (2.3) в виде

$$\varphi(x, y, a + \Delta a) = \varphi(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a), \Delta a),$$

$$\psi(x, y, a + \Delta a) = \psi(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a), \Delta a).$$

Отсюда, выделяя главную линейную часть по Δa

$$\varphi(x, y, a + \Delta a) \approx \varphi(x, y, a) + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\Delta a, \qquad \psi(x, y, a + \Delta a) \approx \psi(x, y, a) + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\Delta a;$$

$$\varphi(\varphi,\ \psi,\ \Delta a) \approx \varphi(x,\ y,\ a) + \left.\frac{\partial\varphi(\varphi,\ \psi,\ \Delta a)}{\partial a}\right|_{a=0} \cdot \Delta a = \varphi(x,\ y,\ a) + \xi(\varphi,\ \psi)\Delta a,$$

$$\psi(\varphi,\ \psi,\ \Delta a) \approx \psi(x,\ y,\ a) + \left.\frac{\partial\psi(\varphi,\ \psi,\ \Delta a)}{\partial a}\right|_{a=0} \cdot \Delta a = \psi(x,\ y,\ a) + \eta(\varphi,\ \psi)\Delta a,$$

Приравнивая попарно вторые слагаемые в правых частях, получим уравнения Ли (2.6). Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\varphi(x, y, a)$, $\psi(x, y, a)$ – решение задачи (2.6), (2.2). Зафиксируем значение параметра a (близкое к нулю, так как решение может существовать лишь локально) и рассмотрим функции

$$u(b) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, b) \equiv \varphi(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a), b), \qquad U(b) = \varphi(x, y, a + b),$$

$$v(b) = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, b) \equiv \psi(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a), b), \qquad V(b) = \psi(x, y, a + b).$$

Для них в силу уравнений Ли имеем

$$\frac{du}{db} = \frac{d\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, b)}{db} = \xi(u, v), \qquad \frac{dv}{db} = \frac{d\psi(\tilde{x}, \tilde{y}, b)}{db} = \eta(u, v),$$

$$u\big|_{b=0} = \varphi(x, y, a); \qquad v\big|_{b=0} = \psi(x, y, a);$$

$$\frac{dU}{db} = \frac{d\varphi(x, y, a+b)}{db} = \xi(U, V), \qquad \frac{dV}{db} = \frac{d\psi(x, y, a+b)}{db} = \eta(U, V),$$

$$U\big|_{b=0} = \varphi(x, y, a); \qquad V\big|_{b=0} = \psi(x, y, a);$$

Таким образом, пары (u, v) и (U, V) удовлетворяют одной и той же системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и одинаковым начальным условиям. В силу единственности решения задачи Коши отсюда следует

$$u(b) = U(b), \qquad v(b) = V(b),$$

равносильное групповому свойству (2.3) :

Рассмотрим теперь (локальную) однопараметрическую группу с произвольным законом умножения

$$\tilde{\tilde{x}} = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, b) = \varphi(x, y, \tau(a, b)), \quad \tilde{\tilde{y}} = \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, b) = \psi(x, y, \tau(a, b)), \qquad (2.7)$$

причем будем считать, что выполнены условия (2.2), т.е. $\tau(a, 0) = a$, $\tau(0, b) = b$.

<u>Теорема 2</u>*.** Введение ***канонического параметра $\tilde{a}$ по формуле

$$\tilde{a} = \int_0^a A(a)\, da, \qquad (2.8)$$

где

$$A(a) = \left[\left. \frac{\partial \tau(a,\ b)}{\partial b} \right|_{b=0} \right]^{-1},$$

приводит произвольный закон умножения $\tau = \tau(a, b)$ к простейшему (аддитивному) $\tau(a, b) = a + b$.

<u>Доказательство</u>. Дифференцирование по b левых и правых частей (2.7) дает

$$\frac{\partial \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, b)}{\partial b} = \frac{\partial \varphi(x, y, \tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau(a, b)}{\partial b}, \qquad \frac{\partial \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, b)}{\partial b} = \frac{\partial \psi(x, y, \tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau(a, b)}{\partial b}.$$

Полагая теперь $b = 0$ и учитывая, что при этом $\tau = a$, получаем следующие равенства:

$$\left. \frac{\partial \varphi(\tilde{x},\ \tilde{y},\ b)}{\partial b} \right|_{b=0} = \frac{\partial \varphi(x,\ y,\ a)}{\partial a} \left[\frac{\partial \tau(a,\ b)}{\partial b} \right]_{b=0},$$

$$\left.\frac{\partial\psi(\tilde{x},\ \tilde{y},\ b)}{\partial b}\right|_{b=0} = \frac{\partial\psi(x,\ y,\ a)}{\partial a}\left[\frac{\partial\tau(a,\ b)}{\partial b}\right]_{b=0},$$

в каждом из этих равенств второй множитель справа равен единице при $a = 0$, поэтому он отличен от нуля при малых значениях a в силу непрерывности. Положим

$$\left.\frac{\partial\tau(a,\ b)}{\partial b}\right|_{b=0} = \frac{1}{A(a)}$$

и, обозначив $\xi(\varphi,\ \psi) = \left.\dfrac{\partial\varphi(x,\ y,\ a)}{\partial a}\right|_{a=0}$, $\eta(\varphi,\ \psi) = \left.\dfrac{\partial\psi(x,\ y,\ a)}{\partial a}\right|_{a=0}$,

запишем полученные равенства в виде

$$\xi(\varphi,\psi) = \frac{1}{A(a)}\cdot\frac{d\varphi}{da}, \qquad \eta(\varphi,\psi) = \frac{1}{A(a)}\cdot\frac{d\psi}{da}$$

или
$$\frac{d\varphi}{d\tilde{a}} = \xi(\varphi,\psi), \qquad \frac{d\psi}{d\tilde{a}} = \eta(\varphi,\psi),$$

где новый параметр $\tilde{a}$ определен формулой (2.8). Относительно него получились уравнения Ли (2.6), поэтому из теоремы 1 следует, что в этой параметризации закон умножения в группе аддитивен и имеет вид (2.3) :

Итак, мы определили (локальную) однопараметрическую группу Ли точечных преобразований, действующих на плоскости (x, y): $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ и удовлетворяющую определению 5. Все выполненные построения можно без труда обобщить на пространство $\mathbf{R}^n$ произвольной размерности.

Преобразования (2.1) называются ***точечными*** в отличие от контактных (касательных), преобразований Ли-Беклунда и нелокальных, в которых функции φ и ψ могут зависеть не только от координат точки на плоскости (x, y), но и от производных $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, … и (или) интегральных переменных.

§3. Дискретные группы преобразований.

Продолжим изучение точечных преобразований плоскости вида (2.1). Дискретные группы преобразований возникают, как правило, в следующих случаях: а) множество значений параметра a дискретно (либо он вообще не входит в преобразование явно); б) группа определена на дискретном подмножестве $\Delta \subset \mathbf{R}^2$. Простейшими примерами первого случая являются отражения относительно оси y

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{y} = y \tag{3.1}$$

и оси x

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = -y, \tag{3.2}$$

а также преобразование годографа

$$\tilde{x} = y, \quad \tilde{y} = x, \tag{3.3}$$

т.е. отражение относительно биссектрисы первого координатного угла. Примером второго случая является определение группы на решетке с целочисленными координатами узлов $\Delta = \{x, y\colon\ x, y \in \mathbf{Z}\}$, где $\mathbf{Z}$ – подмножество целых чисел. При этом

$$\tilde{x} = x + n, \quad \tilde{y} = y + m, \quad m, n \in \mathbf{Z}. \tag{3.4}$$

Эта группа вкладывается в группу, заданную на всем $\mathbf{R}^2$ формулами (3.4), которая уже относится к первому типу – это группа трансляций кристаллической решетки.

Легко видеть, что повторное применение преобразований (3.1) - (3.3) приводит к исходной точке (т.е. эквивалентно тождественному преобразованию), тогда как, напротив, сколько бы раз мы не применяли преобразование (3.4) (с заранее зафиксированными m, n), мы никогда в исходную точку не вернемся. Однако очевидно, что любое преобразование вида (3.4) эквивалентно суперпозиции некоторого числа "элементарных преобразований" (их в данном случае два):

$$\tilde{x} = x + 1, \quad \tilde{y} = y; \qquad \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y + 1 \tag{3.5}$$

и им обратных. Этот факт непосредственно подводит к ***комбинаторному представлению*** дискретной группы.

Определение 8. Множество элементов $\{\mathsf{a}_k\}$ данной дискретной группы G называется множеством ***образующих*** или ***порождающих* (*элементов*)**, если всякий элемент группы G можно выразить в виде конечного произведения их степеней (в том числе и с отрицательными показателями).

Определение 9. Дискретная группа G, которую можно задать конечным набором образующих, называется ***конечно-порожденной***. Минимальное число элементов набора, которым может быть задана группа, называется ее ***рангом.***

В дальнейшем мы будем иметь дело только с конечными и конечно-порожденными группами, поэтому будем считать, что набор образующих конечен. Так, группы (3.1)-(3.3) определены единственной образующей каждая, причем все три изоморфны, а преобразование (3.3) переводит группу (3.1) в (3.2) и наоборот. Группа (3.4) задана двумя образующими (3.5); другую группу с двумя образующими можно получить, взяв оба отражения (3.1) и (3.2). Эта группа существенно отличается от группы (3.5) – она конечна (ее порядок равен четырем), тогда как группа (3.5) бесконечна. Поэтому для определения структуры группы необходимо задать дополнительные соотношения, связывающие образующие группы.

Определение* 10**. Соотношения $g_j(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \dots, \mathsf{a}_k) = E$, $j = 1, 2, \dots, n$, где E – тождественное преобразование, называются ***определяющими соотношениями группы G, если всякое другое соотношение между $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_k$ является алгебраическим следствием указанных частных соотношений.

Набор образующих и определяющих соотношений группы G называется ее ***генетическим кодом*** или просто ***кодом*** группы G:

$$\mathsf{G}: \{\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_k; g_j(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_k) = E\}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

При $k = 1$ мы получаем ***циклическую*** группу, порядок которой m равен периоду единственного порождающего элемента a. Если m – конечное число, циклическая группа C_m задается единственным определяющим соотношением $\mathsf{a}^m = E$. У бесконечной циклической группы C_∞ определяющие соотношения отсутствуют (кроме тривиальных), таким образом, группа C_∞ является простейшим примером ***свободной*** группы ранга 1.

Рассмотрим теперь группу, порожденную двумя образующими (3.1) и (3.2), каждая из которых в отдельности задает группу C_2. Очевидно, преобразования (3.1) и (3.2) перестановочны, а их орбиты не пересекаются.

***Определение* 11**. Если группы G и H с генетическими кодами (3.6) и

$$\mathsf{H}: \{\mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_s;\ h_i(\mathsf{b}_1, \dots, \mathsf{b}_s) = E\}, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.7}$$

соответственно не имеют общих элементов, кроме E, и если каждый элемент из G перестановочен с каждым элементом из H, то $k + s$ элементов a_α и b_β порождают ***прямое произведение*** $\mathsf{G}\times\mathsf{H}$.

Для получения кода группы $\mathsf{G}\times\mathsf{H}$ достаточно взять (3.6), (3.7) и добавить к ним соотношения

$$\mathsf{a}_\alpha^{-1}\mathsf{b}_\beta^{-1}\mathsf{a}_\alpha\mathsf{b}_\beta = E, \quad \alpha = 1, \dots, k, \ \beta = 1, \dots, s. \tag{3.8}$$

Таким образом, группа, заданная образующими (3.1) и (3.2), представляет собой прямое произведение $\mathsf{C}_2 \times \mathsf{C}_2$. Она представляет собой простейшую группу диэдра (D_2) и называется ***четверной группой Клейна***. Часто ее обозначают символом V, однако мы будем избегать этого обозначения, так как символ V используется в дальнейшем для совершенно другого объекта.

Аналогично, группа (3.5) представляет собой прямое произведение $C_\infty \times C_\infty$, не имеет определяющих соотношений, кроме тривиальных и соотношения коммутации $ab = ba$, и является, таким образом, ***свободной абелевой группой*** ранга 2.

Во многих случаях число образующих прямого произведения можно уменьшить, а определяющие соотношения упростить. Рассмотрим циклические группы C_3 и C_2, определенные, соответственно, соотношениями $a^3 = E$ и $b^2 = E$. Их прямое произведение $C_3 \times C_2$ порядка 6 имеет код

$$a^3 = b^2 = a^{-1}bab = E.$$

С другой стороны, эта же группа порождается одним элементом $c = ab$ и определяется одним соотношением

$$c^6 = E,$$

откуда вытекает, что $C_3 \times C_2 \sim C_6$. Справедливо и более общее утверждение: если q и r – взаимно-простые числа, то $C_q \times C_r \sim C_{qr}$.

Этот простой пример показывает, что код группы однозначно определяет ее строение, но не наоборот: дискретная группа может быть задана кодом несколькими различными способами, в том числе и различным числом образующих. Возникают естественные вопросы о минимальном коде группы (определяющем ее ранг), а также об изоморфизме групп, заданных разными кодами. Последний вопрос известен как третья фундаментальная алгоритмическая проблема Дэна. Она не решена до сих пор, более того, уже указан ряд частных случаев, для которых проблема изоморфизма вообще неразрешима.

Однако удобство комбинаторного представления группы по сравнению с таблицей умножения (таблицей Кэли) предопределило широкое применение кодов дискретных групп в современном групповом анализе, тем более, что возникающие при исследовании дифференциальных уравнений группы имеют сравнительно простое строение. Немаловажно и то, что комбинаторная теория групп позволяет легко перейти к представлению дискретных групп графами. При этом минимальность кода не имеет принципиального значения – напротив, в ряде случаев для большей наглядности приходится увеличивать число образующих (чаще всего для того, чтобы граф стал плоским).

Строение некоторых конечных групп приведено в таблице 1.

<u>*Таблица*</u> 1.

Название	Обозначение	Порядок	Генетический код

Циклическая группа порядка n	C_n	n	$\mathsf{a}^n = E$
Группа диэдра	D_n	$2n$	$\mathsf{a}^n = \mathsf{b}^2 = (\mathsf{ab})^2 = E$
Группа кватернионов	Q	8	$\mathsf{a}^2 = \mathsf{b}^2 = (\mathsf{ab})^2$
Группа тетраэдра	A_4	12	$\mathsf{a}^3 = \mathsf{b}^3 = (\mathsf{ab})^2 = E$
Группа октаэдра (куба)	S_4	24	$\mathsf{a}^4 = \mathsf{b}^2 = (\mathsf{ab})^3 = E$

Заметим, что при n нечетном $\mathsf{D}_{2n} \sim \mathsf{C}_2 \times \mathsf{D}_n$, группа тетраэдра – частный случай знакопеременной группы A_n порядка $\frac{1}{2}n!$ (другим частным случаем является группа икосаэдра при $n = 5$, неразрешимость которой играет ключевую роль в проблеме разрешимости уравнений 5-ой степени в радикалах), группа куба — частный случай симметрической группы S_n порядка $n!$ (см. §7).

§4. <u>Инварианты дискретных и непрерывных групп</u>.

Рассмотрим теперь множество точек на плоскости (x, y), которые не изменяются при действии преобразований (2.1).

<u>Определение</u>* <u>12</u>**. Функция $F(x, y)$ называется ***инвариантом группы преобразований (2.1), если

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(x, y). \tag{4.1}$$

Легко видеть, что для дискретных групп выражение (4.1) представляет собой функциональное уравнение относительно неизвестной функции F: например, для группы (3.1) – уравнение

$$F(x, y) = F(-x, y), \tag{4.2}$$

для группы (3.3) – уравнение

$$F(x, y) = F(y, x), \tag{4.3}$$

Для группы, заданной преобразованиями $\tilde{x} = x + 1$, $\tilde{y} = y$ – уравнение

$$F(x + 1, y) = F(x, y) . \tag{4.4}$$

Решением уравнения (4.2) будет любая четная функция, уравнения (4.3) – любая кривая, симметричная относительно биссектрисы первого координатного угла, уравнения (4.4) – любая периодическая по x функция с периодом, равным единице. Множество решений любого из этих уравнений несчетно, поэтому невозможно ввести конечный базис инвариантов дискретной группы. Это обстоятельство играет ключевую роль в проблеме разрешимости дискретно-инвариантных уравнений.

Пусть теперь преобразование (2.1) дает непрерывную однопараметрическую группу. Тогда справедливо следующее утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Функция $F(x, y)$ является инвариантом непрерывной группы (2.1), если и только если она удовлетворят уравнению

$$\xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{4.5}$$

<u>Доказательство</u>. Если $F(x, y)$ удовлетворяет условию инвариантности (4.1), то выполнение (4.5) очевидно из разложения

$$F(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a)) \sim F(x + a\xi(x, y),\ y + a\eta(x, y)) \sim$$

$$\sim F(x, y) + a\left[\xi(x, y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial F}{\partial y}\right]. \tag{4.6}$$

Обратно, пусть $F(x, y)$ — решение уравнения (4.5). Так как равенство (4.5) выполняется в любой точке (x, y), запишем его в точке $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\xi(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} + \eta(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 0.$$

Воспользовавшись уравнениями Ли (2.6) и этим равенством, получим

$$\frac{dF(\varphi, \psi)}{da} = \frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{d\varphi(x, y, a)}{da} + \frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{d\psi(x, y, a)}{da} =$$

$$= \xi(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} + \eta(\tilde{x}, \tilde{y})\frac{\partial F(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = 0.$$

Следовательно, $F(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a))$ как функция от a удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\frac{dF}{da} = 0, \qquad F\Big|_{a=0} = F(x,\ y),$$

что и дает требуемое равенство (4.1) :

Из условия (4.5) следует, что всякая однопараметрическая группа точечных преобразований на плоскости имеет ***один независимый инвариант*** (сравните с инвариантами дискретных групп), в качестве которого можно взять левую часть первого интеграла $J(x, y) = C$ сопряженного с (4.5) обыкновенного дифференциального уравнения (уравнения характеристик):

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)}. \tag{4.7}$$

Любой другой инвариант является тогда функцией от J.

Если ввести в рассмотрение дифференциальный оператор

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.8}$$

то критерий инвариантности (4.5) запишется в виде $XF = 0$. Оператор (4.8) называется ***инфинитезимальным оператором*** (или просто ***оператором***) группы G преобразований (2.1). С.Ли называл оператор X символом инфинитезимального преобразования (2.4), а в физической литературе часто встречается термин ***генератор*** (***образующая***) группы (не путать с образующими дискретных групп!). В отличие от касательного вектора (ξ, η) оператор (4.8) ведет себя как ***скаляр*** при произвольной замене переменных.

Иногда бывает удобно представлять групповые преобразования (2.1), а также функции $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a))$ в виде рядов по степеням группового параметра a. Мы уже использовали такое разложение в (4.6), но ограничились членами первого порядка малости. Найдем следующие члены разложения. Обозначим

$$F(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{F}, \qquad \xi(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + \eta(\tilde{x},\tilde{y})\frac{\partial}{\partial\tilde{y}} = \tilde{X}.$$

Тогда (4.6) запишется в виде $\tilde{F} \sim F + aXF$, а равенство, использованное в доказательстве теоремы 3 – как

$$\frac{d\tilde{F}}{da} = \tilde{X}\tilde{F}. \tag{4.9}$$

Учитывая, что правая часть равенства (4.9) снова является функцией от $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, мы можем применить его повторно и получить

$$\frac{d^2\tilde{F}}{da^2} = \frac{d}{da}\left(\tilde{X}\tilde{F}\right) = \tilde{X}\left(\tilde{X}\tilde{F}\right) = \tilde{X}^2\tilde{F}, \qquad \frac{d^3\tilde{F}}{da^3} = \tilde{X}^3\tilde{F},$$

и так далее. Подставляя эти выражения в формулу Тейлора, получим следующее разложение

$$\widetilde{F} = F + aXF + \frac{a^2}{2!}X^2F + \ldots = \left(1 + aX + \frac{a^2}{2!}X^2 + \ldots\right)F \equiv e^{aX}F. \qquad (4.10)$$

Частный случай формулы (4.10) (в векторной форме)

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = e^{aX}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

дает известное представление непрерывной однопараметрической группы с помощью экспоненциального отображения.

Следующее утверждение формулирует ***принцип подобия*** всех однопараметрических точечных групп на плоскости.

***Теорема* 4**. Всякая однопараметрическая группа G преобразований (2.1) подходящей заменой переменных

$$t = t(x, y), \qquad u = u(x, y) \qquad (4.11)$$

приводится к группе переносов $\widetilde{t} = t + a$, $\widetilde{u} = u$ с оператором $\widetilde{X} = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Такие переменные t и u называются ***каноническими переменными.***

Доказательство. При замене переменных (4.11) инфинитезимальный оператор (4.8) преобразуется по формуле

$$X \to X(t)\frac{\partial}{\partial t} + X(u)\frac{\partial}{\partial u},$$

поэтому канонические переменные находятся из уравнений $X(t) = 1$, $X(u) = 0$, т.е.

$$\xi\frac{\partial t}{\partial x} + \eta\frac{\partial t}{\partial y} = 1, \qquad \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

так что в качестве одной из переменных (u) выбирается инвариант.

В заключении этого параграфа приведем операторы, инварианты и формулы для канонических переменных наиболее часто встречающихся непрерывных однопараметрических групп на плоскости.

Таблица 2.

Преобразования	**Оператор**	**Инвариант**	**Канонические переменные**
Переносы по x: $\widetilde{x} = x + a$, $\widetilde{y} = y$	$\dfrac{\partial}{\partial x}$	y	$t = x$, $u = y$

по y: $\tilde{x}=x,\ \tilde{y}=y+a$ вдоль прямой $kx+ly=0$: $\tilde{x}=x+la,\ \tilde{y}=y-ka$	$\frac{\partial}{\partial y}$ $l\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial y}$	x $kx+ly$	$t=y,\quad u=x$ $t=x/l,\ u=kx+ly$
Вращение $\tilde{x}=x\cos a+y\sin a$ $\tilde{y}=y\cos a-x\sin a$	$y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$	x^2+y^2	$t=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$
Преобразования Лоренца $\tilde{x}=x\operatorname{ch}a+y\operatorname{sh}a$, $\tilde{y}=y\operatorname{ch}a+x\operatorname{sh}a$	$y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$	y^2-x^2	$t=\frac{1}{2}\ln\frac{y+x}{y-x}$, $u=y^2-x^2$
Преобразования Галилея $\tilde{x}=x+ay,\ \tilde{y}=y$	$y\frac{\partial}{\partial x}$	y	$t=x/y,\ u=y$
Однородное растяжение $\tilde{x}=xe^a,\ \tilde{y}=ye^a$	$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	x/y	$t=\ln x,\ u=x/y$
Неоднородное растяжение $\tilde{x}=xe^a,\ \tilde{y}=ye^{ka}$	$x\frac{\partial}{\partial x}+ky\frac{\partial}{\partial y}$	x^k/y	$t=\ln x,\ u=x^k/y$
Проективное преобразование $\tilde{x}=\frac{x}{1-ax},\ \tilde{y}=\frac{y}{1-ax}$	$x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$	x/y	$t=-1/y,\quad u=x/y$

Заметим, что все группы, кроме последней, определены на всей плоскости и при произвольных значениях параметра a, тогда как последнее преобразование задает ***локальную*** группу.

§5. <u>Обобщение на многомерный случай</u>.

Приведенные выше определения и теоремы о непрерывных однопараметрических группах на плоскости естественно обобщаются на многомерный случай, когда рассматриваются группы преобразований не на плоскости, а в n-мерном пространстве точек $x = (x_1, \dots , x_n) \in \mathbf{R}^n$ Рассмотрим систему уравнений

$$F_1(x) = 0, \dots , F_s(x) = 0, \; s < n, \tag{5.1}$$

в предположении, что ранг матрицы $\left\| \frac{\partial F_x}{\partial x_i} \right\|$ равен s во всех точках x, удовлетворяющих системе (5.1). Система уравнений (5.1) задает $(n - s)$- -мерную поверхность M.

<u>Определение</u>* 13**. Говорят, система уравнений (5.1) инвариантна относительно группы G преобразований (или ***допускает группу G)

$$\tilde{x}_i = f_i(x, a), \quad i = 1, \dots , n, \tag{5.2}$$

если каждая точка x поверхности M перемещается по этой поверхности, т.е. из $x \in M$ следует $\tilde{x} \in M$.

<u>Теорема 5</u>. Всякая однопараметрическая группа G преобразований (5.2) в $\mathbf{R}^n$ некоторой невырожденной заменой переменных

$$z_i = z_i(x) \tag{5.3}$$

приводится к группе переносов вдоль оси z_n.

<u>Доказательство</u>. Пусть группа (5.2) имеет оператор

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{5.4}$$

При замене переменных (5.3) оператор (5.4) принимает вид

$$X' = \sum_{i=1}^{n} X(z_i) \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

В качестве первых $n - 1$ новых переменных z_i выберем любой набор $n - 1$ функционально независимых инвариантов $J_1(x), \dots , J_{n-1}(x)$ группы G, например, $n - 1$ первых интегралов характеристической системы

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n(x)},$$

а переменную z_n найдем из уравнения $X(z_n) = 1$. Полученная система функций $z_n = J_1(x), \dots , z_{n-1} = J_{n-1}(x), z_n = z_n(x)$, определяет искомую замену переменных (5.3) :

Теорема 6. Система уравнений (5.1) допускает группу G, если и только если

$$XF_k\big|_M = 0, \quad k = 1, \ \dots \ , s. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть система (5.1) инвариантна. Тогда для каждой точки $x \in M$ и всех допустимых значений параметра a преобразования (5.2) выполняются равенства

$$F_1(\tilde{x}) = 0, \ \dots \ , F_s(\tilde{x}) = 0, \tag{5.6}$$

т.е. если x – решение системы (5.1), то $\tilde{x}$ – тоже решение. Подставляя в эти равенства разложения $F_k(\tilde{x}) \sim F_k(x) + aXF_k$, $k = 1, \dots , s$, и учитывая, что $F_k(x) = 0$, получаем условие (5.5).

Обратно, пусть выполнены равенства (5.5). Нужно показать, что отсюда следует выполнение уравнений (5.6) для всех $x \in M$. Очевидно, условие (5.5) является условием касания вектора $\xi(x)$ к поверхности M в точке x. Эта геометрическая интерпретация подсказывает, что условие касания сохраняется при любой невырожденной замене переменных (5.3). Поэтому мы можем сначала "выпрямить" поверхность M, взяв в замене (5.3) в качестве первых s функций $z_i(x)$ левые части уравнений (5.1), и задать ее уравнениями

$$x_k = 0, \quad k = 1, \dots , s, \tag{5.7}$$

Тогда условие (5.5) упрощается и принимает вид

$$\xi_k(0, \dots , 0, x_{s+1}, \dots , x_n) = 0, \quad k = 1, \dots , s, \tag{5.8}$$

Нам необходимо показать, что уравнения (5.7) сохранятся и после преобразования (5.2), т.е. что

$$\tilde{x}_k = 0, \quad k = 1, \dots , s, \tag{5.9}$$

для всех точек $x = (0, \dots , 0, x_{s+1}, \dots , x_n)$. Запишем уравнения Ли в виде

$$\frac{d\tilde{x}_k}{da} = x_k(\tilde{x}_1, \ \dots \ , \tilde{x}_s, \ \tilde{x}_{s+1}, \ \dots \ , \tilde{x}_n), \quad k = 1, \dots , s, \tag{5.10}$$

$$\frac{d\tilde{x}_{s+l}}{da} = x_{s+l}(\tilde{x}_1, \ \dots \ , \tilde{x}_n), \qquad l = 1, \dots , n - s, \tag{5.11}$$

а в качестве начального значения $\tilde{x}\big|_{a=0} = x$ возьмем любую точку $x \in M$, т.е. $x = (0, \dots , 0, x_{s+1}, \dots , x_n)$. Тогда из условия (5.8) видно, что функции (5.9) удовлетворяют уравнениям (5.10) и нулевым начальным условиям. Остальные функции $\tilde{x}_{s+l}$ находятся из (5.11) после подстановки в эти уравнения $\widetilde{x}_k = 0$. В силу единственности решения задачи Коши это означает выполнение (5.9) для всех $x \in M$, т.е. инвариантность поверхности M:

Замечание. Следует помнить, что при доказательстве этой теоремы (при приведении уравнений (5.1) к виду (5.7)) существенно используется условие регулярности задания поверхности M уравнениями (5.1).

Теорема 7. Поверхность M, инвариантная относительно группы G, может быть задана системой уравнений вида

$$\Phi_k(J_1(x), \dots, J_{n-1}(x)) = 0, \quad k = 1, \dots, s, \tag{5.12}$$

где функции $J_1(x), \dots, J_{n-1}(x)$ образуют базис инвариантов группы G, если инфинитезимальный оператор группы G не обращается в нуль на поверхности M.

Доказательство. Пусть поверхность M задана уравнениями (5.1) и удовлетворяет условию регулярности

$$\operatorname{rank}\left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \right\|_M = s.$$

Ввиду инвариантности поверхности M каждая ее точка перемещается преобразованиями группы G по этой поверхности. Поэтому, ограничив действие группы G, мы получим семейство преобразований поверхности M в себя. Это семейство снова ***образует локальную группу*** и называется группой, ***индуцированной*** на инвариантной поверхности M. Обозначим индуцированную группу символом $\widetilde{G}$.

Сделаем замену переменных $x \to (z, y)$:

$$z_k = F_k(x), \quad y_l = \varphi_l(x), \quad k = 1, \dots, s; \quad l = 1, \dots, n - s, \tag{5.13}$$

где $F_k(x)$ – левые части уравнений (5.1), а $\varphi_l(x)$ – любые функции, удовлетворяющие условию невырожденности замены (5.13). Тогда точки поверхности M характеризуются равенствами $z_k = 0$, $k = 1, \dots, s$, и индуцированная группа $\widetilde{G}$ действует в $(n - s)$-мерном пространстве переменных $y = (y_1, \dots, y_{n-s})$. Следовательно, индуцированная группа имеет ровно $n - s - 1$ функционально-независимых инвариантов. В частности, ее инвариантами являются значения функций $J_1(x), \dots, J_{n-1}(x)$ на поверхности M, которые мы обозначим через $\widetilde{J}_1(y), \dots, \widetilde{J}_{n-1}(y)$. Среди них независимыми могут быть не более чем $n - s - 1$; пусть число независимых равно $n - \sigma - 1 \le n - s - 1$. Тогда существует σ функциональных связей

$$\Phi_k(\widetilde{J}_1(y),\ \dots\ ,\widetilde{J}_{n-1}(y)) = 0,\quad k = 1, \dots , \sigma, \tag{5.14}$$

где $\sigma \geq s$.

Считая левые части (5.14) известными, определим поверхность $\widetilde{M}$ уравнениями

$$\Phi_k(\ J_1(x), \dots , J_{n-1}(x)\ ) = 0,\quad k = 1, \dots , \sigma, \tag{5.15}$$

Поверхность $\widetilde{M}$, очевидно, содержит поверхность M, так как любая точка $x\in M$ удовлетворяет уравнениям (5.15) в силу (5.14). Следовательно, $\dim \widetilde{M} \geq \dim M$. Но так как $\dim \widetilde{M} = n - \sigma$, $\dim M = n - s$, то $n - \sigma \geq n - s$, т.е. $\sigma \leq s$. Последнее неравенство вместе с условием $\sigma \geq s$ дает $\sigma = s$, т.е. $\dim \widetilde{M} = \dim M$. Из равенства размерностей и включения $M \subset \widetilde{M}$ следует локальное совпадение $M = \widetilde{M}$. Таким образом, уравнение (5.15) представляет собой искомое инвариантное задание (5.12) инвариантной поверхности M:

<u>*Замечание*</u>. Отыскание функциональных связей (5.14) между значениями инвариантов на поверхности M предоставляет способ нахождения инвариантного задания (5.12). Утверждение теоремы позволяет дать полное описание всех инвариантных поверхностей данной группы G с помощью ее базисных инвариантов.

§6. Инвариантные множества дискретных групп.

Как было показано в §4, инварианты дискретных групп на плоскости не образуют конечного базиса. Это в полной мере справедливо и для пространств большей размерности. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^3$ и дискретную группу G, заданную преобразованиями

$$\widetilde{x} = \varphi(x, y, z),\quad \widetilde{y} = \psi(x, y, z),\quad \widetilde{z} = \chi(x, y, z). \tag{6.1}$$

Заметим, что неподвижные точки преобразования (6.1) (если они существуют), являются решением ***алгебраической*** системы

$$x_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0),\quad y_0 = \psi(x_0, y_0, z_0),\quad z_0 = \chi(x_0, y_0, z_0). \tag{6.2}$$

Размерность множества инвариантов $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, зависит от свойств преобразования (6.1), т.е. от вида функций φ, ψ, χ, и может принимать значения от нуля (например, в случае циклической группы C_∞, заданной преобразованием $\widetilde{x} = x + 1$, $\widetilde{y} = y + 1$, $\widetilde{z} = z + 1$) до двух (например, для группы C_2, заданной преобразованиями $\widetilde{x} = x$, $\widetilde{y} = y$, $\widetilde{z} = 1/z$). Максимальная размерность $\dim M_0 = 3$ достигается лишь в случае тривиальной группы, заданной тождественным преобразованием.

Рассмотрим теперь инвариантные поверхности, не требуя неподвижности каждой их точки при действии преобразований (6.1). Одномерное множество (кривую в $\mathbf{R}^3$, $\dim M = 1$) можно задать в виде $M = (x,\ h_1(x),\ h_2(x))$, а условие инвариантности M с учетом (6.1) будет

$$\begin{gathered}\forall \mathsf{g} \in \mathsf{G} \qquad \mathsf{g}:(x,\ h_1(x),\ h_2(x)) \to \\ \to (\varphi(x,\ h_1(x),\ h_2(x)),\ \psi(x,\ h_1(x),\ h_2(x)),\ \chi(x,\ h_1(x),\ h_2(x))) \equiv \\ \equiv (\tilde{x},\ h_1(\tilde{x}),\ h_2(\tilde{x})).\end{gathered} \tag{6.3}$$

где $\tilde{x} = \varphi\ (x,\ h_1(x),\ h_2(x)) = f(x)$ – ***функция сдвига***. Из условия (6.3) следует система функциональных уравнений для определения неизвестных функций h_1 и h_2:

$$\begin{cases}\psi(x,\ h_1(x),\ h_2(x)) = h_1(\varphi(x,\ h_1(x),\ h_2(x))), \\ \chi(x,\ h_1(x),\ h_2(x)) = h_2(\varphi(x,\ h_1(x),\ h_2(x))),\end{cases} \tag{6.4}$$

любое решение которой определяет некоторое инвариантное множество M и функцию сдвига $f(x)$.

Аналогично, двумерное множество (поверхность в $\mathbf{R}^3$, $\dim M = 2$) можно задать в виде $M = (x,\ y,\ h(x,\ y))$, а условие инвариантности M будет

$$\begin{gathered}\forall \mathsf{g} \in \mathsf{G} \qquad \mathsf{g}:(x,\ y,\ h(x,\ y)) \to \\ \to (\varphi(x,\ y,\ h(x,\ y)),\ \psi(x,\ y,\ h(x,\ y)),\ \chi(x,\ y,\ h(x,\ y))) \equiv \\ \equiv (\tilde{x},\ \tilde{y},\ h(\tilde{x},\ \tilde{y})),\end{gathered}$$

здесь появляются уже две функции сдвига двух переменных

$$\tilde{x} = \varphi(x, y, h(x, y)) = f(x, y), \qquad \tilde{y} = \psi(x, y, h(x, y)) = g(x, y),$$

а для неизвестной функции $h(x, y)$ получаем одно функциональное уравнение:

$$\chi\ (x, y, h(x, y)) = h(\varphi(x, y, h(x, y)),\ \psi(x, y, h(x, y))). \tag{6.5}$$

Даже при конкретных φ, ψ, χ найти все решения системы (6.4) или уравнения (6.5) удается лишь в исключительных случаях. Поэтому необходимо конкретизировать либо функцию сдвига, либо искомое множество M.

Пусть дискретная группа G задана двумя образующими

$$\begin{aligned} &\mathsf{g}:\ (x,y,z)\to\left(\frac{1}{1-z},-\frac{x}{x+1},\frac{2y+1}{y}\right),\\ &\mathsf{r}:\ (x,y,z)\to(y,x,3-z). \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\mathsf{g}^3 = \mathsf{r}^2 = (\mathsf{gr})^2$, т.е. образующие g и r задают группу диэдра D_2. Решение системы (6.2) дает нам множество инвариантов — кривую

$$M_0(\mathsf{g}) = \left(-\frac{y}{y+1},\ y,\ \frac{2y+1}{y}\right) \tag{6.6}$$

и прямую

$$M_0(\mathsf{r}) = (y, y, 3/2), \tag{6.7}$$

их ***центром*** является точка $M_0(\mathsf{g}, \mathsf{r}) = (-2, -2, 3/2\,)$.

Найдем теперь одномерные инвариантные множества в предположении, что функция сдвига — дробно-линейная:

$$\tilde{y} = \frac{ay+b}{cy+d}.$$

Формула (6.3) запишется в виде

$$\mathsf{g}:\ (\,h_1(y),\ y,\ h_2(y)\,)\to$$

$$\to\left(\frac{1}{1-h_2(y)},\ -\frac{h_1(y)}{1+h_1(y)},\ \frac{2y+1}{y}\right)\equiv\left(h_1\!\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right),\ \frac{ay+b}{cy+d},\ h_2\!\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)\right).$$

Система (6.4) в данном случае решается очень просто, так как образующая g полностью “перемешивает” компоненты вектора (x, y, z). Формула для функции сдвига сразу же дает нам h_1, первое уравнение системы – h_2. Второе уравнение системы решается в результате “расщепления” по независимой переменной y (уравнения системы должны удовлетворяться при произвольном y) и дает условия на коэффициенты a, b, c и d. Система (6.4) имеет два решения – g-инвариант (6.6), являющийся одновременно (g, r)-инвариантным множеством $(b = c = 0,\ a = d)$ и множество

$$M(\mathrm{g}) = \left(-\frac{b(ay+b)}{(ab-a^2-ad-d^2)y+b(b+d)},\ y,\ 2+\frac{(a^2+ad+d^2)y+ab}{b(dy-b)}\right), \tag{6.8}$$

$bc = -a^2 - ad - d^2,$ с функцией сдвига $\tilde{y} = -\dfrac{b(ay+b)}{(a^2+ad+b^2)y-bd}$. Аналогично, для образующей r формула (6.3) запишется в виде

$$\mathsf{r}:\ (h_1(y),\ y,\ h_2(y))\to(y,\ h_1(y),\ 3-h_2(y))\equiv$$

$$\equiv\left(h_1\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right),\ \ \frac{ay+b}{cy+d},\ \ h_2\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)\right),$$

система (6.4) имеет тоже два решения: а) $a = d,\ b = c = 0$ – r-инвариант (6.7); б) $a = -d$, что дает инвариантное множество

$$M(r)=\left(\frac{ay+b}{cy-a},\ \ y,\ \ h_2(y)\right) \tag{6.9}$$

с функцией сдвига $\tilde{y}=\dfrac{ay+b}{cy-a}$; функция $h_2(y)$ определяется функциональным уравнением

$$h_2(y)+h_2\left(\frac{ay+b}{cy-a}\right)=3.$$

Возникновение функционального уравнения объясняется тем, что образующая r не полностью "перемешивает" компоненты вектора (x, y, z), оставляя z-зависимую компоненту на месте. Центр инвариантных множеств (6.8) и (6.9) дает (g, r)-инвариантное множество

$$M(\mathrm{g},\mathrm{r})=\left(\frac{(a+1)y+1}{a(3a+2)y-(a+1)},\ \ y,\ \ \frac{(3a^2+5a+1)y+a-1}{ay-1}\right). \tag{6.10}$$

Если считать $x=\dfrac{(a+1)y+1}{a(3a+2)y-(a+1)}$ независимой переменной, то исключая a из формулы (6.10), получим двумерное (g, r)-инвариантное множество в виде ***поверхности пятого порядка***

$$xy(y-x)z^2-(2x^2y^2+7xy^2+x^2y+y^2+6xy+x^2)z+3x^2y^2+$$
$$+8xy^2+4x^2y+y^2+9xy+2x^2-y+x=0,$$

при этом

$$a=\frac{y+x-2xy\pm\sqrt{(y+x-2xy)^2+12xy(y+x+1)}}{6xy}.$$

Теперь конкретизируем искомое множество M, например, будем искать двумерное r-инвариантное множество с дробно-линейной функцией

$$z = z(x, y):$$

$$\mathrm{r}\colon\left(x,\ y,\ \frac{ay+bx+c}{dy+ex+f}\right)\to\left(y,\ x,\ \frac{(3d-a)y+(3e-b)x+3f-c}{dy+ex+f}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \frac{a\tilde{y}+b\tilde{x}+c}{d\tilde{y}+e\tilde{x}+f}\right).$$

Таких множеств существует два:

$$\left(x,\ y,\ \frac{(3+\alpha)y+\alpha x+\beta}{y-x}\right) \tag{6.11}$$

и

$$\left(x,\ y,\ \frac{3ay+3bx+3c}{(a+b)y+(a+b)x+2c}\right) \tag{6.12}$$

или, при $a+b\neq 0$

$$\left(x,\ y,\ \frac{3\alpha y+3\beta x+3\gamma}{y+x+2\gamma}\right).$$

Можно выделить из найденных множеств одномерные с линейной зависимостью $x=x(y)$, однако лучше повторить весь алгоритм:

$$\mathsf{r}\!:\ \left(Ay+B,\ y,\ \frac{ay+c}{dy+f}\right)\to\left(y,\ Ay+B,\ \frac{(3d-a)y+3f-c}{dy+f}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(A\tilde{y}+B,\ \tilde{y},\ \frac{a\tilde{y}+c}{d\tilde{y}+f}\right),$$

тогда получим частный случай (6.11)

$$\left(A-y,\ \ y,\ \ \frac{3ay+3b}{aA+2b}\right)\quad \text{или}\quad \left(A-y,\ \ y,\ \ \frac{3y+3B}{A+2B}\right)$$

и случай, не имеющий аналогов в множествах (6.11), (6.12)

$$\left(A-y,\ \ y,\ \ \frac{3y+3B}{2y-A}\right). \tag{6.13}$$

Заметим, что плоскость $z=3/2$ является r-инвариантным множеством, содержащемся в (6.11) при $\alpha=-3/2$, $\beta=0$ и в (6.12) при $a=b=0$.

Наложение условия g-инвариантности на множества (6.11)-(6.13) приводит к следующему результату: множество (6.11) вообще не содержит g-инвариантных подмножеств; в множестве (6.12) выделяется двумерное $(\mathsf{r},\ \mathsf{g})$-инвариантное множество

$$\left(x,\ \ y,\ \ \frac{y+2x+3}{y+x+2}\right), \tag{6.14}$$

включающее в себя в качестве подмножеств прямые $M_0(\mathsf{r})$ (6.7) и $(-y--1, y, 1-y)$, а также неподвижные точки преобразований rg и gr

$$M_0(\mathsf{rg}) = \left(-2, \ \frac{1}{1-z}, \ z\right) \quad \text{и} \quad M_0(\mathsf{gr}) = \left(\frac{1}{1-z}, \ -2, \ z\right);$$

в множестве (6.13) выделяется подмножество

$$\left(-y-3, \ y, \ \frac{3y+5}{2y+3}\right).$$

Вышеприведенные построения доказывают следующее утверждение.

Теорема 8. Среди поверхностей второго порядка

$$\left(x, \ y, \ \frac{Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F}{ay+bx+c}\right)$$

существует единственное (r, g)-инвариантное множество – гиперболический параболоид (6.14) :

§7. Разрешимые группы.

Пусть в определении 3 (§1) множество $X = M_n$ конечно, и его элементы занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Взаимно-однозначное отображение этого множества на себя называют ***подстановкой***. Каждую подстановку можно полностью описать схемой, в которой под каждым номером k указывается номер $s(k)$ элемента, являющегося образом элемента с номером k. Так, схема

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

означает подстановку множества M_4, в которой 1 переходит в 2, 2 переходит в 4, 3 переходит в себя и 4 переходит в 1. Подстановки образуют группу относительно операции суперпозиции подстановок; для конечного множества M_n группу подстановок называют ***симметрической группой*** и обозначают через S_n. Порядок симметрической группы S_n равен $n!$

Для более удобного описания подгрупп симметрической группы S_n используют представление подстановок циклами - символом $(pqrs)$ обозначается циклическая подстановка, переводящая p в q, q в r, r в s, s в p и оставляющая все остальные объекты неподвижными. Любая подстановка представляется однозначно (с точностью до порядка) в виде произведения циклических подстановок или циклов:

$$(ikl\ \dots\ )(pq\ \dots\ )\ \dots\ ,$$

где любые два цикла не имеют ни одного общего элемента. Сомножители в этом произведении перестановочны.

С помощью таких символов можно представить $3! = 6$ подстановок группы S_3 следующим образом:

$$(1), (12), (13), (23), (123), (132).$$

Выпишем подгруппы группы S_3:

$$\mathsf{A}_3\text{:}\ (1), (123), (132); \qquad (7.1)$$
$$\mathsf{C}_2^{(1)}\text{:}\ (1), (23);\quad \mathsf{C}_2^{(2)}\text{:}\ (1), (13);\quad \mathsf{C}_2^{(3)}\text{:}\ (1), (12);$$
$$E\text{:}\ (1).$$

Важнейшей подгруппой является подгруппа (7.1); причем при $n = 3$ $\mathsf{A}_3 \sim \sim \mathsf{C}_3$. Вообще, подгруппой любой симметрической группы S_n является знакопеременная группа A_n, состоящая из тех подстановок, которые, будучи применены к переменным $x_1, \dots, x_n$, переводят функцию

$$\Delta = \prod_{i<k} (x_i - x_k)$$

в себя. Такие подстановки называются ***четными***, а остальные – ***нечетными***. Последние меняют знак у функции Δ. Каждая ***транспозиция*** (т.е. подстановка, меняющая местами две цифры) является нечетной подстановкой. Так как фиксированная транспозиция при умножении переводит четные подстановки в нечетные и наоборот, количество четных и нечетных подстановок одинаково и равно $n!/2$.

Если $\mathsf{g} \subset \mathsf{G}$ – подгруппа и $a \in \mathsf{G}$ – элемент группы G, множество $\{a\mathsf{g}\}$ называется ***левым смежным классом***, а множество $\{\mathsf{g}a\}$ – правым смежным классом группы G по подгруппе g.

Определение **14.** Подгруппа g называется ***нормальной*** или ***инвариантной подгруппой*** группы G, если для любого элемента $a \in \mathsf{G}$ правый и левый смежные классы совпадают: $\{\mathsf{g}a\} = \{a\mathsf{g}\}$, или, что то же, подгруппа g перестановочна с любым элементом $a \in \mathsf{G}$.

Так, симметричная группа S_4 имеет, кроме себя самой и единичной подгруппы, лишь две нормальные подгруппы – знакопеременную группу A_4 и четверную группу Клейна D_2, состоящую из подстановок

$$(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23).$$

Последняя группа — коммутативная (абелева).

Теорема 9. Класс e группы G, который при гомоморфизме $\mathsf{G} \to \to \mathsf{H}$ переходит в единичный элемент E группы H, является нормальной подгруппой в G; остальные классы являются смежными классами по этой нормальной подгруппе.

Доказательство. Покажем, что e – подруппа. Пусть $a, b \in \mathsf{G}$ переходят при гомоморфизме в E, тогда ab снова переходит в $E^2 = E$, так что e содержит произведение двух любых своих элементов. Далее, элемент a^{-1} переходит также в $E^{-1} = E$, и класс e содержит элементы, обратные ко всем своим элементам. Далее, все элементы произвольно взятого левого смежного класса $a\mathsf{e}$ переходят в элемент $\tilde{a}E = \tilde{a}$. Если, наоборот, элемент a' переходит в элемент $\tilde{a}$, то определим x из уравнения $ax = a'$. Получается, что $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{a} \Rightarrow \tilde{x} = E$. Следовательно, элемент x лежит в классе e, а элемент a' принадлежит классу $a\mathsf{e}$. Поэтому класс группы G, который соответствует элементу $\tilde{a}$, является левым смежным классом $a\mathsf{e}$. Но точно так же можно сказать, что класс, который соответствует элементу $\tilde{a}$, должен быть правым смежным классом $\mathsf{e}a$. Таким образом, правый и левый смежные классы совпадают, $a\mathsf{e} = \mathsf{e}a$, и класс e – нормальная подгруппа :

Нормальная подгруппа e, элементы которой переходят при гомоморфизме в единичный элемент, называется ***ядром гомоморфизма***. Смежные классы составляют множество, гомоморфное группе G, т.е. ***гомоморфный образ*** группы G. Группу, состоящую из этих смежных классов, называют ***факторгруппой*** группы G по нормальной подгруппе g и обозначают символом G/g. Порядок факторгруппы G/g равен числу различных смежных классов группы G по подгруппе g (называемому ***индексом*** подгруппы g в G).

Теорема 10 (о гомоморфизмах групп). Каждая группа H, на которую гомоморфно отображается группа G, изоморфна факторгруппе G/e; при этом нормальная подгруппа e является ядром данного гомоморфизма. Обратно, группа G гомоморфно отображается на любую свою факторгруппу G/e (где e – нормальная подгруппа) :

Укажем некоторые важные факторгруппы симметрической группы S_n:

$$\mathsf{S}_n/\mathsf{A}_n \sim \mathsf{C}_2; \quad \mathsf{S}_4/\mathsf{D}_2 \sim \mathsf{S}_3.$$

Пусть H, N – подгруппы в G. Обозначим через HN группу, состоящую из всевозможных произведений ab, где $a \in \mathsf{H}$, $b \in \mathsf{N}$.

Теорема 11 (первая теорема об изоморфизме). Если N – нормальная подгруппа группы G, и H – подгруппа в G, то пересечение $\mathsf{H} \cap \mathsf{N}$ является нормальной подгруппой в H и

$$\mathsf{HN}/\mathsf{N} \sim \mathsf{H}/(\mathsf{H} \cap \mathsf{N}) :$$

<u>Теорема</u>* <u>12</u> *<u>(вторая теорема об изоморфизме)</u>. Если $\widetilde{\mathsf{G}} = \mathsf{G/N}$ и $\widetilde{\mathsf{H}}$ – нормальная подгруппа в $\widetilde{\mathsf{G}}$, то соответствующая подгруппа H в G является нормальной и

$$\mathsf{G/H} \sim \widetilde{\mathsf{G}} / \widetilde{\mathsf{H}} : \qquad (7.2)$$

Изоморфизм (7.2) можно записать также в виде $\mathsf{G/H} \sim (\mathsf{G/N})/(\mathsf{H/N})$.

<u>Определение</u>* <u>15</u>**. Группа G называется ***простой, если в ней нет нормальных подгрупп, отличных от нее самой и единичной подгруппы, т.е. ***собственных*** нормальных подгрупп.

Очевидно, группы простого порядка – всегда простые, так как порядок подгруппы должен быть делителем порядка всей группы; следовательно, в такой группе вообще нет собственных подгрупп. Любое одномерное векторное пространство – простое, потому что каждое собственное подпространство имеет размерность нуль и состоит из одного лишь нулевого вектора.

Нормальным рядом группы G (иногда его еще называют ***матрешкой*** группы G) называется последовательность подгрупп в G:

$$\{\mathsf{G} = \mathsf{G}_0 \supset \mathsf{G}_1 \supset \ldots \supset \mathsf{G}_l = E\}, \qquad (7.3)$$

в которой для каждого $\nu = 1, \ldots, l$ подгруппа G_ν является нормальной в $\mathsf{G}_{\nu-1}$. Мы в формуле (7.3) намеренно использовали знак строгого включения $\supset$, а не $\supseteq$ – здесь и далее мы будем рассматривать нормальные ряды ***без повторений***. Фактор-группы $\mathsf{G}_{\nu-1}/\mathsf{G}_\nu$ называются ***факторами***. Число факторов l называется ***длиной*** нормального ряда. Другой нормальный ряд

$$\{\mathsf{G} \supset \mathsf{H}_1 \supset \ldots \supset \mathsf{H}_m = E\}, \qquad (7.4)$$

называется ***уплотнением*** ряда (7.3), если все подгруппы G_ν из (7.3) встречаются и в (7.4). Так, для группы S_4 ряд $\{\mathsf{S}_4 \supset \mathsf{A}_4 \supset \mathsf{D}_2 \supset E\}$ является уплотнением ряда $\{\mathsf{S}_4 \supset \mathsf{D}_2 \supset E\}$. Нормальный ряд, который нельзя уплотнить, называется ***композиционным***. Композиционными являются: в группе S_3 ряд $\{\mathsf{S}_3 \supset \mathsf{A}_3 \supset E\}$, в группе S_4 ряд $\{\mathsf{S}_4 \supset \mathsf{A}_4 \supset \mathsf{D}_2 \supset \{1, (12)(34)\} \supset \supset E\}$. В обоих случаях исключена возможность дальнейших уплотнений, потому что индексы последующих нормальных подгрупп в предыдущих подгруппах являются простыми числами, соответственно 2, 3 (так как $\mathsf{A}_3 \sim \sim \mathsf{C}_3$) и 2, 3, 2, 2 (так как $\{1, (12)(34) \sim \mathsf{C}_2\}$). Нормальный ряд является композиционным, если и только если между двумя любыми его членами $\mathsf{G}_{\nu-1}$ и G_ν нельзя включить какую-либо отличную от $\mathsf{G}_{\nu-1}$ нормальную подгруппу или, что то же, группа $\mathsf{G}_{\nu-1}/\mathsf{G}_\nu$ – простая. Простые факторы называются композиционными.

Определение* 16**. Группа называется ***разрешимой, если у нее есть нормальный ряд, в котором все факторы абелевы.

Из структуры композиционных рядов симметрических групп S_3 и S_4 следует, что они разрешимы. Все последующие симметрические группы S_n $(n > 4)$ разрешимыми не являются. В них всегда есть нормальная подгруппа индекса 2 – знакопеременная группа A_n, однако, композиционный ряд каждой из них переходит от A_n сразу к E в соответствии со следующим утверждением.

***Теорема* 13**. Знакопеременная группа A_n $(n > 4)$ – простая :

Существует полезный критерий разрешимости группы, равносильный определению 16 и основанный на следующем понятии:

Определение* 17**. Элементы $aba^{-1}b^{-1}$ произвольной группы G и их произведения (конечные) образуют группу, называемую ***коммутантом группы G.

Коммутант $K(\mathsf{G})$ является нормальной подгруппой в G, и фактор-группа по ней абелева. Так как коммутант сам по себе является группой, в нем также можно рассмотреть коммутант $K(K(\mathsf{G}))$, и так далее. Обозначим

$$K(K(...(K(\mathsf{G}))...)) = K_r(\mathsf{G}),$$

так что $K_{r+1}(\mathsf{G}) = K(K_r(\mathsf{G}))$.

***Теорема* 14**. Группа G разрешима, если и только если цепочка групп $\mathsf{G}, K(\mathsf{G}), K_2(\mathsf{G}), K_3(\mathsf{G}), ...$ заканчивается при некотором конечном n единичной группой, т.е. при некотором n имеем

$$K_n(\mathsf{G}) = \{E\}:$$

Так, любая абелева группа разрешима, так как у нее $K_n(\mathsf{G}) = \{E\}$.

Теоремы 10-14 даются без доказательств, так как техника последних либо элементарна, либо не представляет особого интереса для предмета изучения настоящего курса лекций. Интересующимся мы рекомендуем доказать эти теоремы самостоятельно (обратившись при необходимости к дополнительной литературе).

§ 8. Алгебраические уравнения.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$F(x) = 0. \tag{8.1}$$

В соответствии с определением 13 (**§**5) будем говорить, что уравнение (8.1) допускает группу $\tilde{x} = f(x)$, если

$$F(\bar{x})\Big|_{F(x)=0} = 0. \qquad (8.2)$$

Из условия инвариантности (8.2) следует, что любое преобразование допускаемой группы (называемой ***группой Галуа***) переводит систему корней уравнения (8.1) в себя, т.е. переставляет корни. Следовательно, группу Галуа можно рассматривать как группу некоторых подстановок корней.

Основным результатом теории Галуа является следующее утверждение.

***Теорема* 15**. Алгебраическое уравнение (8.1) разрешимо в радикалах, если и только если его группа Галуа разрешима :

Из этой теоремы и теоремы 13 следует

Теорема* 16 *(теорема Абеля). Общее уравнение (8.1) степени $n \geq$ ≥ 5 неразрешимо в радикалах.

Доказательство. В общем случае группой подстановок n корней, т.е. группой Галуа уравнения (8.1) степени n, является симметрической группой S_n, которая неразрешима при $n > 4$:

Заметим, что ***обратная задача теории Галуа*** – всякая ли группа перестановок может быть группой Галуа для некоторого уравнения $F(x) =$ $= 0$ с рациональными коэффициентами – решена пока лишь в отдельных частных случаях. Поэтому до сих пор отсутствует полное описание и классификация подклассов уравнений (например, 5-ой степени), разрешимых в радикалах. Тем не менее, теория Галуа явилась первым примером того, что идеи симметрии, связывавшиеся ранее исключительно с геометрией, играют фундаментальную роль во всей математике и вообще в естествознании. Оказывается возможным ***прогнозирование*** свойств уравнения – группу Галуа можно вычислить, не зная корней уравнения (8.1), а пользуясь лишь соображениями симметрии.

Рассмотрим уравнение

$$x^4 - x^2 + 1 = 0 \qquad (8.3)$$

Очевидно, многочлен в левой части является неприводимым, т.е. не разлагается на множители меньшей степени с рациональными коэффициентами. Далее, пусть α – какой-либо корень уравнения (8.3). Тогда $-\alpha$, $-1/\alpha$ и $-1/\alpha$ – тоже корни, причем все они попарно различны. Ясно, что в группу Галуа уравнения (8.3) войдут далеко не все подстановки симметрической группы S_4, так как любая подстановка, оставляющая один из корней инвариантным, “оставит на месте” и остальные корни, и будет эквивалентна тождественному преобразованию E. Нетривиальными оказываются лишь следующие три подстановки:

$$a = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_4), \quad b = (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4), \quad c = (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3).$$

Они образуют четверную группу Клейна D_2, которая, как известно, разрешима.

В ряде случаев даже знание некоторой подгруппы группы Галуа позволяет упростить исходное уравнение, и в конечном итоге решить его. Здесь в той или иной мере действует ***общий принцип симметрии: подстановка инвариантов допускаемой группы в качестве новых переменных может понизить размерность или порядок (степень) уравнения.*** С одним примером мы уже встречались в §5: система уравнений (5.12), записанная в инвариантах, содержит переменных на единицу меньше, чем исходная система (5.1). Рассмотрим еще два простых примера.

Биквадратное уравнение (а также бикубическое и тому подобные)

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

инвариантно относительно отражения $\tilde{x} = -x$, образующего группу C_2. Одним из инвариантов этой группы является $y = x^2$. Подстановка y в качестве новой переменной приводит к квадратному уравнению, т.е. степень уравнения понижается в 2 раза. Вообще, уравнение степени mn, которое может быть записано в виде уравнения степени m относительно x^n, допускает циклическую группу C_n, элементами которой являются n значений $\tilde{x}_i = \sqrt[n]{x}$. Подстановка инварианта $y = x^n$ понижает степень уравнения в n раз.

Возвратное уравнение четной степени (например, четвертой)

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \tag{8.4}$$

инвариантно относительно инверсии $\tilde{x} = 1/x$, также образующей группу C_2. Одним из инвариантов этой группы будет $y = x + \dfrac{1}{x}$; уравнение (8.4) можно (после деления на x^2) записать в виде

$$a\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a = 0,$$

т.е. (через инвариант y) как квадратное $ay^2 + by + c - 2a = 0$, понизив тем самым степень уравнения в 2 раза. Если возвратное уравнение имеет нечетную степень, всегда имеется корень $x = -1$. Поделив уравнение на $(x + 1)$, мы приходим к возвратному уравнению четной степени, т.е. к уже рассмотренному случаю. Таким образом, возвратные уравнения степеней $2n$ и $2n + 1$ могут быть приведены к уравнению n-ой степени.

Здесь уместно сделать два замечания. Первое: общий принцип симметрии сформулирован не утвердительно, а, если так можно выразиться, рекомендательно (в смысле – “полезно попробовать подставить инварианты ... ”). Причиной является ***наличие*** (тогда принцип формулируется как теорема) ***или отсутствие*** (тогда принцип остается благим советом) ***конечного базиса инвариантов*** допускаемой группы. Как уже указывалось (§4), дискретные группы могут не иметь такового, и при решении, например, дискретно-инвариантных дифференциальных уравнений мы сталкиваемся с проблемой выбора новых переменных из некоторого бесконечного множества.

Второе замечание связано с процедурой понижения степени (порядка, размерности) в результате подстановки новых переменных – инвариантов. Реально происходит не уменьшение степени уравнения, а приведение уравнения ***к системе специального вида***, одно из уравнений которой может решаться независимо от другого. Так, уравнение (8.4) приводится к системе

$$\begin{cases} ay^2 + by + c - 2a = 0, \\ x + \dfrac{1}{x} = y, \end{cases}$$

первое уравнение которой вообще не содержит переменной x. Поэтому решение уравнения (8.4) сводится к последовательному (а не совместному, как было бы в общем случае) решению двух квадратных уравнений.

В заключение этого параграфа приведем пример построения класса кривых, допускающих некоторую группу. Рассмотрим кривые, заданные уравнением

$$Ax^n y^m + Bx^\nu y^\mu = 1, \tag{8.5}$$

и найдем среди них инвариантные относительно растяжения $x = \alpha\tilde{x}, \quad y = \beta\tilde{y}$. Для этого необходимо, чтобы

$$A\tilde{x}^n\tilde{y}^m + B\tilde{x}^\nu\tilde{y}^\mu = 1.$$

Простые вычисления дают следующие условия инвариантности:

$$\alpha^{\mu - \frac{m\nu}{n}} = 1, \quad \beta = \alpha^{-\frac{m}{n}}.$$

Очевидно, при $\mu n = \nu m$ кривая (8.5) допускает непрерывную группу растяжений, а при n нечетном и

$$\mu - \frac{m\nu}{n} = 2k,$$

где $k \in \mathbf{Z}$ – любое целое число – группу C_2 ($\alpha = \pm 1$). Если рассматривать (8.5) не как кривую, а как рельеф функции комплексной переменной $y(x)$, то результат будет еще интереснее. Выбирая

$$\mu - \frac{m\nu}{n} = k,$$

мы получаем класс рельефов, допускающий циклическую группу C_k. Так, рельеф $Ax^2y^2 + By + Cx^3 = 0$ допускает группу C_5, так как $\alpha^5 = = 1$, $\beta = \alpha^3$.

§ 9. <u>Функциональные уравнения .</u>

В решении некоторых классов функциональных уравнений ключевую роль также играет симметрия , но не наличие допускаемой группы , а групповое свойство входящих в уравнение аргументов . Мы будем рассматривать функциональные уравнения вида

$$\Phi(\, t, x(t), x(\, f_1(t)), \ldots , x(\, f_{n-1}(t))) = 0, \tag{9.1}$$

где $x(t)$ — искомая функция , t, $f_1(t), \ldots , f_{n-1}(t)$ — n аргументов.

***<u>Теорема</u>* <u>17</u>** *(А.Н.Шарковский)*. Пусть n аргументов уравнения (9.1) являются элементами конечной группы G_m порядка m. Если уравнение (9.1) не инвариантно относительно группы G_m, оно сводится к системе m уравнений ($m \geq n$) без преобразований аргумента

$$\Phi_k(\, t, x_1(t), \ldots , x_m(t)) = 0, \quad k = 1, \ldots , m. \tag{9.2}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{t, f_1(t), \ldots , f_{n-1}(t)\} \subseteq G_m = \{t, f_1(t), \ldots , f_{m-1}(t)\}$. Полагая $x(\, f_i(t)) = x_{i+1}(t)$, $f_0(t) = t$, $i = 0, \ldots , m - 1$, и, подставляя вместо t в уравнение (9.1) $f_1(t), \ldots , f_{m-1}(t)$, получим m ***различных*** алгебраических уравнений (9.2) относительно m неизвестных $x(t) = x_1(t), x_2(t), \ldots , x_m(t)$. Требование отсутствия инвариантности уравнения (9.1) относительно группы G_m является принципиальным: инвариантность влечет совпадение уравнений системы (9.2), исключая тем самым возможность их решения :

<u>Замечание</u>. В оригинальной публикации А.Н.Шарковского и Ю.Л. Майстренко условие отсутствия инвариантности по непонятной причине опущено.

В качестве примера рассмотрим два уравнения. В первом из них

$$ax(t) + bx(-t) = h(t) \tag{9.3}$$

аргументы образуют хорошо известную (§3) группу отражений C_2, заданную единственной образующей $\tilde{t} = f_1(t) = -t$. Система (9.2) имеет вид

$$\begin{cases} ax_1(t) + bx_2(t) = h(t), \\ bx_1(t) + ax_2(t) = h(-t), \end{cases}$$

ее решение

$$x_1(t) = \frac{ah(t) - bh(-t)}{a^2 - b^2} = x(t), \quad x_2(t) = -\frac{bh(t) - ah(-t)}{a^2 - b^2}. \tag{9.4}$$

Уравнение (9.3) инвариантно относительно группы преобразований аргументов, если $a = b$, а функция $h(t)$ – четная. Очевидно, что в этом случае решение (9.4) не имеет смысла. Во втором уравнении

$$ax(t) + bx(-t) + cx\left(\frac{1}{t}\right) = h(t) \tag{9.5}$$

аргументы $t, -t, 1/t$ не образуют группу, но являются подмножеством группы Клейна $D_2\{t, -t, 1/t, -1/t\}$, которая может быть задана двумя образующими $\tilde{t}_1 = -t,\ \tilde{t}_2 = 1/t$. Поступая аналогично предыдущему, получаем систему ***четырех*** уравнений

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = h(t), \\ bx_1 + ax_2 + cx_4 = h(-t), \\ cx_1 + ax_3 + bx_4 = h\left(\dfrac{1}{t}\right), \\ cx_2 + bx_3 + ax_4 = h\left(-\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$$

Если определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \neq 0.$$

то решение исходного уравнения (9.5) запишется в виде

$$x(t)=\frac{D_1}{D}, \quad \text{где} \quad D_1=\begin{vmatrix} h(t) & b & c & 0 \\ h(-t) & a & 0 & c \\ h\left(\frac{1}{t}\right) & 0 & a & b \\ h\left(-\frac{1}{t}\right) & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Так, если $a=b=c=1$, решение будет

$$x(t)=\frac{1}{3}\left[h(t)+h(-t)+h\left(\frac{1}{t}\right)-2h\left(-\frac{1}{t}\right)\right].$$

***Теорема* 18** *(А.Н.Шарковский)*. Пусть n аргументов уравнения (9.1) являются элементами бесконечной группы G. Если уравнение (9.1) не инвариантно относительно группы G, а группа G содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу H и фактор-группа G/H конечна, то уравнение (9.1) сводится к системе уравнений с одним преобразованием аргумента .

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, подгруппа H задана своей образующей h, и фактор-группа G/H имеет порядок p. Тогда группа G разбивается на p смежных классов по нормальной подгруппе H:

$$\mathrm{G}=\bigcup_{i=0}^{p-1}K_i, \quad K_0=\mathrm{H}, \quad K_i=g_i\mathrm{H},$$

где g_i – любой элемент из класса K_i, $i=0, 1, \dots, p-1$. Полагая $x(g_i(t))=$ $=x_i(t)$, $i=0, 1, \dots, p-1$, $g_0=t$ (тождественное преобразование) и подставляя в (9.1) вместо t последовательно $g_0(t)$, $g_1(t), \dots, g_{p-1}(t)$, получаем систему

$$\Phi_{i,k_i}\left(t,\{x_0\},\{x_1\},\dots,\{x_{p-1}\}\right)=0, \quad i=0,\ 1,\ \dots,\ p-1, \tag{9.6}$$

где $\{x_j\}=\{x_j(t),x_j(h(t)),x_j(h(h(t))),\dots,x_j(h^{(k_j)}(t))\}$, $0\le k_i<\infty$, $j=0, 1,$ $\dots, p-1$. Пусть

$$k=\max_{0\le i\le p-1}k_i.$$

Полагая $x_i(h^j(t))=y_{ik+j}(t)$, $i=0, 1, \dots, p-1$; $j=0, 1, \dots, k-1$, перепишем систему (9.6) в виде

$$\Phi_s(t,\ y_0,\ y_1,\ \ldots\ .\ y_{kp-1}) = 0, \tag{9.7}$$

$$y_{ik+j}\,(h(t)) = y_{ik+j+1}\,(t),\quad i = 0, 1, \ldots, p-1;\quad j = 0, 1, \ldots, k-2.$$

Система (9.7) является системой с одним преобразованием аргумента (kp уравнений для kp неизвестных) :

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x(t+1) = ax(t) + bx(-t) \tag{9.8}$$

Здесь G – бесконечная группа с образующими $f_1(t) = -t$ (C_2) и $f_2(t) = t +$ $+1$ (C_∞). Подгруппа $H(f_2)$ является нормальной, фактор-группа G/H конечна (циклическая группа C_2), поэтому все условия теоремы 18 выполнены, и от уравнения (9.8) можно перейти к системе двух уравнений

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_1(t) + bx_2(t), \\ x_2(t+1) = -bx_1(t) + \dfrac{1-b^2}{a}x_2(t), \end{cases} \tag{9.9}$$

с одним преобразованием аргумента, где $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x(-t)$. Общее решение системы (9.9) может быть выражено в явном виде. Например, если $|\,b^2 - a^2 - 1\,| > 2|\,a\,|$, то

$$\begin{cases} x_1(t) = \omega_1(t)\lambda^t + \omega_2(t)\lambda^{-t}, \\ x_2(t) = \dfrac{\lambda - a}{b}\omega_1(t)\lambda^t + \dfrac{1-a\lambda}{b\lambda}\omega_2(t)\lambda^{-t}, \end{cases} \tag{9.10}$$

где $\lambda = -\dfrac{b^2-a^2-1}{2a} + \sqrt{\left(\dfrac{b^2-a^2-1}{2a}\right)^2 - 1}$, $\omega_i(t)$, $i = 1, 2$ – произвольные периодические функции периода 1. Каждому решению $x(t) = q(t)$ уравнения (9.8) соответствует решение $x_1(t) = q(t)$, $x_2(t) = q(-t)$ системы (9.9); обратно, если $x_1(t) = q_1(t)$, $x_2(t) = q_2(t)$ – решение системы (9.9), то для того, чтобы $x(t) = q_1(t)$ было решением уравнения (9.8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$q_1(-t) = q_2(t), \tag{9.11}$$

Выбирая из решений (9.10) те, которые удовлетворяют условию (9.11), окончательно получим общее решение уравнения (9.8) в виде

$$x(t) = \omega(t)\lambda^t + \frac{\lambda - a}{b}\omega(-t)\lambda^{-t},$$

где $\omega(t)$ – произвольная периодическая функция периода 1.

§10. Библиографические указания и комментарии.

Для подробного изучения объектов и понятий, введенных в §1, достаточно обратиться к следующим двум весьма авторитетным источникам:

1. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. –520 с.
2. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Введение в теорию Ли – §§2,5 и посвященная ей (вторая) часть §4 – излагается почти исключительно по работам Н.Х.Ибрагимова:

3. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли)/ УМН, 1992. – Т.47, вып.4(286). – с.83-144.
4. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, сер. Математика и кибернетика, № 8. – 1989. – 48 с.
5. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. – М.: Знание, сер. Математика и кибернетика, № 7. – 1991. – 48 с.

Изучение строения дискретных групп (§3) может потребовать более глубоких познаний комбинаторной теории групп. Здесь можно рекомендовать следующие книги (две последние очень полезны и при изучении представления дискретных групп графами):

6. Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. – М.: Мир, 1980. – 448 с.
8. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
9. Чандлер Б., Магнус В. Развитие комбинаторной теории групп. – М.: Мир, 1985. – 256 с.
10. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. – М.: Мир, 1971. – 248 с.

Инвариантные множества дискретных групп (§6) играют заметную роль в дискретно-групповом анализе дифференциальных уравнений, основные понятия и идеи которого изложены в следующих двух книгах:

11. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.

12. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.

Материал по разрешимым группам и группам Галуа (§§7,8) дан в сильно сокращенном виде, исходя из того минимума, который может потребоваться в дальнейшем изложении. Особенно это касается теории Галуа – не имея возможности включить в курс теорию полей и их нормальных расширений, мы вынуждены ограничиться простейшей формулировкой основной теоремы и опустить доказательство. Поэтому весьма полезным будет знакомство со следующими книгами:

13. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
14. Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
15. Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976. – 208 с.
16. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. – М.: Наука, 1989. – 336 с.

Как уже указывалось, в §9 (функциональные уравнения) нам пришлось существенно изменить формулировки теорем по сравнению с оригинальной публикацией. После ссылки на нее мы приводим еще один источник, в котором суммирован ряд результатов, полученных для функциональных уравнений:

17. Майстренко Ю.Л., Шарковский А.Н. О понижении числа преобразований аргумента в функциональных и дифференциально-функциональных уравнениях // Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: изд. ИМ АН УССР, 1977. – с.57-70.
18. Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1974. – 119 с.

И еще две книги, первую из которых мы особенно рекомендуем к вводной части настоящего курса – об основателе современного группового анализа:

19. Полищук Е.М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.
20. Дужин С.В., Чеботаревский Б.Д. От орнаментов до дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 256 с.

Последняя книга очень полезна как своеобразный "букварь" по симметрии, но следует помнить, что утверждение авторов о бесполезности дискретных групп для интегрирования дифференциальных уравнений по меньшей мере спорно ...

ОГЛАВЛЕНИЕ