

ИНТЕРЕСЫ ИСКУССТВА  
И СОЦИАЛИЗМА  
В СОВРЕМЕННЫХ  
ВУКАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«ПРОГРЕСС»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОГРЕСС» МОСКВА 1977

# READINGS IN MATHEMATICAL SOCIAL SCIENCE

---

Edited by  
**Paul F. Lazarsfeld**  
and  
**Neil W. Henry**

1966, SCIENCE RESEARCH ASSOCIATES CHICAGO

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ

---

Сборник статей  
под редакцией П. Лазарсфельда и Н. Генри

*Сокращенный перевод с английского*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОГРЕСС»  
МОСКВА 1973

Перевод: В. А. Ирикова, М. И. Шабунина, В. Г. Шеверова

Общая редакция и послесловие  
д-ра филос. наук Г. В. Осипова  
и канд. филос. наук Э. П. Андреева

1-5-5  
8—73

Редакция литературы  
по вопросам философии и права

© Перевод на русский язык с изменениями «Прогресс» 1973

Как у нас в стране, так и за рубежом широкое развитие получили математические методы в области социальных исследований. Предлагаемый советскому читателю сборник содержит переводы статей зарубежных, главным образом американских, авторов по вопросам применения математических методов и моделей в современной буржуазной социологии. Среди его соавторов — известные американские специалисты: П. Лазарсфельд, Г. Саймон, Дж. Маршак, У. Гибсон и др. Сборник включает оригинальные статьи, сыгравшие значительную роль в развитии математических методов в современной буржуазной социологии и давшие импульс большому числу последующих исследований. В книге рассмотрен широкий круг проблем применения математики в социологии, таких, как проблемы измерения, проблемы изучения малых групп, математическое изучение сложных структур, моделирование социальных процессов.

Учитывая содержание и значение статей для советского читателя, при подготовке издания на русском языке была изменена структура сборника и сделаны сокращения. Более подробный анализ излагаемых в книге проблем читатель найдет в послесловии Э. П. Андреева и Г. В. Осипова.



## *Раздел I*

# **ИЗМЕРЕНИЕ**





# ФАКТОРНЫЙ, ЛАТЕНТНО-СТРУКТУРНЫЙ И ЛАТЕНТНО-ПРОФИЛЬНЫЙ АНАЛИЗ<sup>1</sup>

*У. Гибсон*

В настоящей статье рассматривается модель факторного анализа и латентно-структурная схема Лазарсфельда, предназначенная для анализа дихотомических признаков, и показывается, как эта модель позволяет обойтись без решения трех запутанных проблем факторного анализа: оценки взаимосвязей, вращения и криволинейности. Затем латентно-структурная модель обобщается до анализа латентного профиля для изучения соотношений между количественными данными. Предлагаются четыре варианта латентного профиля, которые обсуждаются с позиции их ограничений, вследствие чего затрагиваются вопросы латентной метрики и размерности. Отмечается возможность использования в латентно-структурной модели эмпирических соотношений высших порядков.

В своей книге «Многофакторный анализ» Терстоун замечает: «Было бы несчастьем, если бы первоначальный успех аналитических методов, которые здесь будут описаны, очаровал нас настолько, что мы совершенно пренебрегли бы развитием других концепций, которые могут быть порождены совершенствованием измерений и несоответствиями теории и эксперимента» [16, стр. 70]. В настоящей работе делается попытка руководствоваться этим высказыванием.

Сначала дается краткий очерк развития модели факторного анализа и отмечаются присущие ей три концептуальные и процедурные проблемы: (i) как оценить взаимосвязи в событии, если исследуется только остаточная дисперсия, (ii) как разрешить неопределенность вращений

---

<sup>1</sup> Наметки последней модели имеются в ранней работе Грина [11].

и (iii) что делать с дополнительными факторами, которые приходится вводить при появлении нелинейностей в данных. Обсуждаются некоторые современные взгляды на многомерный анализ качественных данных — латентно-структурная модель Лазарсфельда — с отдельными замечаниями об их вкладе в решение узловых вопросов факторного анализа. Затем эти новые концепции обобщаются, чтобы получить альтернативный способ анализа соотношений между количественными измерениями. Это и есть модель латентного профиля.

Все эти три модели обсуждаются строго с позиции выборочных статистик. Вопрос о получении генеральной совокупности, выборка из которой может считаться представительной, во всех этих трех моделях не рассматривается.

Даны четыре примера моделей латентного профиля. Два из них являются гипотетическими, но форма их близка к двум эмпирическим примерам. Эти примеры обсуждаются с точки зрения их дальнейшей обработки, касающейся метрики и размерности латентного пространства. Коротко обсуждается использование эмпирических соотношений высших порядков для тестирования и дальнейшей детализации модели латентного профиля и выясняется возможность близкого сходства между результатами латентно-структурной модели и модели латентного профиля. Заканчивая статью, автор подчеркивает необходимость гибкого подхода при выборе новых вариантов многомерных моделей.

## НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Основной постулат факторного анализа [16, стр. 63] выражается в виде простого линейного уравнения

$$Z_{ij} = a_{j1}Z_{i1} + a_{j2}Z_{i2} + \dots + a_{jq}Z_{iq}, \quad (1)$$

где  $Z_{ij}$  есть стандартный балл индивида  $i$  по тесту  $j$ ;  $Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{iq}$  — стандартные баллы индивида по гипотетическому набору статистически независимых характеристик или факторов. (Это не мешает последовательному переходу к коррелированным факторам в любом заданном анализе. Однако алгебра коррелированных факторов не вводится, поскольку это только усложни-

ло бы обсуждение.) Коэффициенты  $a$  являются набором весов для теста  $j$  и инвариантны по отношению к индивидам.

Алгебра суммирования и условия независимости факторов приводят непосредственно от (1) к основному уравнению факторного анализа [18, стр. 78]:

$$r_{jk} = a_{j1}a_{k1} + a_{j2}a_{k2} + \dots + a_{jq}a_{kq}. \quad (2)$$

Таким образом,  $r_{jk}$  — корреляция между тестами  $j$  и  $k$  — выражается в виде простой билинейной функции коэффициентов  $a$  для этих двух тестов. Эти коэффициенты  $a$ , известные как нагрузки факторов, могут быть интерпретированы как корреляция между тестами и факторами.

Важной задачей факторного анализа набора тестов  $s$  является решение относительно всех  $a$  системы  $s(s-1)/2$  билинейных уравнений, вытекающих из (2). Количество факторных нагрузок есть  $sq$  по  $q$  на каждый из  $s$  тестов. Эти нагрузки можно определить многими методами, которые развивались в течение ряда лет. Большинство их основано на попытке подсчета взаимных корреляций с использованием минимального числа факторов. Точный подсчет взаимных корреляций с помощью факторов требуется редко из-за наличия выборочной ошибки и ожидания, во всяком случае небольшого, несоответствия между моделью и данными. Допускаются неисчезающие «остаточные» корреляции, если только они малы и не имеют систематической структуры.

Одной из трудностей, присущих факторной модели, является вопрос о том, как быть с теми элементами корреляционной матрицы, которые имеют одинаковые индексы, а именно с диагональными элементами  $r_{jj}$ . Если в качестве таких элементов брать обычные собственные корреляции величин, это вылилось бы в попытку исследовать все дисперсии каждого теста, включая и ту их сомнительную часть, где дисперсии велики. Включить надежность тестов в диагональные элементы матрицы значило бы проявить интерес к исследованию всех «истинных» или повторяющихся дисперсий тестов, включая дисперсии, специфические для каждого теста и не связанные с другими тестами из набора. Наиболее общеприняты среди специалистов по факторному анализу попытки исследовать только ту часть дисперсии теста, называемую общей факторной дисперсией (communality), которая относится и к другим тестам набора. С другой стороны,

дисперсию можно было бы определить как те части собственных корреляций, объясняемых факторами, которые достаточны для объяснения корреляций между тестами. В любом случае эти общие факторные дисперсии не входят в эмпирические данные и нужны в самом начале для построения максимально эффективного решения. В принципе общие факторные дисперсии можно было бы определить через некоторые операции (ср. 16, стр. 294—307), применяемые к эмпирическим данным в корреляционной матрице, но эти операции занимают обычно так много времени, что часто прибегают к значительному их упрощению. Для получения первоначального факторного решения применяются грубые оценки общей факторной дисперсии, которые в свою очередь дают улучшенные оценки для второй такой же итерации, и так далее до тех пор, пока общие факторные дисперсии в достаточной степени стабилизируются. К счастью, оказывается, что при больших сериях тестов может понадобиться как большое, так и малое число итераций, но для малых серий для достаточно точного определения общих факторных дисперсий требуется немного итераций.

Второй и более важной задачей в факторном анализе является присущая ему частичная неопределенность величин  $a$ , известная как проблема вращений. Наиболее просто понять ее в терминах  $q$ -мерной геометрии. Величины  $a$  для теста  $j$  можно рассматривать как проекции точки  $j$  на систему координатных осей в  $q$ -пространстве. Тогда набор факторных нагрузок в  $s$  опытах определяет взаимное расположение  $s$  точек через их проекции на  $q$ -мерную систему координат, но сами по себе уравнения факторного анализа не говорят, какое положение системы координат среди бесконечного числа различных ее положений в  $q$ -пространстве является предпочтительным.

Закреплено только начало координат, так что координатные оси могут свободно вращаться, не изменяя конфигурации множества точек. Предложено много способов решения этой неопределенности вращения. По-видимому, наиболее распространен принцип простых структур, который редуцирует факторную структуру тестов увеличением числа близких к нулю факторных нагрузок. Многие из этих способов, особенно те, которые основаны на методе простых структур, характеризуются большим объемом машинных вычислений, геометрической интуи-



цией или тем и другим вместе; многие способы дискутируются или должны дискутироваться; все они относятся к рассуждениям, которые не базируются на уравнениях, определяющих модель.

Другой неясной проблемой в модели факторного анализа является парадокс сложности факторов [2, 4, 12, 28]. Если факторный анализ применяется к серии тестов, существенно различающихся по трудности, но совершенно очевидно зависящих от одной латентной величины, то возникает не один, а несколько факторов, по одному на каждую ступень трудности. Это в основном приписывается нелинейным соотношениям между тестами, существенно различными по трудности, причем эта нелинейность вызвана дифференциальной асимметрией распределений баллов. Отметим, однако, что факторная модель накладывает ограничение линейности только на соотношения между опытами и факторами, как это видно из (1).

Не будем утверждать плодотворность (или отсутствие таковой) факторного анализа. Неуместно обсуждать здесь и случаи неправильного его применения. Две другие модели, которые будут обсуждаться в дальнейшем, могут, по-видимому, применяться при решении того же круга проблем, и они в такой же степени могут применяться не по назначению.

## НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ПОНЯТИЯ: ЛАТЕНТНО-СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ

Будет подвергнута обсуждению только одна разновидность латентно-структурного анализа — модель дискретных классов. Латентно-структурный анализ является методом Лазарсфельда исследования внутренних соотношений между дихотомическими признаками, такими, как ответы на вопросы анкеты. Метод основан на составлении линейных уравнений рекрутирования следующего вида:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_q, \\ n_j &= n_1 p_{1j} + n_2 p_{2j} + \dots + n_q p_{qj}, \\ n_{jk} &= n_1 p_{1jk} + n_2 p_{2jk} + \dots + n_q p_{qjk}, \\ n_{jkl} &= n_1 p_{1jkl} + n_2 p_{2jkl} + \dots + n_q p_{qjkl} \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{3}$$

Величины, находящиеся слева, являются эмпирически данными, или наблюдаемыми. Они соответствуют числу людей во всей выборке  $n$ , числу людей, ответивших положительно на один вопрос  $n_j$ , числу людей, ответивших положительно на два вопроса  $n_{jk}$ , и т. д. Величины справа — подлежащие дальнейшему рассмотрению латентные параметры модели. Количество величин справа  $q$  равно числу подгрупп (*латентных классов*), на которые в результате анализа будет производиться разделение всей выборки. Число людей в латентном классе 1 равно  $n_1$  и т. д. *Латентная вероятность*  $p_{1j}$  равна доле членов латентного класса 1, давших положительный ответ на вопрос  $j$ , вероятность  $p_{1jk}$  равна доле членов латентного класса 1, давших положительные ответы на вопросы  $j$  и  $k$ , и т. д. Уравнения (3) просто показывают, каким образом эмпирические данные рекрутируются из латентных классов. По ходу дела можно заметить, что уравнения (3), которые являются системой уравнений рекрутирования, линейны по своей природе, в то время как исходные уравнения факторного анализа линейны просто потому, что их такими выбрали. Различие между наблюдаемыми и латентными характеристиками, которые так выпукло обнаруживаются в теории латентной структуры, являются, конечно, центральным и в факторном анализе. Тесты и их взаимные корреляции являются эмпирическими, а факторы и их нагрузки — латентными величинами. То же отличие имеет место и в модели латентного профиля.

Упомянутые уравнения рекрутирования одинаково верны для любого способа классификации и для любого числа латентных классов. Следующий шаг — выбор подходящего основания для классификации. Это основа модели латентной структуры. Естественно требовать, чтобы каждый латентный класс был однородным относительно любых исследуемых (латентных) величин, могущих влиять на наблюдаемые соотношения. Полная однородность не обязательна, если отклонения от среднего в классе случайны. Такие случайные отклонения, конечно, не коррелированы внутри класса. Следовательно, необходимо потребовать, чтобы каждый латентный класс был достаточно однородным по отношению к любой такой латентной величине, так чтобы все единичные высказывания *внутри класса* были независимы в смысле статистической независимости. Эта независи-

мость внутри классов выражается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} p_{1jk} &= p_{1j}p_{1k}, \quad p_{2jk} = p_{2j}p_{2k}, \quad \dots, \quad p_{qjk} = p_{qj}p_{qk} \\ p_{1jkl} &= p_{1j}p_{1k}p_{1l}, \quad p_{2jkl} = p_{2j}p_{2k}p_{2l}, \quad \dots, \quad p_{qjkl} = \\ &= p_{qj}p_{qk}p_{ql} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4)$$

Подстановка (4) в (3) приводит к основным уравнениям латентно-структурного анализа [14, стр. 385]

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_q, \\ n_j &= n_1p_{1j} + n_2p_{2j} + \dots + n_qp_{qj}, \\ n_{jk} &= n_1p_{1j}p_{1k} + n_2p_{2j}p_{2k} + \dots + n_qp_{qj}p_{qk}, \\ n_{jkl} &= n_1p_{1j}p_{1k}p_{1l} + n_2p_{2j}p_{2k}p_{2l} + \dots + n_1p_{qj}p_{qk}p_{ql} \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, все наблюдаемые совместные частоты выражаются через  $(q + sq)$  латентных параметров,  $q$  объемов классов и  $q$  латентных вероятностей ( $p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{qj}$ ) для каждого из  $s$  признаков теста. Последовательные ступени эмпирических частот насчитывают соответственно 1,  $s$ ,  $s(s-1)/2$  и т. д. членов, являющихся коэффициентами бинома  $(a+b)^s$ . Складывая их, получаем  $2^s$  уравнений, связывающих наблюдаемые и латентные величины в этой модели.

Задача здесь, как и в факторном анализе, заключается в решении основных уравнений относительно неизвестных латентных параметров. Несколько решений латентной структуры уже существует. Большинство из них [1, 7] не используют совместные частоты с повторяющимися индексами ( $n_{jj}, n_{jjk}, n_{jjj}, n_{jjkl}$  и т. д.). В анализе латентной структуры они рассматриваются как аналоги общих факторных дисперсий факторного анализа, которые нам неизвестны. Представление их в виде эквивалентов, соответствующих смешанным частотам более низкой ступени без повторяющихся индексов (то есть  $n_{jj} = n_j$ ,  $n_{jjk} = n_{jk}$ ,  $n_{jjj} = n_j$  и т. д.), было бы аналогом использования равных единице корреляций в факторном анализе. Вместо этого модель латентной структуры обычно оперирует с этими элементами как с индексами, величины которых определяются латентными параметрами модели, на основе наблюдаемых эмпирических данных.

Патентно-структурное решение, данное Андерсоном и еще ранее Грином [10], исключает в латентно-структурном анализе аналог проблемы вращения путем использования эмпирических величин с более чем двумя индексами, таких, как  $n_{jkl}$ . (Поверхностное исследование показывает, что было бы внутренне противоречивым для факторной модели использовать наблюдаемые соотношения между более чем двумя переменными сразу. Происходит это оттого, что по крайней мере некоторые из совместных распределений факторных признаков должны были бы быть асимметричными, что противоречит основному постулату линейности факторного анализа.)

С помощью величин частот более высокой ступени бесконечного числа решений, полученных вращением и одинаково хорошо объясняющих наблюдаемые частоты более низкой ступени, отбирается *одно* решение. Другой подход к решению скрытой структуры [5, 6] связан с частичным (иногда значительным) уменьшением неопределенности, порождаемой вращением, без расчета величин частот высших ступеней. Это достигается за счет использования того простого факта, что скрытые параметры, будучи вероятностными, не могут быть ни отрицательными, ни больше единицы.

Заметим, что вывод модели латентной структуры не содержит ограничений на криволинейные отношения ни между наблюдаемыми величинами, ни между ними и латентными величинами.

Модель латентной структуры уже показала себя многообещающей в эмпирических исследованиях [13, 15]. Только то ограничение, что она рассматривает дихотомии, не позволяет ей с легкостью конкурировать с факторным анализом количественных переменных. Рассматриваемая ниже модель латентного профиля является обобщением латентно-структурного анализа на случай количественных эмпирических переменных [11].

## НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕКРУТИРОВАНИЯ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Разумно задать вопрос, может ли линейность, присущая уравнениям рекрутирования, быть основой анализа взаимных отношений между наблюдаемыми переменными,



которые носят скорее количественный, чем качественный характер. В этом параграфе будет построена такая система уравнений рекрутирования.

Предположим, что имеется набор  $s$  количественных измерений, таких, как баллы тестов в выборке из  $n$  человек. Пусть по некоторому правилу каждый член этой выборки приписывается одной, и только одной, из  $q$  подгрупп. Тогда размер выборки, суммы баллов и суммы произведений баллов для всей выборки выражаются через соответствующие статистики для подгрупп следующим простым образом:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_q, \\ \sum^n X_{ij} &= \sum^{n_1} X_{ij} + \sum^{n_2} X_{ij} + \dots + \sum^{n_q} X_{ij}, \\ \sum^n X_{ij} X_{ik} &= \sum^{n_1} X_{ij} X_{ik} + \sum^{n_2} X_{ij} X_{ik} + \dots + \sum^{n_q} X_{ij} X_{ik}, \quad (6) \\ \sum^n X_{ij} X_{ik} X_{il} &= \sum^{n_1} X_{ij} X_{ik} X_{il} + \sum^{n_2} X_{ij} X_{ik} X_{il} + \dots \\ &\dots + \sum^{n_q} X_{ij} X_{ik} X_{il} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Все суммирование в (6) проводятся по индивидам. Суммирование слева проводится по всей выборке, а справа — по членам различных подгрупп; величина  $X_{ij}$  есть балл индивида  $i$  по тесту  $j$ , и она может быть дана в единицах стандартного отклонения или в каких-либо других единицах. То же самое относится и к  $X_{ik}$ ,  $X_{il}$  и т. д.

Обозначим для удобства различные суммы в (6) буквой  $m$  с соответствующими индексами. Так,  $m_j$  и  $m_{jk}$  представляют соответственно сумму баллов теста  $j$  и сумму произведений баллов тестов  $j$  и  $k$ , причем все суммы берутся по полной выборке. Наоборот,  $m_{1j}$  и  $m_{1jk}$  обозначают те же суммы только для первой подгруппы и т. д. Уравнения (6) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_q, \\ m_j &= m_{1j} + m_{2j} + \dots + m_{qj}, \\ m_{jk} &= m_{1jk} + m_{2jk} + \dots + m_{qjk}, \\ m_{jkl} &= m_{1jkl} + m_{2jkl} + \dots + m_{qjkl} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (7)$$

Будем называть величины  $m$  в (7) моментами различных порядков. О моментах в третьей строке, относящихся

к двум тестам, будем говорить, что они второго порядка, а для трех тестов — третьего и т. д. Величины  $m$  для одного теста  $j$  будем называть моментами первого порядка, а  $n$ , размер выборки, назовем моментом выборки нулевого порядка. Величины  $m$  слева в (7) назовем моментами выборки, а справа — моментами подгрупп.

Следует отметить, что (6) и (7) никоим образом не ограничивают ни эмпирические данные, ни метод разделения на подгруппы. Темой двух следующих параграфов будет построение методики группирования, которая позволит преобразовать эти уравнения рекрутирования в математическую модель.

## ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ЛАТЕНТНО-ПРОФИЛЬНОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим теперь двумерное совместное распределение, на котором балл, полученный каждым индивидом в выборке по тесту  $k$ , изображается как функция его балла по тесту  $j$ . Такие диаграммы рассеяния изображены на рис. 1. Единицы измерения обоих тестов здесь совершенно произвольные. Эллипс на рис. 1 показывает только одну из возможных форм, которую может принять множество точек. Круг соответствует подгруппе  $t$  размера  $n_t$ , внутри которой корреляция между тестами  $j$  и  $k$  отсутствует.

Линии, обозначенные  $X_{tj}$  и  $X_{tk}$  на рис. 1, показывают средние величины в подгруппе  $t$  по тестам  $j$  и  $k$ . Они пересекаются в так называемом центроиде точек, относящихся к подгруппе  $t$ . Точка, соответствующая индивиду  $i$ , члену подгруппы  $t$ , показана с координатами  $X_{ij}$  и  $X_{ik}$ , соответствующими его баллам по двум тестам. Расстояния  $d_{ij}$  и  $d_{ik}$  представляют собой отклонения индивида  $i$  от средних значений  $j$  и  $k$  его подгруппы. Свойство этих отклонений таково, что их сумма по всем членам подгруппы равна нулю.

Баллы  $j$  и  $k$  индивида  $i$  можно выразить через средние значения его подгруппы и его отклонения от этих средних:

$$X_{ij} = X_{tj} + d_{ij}, \quad (8)$$

$$X_{ik} = X_{tk} + d_{ik}. \quad (9)$$

Тогда  $m_{tj}$ , сумма баллов  $j$  в подгруппах  $t$ , задается выражением

$$\begin{aligned} m_{tj} &= \sum_{i=1}^{n_t} X_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^{n_t} (X_{tj} + d_{ij}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n_t} X_{tj} + \sum_{i=1}^{n_t} d_{ij} = \\ &= n_t X_{tj}. \end{aligned} \quad (10)$$

Первый член в третьей строке упрощается, поскольку  $X_{tj}$  одно и то же для всех членов подгруппы. Второй член в третьей строке исчезает, так как он является суммой отклонений баллов. Баллы  $j$  в любой подгруппе  $t$  дают

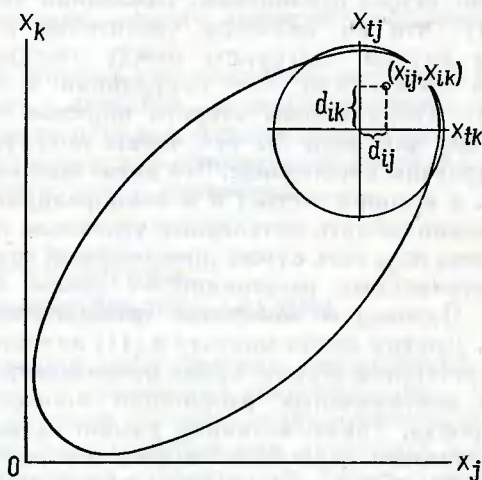


Рис. 1. Гипотетическая диаграмма рассеяния.

вклад в сумму всех баллов  $j$  так, как если бы члены подгруппы были сконцентрированы около их среднего значения для теста  $j$ . Этот результат (совсем не новый) будет соответствующим образом обобщен на случай момента второго порядка  $m_{tjk}$  для подгруппы  $t$ .

По определению и с учетом соотношений (8) и (9) выражение для  $m_{tjk}$  принимает вид

$$\begin{aligned}
 m_{tjk} &= \sum_{n_t}^{n_t} X_{ij} X_{ik} = \\
 &= \sum_{n_t}^{n_t} (X_{tj} + d_{ij}) (X_{tk} + d_{ik}) = \\
 &= \sum_{n_t}^{n_t} (X_{tj} X_{tk} + X_{tj} d_{ik} + X_{tk} d_{ij} + d_{ij} d_{ik}) = \\
 &= \sum_{n_t}^{n_t} X_{tj} X_{tk} + X_{tj} \sum_{n_t}^{n_t} d_{tk} + X_{tk} \sum_{n_t}^{n_t} d_{ij} + \sum_{n_t}^{n_t} d_{ij} d_{ik} = \\
 &= n_t X_{tj} X_{tk}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Первый член в четвертой строке (11) упрощается, поскольку  $X_{tj}$  и  $X_{tk}$  одни и те же для всех членов подгрупп. Второй и третий члены в этой строке пропадают, так как они содержат суммы отклонений. Последний член пропадает потому, что он является числителем в формуле корреляции внутри подгруппы между тестами  $j$  и  $k$ . Раньше мы определили, что корреляция в подгруппе равна нулю. Тогда момент второго порядка  $m_{tjk}$  получается таким, как если бы все члены подгруппы были сконцентрированы в центроиде. Это имеет место для любой подгруппы, в которой тесты  $j$  и  $k$  некоррелированы.

Здесь можно сделать дальнейшее уточнение терминологии. Величина  $m_{tjk}$  есть сумма произведений горизонтальных и вертикальных расстояний от начала координат на рис. 1. Назовем ее *моментом относительно начала координат*. Другим видом момента в (11) является последний член в четвертой строке, сумма произведений горизонтальных и вертикальных расстояний множества точек от их центроида. Такую величину удобно назвать *моментом относительно центроида* множества рассматриваемых точек. Геометрическая интерпретация баллов и отклонений в качестве расстояний делает необходимым всегда каким-либо образом определять точку отсчета для момента (начало координат, центроид или какая-либо другая точка). Естественно, все это относится и к моментам других порядков. До сих пор (с четырьмя исключениями) моменты имели в качестве точки отсчета начало координат. Исключениями были последний член (10) и суммы в последних трех позициях в (11), для которых точкой отсчета был центроид подгруппы  $t$ .

Результаты (10) и (11) можно обобщить на моменты высших порядков путем наложения дополнительных ограничений на подгруппу  $t$ . Эта подгруппа должна быть определена не только как имеющая некоррелированные в ней пары из тестов  $j, k$  и  $l$ , но также равный нулю момент третьего порядка этих трех тестов относительно их центроида. С этими ограничениями момент третьего порядка относительно начала координат  $m_{ijkl}$  принимает вид

$$m_{ijkl} = n_t X_{tj} X_{tk} X_{tl}. \quad (12)$$

Это выражение получается аналогично выражениям (10) и (11) для случая момента третьего порядка. Выражение для четвертого порядка получается аналогично введением ограничений более высокого порядка и т.д.

Поскольку во всех наших рассуждениях начало координат находится в любой нулевой точке, можно сформулировать основную теорему латентно-профильного анализа.

Момент порядка  $g$  относительно некоторой точки  $O$  для  $n_t$  точек, имеющих нулевые моменты порядков  $g$  и меньшего порядка относительно их центроида, равен моменту порядка  $g$  относительно точки  $O$  для  $n_t$  точек, расположенных в центроиде.

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАТЕНТНО-ПРОФИЛЬНОГО АНАЛИЗА

Приведенная выше теорема представляет основу для группировки в уравнениях рекрутирования. Существует, очевидно, близкая аналогия с латентно-структурным анализом. Каждая подгруппа или латентный класс должны быть однородными относительно любых латентных величин, которые необходимы для объяснения наблюдаемых взаимозависимостей. Полная однородность не требуется, поскольку отклонения от среднего значения в классе случайны, то есть независимы.

В статистике дихотомических признаков (например, в случайных экспериментах типа бросания монеты) понятие независимости обычно определяется для всех порядков совместных событий, а не только для пар событий. В частности, в латентно-структурном анализе внутри-классовая независимость *определяется* не только для



всех пар величин, но также для всех триплетов, квадруплетов и т. д. (Легко показать на примере, что независимость высшего порядка между дихотомическими признаками не является простым логическим следствием некоррелированности между всеми парами таких признаков.)

С другой стороны, понятие некоррелированности количественных величин часто ограничивается, по крайней мере среди психометристов, парами таких величин. Не существует внутреннего или логического различия между качественной и количественной статистиками. Скорее всего, просто исторически все сложилось так, что вопрос о независимости высших порядков между количественными величинами реже всего поднимался в психометрике. Вопрос этот затрагивается здесь по той причине, что правильное определение такой независимости представляется решающим для этой модели.

В предыдущем параграфе было показано, что отсутствие корреляции внутри класса между парами опытов является синонимом исчезновения моментов второго порядка относительно центроида класса. Это происходит по той причине, что такие моменты являются числителями в формулах соответствующих корреляций. Совершенно аналогично внутриклассовая независимость высших порядков может быть приравнена к исчезновению моментов высших порядков относительно центроида класса. (Нулевые значения таких моментов сделали бы возможным, например, положительную корреляцию между тестами  $j$  и  $k$  для членов класса, получивших высокий балл по тесту  $l$ , сопровождающийся компенсирующей отрицательной корреляцией между теми же двумя тестами для членов класса, получивших низкий балл по тесту  $l$ . Это может иметь место, несмотря на нулевую корреляцию между всеми парами из трех тестов внутри класса в целом. Если картины корреляции могут отличаться в подразделениях класса, класс не однороден даже с точки зрения здравого смысла.) Поэтому определим внутриклассовую независимость в данной модели как нечто применимое к взаимозависимостям разных порядков и проявляющееся в исчезновении моментов всех порядков относительно центроида класса. Тогда основная теорема будет полностью применима ко всем моментам каждого класса, так что результаты уравнений (10), (11) и (12) могут быть

использованы для преобразования (7) в основные уравнения латентно-профильного анализа:

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + \dots + n_q, \\ m_j &= n_1 X_{1j} + n_2 X_{2j} + \dots + n_q X_{qj}, \\ m_{jk} &= n_1 X_{1j} X_{1k} + n_2 X_{2j} X_{2k} + \dots + n_q X_{qj} X_{qk}, \\ m_{jkl} &= n_1 X_{1j} X_{1k} X_{1l} + n_2 X_{2j} X_{2k} X_{2l} + \dots + n_q X_{qj} X_{qk} X_{ql} \end{aligned} \quad (13)$$

и т. д.

Таким образом,  $2^s$  моментов (включая  $n$ ), получаемых на основе  $s$  тестов, выражаются через  $(q + sq)$  латентных параметров  $q$  латентных размеров классов и  $q$  средних классов для каждого из  $s$  тестов. Поэтому каждый латентный класс характеризуется его объемом и его профилем из  $s$  средних по тестам, то есть его латентным профилем.

Уравнения латентного профиля и уравнения латентно-структурного анализа оказались идентичными по форме, что можно видеть при сравнении (5) и (13). Это означает, что вся алгебра латентно-структурного анализа [1, 7, 11] применима к уравнениям латентного профиля. Следовательно, уравнения латентного профиля имеют решение, которое может быть получено без привлечения аналогов общей факторной дисперсии ( $m_{jj}$ ,  $m_{jjk}$ ,  $m_{jjj}$  и т. д.), а это значит, в общем случае, что решение не зависит от вращения. (Беседа с Р. Абельсоном в Йельском университете прояснила тот факт, что если известны отклонения баллов, то  $m_{jj}$  соответствует межгрупповым дисперсиям.) Уравнения латентного профиля не ограничивают также существования криволинейных отношений между тестами или между тестами и латентными величинами. Таким образом, в этой модели удастся избежать решения дилеммы сложных факторов.

## ДВА ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯ ЛАТЕНТНО-ПРОФИЛЬНОГО АНАЛИЗА

При получении уравнений латентного профиля балльные единицы были совершенно произвольными. Однако существует два вида тестовых баллов, которые привлекают особое внимание. Рассмотрим сначала случай, когда эмпирические переменные являются, как в латентно-структурном анализе, дихотомиями. Будем оценивать наличие или отсутствие таких признаков соответственно

единицей и нулем. В этом случае эмпирические величины  $m$  латентного профиля становятся идентичными с эмпирическими величинами  $n$  латентной структуры и средние по классу в анализе латентного профиля становятся латентными вероятностями латентно-структурного анализа. Размеры латентных классов означают одно и то же в обеих моделях. Значит, модель латентной структуры представима как частный случай анализа латентного профиля, в котором эмпирические переменные имеют дихотомический характер.

Второй частный результат получается при использовании стандартных баллов и при делении уравнений латентного профиля на  $n$  — число участвующих в выборке. При этом уравнения латентного профиля приводятся к стандартной форме

$$\begin{aligned} 1 &= p_1 + p_2 + \dots + p_q, \\ 0 &= p_1 Z_{1j} + p_2 Z_{2j} + \dots + p_q Z_{qj}, \\ r_{jk} &= p_1 Z_{1j} Z_{1k} + p_2 Z_{2j} Z_{2k} + \dots + p_q Z_{qj} Z_{qk}, \\ r_{jkl} &= p_1 Z_{1j} Z_{1k} Z_{1l} + p_2 Z_{2j} Z_{2k} Z_{2l} + \dots + p_q Z_{qj} Z_{qk} Z_{ql} \end{aligned} \quad (14)$$

и т. д.

Величины  $p$  пропорциональны объемам классов, и их сумма равна единице;  $Z$  являются средними стандартных баллов по тестам. Их взвешенная сумма для любого теста (во второй строке) равна нулю, так как это — среднее значение стандартных баллов этого теста;  $r_{jk}$ , будучи средними произведениями пар стандартных баллов, являются теми самыми корреляциями, которые пытается подсчитать факторный анализ;  $r_{jkl}$  аналогично являются триплетными произведениями и т. д. У уравнений латентного профиля в стандартной форме то преимущество, что они имеют дело с величинами, которые не зависят от размеров выборки и от произвольных балльных единиц. В следующих четырех параграфах уравнения в стандартной форме будут рассматриваться на примерах.

#### ПРИМЕР ЛАТЕНТНОГО ПРОФИЛЯ I: ГИПОТЕТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ДВУХ КЛАССОВ

Гипотетические эмпирические данные в таблицах 1 и 2 будут служить первым примером латентного профиля. Будем считать, что данные получаются в результате



проведения четырех альтернативных вариантов одного теста (например, арифметического) над выборкой, скажем, в сто человек. Пусть, далее, все шесть взаимных корреляций оказались равными 0,50, так что любая двумерная диаграмма рассеяния с баллами в стандартных единицах имеет вид эллипса, который в два раза длиннее своей ширины, с центром в начале координат и повернутого на  $45^\circ$ . Имеются четыре трехмерные диаграммы. Каждая из них напоминает по форме яйцо и, будучи симметричной относительно начала координат, делает наблюдаемый момент третьего порядка равным нулю.

Таблица 1

Данные  $R$  для гипотетического примера двух классов

Номер теста	Номер теста				
	0	1	2	3	4
0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50
2	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50
3	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50
4	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50

Таблица 2

Данные  $R_1$  для гипотетического примера двух классов

Номер теста	Номер теста				
	0	1	2	3	4
0	0,00	2,00	2,00	2,00	2,00
1	2,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	2,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	2,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	2,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблицы 1 и 2 представляют необходимые эмпирические данные в удобном виде. Величина, стоящая в верхнем левом углу в таблице 1, есть первый член в первой строке (14) уравнений латентного профиля в стандартной форме. Другие величины в нулевых строке и столбце таблицы

представляют собой средние стандартных баллов для каждого из четырех тестов, которые являются левой частью уравнений второй строки системы уравнений (14). Остальные клетки таблицы содержат взаимные корреляции тестов — наблюдаемые величины в третьей строке (14).

Таблица 2 суммирует наблюдаемые величины первого, второго и третьего порядков. Левое верхнее значение есть сумма четырех средних стандартных оценок. Все остальные значения в нулевых столбце и строке есть сумма четырех корреляций (включая  $r_{jj}$ ), относящихся к соответствующему тесту. Любая другая клетка в таблице 2 содержит сумму четырех наблюдаемых моментов третьего порядка (включая  $r_{jjk}$  и  $r_{jkk}$ ) для соответствующей пары тестов.

Для удобства представления в обоих гипотетических примерах все элементы с повторяющимися индексами (такие, как  $r_{jj}$ ,  $r_{jjk}$  и  $r_{jjj}$ ) считаются известными. Их величины, конечно, легко выводимы из простого вида эмпирических величин, но это не было бы действительно общим случаем даже для всего набора гипотетических данных. В первом примере все  $r_{jj}$  равны 0,50, все  $r_{jjk}$  — нулю и все  $r_{jjj}$  — нулю.

Таблицы 1 и 2 помечены соответственно как  $R$  и  $R_1$ . Это удобное обозначение для любых таких наборов данных, и оно будет использоваться во всех примерах. При решении любого латентного профиля должно проводиться различие между данными и выводимыми  $R$  и  $R_1$ , причем

Таблица 3

Решение латентного профиля для гипотетического примера двух классов

	Номер теста	Латентный класс	
		I	II
Средние по классам	1	—0,71	0,71
	2	—0,71	0,71
	3	—0,71	0,71
	4	—0,71	0,71
Размеры классов		0,50	0,50

последняя пара таблиц показывает, какой должна быть первая пара, чтобы быть полностью объясненной решением. В обоих гипотетических примерах заданные и получившиеся величины — последние вычисляются с помощью (14) — идентичны и, следовательно, не нуждаются в сравнении. В двух практических примерах сравнение все же будет по возможности проводиться с целью оценки адекватности решения.

Таблица 4

Данные корреляции для девяти тестов на чтение

Номер теста	Номер теста									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	...	0,72	0,41	0,28	0,52	0,71	0,68	0,51	0,68
2	0,00	0,72	...	0,34	0,36	0,53	0,71	0,68	0,52	0,68
3	0,00	0,41	0,34	...	0,16	0,34	0,43	0,42	0,28	0,41
4	0,00	0,28	0,36	0,16	...	0,30	0,36	0,35	0,29	0,36
5	0,00	0,52	0,53	0,34	0,30	...	0,64	0,55	0,45	0,55
6	0,00	0,71	0,71	0,43	0,36	0,64	...	0,76	0,57	0,76
7	0,00	0,68	0,68	0,42	0,35	0,55	0,76	...	0,59	0,68
8	0,00	0,51	0,52	0,28	0,29	0,45	0,57	0,59	...	0,58
9	0,00	0,68	0,68	0,41	0,36	0,55	0,76	0,68	0,58	...

Таблица 5

Приближенное решение латентного профиля для девяти тестов на чтение

	Номер теста	Латентный класс	
		I	II
Средние по классам	1	-0,80	0,80
	2	-0,81	0,81
	3	-0,47	0,47
	4	-0,41	0,41
	5	-0,68	0,68
	6	-0,90	0,90
	7	-0,85	0,85
	8	-0,66	0,66
	9	-0,84	0,84
Размеры классов		0,50	0,50

Решение латентного профиля для рассматриваемого примера, полученное применением методики латентно-структурного решения Грина [10], показано в таблице 3. Каждый из латентных классов определяется через его относительный объем и его латентный профиль — полный набор средних баллов тестов для членов класса. Очевидно, что класс I состоит из тех, кто слаб в арифметике, а класс II — из учеников, сильных в арифметике.

Эффективный способ сделать решение латентного профиля наглядным — это рассмотреть регрессии тестов на латентном континууме арифметических способностей.

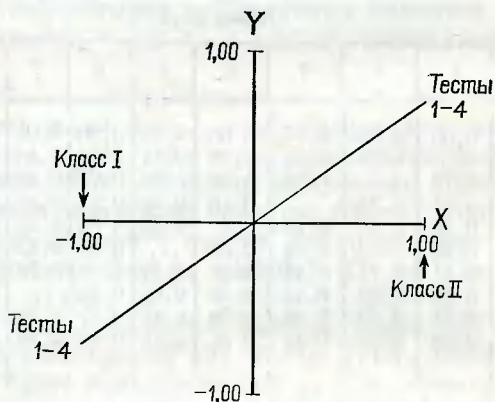


Рис. 2. Линия регрессии тестов на латентном континууме для гипотетического случая двух классов.

Такой график среднего балла теста  $Y$  в зависимости от положения в латентном континууме  $X$  изображен на рис. 2. Здесь регрессии всех четырех тестов на латентном континууме одинаковы.

На рис. 2  $X$  и  $Y$  выражены в стандартных единицах, так что наклон линии регрессии является также корреляцией между  $X$  и  $Y$ . Это корреляции между тестом и «фактором», и для линейных регрессий практического примера эти корреляции оказываются в точности такими же  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , как и факторные нагрузки, которые получились бы при факторном анализе корреляций в таблице 1. Это соответствие тем не менее исчезает, как только какие-либо из регрессий становятся нелинейными.

## ПРИМЕР ЛАТЕНТНОГО ПРОФИЛЯ II: ПРАКТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ДВУХ КЛАССОВ

В качестве второго примера латентного профиля рассмотрим данные  $R$  в таблице 4. Таблица представляет собой модификацию таблицы взаимных корреляций между девятью тестами на чтение, описанными ранее Дэвисом [3]. Единственным изменением служит дополнение таблицы Дэвиса нулевыми строкой и столбцом. Интеркорреляции основывались на 421 наблюдении.

Дэвис показал, что исходные баллы, необходимые для вычисления  $R_1$ , оказываются лишними. В условиях отсутствия данных высшего порядка, которые обеспечили бы единственное решение, необходимо применить некоторые методы факторизации и процедуры вращения, использованные в первоначальных приближенных решениях латентно-структурного анализа [5, 6] для получения приближенного решения латентного профиля. С этой целью использовалась факторизация Терстоуна [17] данных Дэвиса. Для всех тестов (кроме трех) расхождения между данными и полученными корреляциями лежат в пределах от 0,04 до 0,07. При этом анализ Терстоуна показал, что для объяснения данных достаточно одного фактора. Решение латентного профиля объясняет взаимные корреляции именно этими расхождениями.

Приближенное решение латентного профиля для данных Дэвиса показано в таблице 5. Это решение можно получить разрешением проблемы вращения при одном из следующих трех предположений:

- (i) два латентных класса одинаковы по размеру;
- (ii) два латентных профиля идентичны с точностью до изменения знака;
- (iii) в случае если бы величины  $R_1$  были заданы, они были бы такими же, как в примере I — с ненулевыми компонентами только в нулевых строке и столбце.

Решение в таблице 5, полученное с помощью уравнений (14), дает значение  $R_1$  по форме, соответствующей третьему предположению. Регрессии для этого решения изображены на рис. 3. Измерения по обеим осям даны в стандартных единицах, так что наклоны регрессий совпадают с факторными нагрузками, данными Терстоуном. Хотя это решение латентного профиля не однозначно



относительно вращений, можно легко показать, что оно обладает важным видом инвариантности, а именно наклоны регрессий в случае стандартных единиц по обеим осям остаются постоянными независимо от того, каким образом разрешается неопределенность вращения. Это лишь одна

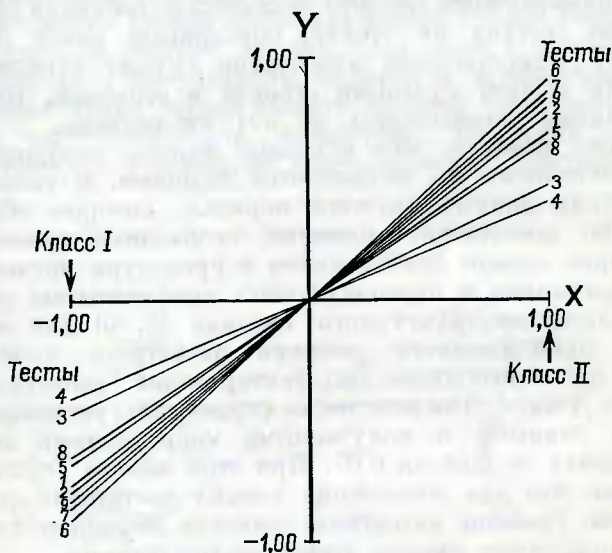


Рис. 3. Линия регрессии тестов на латентном континууме для девяти тестов на чтение.

иллюстрация того, что факторный анализ и модели латентного профиля взаимно дополняют друг друга, если не нарушены условия обеих моделей.

### ПРИМЕР ЛАТЕНТНОГО ПРОФИЛЯ III: ГИПОТЕТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ТРЕХ КЛАССОВ

Взятые значения  $R$  и  $R_1$  в таблицах 6 и 7 будут представлять первую иллюстрацию того, как анализ латентного профиля справляется со сложными факторами. Пусть тесты 1 и 2 — два простых словарных теста, 4 и 5 — два трудных словарных теста, а 3 — словарный тест средней трудности. Снова предположим, что данные основаны на наблюдении ста случаев.

Прежде чем приступить к анализу латентного профиля гипотетических данных, полезно рассмотреть результаты факторного анализа корреляций в таблице 6. Простое аналитическое решение факторов с коррелированными факторами дано в табл. 8. Элементы таблицы являются корреляциями между пятью тестами и двумя факторами *A* и *B*.

Таблица 6

Данные *R* для гипотетического примера трех классов

Номер теста	Номер теста					
	0	1	2	3	4	5
0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	0,75	0,75	0,50	0,25	0,25
2	0,00	0,75	0,75	0,50	0,25	0,25
3	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
4	0,00	0,25	0,25	0,50	0,75	0,75
5	0,00	0,25	0,25	0,50	0,75	0,75

Таблица 7

Данные *R*<sub>1</sub> для гипотетического примера трех классов

Номер теста	Номер теста					
	0	1	2	3	4	5
0	0,00	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50
1	2,50	-2,50	-2,50	-1,25	0,00	0,00
2	2,50	-2,50	-2,50	-1,25	0,00	0,00
3	2,50	-1,25	-1,25	0,00	1,25	1,25
4	2,50	0,00	0,00	1,25	2,50	2,50
5	2,50	0,00	0,00	1,25	2,50	2,50

Корреляция между двумя факторами  $r_{AB}$  равна 0,33. Если слепо следовать обычным правилам интерпретации факторов, можно было бы сделать заключение, что два фактора являются знанием простых слов *A* и сложных *B* и что две возможности относительно независимы. Это абсурд. Единственное подходящее решение латентного профиля для этого примера, полученное из *R* и *R*<sub>1</sub> тем же

методом, который использовался в латентно-структурном решении Грина [10], дано в таблице 9. Рис. 4 показывает в стандартных единицах регрессии, вытекающие из таблицы 9, в предположении о равных размещениях латентных классов на одном латентном континууме знания словаря.

Таблица 8

**Простое решение структурно-факторного анализа  
для корреляций, приведенных в таблице 6**

Номер теста	Факторы	
	A	B
1	0,82	0,00
2	0,82	0,00
3	0,41	0,41
4	0,00	0,82
5	0,00	0,82
$r_{AB}=0,33$		

Таблица 9

**Решение латентного профиля  
для гипотетического примера трех классов**

	Номер теста	Латентный класс		
		I	II	III
Средние по классам	1	-1,50	0,50	0,50
	2	-1,50	0,50	0,50
	3	-1,00	0,00	1,00
	4	-0,50	-0,50	1,50
	5	-0,50	-0,50	1,50
Размеры классов		0,25	0,50	0,25

Вид различных регрессий на рис. 4 такой, как следовало ожидать в предположении об относительной трудности тестов. Простые тесты (1 и 2) являются различаю-



щими только на нижнем конце латентного континуума. Сложные тесты (4 и 5) — на верхнем конце. Тест (3) средней трудности — на всем континууме.

#### ПРИМЕР ЛАТЕНТНОГО ПРОФИЛЯ IV: ПРАКТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ТРЕХ КЛАССОВ

Данные таблицы 10 представляют последний пример латентного профиля. Кроме нулевых строки и столбца, эта таблица является просто округленным вариантом таблицы подтестовых взаимных корреляций, приведен-

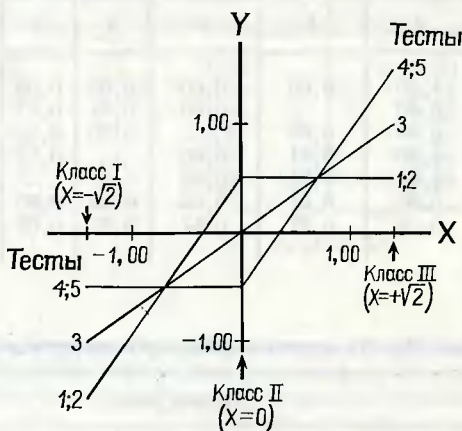


Рис. 4. Линии регрессии тестов на латентном континууме для гипотетического случая трех классов.

ных Фергюсоном [4, стр. 328] для иллюстрации наличия сложных факторов. Фергюсон взял отдельные величины из вербального теста на интеллект и объединил их в шесть подтестов, которые были в достаточной степени однородными, но возрастали по трудности от подтеста 1 до 6. Корреляции определялись по выборке 108 детей в возрасте 11 лет.

Решение простого вида для коррелированных факторов примера Фергюсона показано в таблице 12. Это решение было получено вращением факторов, предложенным Фергюсоном [4, стр. 328]. Здесь было бы абсурдом, базируясь на обычных правилах, делать вывод о том, что данные

можно мыслить зависящими от двух относительно независимых факторов — высокого или низкого вербального интеллекта.

Сообщение Фергюсона показало, что первоначальные оценки бесполезны для вычисления наблюдаемых моментов высших порядков. Поэтому необходимо оценить реше-

Таблица 10

Данные корреляции  
по шести вербальным подтестам интеллекта

Номер теста	Номер теста						
	0	1	2	3	4	5	6
0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	...	0,86	0,81	0,81	0,61	0,37
2	0,00	0,86	...	0,80	0,82	0,68	0,47
3	0,00	0,81	0,80	...	0,87	0,80	0,67
4	0,00	0,81	0,82	0,87	...	0,80	0,68
5	0,00	0,61	0,68	0,80	0,80	...	0,78
6	0,00	0,37	0,47	0,67	0,68	0,78	...

Таблица 11

Вычисленные  $R_1$  для шести вербальных подтестов интеллекта

Номер теста	Номер теста						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0,00	4,31	4,49	4,80	4,84	4,47	3,77
1	4,31	-4,42	-3,93	-2,98	-3,07	-1,74	-0,24
2	4,49	-3,93	-3,37	-2,30	-2,39	-1,02	-0,45
3	4,80	-2,98	-2,30	-0,99	-1,08	0,33	1,75
4	4,84	-3,07	-2,39	-1,08	-1,16	0,26	1,70
5	4,47	-1,74	-1,02	0,33	0,26	1,52	2,71
6	3,77	-0,24	0,45	1,75	1,70	2,71	3,57

ние латентного профиля посредством процедур, аналогичных примененным Дэвисом. С этой целью была использована факторизация корреляций Фергюсона. Два его фактора объясняли корреляции с расхождениями, не превышающими 0,03, и рассматриваемое решение латентного профиля устанавливает корреляции таким же образом.

Неопределенность вращений была преодолена в два приема. Первый шаг заключался во вращении факторизации Фергюсона, причем внимание обращалось только на подтесты 1 и 6 в полном соответствии с первоначальной факторизацией первого и последнего тестов в примере III.

Таблица 12

**Простые решения структурно-факторного анализа  
для корреляций в таблице 10**

Номер теста	Факторы	
	A	B
1	0,86	0,00
2	0,75	0,15
3	0,55	0,43
4	0,57	0,42
5	0,30	0,64
6	0,00	0,81
$r_{AB}=0,43$		

Таблица 13

**Приближенное решение латентного профиля  
для шести вербальных подтестов интеллекта**

	Номер теста	Латентный класс		
		I	II	III
Средние по классам	1	-1,64	0,51	0,62
	2	-1,56	0,36	0,84
	3	-1,38	0,07	1,24
	4	-1,41	0,09	1,23
	5	-1,05	-0,20	1,44
	6	-0,60	-0,48	1,56
Размеры классов		0,25	0,50	0,25

Эта факторизация была частью решения латентного профиля для этого примера. В примере III единственное решение было получено применением к первоначальной факторизации  $R$  вращения, полностью определяемого

данными высших порядков в  $R_1$ . Вторым примером в этом приближенном решении было решение примера III с использованием точно такого же вращения. Следствия этого вращательного решения заключаются в следующем:

- (i) относительные объемы классов те же, что и в примере III;
- (ii) регрессии всех шести подтестов на латентном континууме являются доминирующими;
- (iii) в предположении об одинаковых размещениях классов на латентном континууме регрессии подтестов 1 и 6 имеют примерно одинаковый вид, но обратны по направлению;
- (iv) форма найденных величин  $R_1$  сходна с формой для данных и найденных величин  $R_1$  в примере III.

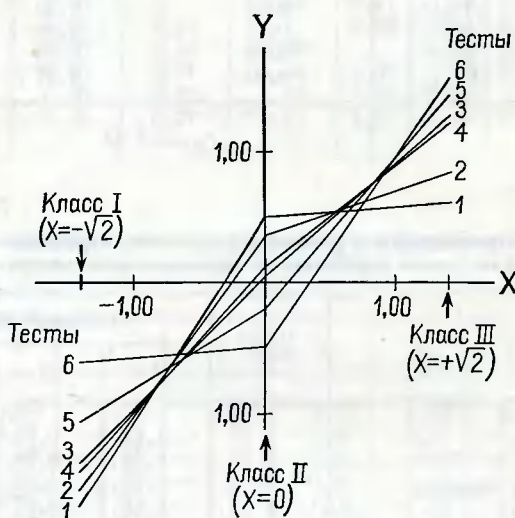


Рис. 5. Линии регрессии подтестов на латентном континууме для шести психологических подтестов.

Результирующее приближенное решение латентного профиля дано в таблице 13, а регрессии также в стандартных единицах и в предположении об одинаковых размещениях трех классов на латентном континууме показаны на рис. 5. Как и следовало ожидать, крутизна кривых

растет от простейших к сложным подтестам. Этот рост оказался инвариантным по отношению к широкому классу различных приближенных решений. Было подсчитано несколько таких решений для изучения неоднозначности решения латентного профиля. На все просмотренные альтернативные решения накладывалось только одно ограничение, а именно результирующие регрессии являются доминирующими для всех подтестов. При этом ограничении могли бы произойти большие изменения объемов классов и средних в классах, но никоим образом не смена распределения кривых по регрессиям. Следует добавить, что только при очень натянутых предположениях о размещении трех классов на латентном континууме можно было бы заставить регрессии подтестов 1 и 6 изменяться одинаково.

В таблице 11 показаны рассчитанные величины  $R_1$ , полученные приближенным решением в таблице 13. Сравнение таблиц 7 и 11 обнаруживает сходство между полученными данными высших порядков для двух примеров латентного профиля с тремя классами.

## ОБСУЖДЕНИЕ

К рассмотренным примерам латентных классов применялось два ограничения, которые необходимо подробно обсудить. Они дополняют неопределенность, возникающую вследствие отсутствия данных высших порядков в случае двух эмпирических примеров. Первое — отсутствие шкалы измерения латентного континуума. Для двух классов это неважно, поскольку оставляет произвол относительно начала отсчета и расстояний от него двух классов. Проблема относительных расстояний между классами не возникает, если есть только одно такое расстояние. Однако для решений с тремя классами проблема относительного расположения становится критической. Без ее разрешения нельзя построить регрессии тестов на латентном континууме. Нельзя установить и форму распределения положений по латентному континууму. В обоих предложенных решениях для трех классов проблема эта была решена произвольным предположением об одинаковом расположении классов на латентном континууме. На основании этого были построены регрессии,



и латентные распределения в каждом случае получились симметричными и приблизительно нормальными. Другие предположения о латентной метрике привели бы к другим регрессиям и к другим латентным распределениям. Дальнейшее развитие этой метрической проблемы есть в отдельной работе [8], основанной на некоторых современных методах латентно-структурного анализа. В ней наметен подход, при котором с помощью моментов еще больших порядков метрика латентного континуума может трактоваться как интегральная часть решения латентного профиля.

Вторым ограничением во всех примерах латентного профиля в этой работе является их одномерность. Напомним, что в выводе уравнений латентного профиля ничто не ограничивает число латентных измерений, которыми описывается латентный класс. Конечно, случаи с двумя классами здесь можно понять и в терминах одного континуума, поскольку это было бы верно для любого случая с двумя классами. Однако рассмотренные примеры с тремя классами одномерны в силу специальных свойств рассматриваемых тестов (однородные по содержанию, но градуированные по трудности). Многие случаи с тремя классами для адекватного понимания их психологической сущности потребовали бы двух латентных измерений. В общем случае решение с  $q$  классами потребовало бы  $(q - 1)$  латентных измерений для своей интерпретации. Дальнейшие исследования [9] будут иметь дело с такими многомерными примерами и вопросами размерности и метрики, которые возникают при их интерпретации.

Читатель мог заметить, что во всех четырех примерах латентных классов не упоминалось о потребности в данных порядка выше трех. Даже для двух эмпирических примеров единственность решения не требовала использования данных такого высокого порядка. Таким образом, эти данные высших порядков становятся средством проверки предположения о независимости высших порядков внутри класса. Это могло бы быть сделано сравнением заданных величин высших порядков с соответствующими полученными значениями, как бы вытекающими из латентных параметров в силу соответствующих строк уравнений (13) или (14). С другой стороны, можно спорить о том, что, если решение никогда не требует данных выше третьего



порядка, нет необходимости постулировать внутриклассовую независимость выше этого порядка.

С этой точки зрения уравнения латентного профиля не требуют порядка большего, чем три, и было бы излишне думать об использовании данных высших порядков для проверки правомочности модели. Однако еще важнее проверить адекватность решения на переменных, не включенных в исходный анализ. (Практический пример иллюстрирует, каким образом сделать это в латентно-структурном анализе, где можно одинаково аргументировать как использование, так и неиспользование уравнений высших порядков, для которых не требуется определенного решения.)

Приведенные здесь уравнения латентного профиля являются аналогом только одного вида латентно-структурного анализа, который известен как случай разделенных классов. Анализ разделяет совокупность на небольшое число классов, обладающих внутриклассовой независимостью второго и третьего порядков, и на этом останавливается. Другие разновидности анализа структуры, на один из которых уже делалась ссылка, пошли дальше в определении алгебраической формы регрессии (так называемые графики [14] латентно-структурного анализа), или множества объемов классов, или и того и другого. Однако постулат о внутриклассовой независимости всегда остается. Обычно эти ограничения требуют внутриклассовой независимости порядка выше третьего, так что соответствующие высшие порядки наблюдаемых данных становятся непосредственно используемыми в решении. Большинство из этих вариантов латентно-структурного анализа легко перефразируются в терминах латентного профиля. В самом деле, аналогия между двумя моделями настолько близка, что практически какое бы продвижение ни было сделано в различных решениях для одной модели, оно переносится на другую модель.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После краткого описания развития факторного анализа и моделей латентной структуры в этой работе было показано, как последние могут быть обобщены для исследования взаимных соотношений между количественными изме-

рениями таким способом, чтобы избежать некоторых трудных проблем факторного анализа. Возникающая модель латентного профиля применяется к различным гипотетическим и эмпирическим данным с целью иллюстрации ее использования. Поскольку такие применения могут показаться обнадеживающими, возможно, не лишним будет завершить эту работу повторной ссылкой на предупреждение [16, стр. 70], с которого она началась. «Было бы несчастьем, если бы первоначальный успех аналитических методов, которые здесь будут описаны, очаровал нас настолько, что мы совершенно пренебрегли бы развитием других концепций, которые могут быть порождены совершенствованием измерений и несоответствиями теории и эксперимента».

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. T. W. Anderson, On Estimation of Parameters in Latent Structure Analysis, «Psychometrika», 19, 1954, 1—10.
2. J. B. Carroll, The Effect of Difficulty and Chance Success on Correlations Between Items or Between Tests, «Psychometrika», 10, 1950, 1—91.
3. F. B. Davis, Fundamental Factors of Comprehension in Reading, «Psychometrika», 9, 1944, 185—187.
4. G. A. Ferguson, The Factorial Interpretation of Test Difficulty, «Psychometrika», 6, 1941, 323—329.
5. W. A. Gibson, Applications of the Mathematics of Multiple-Factor Analysis to Problems of Latent Structure Analysis, в: P. F. Lazarsfeld et al., «The Use of Mathematical Models in the Measurement of Attitudes» (Res. Memo. № 455) Rand Corp., 1951.
6. W. A. Gibson, Latent Structure and Positive Manifold, «British Journal of Statistical Psychology», 15, 1962, 149—160.
7. W. A. Gibson, An Extension of Anderson's Solutions for the Latent Structure Equations, «Psychometrika», 20, 1955, 69—73.
8. W. A. Gibson, Nonlinear Factor Analysis, Single Factor Case, «American Psychologist», 10, 1955, 438.
9. W. A. Gibson, Nonlinear Factors in Two Dimensions, «Psychometrika», 25, 1960, 381—392.
10. B. F. Green, A General Solution for the Latent Class Model of Latent Structure Analysis, «Psychometrika», 16, 1951, 151—166.
11. B. F. Green, Latent Structure Analysis and Its Relation to Factor Analysis, «Journal of the American Statistical Association», 47, 1952, 71—76.
12. J. P. Guilford, The Difficulty of a Test and Its Factor Composition, «Psychometrika», 6, 1941, 67—77.

13. P. F. L a z a r s f e l d, The Interpretation and Computation of Some Latent Structures, в: S. A. S t o u f f e r et al., «Measurement and Prediction», Princeton Univ. Press, 1950, Chap. 11.
14. P. F. L a z a r s f e l d, The Logical and Mathematical Foundation of Latent Structure Analysis, *ibid.*, Chap. 10.
15. P. F. L a z a r s f e l d, Latent Structure Analysis, в: S. K o c h (ed), «Psychology: A Study of a Science», New York, McGraw-Hill, 1959.
16. L. L. T h u r s t o n e, Multiple Factor Analysis, Univ. of Chicago Press, 1947.
17. L. L. T h u r s t o n e, Note on a Reanalysis of Davis' Reading Tests, «Psychometrika», 11, 1946, 185—188.
18. R. J. W h e r r y and R. H. G a y l o r d, Factor Pattern of Test Items and Tests as a Function of the Correlation Coefficient: Content, Difficulty, and Constant Error Factors, «Psychometrika», 9, 1944, 237—244.

# ЛАТЕНТНО-СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ТЕСТОВ

*П. Ф. Лазарсфельд*

## § 1

Основания теории тестов могут быть изложены в следующем виде. Лица, отобранные для проведения теста, отвечают на  $n$  дихотомических вопросов. Балл  $s$  приписывается каждому респонденту с  $s$  правильными ответами. Предполагается, что существует истинный тест, который приписывает каждому индивиду «истинный балл»  $t$ , если этот индивид дает  $t$  правильных ответов. Баллы  $s$  и  $t$  образуют двумерное распределение. Предполагается, что распределение величины  $s$  при условии, что задано значение  $t$ , является следствием ошибок измерения. Одна из важных целей теории тестов состоит в том, чтобы находить положение респондента на оси  $t$ , если известно его положение на оси  $s$ . Это можно осуществить только в том случае, если мы сделали некоторые предположения математического характера относительно двумерного  $s$ - $t$ -распределения. В некоторых моделях делаются дополнительные предположения относительно ковариации «правильных» ответов к средней ковариации между ответами, взятыми из фактических наблюдений. Часто особое внимание уделяется маргинальному распределению баллов  $t$ .

Таким образом, любая модель теории тестов может быть, по существу, описана на основе трех соображений.

1. Сколько используется эмпирических данных? Обычно для этого находят только  $(n + 1) + n + \frac{n(n-1)}{2}$  эмпирических данных.

Это имеет место тогда, когда модель учитывает  $n + 1$  частоту маргинального  $s$ -распределения,  $n$  «трудностей вопросов» или долю правильных ответов и  $\frac{n(n-1)}{2}$  ковариаций между вопросами. Часто используется значительно меньшая фактическая информация.

2. Какие аксиомы или математические предположения вводятся в теорию?

3. Какие характеристики двумерного  $s$ - $t$ -распределения можно вывести из 1 и 2?

Пункты 2 и 3, очевидно, взаимно связаны. Чем более содержательна аксиоматика пункта 2, тем больше информации мы получим из условия пункта 3. На самом деле теория тестов, подобно любой модели измерения, является теорией стохастического перехода в данном случае от оси  $s$  к оси  $t$ .

Материал, на котором основывается это утверждение, был умело обобщен Ф. Лордом в его речи в качестве президента психометрического общества в сентябре 1959 года. Я опускаю некоторые отклонения, которые возникают, если предположить, что истинный и фактический тесты состоят из разного числа вопросов; это приводит к введению процента баллов и требует дальнейших предположений относительно выборки вопросов.

## § 2

Латентно-структурный анализ (ЛСА) можно рассматривать как обобщение теории тестов. Отметим следующие различия между ними, используя три положения предыдущего параграфа.

1. ЛСА начинается с полного совместного распределения в пространстве всех дихотомических вопросов. Оно называется эмпирическим пространством и соответствует маргинальному распределению  $s$  баллов в теории тестов с использованием понятий трудности вопросов и ковариации вопросов. ЛСА использует  $2^n$  наборов эмпирической информации.

2. Допускается, что респонденты могут быть расположены в латентном пространстве, которое имеет меньшую размерность, чем эмпирическое пространство (размерность последнего равна  $n$ ). Латентные оси могут иметь непрерывную или дискретную метрику. Математические предположения модели включают аксиому локальной независимости, которая будет описана ниже.

3. Ввиду более содержательного ввода эмпирических данных число параметров модели, которое можно вычислить, очень велико. Мы должны получить на выходе распределение лиц в латентном пространстве, соответствующее маргинальному распределению «истинных бал-



лов», и множество условных распределений, соответствующее «ошибке измерения». Однако модель ЛСА является более общей, и любая модель теории тестов может быть получена из нее как частный случай.

Проведем сначала подробный анализ утверждения, кратко изложенного выше, а затем дадим конкретный пример.

### § 3.

Таким образом, ЛСА основывается на следующих предположениях:

а) Предполагается существование латентного континуума<sup>1</sup>.

б) Вводится некоторое число дихотомических эмпирических вопросов. Каждый вопрос  $i$  имеет вероятность  $p_i^x$  получения «положительного» ответа на него в любой точке латентного континуума.

в) Функция  $p_i^x = f_i(x)$  называется операциональной характеристикой (о. х.) в теории тестов и графиком в ЛСА. Мы будем в дальнейшем использовать термин о. х., хотя я предпочитаю понимать его, скорее, как описательный термин.

г) Принцип локальной независимости предполагает, что в фиксированной точке  $x$  вероятности совместного наступления событий равны произведениям вероятностей отдельных событий.

д) Чтобы упростить последующие рассуждения, я введу термин «сигнатура  $\sigma$  варианта ответов», означающий последовательность знаков  $+$  и  $-$ , которые соответствуют ответам в конкретном случае. Если вероятность отрицательного ответа обозначена чертой над индексом ( $p_i^- = 1 - p_i$ ), то принцип локальной независимости можно записать в виде

$$f_\sigma = f_i f_j f_k \dots, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — последовательность индексов 1, 2, 3... и т. д.

е) Соотношение (1) является о. х. (графиком) варианта ответов. Оно указывает на вероятность получения варианта ответов с сигнатурой  $\sigma$  в некоторой точке латент-

---

<sup>1</sup> Для простоты будем считать континуум одномерным. Это ограничение будет снято в параграфе 7.



ного континуума. Совокупность вопросов, удовлетворяющая принципу локальной независимости, может быть названа *чистым тестом*.

ж) Любому варианту ответов  $\sigma$  здесь соответствуют байесовы вероятности. Это функция, которая указывает вероятности того, что ответ  $\sigma$  был дан респондентом в точке  $x$ .

з) Для вычисления байесовых вероятностей введем в модель латентную (неизвестную) плотность вероятности  $\varphi(x)$ . Она указывает долю лиц в точке  $x$ ; нельзя предполагать, что  $\varphi(x)$  — плотность нормального закона.

и) Введенные выше байесовы вероятности представлены формулой

$$\psi_{\sigma}(x) = \frac{f_{\sigma}(x) \cdot \varphi(x)}{\int f_{\sigma}(x) \cdot \varphi(x) dx} = \frac{f_{\sigma} \varphi}{p_{\sigma}}. \quad (2)$$

Очевидно, что  $p_{\sigma}$  — эмпирически вычисленная доля респондентов, дающих ответ  $\sigma$ . Но  $f_{\sigma}$  и  $\varphi$  являются неизвестными (латентными).

к) Каждому варианту ответов можно дать балл, присоединив дополнительное соглашение. Это, например, может быть

$$S_{\sigma} = \frac{\int x f_{\sigma}(x) \varphi(x) dx}{p_{\sigma}}, \quad (3)$$

то есть среднее ожидаемое положение респондента. Или это может быть наиболее вероятное положение, то есть точка  $x$ , в которой  $\psi_{\sigma}(x)$ , определяемая равенством (2), имеет максимум (мода). Или это может быть точка, где 50% респондентов имеют более низкую, а другие 50% более высокую байесову вероятность (медиана).

л) Очень важно понять значение трех точек, о которых мы только что говорили. Каждый вариант ответов может быть получен в любой точке континуума, но вероятность получения зависит от положения на континууме. Поэтому каждому  $\sigma$  соответствует полное распределение байесовых вероятностей. Балл есть некоторый тип среднего положения с этими вероятностями в качестве весов; выбор среднего значения диктуется соображениями удобства. Баллы можно разработать для любой комбинации вопросов, включая случай одного вопроса, и не только для окончательного варианта ответов (где для каждого вопроса записан положительный или отрицательный ответ). Это

соответствует тому, что мы можем записать операциональную характеристику для любой комбинации вопросов. Традиционный балл теории тестов будет рассмотрен в § 5.

#### § 4

Продолжаем латентно-структурный анализ в соответствии с указанными выше общими предпосылками.

а) Проводится исследование моделей, для которых о. х. имеют некоторую алгебраическую форму, например являются многочленами заданной степени с неопределенными коэффициентами. Распределение может быть алгебраически заданным [например,  $\varphi(x) = \frac{1}{B(a+1, b+1)} x^a(1-x)^b$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ] или оставаться совершенно произвольным.

б) ЛСА затем излагает условия редуцируемости. Это означает, что ограничения, наложенные на эмпирические данные, пригодны для выбранной модели.

в) Изучается заданное множество данных с целью выяснения, могут ли эти данные «разумно» вытекать из выбранной модели. (Проблема выборки не будет рассмотрена в данной статье.)

г) Если выбранная модель является подходящей, вычисляются ее латентные параметры.

д) Если нет — испытывается новая модель.

В качестве простого примера мы подобрали тест, касающийся удовлетворенности работой, на который дали ответ 876 служащих компании (см. таблицу 1). Теперь пройдем через четыре только что упомянутых этапа.

а) Мы выбираем линейные графики  $f_i = a_i + b_i x$ . Распределение  $\varphi(x)$  является нефиксированным. Однако требуется, чтобы  $\varphi(x) = 0$  для всех  $x$ , при которых  $f_i(x) < 0$  или  $f_i(x) > 1$ .

б) Одно из условий редуцируемости этой модели состоит в следующем. Матрица с элементами  $p_{ij} - p_i p_j = [ij]$  должна иметь ранг 1. Другое условие состоит в том, что величина  $(p_k p_{kij} - p_{ki} p_{kj}) / (p_{ij} - p_i p_j)$  одинакова для заданных  $k$  независимо от выбора  $i$  и  $j$ .

в) Матрица с элементами  $[ij]$  достаточно хорошо соответствует требованию иметь ранг 1. Первоначальная матрица и матрица разностей даны в таблицах 2 и 3. В этой модели латентные параметры могут быть вычислены

из данных второго и первого порядка. Мы поэтому сначала не беспокоимся о данных более высокого порядка.

г) Можно показать, что  $a_i = p_i$ , а  $b_i = \sqrt{\frac{[ig][ih]}{[gh]}}$  причем последнее выражение инвариантно по отношению к изменению  $g$  и  $h$ .

Для  $\varphi(x)$  мы не можем вычислить первые два момента и поэтому примем среднее равным 0, а дисперсию равной 1. Третий момент оказывается равным

$$M_3 = \frac{p_{ijk} - p_i p_j p_k}{b_i b_j b_k} - \sum_{g=i, j, k} \frac{p_g}{b_g}. \quad (4)$$

(Очевидно, момент  $M_3$  должен иметь одно и то же значение независимо от того, какие три вопроса мы выбрали; это ослабленное условие, появившееся ранее, но приведенное в другой форме. Фактически мы вычисляем  $M_3$ , образуя среднее значение всех возможных равенств (4).) Оказывается, что  $M_3 = -0,011$ ,  $M_4 = 1,57$ ,  $M_5 = 5,47$ . Позже мы рассмотрим эти три величины.

Таблица 1

Вопрос	Возможный ответ	$p_i$
1. Есть ли что-нибудь такое в вашей работе, что вам особенно нравится?	«Многое»	0,34
2. Есть ли что-нибудь такое в вашей работе, что вам особенно не нравится?	«Ничего» и «немного»	0,57
3. Как часто вы ожидаете с удовольствием начало вашего рабочего дня?	«Каждый день» и «почти каждый день»	0,62
4. Если кто-нибудь спрашивал вас о получении работы, подобной вашей, то какую из следующих работ вы хотели бы иметь? Одобряете ее? Не одобряете ее?	«Одобряю ее»	0,48
5. Хотелось ли вам когда-нибудь уйти с данной работы и получить работу в другой компании?	«Никогда»	0,38
6. Хотелось ли вам перейти с вашей настоящей работы на другую работу в вашем ведомстве?	«Редко» и «никогда»	0,58

Таблица 2

## Матрица корреляций

	1	2	3	4	5	6
1	—	041	062	069	057	029
2	041	—	080	088	077	050
3	062	080	—	107	088	054
4	069	088	107	—	103	061
5	057	077	088	103	—	058
6	029	050	054	061	058	—

Таблица 3

## Матрица разностей

	1	2	3	4	5	6
1	—	—006	005	005	002	—004
2	—006	—	002	—001	001	005
3	005	002	—	—001	—005	—002
4	005	—001	—001	—	—002	—002
5	002	001	—005	—002	—	003
6	—004	005	—002	—002	003	—

Таблица 4

## Фактические и соответственно присоединенные частоты наборов из пяти вопросов

	Комбинации вопросов	Фактически присоединенные частоты	Присоединенные частоты, требуемые моделью
1	12 345	0,127	0,129
2	12 346	0,132	0,134
3	12 356	0,113	0,115
4	12 456	0,112	0,103
5	13 456	0,119	0,114
6	23 456	0,174	0,178

д) С целью пригонки модели мы вычислим частоты пятого порядка, поскольку они получаются из модели, и сравним их с эмпирическими данными (см. таблицу 4). Результаты не слишком плохие.

График о. х. для шести вопросов приводится на рис. 1.

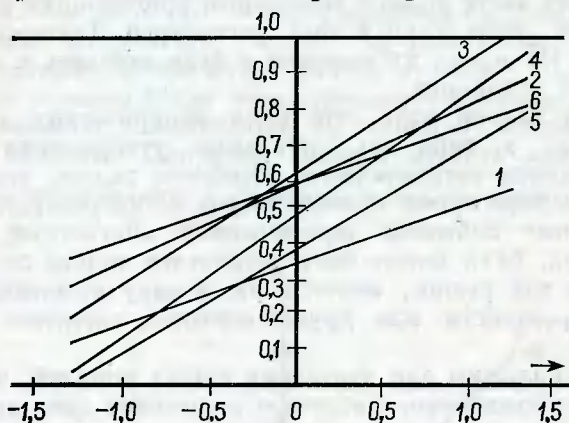


Рис. 1.

Для более наглядной картины распределения сравним три дискретных класса с пятью известными моментами. Мы найдем, что 99,9% всех случаев практически распределены равномерно между  $x_1 = -1,03$  и  $x_2 = 0,96$ . Несколько случаев относятся к значениям  $x$ , лежащим от  $x_2 = 0,96$  вправо, и относятся к весьма удовлетворенной группе. Это отражает тот факт, что момент  $M_3$  почти исчезает, тогда как момент  $M_5$  является довольно большим. В соответствии с другим способом изображения следовало бы найти точные пирсоновские типы для этих моментов.

## § 5

В традиционной теории теста балл индивида есть число вопросов, на которые он ответил положительно. Такой балл имеет о. х., которую можно получить посредством элементарной теории вероятностей, если известна о. х. каждого вопроса. Например, для трех вопросов балл 2 можно получить из следующих схем:

$$++- \quad +--+ \quad -++.$$



Вероятность того, что респондент даст ответ по любой из этих схем, очевидно, равна

$$f_s = \sum f_i f_j (1 - f_k), \quad (5)$$

где сумма взята по всем возможным комбинациям из трех вопросов. Этот случай был рассмотрен Таккером [3], Лордом [1] и др.; их позицию я буду относить к «принстонской традиции».

Если только ясно, что балл эмпирических данных имеет о. х. типа (5), остальные утверждения § 3 принимаются автоматически. Особенно важно, что *балл эмпирического теста соответствует всему распределению латентных байесовых вероятностей*. Латентный, или истинный, балл может быть установлен только после того, как мы решим, имеется ли в виду ожидаемое по всей вероятности или другое «среднее» латентное положение.

Предположим для уточнения наших понятий, что мы выбираем ожидаемое латентное положение лиц, которые имеют эмпирический балл  $s$ . Тогда можно поставить вопрос, как величина  $s$  связана математически с этим «истинным» баллом. Эта связь будет, конечно, разной для каждой модели и обычно очень сложной с точки зрения математики. Даже для такой простой модели, как модель с линейной о. х., упомянутую связь слишком долго выписывать. Для иллюстрации выберем два вопроса из нашего примера и изобразим о. х. для четырех вариантов ответов и латентных баллов

$$\mu_{46} = 0,835; \quad \mu_{4\bar{6}} = 0,441; \quad \mu_{\bar{4}6} = -433; \quad \mu_{\bar{4}\bar{6}} = -0,859.$$

Эти величины являются средними (ожидаемыми) значениями байесовых вероятностей  $\psi_\sigma(x) = \frac{f_\sigma(x) \varphi(x)}{p_\sigma}$ . График последней функции нельзя полностью изобразить, так как мы знаем только несколько моментов  $\varphi(x)$  (см. рис. 2).

Чтобы вычислить латентное положение балла традиционного теста, мы объединим для  $s = 1$  порядки  $+$  — и  $-$   $+$ . Легко видеть, что

$$s_1 = \frac{p_{\bar{4}6} \mu_{\bar{4}6} + p_{4\bar{6}} \mu_{4\bar{6}}}{p_{\bar{4}6} + p_{4\bar{6}}} = 0,008.$$



Очевидно,

$$s_2 = \mu_{46} = 0,835,$$

$$s_0 = \mu_{\overline{46}} = -0,859.$$

Несмотря на то что отклонения  $s_2 - s_1$  и  $s_1 - s_0$  довольно сходны, они не равны. В более сложной ситуации пирсоновская корреляция между традиционным баллом и латентным баллом будет далека от этой.

Для каждого балла теста существует функция байесова распределения вероятностей  $\psi_s$ , свойства которой могут быть изучены. Например, можно извлечь квадратный корень из величины  $\int x^2 \psi_s(x) dx$ , а также решить, какой

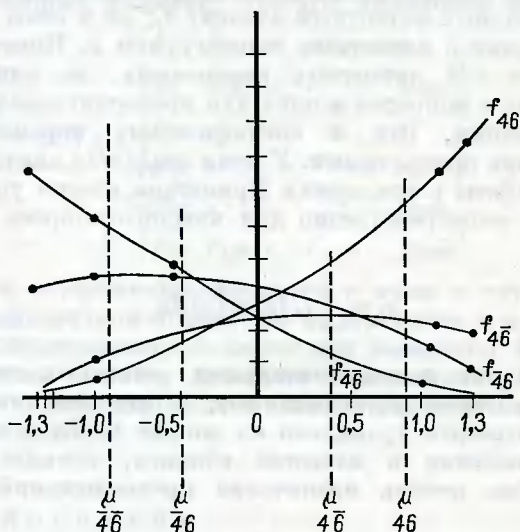


Рис. 2.

балл имеет наибольшую вероятность обнаружить индивида внутри заданного интервала из ожидаемого положения; эту величину можно было бы назвать падежностью конкретного балла  $s$ .

## § 6

Когда во время войны я разрабатывал математические вопросы ЛСА, я не знал о работе Таккера [3]. С тех пор я пришел к убеждению, что, поскольку рассматриваются

применения математических методов к теории тестов, имеются большие сходства между ЛСА и работами в традициях Принстона. Различия состоят главным образом в более широкой алгебраической формулировке ЛСА; эта формулировка не требует нормального закона для  $\varphi(x)$  и позволяет использовать операциональные характеристики произвольного вида. Косвенное преимущество состоит в большем акценте на байесову функцию распределения  $\psi(x)$ , которая будет изучена.

Я вижу только одно несоответствие, основанное на недоразумении. Согласно принстонской традиции, латентные вероятности  $p_i^x$  данного вопроса  $i$  непосредственно связаны с основным континуумом. Для каждого вопроса вводится дополнительный латентный элемент  $z_i$ ; он в свою очередь коррелирован с латентным континуумом  $x$ . Имеется, так сказать,  $n + 1$  латентных переменных, по одной для каждого из  $n$  вопросов и одна для предполагаемой общей классификации. Эти  $n$  специфических переменных  $z$  кажутся мне призрачными. У меня создается впечатление, что все работы в традициях Принстона можно упростить введением непосредственно для каждого вопроса  $i$  величины

$$p_i = \int f_i(x) \varphi(x) dx$$

без отыскания  $n$  дополнительных латентных способностей  $z_i$ , которые устанавливают, может или не может индивид ответить правильно на вопрос  $i$ . Но я поставил это утверждение в качестве вопроса, поскольку мог неправильно понять назначение предположений Принстона.

## § 7

Полиномы любой степени для о. х. и моменты функции  $\varphi(x)$  могут быть полностью определены. Это позволит в одном специальном случае привести пример проблемы латентной размерности. Пусть для некоторого множества данных мы хотим решить вопрос о том, является ли соответствующая модель одномерной и имеет ли она при этом квадратичный график

$$(\text{модель } A) \quad f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2,$$

или она двумерна и при этом «графиками (поверхностями)» служат линейные функции

$$(\text{модель } B) \quad f_i(u, v) = a_i + b_i u + c_i v,$$

где  $u$  и  $v$  — два латентных континуума.

Можно показать, что обе модели имеют, в общем, большое число условий приводимости. Например, матрица прямых произведений в обоих случаях имеет ранг 2. Определенные отношения детерминантов, образованных из совместных частот на разных уровнях, постоянны и равны для обоих уровней. Различие появляется тогда, когда они образуют так называемый восходящий детерминант, который включает частоты четвертого порядка.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_{12} & p_{13} & p_{23} \\ p_4 & p_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{234} \\ p_5 & \cdot & & & & \cdot \\ p_{45} & \cdot & & & & \cdot \\ p_{46} & \cdot & & & & p_{2346} \\ p_{56} & p_{156} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{2356} \end{vmatrix}$$

Такой детерминант стремится к нулю в случае одномерной квадратной модели, но не стремится к нулю, если соответствующая модель имеет два латентных измерения и графиком служит линейная поверхность. Очевидно, решение проблемы такого типа представляется очень трудной задачей.

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. F. M. Lord, The Relation of a Test Score to the Trait Underlying the Test, «Educational and Psychological Measurement», 13, 1953, 517—549. (Перевод этой статьи дан в настоящем сборнике. — *Ред.*)
2. F. M. Lord, An Approach to Mental Test Theory, «Psychometrika», 24, 1959, 283—302.
3. L. R. Tucker, Maximum Validity of a Test with Equivalent Items, «Psychometrika», 11, 1946, 1—13.

# ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТЕСТОВЫМ БАЛЛОМ И ИССЛЕДУЕМОЙ СПОСОБНОСТЬЮ

Ф. М. Лорд

При анализе метрики, основанной на исходных баллах психологического теста, обычно сталкиваются с тем, что единицы измерения не могут считаться «равнозначными» («equal»). Если взять два теста для исследования одной и той же характеристики, или способности, но различные

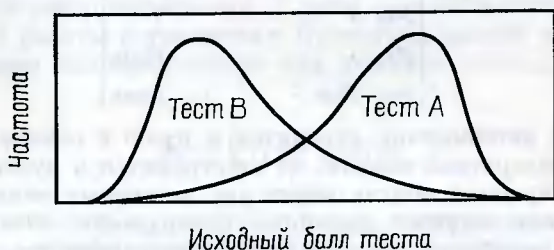


Рис. 1. Распределение баллов теста.

по трудности и применить их к одной и той же группе экзаменуемых, то получим две различные формы распределения исходного балла, например такие, как показанные на рис. 1.

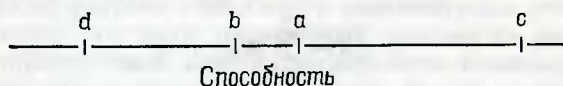
Поскольку невозможно отдать предпочтение какому-либо из этих распределений, они не могут одновременно представлять форму распределения исследуемой характеристики, или способности, в тестируемой группе, из чего мы заключаем, что ни одно из этих распределений не дает истинного представления о форме распределения характеристики, или способности, в тестируемой группе и что в обоих тестах шкала исходного балла не обеспечивает равнозначных единиц измерения.

При рассмотрении таких вопросов обычно явно или неявно предполагается, что исследуемый исходный балл теста и есть характеристика, или способность, которую необходимо «измерить». В настоящей статье излагается метод, позволяющий получить ряд важных результатов, связанных с основными свойствами тестовых баллов для определенных типов тестов, не требующих каких-либо дополнительных допущений, кроме того, что предположение об «измеримости» способности не является совершенно бессмысленным. Рассмотрение будет ограничено тестами, составленными из вопросов определенного типа. Это ограничение позволяет получить достаточно строгие обоснования результатов.

Шкала измерения «способности» может в известных пределах выбираться читателем произвольно. Для рассматриваемых типов тестов полученные результаты будут справедливы независимо от способа определения шкалы «способности».

## ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ

Предполагается, что рассматриваемой характеристике, или способности, можно поставить в соответствие упорядоченный числовой ряд. Это означает, что экзаменуемым можно поставить в соответствие линейный континуум таким образом, что «величина» характеристики, или способности, каждого экзаменуемого может быть представлена количественно его положением на континууме, хотя на практике величина способности, которой обладает каждый экзаменуемый, обычно точно не известна. Это положение иллюстрируется ниже для четырех гипотетических испытуемых  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .



Если существует единственная естественная метрика для количественного выражения характеристики, или способности, то континуум способности должен, конечно, рассматриваться в терминах этой метрики. Если же, как это обычно бывает, не существует такой единственной



естественной метрики, то читатель может выбрать свою собственную произвольную метрику. Полученные ниже результаты не зависят от выбора метрики, важно лишь, чтобы для тестирования одной и той же характеристики, или способности, использовалась одна и та же метрика (с точностью до линейного преобразования).

## ОГРАНИЧЕНИЯ

Все ограничения, рассматриваемые ниже, могут считаться относящимися скорее к ограничениям в отношении тестовых вопросов, чем к ограничениям в отношении специфики групп экзаменуемых, к которым эти вопросы адресуются.

- I. Рассмотрение должно быть ограничено тестами, составленными из вопросов, ответы на которые получают значения 0 или 1. Если значение, принимаемое ответом на вопрос  $i$ , обозначить через  $x_i$ , то можно записать

$$x_i = 0 \text{ или } 1. \quad (1)$$

В дальнейшем для удобства ответы на вопросы будут называться «правильными» или «неправильными», при этом будет применяться терминология, принятая для тестов «способности». Однако полученные результаты будут справедливы и для тестов некоторых других типов.

- II. Рассмотрение должно быть ограничено тестами, для которых исходный балл  $s$  принимается равным числу правильных ответов. Если тест состоит из  $n$  вопросов, мы получим выражение

$$s = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

- III. Рассмотрим долю (proportion) правильных ответов, данных на вопрос  $i$  всеми экзаменуемыми, находящимися в некоторой точке континуума способности. Будем считать, что теоретически возможное число экзаменуемых на любом уровне способности достаточно велико, чтобы можно



было пренебречь выборочными (sampling) флуктуациями; поэтому в дальнейшем будет применяться терминология, соответствующая всей совокупности экзаменуемых. Эта доля будет некоторой неизвестной функцией способности, подобной одной из трех кривых, показанных на рис. 2. Лазарсфельд [7] называет такую кривую «графиком» («trace line») вопроса; мы, следуя терминологии Таккера [13], будем называть ее *характеристической кривой вопроса*. Важно отметить, что если тест достаточно надежный (то есть достаточно длинный), то форма характеристической кривой вопроса может быть определена с желаемой степенью точности на основе анализа эмпирических данных для используемых вопросов. Таким образом, можно проверить, соответствуют ли тестовые данные принятым ограничениям. Доказательство этого положения и краткое описание соответствующей процедуры будет приведено ниже в параграфе «Определение соответствия заданного набора вопросов исходным ограничениям» (см. стр. 84—86).

Предлагаемый в настоящей статье метод может быть одинаково успешно применен для исследования вопросов, имеющих произвольную форму характеристической кривой. Однако для иллюстрации метода и получения конкретных результатов необходимо ограничиться тестами, составленными из вопросов, характеристические кривые которых имеют некоторые общие свойства. Поэтому мы ограничимся тестами, составленными из вопросов, характеристические кривые которых имеют следующие свойства.

- а) Если уровень способности экзаменуемых достаточно низок, то доля правильных ответов на некоторый определенный вопрос должна быть близка к нулю. Это ограничение предполагает, что по крайней мере теоретически можно представить себе экзаменуемых, способности которых так низки, что они вообще не могут ответить на вопрос правильно.
- б) Если уровень способности экзаменуемых достаточно высок, то доля правильных ответов на некоторый определенный вопрос будет близка к 1.

- в) С увеличением уровня способности экзаменуемых доля правильных ответов увеличивается.
- г) Характеристическая кривая имеет гладкую форму и только одну точку перегиба.

Этот достаточно общий класс кривых, отражающих зависимость числа правильных ответов от балла теста, выбран потому, что он наиболее соответствует эмпиричес-

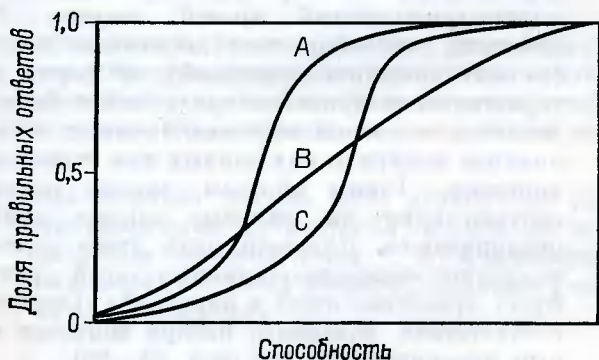


Рис. 2. Характеристические кривые вопроса.

ским кривым, получаемым при тестировании способностей и уровня развития. Возможность произвольного растяжения или сжатия шкалы, используемой для измерения способности, существенно ослабляет сформулированные выше ограничения на форму характеристической кривой.

Следует отметить, что ограничение III а соответствует требованию исключить из рассмотрения вопросы, правильные ответы на которые могут быть угаданы, если только каким-либо образом возможность угадывания не сведена к минимуму, по крайней мере среди экзаменуемых с низким уровнем способности. При желании, чтобы охватить ситуации, в которых правильные ответы на вопросы могут быть угаданы, можно ввести соответствующие альтернативные ограничения на форму характеристической кривой. Тогда метод, предлагаемый в настоящей статье, может быть использован для получения выводов о свойствах тестов, состоящих из таких вопросов,

На этом этапе могут быть кратко рассмотрены соотношения между характеристической кривой, трудностью и различающей мощностью (*discriminating power*) вопроса. На качественном уровне можно сказать, что характеристические кривые, соответствующие более трудным вопросам, лежат правее на континууме способности, чем кривые, соответствующие более легким вопросам. Весьма различающие вопросы имеют характеристические кривые, которые круто поднимаются относительно некоторой точки; слабо различающие вопросы имеют характеристические кривые без крутых подъемов.

Важно отметить, что форма характеристической кривой вопроса, в общем, не связана с формой кривой распределения способности в тестируемой группе. Этот факт очевиден, если отметить, что доля правильных ответов на вопрос экзаменуемым данного уровня способности теоретически не зависит от числа экзаменуемых, оказавшихся на этом уровне в тестируемой группе.

IV. Рассмотрение должно быть ограничено тестами, которые гомогенны в следующем смысле. Гомогенный тест (для наших целей) определяется как тест, составленный из таких вопросов, что *для любой группы экзаменуемых, находящихся на одном и том же уровне способности*, ответы, данные на любой вопрос, статистически независимы от ответов, данных на остальные вопросы. Другими словами, для тех экзаменуемых на данном уровне способности, которые ответили на данный вопрос правильно, вероятность правильно ответить на другие вопросы не больше, чем для тех экзаменуемых на том же уровне способности, которые ответили на данный вопрос неверно. Это ограничение использовалось Таккером [13, 14, 15] и Лазарсфельдом [7]; введенный здесь «континуум способности», в сущности, то же самое, что и «латентный континуум» Лазарсфельда.

Следует отметить, что в вышеприведенном определении не подразумевается, что однородные вопросы не коррелированы в группе экзаменуемых в целом. Наоборот, для

наиболее способных экзаменуемых должна наблюдаться тенденция отвечать на вопросы правильно, а для наименее способных — отвечать на них неправильно, так что вопросы должны быть коррелированы по группе в целом. Однако для каждого фиксированного уровня способности эти вопросы должны быть независимыми.

Важно отметить обоснованность — почти необходимость — введения этого ограничения. Ограничение такого типа, очевидно, необходимо, чтобы исключить из рассмотрения все тесты, которые содержат измерения двух или более способностей. Например, нам не хотелось бы рассматривать тест, составленный наполовину из вопросов, сформулированных на вербальном уровне, и наполовину — на математическом уровне. Предположим, что ограничение IV не было наложено. В этом случае нам пришлось бы рассматривать тесты, включающие два или более вопроса, которые были коррелированы друг с другом даже тогда, когда уровень способности оставался постоянным. Но тогда эти два или более вопроса с необходимостью измеряли бы нечто другое, чем способность, с которой мы имели дело. Следовательно, условие IV необходимо, чтобы исключить из рассмотрения такие тесты.

Некоторой аналогией ограничения IV в терминах факторного анализа может быть требование, чтобы ранг корреляционной матрицы вопросов теста был равен единице. Это позволяет каждому вопросу иметь свой весовой коэффициент и вариацию ошибки, но исключает существование более чем одного общего для вопросов фактора. Определение гомогенности, приведенное в предыдущем параграфе, лучше, чем сформулированное на языке факторного анализа, поскольку первое определение требует полной независимости, тогда как факторный анализ может требовать, чтобы были нулевыми лишь определенные корреляционные моменты. Эти два определения не идентичны, например, если не все включенные регрессии прямолинейны. Однако благодаря близости этих определений терминология факторного анализа обычно бывает полезной для понимания обсуждаемых проблем. Например, в ряде случаев полезно аппроксимировать представление континуума способности просто в виде общего фактора корреляции вопросов.



## ВЫВОДЫ

*Распределение тестовых баллов в группе экзаменуемых на фиксированном уровне способности.* В соответствии с ограничением IV ответы на два вопроса независимы внутри группы экзаменуемых на фиксированном уровне способности. Пусть  $P_{i.c}$  и  $P_{j.c}$  — доля правильных ответов, данных экзаменуемыми фиксированного уровня способности ( $c$ ) на вопросы  $i$  и  $j$  соответственно. Тогда вероятность того, что экзаменуемый ответит правильно на оба вопроса, равна произведению безусловных вероятностей  $P_{i.c}P_{j.c}$ . Если мы рассмотрим тест, составленный только из двух вопросов, вероятность того, что какой-либо экзаменуемый на уровне способности  $c$  получит исходный балл 2, может быть записана в виде

$$P(s=2|c) = P_{i.c}P_{j.c}. \quad (i)$$

(Вертикальная черта в круглых скобках означает, что способность  $c$  фиксирована.) Аналогично, если мы обозначим через  $Q_{i.c}$  величину  $1 - P_{i.c}$  и через  $Q_{j.c}$  величину  $1 - P_{j.c}$ , вероятность того, что экзаменуемый на уровне способности  $c$  получит балл 0 по тесту, составленному из двух вопросов, равна

$$P(s=0|c) = Q_{i.c}Q_{j.c}. \quad (ii)$$

Вероятность того, что экзаменуемый ответит на вопрос  $i$  правильно, а на вопрос  $j$  неправильно, равна  $P_{i.c} \cdot Q_{j.c}$ , вероятность того, что он ответит неправильно на вопрос  $i$  и правильно на вопрос  $j$ , равна  $Q_{i.c}P_{j.c}$ . Поскольку экзаменуемый может получить балл 1 по тесту из двух вопросов двумя путями, то для вероятности того, что он получит балл 1, имеем выражение

$$P(s=1|c) = P_{i.c}Q_{j.c} + Q_{i.c}P_{j.c}. \quad (iii)$$

Для простоты проанализируем сначала выражения (i), (ii) и (iii) для частного случая, когда  $P_{i.c} = P_{j.c}$  для всех значений  $c$ , то есть случая, когда оба вопроса имеют одинаковые характеристические кривые. Такие вопросы в дальнейшем мы будем называть *эквивалентными вопросами*. В этом случае, опуская индекс  $i$  и используя звездочку для обозначения того, что мы имеем дело с частным случаем эквивалентных вопросов, получим:



$$\left. \begin{aligned} P^*(s=2|c) &= P^2_{\cdot c} \\ P^*(s=1|c) &= 2P_{\cdot c}Q_{\cdot c} \\ P^*(s=0|c) &= Q^2_{\cdot c} \end{aligned} \right\}.$$

Эти уравнения представляют частотное распределение исходного балла на заданном уровне способности для частного случая эквивалентных вопросов. Легко заметить, что это распределение является обычным биномиальным распределением. Условное распределение частоты исходного балла теста, представленное вероятностями в выражениях (i), (ii) и (iii) для случая неэквивалентных вопросов, является обобщением биномиального распределения.

Обобщение вышеизложенного приводит к выводу, что условное распределение исходного балла на данном уровне способности для теста, составленного из  $n$  эквивалентных вопросов, является обычным биномиальным распределением. Обозначив через  $f_{s \cdot c}$  частоту  $s$  при фиксированном  $c$ , это условное распределение можно записать в виде

$$f^*_{s \cdot c} = \binom{n}{s} P^s_{\cdot c} Q^{n-s}_{\cdot c}. \quad (3')$$

где через  $\binom{n}{s}$  обозначен обычный биномиальный коэффициент. Соответственно обобщенное биномиальное распределение для случая неэквивалентных вопросов можно записать

$$f_{s \cdot c} = \sum_{\sum x_i = s} \prod_{i=1}^n P^{x_i}_{i \cdot c} Q^{1-x_i}_{i \cdot c}, \quad (3)$$

где  $\prod_i$  означает произведение по всем  $i$  и где суммирование ведется по всем комбинациям значений  $x_i$  таким образом, что  $\sum_{i=1}^n x_i = s$ . Следует отметить, что один из двух сомножителей в (3) всегда будет отсутствовать, так как  $x_i$  равняется 0 или 1.

Обобщенное биномиальное распределение, представленное в виде (3), описывается слишком сложной функцией, неудобной в работе, по этой причине был введен в рассмотрение частный случай эквивалентных вопросов, представленный выражением (3'). В большинстве случаев, встречающихся на практике, форма кривой обобщенного биномиального распределения (3) несущественно отли-



Рис. 3. Полигоны биномиального (-----) и обобщенного биномиального (————) распределения частот баллов на фиксированном уровне способности.

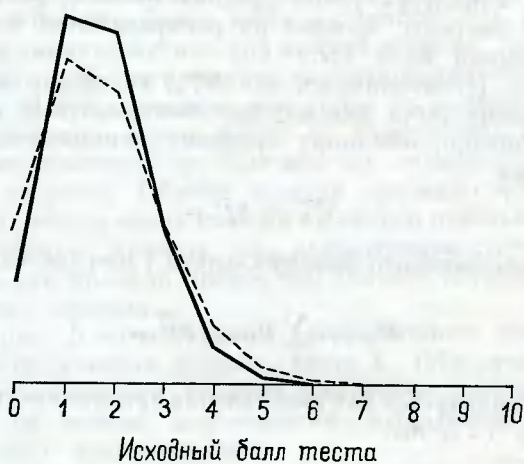


Рис. 4. Полигоны биномиального (-----) и обобщенного биномиального (————) распределения частот баллов на фиксированном уровне способности.

чается от формы кривой обычного биномиального распределения (3'), за исключением того, что дисперсия в случае (3) меньше, чем в случае (3'). Поэтому читатель потеряет очень мало, если согласится следовать изложению предполагаемого подхода в основном на примере частного случая эквивалентных вопросов.

Поскольку значения  $P_{i.c}$ , которые являются ординатой характеристической кривой вопроса, могут быть теоретически определены с желаемой степенью точности для всякой группы экзаменуемых на данном уровне активности, как будет показано в следующем параграфе, численные значения распределения частот исходных баллов для конкретного теста могут быть рассчитаны для любой такой группы экзаменуемых из уравнения (3). На рис. 3 и 4 представлены два таких обобщенных биномиальных распределения, рассчитанных для конкретного теста, состоящего из 10 вопросов<sup>1</sup> и обозначаемого далее как тест  $h$ ; они совмещены для сравнения с соответствующими обычными биномиальными распределениями, имеющими те же значения средних. На рис. 3 представлены распределения баллов теста для экзаменуемых на уровне способности, характеризуемом средним баллом, равным 5,0. С другой стороны, каждое из распределений на рис. 4 имеет средний балл 1,7.

Среднее (обозначим его как  $M_{s.c}^*$ ) условного распределения баллов теста для случая эквивалентных вопросов равно, конечно, обычному среднему биномиального распределения

$$M_{s.c}^* = nP_{.c}. \quad (4')$$

Среднее обобщенного биномиального распределения имеет вид

$$M_{s.c} = \sum_i P_{i.c} = n\bar{P}_{.c}. \quad (4)$$

где  $\bar{P}_{.c}$  используется для обозначения среднего величин  $P_{i.c}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

---

<sup>1</sup> Рассматриваемый тест был составлен из 10 вопросов по выявлению математических способностей, имеющих следующую относительную сложность (по доле правильных ответов): 0,16; 0,18; 0,20; 0,27; 0,34; 0,43; 0,44; 0,47; 0,57; 0,87. Метод получения характеристических кривых вопросов несущественно отличается от предложенного в данной работе.

Функцию  $n\bar{P}_{.c}$  будем называть *характеристической функцией теста*. Важно отметить, что эта функция, подобно характеристической функции вопроса, также остается независимой от формы распределения способности в тестируемой группе.

Аналогично стандартное отклонение балла теста на данном уровне способности представляется в виде

$$\sigma_{s.c}^* = \sqrt{nP_{.c}Q_{.c}} \quad , \quad (5')$$

$$\sigma_{s.c} = \sqrt{\sum_i P_{i.c}Q_{i.c}} \quad . \quad (5)$$

## РЕГРЕССИЯ БАЛЛА ТЕСТА НА СПОСОБНОСТЬ

Среднее значение балла теста на фиксированном уровне способности можно представить как среднее по столбцу диаграммы рассеяния тестового балла и способности. Соответственно характеристическая кривая *теста*, представляемая выражением (4), является кривой регрессии тестового балла по способности.

Как видно из (4'), в случае эквивалентных вопросов кривая регрессии балла теста на способность идентична по форме характеристической кривой вопроса, так как  $n$  — константа, а  $P_{.c}$  — ордината характеристической кривой вопроса. В общем случае, как видно из соотношения (4), кривая регрессии балла теста на способность идентична по форме изменению средних величин характеристических кривых вопросов. Обычно кривая средних величин для типичных тестов очень похожа на любую отдельную характеристическую кривую за исключением того, что ее наклон, как правило, ниже, чем соответствующий наклон отдельных кривых.

На рис. 5 представлена регрессионная кривая, или характеристическая кривая, теста  $h$ . (Метрика представления способности на этой диаграмме выбрана произвольно на основе соображений, выходящих за рамки настоящего исследования.)

Тот факт, что регрессия балла теста на способность в общем случае не линейна, может вызвать некоторое беспокойство. Тем не менее, как будет показано далее, в общем случае нет оснований считать эту регрессию строго линейной.

Метрика по оси абсцисс на рис. 5 всегда может быть преобразована путем сжатия и растяжения так, что кривая регрессии для отдельного теста будет прямой. Однако, предполагая, что такое преобразование выполнено, рассмотрим новый тест той же самой способности, но более различающий, чем тест  $h$ , и рассмотрим линию регрессии для нового теста, нанесенную на преобразованную кривую рис. 5 вместе с линией регрессии теста  $h$ . Если новый тест является достаточно различающим, то наклон соответствующей ему линии регрессии будет для некоторых уровней способности больше, чем наклон прямой линии регрессии, полученной преобразованием оси абсцисс на рис. 5. Если регрессия для нового теста имеет вид прямой линии с более высоким наклоном, то эта прямая линия

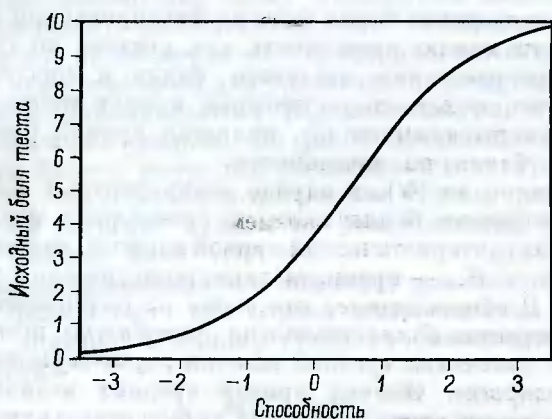


Рис. 5. Характеристическая кривая теста, то есть регрессионная кривая балла теста на способность.

на чертеже неизбежно была бы обрезана и выступала за нижнюю или за верхнюю границу преобразованной кривой на рис. 5 или за ту или другую сразу. Этот результат, однако, соответствовал бы предположению, что экзаменуемые на определенных уровнях способности должны получить отрицательные баллы или баллы, превышающие высший балл, что, конечно, было бы абсурдом. Поэтому мы вынуждены сделать заключение о том, что новый тест не должен иметь линейной регрессии, если



к метрике способности теста  $h$  применяется описанное преобразование. Это преобразование, выбранное специально для определенного теста, в общем случае не будет приводить к спрямлению кривых регрессий других тестов для той же самой способности. Такое преобразование метрики способности может быть приемлемо для практического работника, который связан с единственным тестом, но его применение было бы нежелательно и неприемлемо для теоретических исследований. Для таких целей, как уже отмечалось, выбранная метрика способности должна оставаться неизменной при рассмотрении различных тестов той же способности, чтобы обеспечить адекватную систему координат, с помощью которой могли бы сравниваться различные тесты. Поэтому мы можем сделать вывод, что *регрессия балла теста на способность в общетеоретических целях должна рассматриваться как нелинейная. Этот вывод означает в дальнейшем, что, если мы выбираем метрику для способности таким образом, что согласны считать ее обеспечивающей «равнозначные» единицы измерения, тогда единицы измерения, полученные на основе шкалы исходных баллов, должны соответственно рассматриваться как «неравнозначные».*

Несмотря на то что регрессия балла теста на способность в большинстве случаев криволинейна, часто может оказаться, что в реальной практике криволинейностью можно целиком пренебречь. Эта ситуация имеет место всякий раз, когда экзаменуемые в отдельной испытываемой группе обладают способностью в диапазоне, внутри которого регрессия практически линейна.

Конкретные исследования [8, § В 8] показывают, что линейное приближение практически приемлемо в большинстве ситуаций тестирования, характеризующихся следующими условиями:

а) степень трудности теста соответствует тестируемой группе так, что средний экзаменуемый отвечает правильно примерно на половину вопросов, и

б) корреляция между вопросами внутри теста не является чрезвычайно большой (отметим, что слишком большая корреляция между вопросами может быть как результатом использования весьма различающихся вопросов, так и чрезвычайно широкого диапазона способности в испытываемой группе).

## ИСТИННЫЕ БАЛЛЫ

Истинный балл экзаменуемого обычно определяется как среднее баллов, которые он получил бы при бесконечном множестве эквивалентных тестов. Для всякого экзаменуемого это среднее должно быть тем же самым, что и среднее баллов данного теста, полученных теоретически бесконечным множеством экзаменуемых на том же самом уровне способности. Это положение может быть доказано [от противного] путем рассмотрения альтернативных предположений, которые будут приводить к противоречию, ибо, если некоторые экзаменуемые получили более высокое среднее по баллам на бесконечном множестве эквивалентных тестов, чем среднее по экзаменуемым на том же уровне способности, вопросы в этом тесте должны иметь положительную корреляцию внутри этой группы экзаменуемых. Этот вывод противоречит ограничению IV; предположение, ведущее к такому выводу, должно быть отклонено. Поэтому заключение о том, что все истинные баллы попадают на регрессионную кривую исходных баллов на способность, то есть на характеристическую кривую теста, можно считать доказанным.

Этот вывод можно сформулировать иначе для получения некоторых важных обобщений.

1. *Отношение истинного балла к способности в общем случае криволинейно; следовательно, истинный балл и способность не идентичны.*
2. *Если единицы, выбранные для измерения способности, считаются «равнозначными», то единицы, в которых измеряется истинный балл, должны считаться «неравнозначными». Единицы измерения на границах диапазона изменения истинного балла, в общем, больше, чем вблизи середины интервала. Этот факт очевиден при условии, что величина истинного балла не может быть ниже нуля и выше  $n$ , тогда как для большинства тестов способность экзаменуемых, к которым этот тест может быть применен, обычно ранжируется значительно ниже того уровня способности, для которого истинный балл получается близким к нулю, и значительно выше того уровня способности, для которого получается практически высший истинный балл.*

Поскольку истинный балл практически не отличается от регрессии, справедливы следующие утверждения.

3. *Имеет место полная криволинейная корреляция между истинным баллом и способностью.*
4. *Существует взаимно однозначное преобразование, которое переводит истинные баллы в «баллы способности», шкала способности может быть получена из шкалы истинных баллов в результате операций сжатия и растяжения.*

Из этого могут быть получены дальнейшие выводы. Рассмотрим соотношение между истинными баллами двух составленных из  $n$  вопросов тестов одной и той же способностью. Из того, что оба истинных балла имеют полную криволинейную корреляцию с одной и той же способностью, следует, что эти два истинных балла имеют полную криволинейную корреляцию друг с другом. Интересно установить, при каких условиях соотношение между этими двумя баллами будет прямолинейным.

Если соотношение  $t_1$  к  $t_2$  линейно, мы имеем

$$t_2 = at_1 + b,$$

где  $a$  и  $b$  определяют наклон и точки пересечения прямой с осями  $t_1$ ,  $t_2$ . В соответствии с ограничениями IIIa,  $b$  известно, что если значение  $c$  достаточно высоко, то все характеристические кривые вопросов будут незначительно отличаться от 1,00, а если величина  $c$  мала, кривые будут незначительно отличаться от 0. Поскольку регрессия балла теста на способность есть просто (см. уравнение 4) произведение  $n$  на среднее ординат характеристических кривых признаков, получаем, что, когда  $c$  велико или мало, регрессионные кривые, а следовательно, и значения  $t_1$  и  $t_2$  будут близки к  $n$  или 0 соответственно. Так как для таких значений  $c$  значения  $t_1$  и  $t_2$  мало отличаются друг от друга, величина  $a$  должна быть приблизительно равной 1, а  $b$  — нулю и, следовательно,  $t_1$  и  $t_2$  должны быть приближенно одинаковыми для экзаменуемых на всех уровнях способности. Приходим к заключению, что:

5. *Истинные баллы двух тестов одной и той же способности могут иметь линейное отношение только в случае, если тесты настолько подобны, что каждый*

экзаменуемый имеет фактически одинаковый истинный балл по обоим тестам. Тесты одной и той же способности, которые отличаются средними уровнями сложности или различающей мощностью составляющих их вопросов, неизбежно будут иметь истинные баллы, отношение которых нелинейно.

## КРИВОЛИНЕЙНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ БАЛЛА ТЕСТА И СПОСОБНОСТИ

Коэффициент криволинейной корреляции не зависит от преобразования независимых переменных. Поскольку шкала истинного балла может рассматриваться как преобразование шкалы способности, криволинейная корреляция балла теста и способности эквивалентна корреляции балла теста и истинного балла. Пусть регрессия балла теста на истинный балл линейна, следовательно «криволинейная» корреляция балла теста и истинного балла равна корреляции между этими двумя переменными, которые, как хорошо известно, равны корню квадратному из надежности теста. Таким образом, получаем,<sup>3</sup> что *криволинейная корреляция балла теста и способности точно равна корню квадратному из величины надежности теста.*

## СТАНДАРТНАЯ ОШИБКА ИЗМЕРЕНИЯ

Поскольку все истинные баллы лежат на кривой регрессии действительных баллов на способность, отклонение фактического балла экзаменуемого от этой регрессионной кривой то же, что и отклонение от истинного балла экзаменуемого. Так как ошибка измерения определяется как разница между действительным баллом и истинным баллом, эти отклонения фактически являются обычными ошибками измерения. Стандартное отклонение этих ошибок измерения на фиксированном уровне способности, конечно, то же самое, что и стандартное отклонение балла теста на том же уровне способности. Это стандартное отклонение называется стандартной ошибкой измерения на фиксированном уровне способности (или на фиксированном уровне истинного балла). Формула для вычисления



этого стандартного отклонения дается уравнением (5). Термин «стандартная ошибка измерения», чаще используемый в литературе, соответствует среднему значению вышеупомянутого стандартного отклонения, определяемому по всем экзаменуемым в тестируемой группе.

Прежде всего мы видим из уравнения (5), что *стандартная ошибка измерения в общем случае различна на различных уровнях способности*. Более того, если уровень способности достаточно низкий, то все значения  $P_{i.c}$  должны быть близкими к 0 (ограничение IIIa); если уровень достаточно высокий, то все значения  $Q_{i.c}$  должны быть близкими к 0 (ограничение IIIб). Следовательно, как видно из уравнения (5), *на крайних уровнях способности стандартная ошибка измерения должна быть очень мала*.

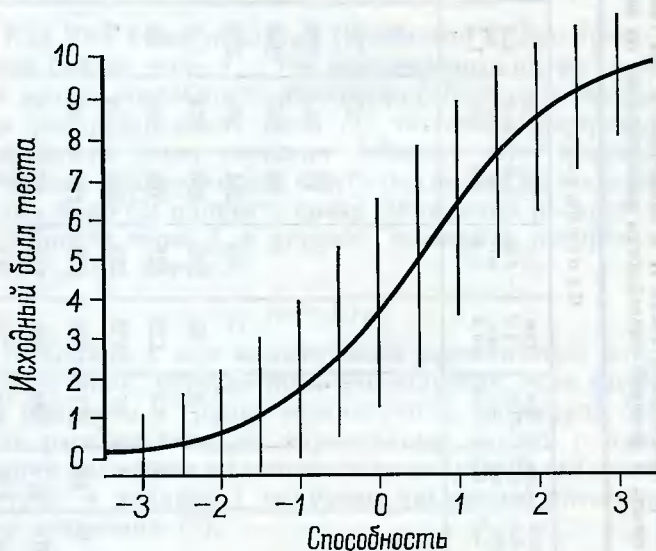


Рис. 6. Стандартные ошибки измерения (вертикальные линии) для выделенных уровней способности.

Следует заметить, что эта малая величина стандартной ошибки измерения *не* означает, что тест имеет значительную различающую мощность для экзаменуемых на граничных уровнях способности; фактически выделяющая мощность теста для таких экзаменуемых будет очень мала,



Корреляционная таблица для баллов теста  $\bar{h}$  и способности для гипотетической группы из 10 000 экзаменуемых, в которой способность распределена по нормальному закону

## Способность

Балл	От -4,0 до -3,5	От -3,5 до -3,0	От -3,0 до -2,5	От -2,5 до -2,0	От -2,0 до -1,5	От -1,5 до -1,0	От -1,0 до -0,5	От -0,5 до 0,0	От 0,0 до 0,5	От 0,5 до 1,0	От 1,0 до 1,5	От 1,5 до 2,0	От 2,0 до 2,5	От 2,5 до 3,0	От 3,0 до 3,5	От 3,5 до 4,0	$f_s$
10									3	18	44	47	28	7	2		149
9								3	25	92	116	66	17	2			321
8							2	17	115	199	143	39	4				519
7							7	94	263	259	96	11	1				731
6						2	54	261	385	213	35	2					952
5					2	23	200	450	376	106	6						1163
4				1	13	129	427	516	236	26	2						1350
3					87	352	573	381	84	3							1490
2					277	530	459	161	13	1							1520
1			1	9	69	396	180	27	3								1276
0	2	9	37	92	153	75	15	2									530

так как экзаменуемые в широком диапазоне очень низких уровней способности будут получать нулевые или близкие к нулю баллы и соответственно в широком диапазоне очень высоких уровней способности все будут получать высшие или близкие к высшим баллы.

Стандартные ошибки измерения для выделенных уровней способности для теста  $h$  отмечены для наглядности на рис. 6 вертикальными линиями; длина каждой линии равна соответствующей стандартной ошибке, увеличенной в четыре раза.

## ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛА ТЕСТА И СПОСОБНОСТИ

Как уже было показано (уравнение 3), распределение частот баллов теста  $f_{s \cdot c}$  для экзаменуемых на фиксированном уровне способности является обобщенным биномиальным распределением. Если бы частотное распределение способности было известно [обычно оно неизвестно], двумерное распределение частот балла теста и способности можно было бы написать сразу. Обозначив распределение способности через  $f_c$  и искомое двумерное распределение через  $f_{cs}$ , мы имеем

$$f_{cs} = f_c f_{s \cdot c}. \quad (6)$$

В таблице 1 для иллюстрации представлено корреляционное поле, которое было бы получено, если бы тест  $h$  был применен к группе экзаменуемых, в которой способность распределена по нормальному закону с нулевым средним значением и единичным стандартным отклонением. Частоты в таблице 1 получены численным интегрированием уравнения (6).

## ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ

Как уже указывалось, отклонение балла экзаменуемого от кривой регрессии балла теста на способность фактически и есть ошибка измерения в том смысле, в каком этот термин обычно употребляется. Среднее значение ошибки измерения для экзаменуемых на любом заданном уровне способности равно нулю, а стандартное отклонение ошибок измерения на данном уровне способности задается уравне-

нием (5). Распределение частот ошибок измерения на заданном уровне способности является обобщенным биномиальным распределением, тождественным с распределением, описываемым уравнением (5), за исключением того, что среднее значение ошибки измерения равно нулю.

Наиболее важные из этих выводов следующие:

1. Ошибки измерений не являются нормально распределенными, а имеют обобщенное биномиальное распределение, симметричное лишь в отдельных случаях.

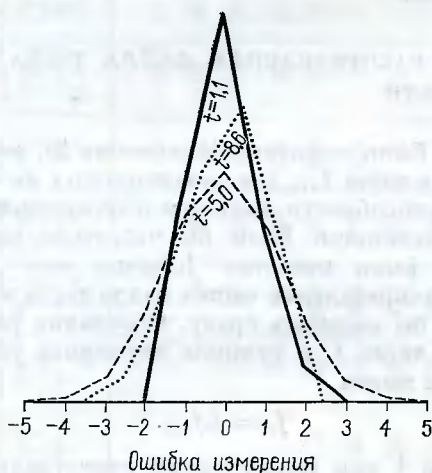


Рис. 7. Полигоны частот ошибок измерения для трех групп экзаменуемых для выделенных уровней истинного балла ( $t$ ).

2. Ошибки измерения независимы от истинного балла (или способности); по мере того как истинный балл отклоняется от окрестности значения  $n/2$ , распределение ошибок измерения имеет все меньший разброс и становится все более скошенным.
3. Поскольку средняя ошибка измерения на любом заданном уровне способности или истинного балла всегда равна нулю на множестве экзаменуемых, линия регрессии, проходящая через эти средние, горизонтальна и корреляция между ошибками измерения и истинным баллом всегда равна нулю.

Хотя обычно принято предполагать, что ошибки измерений *не зависят* от истинного балла, это предположение необходимо подвергать проверке по основным формулам теории тестов — эти формулы требуют только, чтобы ошибки измерений имели нулевую корреляцию с истинным баллом.

На рис. 7 показано распределение частот ошибок измерения для экзаменуемых трех различных уровней истинного балла по тесту *h*. Можно заметить, что для реального теста ошибки измерения для заданного уровня истинного балла носят дискретный, а не непрерывный характер.

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ БАЛЛОВ ДЛЯ ОЧЕНЬ ДЛИННЫХ ТЕСТОВ

Распределение частот истинных баллов для произвольной тестируемой группы, конечно, зависит а) от частотного распределения способности в тестируемой группе и б) от характеристической кривой теста. Цель этого параграфа — проиллюстрировать соотношение между характеристической кривой теста и распределением частот истинных баллов. В следующем параграфе будет удобно в чисто иллюстративных целях исследовать эти соотношения для частного случая, когда распределение частот способности в отдельной тестируемой группе экзаменуемых оказывается нормальным распределением. Процедура, используемая для получения распределения истинного балла на основе характеристической кривой теста в этом частном случае, применима без изменений для любого другого случая, когда задано частотное распределение способности в тестируемой группе.

Следует отметить, что все результаты, полученные в этом параграфе, будут применимы для приближенного построения распределения баллов реальных тестов при условии, что реальный тест является достаточно длинным, так как для достаточно длинных тестов фактический балл будет незначительно отличаться от истинного балла.

На рис. 8 показана характеристическая кривая для достаточно различающего гипотетического теста со сложностью, соответствующей тестируемой группе таким образом, что средний экзаменуемый отвечает правильно на половину вопросов. Такой тест может быть составлен,

например, из вопросов, каждый из которых имеет характеристическую кривую, подобную кривой, показанной на рисунке, которая весьма типична для кривых открытых вопросов в когнитивных тестах, или такой тест может быть составлен из различных признаков, имеющих характеристические кривые, средние значения которых представлялись бы характеристической кривой теста, показанной на рисунке.

На рис. 8 нормальное распределение частот способности описывается нормальной кривой (которая изображается под осью абсцисс). Ось абсцисс градуирована в едини-

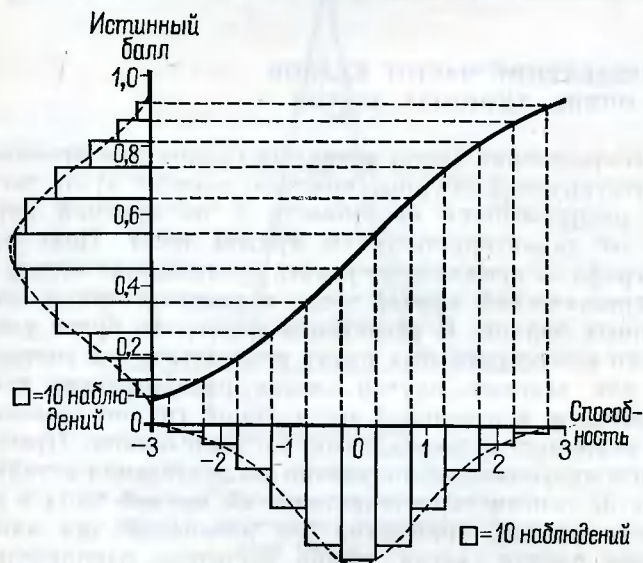


Рис. 8. Построение распределения истинных баллов для теста средней трудности и средней различающей мощности.

цах стандартных отклонений этой кривой для нормального распределения. Для наглядности вместо кривой будем рассматривать соответствующую ей гистограмму, которая на рисунке изображена вместе с кривой. Истинный балл откладывается по вертикальной оси (ординат) и равен доле вопросов, получивших верный ответ, так что возможные значения истинного балла лежат в интервале от 0 до 1.



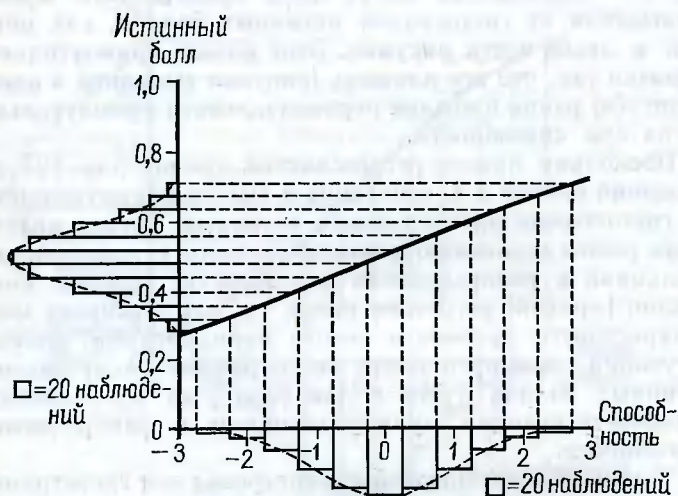
Предполагается, что общее число индивидов в тестируемой группе равно 1000. Наша цель при этом — построить распределение истинного балла из распределения способности с помощью характеристической кривой. Рассмотрим 197 наблюдений, которые лежат между  $-0,25$  и  $+0,25$  на оси абсцисс (см. рис. 8). Эти наблюдения представлены площадью соответствующего прямоугольника на гистограмме. Истинные баллы для всех наблюдений должны попасть на приведенную на рис. 8 кривую регрессии, то есть все их истинные баллы должны лежать между  $0,45$  и  $0,55$  (ординаты регрессионной кривой, соответствующие значениям способности  $-0,25$  и  $+0,25$ ). Эти 197 наблюдений могут быть представлены прямоугольником на гистограмме истинных баллов, как показано в левой части рисунка. Этот новый прямоугольник строится так, что его площадь (рисунок выполнен в одном масштабе) равна площади первоначального прямоугольника на оси способности.

Поскольку наклон регрессионной кривой для 197 наблюдений близок к 4, основание и высота прямоугольника на гистограмме распределения истинных баллов практически равны основанию и высоте соответствующего прямоугольника в распределении способности. Однако, когда наклон [кривой] регрессии равен  $1/2$ , как это имеет место в окрестности правого и левого края рисунка, соответствующий прямоугольник гистограммы распределения истинных баллов будет в два раза уже по сравнению с соответствующим прямоугольником в распределении способности.

Таким образом может быть построена вся гистограмма, соответствующая распределению частот истинных баллов. Характеристическая кривая теста, в сущности, определяет преобразование шкалы способностей, которое переводит эту шкалу в шкалу истинных баллов. Конечно, следует упомянуть, что распределение истинных баллов в действительности соответствует гладкой кривой, которая аппроксимируется гистограммой. Соответствующая гладкая кривая показана на рис. 8 и некоторых следующих рисунках.

Если сложность теста соответствует тестируемой группе таким образом, что средний экзаменуемый имеет истинный балл, соответствующий 50 процентам правильных ответов, и если характеристическая кривая теста имеет типичную

форму огивы, такую, как показано на рис. 8, основной результат такого преобразования может рассматриваться как сжатие шкалы способности на краях. Если в тестируемой группе распределение способности нормально, то распределение тестовых баллов будет, следовательно, иметь эксцесс. Этот эффект невелик для большинства тестов в реальной практике. Однако в течение ряда лет Таккер указывал, что многочисленные распределения баллов теста, которые ему встречались, были обычно с эксцессом меньше нормального. Подтверждающие эмпирические результаты содержатся в работах Молленкофа [10] и Лорда [8].



**Рис. 9.** Построение распределения истинных баллов для теста средней трудности и малой различающей мощности.

Рисунок 9 может рассматриваться как иллюстрация распределения истинного балла теста, который имеет весьма малую различающую мощность. Фактически тест, показанный на рис. 9, может быть представлен как тот же тест, что и на рис. 8, различие состоит только в ранжировании способности в тестируемых группах экзаменуемых. Говоря более точно, это различие было бы получено, если группа экзаменуемых на рис. 8 имела бы стандартное отклонение по способности в 2,5 раза больше, чем группа экзаменуемых на рис. 9, то есть если произвольная еди-

ница, использованная для измерения способности на рис. 9, была бы в 2,5 раза больше, чем единица измерения на рис. 9.

Чтобы не превышать принятых размеров рисунка, площадь, соответствующая кривым плотности распределения и гистограммам на рис. 9, в два раза уменьшена по сравнению с такой же площадью на рис. 8. Изменение шкалы уменьшает только высоту плотности распределения частот; это не имеет никакого отношения к величине единиц, используемых для измерения способности, обсуждаемой в предыдущем параграфе.

Так как характеристическая кривая на рис. 9 над диапазоном способности, в котором находятся экзаменуемые, близка к прямой, это приводит фактически к линейному преобразованию шкалы способности. Тогда истинные баллы распределены фактически нормально, так как линейное преобразование шкалы способности должно приводить к той же форме распределения. Группа экзаменуемых, имеющая нормальное распределение способности, будет иметь нормальное распределение баллов теста тогда, и только тогда, когда характеристическая кривая имеет форму прямой над диапазоном изменения способности в тестируемой группе. Как отмечалось ранее, характеристическая кривая может быть близка к прямой над требуемым диапазоном, когда а) тест имеет соответствующую для тестируемой группы степень трудности и б) внутренняя корреляция вопросов невысока.

Следует отметить, что истинные баллы на рис. 9 эффективно покрывают только около половины возможного диапазона от 0 до 1. Это очевидный результат, его можно ожидать, когда характеристическая кривая имеет малый наклон, то есть когда тест имеет малую различающую мощность. Такой тест будет давать относительно малое среднее квадратичное отклонение баллов теста и соответственно будет менее надежным.

На рис. 10 показано распределение истинных баллов для теста, различающего намного больше, чем тест, показанный на рис. 8, или, с другой стороны, для того же теста, что показан на рис. 8, но примененного к очень неоднородной группе экзаменуемых. В этом случае истинные баллы имеют большой эксцесс, почти прямоугольное распределение с относительно большим средним квадратичным отклонением.

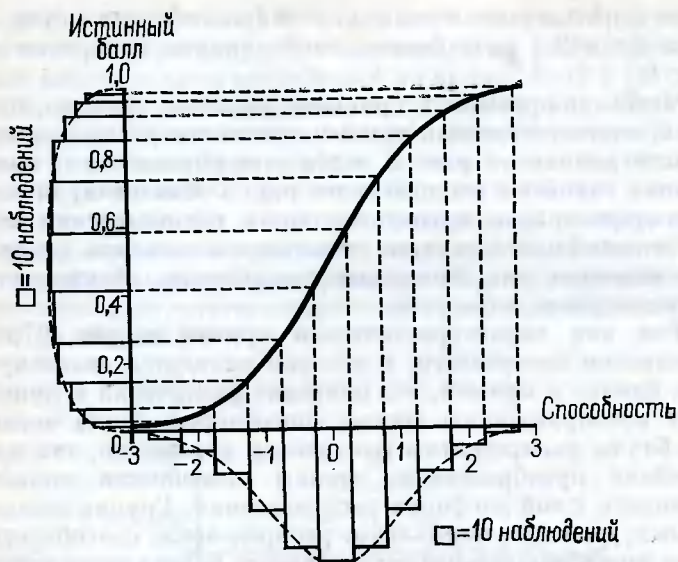


Рис. 10. Построение распределения истинных баллов для теста средней трудности и большой различающей мощности.

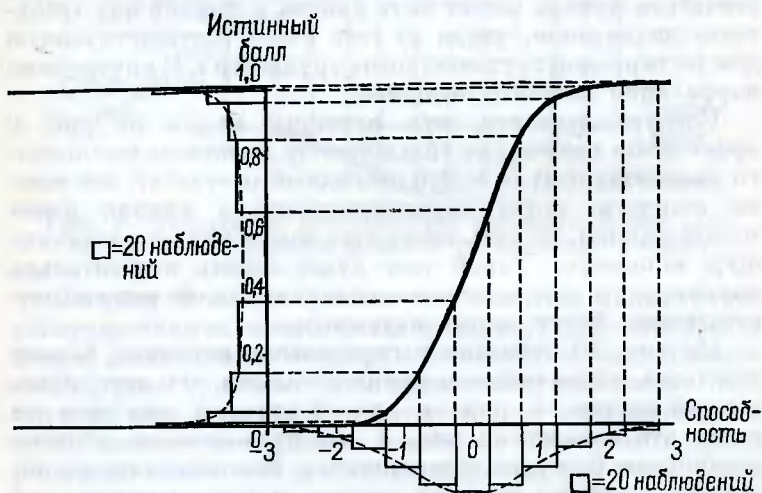


Рис. 11. Построение распределения истинных баллов для теста средней трудности и наибольшей различающей мощности.

Завершает последовательность примеров рис. 11, иллюстрирующий ситуацию, когда тест является настолько различающим, что получается U-образное распределение истинных баллов. Фергюсон и Джексон [3, 4] указывали на важность получения распределения фактических баллов, имеющего форму, подобную приведенной на рисунках 10 и 11 для тех ситуаций, когда желательно снизить оценку баллов в окрестности медианы распределения способности тестируемой группы. В такой ситуации желательно иметь как можно меньшее число экзаменуемых с граничными значениями баллов — эта цель может быть легче достигнута при U-образном или прямоугольном распределении, чем при колоколообразном распределении баллов теста. К со-

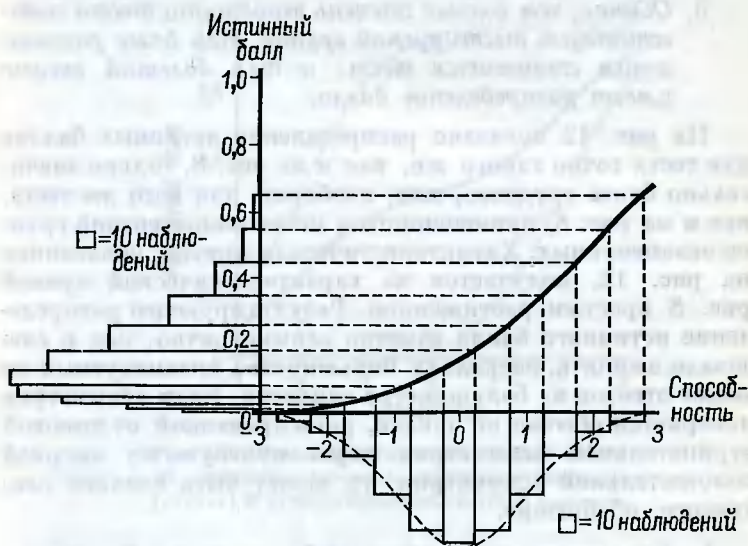


Рис. 12. Построение распределения истинных баллов для трудного теста средней различающей мощности.

жалению, имеющиеся в настоящее время на практике признаки, используемые в большинстве когнитивных тестов, оказываются недостаточно различающими, чтобы при их применении к типичным группам экзаменуемых можно было получить какое-либо распределение баллов, кроме колоколообразного.



На основе приведенной серии иллюстраций можно получить следующие выводы.

1. Поскольку характеристическая кривая теста нелинейна, распределение баллов теста в общем случае не будет того же вида, что и распределение способности; в частности, если распределение способности подчиняется нормальному закону, то распределение балла, в общем, не будет строго нормальным.
2. U-образное или почти прямоугольное распределение баллов может быть получено при условии, если в тесте используются достаточно различающие признаки.
3. Обычно, чем больше степень трудности теста соответствует тестируемой группе, тем более различающим становится тест, и тем больший эксцесс имеет распределение балла.

На рис. 12 показано распределение истинных баллов для теста точно такого же, как и на рис. 8, только значительно более трудного, или, наоборот, для того же теста, как и на рис. 8, примененного к менее компетентной группе экзаменуемых. Характеристическая кривая, показанная на рис. 12, получается из характеристической кривой рис. 8 простым растяжением. Результирующее распределение истинного балла заметно асимметрично, как и следовало ожидать, поскольку большинство экзаменуемых не знают ответов на большинство вопросов. Если асимметрия измеряется обычно по шкале, ранжированной от высокой отрицательной асимметрии через нулевую до высокой положительной асимметрии, то может быть сделано следующее обобщение.

4. Асимметрия распределения балла теста обычно имеет тенденцию в положительном направлении, если трудность теста выше уровня, соответствующего тестируемой группе, и — в отрицательном направлении, если трудность теста ниже этого уровня.

Справедливость этого обобщения очевидна при рассмотрении предельного случая, когда большинство экзаменуемых получают нулевой (или максимальный) балл и распределение баллов теста имеет заметную положительную (или отрицательную) асимметрию.

На рисунках 13 и 14 показан особый случай теста, составленного из выделяющих вопросов высокой степени, половина которых состоит из очень легких, а другая половина — из очень трудных вопросов. Предположим, что каждый из легких вопросов имеет характеристическую кривую, показанную на рис. 13 пунктирной линией, и что каждый из трудных вопросов имеет характеристическую кривую, показанную точечной линией. Кривая, соответствующая среднему этих кривых и показанная сплошной линией, лежащей между ними, представляет характеристическую кривую общего теста. В отличие от кривых для отдельных вопросов характеристическая кривая теста в этом особом случае имеет три точки перегиба.

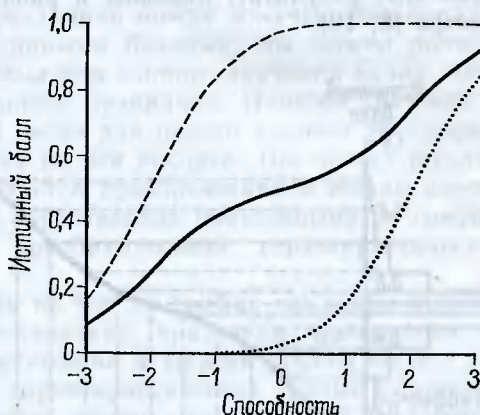


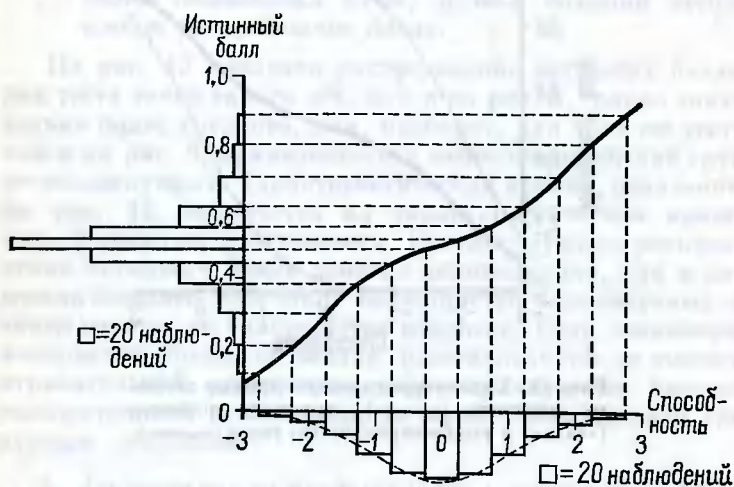
Рис. 13. Характеристические кривые легкого подтеста (-----), трудного подтеста (.....) и комбинированного теста (—).

Можно заметить, что для любого заданного уровня способности наклон характеристической кривой теста меньше, чем наклон одной из двух других кривых, так что ни в одной точке наклон характеристической кривой теста не достигает максимума, достигаемого кривыми, средней которых является эта кривая. Мы можем сделать следующее обобщение.

5. Тест, составленный из вопросов одинаковой различающей мощности, но неодинаковой трудности, не может в окрестности любого фиксированного

уровня способности быть настолько различающимся, как тест, составленный из подобных вопросов, каждый из которых соответствует трудности этого уровня.

На рис. 14 показано распределение истинного балла для теста, составленного наполовину из легких, наполовину из трудных вопросов. В данном случае влияние характеристической кривой вопроса, рассматриваемое как преобразование, накладываемое на распределение частот способности, сводится к уплотнению случаев, попадающих в среднюю часть распределения способности; таким образом, получается эксцесс, превышающий эксцесс нормального распределения истинного балла. Эксперименты, подтверждающие этот результат, описаны в работах Лорда и Молленкофа [8, 10].



**Рис. 14.** Построение распределения истинных баллов для теста, составленного наполовину из легких и наполовину из трудных вопросов.

Используя изложенный графический метод, читатель при желании может легко построить распределения истинного балла, которые получаются также при других формах характеристических кривых.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ ЗАДАННОГО НАБОРА ВОПРОСОВ ИСХОДНЫМ ОГРАНИЧЕНИЯМ

Ограничения I и II требуют только использования определенных стандартных методов подсчета баллов. Ограничение III определяет некоторый достаточно широкий класс рассматриваемых характеристических кривых вопросов. Ограничение IV требует, чтобы ответы на вопросы были независимы, если уровень способности постоянный.

Если подготовить и провести достаточно надежный (то есть достаточно длинный) тест, можно получить баллы теста, настолько точно приближающиеся к истинным баллам, насколько это будет желательно. Пренебрегая небольшим различием между полученными баллами и желаемыми истинными баллами, мы можем вычислить долю экзаменуемых для данного значения балла, которые ответили на вопрос правильно. Нанесем значения этих относительных чисел для одного вопроса на график, отложив баллы теста по оси абсцисс. Поскольку шкала истинных баллов является преобразованием шкалы способности, то и кривая, образованная нанесенными на график точками, является преобразованием характеристической кривой вопроса.

Нанесем на тот же график все такие преобразованные характеристические кривые и попытаемся определить способ растяжения и сжатия шкалы по оси абсцисс так, чтобы все характеристические кривые одновременно стали удовлетворять общим ограничениям, наложенным на их форму. На практике никакого преобразования не требуется, если правильные ответы не получаются в основном наугад, или в худшем случае некоторое количество вопросов потребуется исключить из теста, так как большинство характеристических кривых в когнитивной области [приложений], по-видимому, имеют требуемую форму.

Если в результате применения вышеописанной процедуры ограничение III удовлетворяется, мы можем исследовать данные для согласования с более сильным ограничением IV. Мы можем взять всех экзаменуемых с данным значением балла и использовать критерий хи-квадрат (или, если количество наблюдений мало, точный критерий), чтобы определить, являются ли независимыми их ответы на любую пару вопросов или на любой набор вопро-



сов. Значения критерия хи-квадрат, полученные для различных значений балла, могут быть просуммированы, и полученный общий критерий хи-квадрат может быть исследован на значимость.

В случае, если тест не приводит к незначимому критерию хи-квадрат, должен быть сделан вывод, что тест не является гомогенным и не удовлетворяет ограничению IV; однако даже в таком случае часто бывает возможным разбить тест на гомогенные подтесты, с которыми можно работать дальше. Например, может быть обнаружено, что тест на математические способности состоит из относительно гомогенных подтестов в области алгебры, геометрии, тригонометрии и т. д.

Следует отметить, что вышеописанные процедуры, будучи теоретически простыми, на практике становятся очень трудоемкими из-за большого числа вопросов. Приближенные методы могут допускать практически сокращение этой трудоемкой процедуры. Главное, однако, не в том, что такая процедура могла бы использоваться в обычной практике, а в том, что можно по крайней мере теоретически определить, удовлетворяет ли набор вопросов принятым ограничениям.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку два различных теста на определение одной и той же способности, примененные к одной группе экзаменуемых, в общем случае не дают одинакового распределения частот исходных баллов или истинных баллов, то очевидно, что ни шкала исходных баллов, ни шкала истинных баллов не представляют в точности распределение «способности» в группе. (Здесь использовалась терминология тестирования способностей и достижений, хотя результаты применимы и к другим типам тестов.) Поскольку мы обычно имеем дело со «способностью», а не со шкалой исходного балла, составленной на основе отдельного теста, полезно выяснить, какие достаточно строгие выводы могут быть сделаны относительно шкалы исходного балла данного теста и соответствующей способности. Отношение шкалы исходного балла к способности определяется отдельными характеристиками вопросов, из которых составлен тест. Отсюда могут быть сделаны некоторые



заключения о том, как следует выбирать вопросы теста, чтобы получить желаемые соотношения между баллами теста и способностью.

*Результаты настоящей работы получены на основе предположения, что исследуемая способность есть упорядоченная переменная, которая может быть численно представлена в одном измерении.* Метрика определения способности выбирается совершенно произвольно, в данной работе не использовалась ни одна конкретная метрика, ее выбор оставлен на усмотрение читателя.

Вопросы теста подбирались с учетом следующих четырех ограничений:

- I. Ответам на вопросы теста приписываются значения 0 или 1.
- II. Тестовой балл равен доле вопросов, получивших правильный ответ.
- III. Характеристические кривые вопросов имеют вид, типичный для когнитивных вопросов, правильные ответы на которые не могут быть получены наугад.
- IV. Вопросы гомогенны в определенном смысле.  
Установлена теоретическая возможность определения того, удовлетворяет ли набор вопросов этим ограничениям. Получены, в частности, следующие результаты:
  1. Регрессия балла теста и истинного балла на способность в общем случае должна рассматриваться как криволинейная. (На практике, однако, значение этой криволинейности часто настолько мало, что ею можно пренебречь, поскольку обычно в пределах ограниченного диапазона способности регрессионная кривая фактически линейна.)
  2. Если метрика способности выбрана читателем так, чтобы получить такие единицы измерения, которые он согласен считать «равнозначными», то единицы измерения исходного и истинного балла в общем случае должны рассматриваться как «неравнозначные». Единицы измерения истинного и исходного балла на границах диапазона изменения балла становятся больше, чем в середине диапазона.
  3. Регрессия тестового балла на способность идентична по форме со средним значением характеристических кривых вопросов теста.

4. Имеется полная криволинейная корреляция между истинным баллом и способностью; соответственно шкала истинного балла может рассматриваться как преобразование шкалы способности.
5. Если два теста одной и той же способности отличаются средним уровнем трудности или различающей мощностью составляющих их вопросов, то истинные баллы двух таких тестов, хотя и могут быть полностью коррелированы, неизбежно будут иметь криволинейное отношение.
6. Криволинейная корреляция балла теста и способности всегда равна корню квадратному из величины надежности теста.
7. Стандартная ошибка измерения различна для различных уровней способности экзаменуемых; она минимальна для экзаменуемых, которые могут получить оценку, близкую к максимальному или нулевому баллу.
8. Ошибки измерения не подчиняются нормальному распределению и имеют, скорее, «обобщенное биномиальное» распределение, симметричное лишь в отдельных случаях.
9. Ошибки эксперимента, хотя и не коррелируют с истинным баллом и со способностью (в смысле смешанного момента), не являются *независимыми* от способности для истинного балла, поскольку стандартное отклонение и асимметрия распределения ошибок изменяются с изменением уровня способности.
10. В общем случае распределение балла теста не имеет той же формы, что и распределение способности; в частности, если способности распределены по нормальному закону, баллы в общем случае не будут распределены нормально. (На практике, однако, степень отклонения от нормального закона часто бывает пренебрежимо мала.)
11. U-образное и равномерное распределения баллов могут быть получены, если в тесте используются достаточно различающие вопросы.
12. Как правило, если уровень трудности теста соответствует испытываемой группе, то более различающему тесту соответствует распределение с эксцессом меньше нормального.

13. Асимметрия распределения балла теста, как правило, изменяется в положительном направлении при возрастании трудности теста, а при уменьшении трудности — в отрицательном.

14. Тест, составленный из вопросов одинаковой различающей мощности, но неодинаковой трудности, не может быть в окрестности любого определенного уровня способности настолько различающим, как тест, составленный из вопросов одинаковой различающей мощности, но по трудности соответствующий данному уровню способности. «Максимальный» тест, составленный из вопросов примерно одинаковой трудности, следовало бы использовать исключительно в целях разделения экзаменуемых на группы «выдержавших» (passing) и «невыдержавших» (failing) испытания.

Таким образом, исходя из одного предположения и четырех ограничений оказалось возможным получить ряд важных выводов. Если характеристическая кривая вопроса описана в математической форме, то могут быть получены более точные дополнительные результаты, как сделали Кэррол [1], Кронбах и Варрингтон [2], Лоули [5, 6], Лазарсфельд [7], Лорд [8, 9], Мосье [11, 12] и Таккер [13, 14, 15].

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. J. B. Carroll, Problems in the Factor Analysis of Tests of Varying Difficulty, «American Psychologist», 5, 1950, 369.
2. L. J. Cronbach, and W. G. Warrington, Efficiency of Multiple-Choice Tests as a Function of Spread of Item Difficulties, «Psychometrika», 7, 1952, 127—148.
3. G. A. Ferguson, Item Selection by the Constant Process, «Psychometrika», 7, 1942, 19—29.
4. R. W. B. Jackson and G. A. Ferguson, A Functional Approach in Test Construction, «Educational & Psychological Measurement», 3, 1943, 23—28.
5. D. N. Lawley, On Problems Connected with Item Selection and Test Construction, «Procedures of the Royal Society of Edinburgh», 1943, 61-A, part 3, pp. 273—287.
6. D. N. Lawley, The Factorial Analysis of Multiple Item Tests, «Procedures of the Royal Society of Edinburgh», 1944, 62-A, part 1, pp. 74—82.
7. P. F. Lazarsfeld (with S. A. Stouffer, et al.), Measurement and Prediction, в: «Studies in Social Psychology in World War II», Princeton University Press, 1950, Chaps. 10, 11.

8. F. M. Lord, A Theory of Test Scores, «Psychometric Monographs», 7, 1952.
9. F. M. Lord, An Application of Confidence Intervals and of Maximum Likelihood to the Estimation of an Examinee's Ability, «Psychometrika», 18, 1953, 56—76.
10. W. G. Mollenkopf, Variation of the Standard Error of Measurement, «Psychometrika», 14, 1949, 189—229.
11. C. J. Mosier, Psychophysics and Mental Test Theory: Fundamental Postulates and Elementary Theorems, «Psychological Review», 47, 1940, 355—366.
12. C. I. Mosier, Psychophysics and Mental Test Theory. II. The Constant Process, «Psychological Review», 48, 1941, 235—249.
13. L. R. Tucker, Maximum Validity of a Test with Equivalent Items, «Psychometrika», 11, 1946, 1—13.
14. L. R. Tucker, A Method for Scaling Ability Test Items in Difficulty Taking Item Unreliability into Account, «American Psychologist», 3, 1948, 309—310.
15. L. R. Tucker, A Level of Proficiency Scale for a Unidimensional Skill, «American Psychologist», 7, 1952, 408.



# ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ВОПРОСОВ

Дж. Рэск

## 1. ВВЕДЕНИЕ

По традиции особенности психологического теста определялись в терминах вариаций внутри некоторого указанного распределения лиц. На практике такие группы лиц могут быть выбраны различными способами, и поэтому рассматриваемые свойства (например, коэффициент надежности) не являются специфическими для самого теста, но могут изменяться в зависимости от выбора лиц. Аналогично оценка субъекта обычно связана с группой лиц с помощью стандартизации некоторых признаков и поэтому не является, по существу, специфической для субъекта. Наша цель состоит в разработке вероятностных моделей, при применении которых можно не учитывать группу лиц. Тот факт, что можно построить такие модели, имеет определенное математическое значение, и кажется удивительным, что данные, собранные при проведении психологического теста, могут быть довольно хорошо изображены такими моделями.

В нашей предыдущей работе [2] были сделаны попытки построить общую структуру, в пределах которой модели более ранней работы [3] оказались бы частными случаями, и были обнаружены некоторые свойства этой общей структуры. Но только недавно стало совершенно ясно, что эта модель в действительности *отвечает требованию того, что параметры и характер дискретной вероятностной модели в некотором смысле объективно могут быть полностью определены.*

В настоящее время по крайней мере теоретический материал по этому вопросу довольно сложен, и мы не намерены делать его главной темой данной работы. Однако вслед за дискуссией по одной из моделей более раннего результата [3] модель для анализа вопросов в случае



двух возможных ответов покажет характер объективности, к которой мы стремимся, свидетельствуя, таким образом, о более общей проблеме, излагаемой в других работах.

## 2. ДАННЫЕ

Ситуация, которая будет рассмотрена в дальнейшем, такова: довольно большому числу индивидов предложены психологические тесты. Два теста —  $N$  (определение числовых последовательностей) и  $F$  (анализ геометрических фигур) — заслуживают особого внимания. Время, предусмотренное на ответы по тесту  $N$ , было выбрано так, что, по предположению, очень немногих лиц будут иметь заметно большее число правильных ответов, если им предоставить неограниченное время на ответ (этот факт был установлен опытным путем). Если на вопрос не давалось ответа, считалось, что ответ неверный, и по каждому вопросу записывался правильный (+) или неправильный (—) ответ. Аналогично был отработан тест  $F$ .

## 3. МОДЕЛЬ

Рассматриваемая модель основана на следующих трех предположениях:

1. В каждой ситуации индивиду  $v$ , отвечающему на  $i$ -й вопрос теста, соответствует определенная вероятность правильного ответа, которую мы будем записывать в виде

$$p\{+|v, i\} = \frac{\lambda_{vi}}{1 + \lambda_{vi}}, \quad \lambda_{vi} \geq 0. \quad (3.1)$$

2. Параметр  $\lambda_{vi}$  состояния есть произведение двух величин

$$\lambda_{vi} = \xi_v \epsilon_i, \quad (3.2)$$

где  $\xi_v$  относится к индивиду, а  $\epsilon_i$  — к вопросу.

3. Все ответы при данных параметрах стохастически независимы.

Каждое из этих предположений требует некоторых пояснений.

1) При описании наблюдений имеются два явно противоположных типа моделей — детерминистические модели

(такие, как закон тяготения) и стохастические модели (такие, как закон наследственности Менделя). Однако выбор того или другого типа модели не означает, что наблюдаемые явления были причинно обусловлены или что они случайны.

Даже если исходить из того, что некоторое явление можно «истолковать причинно» (какой бы смысл ни имело это выражение), стохастическая модель может оказаться предпочтительней (как, например, в термодинамике).

Несмотря на выбор вероятностной модели для описания ответов на психологический тест, мы не занимаем определенной позиции в возможном споре о том, что вопросы в конечном счете поддаются истолкованию в причинных выражениях.

2) Во многих психофизических пороговых экспериментах субъект подвергается действию одних и тех же стимулов большое число раз. Предполагая, что повторения не влияют на суждения субъекта, эта процедура дает возможность определить каждую величину  $\lambda_{vi}$  отдельно и, следовательно, изучить непосредственно, как параметр состояния изменяется в зависимости от индивида и стимула. В такой ситуации мы можем либо наблюдать, либо не наблюдать мультипликативное правило, сформулированное в (3.2).

Для психологических тестов, с которыми мы будем иметь дело, опыт показал, что при одном повторении результаты обычно несколько улучшались. Большое число повторений не проводилось главным образом потому, что вопросы таковы (и это кажется почти определенным), что некоторые из них будут легко распознаваться после нескольких повторений. Поэтому возможность прямого подхода к вычислению вероятностей ответа представляется незначительной.

Мы прибегнем к помощи предположения, которое может показаться довольно смелым, возможно даже искусственным, а именно будем считать, что величина  $\lambda_{vi}$  может быть представлена в виде произведения параметра субъекта и параметра вопроса. Это предположение в сочетании с двумя другими порождает модель с довольно интересными свойствами, некоторые из которых приводят даже к рассмотрению вопроса о том, насколько хорошо модель представляет данные (см. параграф 6 настоящей статьи).

Как только параметры двух видов определены в процессе решения задачи, они приобретают вполне понятный смысл, как это видно из подстановки (3.2) в (3.1):

$$p\{+|v, i\} = \frac{\xi_v \epsilon_i}{1 + \xi_v \epsilon_i}. \quad (3.3)$$

Таким образом, если одному и тому же индивиду даются вопросы с параметрами  $\epsilon_i$ , близкими к нулю, то вероятность правильного ответа близка к 0, а вероятность дать неверный ответ близка к 1. И это справедливо для каждого индивида, если только модель остается в силе. Аналогично, если  $\epsilon_i$  становится большим, вероятность правильного (+) ответа на соответствующий вопрос стремится к 1, а вероятность неправильного (—) к 0. Так как с возрастанием  $\epsilon_i$  вопросы становятся легче, можно назвать  $\epsilon_i$  степенью легкости вопроса  $i$ .

С другой стороны, задавая тот же самый вопрос субъекту, у которого  $\xi_v$  близко к нулю, мы получим вероятность правильного ответа, близкую к 0, тогда как при неограниченном возрастании  $\xi_v$  вероятность стремится к 1. Это имеет место для каждого вопроса. Таким образом, мы можем образно назвать  $\xi_v$  способностью субъекта  $v$  в отношении рассматриваемых вопросов.

В определении  $\xi_v$  и  $\epsilon_i$  имеется существенная неопределенность. В самом деле, если  $\xi_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$  и  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  представляют собой совокупность решений уравнений

$$\xi_v \epsilon_i = \lambda_{vi}, \quad (3.4)$$

а  $\xi'_v$ ,  $\epsilon'_i$  — другая совокупность решений, то соотношение

$$\xi'_v \epsilon'_i = \xi_v \epsilon_i \quad (3.5)$$

должно быть справедливым для любых комбинаций  $v$  и  $i$ . Таким образом, отношение

$$\frac{\xi'_v}{\xi_v} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon'_i} \quad (3.6)$$

должно быть постоянным (и равным, скажем,  $\alpha$ ), и соответственно общее решение имеет вид

$$\xi'_v = \alpha \xi_v, \quad \epsilon'_i = \frac{1}{\alpha} \epsilon_i, \quad (3.7)$$

где  $\alpha > 0$  — произвольное число.

Неопределенность может быть устранена с помощью выбора одного из вопросов, скажем  $i = 0$ , в качестве *стандартного вопроса*, имеющего «единицу легкости», через которую выражаются показатели легкости других вопросов.

При таком или эквивалентном ему выборе все множество величин  $\xi'_v$  и  $\varepsilon'_i$  становится фиксированным.

В частности,

$$\xi_v = \lambda_{v0}, \quad (3.8)$$

то есть способность субъекта — очень простая функция его вероятности дать правильный ответ на стандартный вопрос

$$\lambda_{v0} = \frac{p\{+|v, 0\}}{1 - p\{+|v, 0\}}, \quad (3.9)$$

являющаяся «ставкой» правильного ответа. Теперь нетрудно найти субъекта, имеющего  $\xi = 1$ . Можно относиться к нему как к *стандартному* субъекту ( $v = 0$ ). И тогда *параметр вопроса*

$$\varepsilon_i = \lambda_{0i} \quad (3.10)$$

является самой простой функцией вероятности того, что стандартный субъект даст правильный ответ на этот вопрос.

3) Для некоторых психологов предположение о стохастической независимости с первого взгляда кажется довольно странным, так как хорошо известно, что обычно коэффициенты корреляции между ответами на различные вопросы сравнительно высоки.

Корреляция вопросов, однако, является следствием предположения о стохастической независимости. При небольшом изменении  $\xi$ , скажем от 0,1 до 10, мы можем получить вполне высокие коэффициенты корреляции. Но если  $\xi$  одно и то же или почти одинаково для всех индивидов, коэффициенты корреляции становятся нулями или близки к нулю. В рассматриваемой модели корреляции между вопросами не представляют существенные свойства вопросов, а определяются главным образом различиями в параметрах индивидов.

Пусть через  $p\left\{\left(\begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix}\right)\right\}$  и  $p\left\{\left(\begin{smallmatrix} i \\ - \end{smallmatrix}\right)\right\}$  обозначены соответственно вероятности того, что индивид дает правильный или неправильный ответ на  $i$ -й вопрос. Рассматривая затем его



возможные ответы на два вопроса  $i$  и  $j$ , можно также ввести вероятности  $p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}$  и т. д. Наше третье предположение утверждает наряду с другими фактами, что ответы индивида на  $i$ -й и  $j$ -й вопросы должны быть «стохастически независимы», что выразится следующими соотношениями:

$$\begin{cases} p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} = p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} \\ p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} j \\ - \end{smallmatrix} \right) \right\} = p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ - \end{smallmatrix} \right) \right\} \text{ и т. д.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Если первое из этих равенств мы разделим на  $p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}$ , а второе на  $p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ - \end{smallmatrix} \right) \right\}$ , то получим

$$p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} = \frac{p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}}{p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}} = \frac{p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} j \\ - \end{smallmatrix} \right) \right\}}{p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ - \end{smallmatrix} \right) \right\}}. \quad (3.12)$$

Отношение (3.12) двух вероятностей есть условная вероятность правильного ответа на  $i$ -й вопрос при условии, что на  $j$ -й вопрос дан правильный ответ. Условная вероятность записывается так:

$$p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \middle| \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} = \frac{p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}}{p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}}. \quad (3.13)$$

Таким образом, соотношение (3.12) можно записать в виде

$$p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \middle| \left( \begin{smallmatrix} j \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\} = p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \middle| \left( \begin{smallmatrix} j \\ - \end{smallmatrix} \right) \right\} = p \left\{ \left( \begin{smallmatrix} i \\ + \end{smallmatrix} \right) \right\}, \quad (3.14)$$

то есть *вероятность положительного ответа на  $i$ -й вопрос не зависит от того, является ли ответ на вопрос  $j$  положительным или отрицательным*; это как раз и есть вероятность положительного ответа на  $i$ -й вопрос.

Разумеется, такое же утверждение справедливо для отрицательного ответа на  $i$ -й вопрос, что представляет собой детализацию утверждения о том, что ответы на  $i$ -й и  $j$ -й вопросы *стохастически независимы*.



Предположение 3 требует также, чтобы для каждого субъекта ответы на все вопросы были стохастически независимы, что выражается равенством

$$p \left\{ \binom{1}{+}, \binom{2}{+}, \dots, \binom{k}{+} \right\} = \\ = p \left\{ \binom{1}{+} \right\} p \left\{ \binom{2}{+} \right\} \dots p \left\{ \binom{k}{+} \right\} \quad (3.15)$$

и другими подобными равенствами. Смысл этого утверждения состоит в том, что *вероятность некоторого ответа на вопрос или совокупность ответов на множество вопросов не зависит от ответов, которые даны на другие вопросы.*

#### 4. СРАВНЕНИЕ ДВУХ ВОПРОСОВ

В качестве введения к более общему рассмотрению модели, которое мы дадим в параграфе 5, исследуем проблему сравнения вопросов.

Согласно (3.11) и (3.3), вероятность правильных ответов на оба вопроса,  $i$ -й и  $j$ -й, равна

$$p \left\{ \binom{i}{+}, \binom{j}{+} \middle| \xi \right\} = p \left\{ \binom{i}{+} \middle| \xi \right\} p \left\{ \binom{j}{+} \middle| \xi \right\} = \\ = \frac{\xi^2 \varepsilon_i \varepsilon_j}{(1 + \xi \varepsilon_i)(1 + \xi \varepsilon_j)} \quad (4.1)$$

для субъекта с параметром  $\xi$ . Аналогично

$$p \left\{ \binom{i}{+}, \binom{j}{-} \middle| \xi \right\} = \frac{\xi \varepsilon_i}{(1 + \xi \varepsilon_i)(1 + \xi \varepsilon_j)}, \quad (4.2)$$

$$p \left\{ \binom{i}{-}, \binom{j}{+} \middle| \xi \right\} = \frac{\xi \varepsilon_i}{(1 + \xi \varepsilon_i)(1 + \xi \varepsilon_j)}, \quad (4.3)$$

$$p \left\{ \binom{i}{-}, \binom{j}{-} \middle| \xi \right\} = \frac{1}{(1 + \xi \varepsilon_i)(1 + \xi \varepsilon_j)}. \quad (4.4)$$

Введем обозначения

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-й вопрос дан ответ } + \\ 0, & \text{если на } i\text{-й вопрос дан ответ } - \end{cases} \quad (4.5)$$

$$a_{\cdot} = a_i + a_j. \quad (4.6)$$

Тогда вероятности того, что  $a_{\cdot} = 0$  и  $a_{\cdot} = 2$ , даются соответственно формулами (4.1) и (4.4), а вероятность того, что  $a_{\cdot} = 1$ , дается суммой равенств (4.2) и (4.3), то есть

$$p \{ a_{\cdot} = 1 \mid \xi \} = \frac{\xi (\varepsilon_i + \varepsilon_j)}{(1 + \xi \varepsilon_i)(1 + \xi \varepsilon_j)}. \quad (4.7)$$

Условная вероятность того, что  $a_i = 1$  при  $a_{\cdot} = 1$  — аналогично (3.13) — получается делением (4.2) на (4.7). Так как при этом общий знаменатель дробей и величина  $\xi$  в числителе этих дробей сокращаются, то мы получаем

$$p\{a_i = 1 | a_{\cdot} = 1, \xi\} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j}. \quad (4.8)$$

Заметим, что правая часть уравнения (4.8) *не зависит от параметра  $\xi$  субъекта*.

Рассмотрим  $n$  субъектов, для каждого из которых случайная величина  $a_{\cdot}$  равна 1. Тогда вероятность того, что  $c$  из этих субъектов имеют  $a_i = 1$  (для них  $a_j = 0$ ), определяется по биномиальному закону

$$p\{c | n\} = \binom{n}{c} \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right)^c \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right)^{n-c}. \quad (4.9)$$

Таким образом, ввиду наличия зависимости

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \approx \frac{c}{n} \quad (4.10)$$

отношение  $\varepsilon_i/\varepsilon_j$  определяется *независимо от параметров субъекта*, распределение которых поэтому не имеет значения.

Кроме того, мы можем провести проверку модели, разбивая сначала субъектов на группы в соответствии с любым принципом (по уровню образования, или по социометрическому статусу, или даже случайно), а затем применяя (4.10) к каждой из групп. Чтобы модель оставалась в силе, отношение  $\varepsilon_i/\varepsilon_j$  должно быть одним и тем же во всех группах, и изменение получаемых оценок должно совпадать с биномиальным распределением (4.9).

Тест, соответствующий постоянной величине отношения  $\varepsilon_i/\varepsilon_j$ , имеет замечательное свойство. Обозначим величины  $c$  и  $n$  в пределах группы соответственно через  $c_g$  и  $n_g$ , где  $g = 1, \dots, h$ , а суммы через  $c_{\cdot}$  и  $n_{\cdot}$  ( $c_{\cdot} = c_1 + \dots + c_h$ ,  $n_{\cdot} = n_1 + \dots + n_h$ ). Так как группы могут быть собраны в группу объема  $n_{\cdot}$ , для которой применяется формула (4.9), получим

$$p\{c_{\cdot} | n_{\cdot}\} = \binom{n_{\cdot}}{c_{\cdot}} \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right)^{c_{\cdot}} \left( \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \right)^{n_{\cdot}-c_{\cdot}}. \quad (4.11)$$

С другой стороны, совместная вероятность случайных вели-

чин  $c_1, \dots, c_h$ , обусловленная их стохастической независимостью, равна

$$p\{c_1, \dots, c_h | n_1, \dots, n_h\} = \prod_{g=1}^h \binom{n_g}{c_g} \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j}\right)^{c_g} \left(\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i + \varepsilon_j}\right)^{n_g - c_g} \quad (4.12)$$

В результате условная вероятность  $c_1, \dots, c_h$  при условии, что задана сумма  $c_.$  (эта вероятность получается делением (4.12) на (4.11)) не зависит от  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon_j$ :

$$p\{c_1, \dots, c_h | c_., n_1, \dots, n_h\} = \frac{\prod_{g=1}^h \binom{n_g}{c_g}}{\binom{n_..}{c_..}}. \quad (4.13)$$

Отсюда следует, что *испытание модели* в той части, которая касается вопросов  $i$  и  $j$ , можно провести в некотором отношении *независимо от всех параметров*.

При формальном дифференцировании соотношения (4.8) субъекты и вопросы можно поменять местами. Таким образом, сравнение двух субъектов  $\mu$  и  $\nu$  с помощью одного вопроса, имеющего параметр  $\varepsilon$ , приводит к условной вероятности

$$p\{a_\mu = 1 | a_., \varepsilon\} = \frac{\xi_\mu}{\xi_\mu + \xi_\nu}, \quad (4.14)$$

где  $a_\mu$ ,  $a_\nu$  и  $a_.$  имеют такой же смысл, как в формулах (4.5) и (4.6). Вероятность (4.14) *не зависит от того, какой вопрос задан*.

Поэтому в принципе можно было бы определить отношение независимо от параметров вопроса. На практике, однако, этот метод не используется, так как число вопросов (в отличие от числа субъектов) обычно невелико.

## 5. ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ $k$ ВОПРОСОВ

При обобщении результатов предыдущего параграфа рассмотрим сначала ответы индивида с параметром  $\xi$  на  $k$  вопросов. Используя обозначения (4.5) и сокращенную запись

$$a_., = a_1 + \dots + a_k, \quad (5.1)$$

мы можем преобразовать (3.3) в

$$p\{a_i|\xi\} = \frac{(\xi \varepsilon_i)^{d_i}}{1 + \xi \varepsilon_i}. \quad (5.2)$$

Обобщение формул (4.1) — (4.4) дается следующим образом:

$$p\{a_1, \dots, a_k | \xi\} = p\{a_1 | \xi\} \dots p\{a_k | \xi\} = \frac{\xi^{a_1} \varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_k^{a_k}}{\prod_{i=1}^k (1 + \xi \varepsilon_i)}. \quad (5.3)$$

Имея в виду, что  $a_i$  равно 1 или 0, из этого результата выводится вероятность того, что  $a_i$  принимает некоторое значение  $r$ . Если  $r = 0$ , то все  $a_i$  равны нулю, и тогда

$$p\{a_{\bullet}=0|\xi\}=\frac{1}{\gamma(\xi)}, \quad (5.4)$$

где для сокращения записи

$$\prod_{i=1}^k (1 + \xi \varepsilon_i) = \gamma(\xi). \quad (5.5)$$

Значение  $r = 1$  можно получить  $k$  различными способами:

[illegible]

Соответствующие вероятности равны

$$\frac{\xi_{\varepsilon_1}}{\gamma(\xi)}, \frac{\xi_{\varepsilon_2}}{\gamma(\xi)}, \dots, \frac{\xi_{\varepsilon_k}}{\gamma(\xi)}, \quad (5.7)$$

а сумма этих вероятностей есть

$$p\{a_{\bullet} = 1 \mid \xi\} = \frac{\xi(e_1 + \dots + e_k)}{\gamma(\xi)}. \quad (5.8)$$

Значение  $r = 2$  можно получить  $\left(\frac{k}{2}\right)$  способами, а именно взяв любые два числа  $a_i$  равными 1, а остальные — равными 0. Вероятности таких комбинаций равны

$$\frac{\xi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\gamma(\xi)}, \frac{\xi^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3}{\gamma(\xi)}, \frac{\xi^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\gamma(\xi)}, \dots, \frac{\xi^2 \varepsilon_{k-1} \varepsilon_k}{\gamma(\xi)}, \quad (5.9)$$

а сумма этих вероятностей есть

$$p \{a_{\cdot} = 2 \mid \xi\} = \frac{\xi^2 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{k-1} \varepsilon_k)}{\gamma(\xi)}. \quad (5.10)$$

В общем, значение  $a_{\cdot} = r$  можно получить  $\left(\frac{k}{r}\right)$  разными способами, взяв любые  $r$  из  $k$  чисел  $a_1, \dots, a_k$  равными 1, а остальные — равными 0. Вероятности таких комбинаций равны

$$\frac{\xi^r \varepsilon_1 \dots \varepsilon_r}{\gamma(\xi)}, \quad \frac{\xi^r \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{r-1} \varepsilon_{r+1}}{\gamma(\xi)}, \quad \dots, \quad \frac{\xi^r \varepsilon_{k-r+1} \dots \varepsilon_k}{\gamma(\xi)}. \quad (5.11)$$

Отсюда находим вероятность того, что

$$p \{a_{\cdot} = r \mid \xi\} = \frac{\gamma_r \xi^r}{\gamma(\xi)}, \quad (5.12)$$

где

$$\gamma_r = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r) + \dots + (\varepsilon_{k-r+1} \dots \varepsilon_k). \quad (5.13)$$

В частности, при  $r = k$  сумма (5.13) содержит только один член

$$\gamma_k = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_k. \quad (5.14)$$

Если в формуле (5.12)  $r$  примет значения  $0, 1, \dots, k$ , то тем самым будут исчерпаны все возможности, и поэтому сумма вероятностей должна быть равна 1:

$$\sum_{r=0}^k p \{a_{\cdot} = r \mid \xi\} = 1. \quad (5.15)$$

Следовательно,

$$\gamma(\xi) = \sum_{r=0}^k \gamma_r \xi^r, \quad (5.16)$$

то есть числа  $\gamma_r$  являются коэффициентами в разложении (5.5) по степеням  $\xi^1$ . Если величины  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  известны, то можно вычислить  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , а из наблюдаемых значений  $a_{\cdot}$  можно вычислить  $\xi$  и указать точность вычисления, например через доверительные интервалы. Таким образом,  $a_{\cdot}$  есть та величина, которая называется *формулой оценки* для  $\xi$ . В настоящее время нас не интересует, как получить оценку из формулы оценки, хотя формула оценки  $a_{\cdot}$  имеет важные свойства.

<sup>1</sup> В алгебре они называются элементарными симметрическими функциями от  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ .



Разделив (5.3) на (5.12), находим условную вероятность величин  $a_1, \dots, a_k$  при условии, что их сумма равна  $r$ . При этой операции сокращаются общий знаменатель дробей, а также общий множитель  $\xi^r$ , и мы получаем выражение

$$p\{a_1, \dots, a_k | a_{\cdot} = r, \xi\} = \frac{\varepsilon_1^{a_1} \dots \varepsilon_k^{a_k}}{\gamma_r}, \quad (5.17)$$

не зависящее от параметра  $\xi$ , который надо вычислить.

Чтобы понять значение этого результата, можно обратиться к очевидному, но фундаментальному принципу науки, который заключается в том, что *если мы хотим знать что-нибудь о величине* (например, параметр модели), *то должны наблюдать нечто, что зависит от этой величины*. Для вычисления параметра  $\xi$  субъекта используются наблюдения  $a_1, \dots, a_k$ . При повторении опыта они должны, согласно нашей теории, изменяться случайно в соответствии с распределением (5.3), зависящим от  $\xi$ .

Случайной переменной является также величина  $a_{\cdot}$ , распределение которой (5.12) зависит от  $\xi$ , и это распределение может быть использовано для вычисления  $\xi$ . Но из (5.17) следует, что *набор нулей и единиц*, составляющих величину  $a_{\cdot}$ , которая также изменяется случайно, *имеет распределение, не зависящее от  $\xi$* . Тогда из указанного выше фундаментального принципа следует, что, как только величина  $a_{\cdot}$  зафиксирована, любая дополнительная информация, *связанная с правильными ответами*, согласно нашей модели, *бесполезна как источник вывода относительно  $\xi$*  (но не для других целей, как это понимают теперь).

Главный результат, состоящий в том, что такая ситуация существует, был получен Р. Фишером в 1922 году, и, следуя его терминологии, мы будем называть  $a_{\cdot}$  *достаточной статистикой* и *формулой оценки* для рассматриваемого параметра.

В данной ситуации, однако, достаточность  $a_{\cdot}$  нуждается в ограничении, хотя это ограничение и относительно, так как основано на предположении, что величины  $\varepsilon_i$  известны. Поскольку таких сведений нет в нашем распоряжении, достаточность, как таковая, не очень полезна, но важное достоинство формулы (5.17) в таком случае заключается в том, что достаточность зависит от  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , но не зависит от  $\xi$ .

С помощью формулы (5.17) можно приступить, как ранее мы делали это с формулой (4.8), к рассмотрению субъектов, которые являются случайными величинами и в сумме дают величину  $a_{\cdot} = r$ . Обозначая через  $a_{vi}$  величину  $a_i$  субъекта  $v$ , а через  $(a_{vi})$  — множество ответов  $a_{v1}, \dots, a_{vk}$  при заданном  $v$ , то есть

$$(a_{vi}) = (a_{v1}, \dots, a_{vk}), \quad (5.18)$$

мы можем написать (5.17) в следующем виде:

$$p\{(a_{vi}) | a_{\cdot} = r\} = \frac{\varepsilon_1^{a_{v1}} \dots \varepsilon_k^{a_{vk}}}{\gamma_r}, \quad v = 1, \dots, n. \quad (5.19)$$

Ответы  $n$  субъектов независимы, и совместная вероятность получается перемножением  $n$  вероятностей из формулы (5.19). Обозначая для краткости все множество  $n \times k$  ответов через  $((a_{vi}))$  [двойные скобки указывают на то, что изменяются оба индекса  $v$  и  $i$ ], получаем

$$p\{((a_{vi})) | (a_{\cdot} = r)\} = \frac{\varepsilon_1^{a_{\cdot 1}} \dots \varepsilon_k^{a_{\cdot k}}}{\gamma_r^n}, \quad (5.20)$$

где

$$a_{\cdot i} = \sum_{v=1}^n a_{vi}. \quad (5.21)$$

Утверждение (5.20) означает, что как следствие модели мы имеем дело с общим числом правильных ответов на каждый вопрос для  $n$  рассматриваемых субъектов.

## 6. РАЗДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Перейдем наконец к рассмотрению ответов  $n$  индивидов с параметрами  $\xi_1, \dots, \xi_n$  на  $k$  вопросов с параметрами  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ . При обозначениях  $a_{vi}$ , введенных в параграфе 5, модель (5.2) принимает вид

$$p\{a_{vi} | \xi_v, \varepsilon_i\} = \frac{(\xi_v \varepsilon_i)^{a_{vi}}}{1 + \xi_v \varepsilon_i}, \quad (6.1)$$

и в предположении стохастической независимости всех ответов  $a_{vi}$ ,  $v = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , совместная веро-

ятность всего множества  $((a_{vi}))$  этих величин становится равной

$$p\{((a_{vi})) | (\xi_v), (\varepsilon_i)\} = \prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^k p\{a_{vi} | \xi_v, \varepsilon_i\} = \\ = \frac{\prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^k (\xi_v \varepsilon_i)^{a_{vi}}}{\prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^k (1 + \xi_v \varepsilon_i)}. \quad (6.2)$$

Мы видим, что в числителе дроби (6.2) параметр  $\xi_v$  встречается на  $k$  местах и при этом каждый раз возводится в степень  $a_{vi}$ ; сложив эти показатели степени, получим  $\xi_v^{a_{v.}}$ . Далее, параметр  $\varepsilon_i$  встречается на  $n$  местах, каждый раз возводится в степень  $a_{vi}$ , причем  $a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{ni} = a_{.i}$ . Если, кроме того, обозначить знаменатель дроби (6.2) через

$$\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i)) = \prod_{v=1}^n \prod_{i=1}^k (1 + \xi_v \varepsilon_i), \quad (6.3)$$

то можно упростить выражение (6.2) и записать его в виде

$$p\{((a_{vi})) | (\xi_v), (\varepsilon_i)\} = \frac{\prod_{v=1}^n \xi_v^{a_{v.}} \cdot \prod_{i=1}^k \varepsilon_i^{a_{.i}}}{\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i))}. \quad (6.4)$$

Эта формула является обобщением формулы (5.3) на случай  $n$  субъектов, но вследствие (6.4) мы должны теперь получить вероятность того, что величины  $a_{1.}, \dots, a_{n.}$  и  $a_{.1}, \dots, a_{.k}$  принимают два заданных множества значений  $r_1, \dots, r_n$  и  $s_1, \dots, s_k$ .

По аналогии с параграфом 5 (в частности, с помощью цепочки рассуждений (5.11)–(5.13)) найдем все возможные способы образования матриц  $((a_{vi}))$ , элементами которых являются 0 и 1, и таких, которые имеют одинаковые суммы элементов строк  $a_{v.} = r_v, v = 1, \dots, n$  и одинаковые суммы элементов столбцов  $a_{.i} = s_i, i = 1, \dots, k$ . Далее, найдем вероятность получения каждой из указанных сумм (каким-либо способом) и, сложив все эти вероятности, найдем совместную вероятность двух рассматриваемых множеств сумм. Однако эта процедура значительно упрощается благодаря тому, что все вероятности, которые нуж-

по складывать, одинаковы, а именно, согласно (6.4), они равны

$$\frac{\prod_{v=1}^n \xi_v^{r_v} \prod_{i=1}^k \varepsilon_i^{s_i}}{\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i))}. \quad (6.5)$$

Таким образом, следует только подсчитать число различных способов образования матриц, элементами которых являются 0 и 1, и учесть при этом, что суммы элементов строк равны  $r_v$ ,  $v = 1, \dots, n$ , а суммы элементов столбцов равны  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Задача определения этого числа является довольно трудной комбинаторной проблемой, но нам сейчас ничего не нужно, кроме записи этого числа. Записывая его в виде

$$\begin{bmatrix} r_1, \dots, r_n \\ s_1, \dots, s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_v) \\ (s_i) \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

получим

$$\begin{aligned} p \{ (a_{v.} = r_v), (a_{.i} = s_i) \mid (\xi_v), (\varepsilon_i) \} = \\ = \begin{bmatrix} (r_v) \\ (s_i) \end{bmatrix} \frac{\prod_{v=1}^n \xi_v^{r_v} \prod_{i=1}^k \varepsilon_i^{s_i}}{\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i))}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Это совместное распределение вероятностей сумм элементов строки  $a_{v.}$  и сумм элементов столбца  $a_{.i}$  содержит как раз столько параметров, сколько имеется наблюдений, и последнее обстоятельство может поэтому оказаться полезным для целей вычисления. Справедливость такого утверждения становится ясной, если мы разделим (6.4) или (6.5) на (6.7). Тогда получим вероятность всего множества наблюдений *при условии, что заданы суммы элементов строк и суммы элементов столбцов*. В действительности все члены, содержащие параметры, сокращаются и мы получаем условную вероятность

$$p \{ ((a_{vi})) \mid (a_{v.} = r_v), (a_{.i} = s_i) \} = \frac{1}{\begin{bmatrix} (r_v) \\ (s_i) \end{bmatrix}}, \quad (6.8)$$

которая не зависит от всех параметров.

Поэтому если только суммы элементов строк и столбцов фиксированы, то все относящееся к любым даль-



нейшим утверждениям о вопросах, на которые даны правильные ответы, и о лицах, является, согласно нашей модели, *бесполезным в качестве источника информации о параметрах*. (Другие применения величин  $a_{vi}$  будут рассмотрены на более позднем этапе нашего исследования.) Следовательно, суммы элементов строк и суммы элементов столбцов *не только пригодны* для вычисления параметров; они *включают в себя всякое возможное утверждение относительно параметров, которое может быть сделано на основе наблюдений*  $((a_{vi}))$ .

Таким образом, мы будем в целях развития терминологии, введенной в параграфе 5, характеризовать суммы элементов строк  $a_{v\cdot}$ ,  $v = 1, \dots, n$  и суммы элементов столбцов  $a_{\cdot i}$ ,  $i = 1, \dots, k$  как *множество достаточных оценок для параметров*  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ .

Так как формула (6.7) содержит оба множества параметров, непосредственное ее использование должно, очевидно, привести к одновременному вычислению обоих множеств. Однако ввиду предыдущего результата (см. замечания к (5.17)) представляется уместным спросить, возможно ли (также в этом общем случае) определить параметры вопроса независимо от параметров субъекта, и наоборот, то есть определить параметры субъекта независимо от параметров вопроса.

Чтобы подойти к этой проблеме, получим сначала распределение сумм элементов строк (это распределение оказывается экспоненциальным по  $\xi$  независимо от величин сумм элементов столбцов), суммируя (6.7) по всем возможным комбинациям  $s_1, \dots, s_k$ . При суммировании знаменатель  $\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i))$  остается постоянным, так же как и члены  $\xi_{v\cdot}^{r_v}$ ,  $v = 1, \dots, n$  в числителе. Таким образом, вводя обозначения

$$\gamma_{\cdot}(r_v)((\varepsilon_i)) = \sum_{(s_i)} \left[ \begin{matrix} (r_v) \\ (s_i) \end{matrix} \right] \varepsilon_1^{s_1} \dots \varepsilon_k^{s_k}, \quad (6.9)$$

получим

$$p\{(a_{v\cdot} = r_v) | (\xi_v), (\varepsilon_i)\} = \frac{\gamma_{\cdot}(r_v)((\varepsilon_i)) \prod_{v=1}^n \xi_v^{r_v}}{\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i))}, \quad (6.10)$$

откуда видно, что величины  $\xi_v$  могут быть определены из сумм элементов строк, если величины  $\varepsilon_i$ , а также многочлены (6.9) известны.



Аналогично мы можем просуммировать (6.7) по всем возможным комбинациям  $r_1, \dots, r_n$ , считая, что зафиксированы числа  $s_1, \dots, s_k$ . Подставляя в (6.9)  $\xi_1, \dots, \xi_n$  вместо  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , мы в результате замены  $r$  на  $s$  получим

$$\gamma_{(s_i)}((\xi_v)) = \sum_{(r_v)} \left[ \begin{matrix} (s_i) \\ (r_v) \end{matrix} \right] \xi_1^{r_1}, \dots, \xi_n^{r_n}, \quad (6.11)$$

где, между прочим,

$$\left[ \begin{matrix} (s_i) \\ (r_v) \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} (r_v) \\ (s_i) \end{matrix} \right]. \quad (6.12)$$

При этом обозначении суммирование проводится по аналогии с (6.10):

$$p\{(a_{\cdot i} = s_i) | (\xi_v), (\varepsilon_i)\} = \frac{\gamma_{(s_i)}((\xi_v)) \prod_{i=1}^k \varepsilon_i^{s_i}}{\gamma((\xi_v), (\varepsilon_i))}, \quad (6.13)$$

и поэтому величины  $\varepsilon_i$  могут быть определены из сумм элементов столбцов *при условии, что величины  $\xi_v$  известны.*

Таким образом, мы можем определить величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , если известны величины  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , и, наоборот, определить  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , если известны значения  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . И обе оценки будут даже соответственно достаточными. Действительно, разделив (6.7) на (6.10) для получения условной вероятности величины  $a_{\cdot i}$  при условии, что задана величина  $a_{v \cdot}$ , мы находим

$$\begin{aligned} p\{(a_{\cdot i} = s_i) | (a_{v \cdot} = r_v), (\xi_v), (\varepsilon_i)\} &= \\ &= \left[ \begin{matrix} (r_v) \\ (s_i) \end{matrix} \right] \frac{\prod_{i=1}^k \varepsilon_i^{a_{\cdot i}}}{\gamma_{(r_v)}((\varepsilon_i))}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

которые подлежат оценке. Подобным образом введение (6.13) в (6.10) дает

$$\begin{aligned} p\{(a_{v \cdot} = r_v) | (a_{\cdot i} = s_i), (\xi_v), (\varepsilon_i)\} &= \\ &= \left[ \begin{matrix} (r_v) \\ (s_i) \end{matrix} \right] \frac{\prod_{v=1}^n \xi_v^{r_v}}{\gamma_{(s_i)}((\xi_v))}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Это выражение не зависит от  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ . Но разумеется,

пока ни одно из множеств параметров не известно, эти возможности остаются неиспользованными.

Одна из характерных особенностей рассматриваемой модели состоит в том, что этот порочный круг может быть разрушен при помощи нового толкования формул (6.14) и (6.15). Действительно, так как выражение (6.14) зависит от  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ , но не зависит от  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , эта формула дает возможность определить  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$  без рассмотрения  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Таким образом, возражения против (6.7) и (6.13) устранены. Неизвестные  $\xi_1, \dots, \xi_n$  в этом выражении заменяются наблюдаемыми величинами — суммами индивидов  $a_{v..}$ . Аналогично в (6.15) величины  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$  из (6.7) и (6.10) заменяются суммами вопросов  $a_{.i}$ , в результате чего мы можем определить  $\xi_1, \dots, \xi_n$  без того, чтобы знать или одновременно определить величины  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ . Таким образом, при решении задачи определения двух множеств параметров можно одну задачу отделить от другой.

В этой связи мы можем вернуться к (6.8), заметив, что эта формула является следствием структуры модели (имеется в виду формула (3.3) и стохастическая независимость) безотносительно к величинам параметров, из которых величины в правой части формулы (6.8) являются независимыми. Поэтому если из данной матрицы  $((a_{vi}))$  мы образуем величину, которая могла бы оказаться полезной для раскрытия частного типа отклонений от модели, то ее выборочное распределение, поскольку оно определяется маргиналами  $a_{v..}$  и  $a_{.i}$ , будет независимым от всех параметров. Таким образом, испытание модели можно отделить от рассмотрения вопроса о параметрах.

Мы не будем рассматривать здесь вопрос о том, как осуществить это испытание на практике, а также вопрос о превращении наблюдаемых сумм элементов строк и сумм элементов столбцов в соответствующие оценки для  $\xi_1, \dots, \xi_n$  и  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ .

Эти вопросы рассмотрены в главе 6 более ранней работы [3] на основе простых методов, в которых использовались приемлемые приближения. В случае теста  $N$  индивиды проходят испытания удовлетворительно для модели, но модель полностью терпит неудачу в случае теста  $F$  (геометрические формы). В последнем тесте норма времени по некоторым техническим причинам урезывается ниже оптимального предела, но повторный анализ (не описанный

здесь) показывает, что, когда сделано допущение для рабочей скорости каждого субъекта, данные соответствуют модели столь же хорошо, как и для теста с числовыми последовательностями.

Однако с теоретической точки зрения метод, использованный для испытания модели, является неудовлетворительным [3, гл. X, особенно стр. 181—182]. В настоящее время мы находимся в стадии разработки лучших методов и поэтому оставляем на будущее подтверждение применимости модели, ограничившись ссылкой на более раннюю работу.

## 7. СПЕЦИФИЧЕСКАЯ ОБЪЕКТИВНОСТЬ

Что касается основных формул (6.14) и (6.15), то мы уже заметили, что, когда они применяются ко всему множеству, они дают нам возможность отделить нахождение одного множества параметров от другого. Однако формулу (6.15) можно применить также к любой подгруппе общей совокупности субъектов, к которым были применены стимулы  $k$ . Таким образом, параметры субъектов в подгруппе можно вычислить без рассмотрения параметров других субъектов.

В частности, параметры любых двух субъектов можно сравнить только по их собственным свойствам, совершенно независимо от группы или совокупности, к которой по некоторым соображениям они могут быть отнесены. Поэтому, как указано в параграфе 1, новый подход исключает рассмотрение совокупности при сравнении индивидов.

Аналогично формула (6.14) может быть применена к любому подмножеству из  $k$  стимулов, и соответственно их параметры могут быть определены без рассмотрения параметров других стимулов. В частности, параметры любых двух стимулов можно сравнить отдельно.

При этих дополнительных результатах принцип отделимости ведет к специфической объективности в утверждениях как относительно параметров, так и относительно структуры модели. Действительно, *сравнение любых двух субъектов* можно выполнить так, чтобы *не участвовали никакие другие параметры, кроме параметров двух субъектов*, — ни параметры любого другого субъекта, ни какие-либо параметры стимулов. Аналогично *любые два стимула*

*можно сравнить независимо от всех других параметров, кроме параметров этих двух стимулов; параметры всех других стимулов, так же как и параметры субъектов, заменяются наблюденными числами.*

Предполагается, что сравнение выполняется при соблюдении таких условий, которые обозначаются как «специфическая объективность». То же самое условие может оказаться подходящим для утверждения о том, что структура модели не зависит от всех параметров, определяемых моделью; неизвестные значения этих параметров в действительности не относятся к структуре модели.

Конечно, специфическая объективность не гарантирует против «субъективности» статистика, когда он выбирает свои пределы, приписывая их за основу сравнения, или когда он решает, какого типа отклонения от модели следует искать. Никто не спасет его от риска представить данные, содержащие субъективное отношение психолога в процессе его наблюдений. В общем, при введении понятия «специфической объективности» я не вступаю в философскую дискуссию о значении и пользе объективности вообще. В настоящее время условием является строгая ограниченность наблюдаемых ситуаций, которые могут быть охвачены схемой стимул — субъект — ответ для того, чтобы эта схема могла быть описана в терминах параметрической модели, которые устанавливаются для стимулов и субъектов.

Для случая двух ответов наглядно показано, что *специфическая объективность во всех трех направлениях может быть достигнута, поскольку остается в силе введенный здесь тип модели.* Уже отмечалось, что, если исключить несущественные математические ограничения, справедливо также и обратное утверждение: если в наличии имеются только два ответа, наблюдения должны соответствовать простой модели (3.3) при условии, что можно сохранить специфическую объективность в утверждениях относительно субъектов, стимулов и модели.

## 8. ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Проблемы, рассмотренные в настоящей статье, сформулированы в пределах узкой области — теории психологического теста. Однако с открытием специфической



объективности мы достигли такой общности в понятиях, что первоначальные ограничения становятся излишними. Происходит расширение в другие области психологии, такие, как психологические пороговые эксперименты и опыты по восприятию величин, однако основная структура, стимулы — субъект — ответ, никоим образом не ограничивает психологию. Как и в более поздней работе [1], модель Пуассона была применена для исследования детской смертности в Дании за период с 1931 по 1960 год. Число случаев детской смертности регистрировалось (от всех причин или по отдельно взятой причине) из общего числа мальчиков и девочек, родившихся в браке и вне брака. В данном случае годы служили субъектом, сочетание пола и «законопости» появления детей — стимулами, а число детских смертей из числа родившихся детей — ответами.

Из области экономики мы взяли в качестве примера семейные бюджеты. Здесь семьи играют роль субъектов, доход и расходы (классифицированные по некоторым видам) — роль стимулов, а денежные суммы, заработанные и истраченные, — роль ответов.

Эти примеры показывают, что структура занимает довольно большое место в социальных науках. Выделение областей, в которых применяются описанные нами модели, представляется сложной проблемой, исследование которой только началось.

Но уже два психологических теста, упомянутые в параграфе 2 и рассмотренные в конце параграфа 6, поучительны в отношении тех трудностей, с которыми мы должны быть готовы встретиться. Для одного из этих двух тестов (числовые последовательности) проведенный ранее анализ (см. [3], гл. 6) показывает совершенно удовлетворительное соответствие наблюдений и модели, то есть в этом случае специфическую объективность можно получить на основе схемы ответов для каждого субъекта. Для другого теста (геометрические формы) анализ наиболее ясно показывает, что отделение параметров не имеет места.

Никто не проверял, имеет ли место отделение параметров для другого психологического теста общедоступного типа, содержащего вопросы, связанные с различными умственными функциями. Следовательно, в этом случае нельзя ожидать, что данные учитывают описание, содержа-



щее только один параметр для каждого субъекта. Вопросы в числовых последовательностях были совершенно единообразными в том смысле, что они удовлетворяли требованию распознавания логической структуры числовой последовательности. Соответственно анализу вопросы были достаточно единообразными — хотя очень разных уровней трудности, — чтобы учитывать описание всех данных одним параметром для каждого субъекта, так же как и для каждого вопроса. Вопросы теста, относящиеся к геометрической фигуре, были построены точно так же единообразно, как и для числовых последовательностей, и поэтому явилось до некоторой степени неожиданным то, что результаты оказались совершенно противоположными.

К этому материалу я могу добавить наблюдения по двум тестам, построенным с одинаковой осторожностью. Один из них — преобразование идеи матричного теста Ревена в буквенные комбинации и в то же время замена многократного выбора построением ответа. Для этого теста результат был точно такой же, как и для числовых последовательностей. Другой тест состоял из множества словесных аналогий, где число даваемых вопросов было практически бесконечным, с эффектом, состоящим в том, что многократный выбор был исключен. Здесь результаты испытаний точно так же неутешительны, как и для теста с геометрической фигурой.

Этот контраст, однако, ведет к открытию тайны. Различие между двумя парами тестов обусловлено не конструктивными принципами, а назначением тестов. Для всех четырех тестов соответствующая норма времени определялась посредством отдельных опытов. При применении их к случайным выборкам из 200 субъектов оказалось, что число правильных ответов образует подходящее распределение для тестов с буквенными матрицами и числовыми последовательностями, но тесты по словесным аналогиям и фигурам слишком легки, и распределение показывает нежелательное накопление множества правильных ответов.

В 1953 году, когда были разработаны простейшие основы теории, создатель теста, давая мне советы по статистическим разделам проблемы, рекомендовал, учитывая нехватку времени, резко сократить временные допуски, с тем чтобы сдвинуть распределения к середине области. Преуспев в этом, мы испортили тест, так как превратили его в смесь теста определения способностей и скорости.

Совсем недавно, однако, я имел возможность заново проанализировать оба множества данных, группируя субъектов по скорости их работы, поскольку она обусловлена числом заданных вопросов, и применяя к каждой группе технические приемы главы 6 более ранней работы [2] Результаты оказались поразительными. В пределах каждой такой группы (по скорости работы) я обнаружил подтверждение теории, и относительные трудности вопросов оказались не зависящими от рабочей скорости. В целом вместе со скоростью, как вспомогательной информацией, специфическая объективность может быть достигнута в отношении свойств, которые тесты имеют целью достичь при измерении.

Преобразуя окончательное утверждение, получим вывод этой статьи. *Наблюдения можно легко сделать так, что специфическая объективность (имеющая место в противном случае) утрачивается.* Например, это легко может случиться, когда качественные наблюдения, скажем, с пятью категориями ответов для удобства сжимаются в три категории. Если основная модель справедлива для пяти категорий, математически почти невозможно, чтобы она оказалась справедливой для трех категорий. Таким образом, соблазн использовать группировку может привести к потере специфической объективности.

В заключение я должен отметить, что проблема отношения данных к модели является не только одной из попыток приспособить данные к соответственно выбранной модели для нашего описания, но также состоит в том, чтобы увидеть, решается ли вопрос: *как провести наблюдения, чтобы имела место специфическая объективность?*

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. P. C. Matthiessen, Infant Mortality in Denmark, 1931—1960, Copenhagen, Statistical Department, 1965.
2. G. Rasch, On General Laws and the Meaning of Measurement in Psychology, в: «Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability», vol. IV, pp. 321—334, Berkeley, Univ. of California Press, 1961.
3. G. Rasch, Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests, Copenhagen, Danish Institute for Educational Research, 1960.



## *Раздел II*

# СТРУКТУРЫ





# МЕХАНИЗМЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ СТРЕМЛЕНИЕ К ЕДИНООБРАЗИЮ В ГРУППАХ

Г. А. Саймон,

Г. Гутцков

Леон Фестингер и его сотрудники [2] установили и проверили ряд гипотез о коммуникационных процессах в малых группах. Данная работа является следующим шагом к синтезу этих гипотез во взаимосвязанную систему, отделению короткодействующих механизмов от тех, что проявляются в течение длительного промежутка времени. Во-первых, мы формализуем некоторые из гипотез Фестингера и организуем их в модель. Затем проверим две экспериментальные работы в их связи с механизмами, вызывающими стремление к единообразию в группах.

## 1. ПОСТУЛИРУЕМАЯ АГРЕГИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ

Некоторые из гипотез Фестингера связаны с агрегированными отношениями, то есть они относятся к членам группы, взятой как целое. Другие предназначены для описания поведения отдельных индивидов в группе. Ограничимся в нашей работе изложением его гипотез о коллективном поведении.

*Агрегированные переменные.* Пять из гипотез Фестингера — они обозначены  $1a$ ,  $1b$ ,  $1c$ ,  $3a$ ,  $3b$  — сформулированы в терминах шести агрегированных переменных, зависящих от времени.

$D(t)$  — различие мнений о цели членов группы в момент времени  $t$ ;

$P(t)$  — давление, оказываемое на членов группы, с тем чтобы они взаимодействовали друг с другом в момент времени  $t$ ;

$L(t)$  — восприимчивость (listening) членов группы к влиянию связей с другими членами в момент времени  $t$ ;

$C(t)$  — степень сплоченности индивидов в группе (cohesiveness) в момент времени  $t$ ;

$U(t)$  — давление, оказываемое на группу, с тем чтобы достичь *единообразия* мнений в момент времени  $t$ ;

$R$  — *значимость* результата для группы. Эта переменная появляется как параметр и поэтому постоянна во времени.

При конструировании модели будем предполагать, что каждая переменная является в некотором роде усредненной, или агрегированной, для членов группы. Например,  $D$  может быть измерена упорядочением мнений членов группы на шкале, присвоением числа позициям шкалы и вычислением среднеквадратичного отклонения. Даже переменные, характеризующие взаимодействия индивидов, хотя они непосредственно не измеряются, могут мыслиться как средние значения для индивидов. Предположим, что величина каждой переменной в момент времени  $t$  для данной группы может быть представлена вещественной переменной, используя этот термин в математическом смысле.

*Представление гипотез при помощи уравнений.* Агрегированные предложения Фестингера [2, стр. 273—277] устанавливают соотношения между переменными, а именно:

Номер предложения	Взаимосвязанные переменные
-------------------	----------------------------

1a	$D$ и $P$
1b	$K$ и $P$
1c	$C$ и $P$
3a	Изменения $D$ и $U$
3b	Изменения $D$ и $C$

Мы можем преобразовать каждую из пяти гипотез в соответствующее математическое соотношение. Однако это неверно по отношению к их значению и может помешать адекватному представлению безоговорочно постулируемых Фестингером динамических механизмов. Вместо этого строим модель из пяти уравнений, которая, как мы полагаем, дает обоснованную интерпретацию. Затем покажем место простых гипотез Фестингера в сконструированной нами системе. Модель содержит следующие пять уравнений:

$$\frac{dD}{dt} = f[P(t), L(t), D(t)]^1, \quad (1.1)$$

$$P(t) = P[D(t), U(t)], \quad (1.2)$$

$$L(t) = L[U(t)], \quad (1.3)$$

$$\frac{dC}{dt} = g[D(t), U(t), C(t)], \quad (1.4)$$

$$U(t) = U[C(t), R]. \quad (1.5)$$

Отметим, что два уравнения (1.1) и (1.4) постулируют процесс постепенной стабилизации  $D$  и  $C$ .

Оставшиеся уравнения (1.2), (1.3) и (1.5) показывают, как  $P$ ,  $L$ ,  $U$  соответственно изменяются одновременно с переменными, от которых они зависят. Термин «одновременно» не следует, конечно, понимать буквально, но можно считать, что механизмы, представленные этими тремя уравнениями, приводят к более быстрому возрастанию зависимой переменной, чем механизмы в двух других уравнениях. Эта часть системы позволяет четко различать короткодействующие и быстродействующие механизмы стремления к единообразию. В то время как значения переменных изменяются со временем, формы уравнений предполагаются независимыми от величины промежутка времени существования группы.

Предложения сформулированы так, что включают только *порядковые*, а не *количественные* свойства переменных. Это важно, поскольку на настоящей стадии развития операционного определения переменных шкала единиц произвольна. Мы можем видеть, что группа  $A$  более сплочена, чем группа  $B$ , но не что  $A$  в два раза более сплочена, чем  $B$ , или что сплоченность  $A$  превосходит сплоченность  $B$  больше, чем сплоченность  $C$  превосходит сплоченность  $D$ . Следует подчеркнуть, что наша трактовка не накладывает никаких требований измеримости переменных, не содержащихся в явной или неявной форме в теории Фестингера. Уравнения содержат утверждения об определенных переменных в терминах «больше» или «меньше»; точно такие же утверждения требуются и теорией Фестингера.

---

<sup>1</sup> Читается так: скорость изменения различия мнений является функцией давления к взаимодействию, восприимчивости к влиянию и существующего различия. Оставшиеся четыре уравнения могут быть прочитаны аналогичным образом.

Сравним гипотезы Фестингера с нашей моделью.

Гипотеза 1а. Давление на членов группы с целью их взаимодействия относительно «предмета  $x$ » монотонно возрастает с ростом наблюдаемого различия мнений относительно «предмета  $x$ » среди членов группы.

Эта гипотеза утверждает, что существует связь между  $P$  и  $D$  и что изменение в последнем приводит к изменению в первом в том же самом направлении. Мы выразили это уравнением (1.2), сделав  $P$  зависящим от  $D$ . Чтобы полностью описать гипотезу Фестингера, нам необходимо добавить гипотезу, что  $P_D > 0$ , где  $P_D$  означает частную производную от  $P$  по  $D$  и изменение  $P$  на единицу изменения  $D$ , когда  $U$  постоянна. Если знак производной положителен (больше нуля), отношение между переменными выражается в форме «если  $x_1$  увеличивается,  $x_2$  также увеличивается». Когда производная отрицательная — связь обратная.

Гипотеза 1b. Давление на членов группы с целью их взаимодействия относительно «предмета  $x$ » монотонно возрастает при возрастании значимости «предмета  $x$ » для функционирования группы.

Эта гипотеза утверждает, что существует связь между  $P$  и  $R$  и что обе они изменяются в одном направлении. Фестингер постулировал также [2, стр. 274], что увеличение  $R$  приводит к увеличению  $P$  посредством увеличения  $U$ . Эти гипотезы представлены нашими уравнениями (1.2) и (1.5). Чтобы полностью учесть гипотезы Фестингера, нам необходимо постулировать в дальнейшем, что  $P_U > 0$  и  $U_R > 0$ . Отметим, что в этом случае более формальные гипотезы Фестингера дополнены пояснением, связывающим наиболее просто устанавливаемое утверждение с другими частями системы.

Гипотеза 1с. Давление на членов группы с целью их взаимодействия относительно «предмета  $x$ » монотонно возрастает с увеличением сплоченности группы.

Это предложение полностью аналогично 1b с заменой  $R$  на  $C$ . Следовательно, оно выражается уравнениями (1.2) и (1.5) при условии, что  $U_C > 0$  и  $P_U > 0$ .

Гипотеза 3а. Общее изменение результирующего мнения как следствие взаимодействия будет увеличиваться с ростом стремления к единообразию в группе.

Общее изменение мнения — в направлении большего или меньшего единообразия — между моментами времени



$t_0$  и  $t_1$  выражается интегралом от  $dD/dt$  на интервале от  $t_0$  до  $t_1$ , где  $dD/dt$  определяется уравнением (1.4). Предположим, что  $f_P < 0$  и  $f_L < 0$ , то есть чем больше давление к общению и чем больше восприимчивость к влиянию, тем более быстро изменяются (уменьшаются) различия во мнениях. Мы предполагаем вместе с Фестингером, что в уравнении (1.3)  $L_U > 0$ . Ранее мы предположили, что  $P_U > 0$ . Отсюда  $\partial f/\partial U = f_L L_U + f_P P_U < 0$ , и, следовательно, стремление мнений к единообразию будет тем больше, чем больше  $U$ . Общее изменение мнения за интервал от  $t_0$  до  $t_1$  тем больше, чем больше  $dD/dt$  в этом интервале. Обозначим это общее изменение  $D$  через  $\Delta D$ , то есть

$$\Delta D = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dD(t)}{dt} dt. \quad (1.6)$$

Тогда гипотеза Фестингера 3а равнозначна следующему утверждению:  $\Delta D$  тем больше, чем больше  $U$  в интервале от  $t_0$  до  $t_1$ .

Гипотеза 3б. *Общее изменение результирующего мнения, обусловленное взаимодействием, будет возрастать с увеличением результирующей силы, оказывающей влияние на реципиента и побуждающей его остаться в группе.*

Эта гипотеза утверждает, что  $\Delta D$  тем больше, чем больше  $C$ . Но  $C$  связано с  $U$  уравнением (1.5) и условием  $U_c > 0$ . И  $U$  в свою очередь связано с  $L$  уравнением (1.3) условием  $L_U > 0$ . Тогда, поскольку  $dD/dt$  связано уравнением (1.1) с  $L$  условием  $\partial f/\partial L < 0$ , следует, что интеграл от  $dD/dt$  на интервале от  $t_0$  до  $t_1$  (или  $\Delta D$ ) будет тем больше, чем больше  $C$ . Это указывает, что гипотеза Фестингера 3б не является независимой, но следует из более ранних предположений, а именно тех, которые сделаны в 1с и 3а.

Приведем интерпретацию пяти гипотез Фестингера в терминах четырех уравнений, включающих шесть переменных (еще не было использовано уравнение (1.4)), и ряда утверждений о знаках частных производных от зависимых переменных по независимым переменным в этих уравнениях<sup>1</sup>. Для удобства ссылок наши предположе-

<sup>1</sup> Поскольку существование или несуществование отдельных переменных в уравнениях и знаки частных производных в них не зависят от шкал, на которых измеряются переменные, наши



ния о знаках частных переменных дадим в следующем порядке:

$$f_P < 0 \quad (1.1a) \quad f_L < 0 \quad (1.1b)$$

$$P_D > 0 \quad (1.2a) \quad P_U > 0 \quad (1.2b)$$

$$L_U > 0 \quad (1.3a)$$

$$U_C > 0 \quad (1.5a) \quad U_R > 0. \quad (1.5b)$$

До сих пор ничего не говорилось об уравнении (1.4). Это уравнение не включено ни в одну из более формальных гипотез Фестингера, но является следствием его утверждения о том, что «люди стремятся присоединиться к группам, которые соответствуют их мнениям и стремлениям, и выходить из групп, которые не согласованы с ними» [2, стр. 273]. Уравнение (1.4) утверждает, что скорость изменения сплоченности группы зависит от различия мнений и стремления к единообразию. Мы постулируем в дальнейшем, что

$$g_D < 0 \quad (1.4a), \quad g_U < 0 \quad (1.4b),$$

то есть большое различие мнений при данном давлении к единообразию или большое давление к единообразию при данном различии мнений приводят к быстрому уменьшению сплоченности группы. При этом также постулируется, что изменение сплоченности зависит от уровня самой сплоченности. Уравнение (1.4) или нечто альтернативное необходимо для того, чтобы сделать динамическую систему полной. Заметим, что в некоторых эмпирических работах фактически действует механизм уравнения (1.4); в других работах предполагается, что  $C$  постоянно на временном интервале эксперимента, то есть  $dC/dt = 0$ .

Все пять уравнений были интерпретированы, но ничего не было сказано о знаках двух частных производных  $f_D$  в уравнении (1.1) и  $g_C$  в уравнении (1.4). Предположим, что описываемая этими пятью уравнениями система находится в равновесии, так что  $dD/dt = 0$  и  $dC/dt = 0$ . Тогда значения пяти зависимых переменных  $D$ ,  $P$ ,  $L$ ,  $C$  и  $U$  будут определяться только значением единственной оставшейся независимой переменной  $R$ . Каждое значение  $R$  будет оп-

---

гипотезы удовлетворяют ранее установленному условию о том, что они могут требовать только порядкового, а не количественного измерения переменных.



Аналогично, если сохраняются высокие уровни различия мнений ( $D$ ) и стремления к единообразию ( $U$ ), можно предположить падение сплоченности ( $C$ ) на более низкие уровни посредством механизма уравнения (1.4) по сравнению с более низкими уровнями  $D$  и  $U$ . Отсюда, подобно только что сказанному, следует

$$g_C < 0. \quad (1.4c)$$

Это завершает сравнение гипотез Фестингера с нашей моделью. Отметим, что к пяти уравнениям необходимо сделать четкие предположения о знаках одиннадцати частных производных. В заключение покажем на рис. 1 причинные связи между переменными, входящими в модель. Для простоты предположим, что переменные изменяются скорее дискретно, чем непрерывно. Таким образом,  $D(t+1)$  является значением  $D$  через один временной интервал после  $t$ . Уравнением (1.1) определено  $D(t+1)$  через  $D(t)$ ,  $P(t)$  и  $L(t)$ . Уравнением (1.2) определено  $P(t)$  через  $D(t)$  и  $U(t)$ ; уравнением (1.3) определено  $L(t)$  через  $U(t)$ . Уравнением (1.4) определено  $C(t+1)$  через  $C(t)$ ,  $D(t)$  и  $U(t)$ , и уравнением (1.5) определено  $U(t)$  через  $R$  и  $C(t)$ .

## 2. СРАВНЕНИЕ

### С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Фестингер исходил из данных, полученных в ряде экспериментов для проверки гипотез. В этом параграфе основные принципы будут проверены с помощью трех работ в терминах сформулированной модели. Наши цели двоякого рода: 1) мы хотим проверить, насколько эмпирические данные подтверждают или противоречат нашей переформулировке системы Фестингера, и 2) мы хотим знать, все ли одиннадцать гипотез «о производных» были проверены, и если не все, то какие остались для проверки в будущем.

*Эксперимент влияния Бека.* Бек [1] провел эксперимент с группами, состоящими из двух испытуемых. Каждый член группы был проинструктирован так, чтобы дать описание рисунков, которые он рассмотрел самостоятельно, перед обсуждением со своим партнером и после обсужде-

ния. Испытуемый полагал, что его рисунки идентичны с теми, что видел его партнер, но в действительности они были в чем-то разными.

Изменение мнения в группе измерялось при помощи анализа совпадений и различий в описании партнеров. Таким образом, измерением может быть получено различие в начале опыта  $D_0$  и различие в конце опыта  $D_T$ . Бек фактически не измерял  $D_0$  и  $D_T$ . Вместо этого он отметил число измерений между начальными и конечными описаниями одного партнера [1, табл. 4 и 5]. Число таких изменений можно принять за меру *уменьшения* различия во мнении, то есть  $D_0 - D_T$ . Поскольку времена всех опытов были равными и короткими,  $D_0 - D_T$  было пропорционально  $dD/dt$  в момент  $t_0$ . Обозначим это символом  $\Delta D_0$ .

Не проводилось измерения, которое могло бы однозначно рассматриваться как прямое измерение давления к общению ( $P$ ), восприимчивости ( $L$ ) или стремления к единообразию ( $U$ ). Это не удивительно, поскольку все названные переменные относятся к внутренним «состояниям» испытуемого и могут наблюдаться только опосредствованно, по производимым им действиям. Бек провел три серии наблюдений с целью установления этих скрытых переменных. Первое измерение состояло в характеристике дискуссии как *активной* или *пассивной*. Активная интерпретировалась как свидетельство высокого  $P$ , пассивная как свидетельство низкого  $P$ . Вторым измерением было сообщение испытуемых о том, чувствовали они или нет во время обсуждения давление со стороны своих партнеров, с тем чтобы изменить даваемые ими описания. Отмеченное давление интерпретировалось как высокое  $U$ , отсутствие давления — как низкое  $U$ . В-третьих, испытуемые опрашивались, были ли они восприимчивы к влиянию партнера. Их ответы рассматривались как меры  $L$ .

Прямых измерений сплоченности или значимости проведено не было. Инструкции, даваемые членам группы перед началом опытов, были задуманы как создающие высокую сплоченность в половине групп и низкую сплоченность в остальных. Инструкции, как считал Бек, давали косвенные меры  $S$ . То, что определенные инструкции будут создавать высокую или низкую сплоченность в группе, основано только на здравом смысле и интро-



спективной интерпретации психологического воздействия инструкций. Поэтому было бы лучше, если бы  $C$  было также измерено непосредственно.

Не ясно, должны ли внутригрупповые различия, вызванные инструкцией, рассматриваться как различия в  $C_0$  или так же, как различия в  $R_0$ . В трех различных множествах экспериментальных групп Бек попытался использовать три различных способа индуцирования высокой или низкой сплоченности: личное внимание партнера по группе, вознаграждение за работу группы и престиж группы. Бек аргументирует это тем, что стремление к единообразию возникает из двух источников: функции группы как компетентной группы в определенной социальной действительности (которая зависит от *сплоченности*) и функции группы как средства достижения личной цели (которая проявляется через *значимость* единообразия мнения для достижения цели). Закономерно интерпретировать первую и третью мотивировки в экспериментах Бека как способы получения сплоченности; вторую — награду за выполнение — как мотивировку, увеличивающую значимость. Поэтому будем предполагать, что экспериментальные инструкции образуют различия как в  $C_0$  так и в  $R_0$  для всех трех множеств групп. В существующих интерпретациях модели это отличие не является жизненно важным, так как  $U_C$  и  $U_R$  оба положительны, и поэтому воздействие на  $U$  через уравнение (1.5) происходит в одном направлении. Выяснение различия может, однако, оказаться важным для дальнейшего развития и проверки теоретической схемы, если будет показана некая операциональная значимость его между этими двумя переменными.

Предполагалось, что во время эксперимента, включающего групповые обсуждения, в течение приблизительно десяти минут эффект воздействия инструкций на сплоченность и значимость остается одним и тем же. Если это справедливо, мы можем пренебречь уравнением (1.4) для системы и предположить, что  $C$  аналогично  $R$  является параметром в уравнении (1.5) и постоянно во время эксперимента для какой-то одной группы. Это равнозначно интерпретации эксперимента в терминах «короткодействующей» модели, в которой действуют механизмы, представленные оставшимися четырьмя уравнениями, но в которой система не успевает прийти к окончательному равновесию. Мы просто пренебрегаем «эффектом обратного вли-



яния»  $dD/dt$  на  $D$ . Тогда можно рассматривать уравнения как четыре соотношения, определяющие значения зависимых переменных  $\Delta D_0$ ,  $P_0$ ,  $L_0$  и  $U_0$  как функции независимых переменных (или «параметров»)  $D_0$ ,  $C_0$  и  $R_0$ . Наконец, поскольку  $D_0$  предполагается одной и той же для всех групп (всем группам были показаны одни и те же рисунки), эта переменная может быть опущена при анализе внутригрупповых различий.

Какие предсказания можно получить из таким образом интерпретированной модели эксперимента Бека?

Если снова использовать символы, аналогичные  $\delta P$ , для обозначения внутригрупповых различий начальных значений зависимых переменных, то можно с помощью приведенных ранее уравнений (дифференцируя их и используя цепное правило) вывести следующее:

$$\text{из уравнения (1.5)} \quad \delta U_0 = U_C \delta C + U_R \delta R, \quad (2.1)$$

$$\text{из уравнения (1.3)} \quad \delta L_0 = L_U \delta U, \quad (2.2)$$

$$\text{из уравнения (1.2)} \quad \delta P_0 = P_U \delta U, \quad (2.3)$$

$$\text{из уравнения (1.1)} \quad \delta \Delta D_0 = f_P \delta P + f_L \delta L. \quad (2.4)$$

Взяв из этих соотношений  $C$  и  $R$  как независимые переменные вместе с предыдущими предположениями о знаках частных производных, можно привести следующие гипотезы:

$$\delta U / \delta C = U_C > 0, \quad (2.1a)$$

$$\delta U / \delta R = U_R > 0, \quad (2.1b)$$

$$\delta L / \delta C = L_U U_C > 0, \quad (2.2a)$$

$$\delta L / \delta R = L_U U_R > 0, \quad (2.2b)$$

$$\delta P / \delta C = P_U U_C > 0, \quad (2.3a)$$

$$\delta P / \delta R = P_U U_R > 0, \quad (2.3b)$$

$$\delta \Delta D / \delta C = (f_P P_U + f_L L_U) U_C < 0, \quad (2.4a)$$

$$\delta \Delta D / \delta R = (f_P P_U + f_L L_U) U_R < 0. \quad (2.4b)$$

Проверим, насколько полученные Бекон экспериментальные данные соответствуют этим предсказаниям. Тот факт, что индивиды в высокосплоченных группах влияют ( $P$ ) на своих партнеров более активно (критерии значимости на уровне 0,02), чем индивиды в малосплоченных группах, стремящихся к распаду [1, стр. 15], может

считаться подтверждением уравнений (2.3a) и (2.3b). Вывод Бека о том, что «меньше половины членов малосплоченных групп указывали, что они испытывали некоторое давление ( $U$ ), в то время как подобное заявление делали более чем  $2/3$  членов высокосплоченных групп» [1, стр. 16] (со значимостью на уровне 0,02), не противоречит уравнениям (2.1a) и (2.1b). Хотя Бек утверждает, что «оценки сопротивления (величина, обратная  $L$ ) показывают... наибольшее уменьшение» [1, стр. 16] этой переменной в высокосплоченных группах, он отмечает, что разница не является статистически значимой. Таким образом, это только слабое подтверждение уравнений (2.2a) или (2.2b).

Таблица 4 в докладе Бека [1] содержит проверку уравнения (2.4a)  $\delta\Delta D/\delta C < 0$  и уравнения (2.4b)  $\delta\Delta D/\delta R < 0$ . Приведенные им данные *совместимы* с предположениями исходной модели, но *не допускают* предположений о знаках частных производных. Недостаточность подтверждения при данном уровне значимости подрывает доверие к уравнениям (2.2a) и (2.2b), поскольку  $L_O U_C$  или  $L_V U_R$ , или оба вместе появляются во всех других гипотезах. Так как найденные экспериментально  $\partial L/\partial C$  и  $\partial L/\partial R$  незначительно отличаются от нуля,  $L_V$  или  $U_C$  и  $U_R$  вместе должны быть близки к нулю. Но поскольку подтверждение уравнений (2.1a) и (2.1b) указывает, что  $U_C \neq 0$ ,  $L_V$  должно быть близко к нулю, такое заключение не противоречит нашему подтверждению уравнений (2.4a) и (2.4b): выражение  $f_L L_R$  может быть нулем без изменения знаков  $\delta\Delta D/\delta C$  или  $\delta\Delta D/\delta R$ .

В заключение можно сказать, что эксперимент Бека представил тест для проверки некоторых кратковременных свойств рассматриваемой математической модели. Результаты эксперимента подтвердили некоторые, но не все предположения и значительно противоречили другим. При повторении эксперимента его ценность как теста для модели может быть увеличена введением дополнительных процедур для измерения определенных переменных, таких, как  $R$ ,  $C_O$  и  $C_T$ .

*Эксперимент Фестингера — Тибо по межличностному взаимодействию.* Этот эксперимент [4] включает как переменные, относящиеся к отдельным членам группы, так и переменные, определенные как средние по группе. Настоящее обсуждение ограничено теми данными экспе-

римента, которые могут быть представлены в терминах агрегированных переменных.

Перед членами дискуссионной группы ставилась проблема, и они опрашивались до и после дискуссии. Средне-квадратичные отклонения мнений в каждой группе перед началом двадцатиминутной дискуссии и в конце принимались как мера переменной  $D$ , конкретнее  $D_0$  и  $D_T$ . Некоторые экспериментальные группы вначале получали различные инструкции. Инструкции, стремящиеся ввести «однородность», стимулировали одинаковость членов группы и могли быть интерпретированы как переменные, дающие сплоченность. Инструкции, оказывающие «давление к единообразию», устанавливают, что группа должна стремиться к согласию в мнении или к «правильному» мнению. По схеме Фестингера эта переменная может рассматриваться как *значимость*. Будем трактовать однородно-неоднородные инструкции как определяющие  $C_0$ , а другие инструкции — как определяющие  $R_0$ .

Подходящая модель для этого эксперимента может быть такой же, как для эксперимента Бека. Экспериментальные данные выражены как  $\delta\Delta D/\delta C < 0$  и  $\delta\Delta D/\delta R < 0$  [4, стр. 99, рис. 2]. Таким образом, данные эксперимента полностью адекватны одному из результатов эксперимента Бека.

Необходимость дальнейшего выяснения переменных  $C$  и  $R$  очевидна, поскольку Фестингер упоминает эксперимент Бека как подтверждение его гипотезы  $3b$  и работу Фестингера — Тибо как подтверждение его гипотезы  $3a$ , в то время как мы заключаем, что нет разницы в данных, относящихся к  $\Delta D$  в этих двух экспериментах. Причина различия состоит в том, что Фестингер рассматривал инструкции в эксперименте Бека как определяющие  $C$  и инструкции в эксперименте Фестингера — Тибо как определяющие  $U$ , в то время как мы интерпретируем эти инструкции как определяющие  $C$  и  $R$  в обоих экспериментах.

*Обследование жилых кварталов.* В отличие от рассмотренных двух экспериментов изучение жилых кварталов [3] было не экспериментом, а обследованием. Отсюда следуют два вывода. Во-первых, в ситуации обследования работают все наличные механизмы. Отдельные переменные не могут быть сделаны «независимыми» с помощью экспериментального контроля и рандомизации, как это

имеет место в лаборатории. Во-вторых, существенные промежутки времени, в течение которых действуют механизмы, много больше в ситуации обследования, чем в лаборатории. В относительно стабильной ситуации обследования этого типа можно получить значения переменных только вблизи положений равновесия системы.

При обследовании была обнаружена корреляция 0,74 между а) сплоченностью группы в жилом квартале и б) эффективностью, с которой поддерживался стандарт, относящийся к функционированию групп [3, стр. 12, табл. 16]. Фестингер рассматривает эти данные как соответствующие данным работы Бека по подтверждению гипотезы 3b.

При интерпретации предыдущих экспериментов благодаря незначительному времени обратная связь, описываемая уравнениями (1.1) и (1.4), могла быть отброшена. Более того, переменная  $D_0$  предполагалась одной и той же для всех групп с начала эксперимента. При обследовании не было причины полагать, что мы можем с течением времени пренебречь изменениями  $D$  и  $C$ , определенными уравнениями (1.1) и (1.4). Связанными переменными являются  $D_T$  и  $C_T$ , а не  $D_0$  с  $C_0$  и  $R_0$ , для которых измерения делаются после того, как постоянные жители квартала поселились здесь и взаимодействовали в течение значительного периода (до 15 месяцев).

Эти рассуждения показывают, что подходящей моделью обследования является полная модель из уравнений (1.1) — (1.5) вместе с соответствующими неравенствами. Если так, тогда предположения о короткодействии, позволившие нам применять метод сравнительной статистики в двух экспериментах, более непригодны. При заданных начальных условиях поведение группы во времени будет определяться уравнениями (1.1) — (1.5) и две группы с одинаковыми начальными положениями будут иметь одинаковые пути. Если предположить, что начальные значения, по крайней мере некоторых переменных, были различны для разных групп, можно дать приемлемую интерпретацию результатов обследования и показать, что эти результаты в чем-то совершенно отличны (но не противоречат) от эксперимента Бека в противоположность интерпретации Фестингером двух множеств данных как подтверждающих одну и ту же гипотезу.



Используя уравнения (1.2), (1.3) и (1.5) для того, чтобы решить их относительно  $P$ ,  $L$  и  $U$  соответственно, можно переписать систему в виде двух дифференциальных уравнений относительно  $C$  и  $D$ .

$$\frac{dD}{dt} = f\{P[D, U(C)], L[U(C)], D\}, \quad (2.6)$$

$$\frac{dC}{dt} = g\{D, U(C), C\}. \quad (2.7)$$

Для системы, описываемой этими уравнениями и находящейся в некотором начальном положении  $[D_0, C_0]$ , можно представить ее путь по кривой на плоскости  $D$ - $C$ . Каждая точка на кривой  $[D(t), C(t)]$  будет представлять положение системы в некоторый момент времени  $t$ . Что можно сказать в общем случае о различных путях, соответствующих различным начальным условиям? <sup>1</sup>

Рассмотрим точки, для которых  $dD/dt = f = 0$ . Они лежат на кривой в плоскости  $D$ - $C$ . При движении вдоль кривой требование  $f = 0$  дает следующее уравнение для соотношений между скоростью изменения  $C$ , то есть  $\delta C$ , и скоростью изменения  $D$ , то есть  $\delta D$ :

$$f_P\{P_D\delta D + P_U U_C \delta C\} + f_L L_U \delta C + f_D \delta D = 0. \quad (2.8)$$

Это выражение получено дифференцированием уравнения (2.7) с использованием цепного правила. Тогда для тангенса угла наклона этой кривой будем иметь

$$\rho = \left[ \frac{\delta C}{\delta D} \right]_{dD/dt=0} = - \frac{(f_P P_D + f_D)}{U_C (f_P P_U + f_L L_U)} < 0. \quad (2.9)$$

Аналогично для кривой, на которой  $dC/dt = g = 0$ , мы получим

$$\sigma = \left[ \frac{\delta C}{\delta D} \right]_{dC/dt=0} = - \frac{g_D}{g_U U_C + g_C} < 0. \quad (2.10)$$

Применяя упоминавшиеся выше предположения о знаках частных производных, можно показать, что тангенсы углов наклона обеих кривых отрицательны на плоскости  $D$ - $C$ .

Теперь есть основания предполагать, что эти кривые

---

<sup>1</sup> По поводу применяемых здесь методов см.: Lester R. Ford, *Differential Equations*, pp. 9—12; A. A. Andronow and C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations*, 1949, p. 8—12, 182—193, 203—208.



имеют частную форму, конкретнее, что  $\sigma$  приближается к нулю для очень больших и очень малых значений  $C$  и что  $1/\rho$  приближается к нулю для очень больших и очень малых значений  $D$ . Основание заключается в следующем. Уравнение (2.7) описывает механизм, при помощи которого сплоченность регулирует различие мнений.

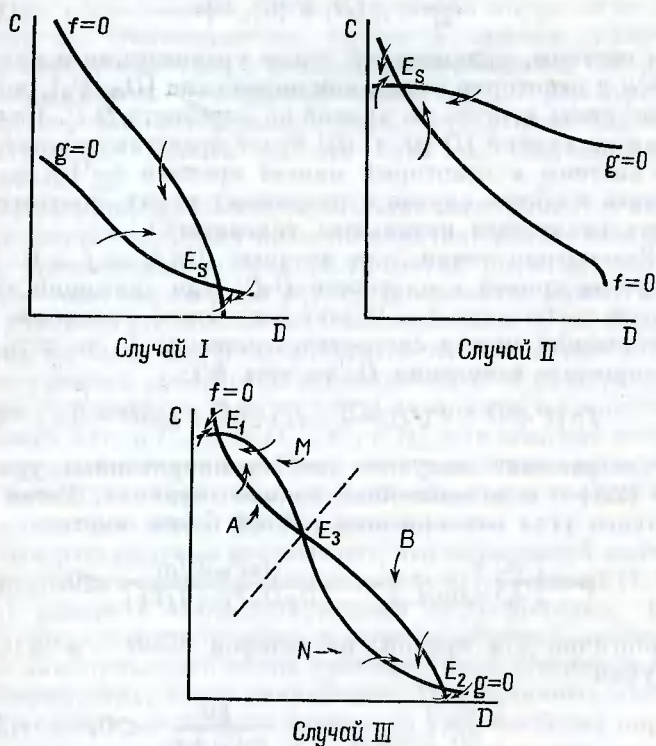


Рис. 2. Однократное и многократное равновесие.

Правдоподобно предположить, что этот механизм является причиной насыщения, то есть, когда  $C$  достигает очень больших значений, оно не будет увеличиваться при дальнейшем уменьшении  $D$ , а когда  $C$  достигает очень малых значений, оно не будет уменьшаться при дальнейшем увеличении  $D$ . Аналогичное предположение о насыщении

правдоподобно для механизмов уравнения (2.6), которое определяет уровень равновесия  $D$  как функцию  $C$ <sup>1</sup>.

Если принять эти две гипотезы о насыщении, тогда кривые  $f=0$  и  $g=0$  должны иметь одну из трех возможных конфигураций (рис. 2). В случаях I и II имеется единственная точка равновесия, для которой одновременно  $f=dD/dt=0$ , и  $g=dC/dt=0$ . В случае III имеются три такие точки равновесия. Анализ стандартными методами (опущенными здесь) показывает, что должны удовлетворяться определенные соотношения, если положение равновесия динамически устойчиво (так что, если система немного смещена от равновесия, она будет стремиться двигаться назад к положению равновесия). Условием устойчивости будет

$$\sigma/\rho < 1. \quad (2.11)$$

Из рис. 2 видно, что условие (2.11) удовлетворяется для точек равновесия ( $E_S$ ) в случае I и в случае II и для двух предельных точек равновесия ( $E_1$  и  $E_2$ ) в случае III [см. примечание редакторов английского текста на стр. 134—135].

В обследуемых кварталах жители поселялись в отдельных дворах квартала фактически случайно. Начальная сплоченность («тенденция к ассоциации») постоянных жителей двора может сильно зависеть от различных людей, встречающихся как внутри, так и вне квартала. Начальное различие мнений двора по отношению к организации жильцов может рассматриваться как случайная переменная, зависящая от прошлого опыта жильцов. Совершенно случайно некоторые дворы могут иметь большие начальные  $D$  и  $C$ .

Предположим, что две группы,  $A$  и  $B$ , вначале имели одинаковую сплоченность с их дворами, но что в группе  $A$  имелаась значительно меньшая начальная разница мнений по поводу желательности организации жильцов, чем в группе  $B$ , как показано на рис. 3, случай III. Если  $D_0$

---

<sup>1</sup> Каждая из двух гипотез о насыщении включает в себе измерения  $C$  и  $D$ . Однако сделанные нами на основании гипотез заключения о существовании и положении стабильных и нестабильных точек равновесия зависят только от порядкового измерения. Желательно переформулировать гипотезы о насыщении или ту их часть, которая нам нужна, так, чтобы перейти к численным гипотезам. Вероятно, это возможно, но мы пока еще не можем этого сделать.

отдельного двора мала (как, например, в группе  $A$ ), сплоченность жильцов будет увеличиваться, заставляя их в свою очередь приспособлять свои мнения друг к другу и дальше уменьшая  $D$ . Если  $D_0$  двора велика (как, например, в группе  $B$ ), сплоченность жильцов будет уменьшаться, что будет способствовать дальнейшему расхождению мнений. Все эти заключения следуют из постулатов математической модели. Следовательно, когда система достигает равновесия, мы должны получить некоторые дворы с высоким  $C$  и низким  $D$  и некоторые — с низким  $C$  и высоким  $D$ , дающие отрицательную корреляцию между  $C$  и  $D$ . Далее, как только процесс приближается к равновесию, следует ожидать сгущения точек (представляющих дворы) вокруг двух стабильных равновесных положений  $E_1$  и  $E_2$ . Диаграмма данных из работы Фестингера, Шахтера и Бека, представленная на рис. 3, случай III, показывает как раз такое сгущение, давая экспериментальное подтверждение нашему постулату о действии обратной связи.

Данная интерпретация обследования позволяет получить предсказание наблюдаемой корреляции из постулатов математической модели. Предсказываемая корреляция зависит, однако, от большего числа гипотез, чем те, которые использовались для объяснения экспериментов Бека и Фестингера — Тибо. Для рассмотрения результатов оказались необходимыми две обратные связи, определяемые уравнениями (1.1) и (1.4) с добавлением двух предположений о насыщении. Первоначальное объяснение Фестингером лабораторных результатов и результатов обследования как подтверждающих гипотезу  $3b$  было совершенно правильным. Наша формализация гипотез обнаруживает их сложность и указывает, что эксперимент Бека подтверждает короткодействующую статистическую модель, в то время как данные Фестингера, Шахтера и Бека подтверждают расширенную динамическую модель.

Отметим, что только случай III рис. 2 предсказывает отрицательную корреляцию; случаи I и II предсказывают, что точки в плоскости  $C$ - $D$  должны сгущаться вокруг  $E_S$ , давая, таким образом, нулевую корреляцию. Всякие данные, относящиеся к какому-нибудь одному из трех случаев, должны быть созвучны гипотезам, использованным при развитии модели. Какой из этих трех случаев будет иметь место, зависит от уравнений равновесия (относи-

тельно положений двух кривых равновесия в плоскости  $D-C$ ). Если мы перенесем на график данные, полученные для второго квартала [3, стр. 93, таблица 17], то обнаружим, что эти данные соответствуют случаю II рис. 3. Согласно нашей аргументации, Фестингер, Шахтер и Бек неправильно интерпретировали нулевую корреляцию в их

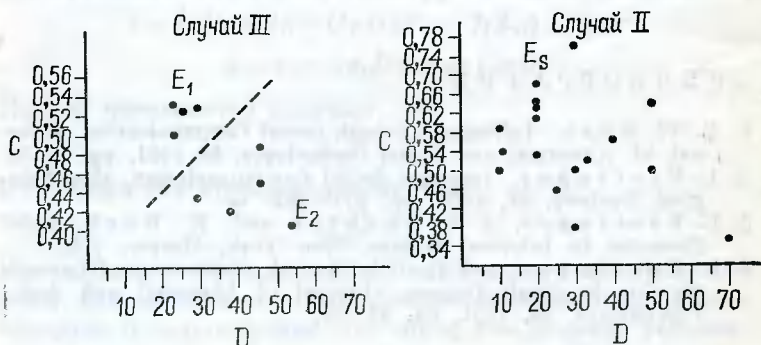


Рис. 3. Эмпирические тесты в различных случаях равновесия.

опыте как указание на то, что обратная связь не выявлялась несколько месяцев после заселения квартала. Сгущение точек у  $E_s$  указывает, что динамическая модель применима и что некоторые группы в этом сгущении точек близки к равновесию. Нулевая корреляция  $C_T$  и  $D_T$  действительно подтверждает существование обратной связи,

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы попытались продвинуться дальше в направлении создания более обобщенной, менее словесной системы гипотез о стремлении к единообразию в группах. Мы ввели простые постулаты о механизмах сцепления переменных, таких, как «значимость» и «стремление к общению». Хотя модель покрывает статистические ситуации, в которых нет обратной связи, она также постулирует динамические механизмы, при помощи которых, например, сплоченность в данный момент влияет на сплоченность той же группы в более поздний момент времени. В настоящей работе все рассматриваемые переменные являются усредненными поведения всех членов группы.

Из системы получен ряд выводов. Некоторые из них проверены вплоть до экспериментальных данных и результатов обследования. Модель позволила проверить корреляционные данные для бимодальных характеристик, указав на существование двух стабильных точек равновесия, когда в группах существует единообразие.

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. K. W. Back, Influence Through Social Communication, «Journal of Abnormal and Social Psychology», 46, 1951, pp. 9—23.
2. L. Festinger, Informal Social Communication, «Psychological Review», 57, 1950, pp. 271—282.
3. L. Festinger, S. Schachter and K. Back, Social Pressures in Informal Groups, New York, Harper, 1950.
4. L. Festinger and T. Thibaut, Interpersonal Communication in Small Groups, «Journal of Abnormal and Social Psychology», 46, 1951, pp. 92—99.

[Мы даем следующее краткое описание получения условий равновесия уравнения (2.11).

Функции  $f = dD/dt$  и  $g = dC/dt$  не являются функциями  $D$  и  $C$ . Мы хотим знать, как ведут они себя в окрестности точки равновесия. Линейной аппроксимацией  $f$  и  $g$  вблизи такой точки будет

$$f = \delta D (f_P P_D + f_D) + \delta C (U_C (f_P P_U + f_L L_U)),$$

$$g = \delta D (g_D) + \delta C (g_U U_C + g_C),$$

где  $\delta D$  и  $\delta C$  — отклонения от точки равновесия. Если они достаточно малы, приведенные выше линейные уравнения будут давать хорошее приближение действительного поведения  $f$  и  $g$ . Выражения в круглых скобках являются соответствующими частными производными  $f$  и  $g$  по  $D$  и  $C$ . Саймон показал в тексте, что все эти четыре величины отрицательны.

Если мы движемся назад к точке равновесия, тогда  $f$  должно иметь противоположный знак с  $\delta D$ , и  $g$  должно иметь противоположный знак с  $\delta C$ , поскольку эти производные соответственно по  $D$  и  $C$  определяют, будут ли  $D$  и  $C$  стремиться к увеличению или к уменьшению. Так как все четыре величины в круглых скобках отрицательны, всегда будет иметь место тенденция движения



к точке равновесия, если  $\delta D$  и  $\delta C$  имеют одинаковый знак.

Однако, если  $\delta D$  и  $\delta C$  имеют противоположные знаки, движение назад к равновесию возможно только при условии  $\sigma/\rho < 1$ . Это можно показать (но не доказать), положив  $\delta D = 1$  и  $\delta C = -1$ . Сходимость будет, если

$$f = f_P P_D + f_D - U_C (f_P P_U + f_L L_U) < 0 \text{ и} \\ g = g_D - (g_U U_C + g_C) > 0.$$

Первое неравенство означает, что

$$\rho < -1,$$

в то время как второе означает, что

$$\sigma > -1.$$

При работе с этими соотношениями нужно помнить, что  $\rho$  и  $\sigma$ , как определил Саймон, всегда отрицательны. Таким образом,  $\sigma > \rho$  означает, что  $\sigma/\rho < 1$  — условие устойчивости равновесия. Если оно не выполнено,  $\delta D$  может становиться все более положительным, а  $\delta C$  все более отрицательным. — *Примечание редакторов английского текста.*]

# МОДЕЛИ СИСТЕМ РОДСТВА С ПРЕДПИСАННЫМ БРАКОМ

Х. Уайт

## 1. ВВЕДЕНИЕ

*История вопроса.* В 1949 году Андре Вейль в приложении к первой части «Элементарных структур родства» Леви-Стросса наметил один алгебраический подход к анализу структур некоторых систем родства. Основным моментом его теоретической конструкции является разделение всех членов сообщества на несколько взаимно исключаящих брачных типов, так что каждая супружеская пара состоит из представителей одного и того же типа. (Каждый тип отражает предписанный брак мужчин одного клана с женщинами другого.) Он ограничивается системами с двухсторонним браком и браком по материнской линии двоюродных братьев и сестер, которые затем могут быть описаны с помощью циклических групп. Заметим, что в данном случае, используя группу перестановок, Вейль решает конкретные примеры с помощью остроумного, но весьма специального метода сложения совокупностей по модулю два.

В качестве более удобного средства анализа Р. Р. Буш предложил матрицы перестановок. Как и Вейль, Буш проводит анализ в терминах брачных типов, хотя приложения этого подхода к проблеме принадлежности к клану всегда интересовали обоих авторов. Буш полагает, что возможны  $(M!)^2$  сообществ с  $M$  брачными типами, и исследует несколько конкретных случаев для небольших  $M$ .

Кемени, Снелл и Томпсон развивают идею Вейля, используя подход, предложенный Бушем. В разделах 10 и 11 главы 5 «Введения в конечную математику» они излагают элементарные свойства групп и подгрупп матриц перестановок; затем, в разделах 7 и 8 главы 7, они дают новую формулировку проблемы, рассмотренной Вейлем. И хотя их книга может быть отнесена к числу элементар-

ных, авторы в этих небольших разделах продвигаются значительно дальше предшествующих работ.

Свойства сообществ, которые должны быть исследованы, формулируются в виде полного набора аксиом. Седьмая, и последняя, аксиома, постулирующая свойство однородности в структуре родства, не была даже намечена в исследовании Вейля и Буша. Используя эту правдоподобную аксиому, Кемени, Снелл и Томпсон показали, что существует лишь небольшое число допустимых сообществ с заданным числом брачных типов.

В настоящей статье мы выведем и опишем все специфические структуры родства, которые удовлетворяют аксиомам Кемени — Снелла — Томпсона, и продемонстрируем один из видов предписанного брака, особенно интересный для антропологов.

Было бы желательно существенно переформулировать подход Кемени — Снелла — Томпсона. Брачный тип — это не то понятие, которое можно найти в путевых записях антропологов или в рассуждениях самих членов сообществ. Оказывается, не только возможно, но и полезно определять операторы перестановок через понятие клана. Соответственно вместо одной матрицы, представляющей преобразование родительского брачного типа в сыновний тип, и другой аналогичной матрицы, представляющей дочерний брачный тип, мы используем одну матрицу для преобразования клана мужа в клан жены и другую — для преобразования отцовского клана в клан детей.

При таком подходе отмечается конкретная интерпретация как постановки задачи, так и ее результатов, а также несколько упрощается ее решение.

Мы показываем, что любая абстрактная группа, или, что эквивалентно, любая группа перестановок, которая может быть порождена двумя элементами, соответствует по крайней мере одному допустимому сообществу. Кроме того, регулярное матричное представление абстрактной группы, которое легко получается умножением, позволяет переводить абстрактно-алгебраические результаты на язык матричных операторов, в терминах которых могут рассматриваться сообщества. Однако одна и та же абстрактная группа может представлять не только отдельные сообщества, но и различные их типы. Значительно проще рассматривать не группы, а пары порождающих операторов групп, получая всевозможные сообщества данного вида.

В таком случае необходимо, определив, что понимается под отдельными сообществами, показать, что каждая допустимая пара порождающих операторов позволяет получить отдельное сообщество.

Дополнительные средства для анализа сообществ разработаны в следующих параграфах. В трех предыдущих исследованиях, на которые мы ссылались, основным вопросом для данного сообщества, или для данного типа сообщества, был следующий: в каких отношениях с женщинами этого сообщества может находиться лицо мужского пола? Другой вопрос, на который можно ответить, используя результаты данной работы, состоит в следующем: какие виды взаимоотношений могут существовать между теми же двумя лицами в сообществе данного типа? Поскольку число кланов по сравнению с числом людей весьма мало и поскольку каждый в сообществе по предположению связан в какой-то степени с другими, очевидно, что между парой людей должно существовать огромное число различных взаимосвязей. Более детально рассмотрены два важных специальных случая, имеющих место при условии, что: (1) два лица могут быть двусторонними перекрестными двоюродными братьями-сестрами той же самой степени и (2) двоюродные и троюродные отношения разного рода могут быть одновременно присущи одним и тем же двум лицам.

## 2. АКСИОМЫ

Мы намерены построить типологию всех систем с предписанным браком, которые обладают следующими свойствами.

1. Все население определенного сообщества делится на взаимно исключающие группы, которые мы называем кланами. Отнесение какого-либо лица к клану остается неизменным. В дальнейшем число кланов будем обозначать через  $n$ .

2. Существует неизменное правило, фиксирующее единственный клан, среди женщин которого мужчины данного клана могут выбирать себе жен.

3. В дополнение к правилу 2 мужчины двух различных кланов не могут вступать в браки с женщинами одного и того же клана.

4. Все дети какой-либо брачной пары принадлежат одному клану, однозначно определяемому кланами их родителей.

5. Дети, чьи отцы относятся к различным кланам, сами должны относиться к различным кланам.

6. Ни один мужчина не может вступать в брак с женщиной своего клана.

7. Каждый член сообщества благодаря браку и генетической связи имеет родственника в любом другом клане, то есть сообщество не распадается на не связанные друг с другом группы.

8. Относятся ли лица, связанные браком и генетической связью, к одному и тому же клану — зависит только от вида родства, а не от того, какому клану принадлежит каждое из них.

Отмеченные свойства мы рассматриваем как аксиомы.

### 3. ПРАВИЛА БРАКОСОЧЕТАНИЯ И ГЕНЕАЛОГИИ КАК МАТРИЦЫ ПЕРЕСТАНОВОК

Правило, вытекающее из аксиом 2 и 3, может быть представлено в форме матрицы перестановок размерности  $n$ , то есть квадратной матрицы, в каждой строке и столбце которой имеется только одна единица, а все остальные элементы равны нулю. Пронумеруем кланы от 1 до  $n$ , и пусть  $i$ -я строка и  $i$ -й столбец матрицы соответствуют  $i$ -му клану. Пусть каждая строка матрицы соответствуют клану мужа, тогда клан жены может идентифицироваться со столбцом, в котором цифра 1 стоит в этой строке. Обозначим эту матрицу  $W$ . Она показывает один клан, из которого женщины данного клана получают мужей, и один клан, из которого мужчины данного клана получают жен. Заметим, что полигамия и полиандрия совместимы с принятыми аксиомами, хотя для простоты мы рассматриваем лишь моногамию.

Так как клан жены однозначно определяется кланом ее мужа, то клан детей брачной пары, согласно аксиоме 4, может быть однозначно определен кланом отца. Пусть  $C$  — матрица перестановок, в которой  $C_{ij} = 1$ , если отцы клана  $i$  имеют детей клана  $j$ . При этом  $C$  должна иметь форму матрицы перестановок, так как, согласно аксиоме 5, дети любого клана имеют отцов только в одном клане, и наоборот.



Имеется  $n!$  возможных матриц перестановок, или всего  $(n!)^2$  комбинаций правил бракосочетания и генеалогии для сообществ с  $n$  кланами, обладающих первыми пятью свойствами. Многие из комбинаций не соответствуют аксиомам 6, 7 и 8, и только небольшая часть допустимых комбинаций правил структурно различима. Последний термин необходимо точно определить, чтобы группировать различные структуры, но сначала мы должны рассмотреть следствия из аксиом 6, 7 и 8.

Матрицы  $W$  и  $C$  не только имеют соответствующий вид, но также допускают осмысленные преобразования с помощью операции умножения матриц. Например, рассмотрим элемент  $(WC)_{ij}$  в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце матрицы  $WC$ , образованной перемножением матриц  $W$  и  $C$  в таком порядке. Согласно обычному определению умножения матриц,

$$(WC)_{ij} = \sum_{k=1}^n W_{ik} C_{kj}.$$

Имеется только одна единица в  $i$ -й строке матрицы  $W$ , например в столбце  $p$ . Аналогично в  $j$ -м столбце матрицы  $C$  имеется только одна единица, например в строке  $q$ ; так что сумма в правой части приведенного выше уравнения равна нулю, за исключением случая при  $p = q$ , когда эта сумма равна единице. Короче говоря, это означает, что элемент  $(i, j)$  матрицы  $(WC)$  равен единице в том, и только в том случае, если мужчины  $i$ -го клана вступают в брак с женщинами, чьи братья по клану являются отцами детей клана  $j$ . Но должно существовать некоторое  $j$ , такое, что  $C_{pj} = 1$ , что следует из аксиом 5 и 4. Если так, то матрица  $(WC)$  определяет для мужчины каждого клана клан, к которому принадлежат дети брата его жены. Произвольные упорядоченные ряды любых степеней от  $W$  и  $C$ , будучи перемножены между собой, в соответствии с той же самой логикой дадут производную матрицу перестановок, определяющую для каждого возможного клана родственников любого мужчины этого клана. Одно из возможных произведений матриц представляет собой единичную матрицу (обозначим ее  $I$ ), в которой  $I_{ij} = -1$ , если  $i = j$ , в то время как все остальные элементы — нули. Каков бы ни был клан мужчины, любой его родственник, для которого производная матрица есть  $I$ , будет принадлежать к тому же самому клану, что и он.

Аксиома 6 предполагает, что в матрице  $W$  нет ни одного диагонального элемента  $W_{ii}$ , равного единице; разумеется,  $W$  не может быть единичной матрицей  $I$ . Приблизительно  $n!/e$  (где  $e = 2,71\dots$ ) квадратных матриц перестановок удовлетворяют этому ограничению. С другой стороны,  $C$  может быть  $I$ , когда дети мужчин любого клана принадлежат этому клану. Если произвольный диагональный элемент матрицы  $C$  — единица, все  $C_{ii}$  должны быть единицами, иначе лишь часть мужчин принадлежала бы тому же самому клану, что и их дети, что противоречит аксиоме 8. Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что любое произведение матриц  $W$  и  $C$  не должно иметь единицы в качестве диагональных элементов, или, иначе, полученная таким образом матрица не должна быть  $I$ .

Аксиома 8 имеет ряд следствий. Если какой-либо мужчина принадлежит к тому же самому клану, что и сын его собственного сына, то это же самое должно относиться ко всем мужчинам, так что  $C^2 = I$  и т. д. Если ни одна из степеней  $C$ ,  $C^2$ ,  $C^3$ ,  $\dots$ ,  $C^{n-1}$  не представляет собой единичную матрицу, то ею должна быть  $C^n$ . Пусть  $C^i \neq I$ ,  $i = 1, \dots, n$ , тогда каждое последующее поколение сыновей сыновей принадлежит клану, отличному не только от клана того мужчины, с которого мы начали, но также от всех кланов промежуточных предков по мужской линии, определяемых аксиомой 8. Таким образом, может быть  $n + 1$  кланов в противоречие с нашим предположением в аксиоме 1. Следовательно,  $C^p = I$  для некоторого  $1 \leq p \leq n$ . Поэтому любая степень  $C$  равна  $C$  в степени между 1 и  $p$  включительно. Тот же самый вывод, очевидно, может быть сделан относительно степеней  $W$  и степеней любой производной матрицы, полученной перемножением  $W$  и  $C$ , поскольку любая производная матрица соответствует фиксированному отношению.

Обращение матрицы  $M$  определяется соотношением

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I.$$

Например, матрица  $C^{-1}$  определяет для каждого клана, к которому может принадлежать сын, в каком клане находится его отец. Таким образом,  $(C^{-1})_{ij} = C_{ji}$ . Пусть матрица  $C$  имеет порядок  $p$ , то есть  $p$  есть наименьшее целое число, такое, что  $C^p = I$ , где, как это было показано выше,  $p \leq n$ . Так как  $CC^{p-1} = C^p = I$ , матрица, обрат-

ная  $C$ , также может быть записана как  $C^{p-1}$ ; аналогично для  $W$  и для любого их произведения. Итак,  $C$  и  $W$  и их произведения могут быть использованы для описания изменения клана при переходе от данного лица к его предкам, так же как и к его потомкам. Каждому возможному отношению любого лица в сообществе соответствует какая-либо матрица, которая является произведением последовательностей  $C$  и  $W$ . Будем использовать  $M$  в качестве общего символа для обозначения такой матрицы и называть ее *матрицей отношений*.

Имеется последнее, самое общее ограничение, накладываемое аксиомой 8 совместно с аксиомой 7. При вычислении произведения матриц, образованных двумя различными последовательностями матриц  $W$  и  $C$ , часто оказывается, что эти произведения равны, то есть единицы и нули оказываются на тех же самых местах. Обозначим различные матрицы, которые получаются в результате перемножения всех возможных последовательностей и комбинаций матриц  $W$  и  $C$ , символами  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . Ясно, что имеется точно  $n$  таких матриц, так как одно лицо имеет только  $n$  существенно различных родственных отношений, по одному с лицами каждого клана, и по аксиоме 8 требуется, чтобы структура была однородной.

Аксиома 7 утверждает, что для любой пары кланов  $k$  и  $j$  существует одна из матриц  $A_i$ , в которой элемент  $kj$  равен единице. Каждая матрица  $A_i$  имеет в строке  $k$  лишь один элемент, равный единице, и должно быть по крайней мере  $n$  матриц  $A_i$ . Пусть имеется дополнительная матрица  $A_{n+1}$ . Тогда в  $A_{n+1}$   $k$ -я строка должна быть тождественна  $k$ -й строке некоторой матрицы  $A_i$ ,  $i \leq n$ . Строка  $k$  матрицы  $A_{n+1}$  может быть использована для определения того, какому клану принадлежит лицо, находящееся в некотором родственном отношении с каким-либо лицом в клане  $k$ , то же относится и к матрице  $A_i$ . Но два лица, находящиеся в определенном родственном отношении к данному лицу, состоят также в определенном родстве друг с другом, и в рассматриваемом случае эти два лица принадлежат одному и тому же клану. Из этого следует, что  $A_i$  и  $A_{n+1}$  должны быть тождественны, в противном случае нарушается аксиома 8. Другими словами, если две матрицы из произвольного множества матриц перестановок, удовлетворяющих аксиомам 7 и 8, имеют одинаковый элемент, то они тождественны. Поэтому имеется точ-

по  $n$  различным матриц перестановок, представляющих собой произведения любых  $W$  и  $C$  матриц в сообществе с  $n$  кланами, обладающими свойствами 1—8.

Существует по меньшей мере одно сообщество, удовлетворяющее всем восьми аксиомам для любого  $n$ , такое, что  $C = I$ ,  $W_{i, i+1} = 1$ ,  $1 \leq i < n$ ,  $W_{n, 1} = 1$ , остальные  $W_{ij} = 0$ . При этом имеется  $n$  различных матриц:  $W^2, \dots, W^{n-1}$  и  $W^n = I$ . Другим возможным сообществом является сообщество с  $C' = I$ ,  $W'_{i, i+2} = 1$ ,  $1 \leq i < n - 1$ ,  $W'_{n-1, 1} = 1$  и  $W'_{n, 2} = 1$  и остальными  $W'_{ij} = 0$ ; снова  $W', (W')^2, \dots, (W')^n$  являются различными матрицами. Ясно, что это второе сообщество отличается от первого только тем, как пронумерованы кланы.

Будем использовать описание сообществ с помощью матриц перестановок для классификации сообществ в соответствии с тем, каким родственникам разрешается вступать в брак. Естественно считать, что два сообщества, описываемые различными парами  $C$  и  $W$  матриц, структурно различимы тогда, и только тогда, когда имеется по меньшей мере одна разновидность родственников, которым разрешен брак с лицами одного сообщества, но не разрешен с лицами другого. Пусть  $M(C, W)$  — произвольная матрица, определяемая как произведение последовательности степеней  $C$  и  $W$ . Тогда два сообщества имеют эквивалентные структуры, если  $M(C, W) = W$  для одного сообщества и  $M(C', W') = W'$  для другого, где  $M$  имеет одинаковую форму в обоих случаях. В приведенном примере  $M(C, W)$  может быть записано как  $W^m$ . Если  $W^m = W$ , тогда  $m = jn + 1$  для некоторого целого числа  $j$ . Но  $(W')^n = I$ ; таким образом,  $(W')^m = W'$  тогда, и только тогда, когда  $W^m = W$ .

Итак,  $W$  и  $C$  матрицы должны удовлетворять ряду существенных ограничений. Причем этим ограничениям удовлетворяют не более чем  $n! (n!/e)$  пар матриц перестановок и еще меньшее число пар дают структурно различные сообщества. Тем не менее подсчитать количество различных сообществ со свойствами 1—8 довольно трудно. Для примера возьмем лишь некоторые общие классы идеализированных сообществ, определяемые типами браков между двоюродными братьями и сестрами, которые разрешены в известных первобытных сообществах. Для упрощения дальнейших выкладок рассмотрим сначала матрицы  $A_i$  с несколько более общей точки зрения.



#### 4. ГРУППЫ И СООБЩЕСТВА

Рассмотрим  $n$  различных матриц отношений  $A_i$ , образованных с помощью  $S$  и  $W$  матриц для сообщества с  $n$  кланами, которое удовлетворяет аксиомам 1—8. Для любых  $i$  и  $j$  произведение  $A_i$  и  $A_j$  дает некоторую матрицу  $A_k$ . Выше отмечалось, что одна из матриц  $A_i$  является идентичной матрицей и что для каждой  $A_i$  существует некоторая матрица  $A_j$ , обратная ей. Умножение матриц ассоциативно, то есть  $A_i(A_j A_k) = (A_i A_j)A_k$ , другими словами, это означает, например, что внук сына какого-то мужчины является тем же лицом, что и сын его внука. Таким образом, множество матриц  $A_i$  представляет некоторую абстрактную группу. Группа определяется ее таблицей умножения, в которой позиции в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце соответствует элемент  $a_k$ , если  $a_i a_j = a_k$ .

Ниже мы покажем также, что регулярное представление любой абстрактной группы, образованной двумя элементами, составляет множество матриц  $A_i$ , описывающее допустимый вариант сообщества. Число элементов такой группы называется ее порядком. Один из возможных подходов к классификации сообществ состоит в рассмотрении всех вариантов абстрактных групп разных порядков. Свойствам абстрактных групп посвящена обширная литература, в которой все группы порядка меньше, скажем, 32-го рассмотрены с исчерывающей полнотой. К сожалению, этот подход не эффективен, поскольку обычно в группе имеется очень большое число пар элементов, которые могут ее порождать. Таким образом, одна и та же группа может быть изоморфной с множеством отличных друг от друга матриц отношений для двух совершенно различных сообществ.

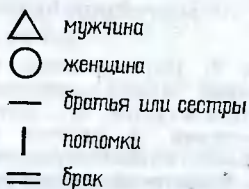
Более эффективный подход связан с нахождением всех пар матриц  $S$  и  $W$ , являющихся образующими элементами абстрактных групп и имеющих специфические характеристики для каждой данной группы размера  $n$ . Затем можно построить их регулярное представление, используя таблицу умножения и схему каждого сообщества. Эти вычисления гораздо проще, так как  $S$  и  $W$  и их произведения можно рассматривать как элементы алгебры абстрактных групп, а не как матрицы. Поскольку таблица умножения дает всевозможные произведения  $S$ ,  $W$  и других  $n - 2$  отличных друг от друга элементов, можно написать



конкретную матрицу для каждого элемента. В качестве матричного представления элемента  $a_i$  используется квадратная матрица перестановок, которая соотносит стандартный список элементов (первая строка или первый столбец таблицы умножения)  $i$ -й строке таблицы. Ранее отмечалось, что число кланов равно числу элементов и нумерация кланов произвольна, так что матричное представление, полученное из таблицы умножения групп, однозначно определяет некоторое сообщество, если матрицам  $S$  и  $W$  поставлены в соответствие определенные элементы списка.

## 5. БРАКИ МЕЖДУ ДВОЮРОДНЫМИ БРАТЬЯМИ И СЕСТРАМИ

Логические и эмпирические соображения делают целесообразной классификацию систем родства на основе выделения классов двоюродных братьев и сестер, между которыми разрешен брак. Возможны четыре разновидности двоюродного родства (если одно из лиц мужского, а другое — женского пола). Они могут быть описаны с помощью родословного дерева с использованием следующих общепринятых обозначений:



В дальнейшем условимся рассматривать все родственные связи по отношению к особе мужского пола. Если двоюродная сестра — дочь брата отца данного лица мужского пола, это отношение графически изображается, как показано на рис. 1; для этого случая принято сокращение ДБО. Двоюродные братья (сестры), родители которых родные братья (сестры), называются *параллельными* двоюродными братьями-сестрами, в противном случае — *перекрестными* (пересекающимися) братьями-сестрами. Когда родитель лица мужского пола — женщина, то говорят о дво-

юродных братьях-сестрах по материнской линии (matrilateral); лицо мужского пола и девушка являются двоюродными братом и сестрой по отцовской линии (patrilateral), если именно отец лица мужского пола родной брат одного из родителей этой девушки. На рис. 1 юноша и девушка — параллельные двоюродные брат и сестра по

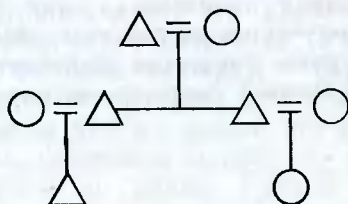
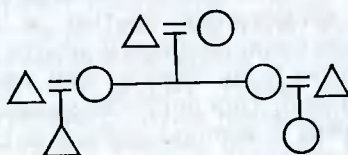


Рис. 1. Параллельные отцовские линии двоюродных братьев и сестер.



$$M_2 = C^{-1}WW^{-1}C$$

Рис. 2. Параллельные материнские линии двоюродных братьев и сестер.  $M$  — матрица отношений, в которой клан девушки определяется столбцом. Единичный элемент столбца находится в строке, определяемой кланом юноши.

отцовской линии. Когда отец юноши — брат матери девушки, а мать юноши — сестра отца этой девушки, юноша и девушка называются *двусторонне* перекрестными двоюродными братом и сестрой.

Возникает следующий вопрос: какого рода отношения допускают брак в сообществе, определенном данными  $C$  и  $W$  матрицами? Начнем с рис. 1. По единичному элементу строки  $i$  матрица  $C^{-1}C$  определяет столбец для клана

девушки — параллельной двоюродной сестры по отцовской линии лица мужского пола в клане  $i$ . Клан отца юноши, скажем  $j$ , определяется в  $i$ -й строке матрицы  $C^{-1}$ , брат отца относится к тому же самому клану, а дети последнего находятся в клане, определяемом в  $j$ -й строке  $C$ , то есть в клане, определяемом в  $i$ -й строке  $(C^{-1}C)$ . В данном случае непосредственно из аксиом 2—5, обязательных для всех сообществ, рассматриваемых здесь, следует, что юноша и девушка не могут вступить в брак и  $CC^{-1} = I$ , как это и должно быть.

Если юноша может вступить в брак с девушкой, ее клан должен совпадать с тем, который определяется единственным элементом в строке матрицы  $W$ , соответствующей клану юноши. Иначе говоря, если  $M$  — матрица, описывающая отношение особы мужского пола к клану девушки (по рис. 1  $M = C^{-1}C$ ), то соотношение

$$M = W$$

является необходимым условием того, что девушка может быть партнером юноши в законном браке, каков бы ни был его клан. Согласно аксиоме 6,  $W \neq I$ , так что ни в одном сообществе, удовлетворяющем аксиомам 1—8, юноша не может вступить в брак со своей параллельной двоюродной сестрой по отцовской линии.

Брак между параллельными двоюродными братьями-сестрами по материнской линии (см. рис. 2) также запрещен, ибо в этом случае

$$M = C^{-1}WW^{-1}C,$$

или, используя ассоциативный закон, получаем  $M = I$ . Так как переход из клана мужа в клан жены определяется матрицей  $W$ , переход из клана жены в клан мужа задается матрицей  $W^{-1}$ .

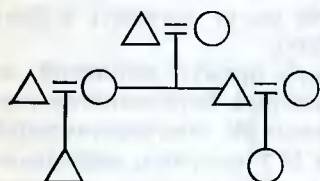
Другие две разновидности двоюродных братьев-сестер — перекрестные двоюродные братья-сестры по материнской и по отцовской линиям — могут вступать в брак при некоторых  $W$  и  $C$  матрицах (см. рис. 3 и 4). Перекрестные двоюродные братья-сестры по материнской линии могут вступать в брак тогда, и только тогда, когда

$$W = M = C^{-1}WC.$$

Если умножим слева обе части приведенного выше уравнения на  $C$ , то получим  $CW = (CC^{-1})WC$  или

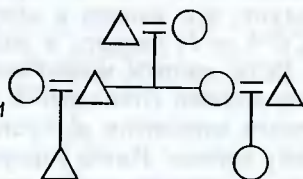
$$CW = WC,$$

что и будет необходимым и достаточным условием вступления в брак. Другими словами, порядок, в котором перемножаются  $W$  и  $C$ , не влияет на произведение матриц, то



$$M_3 = C^{-1}WC$$

Рис. 3. Перекрестные материнские линии двоюродных братьев и сестер.



$$M_4 = C^{-1}W^{-1}C$$

Рис. 4. Перекрестные отцовские линии двоюродных братьев и сестер.

есть матрицы  $W$  и  $C$  коммутируют. Из того, что все матрицы отношений образованы как произведения  $W$  и  $C$ , следует, что все  $n$  отличных друг от друга матриц  $A_i$  для данного сообщества должны коммутировать друг с другом, если допустимы браки между перекрестными двоюродными братьями-сестрами по материнской линии.

Для лиц мужского пола допустим брак не только при условии перекрестных двоюродных братьев-сестер по материнской линии в сообществе, описываемом коммутативной группой матриц, но и при многих других типах отношений и существует несколько различных подтипов соответствующих сообществ. При этом первая основная задача состоит в выделении и анализе всех таких сообществ. Можно показать, что более удобно определять подтипы путем наложения простых алгебраических условий на матрицы  $C$  и  $W$ , чем путем перечисления различных типов брака между родственниками.

Из рис. 4 видно, что браки между перекрестными двоюродными братьями-сестрами по отцовской линии допустимы тогда, и только тогда, когда

$$W = M = C^{-1}W^{-1}C.$$

Умножая обе части уравнения на  $C$ , в качестве необходимого и достаточного условия получаем соотношение

$$CW = W^{-1}C.$$

Оно может быть названо полукоммутативным условием. Другая его форма получается путем умножения справа обеих частей этого уравнения на  $W^{-1}$ :

$$C(WW^{-1}) = W^{-1}CW^{-1} \quad \text{или} \quad C = W^{-1}CW^{-1}$$

с последующим умножением слева обеих частей на  $W$ :

$$WC = CW^{-1}.$$

Вторая основная задача заключается в том, чтобы идентифицировать и описать все сообщества, для которых справедливо это уравнение, и для каждого из них определить типы родственников, которые могут вступать в брак.

В наших категориях отношений перекрестных двоюродных братьев-сестер содержится некоторая неопределенность. Двоюродные братья-сестры могут находиться в двусторонних отношениях; если они являются перекрестными двоюродными братьями-сестрами, тогда рис. 3 и 4 описывают отношение особы мужского пола к его двоюродной сестре. Для сообщества, в котором двусторонние перекрестные двоюродные братья-сестры могут вступать в брак, должно быть справедливо как условие  $WC = CW$ , так и  $CW = W^{-1}C$ . Объединяя эти два уравнения, имеем

$$W^{-1}C = WC.$$

Умножив обе части справа на  $C^{-1}$ , получим условие

$$W = W^{-1},$$

необходимое для вступления в брак двусторонних перекрестных двоюродных братьев-сестер. Альтернативной формой будет условие

$$W^2 = I,$$

то есть порядок  $W$  должен быть равен двум.

Кроме того, двусторонние перекрестные двоюродные братья-сестры не могут существовать в сообществе, если не выполняется равенство  $W^2 = I$ . Для рис. 39 матрица

$$M = C^{-1}WC$$



должна описывать клан девушки столбцами, в то время как клан юноши — строками; но, согласно рис. 4, матрица

$$M = C^{-1}W^{-1}C$$

должна описывать это же преобразование кланов. Каждая девушка может быть только в одном клане, так что во избежание противоречия необходимо выполнение условия

$$C^{-1}W^{-1}C = C^{-1}WC,$$

которое может быть приведено к уравнению  $W = W^{-1}$ .

С другой стороны, в любом сообществе могут быть двусторонние параллельные двоюродные братья-сестры. На рис. 1 и 2 матрица отношений между двоюродными братьями и сестрами совершенно тождественна. Двусторонние параллельные двоюродные братья-сестры никогда не могут вступать в брак, но могут существовать в любом сообществе; двусторонние перекрестные двоюродные братья-сестры существуют только в сообществах, в которых  $W^2 = I$ , и могут вступать в браки тогда, и только тогда, когда, кроме этого,  $WC = CW$ .

Условие  $W^2 = I$  интерпретируется следующим образом: должно быть четное число кланов и каждый клан должен обмениваться женщинами в качестве жен с другим кланом. Основная типология сообществ такова:

I. *Двусторонний брак*, при котором  $W^2 = I$  и  $WC = CW$ .

II. *Брак по материнской линии*, когда  $WC = CW$ , но  $W^2 \neq I$ .

III. *Брак по отцовской линии*, когда  $WC = CW^{-1}$ , но  $W^2 \neq I$ .

IV. *Спаренные кланы*, где  $W^2 = I$ ,  $WC \neq CW$ .

V. *Остальные*.

В названиях первых трех типов опущено «перекрестные двоюродные братья-сестры», поскольку параллельные двоюродные братья-сестры никогда не могут вступать в брак. Лишь в I и IV сообществах могут существовать двусторонние перекрестные двоюродные братья-сестры. Отметим также, что два из трех условий влекут за собой третье: например, если

$$WC = CW^{-1} \text{ и } W^2 = I,$$

тогда

$$W = W^{-1} \text{ и } WC = CW.$$

# ЖИЗНЕСПОСОБНЫЕ И ЭФФЕКТИВНЫЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ФОРМЫ

Дж. Маршак

Если несколько лиц соглашаются следовать некоторому своду правил, мы можем сказать — в соответствии с целью нашей статьи и не отвергая других определений, — что они являются членами *организации*. Назовем этот свод, или набор, правил *организационной формой*, или *структурой* (конституцией).

Правила, которым намерены следовать члены, распространяются на их действия, взаимные коммуникации и наблюдения. Обычно такое правило (называемое социологами «ролью») предписывает, *что должен делать* данный член организации при получении *информации*.

Под действием здесь понимается:

1) воздействие группы лиц, образующих организацию, на внешний мир; мы называем это собственно *действием*;

2) обмен сообщениями между членами организации; мы называем это *внутренней коммуникацией* (в дальнейшем слово «внутренняя» для краткости часто опускается);

3) получение сообщений извне; мы называем это *наблюдением*.

Например, действие — это и подбрасывание топлива в печь, и управление грузовиком, и переписка с клиентом. Коммуникация может состоять в приказании подчиненному, в докладе руководителю, в выступлении на заседании правления. Наблюдение может состоять в чтении газеты, написании письма клиентом, в составлении доклада агентства по изучению рыночных цен.

Удобно распространить термин «коммуникация с другим членом организации» также на «коммуникацию со своей памятью»: передача полученного сообщения для запоминания («на хранение») или воспоминание прошлой информации. То, что делается внутри какой-либо орга-

низации в данный период времени, может быть схематически представлено матрицей (таблица 1), которая проясняет логику нашей концепции.

Таблица 1

Матрица действий, наблюдений и внутренних коммуникаций

Отправитель	Получатель				
	0	<sup>0</sup> (0,0)	<sup>1</sup> (0,1)	<sup>2</sup> (0,2)	...
	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	
	2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	
	⋮				

Клетка (1,2) должна быть заполнена по получении сообщений, посланных членом 1 члену 2; клетка (2,1) соответствует сообщениям в противоположном направлении. Строка и столбец, обозначенные 0, представляют внешний мир; следовательно, наблюдения, сделанные членом 1, должны быть внесены в клетку (0,1), а действия члена 1 (интерпретируемые как «сообщения во внешний мир») должны быть занесены в клетку (1,0). Каждая диагональная клетка — (1,1), (2,2) и т. д. — соответствует коммуникации между членом организации и его памятью, за исключением клетки (0,0), представляющей все те внешние события, на которые организация не оказывает воздействия и которые никоим образом не отражаются на ее деятельности.

В общем, в любой данный период времени каждый член организации находится в состоянии действия, коммуникации или наблюдения в ответ на некоторое «сообщение», полученное им из внешнего мира или от другого члена (возможно, от самого себя) в предшествующий период. Как мы указали вначале, организационная форма образуется правилами, предписывающими, «кто что должен делать в ответ на некоторую информацию». Пра-

вила устанавливают, что, если клетки матрицы в таблице 1 содержали определенную информацию в данную неделю, они должны быть заполнены определенным образом в следующую неделю.

Деятельность организации может быть лучше понята, если вместо обычной «организационной схемы» иметь описание — хотя бы очень приблизительное — того, «кто что делает в ответ на некоторую информацию».

Описание определенных правил действия и коммуникации, которые на деле используются данной организацией (хотя, возможно, и не провозглашаются официально), направлено также на их *совершенствование*. Совокупность правил может быть хорошей, недостаточно хорошей, плохой. Одна совокупность правил лучше, или более *эффективна*, чем другая, если *в среднем* она в большей степени способствует достижению определенных *целей*.

Рассмотрим более детально подобные правила — и, следовательно, организационные формы — по их эффективности. Как часто бывает, полезно начать с простого, предельного случая — организации, состоящей из одного лица, и соответственно правил для одного лица, принимающего решения. Они предписывают, что он должен делать в ответ на некоторую информацию. Правило более эффективно, если оно *в среднем* в большей степени способствует достижению целей.

«*В среднем*» означает, что результаты человеческих действий зависят от случайных событий внешнего мира, а не только от самих субъектов. Не только солдату или фермеру требуется дар пророчества. Каждый бизнесмен знает, что бизнес связан с риском. Он действует на основе более или менее обоснованных соображений относительно вероятности того, что спрос на его продукт будет возрастать или падать, или на основе вероятности того, что какое-либо изобретение будет иметь успех, и т. д. Короче, он действует на основе некоторого приблизительного знания или некоторых представлений о вероятности возможных событий. Более или менее сознательно он оценивает *вероятность* принимаемого им решения, которое скорее приведет к некоторому результату.

Принимающий решение не может контролировать такие внешние события, как спрос на определенные виды продукции или политика правительства, приводящая к инфляции или дефляции; он может лишь оценить вероят-



ности таких событий. Но он может контролировать свои собственные решения. Из нескольких известных решений он выбирает то, которое — с точки зрения его целей — приводит в среднем к лучшим (или по крайней мере не худшим) результатам, чем другие возможные решения. Назовем такие решения хорошими или, более точно, *оптимальными* (стараясь избежать термина «наилучшее решение», так как два решения могут быть одинаково хорошими), или *эффективными*, решениями. Термины *решение* и *действие* будем употреблять как *равнозначные*.

Приведенное описание относится к простому и довольно частному случаю «одноразовых решений», тому случаю, когда не учитывается, что решение, принятое сегодня, может повлиять на решение, которое будет принято завтра. Идею эффективных решений нетрудно распространить также на более интересный, более распространенный и более общий случай, когда утрачивает силу выражение «*sufficient into the day is evil thereof*»<sup>1</sup>. В этом более общем случае принимаются «решения относительно будущих решений», выбираются «максимы поведения», называемые также «последовательными решениями», стратегиями, или, в нашей терминологии, *правилами принятия решений*. Представляя себе неизвестную последовательность будущих событий, принимающий решения выбирает не только то, что надо сделать сегодня, но также (более или менее грубо) как реагировать на каждое из различных возможных событий завтрашнего и последующих дней. В этом выборе он руководствуется некоторыми (более или менее определенными или осознанными) оценками вероятностей. Таким образом, снова заключаем, что эффективное правило принятия решения есть такое правило, которое в среднем дает хорошие результаты с точки зрения целей принимающего решения.

Ясно, что это — идеализированное представление, *норма*, имеющая логический, а не психологический характер. Нормой является само предпочтение эффективности неэффективности. Можно ли считать это бесполезным упражнением? Видимо, нет. Психологи говорят нам, какие люди и как часто допускают определенные логические — или, в нашем случае, арифметические — ошибки, что не делает

---

<sup>1</sup> «Принцип „лишь бы хорошо было сегодня“ приводит к бедствиям назавтра». — *Прим. перев.*



арифметику и логику бесполезными. В самом деле, мы учим детей арифметике. Нас беспокоит, когда нашим студентам не хватает логики. И я полагаю, что преподаватели бизнеса и военного искусства не в меньшей степени озабочены привитием способности принятия эффективного решения.

Наше описание принятия эффективного решения не относится к числу психологических также в другом важном отношении: человек не имеет устойчивых, согласованных целей, или ценностей (в соответствии с которыми можно измерять эффективность). В идеальном случае можно сказать, что бизнесмен (как таковой) стремится получить в среднем наибольшую прибыль и что военачальник стремится действовать так, чтобы сделать победу наиболее вероятной. Но я полагаю, что эта идеализация бесполезна (во всяком случае, с точки зрения целей тех, кто стремится совершенствовать деятельность бизнесменов или генералов).

Теперь вернемся к общему случаю — организации, состоящей из нескольких лиц. Возможность распространения на этот случай идеи правила решения, только что рассмотренной для организации, состоящей из одного лица, очевидна: вместо «правила» надо иметь в виду «набор правил» (одно для каждого члена); понятие внутренней коммуникации надо понимать в смысле, указанном в начале статьи. Трудности могут возникать с применением концепции *целей* (ценностей). Если в психологическом смысле даже отдельный человек не всегда может согласовать ценности, то что говорить о группе людей?

Тем не менее можно оценить эффективность какой-либо организационной формы по отношению к *заданной* цели. Некоторое деловое предприятие может быть неэффективным с точки зрения получения прибыли, но эффективным с точки зрения сплочения участвующего в нем персонала. Как только цель сформулирована, применяются соответствующие логические средства для ее осуществления. Если цель заключается в достижении намеченного уровня, то решение может иметь двузначный результат: 0 — в случае неуспеха (ниже намеченного уровня) и 1 — в случае успеха (выше намеченного уровня). Среднее значение результата =  $(1 \times \text{вероятность успеха}) + (0 \times \text{вероятность неуспеха}) = \text{вероятности успеха}$ . Существует один эмпирически полезный подход, состоящий в оценке эффективности организационной формы посредством выбора

в качестве цели высокой *вероятности выживания*. Рассмотрение существующих организационных форм в какой-либо многовековой области человеческой деятельности (например, религиозные организации, мелкое ремесленное производство или домашнее хозяйство) может подтвердить жизнеспособность определенных правил действия и коммуникации. Они имеют, говоря языком антропологов, более высокий «показатель выживания». Однако такое эмпирическое подтверждение на эволюционной основе истинно лишь в том случае, если можно считать, что среда (то есть распределение вероятности соответствующих внешних условий) существенно не изменилась с течением времени.

Выберет ли исследователь жизнеспособность или какую-либо другую цель в качестве критерия для сравнения организационных форм в данной области деятельности, нет необходимости в том, чтобы эта цель совпадала с целью любого из членов данной организации. Это невероятно уже потому, что индивидуальные цели в общем случае не тождественны между собой.

Независимость организационной цели (как цели, выбранной исследователем) в отношении индивидуальных целей ни в коей мере не лишает смысла наши суждения об эффективности. Несомненно, обсуждение проблемы эффективности предпринимательской корпорации возможно в терминах ее совокупных прибылей на протяжении жизни двух поколений, не постулируя эти прибыли в качестве цели администраторов или держателей акций, так же как восхваление эффективности римской католической церкви не обязательно подразумевает, что она одинаково хорошо служила личным целям всех ее пап, епископов и мирян.

Это ставит проблему *стимулов* (incentives). Организационные правила могут быть сформулированы таким образом, что цель каждого члена не мешает сохранению цели организации. Примерами служат: премиальная система оплаты, обещание добычи солдатам, осаждающим город, и модель *laissez-faire* в экономике. Существуют, конечно, и отрицательные стимулы (наказание, штраф).

Проблема стимулов не будет рассмотрена нами. Мы не будем также касаться индивидуальных целей. Если они помешают пониманию дальнейшего изложения, можно сделать допущение (в действительности не необходимое), что члены предпринимательской организации (она будет пред-

метом дальнейшего обсуждения) являются партнерами, участвующими в прибылях на равных, или что действует некоторая более совершенная система стимулов, например бригада. Наша основная цель — показать, как можно сравнивать различные организационные формы и выбирать из них оптимальные.

Предположим, что некоторая судостроительная фирма имеет *два дока*: старый и новый, механизированный. Первый имеет более высокие эксплуатационные издержки, и разница зависит от расходов на заработную плату докерам, причем предполагается, что ставки одинаковые в обоих доках. Предположим, далее, что фирма имеет *двух торговых представителей* на двух различных рынках. Назовем их восточным и западным. Каждый представитель получает предложения *цен* (заказы на суда) на своем рынке: это — его информация. С другой стороны, управляющий производством знает, каков в данный момент уровень заработной платы и, следовательно, каковы *издержки* производства. Предположим, эксплуатационные издержки на одно судно составляют:

в новом доке — 20,

в старом доке — 35.

(Мы не принимаем во внимание капитальные издержки и другие неоперативные, постоянные издержки, поскольку они должны оплачиваться в любом случае и поэтому не могут влиять на выбор решения.) Допустим, цены, предложенные клиентом торговому представителю, составляют:

на восточном рынке — 29,

на западном рынке — 24.

Очевидно, руководитель производства и оба торговых представителя примут на совещании как самое лучшее следующее решение: использовать новый док для восточного клиента (получая прибыль  $29 - 20 = 9$ ), предложение западного клиента отклонить, оставить старый док незагруженным. То же самое решение может быть принято руководителем производства без совещания при получении первого же сообщения от каждого из торговых представителей о местной цене.

Совещания и другие формы экстенсивной *коммуникации требуют времени и денег*, в первую очередь в виде жалования занятым администраторам. Поэтому мы спрашиваем: всегда ли лучше «централизовать» все решения,

то есть основывать их на *всей доступной информации*, собранной к какому-то совещанию или сосредоточенной в центре? При каких обстоятельствах такая централизация оправдана? Когда, наоборот, более экономично разрешать местным, или специализированным, лицам действовать на основании их собственной *ограниченной информации*, даже если это может быть связано с некоторым риском? И какова должна быть эта ограниченная информация? Надо ли, если вернуться к нашему примеру, информировать торгового представителя обо всех колебаниях издержек производства при отсутствии колебаний цен на других рынках? Или можно оставить его без информации о ценах? Кроме того, любая информация может быть использована различным образом в соответствии с различными *правилами действия*. Например, если каждый торговый представитель знает, каковы издержки производства в обоих доках, и облечен полномочиями принимать или отклонять предложения клиентов без учета цен на других рынках, предложения каких цен он мог бы принять, так чтобы минимизировать для фирмы риск вынужденного использования старого дока с очень малой прибылью или даже с убытком?

Несмотря на искусственную простоту, наш пример помогает пролить свет на довольно широкий класс практических проблем. Эти проблемы возникают всякий раз, когда несколько принимающих решения лиц исходят из одних и тех же ограниченных возможностей, и в результате общие издержки фирмы возрастают.

Вместо двух доков можно взять несколько заводов или заменить «новый док» «работой наемных рабочих в течение нормального рабочего дня», а «старый док» — «сверхурочной работой за дополнительную плату». Можно также вместо «местных» (локальных) цен иметь в виду для такого продукта, как, например, хлеб, «ожидаемый местный спрос». Таким образом, многие аспекты нашего примера с судовой верфью могут быть перенесены на другие области <sup>1</sup>.

Вернемся к нашей проблеме: мы хотим найти для каждой системы коммуникаций оптимальный набор пра-

---

<sup>1</sup> См. также работы автора: «Elements for Theory of Teams», в: «Management Science», 1, № 2 (January 1955); «Towards an Economic Theory of Organization and Information», в: «Decision Processes» (Thrall, Coombs and Davis, eds.), Wiley, New York, 1954.



вил действия для торговых представителей, который приводит к максимальной средней прибыли, достижимой при данной коммуникационной системе. Мы можем назвать этот результат *максимальной валовой средней прибылью*. Вычитая средние издержки коммуникации (главным образом жалование администраторам, относимое на счет коммуникации), получим *максимальную чистую среднюю прибыль* организационной формы, которая характеризуется данной коммуникационной системой.

Если, например, средняя прибыль «централизованной» системы принятия решения лишь незначительно выше,

Таблица 2

Распределение вероятностей цен на двух рынках

		Восточный рынок		
		Высокие (=39)	Низкие (=24)	Суммарная вероятность
Западный рынок	Высокие (=31)	0,4	0,1	0,5
	Низкие (=29)	0,1	0,4	0,5
	Суммарная вероятность	0,5	0,5	1,0
		Средняя цена	Разброс цен	
Восточный рынок		30	18	
Западный рынок		30	2	
Коэффициент корреляции = 0,6				

чем в некоторой «децентрализованной» системе (предполагается, что соответствующие оптимальные правила действия используются в обеих системах), то централизованная система должна быть отвергнута, если дополнительные издержки на коммуникацию, которых она требует, не столь незначительны.

В подтверждение сказанного допустим, что эксплуатационные издержки в наших двух доках (20 и 35 соответственно) постоянны, меняются только предлагаемые цены. Чтобы выработать наилучшие правила действия, надо иметь представление о вероятном уровне цен. Для простоты предположим, что цены на обоих рынках подчи-



няются вероятностному закону, иллюстрируемому таблицей 2.

Таким образом, с вероятностью 0,4 цены на обоих рынках будут высокими; с вероятностью 0,4 они будут низкими; с вероятностью 0,1 цены на восточном рынке будут высокими, на западном — низкими; наконец, с вероятностью 0,1 цены будут высокими на западном и низкими — на восточном. (Изменение цен на обоих рынках более вероятно в одном направлении, чем в противоположных.) Мы, далее, предположили, что в то время, как средняя цена одна и та же (30) на обоих рынках, цена на восточном рынке совершает более резкий скачок: от «низкой» (21) к «высокой» (39); в то же время на западном рынке «низкая» цена — 29, а «высокая» — 31 (никаких промежуточных цен на обоих рынках нет; это упрощает вычисления).

При централизованной системе руководство с очевидностью выберет следующую стратегию: строить судно в новом доке для восточного клиента, если его цена высокая, для западного — если цена на восточном рынке низкая; старый док оставить незагруженным (по крайней мере до тех пор, пока предполагаемые издержки остаются без изменения). Эта стратегия и полученная в итоге прибыль выглядят следующим образом:

Таблица 3

Оптимальное правило принятия решений в централизованной фирме

Цены		Предложение	Прибыль	Вероятность
восточный рынок	западный рынок			
39	31	Восточный	$39 - 20 = 19$	0,4
39	29	Восточный	$39 - 20 = 19$	0,1
21	31	Западный	$31 - 20 = 11$	0,1
21	29	Западный	$29 - 20 = 9$	0,4

Средняя прибыль — 14,8

Средняя прибыль  $19 \cdot 0,4 + 19 \cdot 0,1 + 11 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,4 = 14,8$ . Легко видеть, что любое другое правило в централизованной системе приведет к более низкой средней прибыли.

Теперь, предполагая те же самые условия, касающиеся издержек и цен, рассмотрим следующую форму «децентрализованной» системы: каждый торговый представитель принимает или отклоняет местные предложения, не учитывая цену на другом рынке. Ясно, что для каждого торгового представителя есть четыре возможных правила: (1) принимать предложение только в том случае, если цена высока; (2) принимать предложение, если только цена низка (парадоксальное, но тем не менее, как мы увидим, разумное правило); (3) принимать предложения любых цен; (4) не принимать никаких предложений, то есть прекратить функционирование. Итак, имеется  $4 \times 4 = 16$  возможных пар правил для двух торговых представителей. Для каждой пары правил вычисляется средняя прибыль.

Может показаться *парадоксальным*, что оптимальной будет следующая пара правил: торговый представитель должен принимать только предложения высоких цен на восточном рынке, в то время как на западном — только предложения низких цен. При таких правилах средняя прибыль, вычисленная из таблицы 4, составляет:  $19.0,4 + 13.0,1 + 0.0,1 + 9.0,4 = 12,5$ .

Таблица 4

Оптимальное правило принятия решений в децентрализованной фирме

Цены		Предложение	Прибыль	Вероятность
восточный рынок	западный рынок			
39	31	Восточный	$39 - 20 = 19$	0,4
39	29	Восточный и западный	$39 + 29 - 35 - 20 = 13$	0,1
21	31	Нигде	0	0,1
21	29	Западный	$29 - 20 = 9$	0,4
		Средняя прибыль: 12,5		

Аналогичные вычисления показывают, что ближайшей к оптимальной паре правил будет следующая: для восточного торгового представителя — принимать предложения

только высоких цен, а для западного — любые (средняя прибыль 12). Третьей по рангу (со средней прибылью 10) является пара правил: торговую контору на одном из рынков закрыть, на оставшемся рынке принимать предложения любых цен. Ранжирование таких правил получилось бы другим, если бы не были выбраны преднамеренно цифры, приводящие к «парадоксу», то есть к правильному решению, которое может казаться неверным с первого взгляда. Выбранный пример служит иллюстрацией полезности некоторых формальных рассуждений и вычислений. Полученное решение становится понятным, если вспомнить, что, согласно нашему предположению, низкая цена на западном рынке (29) вероятнее всего (преимущество этого варианта по сравнению с обратным случаем 4 : 1) должна сочетаться с еще более низкой ценой на восточном рынке (21); в то же время высокая цена на западном рынке (31) вероятнее всего (снова со значительным преимуществом) должна сочетаться с еще более высокой ценой на восточном рынке (39). Это оправдывает в среднем принятие торговым представителем на западном рынке предложения низкой цены, с тем чтобы иметь гарантию, что производительный новый док будет загружен, а отклонение им предложения высокой цены уменьшит для фирмы риск вынужденного использования другого низкопроизводительного дока с убытком для себя.

Таким образом, «децентрализованная» система (как она определена ранее) дает при наилучшей стратегии среднюю прибыль, которая на 1,7 (14,2—12,5) ниже самой высокой средней прибыли, достижимой при «централизованной» системе. Поэтому, если дополнительные издержки, *связанные с коммуникацией*, необходимые при централизованной системе, превышают 1,7, мы откажемся от нее; если эти издержки меньше 1,7, мы примем централизацию.

Решение каждой проблемы зависит от «исходных данных». В каждой групповой проблеме такими «исходными данными» являются: (1) *функция выигрыша*, то есть формула, показывающая, как зависит прибыль от решений (в нашем случае — от решений принимать или отклонять предложения) и от внешних условий (в нашем случае — от наличия двух цен), как это показано, например, в столбце «прибыль» в двух последних таблицах; (2) *функция вероятности (состояний)*, показывающая вероятность

возможных внешних условий; (3) *функция организационных издержек*, определяющая размеры издержек каждой рассматриваемой организационной формы.

Что касается *функции выигрыша*, можно сказать, что усложнение системы коммуникации оправданно, когда *функция выигрыша* включает «*дополнительность*» между участниками каких-либо действий в следующем смысле: результат действий одного из участников зависит от образа действий его коллеги. Именно так было в нашем примере в связи с высокими издержками производства в старом доке. Если бы оба дока были одинаково производительны, нужда в усилении коммуникации и, следовательно, выгода централизации были бы меньше. Высокая степень *дополнительности* и, как следствие, большая потребность в коммуникации имеется в деятельности начальников железнодорожных станций; но я полагаю, что *дополнительность* незначительна в деятельности руководителей филиалов фирмы.

Другим свойством рассматриваемой функции, требующим усиления коммуникации, является существование множества оптимальных решений. Одинаково хорошо вести машины по правой стороне дороги и по левой (то есть правостороннее и левостороннее движение), но кто-то должен играть роль *координатора*. При составлении расписания работы различных групп часто возникает ситуация того же типа: требуется организатор, чтобы все участники, скажем симпозиума, прибыли в определенное место в определенное время, хотя какое-то другое время и место могут быть столь же удобны.

В нашем примере я отметил пару правил действия, согласно которым один из двух торговых представителей — *безразлично какой* — должен был бы принимать все предложения (по крайней мере до тех пор, пока издержки производства остаются прежними), в то время как другой не должен был бы принимать никаких предложений. Эта пара правил стоит в проранжированном ряду третьей, но она может быть оптимальной при различных численных значениях исходных данных. В таком случае нам пришлось бы выбирать между двумя парами правил: торговый представитель западного или восточного рынка должен был бы во всех случаях принимать предложения. Таким образом, требуется координатор, поскольку есть два одинаково хороших решения.



Мы видели также, как *распределение вероятностей* неконтролируемых событий (в нашем случае цен) влияет на решение. Наше «парадоксальное» решение было обусловлено высокой корреляцией между ценами двух рынков и тем фактом, что одна из цен имела больший разброс, или вариацию, чем другая. Исходя из здравого смысла, можно добавить несколько дополнительных предположений о том, каким образом характер распределения вероятностей влияет на выбор между различными формами коммуникации. Я готов платить много за информацию о будущих ценах на акции, а не на облигации, ибо, чем выше *изменчивость* вещи, тем более полезно изучать ее состояние. Далее, я не хочу щедро оплачивать специальную информацию о цене акции, если она сильно *коррелирует* с некоторой другой ценой, которая во всяком случае мне известна.

Чтобы прийти к другим полезным заключениям о том, каким образом функция выигрыша и распределение вероятностей могут влиять на построение различных организационных форм, требуется более глубокое рассмотрение, накопление фактического знания о реально существующих организациях и его логическая и математическая интерпретация.

Необходимо восполнить один важный недостаток — игнорирование *издержек, связанных с коммуникацией*. Мы нуждаемся в измерениях эффективности использования времени администраторами — предмет, которым, как я думаю, занимаются психологи. Нам нужно нечто сходное с I.Q.<sup>1</sup>, но более соответствующее нашему предмету. Необходим специальный «E.Q.» (коэффициент способности к руководству). Шкала I.Q., в сущности, представляет собой не что иное, как статистическое распределение большой выборки американских детей по отношению к выполнению ими определенных задач. Например, «I.Q. = 100» представляет собой набор заданий, которые могут быть выполнены 50% всех детей («медиана» исполнения). Подобно этому, мы нуждаемся в статистическом распределении способностей американских руководителей. измеряемых деятельностью, непосредственно связан-

---

<sup>1</sup> I.Q. (Intellectual Quotient) — тест интеллектуальных способностей, распространенный в американской системе образования. — *Прим. перев.*



ной с эффективной коммуникацией и принятием решений.

На рис. 1 три функции — функция вероятности,

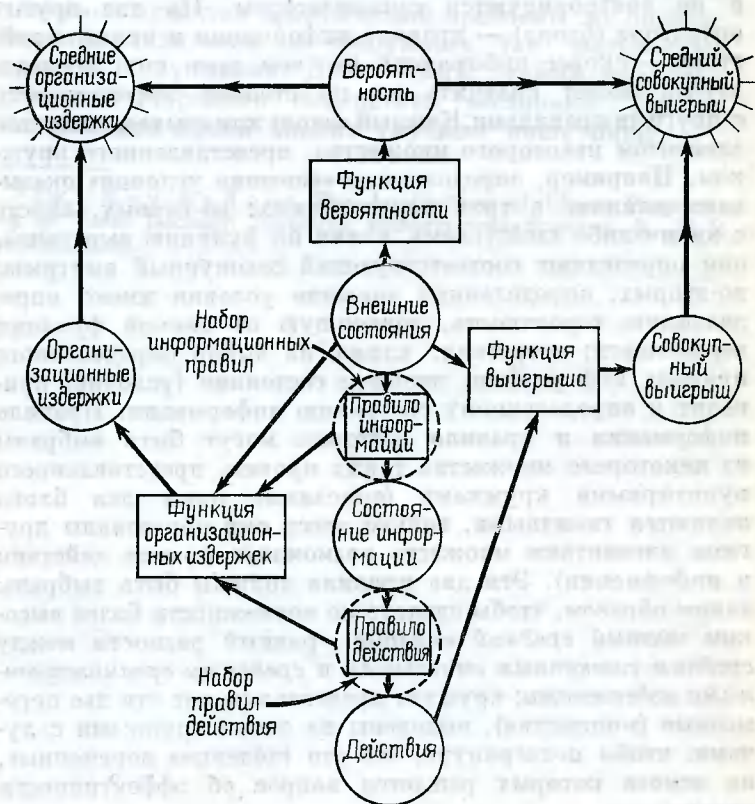


Рис. 1. Определение среднего совокупного выигрыша и средних организационных издержек. Кружком обозначены множества (переменные). Прямоугольником обозначены операторы (функции). Пунктирные кружки — множества контролируемых факторов (операторов), которые могут быть выбраны таким образом, чтобы максимизировать чистый ожидаемый выигрыш, то есть разность между элементами, обозначенными кружками с лучами.

функция выигрыша и функция организационных издержек — представлены в виде блоков; они являются «операторами», преобразующими «входы» в «выходы», как указано стрелками. Эти три функции, или операторы, заданы и не контролируются организатором. Но два других оператора (блока) — правила информации и правила действий — скорее выбираются им, чем даны ему; исследователь может сравнить их по степени эффективности с другими правилами. Каждый «вход» или «выход» является элементом некоторого множества, представленного кружком. Например, определенные «внешние условия» оказывают влияние в трех направлениях: во-первых, вместе с каким-либо «действием», влияя на функцию выигрыша, они определяют соответствующий совокупный выигрыш; во-вторых, определенные внешние условия имеют определенную вероятность, зависящую от данной функции вероятности; в-третьих, влияя на выбор определенного правила информации, внешнее состояние (условие) приводит к определенному состоянию информации. Правило информации и правило действия могут быть выбраны из некоторого множества таких правил, представленного пунктирными кружками (описанные нами два блока являются типичными, только здесь они образованы другими элементами множеств возможных правил действия и информации). Эти два правила должны быть выбраны таким образом, чтобы сделать по возможности более высоким *чистый средний выигрыш*, равный разности между *средним совокупным выигрышем* и *средними организационными издержками*; кружки, представляющие эти две переменные (множества), выделены на схеме кружками с лучами, чтобы подчеркнуть, что это «целевые» переменные, на основе которых решается вопрос об эффективности правил.

Здесь нет необходимости распространяться о различиях между «моделью» и «реальностью» и о полезности моделей как для изучения, так и для совершенствования практических решений. Нашу модель «судоверфи» легко сделать более реалистической и более сложной. В таком случае решения модели перерастут рамки простой арифметики, которой было достаточно для нашего рассмотрения, и потребуют более сложных математических средств и вычислительных машин. (Так, отмечавшаяся выше задача организации торговли хлебом может быть решена

средствами линейного программирования <sup>1</sup>.) Даже в этом случае польза от моделей организации выражается в прояснении основных логических черт практической проблемы. Это создает основу для понимания более тонких, неуловимых аспектов практической проблемы, не поддающихся формализации и требующих так называемых интуитивных суждений. Даже самый лучший биохимик не заменит хорошего шеф-повара ресторана. Тем не менее биохимический анализ улучшил нашу пищу.

---

<sup>1</sup> См.: Roy Radner, The Application of Linear Programming to Team Decision Problems, «Management Science», 5, № 2 January 1959).

# ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

*М. Шубик*

В статье рассматривается связь между многими проблемами, которые изучаются с помощью теории игр, и проводится исследование производственной организации. Дается несколько примеров применения (при изучении производственных организаций) (1) теории игр двух лиц с постоянной суммой, (2) теории игр в развернутой форме (позиционных игр), (3) теории игровых решений для  $n$  лиц, (4) теории игровых решений против природы и (5) теории игровых решений для динамических игр. Кратко излагаются соответствующие применения теории игр к организационным проблемам и некоторым разделам наук о поведении.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

С появлением монографии Неймана и Morgenштерна «Теория игр и экономическое поведение»<sup>1</sup> начали развиваться исследования по теории игр. Авторы еще задолго до появления названной монографии рассматривали вопросы, которые в конечном счете привели к созданию теории игр. Имеются даже исторические ссылки, касающиеся теории игр, относящиеся к началу XVIII века. Тем не менее только после 1944 года теория игр возникла как формальная дисциплина.

Последняя часть заглавия книги «Теория игр и экономическое поведение» указывает, что теория игр понимается как прикладная математическая дисциплина, связанная с экономикой и, возможно, другими науками

---

<sup>1</sup> См.: J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 3rd. ed., 1953; русский перевод: Д. Нейман, О. Morgenштерн, *Теория игр и экономическое поведение*, изд-во «Наука», М., 1970.

о поведении. Возникает вопрос: насколько успешно теория игр идет по этому пути? В книге Неймана и Моргенштерна экономика занимает немного места. Большая часть статей, заметок и книг по теории игр относится к исследованиям по математическим аспектам теории, некоторое число работ связано с задачами военного характера, и лишь немногие имеют дело с другими областями применения. Почти нет работ по приложению теории игр к проблемам наук о поведении в такой же степени, в какой линейное программирование находит применение в решении целого ряда экономических задач.

Несмотря на недостаток прямых применений, влияние теории игр является значительным. В данной работе рассматриваются проблемы практического приложения теории игр.

## 2. МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ИГРОВЫХ РЕШЕНИЙ

Чтобы понять возможности применения теории игр, желательно провести различие между пятью классами игр. Мы имеем в виду:

- 1) теории игровых решений для двух лиц с постоянной суммой;
- 2) описание позиционных игр;
- 3) теории игровых решений для  $n$  лиц (где  $n \geq 2$  для игр с переменной суммой;  $n \geq 3$  для игр с постоянной суммой);
- 4) теории игровых решений против природы (игры, в которых правила не полностью определены);
- 5) теории решения динамических игр.

## 3. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ С ПОСТОЯННОЙ СУММОЙ

Быть может, благодаря формальной связи между разделами математики, необходимыми для игровых решений двух лиц с нулевой суммой, и теми разделами математики, которые нужны для задач линейного программирования, данный раздел теории игр наиболее известен тем, кто не занят практической работой в этой области.

Класс игр двух лиц с постоянной суммой естественным образом разделяется на два подкласса — на под-



623

		Игрок 2	
		1, 2, ... s <sub>2</sub> ... n <sub>2</sub>	
Игрок 1	1	$P_1(1,1)$	
	2		
	3		
	⋮		
	s <sub>1</sub>	$P_1(s_1, s_2)$	
	⋮		
	n <sub>1</sub>		

Игрок 2

Игрок 1

	1	2
1	7	4
2	8	6

Минимумы строк

4

Максимин

6

Максимумы столбцов

8

Минимакс

6

Пусть  $s_1 \in S_1$  и  $s_2 \in S_2$  представляют конкретные стратегии, выбранные игроками 1 и 2 из множеств стратегий, которые у них имеются. Мы определим функцию выигрышей  $P_1(s_1, s_2)$  для игрока 1. Эта функция предсказывает результат игры для первого игрока, если используются стратегии  $s_1$  и  $s_2$ .

Предположим, что первый игрок имеет  $n_1$ , а второй игрок —  $n_2$  чистых стратегий. Матрица выигрышей в таблице 1 полностью описывает численное выражение исходов для всех случаев, где

$$s_1 = 1, 2, \dots, n_1 \text{ и } s_2 = 1, 2, \dots, n_2.$$

По определению, поскольку это игра двух лиц с постоянной суммой, выигрыш для второго игрока есть взятый со знаком минус выигрыш первого игрока (если отбросить константу), то есть

$$P_2(s_1, s_2) = -P_1(s_1, s_2) + K.$$

Имеется общепринятое понятие решения матричных игр двух лиц с постоянной суммой и полная теория для решения таких игр<sup>1</sup>.

Таблица 3

Игрок 1 \ Игрок 2				Минимумы строк
		1	2	
Игрок 1	1	10	-5	-5
	2	-15	10	-15
Максимумы столбцов		10	10	

Предположения, касающиеся поведения игроков в матричной игре двух лиц с постоянной суммой, связаны с рассмотрением *минимакса*. Таблица 2 иллюстрирует это.

<sup>1</sup> См.: J.C.C. McKinsey, Introduction to the Theory of Games, New York, McGraw-Hill, 1952, Chapter 2.

Для простоты в наших примерах положим, что константа  $K$  равна нулю.

Наихудший результат у игрока 1 при использовании им своей первой стратегии выражается величиной 4, если при этом игрок 2 применяет свою вторую стратегию. Наихудший результат игрока 1 при использовании им своей второй стратегии — величина 6. Наилучший результат игрока 1 выражается числами 8 и 6 при использовании игроком 2 первой и второй стратегий соответственно.

Применяя вторую стратегию, игрок 1 может гарантировать получение по крайней мере числа 6. Аналогично, используя свою вторую стратегию, игрок 2 может гарантировать, что он потеряет самое большее 6. Максимум из минимумов того, что игрок 1 может выиграть, равен 6. Кроме того, минимум из максимумов того, что игрок 2 теряет, равен 6. Для этой матрицы можно утверждать, что

$$\min_{s_1} \max_{s_2} P_1(s_1, s_2) = \max_{s_1} \min_{s_2} P_1(s_1, s_2).$$

Игра, изображенная на таблице 3, не обладает тем свойством, что минимакс равен максимину, то есть что наименьший из максимумов столбцов матрицы игры равен наибольшему из минимумов строк. Игры, для которых минимакс равен максимину, называются играми с *седловой точкой*. Однако, если вместо ограничения, состоящего в том, что игрок использует *чистую стратегию*, он с определенной вероятностью избирает план действия, то указанное выше свойство восстанавливается (минимакс будет равен максимину). Пусть игрок 1 применяет свою первую стратегию с вероятностью  $5/8$ , а вторую — с вероятностью  $3/8$ . Если игрок 2 применяет первую стратегию, игрок 1 будет ожидать выигрыша

$$5/8(10) + 3/8(-15) = 5/8.$$

Если игрок 2 применяет свою вторую стратегию, игрок 1 выигрывает:

$$5/8(-5) + 3/8(10) = 5/8.$$

Используя *смешанную стратегию*, которая характеризуется парой чисел  $(5/8, 3/8)$ , игрок 1 может гарантировать для себя выигрыш  $5/8$ . Аналогично, используя сме-

шанную стратегию ( $3/8$ ,  $5/8$ ), игрок 2 может гарантировать, что он не потеряет больше  $5/8$ .

Основная теорема для игры двух лиц с постоянной суммой утверждает, что для всех игр этого типа найдется седловая точка, в которой игрок 1 может гарантировать для себя минимальный выигрыш. Игрок 2 одновременно может гарантировать, что максимальный выигрыш игрока 1 будет совпадать с указанным выше минимумом.

Предположение о том, что поведение игроков может быть описано при помощи правила минимакса, основано, возможно, на индивидуально «разумном использовании» подходов игроков. Его можно интерпретировать как предположение о поведении индивидов в подобной ситуации.

Имеется немного ситуаций или организаций, которые могут быть описаны с помощью игр двух лиц с постоянной суммой. Сделано несколько попыток установить аналогию между ситуациями, включая конкуренцию в области рекламы <sup>1</sup>; несмотря на ценность этих попыток, трудности еще велики. Некоторые применения теории игры находим в нефтяной промышленности <sup>2</sup>.

Второй тип игр с постоянной суммой относится к случаю, когда по крайней мере один из игроков имеет неограниченное множество стратегий. Сюда входят игры поисковые и дуэльные. Понятие решения остается здесь тем же самым, что и в матричных играх, однако математические трудности существенно возрастают, для некоторых случаев решение отсутствует. Эти игры имеют важное значение в военном деле. Поисковые игры находят применения в системах обороны, а дуэльные игры полезны в оценке новых систем вооружения.

Короче говоря, имеются непосредственные применения игр двух лиц с постоянной суммой к военным проблемам, но мало прямых применений к экономике, социальным или производственным организациям.

<sup>1</sup> См.: A. Charnes and W. W. Cooper, A Constrained Game Formulation of Advertising Strategies, «Econometrica» (Oct. 1954). См. также: L. Friedman, Game-Theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures. «Operations Research», 6: 5 (Sept.-Oct. 1958).

<sup>2</sup> См.: G. H. Symonds, Linear Programming: The Solution of Refinery Problems, Esso Standard Oil Company, New York, 1955, Chapter 5; E. G. Bennion, Capital Budgeting and Game Theory, «Harvard Business Review», 34, 1956.



#### 4. ОПИСАНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ ИГР

Первая часть названной работы Неймана и Моргенштерна<sup>1</sup> посвящена подробному описанию игры. Эта основная работа дала язык для современной теории решений и базу для изучения теории организаций.

В ней определены такие понятия, как «ход», «игра», «информационное множество», «стратегия», «выигрыш», «правила игры», «полная информация».

Матричная игра, изображенная в таблице 3, может быть представлена *деревом игры* (см. рис. 1).

Вершины дерева представляют собой точки выбора. Ветви указывают альтернативы. Обозначения вершин соответствуют игрокам. Таким образом, в вершине 0, помеченной также знаком  $P_1$ , игрок 1 выбирает между двумя альтернативами. Ветви, берущие начало от этой вершины, отмечены цифрами 1 и 2.

В двух вершинах, обозначенных  $P_2$ , игрок 2 делает свой ход, выбирая между двумя альтернативами. После того как каждый игрок сделал свой ход, игра достигает конечной точки дерева игры и игрок получает свой выигрыш. Например, если оба игрока выберут первую альтернативу, игра заканчивается с результатом (10, -10).

Две вершины, отмеченные как  $P_2$ , обведены одной кривой. Это указывает, что точки выбора принадлежат к одному *информационному множеству*. Матричная игра, представленная в таблице 3, является одновременно динамической игрой. Два игрока выбирают свои стратегии так, что один не знает о действиях другого. Таким образом, в дереве игры, несмотря на то, что игрок 1 первым выбирает между двумя альтернативами, в действительности игрок 2 не знает об этом выборе и, следовательно, не может сказать, выбор какой из двух вершин ( $x$  или  $y$ ) сделан игроком 1.

На рис. 2 представлена уже другая игра, поскольку условия информации изменены. Вершины  $x$  и  $y$  больше не принадлежат одному информационному множеству. Игроку 2 известны ходы игрока 1 до того, как игрок 2 делает свой ход. Эта игра не ведет к той же самой матричной игре. Эквивалентная матричная игра еще имеет две

<sup>1</sup> См.: сноску на стр. 170.



стратегии для игрока 1, но число стратегий для игрока 2 равно 4, что и показано в таблице 4. Это два применения точного языка для принятия решения в играх.

*Правила игры* определяют полную структуру игры. Они указывают на множество альтернатив, возникающих перед игроком в каждой точке во время игры, состояние информации и выигрыш как результат игры.

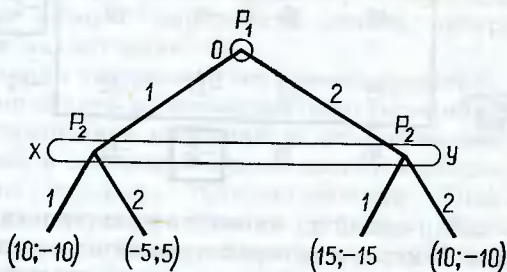


Рис. 1.

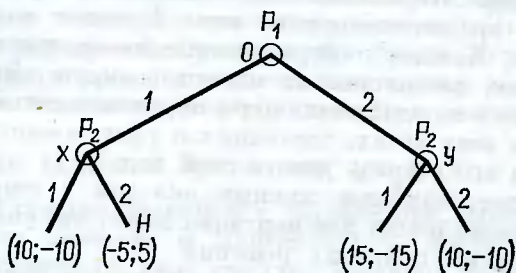


Рис. 2.

*Партия игры* — это путь, идущий вниз по дереву игры. На рис. 2 такой путь обозначен  $OxH$ . Этот путь является результатом того, что игроки 1 и 2 сделали свои ходы, выбрав соответственно первую и вторую альтернативы.

*Выигрыш* — результат распределения, вытекающий из партии игры. В шахматах это выражается в виде выигрыша, поражения или ничьей, в покере — в деньгах.

*Стратегия* — полный план действий игрока. Она предписывает поведение во всех случаях. Например, третья стратегия игрока 2, указанная в таблице 4, есть (1,2; 2,1). Она констатирует: «Если партнер применяет первую

альтернативу, я должен выбрать вторую; если же он применяет вторую, я должен выбрать первую альтернативу».

Таблица 4

		Игрок 2				Минимумы строк
		(1,1; 2,1)	(1,1; 2,2)	(1,2; 2,1)	(1,2; 2,2)	
Игрок 1		10	10	-5	-5	-5
		-15	10	-15	10	-15
Максимумы столбцов		10	10	-5	10	

*Ход* — выбор одной из множества альтернатив в точке выбора игры. В игре, в которой каждый игрок имеет один ход и эти ходы сделаны одновременно, стратегия и ход эквивалентны. Игроки не имеют возможности строить план.

Игра, представленная на рис. 2, имеет *полную информацию*. Каждое *информационное множество* является множеством, состоящим из одного элемента. Это показывает, что в каждой точке игры игрок полностью информирован о всех ходах, сделанных к тому моменту, когда наступила его очередь делать свой ход.

Вероятно, наиболее важным вкладом в теорию игр было создание языка для описания игры, что способствовало изучению принятия решений.

Как это ни парадоксально, роль такого языка столь велика, что позволяет выделить подобные разработки в науках о поведении и точно определить некоторые слабости в теории игр и в других экономических теориях, описывающих различное поведение.

Некогда были предприняты попытки изучения позиционных игр умеренной трудности, таких, как шахматы. При этом выдвинулись на первый план трудности, касающиеся теорий «рационального выбора». Первые два хода в шахматной игре можно сделать 400 способами. К десятому ходу уже имеется много миллиардов альтернатив.

Очевидно, люди не могут изучить миллионы альтернатив, но они могут различными способами успешно ограничить свои поиски. Эти вопросы рассматривались

Шенноном, Саймоном, Невеллом, Сэмюелем и другими<sup>1</sup> с целью создания для игры в шахматы и шашки вычислительных программ, основанных на «эвристике», которая определяет общие правила, или принципы, для сокращения числа альтернатив с таким расчетом, чтобы рассматриваемая ситуация была обозримой.

С работами по шахматной игре тесно связана работа по другим «процессам исследования» и обучения. М. Флуд и другие авторы<sup>2</sup> проводили опыты непосредственно с играми на обучение.

О влиянии теории игр на производственные организации можно судить по использованию терминологии теории игр в исследовании операций и планировании. Матрица выигрышей в настоящее время является общим термином во многих отраслях промышленности США. Наряду с ним используются понятия условного предсказания, стратегического планирования и анализа конъюнктуры. Очевидно, возрастание роли линейного программирования, теории последовательных решений и других математических методов также имеют влияние. Эти методы, кроме специальных приложений, также играют роль в создании в промышленности подходящих условий для научного изучения процессов принятия решений.

## 5. ТЕОРИЯ РЕШЕНИЙ ИГР $n$ ЛИЦ

Поверхностно знакомые с теорией игр, прочтя заглавие книги Неймана и Моргенштерна, могут оказаться в заблуждении по ряду причин. Авторами написаны три книги под одним названием. Первая книга имеет дело

<sup>1</sup> См.: R. M. Friedberg, A Learning Machine: Part I, «IBM Journal of Research and Development», 2:1 (Jan. 1958); R. M. Friedberg, B. Dunham and J. H. North, A Learning Machine: Part II, «IBM Journal of Research and Development», 3:3 (July 1959); A. Newell, J. C. Shaw and H. A. Simon, Chess-Playing Programs and the Problem of Complexity, «IBM Journal of Research and Development», 2:4 (Oct. 1958); A. L. Samuel, Some Studies in Machine Learning Using the Game of Checkers, «IBM Journal of Research and Development», 3:3 (July, 1959).

<sup>2</sup> См.: M. M. Flood, On Game-Learning Theory and Some Decision-Making Experiments, Chap. X of «Decision Processes»; Thrall, Coombs and Davis (eds.), New York, Wiley & Sons Inc., 1954; Wm. K. Estes, Individual Behavior in Uncertain Situations: An Interpretation in Terms of Statistical Association Theory, *ibid.*, Chap. IX.

с описанием игры в развернутой форме. Вторая книга излагает теорию игровых решений для двух лиц с постоянной суммой. Доказывается, что способ поведения, предложенный авторами, очень разумен и что лица «будут» играть в полном соответствии с их теорией<sup>1</sup>. В какой-то мере это зависит от понятия полезности, введенного Нейманом и Моргенштерном, которое можно рассматривать как их главный вклад в теорию.

В третьей книге излагается теория поведения игроков в игре  $n$  лиц ( $n \geq 2$ ) с переменной суммой. Эту теорию нельзя признать удовлетворительной для большинства наук о поведении. Невозможно дать решения, которые соответствовали бы случайным наблюдениям. Кроме того, понятие решения дается только для очень слабого типа предсказания результата игры.

В то же время имеется около двадцати различных методов решений игр  $n$  лиц с переменной суммой. Большинство из них описаны Льюсом и Райфа<sup>2</sup>.

Многообразие понятий решения указывает, как мало мы знаем о поведении в различных ситуациях, включая групповой конфликт. Вероятно, было бы целесообразно на этот раз рассмотреть несколько концепций решения, применяя каждую к отдельным областям, таким, как:

- 1) поведение внутри фирмы,
- 2) поведение небольших групп,
- 3) конфликтные ситуации, включая случай двух индивидов,
- 4) рынки и т. д.

В некотором смысле необходимо провести ряд исследований с целью создания общей теории организации.

На данном этапе за основу может быть взята аналогия между двумя аспектами теории игр и двумя сторонами производственных организаций. Описание игры эквивалентно описанию *рыночной структуры* в промышленности или организационной структуры фирмы. Определение

---

<sup>1</sup> Некоторые не согласны с этим утверждением, см., например: D. Ellsberg, The Theory of the Reluctant Duelist, «American Economic Review», 46, 1956.

<sup>2</sup> См.: R. Duncan Luce and Howard Raiffa, Games and Decisions, New York, Wiley & Sons, 1957; русский перевод: Р. Д. Льюс, Х. Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.

понятия решения эквивалентно описанию *рыночного поведения* или поведения внутри фирмы.

Весьма желательно четко проводить различие между структурой и поведением, особенно при выяснении смысла некоторых основных понятий для исследования социально-экономической организации. Сюда включаются понятия конкуренции, соглашения, власти, централизации и децентрализации.

Три простых игры ( $2 \times 2$ ) с непостоянной суммой и три разных концепции решения, представленные в таблице 5, служат для иллюстрации взаимосвязи между структурой и поведением.

В матрицах выигрышей таблицы 5 содержатся пары элементов, причем первый элемент каждой пары означает выигрыш игрока 1, а второй элемент — выигрыш игрока 2. Так, например, в игре В результат партии, в которой игрок 1 применяет первую стратегию, а второй игрок — вторую стратегию, равен 4 для первого игрока и 11 — для второго.

Весьма упрощенно матрицы можно рассматривать как изображение *рыночной структуры*. В таком случае игра А

Таблица 5

Игрок 1 \ Игрок 2		Игрок 2	
		1	2
Игрок 1	1	10,10	6,7
	2	7,6	5,5

Игра А

Игрок 1 \ Игрок 2		Игрок 2	
		1	2
Игрок 1	1	10,10	4,11
	2	11,4	8,8

Игра В

Игрок 1 \ Игрок 2		Игрок 2	
		1	2
Игрок 1	1	10,10	10,5
	2	5,10	5,5

Игра С

описывает рационально организованную отрасль промышленности, где первая стратегия для каждого игрока есть обязательство поддерживать высокую цену *при условии*, что его конкурент поддерживает высокую цену; если же цена не сохраняется, то они вместе намерены пойти на любое ее снижение. Вторая стратегия для каждого — снижение цены.

Эта частная матрица выигрышей отражает предполагаемую ситуацию, в которой игроки получают значительную прибыль, если оба они поддерживают высокую цену.



Если же один из них проводит политику снижения цен, он может получить временное преимущество, но в конечном счете дела у обоих не будут обстоять так же хорошо, как раньше. Такой случай можно наблюдать в отраслях, находящихся в состоянии упадка.

Стратегии в игре *B* можно истолковать как решения относительно рекламы и сбыта продукции. Первая стратегия представляет собой решение мало тратить на рекламу и сбыт. Вторая предусматривает большие расходы. Здесь матрица отражает особенности рынка, которые можно ожидать в ситуации, где общий сбыт не изменяется, а составные его части могут изменяться радикально. Кроме того, если в этой ситуации одна фирма занимает ведущее положение, для конкурента остается мало надежды на успех, когда он предпринимает те же действия, используя стратегию «мне тоже».

Третья игра в терминах экономики представляет чисто конкурирующий рынок. Она будет рассматриваться после получения некоторых решений.

Решение, которое дали Нейман и Моргенштерн для общей игры *n* лиц, предусматривает для игроков *совместную максимизацию*, а затем решение задачи, которая есть в некотором смысле задача о разделении доходов между ними. Имеются другие кооперативные решения, предлагающие совместную максимизацию<sup>1</sup>.

Если использовать обозначения параграфа 3, то совместная максимизация требует от игроков выбора стратегии  $s_1$  и  $s_2$  так, чтобы

$$\begin{array}{cc} \text{Макс.} & \text{Макс.} \\ (P_1(s_1, s_2) + P_2(s_1, s_2)). \\ s_1 \in S_1 & s_2 \in S_2 \end{array}$$

Другая концепция поведения требует для получения решения игры так называемого некооперативного поведения. Дж. Нэш развил теорию, дающую некооперативные точки равновесия в качестве игровых решений. Тип равновесия, который им предлагается, обычен для всех экономистов и связан с равновесными решениями, предложенными Курно, Чемберленом и многими другими.

Используя язык математики, можно сказать, что пара стратегий  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  обеспечивает подъем к точке равновесия, если одновременно удовлетворяются следующие условия:

<sup>1</sup> См., например: J o h n N a s h, Two-Person Cooperative Games. «Econometrica», 21, 1953.

$$\text{Макс. } P_1(s_1, \bar{s}_2) \rightarrow s_1 = \bar{s}_1$$

$$s_1 \in S_1$$

$$\text{Макс. } P_2(\bar{s}_1, s_2) \rightarrow s_2 = \bar{s}_2$$

$$s_2 \in S_2$$

Короче говоря, если игрок 1 пытается максимизировать свой выигрыш, исходя из предположения, что игрок 2 использует стратегию  $\bar{s}_2$ , то игрок 1 будет применять стратегию  $\bar{s}_1$ , и наоборот.

Третья теория поведения состоит в том, что каждый из игроков исходит из предположения о том, что его противники не принимают никаких правил. Это такая ситуация, в которой каждый полагается на самого себя «*on se défend*». Поведение игроков в этом случае весьма осторожно и неуверенно. Если оба игрока следуют этому поведению, их действия будут характеризоваться как

$$\text{Макс. Мин. } P_1(s_1, s_2)$$

$$s_1 \in S_1 \quad s_2 \in S_2$$

$$\text{Макс. Мин. } P_2(s_1, s_2)$$

$$s_2 \in S_2 \quad s_1 \in S_1$$

Применим три разные концепции поведения к каждой из трех игр.

Элементы таблицы 6 представляют собой пары стратегий, определяющих решения игр. Например, равновесное решение игры *B* получено в случае, когда оба игрока применяют вторую стратегию, и выигрыш каждого из них равен 8.

Рассмотрев все три игры, получим совокупно-максимальное решение. Для всех игр пара стратегий (1,1) дает совокупный максимум 20.

Равновесное решение игры *A* получается следующим образом. Применение игроком 2 первой стратегии побуждает игрока 1 поступать аналогично. Ставя себя в положение своего противника, он может привести те же доводы. Решение можно проверить с помощью формальных равенств, приведенных выше.

В игре *B*, если игрок 1 предполагает, что его противник будет применять первую стратегию, он перейдет к применению второй стратегии. Продолжая дальше

подобное рассуждение, мы получим, что пара стратегий (2,2) определяет равновесное решение.

Было отмечено, что игра *С* изображает чисто конкурирующий рынок (следуя терминологии, взятой из экономики). Анализ матриц показывает, что множество стратегий игроков не связаны тесно в том смысле, что действия одного игрока не влияют на выигрыш второго. Например, изменение цены на пиццели в вагоне-ресторане вблизи Филадельфии не оказывает влияния на торговлю вагона-ресторана около Бостона.

Поскольку нет тесной связи между судьбами игроков, не удивительно, что в игре этой структуры все виды поведения ведут к одному и тому же решению. Другими словами, задав структуру игры *С*, невозможно определить поведение игроков путем изучения решения.

В игре *А*, даже если выигрыш каждого игрока сильно зависит от действий обоих игроков, структура такова, что большинство типов поведения ведет к тому же самому

Таблица 6

Структура Поведение			
	Игра А	Игра В	Игра С
Совокупно-максимальное решение	(1,1)	(1,1)	(1,1)
Равновесное решение	(1,1)	(2,2)	(1,1)
Максиминное решение	(1,1)	(2,2)	(1,1)

результату. Максиминное поведение, возможно, является причиной наиболее парадоксального результата. Крайняя осторожность и пессимизм каждого игрока приносят им совокупно-оптимальный результат.

В игре *В* возможно различать непохожие результаты, вытекающие из совокупно-максимизируемого или некооперируемого поведения. Легко описать структуры, в которых возможно различать непохожие результаты, вытекающие из некооперативного и максиминного или других видов поведения.

В играх *A* и *C* можно провести различие между соперничеством, соглашением или кооперацией.

Предположим, что оба игрока принадлежат к одной и той же организации и структура совместной предпринимчивости отражена матрицами игры *A* или *C*. Такая организация будет, естественно, полностью *децентрализованной*. Структура организации такова, что при очень слабых предположениях, относящихся к мотивам действий игроков, будет получен совокупный максимум. Нет необходимости в общении и обмене письмами. Подсистемы будут до известной степени независимо контролироваться, что принесет пользу организации в целом.

В игре *A* децентрализация достигается, поскольку оба игрока имеют серьезные побудительные мотивы искать совокупный оптимум и не имеют иных мотивов. В игре *C* децентрализация, по существу, является изоляцией. Судьбы игроков не переплетаются.

Так как в игре *B* достигается совокупный максимум, игроки должны следовать кооперативному поведению. Это может вызвать сложную систему связи, согласования и управления. В игре *B* незначительное отклонение в поведении может разрушить совокупную максимизацию. В других играх это не имеет места.

Система удачно децентрализована в отношении множества решений, если независимые действия индивидов при проверке действий подсистем достигают того же результата, что и действия одного исполнителя, располагающего всеми решениями.

Децентрализация зависит как от структуры, так и от поведения. Чем меньше объединены индивиды и чем больше они совершают ошибок или изменяют свое поведение, тем труднее спроектировать систему, которая была бы удачно децентрализована.

Чем более коррелированы выигрыши игроков, тем легче децентрализовать принятие решения.

Вероятно, наиболее фундаментальным понятием политических наук является понятие *власти*. Исследование политической науки можно определить как изучение власти. Однако от Макиавелли до настоящего времени это понятие, насколько мне известно, недостаточно определено. Элементарный и весьма ограниченный способ анализа с помощью теории игр служит как средство внести ясность в этот предмет.



Не вполне понятно, как ввести понятие власти даже в шахматной игре. Тем не менее формализация анализа игр позволяет выделить некоторые проблемы для изучения. Пример такой формализации дается при введении индекса власти в избирательных системах <sup>1</sup>.

Политические проблемы власти сливаются с экономическими и производственными проблемами. Измерение власти или контроль фирмы над рынками имеет важное социально-экономическое значение. Представительство власти в системах принятия решений создает проблему измерения, связанную с властью.

Имеется немного непосредственных применений теорий игровых решений для  $n$  лиц с переменной суммой к проблемам управления отраслями промышленности. Помимо исследования некоторых аспектов торговли <sup>2</sup> и распределения совокупных цен, проводятся также некоторые другие исследования. Интересное использование модели игры  $n$  лиц с равновесием в смысле Нэша дано Чарлзом и Купером <sup>3</sup> в связи с изучением перевозок в зоне Чикаго с целью создания моделей транспортного потока, когда огромная масштабность задачи делает обычное моделирование на электронных вычислительных машинах невозможным.

## 6. ТЕОРИИ ИГРОВЫХ РЕШЕНИЙ ПРОТИВ ПРИРОДЫ

В параграфе 4 было дано описание позиционных игр. При этом формализация основывалась на предположении о том, что известны все правила игры. Это означает (по крайней мере теоретически), что можно перечислить

<sup>1</sup> См.: Martin Shubik, *The Uses of Game Theory in Management Science*, «Management Science», 2, 1955; Martin Shubik and L. S. Shapley, *Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System*, «American Political Science Review», 48, 1954; L. S. Shapley, *A Value for  $n$ -Person Games*, «Contributions to the Theory of Games», vol. II, «Annals of Mathematics», № 28, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1953.

<sup>2</sup> См.: Wm. Vickrey, *Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders*, mimeographed, 1959; см. также: Martin Shubik, *Economics, Management Science, and Operations Research*, «The Review of Economics and Statistics», XL: 3 (Aug. 1958).

<sup>3</sup> См.: A. Charles and W. W. Cooper, *External Principles for Simulating Traffic Flows over a Network of City Streets*, «Proceedings of the National Academy of Sciences», 44: 2, (Febr. 1958).



каждую альтернативу. Охватываются все физически или юридически возможные случаи.

Даже для некоторых настольных игр <sup>1</sup> имеются трудности в определении правил описания результата.

Обычные игры служат для иллюстрации трудностей, встречающихся при попытке построения модели рынка, фирмы или другой организации.

Таблица 7

Игрок 2		Игрок 2					
Игрок 1		1	2	Игрок 1		1	2
	1	10,?	6,?		1	?,?	?,?
	2	7,?	5,?	2	?,?	?,?	
„Игра“ D				„Игра“ E			

Игрок 2		Игрок ?					
Игрок 1		1, 2, ..., ?		Игрок 1		1	2
	1	10,10	6,7		?,?	1	10,?
	2				2	7,?	5,?
	⋮			⋮			
	?	?,?	... ?	?,?			
„Игра“ F				„Игра“ G			

«Игра» D в таблице 7 дает ситуацию, в которой игрок 1 знает все стратегии у обеих сторон, знает свой выигрыш, но не знает выигрыши своего противника. Это часто встречается в торговых сделках и торговле.

В этом примере слово «игра» взято в кавычки, чтобы указать, что в строгом смысле теории игр эти примеры не являются играми. Однако с точки зрения наук о поведении эти ситуации, включая «почти игры» или псевдо-игры, должны быть исследованы. В дальнейшем кавычки будут опущены, хотя подразумеваться будут именно такие ситуации.

<sup>1</sup> См.: Н. J. R. Murray, A History of Board Games Other Than Chess, Oxford, England, Clarendon Press, 1952, Chapter 4.

Исследования торговых сделок проводились при различных условиях информации<sup>1</sup>. Математическое исследование даже простых и известных структур торговых сделок далеко не всегда совершенно, но оно основано на предположении, что известно поведение игроков. Викрей<sup>2</sup> исследовал свойства обычного высокого запроса цены во время аукциона путем сравнения его с последующим снижением цен, пока не найдется покупатель.

Появилось много теорий равновесия в экономической системе; эти теории используют модели типа, представленного игрой *D*. Каждый игрок располагает информацией о своих выигрышах, но он мало что знает о других игроках. Обычно незнание поведения торговых партнеров можно показать на примере многих торговых сделок. После того как окончательные предложения представлены на рассмотрение, контракт присуждается покупателю, предложение которого является самым близким к фиксированному среднему предложению цены. В этом смысле можно ожидать, что несведущие, чьи низкие предложения цены основаны на неправильных оценках, должны оказаться банкротами, несмотря на то что контракт может быть расторгнут. Анализ этой процедуры представляет определенные логические трудности.

Игра *E* иллюстрирует уровень незнания, более глубокий, чем в игре *D*. Здесь неизвестны не только выигрыши противников, но игрок не знает даже размеры некоторых своих выигрышей. Это характерно для фирм со сложным производственным процессом, выпускающих разнообразную продукцию. Фирма может не знать, какой вклад в прибыль вносит то или иное выпускаемое ею изделие. Торговые представители фирм на новых рынках с неизвестными товарами сталкиваются с неведением подобного типа. Особенно это относится к рынкам по продаже художественных, антикварных и ювелирных изделий. Здесь несведущий может легко заплатить больше за японские печатные издания в Японии, за английское серебро в Англии, за периодические пьесы во Франции, чем если бы он приобрел те же самые предметы в Нью-Йорке.

Тип матрицы в игре *E* приводит к задаче относительно

---

<sup>1</sup> См.: Sidney Siegel and L. E. Fouraker, *Bargaining and Group Decision Making: Experiments in Bilateral Monopoly*, Macmillan, 1960.

<sup>2</sup> См. сноску 2 на стр. 183.

ценности информации. Сколько игрок желает платить, чтобы узнать размеры своих выигрышей и выигрышей противников? Финей и Шубик приводят пример<sup>1</sup>, показывающий, что, если даже игроки знают размеры выигрышей, но они определяются числами, взятыми из неизвестных случайных распределений, необходимо разумно «изучить полное окружение».

Кроме того, имеются трудности, не показанные в игре *Е*. Игроки могут знать стратегии друг друга, но они могут не знать, какая стратегия фактически применяется противником. В случае если платежи известны, можно предположить, например, что первоначально игрок 1 применяет в игре *Е* первую стратегию. Он узнает, что в результате получается выигрыш, скажем,  $+3$  для него и  $-3$  для его противника. Он не может с уверенностью утверждать, что результат оказался следствием применения пары стратегий (1,1) или другой пары (1,2).

В игре *Г* игроки не знают множества своих стратегий. Для них возможно исследовать новые альтернативы. Модель ставит науки о поведении перед необходимостью проведения испытаний для исследования процессов и развития теории поиска.

Игра *Г* иллюстрирует ситуацию, в которой природа противника неизвестна. Он может быть «природой», погодой, морским приливом и отливом, механизмом, диким животным, штрейкбрехером, психологом, социологом или обычным бизнесменом.

Чтобы «решить» игру этого типа, то есть быть в состоянии предсказать ее результат или рекомендовать форму поведения первому игроку, необходимы некоторые дополнительные посылки, касающиеся типа поведения противника. Льюис и Райфа дают исчерпывающий обзор различных методов для играющих против «природы»<sup>2</sup>.

Многие задачи, связанные с контролем качества и последовательных решений, основаны на методе статистического выбора и формально эквивалентны играм одного лица против «природы». В этом смысле можно сказать, что имеются непосредственные приложения теории игр этого типа.

---

<sup>1</sup> См.: George J. Feeney and Martin Shubik, «A Multi-Stage Game with Uncertain Pay-offs», mimeographed note, February 16, 1960.

<sup>2</sup> См.: сноску на стр. 177.

## 7. ТЕОРИИ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ИГР

Всюду в этой статье в ходе изложения дело обстояло так, что все игровые модели могли быть представлены в матричной форме. Во многих примерах, особенно в исследовании игр  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в параграфе 5, рассуждение имело «почти динамический» характер. Однако динамика не была явно выражена.

Динамические особенности участия в прибылях можно проиллюстрировать простыми примерами, тесно связанными с задачей о разорении игрока (при игре в карты), изучаемой в теории вероятностей<sup>1</sup>.

В параграфе 4 была описана позиционная игра. Подразумевается, что любая игра может быть представлена в виде конечного (ориентированного) дерева игры. Выигрыши партии определяются конечными вершинами такой диаграммы. В качестве примера может служить игра в шахматы. Любой путь от вершины дерева вниз в конечную точку выигрыша, проигрыша или ничьей будет здесь встречаться.

Аналогия с шахматами не годится для модели фирмы. Имеются два свойства, которые отсутствуют в случае шахматной игры. Шахматы, покер и большинство других игр являются играми *конечной* продолжительности с выигрышем в конце. Предполагается, что теоретически (если не практически) акционерное общество вечно. В игре такого типа отсутствует конечная цель. Кроме того, выигрыш может быть повторен много раз в течение игры. Иногда выплата выигрыша фигурирует в виде дивидендов, иногда вклады *приходится отдавать обратно*.

Если провести аналогию между игрой и действиями акционерного общества, то корпоративную деятельность можно рассматривать как бесконечную игру в покер, в которой игроки эпизодически умирают или рождаются и в которой, кроме того, обеспечивается непрерывное питание игроков.

Игры, не имеющие определенного окончания, не могут изображаться в виде дерева игры конечной длины. Ситуация с фанатичным картежником, играющим в рулетку

---

<sup>1</sup> См.: Wm. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, New York, Wiley Sons, 1950, Chapter 14; русский перевод: В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, с. 1—2, изд-во «Мир», М., 1967.



до полного разорения, даёт пример игры этого типа. Всегда имеется шанс, даже если вероятность его фантастически мала, что длительность такой игры может быть продолжена.

Различие между бесконечной игрой и игрой конечной продолжительности показано на двух взаимно связанных играх, представленных в таблице 8. Рассмотрим пример матричной  $(2 \times 2)$  игры, которая продолжается в течение 100 интервалов времени. Анализ одного интервала

Таблица 8

		Игрок 2	
		1	2
Игрок 1	1	10;10	-10;20
	2	20;-10	0;0

игры показывает, что существует точка равновесия, дающая результат  $(0,0)$ ; это имеет место, когда оба игрока применяют вторую стратегию. В начальном положении мы можем предполагать, что, если игроки будут вести игру в течение 100 интервалов, они в некотором смысле не будут упорствовать в игре, что даст нуль на каждом испытании, когда каждый из них имеет возможность получить 1000. Однако можно показать, что стратегии равновесия во всей игре предусматривают для игроков правило применять всегда их вторые стратегии, на любом периоде игры (то есть в играх с одним интервалом).

Рассмотрение матрицы показывает, что, если игра длится только один период, игроки будут использовать вторые стратегии. Предположим, что игра продолжается в течение 100 интервалов и каждый из игроков решил применять первую стратегию и, таким образом, получает 10. В последней игре из серии каждый игрок будет платить своему противнику «парное пересечение». Оба могут подсчитать, что им необходимо применять пару стратегий  $(2,2)$  в дальнейшем. Каждый из них может тогда вернуться на шаг назад и найти парное пересечение другого на 99-м шаге. Продолжая тем же способом продвижение назад,



с помощью индукции можно показать, что пара стратегий (2,2) проходит всегда.

Дерево игры для игры со 100 интервалами показано на рис. 3. При проверке игры этого типа было получено доказательство существования точек в зависимости от поведения, в которых достигается совокупный минимум <sup>1</sup>.

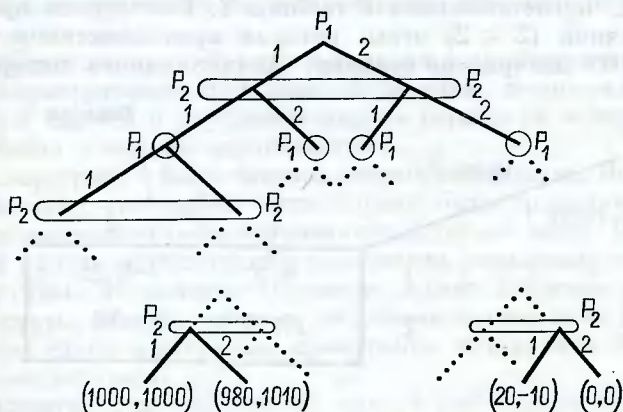


Рис. 3.

Примерно такого типа представляет собой игра, в которой субигра сохраняется от интервала к интервалу, однако в каждом интервале имеется вероятность  $p$  того, что игра закончится к концу партии. Ожидаемая продолжительность игры будет равна

$$p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2p + \dots + n(1-p)^{n-1}p + \dots$$

Эта сумма составлена из вероятностей того, что игра длится ровно один, два, три и т. д. периода; каждое слагаемое умножается на продолжительность периода. Сумма ряда равна  $1/p$ . Следовательно, ожидаемую длительность 100 можно получить из равенства

$$1/p = 100.$$

Отсюда  $p = 0,01$  с точностью до трех цифр. Только теперь игра отличается от первой, поскольку ее ожидаемая продолжительность, не стационарная длительность, та же,

<sup>1</sup> См.: A. Scodel, J. S. Minas, P. Ratoosh and M. Lipetz, Some Descriptive Aspects of Two-Person, Non-Zero-Sum Games, «Conflict Resolution», II:2, June 1959.

что и для конечной игры. Все одинаково, кроме этого факта. Однако теперь существуют стратегии всей игры, которые заставляют игроков применять свои первые (суб)-стратегии в субиграх период за периодом.

Предположим, что игрок 1 проводит следующую политику: «В каждой субигре я буду применять свою первую стратегию, пока замечу, что второй игрок использует свою первую стратегию. Как только я получу противоположную информацию, перейду на вторую стратегию и буду сохранять ее в каждой последующей субигре».

Если игрок 2 знает эту стратегию и пытается максимизировать свой выигрыш, обусловленный полученной информацией, его ожидаемый в течение всей игры выигрыш в лучшем случае будет

$$10p \sum_{t=0}^{\tau-2} (1-p)^t + 20p (1-p)^{\tau-1} + (0) p \sum_{t=\tau}^{\infty} (1-p)^t.$$

Это выражение получено из предположения, что в некоторый интервал времени, скажем в период  $\tau$ , он использует в игре вторую стратегию. Если он использует первую стратегию, ожидаемый выигрыш равен

$$10p \sum_{t=0}^{\infty} (1-p)^t.$$

Различие между последующими первой и второй стратегиями всегда положительно для  $p = 0,01$ ; поэтому политика следования первой стратегии более предпочтительна. Аналогично, если игрок 2 «угрожает» игроку 1 репрессалией того же самого типа, если он уклоняется от своей первой стратегии в каждой субигре, игрок 1 побуждается к тому, чтобы применять только первую стратегию в каждой субигре.

В конечной игре ни для одной из сторон не существует эффективной угрозы, что объясняется их неспособностью применять репрессалии против парного пересечения в партии последней из игр. В конечной игре в любой партии игры продолжительность игры, как можно ожидать, все еще будет оставаться постоянной и всегда достаточно большой, чтобы некоторые репрессалии были эффективными.

Возвращаясь снова к играм *A*, *B* и *C* параграфа 5, можно перефразировать их в терминах динамических игр. Подробности рыночной структуры, такие, как время

запаздывания, степень закрепленной инвестиции, гибкость в рекламировании, изучение или политика цен — все это будут эффективными факторами маневрирования фирмы и ее способности укреплять стабильность на рынке.

Дальнейшая модификация игры бесконечной продолжительности может быть получена путем, рассмотренным в нашей работе «Игры экономического выживания»<sup>1</sup> как модели корпорации. Простой пример иллюстрирует структуру игры такого типа и дает аналогию между ней и акционерным обществом. В обычной карточной игре на разорение игрок начинает с суммы  $x$  и играет до тех пор, пока не выиграет определенную сумму или игра закончится его разорением.

В играх на экономическое разорение игрок имеет два счета: *общий счет* и *выходной счет*. Если активы в общем счете падают ниже определенной суммы, игра заканчивается и игрок становится банкротом. Имеется коэффициент дисконтирования  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ), применяемый при оценке вклада, вносимого на выходной счет игрока. В каждом интервале игрок участвует в субигре. Эта субигра может изображать рыночный поток. Игрок получает плату как результат участия в субигре, которая вносится на его общий счет. Игрок предпринимает финансовый ход, состоящий в том, чтобы привести в порядок активы путем изменения соотношения между его общим и выходным счетами.

Посредством модели такого типа можно изобразить процессы входа и выхода, появления и гибели фирмы. Кроме того, могут быть обнаружены и изучены различные цели или задачи фирмы. Могут быть рассмотрены формальные модели, делающие акценты на выплату дивидендов акционерам, ускорение роста фирмы или минимизацию риска быть вытесненным из участия в бизнесе.

Ниже дается полное описание простой игры одного лица на экономическое выживание:

$$W(0), C(0), \rho, B, L, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (p, 1-p).$$

$W(0)$  — начальная величина выходного счета;

---

См.: Martin Shubik, *Strategy and Market Structure*, Wiley & Sons, 1959, Chapter X; Martin Shubik and G. L. Thompson, *Games of Economic Survival*, «Naval Research Logistics Quarterly», 6:2 (June 1959).

$C(0)$  — начальная величина общего счета;

$\rho$  — коэффициент дисконтирования;

$B$  — уровень банкротства, которое имеет место, как только  $C(t) \leq B$ ;

$L$  — размер выплаты долгов или величина общего счета фирмы, если ее вынудили к ликвидации;

$((a_{ij}))$  — матрица субигры, изображающая выигрыши, вносимые на общий счет после каждой партии субигры; здесь матрица дана в очень простой форме.

Поскольку данная игра есть игра одного лица, мы предполагаем, что его противником, или конкурентом, является «природа», которая применяет известную стратегию. Этот факт обозначается  $(p, 1 - p)$ , где  $0 \leq p \leq 1$ .

Игрок может пытаться максимизировать дисконтируемую ожидаемую величину своего выходного счета. Выборочно он может захотеть максимизировать вероятность выживания своей фирмы при условии фиксированных требований к политике дивиденда. При этих обстоятельствах проводится оптимальная политика<sup>1</sup>. В первом примере оптимальная политика такова, что фирма в конечном счете разорится с вероятностью 1. Деньги рассматриваются здесь в терминах бухгалтерского учета. При оптимальной политике переучета, если величина основного капитала не является неограниченной, фирма разорится рано или поздно без основного капитала.

Тип игры, описанной здесь, тесно связан с динамическим программированием<sup>2</sup>.

Как и в большинстве проблем теории игр, динамические игры могут найти прямое применение. Они необходимы, однако, чтобы дать структуры, в которых могут быть исследованы многие понятия, важные для понимания рынков, фирм и других организаций. Жизнеспособность, гибкость, маневренность, возможность создания угрозы, способность вести таможенную войну и восприимчивость к информации — все это примеры понятий, которые требуют дальнейшей работы в отношении определения их содержания и дефиниций. Понимание этих аспектов изучения стратегии важно как для познания процессов производства и управления, так и для понимания конфликтных ситуаций на международной арене.

<sup>1</sup> *Ibid.*

<sup>2</sup> См.: Richard Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1957.

# ТЕОРИИ ОБЩЕГО ИНТЕРЕСА И ЛОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАНИЯ <sup>1</sup>

Д. Т. Гюйбо

## ПРИНЦИП КОНДОРСЕ

Принцип Кондорсе состоит в том, чтобы сводить каждое мнение к его *простейшим компонентам*, но, чтобы знать «волю большинства», нет необходимости проводить многочисленные баллотировки. Если мы попросим каждого голосующего проранжировать кандидатов (или альтернативы) в порядке их предпочтения, то получим все элементы, необходимые для полного описания:

Первый ... *A*  
Второй ... *B*  
Третий ... *C*.

Голосующий (неявно) утверждает, что

*A* лучше, чем *B*  
*B*   »       »   *C*  
*A*   »       »   *C*.

Эти утверждения мы будем обозначать:  $A > B$ ,  $B > C$ ,  
 $A > C$  <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> В начале своего эссе автор прослеживает историю того, что он называет проблемой коллективных решений. Он показывает, как в течение длительного времени она была неотделима от проблемы выбора в условиях неопределенности. По мнению автора, первым, кто выделил эту проблему, был французский философ и математик Кондорсе, а первым, кто дал ей четкую формулировку, был К. Д. Эрроу. Примеры, с которых начинается изложение, взяты из работы, опубликованной Кондорсе в 1785 году. — *Прим. ред. англ. текста.*

<sup>2</sup> Такое обозначение использовалось Кондорсе и позднее Лакруа. Мы находим у этих авторов четко выраженную идею упорядоченной структуры.



Вообразим выборный орган из шестидесяти голосующих, разделившихся таким образом <sup>1</sup>:

23	дали упорядочение	$A > C > B$
19	»	» $B > C > A$
16	»	» $C > B > A$
2	»	» $C > A > B$ .

Проанализируем голосование следующим образом. При сравнении  $A$  с  $B$  имеем

$$23 + 2 = 25 \text{ голосов за то, что } A > B,$$

$$19 + 16 = 35 \text{ голосов за то, что } B > A.$$

Кондорсе предположил, что мнение большинства выражается

« $B$  лучше, чем  $A$ ».

Сравнивая  $A$  и  $C$  таким же способом, имеем

$$23 \text{ голоса за то, что } A > C,$$

$$19 + 16 + 2 = 37 \text{ голосов за то, что } C > A,$$

откуда заключаем, что большинство отдает предпочтение  $C$  по сравнению с  $A$ . Наконец, сравним  $B$  и  $C$ :

$$19 \text{ голосов за то, что } B > C,$$

$$23 + 16 + 2 = 41 \text{ голос за то, что } C > B.$$

Таким образом, большинство отдает предпочтение  $C$  по сравнению с  $B$ .

Этот анализ приводит нас к выражению «воли большинства» в виде трех суждений:

$$C > B, B > A \text{ и } C > A,$$

то есть упорядочению  $C > B > A$ . Если необходимо выбрать одного кандидата, мы выбираем  $C$  <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> См.: Condorcet, Essai sur L'application de l'analyse á la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, «Discours préliminaire», p. 58. Ср. одиннадцатую гипотезу первой части, стр. 119. Эти же примеры были использованы в более поздних работах, в частности в «Essai sur la constitution et les fonctions des assemblées provinciales».

<sup>2</sup> Как отметил Кондорсе, обычные выборы, когда каждый голосующий опускает бюллетень только с одним именем, дали бы 23 голоса за  $A$ , 19 — за  $B$  и 18 — за  $C$ , так что это голосование приводит к неправильному представлению о действительных преимуществах коллегиальности. Этот парадокс выражен следующими словами:

Сам Кондорсе показал пределы применимости его метода. «Существует только один правильный путь выяснения мнения большинства на выборах. Он состоит в попарном сравнении соответствующих достоинств кандидатов... Но... во-первых, этот метод очень громоздок; во-вторых, возможно, что никто из кандидатов не будет считаться превосходящим всех других...»<sup>1</sup>.

Первая проблема — продолжительность и трудоемкость практического применения — менее интересна для нас, чем вторая, указывающая на возможность ситуации, когда нет обоснованного решения. Рассмотрим второй пример, приведенный Кондорсе, несколько изменив числа.

$$\text{Голосование} \left\{ \begin{array}{l} 23: A > B > C \\ 17: B > C > A \\ 2: B > A > C \\ 10: C > A > B \\ 8: C > B > A \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} B > C: 23 + 17 + 2 = 42, & C > B: 10 + 8 = 18, \\ C > A: 17 + 10 + 8 = 35, & A > C: 23 + 2 = 25, \\ A > B: 23 + 10 = 33, & B > A: 17 + 2 + 8 = 27. \end{array}$$

«Что мы подразумеваем под избранием? Не будет ли это суждением о превосходстве кого-либо в соревновании? Почему мы судим об этом, основываясь на мнении большинства голосов? Потому что думаем, что утверждение, считающееся истинным 15 особами, более похоже на правду, чем противоположное утверждение, считающееся истинным только 10 особами. Тот, кто действительно получает предпочтение большинства голосов на выборах, должен казаться наиболее превосходящим своих конкурентов и, таким образом, является тем, кто утверждается большинством голосов как превосходящий всех. Но если имеется только три кандидата, возможно, что один из них будет иметь больше голосов, чем другие, но один из последних, возможно тот, кто имел наименьшее количество голосов, будет рассматриваться большинством как превосходящий каждого из двух других. Это утверждение кажется парадоксальным. Но оно может быть истиной, если окажется, что когда мы голосуем за одного кандидата, то считаем, что ставим его выше по сравнению с другими, но мы не высказываем нашего мнения о достоинствах других, и тогда суждение неполно... Долгое время мы догадывались об этом неудобстве, прежде чем доказали его реальность» (*Oeuvres de Condorcet, Essai sur la constitution et les fonctions des assemblées provinciales*, Arago edition, Paris, 1847, vol. VIII, p. 193).

<sup>1</sup> «Sur la forme des elections» (Arago edition, Paris, 1847), vol. IX, p. 305; Brunswick edition (1804), vol. V, p. 29.

В соответствии с законом большинства мы должны получить три утверждения

$$B > C, C > A \text{ и } A > B,$$

но они противоречивы!

Причина противоречия легко обнаруживается. Три элементарных утверждения взаимосвязаны: если мы утверждаем, что  $A > B$  и  $B > C$ , мы должны утверждать, что  $A > C$ . Но если мы применяем правило большинства к каждому из кандидатов, никто не может гарантировать, что три результата не будут противоречивы. В предыдущем примере действительно существует большинство для утверждения  $B > C$ , большинство для  $C > A$  и большинство для  $A > B$ ; но эти три множества голосующих не пересекаются, никто из голосующих не принадлежит ко всем трем множествам.

Существование подобного явления делает более трудной двойную задачу законодателя, именно: «знать истинное суждение большинства в том случае, когда оно существует и даже когда оно не существует», например в случае, когда различные элементарные суждения противоречивы, и «указать вариант, который можно было бы принять, с тем чтобы риск ошибки был как можно меньше»<sup>1</sup>. Именно поэтому Кондорсе после изучения парадокса не смог не заключить, что невозможно приписать некоторое согласованное мнение выборному органу. Он выбрал меньшее зло, другими словами, среди всех согласованных мнений он выбрал то, которое поддерживается наибольшим возможным числом голосов. Но как мы увидим позже, трудность носит более фундаментальный характер и каждая попытка ее разрешения более или менее произвольна. Кондорсе не игнорировал этой проблемы и возвращался к ней несколько раз. Даню без применения математического аппарата достаточно аргументированно показал ряд слабых мест в его методе комбинирования утверждений. Он думает также, что в сомнительном случае хорошо обоснованное большинство может отсутствовать; это означает, что обнаруженный Кондорсе парадокс в определен-

---

<sup>1</sup> «Essai sur les assemblées provinciales». Это первая работа о способах оценки мнения выборного органа; см.: *Oeuvres de Condorcet*, Arago edition, vol. VIII, p. 573.

ном смысле невозможно устранить. Именно этот аспект очень детально исследовал К. Д. Эрроу<sup>1</sup>.

## ЭФФЕКТ КОНДОРСЕ

Численные примеры не могут помочь разобраться в механизме парадокса. Необходим общий анализ. Рассмотрим некоторое собрание, стоящее перед выбором трех альтернатив  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и предположим, что каждый участник собрания имеет для этих трех альтернатив множество предпочтений, то есть располагает альтернативы в каком-то порядке. Кто-то упорядочивает их следующим образом:

$$(1) A > B > C.$$

Назовем это мнением (1). Априори возможны пять других мнений этого типа:

$$(2) A > C > B$$

$$(3) C > A > B$$

$$(4) C > B > A$$

$$(5) B > C > A$$

$$(6) B > A > C.$$

Предполагается, что члены собрания разделены на шесть категорий мнений, или партий, обозначенные проведенной выше нумерацией<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> К. Д. Эрроу упоминает «хорошо известный парадокс голосования», не ссылаясь на его предшествующие исследования. Он упоминает «Report on Methods of Election» Э. Д. Нансона и приписывает последнему открытие этого парадокса («Social Choice», p. 3, n. 3 and p. 95). Фактически Нансон опубликовал в «Transactions of the Royal Society of Victoria» (vol. 19, Melbourne, 1883) исследование, явно навеянное идеями Кондорсе и Борда, известными, без сомнения, благодаря работе Тодхантера «A History of the Mathematical Theory of Probability» (1865), в которой не прибавлено ничего нового к пониманию парадокса («эти результаты хорошо предложенного Кондорсе: «В этом случае (противоречивости) нет реального большинства, и мы не можем прийти ни к какому результату, не отбрасывая какое-нибудь одно из трех предложений. Кажется разумным, что то предложение, которое утверждается наименьшим большинством, должно быть отброшено» (*loc. cit.*, p. 213).

<sup>2</sup> Заметим, что нумерация категорий дана не случайно: между двумя смежными категориями разница меньше, чем между двумя более удаленными. Ясно, что цепь сама собой замыкается — (6) и (1) ее смежные звенья; категории можно разместить также по окружности.

Пусть  $N$  — общее число голосующих на собрании, а  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) — число голосующих в каждой из шести категорий. Следуя принципу Кондорсе, основа коллективного мнения должна быть определена путем разложения: сначала проверяем отношение собрания к  $A$  и  $B$ <sup>1</sup>. Шесть категорий распадаются на два класса:

$$(A > B) = (1) \text{ и } (2) \text{ и } (3)$$

$$(A < B) = (4) \text{ и } (5) \text{ и } (6).$$

Аналогично для других альтернатив:

$$(A > C) = (6) \text{ и } (1) \text{ и } (2)$$

$$(A < C) = (3) \text{ и } (4) \text{ и } (5)$$

$$(B > C) = (5) \text{ и } (6) \text{ и } (1)$$

$$(B < C) = (2) \text{ и } (3) \text{ и } (4).$$

Правило большинства используется для сравнения числа голосующих в двух противоположных классах.

Например, если

$$N_1 + N_2 + N_3 > N_4 + N_5 + N_6.$$

будем считать  $(A > B)$  коллективным суждением<sup>2</sup>.

Проблема заключается в нахождении случаев, когда три рассматриваемых коллективных суждения противоречивы, а также условий, при которых это произойдет.

Противоречивость имеет место, если  $(A > B)$ ,  $(B > C)$  и  $(C > A)$  или, наоборот, если  $(A < B)$ ,  $(B < C)$  и  $(C < A)$ . Первый случай встречается, если одновременно

$$N_1 + N_2 + N_3 > N_4 + N_5 + N_6$$

$$(i) \quad N_3 + N_4 + N_5 > N_6 + N_1 + N_2$$

$$N_5 + N_6 + N_1 > N_2 + N_3 + N_4.$$

Условия  $(i')$  для второго случая можно записать, если обратить все три неравенства  $(i)$ .

Соответственно выбрав численные значения  $N_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), всегда можно добиться выполнения условий  $(i')$ ; мы уже знаем из примера Кондорсе, что приме-

<sup>1</sup> Проверка осуществляется простым голосованием или по результатам предпочтения.

<sup>2</sup> Знак  $>$  используется здесь в его арифметическом значении «больше чем», в то время как в предыдущих рассуждениях он означает «предпочтительнее». Оба значения имеют одинаковую логическую структуру.



ние принципа разложения и принципа большинства может привести к противоречию. Подобных примеров можно привести сколько угодно. Часто приводится такой простой пример <sup>1</sup>: выбирая

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 = N_5 = 1, \\ N_2 &= N_4 = N_6 = 0, \end{aligned}$$

мы удовлетворяем условиям (i). Это собрание из трех человек, имеющих соответственно мнения (1), (3) и (5). Можно также выбрать  $N_1 = N_3 = N_5 > N_2 = N_4 = N_6$ .

Некоторые системы чисел  $N_k$ , то есть некоторые разбиения индивидов на шесть возможных категорий мнений, приводят к ситуации, рассмотренной Кондорсе. Следуя традициям естественных наук, условимся называть эти особые ситуации «эффектом Кондорсе». Можно поинтересоваться, не обладают ли эти разбиения, полученные при помощи неравенств (i) и (i'), некоторыми более интуитивными свойствами, чем это следует из их определения; хотелось бы знать, сколь часто встречается эффект Кондорсе. Пока не имеет значения, будет ли исследование собрания для выбора лучшего из трех предложенных решений эмпирическим или историческим; при существующем положении психосоциальные явления более запутанны, чем те, которые мы представляем; попытки обращения к документам могут дать только отдельные примеры <sup>2</sup> без обоснованного указания на их повторяемость. Можно, однако, воспользоваться традиционным методом табулирования всех возможных случаев с применением теории вероятностей. Говоря, что для игральной кости вероятность выпадения одного очка равна 1/6, мы только сравниваем грань с одним очком со множеством граней, то есть со множеством всех возможных случаев. Таким же образом следует рассматривать все возможные разбиения данного числа голосующих и определять долю тех, что приводят к эффекту Кондорсе. Результат может быть представлен в терминах теории вероятностей без ссылки на соответствующую игру <sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Позже мы выясним значимость этого примера.

<sup>2</sup> К. Д. Эрроу упоминает дебаты в конгрессе США по ассигнованиям на образование («Social Choice», р. 3, п. 3).

<sup>3</sup> Эта игра может состоять в подбрасывании игральной кости определенное число раз (N), запоминании числа полученных очков, представляющих мнение одного голосующего, и, наконец, находж-

Начнем с простейшего примера собрания из трех человек. Укажем три возможных случая: первый — все трое имеют одинаковое мнение; второй — все трое имеют различные мнения; третий — двое против одного. В первом случае (единогласия), очевидно, нет предмета для разговора, так как проблема баллотировки не возникает; в последнем случае большинство уже существует — эффекта Кондорсе нет; но во втором случае имеется три различных мнения, что может быть представлено несколькими способами.

Если три мнения таковы

$$(1) A > B > C$$

$$(2) A > C > B$$

$$(3) C > A > B,$$

то  $(A > B)$  принимается единогласно, а  $(A > C)$  и  $(C > B)$  — большинством. Эти три мнения не противоречивы и приводят нас к мнению (2) как к мнению большинства <sup>1</sup>.

Взяв (1), (2), (4), получим такое же заключение: (2) считается мнением большинства среди трех индивидуальных голосований. Но если тремя мнениями будут (1), (3), (5), три заключения противоречивы <sup>2</sup>, так же как в случае мнений (2), (4), (6). Можно проверить, будут ли группировки, ведущие к эффекту Кондорсе, единственными.

Для рассматриваемого случая (трех голосующих) можно удовлетвориться суммарной таблицей различных возможностей, но при увеличении числа голосующих такое перечисление будет все более громоздким. По этой причине выгоднее заменить качественное перечисление строго количественным.

Количественное перечисление необходимо стандартизировать некоторым образом: будем считать, например, что первый голосующий может выбрать одно из шести мнений, аналогично может поступить второй и третий, так что в результате получим  $6 \times 6 \times 6 = 216$  возможных вариантов.

---

дении результата голосования методом Кондорсе. Привычка статистиков ссылаться на такого типа игры, их специфическое почтение к вероятности приводят в замешательство начинающих.

<sup>1</sup> Промежуточное в круговом порядке.

<sup>2</sup> Этот пример уже упоминался.

Среди этих 216 вариантов 12 приводят к эффекту Кондорсе, что составляет менее 6 процентов<sup>1</sup>. Подробный расчет для всякого числа больше 3 легко провести обычным методом комбинаторного анализа. Можно заметить, что вычисленная доля медленно возрастает с увеличением числа голосующих:

3	голосующих . . .	5,6%
5	» . . .	7,0%
5	« . . .	7,8% и т. д.

Предельное значение близко к 9 процентам<sup>2</sup>.

Отсюда следует, что, не будучи редким, эффект Кондорсе представляет малую часть возможностей (6 — 9 процентов). Если он отмечается много чаще, чем раз из 10, в достаточно длинной последовательности наблюдений, мы можем предполагать существование причины, ориентирующей индивидуальные антагонистические мнения в наблюдаемом коллективе таким образом, что выявление истинного мнения большинства затрудняется.

Общий подход заключается в разложении каждого индивидуального мнения на простейшие суждения. Все нужное сделано, если мы определили мнение каждого с помощью трех вопросов, согласно таблице 1, в которой «+» и «—» означают «да» и «нет», то есть возможные ответы на вопросы  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Вопрос  $x$ , например, может быть сформулирован так: «Предпочитаете ли вы  $B$  по сравнению с  $C$ ?»

В этой таблице не упоминаются все возможные комбинации знаков + и —; два случая (+++) и (---), естественно, пропущены, поскольку эти две системы ответов не образуют мнения; они соответствуют трем противоречивым элементарным суждениям.

Как только это сделано и поскольку, согласно таблице, выяснено мнение каждого голосующего, можно построить таблицу результатов, записывая в трех столбцах —  $x$ ,  $y$  и  $z$  — знаки, соответствующие каждому голосованию.

<sup>1</sup> Эти 12 вариантов суть: (1) (3) (5); (1) (5) (3); (3) (1) (5); (3) (5) (1); (5) (1) (3); (5) (3) (1), и 6 аналогичных перестановок для (2) (4) и (6).

<sup>2</sup> Вычисление дает следующее значение:

$$1 - (3/\pi) \arccos (1/\sqrt{3}) = 0,0877.$$

	Вопросы			
	$x = (B > C?)$	$y = (C > A?)$	$z = (A > B?)$	
(1)	+	—	+	$\left. \begin{array}{l} A > B > C \\ A > C > B \\ C > A > B \\ C > B > A \\ B > C > A \\ B > A > C \end{array} \right\} \text{мнения}$
(2)	—	—	+	
(3)	—	+	+	
(4)	—	+	—	
(5)	+	+	—	
(6)	+	—	—	

Подсчитаем в каждом столбце число голосов «за» (+) и «против» (—) и сравним итоги, что эквивалентно алгебраическому сложению. Если результат положительный, значит, большинство «за»; если отрицательный — большинство «против».

Таблица результатов для нашего первого примера выглядит следующим образом:

Таблица 2

	$x$	$y$	$z$
(1)	0	0	0
(2)	—23	—23	+23
(3)	—2	+2	+2
(4)	—16	+16	—16
(5)	+19	+19	—19
(6)	0	0	0
Итого	—22	+14	—10
Мнение большинства	—	+	—

В заключение приписываем большинству мнение (—+—), то есть мнение (4), или  $(C > B > A)$ .

Для второго примера приводится таблица 3.

Результат не будет состоятельным мнением (эффект Кондорсе).

	$x$	$y$	$z$
(1)	+23	-23	+23
(2)	0	0	0
(3)	-10	+10	+10
(4)	-8	+8	-8
(5)	+17	+17	-17
(6)	+2	-2	-2
Итого	+24	+10	+6
Мнение большинства	+	+	+

В общем случае, если числа голосующих для шести мнений равны соответственно

$$N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 \text{ и } N_6,$$

вычисляем три алгебраические суммы:

$$x = N_1 - N_2 - N_3 - N_4 + N_5 + N_6,$$

$$y = -N_1 - N_2 + N_3 + N_4 + N_5 - N_6,$$

$$z = N_1 + N_2 + N_3 - N_4 - N_5 - N_6.$$

Эффект Кондорсе возникает, когда три числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  имеют один и тот же знак.

Теперь парадокс Кондорсе можно привести в алгебраической форме. Для этого достаточно представить каждое индивидуальное мнение последовательностью трех чисел, принимающих значение 1 или -1. Затем определяем закон композиции (или агрегирования), складывая по столбцам несколько мнений в одно и заменяя результат на 1 или -1 в зависимости от его знака.

Символически это можно записать:

$$\hat{x} = \text{Sgn } \Sigma (x_i),$$

$$\hat{y} = \text{Sgn } \Sigma (y_i),$$

$$\hat{z} = \text{Sgn } \Sigma (z_i),$$

где  $(x_i, y_i, z_i)$  — мнение индивида  $i$ ;  $z$  — сумма мнений всех индивидов в собрании;  $\text{sgn}$  — операция, состоящая



в замене каждого положительного числа на  $+1$ , а каждого отрицательного числа на  $-1$ ;  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  — результирующее мнение.

Эффект Кондорсе в основных чертах состоит в следующем. Определяем закон агрегирования множества объектов (триплеты из  $+1$  и  $-1$ ). Запрещение некоторых значений  $(-1, -1, -1)$  или  $(+1, +1, +1)$  для компонент-объектов не является достаточным условием отсутствия этих же значений в результирующем объекте, то есть непротиворечивость суждений в каждом индивидуальном мнении недостаточна для того, чтобы гарантировать аналогичную непротиворечивость результирующих суждений при применении правила большинства.

## ПАРАДОКС КЕТЛЕ

В эффекте Кондорсе можно увидеть явление более широкого порядка. Например, можно провести аналогию с очень известным парадоксом Кетле. Теоретический «средний человек» подвергался сильным нападкам на протяжении более чем столетия; но критики, прежде чем разработать техническую сторону вопроса, часто сами скатывались на почву социологии. Именно этим мы и будем преимущественно заниматься<sup>1</sup>. Еще в 1843 году Курно ясно сформулировал этот принцип<sup>2</sup>: «Когда к различным частям сложной системы применяют операцию определения среднего арифметического (усреднения), необходимо очень хорошо помнить, что эти средние значения могут быть несовместимы друг с другом, если для каждого из элементов взять его среднее значение, определенное отдельно; система может паходиться в запрещенном состоянии»<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Читателю, желающему более детально разобраться в этом вопросе, можно рекомендовать работу Фреше под названием «Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen» («Les Conférences du Palais de la Découverte», Paris, 1950, 24 pp.), представляющую собой также математические заметки о типичных элементах Фреше.

<sup>2</sup> Как во многих случаях, Д. Бертран полностью следует за текстом Курно, добавляя к его научному содержанию свой собственный живой стиль. В результате на Бертрана ссылаются чаще, чем на Курно.

<sup>3</sup> А. А. Cournot, Exposition de la théorie des chances, Paris, 1843, p. 213.

Этот хорошо известный математикам факт был отмечен Гассеом и Лапласом при разработке метода наименьших квадратов. Если измеряются некоторые взаимозависимые количества, поправки не могут быть независимыми. Курно предложил несколько простых примеров, решаемых методами треугольников.

Возьмем несколько прямоугольных треугольников и вычислим при помощи средних арифметических длины их сторон. Эти три средние могут быть использованы для построения нового треугольника, который можно назвать «усредненным», но который не будет прямоугольным. Вот численный пример, поражающий своей аналогией с парадоксом Кондорсе. Возьмем четыре прямоугольных треугольника и вычислим три средних значения для его сторон.

Таблица 4

	Первый катет	Второй катет	Гипотенуза
	5	12	13
	15	8	17
	3	4	5
	7	24	25
Сумма	30	48	60
Среднее арифметическое	$7\frac{1}{2}$	12	15

Треугольник, построенный на основе соотношения полученных сторон, не будет прямоугольным, поскольку по теореме Пифагора сумма квадратов катетов

$$(7\frac{1}{2})^2 + (12)^2 = 200\frac{1}{4},$$

а квадрат гипотенузы

$$(15)^2 = 225.$$

Комбинируя несколько объектов, каждый из которых обладает некоторым свойством, получим новый объект, не обладающий этим свойством.

Указанный принцип применим не только к прямоугольным треугольникам, но и к любым треугольникам вообще. Предположим, что мы измерили три стороны и три угла некоторых треугольников и нашли среднее арифметическое для каждого из шести элементов. Система из шести найденных чисел не может образовать треугольник, если только все треугольники не окажутся подобными. В последнем случае (подобном единогласному избранию) усредненный треугольник существует <sup>1</sup>.

«В общем случае не существует некоторого треугольника, которому соответствуют усредненные значения углов и сторон. Усреднение площадей не будет совпадать с площадью треугольника, построенного на средних значениях сторон, и т. д.... Таким образом, даже если известны размеры различных органов нескольких животных одного и того же вида, вполне возможно, что усредненные значения могут быть несовместны друг с другом и условиями существования вида. Мы остановились на этом очень тривиальном замечании, поскольку оно кажется забытым в работе <sup>2</sup>, очень ценной с другой точки зрения, где автор пытается определить и описать среднего человека системой средних арифметических, полученных измерением веса и других характеристик большого числа индивидов. Так определенный средний человек, далекий от того, чтобы быть прототипом вида, просто должен быть невозможным человеком, или по крайней мере ничто не позволяет нам считать его возможным» <sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup> Для прямоугольных треугольников можно определять квадратичные средние значения: парадокса не будет. Но для обычных (не прямоугольных) треугольников невозможно найти удовлетворительного способа. Здесь мы затрагиваем классическую теорию агрегирования в эконометрических моделях, очень близкую к изучаемой проблеме. Например, можно сравнить результаты А. Натафа («Econometrica», 1948, pp. 232—244) и М. Флеминга («Q.J. of Econ.», 1952, pp. 366—384). В них рассматривается такая же математическая структура.

<sup>2</sup> Возможно, имеется в виду книга Кетле, опубликованная в Париже в 1835 году под названием «Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de Physique Sociale». Но теоретический «средний человек» встречается уже в работе 1831 года «Recherches sur la loi de croissance de l'homme» (Nouveaux memoires de l'Acad. R. des Sc. et Belles-Lettres de Bruxelles, vol. VII, 1932).

<sup>3</sup> Cournot, Exposition de la théorie des chances, Paris, 1843, p. 214. Ср. изложение Курно со стилем Д. Бертрана «Calcul des Probabilités» (Paris, 1889, pp. 41-43).

С проблемой, поднятой Курно в связи с работой Кетле, имеет некоторые общие черты другая известная дискуссия. Изобретение книгопечатания очень глубоко изменило отношение человеческого сознания к написанному слову; возможно, под влиянием напечатанной Библии была осознана особая природа проблем, связанных с рукописными традициями. Различные доступные рукописи не всегда согласуются между собой. В середине XVI столетия некоторые ученые рекомендовали правила аутентичности, требовавшие учитывать общее согласие. Степень правоты измерялась числом доказательств. Появились издания, снабженные критическими комментариями, поднимавшие некоторые проблемы, очень близкие к статистическим. Наконец, в течение XIX столетия произошла полная трансформация сознания критиков. Это соответствовало стратегическому отступлению, приближающемуся к полному позитивизму, переоценке «субъективного» как объекта науки. Возникновение истинной науки о рукописях связано с именем Карла Лахмана; стало ясно, что начинать надо не со значимости суждений (авторитарности доказательств или их древности), а с определения их генеалогии и взаимных связей. Подобно тому как научная критика судебных решений привела к некоторым настолько чрезмерным пароксизмам, что они затем стали легкими целями для «утонченных умов» («subtle minds»), текстуальный анализ привел при соперничестве Кондорсе и Пуассона к обоснованию «геометрического способа», хорошо послужившему филологам. Помимо Лахмана, редактора Лукреция и греческого текста Нового завета (1831 г.), можно сослаться на мнение Дом Кентина, редактора латинской версии Книги бытия, писавшего в 1926 году: «Я не различаю ни общие ошибки или описки, ни хорошие или плохие обороты, но только различные формы текста... Метод основан на правильной статистике... Я классифицирую рукописи... В результате из этой классификации возникает критический канон, определяющий некоторое железное правило аутентичности текста...»<sup>1</sup>

Нетрудно предвидеть возражения: «Хоть и возможно рассчитывать движение машин, движения человеческой

---

<sup>1</sup> «Essais de critique textuelle» (Paris, 1926), p. 37.



души нельзя сводить к расчетам! Писатели не копируются машинами!» Вопрос, или проблема, Дом Кентина состояла в построении некой алгебры: раз уж голоса различных очевидцев подсчитаны и взвешены, окончательное решение принимается только их статистическим рассмотрением, без учета субъективных взглядов, содержащих систематическую ошибку. Это в точности проблема Кондорсе. Правда, для Кондорсе голосующие-современники — члены одного собрания и гипотетически полностью равноправны, в то время как рукописи могут быть совершенно разными в зависимости от их происхождения. Также не ясно, как должен осуществляться выбор между несколькими различными мнениями для каждой части текста и конструироваться абсолютно приемлемое правило, позволяющее опираться на разумное внутреннее убеждение. Повторное применение правила, каким бы оно ни было, не гарантирует непротиворечивости конечного результата. Множество предпочтений определяет действительное мнение, если только выполнены некоторые логические требования. Таким образом, как только реконструирован латинский или греческий текст, он должен показывать единство (правда, с трудом определяемое) словаря, синтаксиса, стиля и содержания.

В трех рассмотренных случаях проблема всегда заключается в комбинировании нескольких индивидуальных представлений в одно-единственное и проверке, удовлетворяет ли результат некоторым внутренним правилам непротиворечивости. Может быть рассмотрено много других примеров конфликта между внешним методом (комбинирующим голоса) и внутренней убежденностью (экзаменующей результат этого комбинирования); позже мы остановимся на некоторых из них.

На основе предыдущего можно сформулировать в общем виде логическую проблему. Необходимо, однако, отметить провокационный характер тезисов Кондорсе, Кетле, Дом Кентина и некоторых их последователей; чисто математически или логически проблема не поставлена. Естественно, предварительный логический анализ не позволяет делать какие-либо выводы, но так же очевидно, что полученные без него результаты необоснованны. Большинство их оппонентов допустили ту же ошибку. Осуждая данный подход, они не попытались сохранить его рациональные элементы. Пьер Ферма любил



повторять: «Multi pertransibunt, ut augeatur scientia»<sup>1</sup>. «Много надо перерыть земли, чтобы добыть немного золота», — как говорили древние.

## АССОЦИАТИВНЫЕ ОПЕРАЦИИ И СРЕДНИЕ

Идея закона композиции — одна из простейших в математике. Всякий раз, когда мы начинаем иметь дело с числами или измеримыми величинами, она выражается в конкретных и знакомых формах. Два простейших примера: сложение и умножение. Каждое расширение понятия числа требовало параллельного расширения операций. Скоро было замечено, что форма вычислений может оставаться той же самой, в то время как природа числовых объектов может меняться. Таким образом было установлено нечто вроде грамматики операций, часто называемой современной (или абстрактной) алгеброй. Эта грамматика возвратилась назад к ранней формальной логике с ее комбинаторными процедурами, для которых с самого начала было отмечено сходство с арифметическими процессами. Например, использование конъюнкций *и* и *или* совершенно аналогично использованию знаков  $+$  и  $-$ . Универсальная запись, стимулирующая прогресс арифметики так же, как и логики, является законом композиции, или операции. Рассмотрим множество не имеющих специфической природы объектов, находящихся в отношениях между собой, чтобы определить операционную, или «алгебраическую», структуру. Определение закона композиции, или операции, состоит в задании соответствия группе элементов, называемых аргументами (*terms*), одного-единственного элемента, называемого результатом. В большинстве областей применения, и в частности в интересующих нас областях (композиция голосов, суждений, рукописных списков и т. д.), требуется применять операции композиции к различному числу аргументов. Таким образом, операция сложения чисел или векторов позволяет вычислять

$$x_2 = a + b,$$

$$x_3 = a + b + c,$$

$$x_4 = a + b + c + d \text{ и т. д.}$$

---

<sup>1</sup> Его современник мог сказать: «Необходимо тщательно избегать бурной страсти и предубеждения».

Несмотря на некоторую аналогию, мы принимаем точку зрения, в корне отличную от определения функции нескольких переменных. Когда мы пишем  $x = f(a, b, c)$ , это указывает, что функция  $f$  требует трех, и только трех аргументов. Если мы используем функциональный язык, то можем сказать, что проблема заключается в определении полного набора таких функций:

$$x_2 = f_2(a, b),$$

$$x_3 = f_3(a, b, c),$$

$$x_4 = f_4(a, b, c, d) \text{ и т. д.}$$

Каждая функция задает закон композиции для конечного числа аргументов. Конечно, множество этих функций обладает известным единством; должно быть справедливым утверждение, что в определенном смысле закон композиции остается одним и тем же, в то время как число аргументов меняется.

Процессом, гарантирующим это единство, является наиболее часто используемый в абстрактной алгебре процесс рекурсии, определяющий  $f_3$  через  $f_2$ ,  $f_4$  через  $f_2$  и  $f_3$  и т. д. Например, если известно, как сложить два аргумента из некоторого множества, можно, не вводя новых определений, прибавить некоторое число аргументов путем повторения — операция сложения ассоциативна. Следует отметить, что в сложении различные аргументы играют одинаковую роль. В системах, где есть всеобщее избирательное право, все голосующие рассматриваются как равные и закон композиции голосов обладает таким же свойством общей симметрии, как обычное сложение. Но это полное безразличие к расположению слагаемых аргументов не всегда требуется. Полезно рассмотреть случаи, когда различные аргументы трактуются по-разному, каждый из них играет свою роль и не может меняться местами с другими<sup>1</sup>.

Для нашего исследования наиболее интересным случаем композиции является случай вычисления средних.

<sup>1</sup> Однако множество ситуаций с повторением некоторой бинарной операции почти всегда слишком велико, что заставляет ограничивать множество с помощью некоторого условия. Фактически эту роль играет аксиома ассоциативности, утверждающая

$$f_2(a, f_2(b, c)) = f_2(f_2(a, b), c) = f_3(a, b, c).$$

Современная алгебра, не очень отличающаяся от численных моделей, практически не рассматривает неассоциативные операции.

Это один из наиболее общих процессов статистики, выделяющий один типичный представительный объект из их множества. С алгебраической точки зрения <sup>1</sup> определения среднего арифметического, которая здесь принимается, можно записать

$$m_2 = \frac{a+b}{2}; \quad m_3 = \frac{a+b+c}{3} \text{ и т. д.,}$$

то есть сложить объекты  $a, b, c \dots$  и разделить сумму на их число.

Операция действительно ассоциативна, но этого можно не заметить, если предварительно не проверить. Вычислим среднее арифметическое для величин  $a, b, c, d, e$ . Правило ассоциативности позволяет действовать последовательно, например вычисляя сначала среднее от  $(a, b, c)$ , затем среднее от  $(d, e)$  и, наконец, среднее двух результатов. Таким образом,

$$x = \frac{a+b+c}{3}, \quad y = \frac{d+e}{2}.$$

Но ясно, что окончательное среднее арифметическое не равно  $(x+y)/2$ . Истинное среднее равняется  $(3x+2y)/5$ . Действительно, не существует невзвешенного среднего, а только равновзвешенные средние. В каждой применяемой операции подразумевается вес каждого из комбинируемых объектов. Предыдущий способ записи удобен в силу его привычности, но ошибочен.

Если мы запишем  $(a; p)$  для объекта  $a$  с весом  $p$  (являющимся числом), закон композиции примет вид

$$(a; p) + (b; q) = \left( \frac{ap+bq}{p+q}; p+q \right),$$

который в дополнение к арифметическому правилу вычисления среднего  $(ap+bq)/(p+q)$  указывает вес, представляющий собой сумму весов компонент и связанный с этим средним значением.

---

<sup>1</sup> С топологической точки зрения понятие средней достаточно подробно рассмотрено Фреме, см.: «Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié» («Annales de l'Institut Henri Poincaré», vol. X, fasc. 4, pp. 215—308, Paris, 1948); «Une propriété générale des valeurs typiques d'un nombre aléatoire» («Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris», vol. 1, fasc. 1, Paris, 1952, 47 pp.); «Les Conférences du Palais de la Découverte» (Paris, 1950, 24 pp.).

В данных обозначениях наш пример запишется как

$$(x; 3) = (a; 1) + (b; 1) + (c; 1)$$

$$(y; 2) = (d; 1) + (c; 1)$$

и общее среднее арифметическое  $(x; 3) + (y; 2) =$   
 $= \left( \frac{3x+2y}{5}; 5 \right).$

Таким образом, операция усреднения действительно ассоциативна. Она даже коммутативна, то есть, так же как сложение, полностью симметрична. Это не выполняется в случае достаточно общей процедуры, называемой определением медианы. Известно, что, для того чтобы определить медиану<sup>1</sup>, нет нужды знать, как складываются рассматриваемые статистикой объекты; достаточно знать, как проранжировать их с помощью «шкалы» или линейного упорядочения, чтобы можно было сказать, что один объект расположен между двумя другими. Поэтому операция определения медианы может быть использована в качественных исследованиях<sup>2</sup>. Если мы имеем частное множество упорядоченных объектов, мы называем вершину (элемент), делящую множество на две группы с равным числом объектов (или, более точно, с равным весом), медианой<sup>3</sup>.

Ясно, что (в противоположность вычислению среднего арифметического) определение медианы не может быть проведено последовательно. Если медиана группы из семи численных измерений (предположительно равновесных)  $x = 15$  и если медиана другой группы трех измерений  $y = 10$ , невозможно утверждать, до тех пор пока мы

---

<sup>1</sup> Слово «медиана» в указанном значении было введено Курно, см.: «Exposition de la théorie des chances», pp. 63, 120.

<sup>2</sup> Строго говоря, средние и медианы имеют не одну и ту же область применения. Чтобы рассматривать средние множества объектов, нужно иметь структуры типа векториальных (обладающих внутренним сложением и умножением посредством операторов, здесь веса являются обычными числами). Чтобы рассматривать медиану, множество должно иметь упорядоченную структуру. Множество вещественных чисел обладает обоими свойствами, так что можно говорить о среднем арифметическом и медиане и сравнивать эти два закона композиции, но это исключительный случай.

<sup>3</sup> Если число объектов в наборе нечетно, вершиной будет один из объектов набора; если число объектов четно — это интервал, который может содержать объекты множества, но может быть и пустым.



не имеем дополнительной информации, что медиана группы, образованной объединением десяти измерений, лежит между 10 и 15. Когда с прибавлением новых членов группа разрастается, мы начинаем все вычисления заново; операция не ассоциативна.

Третьей классической процедурой, ведущей к выбору типичного объекта, является определение моды. В наборе объектов, с которыми связаны веса (в статистике под весом понимается число наблюдаемых появлений), мода (также называемая доминантой или наиболее частым значением) представляет собой объект, имеющий наибольший вес<sup>1</sup>. Мода, конечно, соответствует правилу большинства; в этом случае объекты не должны складываться или даже быть упорядоченными.

Все эти три метода являются законами композиции, применение которых к объектам специфического типа ведет к результату того же типа. Они могут быть видоизменены; фактически понятие среднего было обобщено (квадратичное, геометрическое, гармоническое и т. д.). Заметим, что Кетле использовал средние арифметические.

Поскольку все еще можно относиться критически к определению медианы, для филологов, естественно, это вопрос более тонкий. Важное ограничение заключается в том, что списки не ранжируются в линейную последовательность, но объединяются, насколько возможно, в генеалогическое дерево. Все усилия направлены на нахождение источника или прототипа, и до сих пор это не выбор *промежуточной* ситуации, подобной медиане, а, скорее, выбор некоторой ситуации, определенной в более сложной структуре. Аналитическое изучение парадокса Кондорсе позволяет увидеть, как могут быть определены медианы на частично упорядоченных структурах различных типов.

Каждая операция задана на определенном множестве: результат операции имеет ту же природу, что и каждый из аргументов, он принадлежит множеству всех объектов рассматриваемой природы. Таким образом, суммой нескольких чисел является число; среднее арифметическое множества (взвешенных) чисел также является (взвешенным) числом. Но если мы ограничиваем каким-либо способом область изменения значений компонент, то не всегда

<sup>1</sup> Естественно, может быть более чем одна мода, если два веса равны, и больше, чем все остальные веса. Это порождает определенные трудности (аналогичные ничьей при голосовании).



справедливо то, что операция дает результат, принадлежащий новой, ограниченной области. Сумма нескольких целых чисел является целым числом, но их среднее арифметическое может и не быть целым. Будем говорить, что множество целых чисел замкнуто относительно сложения, но не относительно определения среднего арифметического.

Проблема, поставленная Курно в связи с теорией Кетле, заключается в следующем: при данном определении операции усреднения на заданном множестве объектов (треугольников, или других геометрических объектов, или даже, как хотел Кетле, численных характеристик людей) замкнуто ли это множество по отношению к операции или могут появляться внешние, невозможные и абсурдные объекты?

Парадокс Кондорсе состоит также в наблюдении, что определенная операция, примененная к некоторым объектам (индивидуальные мнения в форме суждений предпочтения), порождает объекты, не имеющие этой формы (множество несовместных суждений). В обоих случаях парадокс возникает из-за того, что оператор композиции определен математически на множестве, большем, чем множество, к которому он может быть эффективно применен. Среднее арифметическое у Кетле применимо ко всякой системе чисел, даже если они не описывают никакого реального объекта; подсчет голосов, рекомендованный Кондорсе, может быть сделан, даже если бюллетени выражают несостоятельные суждения. Как в одном, так и в другом случае типичный представительный объект не был получен прямым определением среднего арифметического или моды. В обоих случаях вначале проводился анализ каждого из объектов набора. Согласно Кетле, дескриптивная карта получается серией измерений, проводимых для каждого индивида в изучаемой популяции; первым шагом является антропометрия, сводящая наши знания в систему чисел, и для каждого «измерения», или «координат», получается среднее арифметическое. По Кондорсе, аналогичный принцип заставляет нас сводить мнение к серии суждений предпочтения; отвечая «да» или «нет» на набор вопросов для каждого из «измерений», устанавливается «воля большинства».

Общая форма, в которой рассматриваются парадоксы и проблемы «агрегирования», заключается в следующем.

Объекты, для которых мы пытаемся определить результат композиции, являются сложными объектами, образованными путем объединения нескольких компонент. Таким образом,  $(x, y, z \dots)$  — такой объект, который имеет компоненты  $x, y, z$  и т. д. Рассматривая популяцию  $(x_i, y_i, z_i \dots)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), определяем среднее, медиану, моду или некоторую другую операцию на комплексных объектах, выполняя отдельно такие операции на каждой из популяций компонент. Если различные компоненты имеют одинаковую природу (например, вещественные числа), вполне естественно применить одну и ту же операцию для каждой компоненты:

$$x = M(x_1, x_2, x_3 \dots)$$

$$y = M(y_1, y_2, y_3 \dots).$$

Но, возможно, в некоторых случаях более целесообразно выполнять одну операцию для  $x$  и другую для  $y$ .

В случае, когда все компоненты — числа (идеальный случай антропометрии Кетле), изучение таких операций на комплексах чисел является естественным расширением простейшей алгебры. Комплексный объект  $(x, y, z)$  может быть представлен точкой в соответствующем пространстве, и, если  $M$  представляет собой операцию нахождения среднего арифметического, точка  $(x, y, z)$  является центром тяжести совокупности данных точек<sup>1</sup>. Таким образом, вызванная парадоксами проблема заключается в следующем: всегда ли центр тяжести точек для данной части пространства, содержащего точки, представляющие действительные (или возможные) объекты, лежит в этой части пространства? Другими словами, замкнута ли относительно операций усреднений разрешенная область?<sup>2</sup>

Если в качестве объектов взять прямоугольные треугольники и в качестве координат — длины трех сторон, то всегда  $x^2 + y^2 = z^2$ . Разрешенной областью является поверхность конуса. Она не замкнута, центр тяжести любого множества лежит внутри конуса. Для операции получения медианы или какой-либо другой величины условия замкнутости могут быть рассмотрены подобным

<sup>1</sup> Кетле ссылался на «среднего человека» как на «центр тяжести», но для него слово «тяжесть» имело активное значение (притяжение).

<sup>2</sup> Выпуклая часть пространства составляет его замкнутую часть.

же образом, но мы не будем на этом останавливаться. Изучение качественных, а не количественных ситуаций позволит глубже проникнуть в природу данных проблем.

## ЛОГИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА

Как только мы объединяем, или агрегируем, несколько объектов в один и тот же вид, возникают проблемы абстрактной алгебры. Две основные характеристики алгебраического подхода были отмечены. С одной стороны, операция композиции является не просто сопоставлением, но сведением множества слагаемых объектов в один. Получаемый при этом результат имеет ту же природу, что и каждый из аргументов. С другой стороны, число слагаемых компонент должно быть неопределенным; операция позволяет компоновать некоторое произвольное число аргументов. Эти два аспекта представлены в проблеме голосования, где результат подобен индивидуальному мнению, а раз это постулировано, процедура была приспособлена к произвольному изменению числа поданных голосов. Но это не все. Как было показано Кондорсе, природа аргументов и результата предварительно строго не определена; кажется даже невозможным, кроме некоторых исключительных случаев, предугадать общий эффект выражения мнения голосующими. Наоборот, каждое индивидуальное мнение всегда можно рассматривать как систему суждений, определенное число простых предложений, то есть одобрений или отрицаний, согласия или несогласия. Все, что может сказать по данному предмету каждый член коллектива в момент баллотировки, представлено ответами «да» или «нет» на серии вопросов. Таким образом, общая схема будет следующей:

Таблица 5

Вопросы	Индивидуальные ответы				
	№ 1	№ 2	№ 3	...	...
a . . . . .	+	—	+	. . .	. . .
b . . . . .	+	+	—	. . .	. . .
c . . . . .	—	—	+	. . .	. . .
d . . . . .	—	+	+	. . .	. . .
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Но так как мы допускаем произвольное число индивидов и действуют твердые правила для всякого числа, количество элементарных вопросов вначале не должно фиксироваться. Таким образом, возникает алгебраическая, или комбинаторная, проблема. Для ее решения Кондорсе предлагает, во-первых, определить правило композиции для каждой серии простейших суждений, которое могло бы быть применено к каждой строке предыдущей таблицы, и, во-вторых, применять это правило ко всем строкам, вычисляя таким способом новый столбец, который будет считаться выражением коллективного мнения. Не вдаваясь в вопросы практических применений, допустим, что некоторые организации используют эту модель. Например, собрание или комитет часто успешно выражает свое мнение по нескольким вопросам<sup>1</sup>. Коллективный ответ на каждый вопрос определяется путем обсуждения голосований или чем-то похожим. Через некоторое время может обнаружиться, что различные решения логически взаимосвязаны и согласованы между собой. Фактически практика доказывает, что эта согласованность не всегда строгая. Но можно ли обвинять собрание в «противоречии себе»? Идея противоречия применяется к логике индивида. Какая логика (та ли самая?) проявляется в механизмах голосования?

Вначале рассмотрим, к чему ведет применение правила большинства. Как только каждое индивидуальное мнение разложено на простейшие элементы с помощью серии вопросов (столбцы предыдущей таблицы), отдельно рассматривается статистика по каждому измерению и мы запоминаем доминирующий ответ. Однако уже рассмотренный пример (стр. 197 и сл.), в котором элементарные вопросы были связаны с суждениями предпочтения, убеждает нас, что для каждого индивидуального мнения существуют определенные связи различных ответов. Очевидно, эта связь не является функциональной и не похожа на взаимозависимость, использованную Курно в его возражениях Кетле. В прямоугольном треугольнике три стороны взаимосвязаны, то есть каждая сторона является функцией двух других; знание двух сторон позволяет вычислить длину третьей стороны. Здесь дело в другом. Знание отве-

---

<sup>1</sup> Процедуры дизъюнкции, голосования по пунктам и т. д. принадлежат к тому же семейству.



той на два вопроса « $A > B$ ?» и « $B > C$ ?» не всегда позволяет предсказать ответ на третий вопрос « $C > A$ ?». Нельзя получить один и тот же ответ («да» или «нет») на все три вопроса. Взаимозависимость слагающих элементов или логическая состоятельность индивидуального мнения обнаруживается путем исключения некоторых последовательностей знаков (см. таблицу 1).

Общая логика предложений, развитие старой теории силлогизмов показывают, что проблема является универсальной. Логическое соотношение между несколькими данными может быть задано списком разрешенных и запрещенных последовательностей знаков<sup>1</sup>. Например, импликация « $A$  включает  $B$ » или, менее строго, «нет  $A$  без  $B$ » есть нечто иное, чем запрещение последовательности  $A = +, B = -$ .

Таким же образом конъюнкция « $A$  включает  $B$  и  $B$  включает  $C$ », образующая основу традиционного силлогизма, эквивалентна запрещению четырех последовательностей

$A \dots$	$+$	$+$	$-$	$+$
$B \dots$	$+$	$-$	$+$	$-$
$C \dots$	$-$	$+$	$-$	$-$

и допущению четырех других

$A \dots$	$+$	$-$	$-$	$-$
$B \dots$	$+$	$+$	$-$	$-$
$C \dots$	$+$	$+$	$+$	$-$

Следовательно, каждый раз, когда между несколькими вопросами возникает логическая связь, можно быть уверенным, что пропускаются определенные последовательности. Однако, как показывает пример Кондорсе, правило большинства может приводить к запрещенной последовательности. Легко видеть, что этого нет при двух предложениях, но может появиться, как только мы рассматриваем три не полностью независимых предложения<sup>2</sup>. Для простого анализа этой ситуации может быть использована

<sup>1</sup> См., например: J. Piaget, *Traité de logique* (Paris, 1949), p. 225; J. D o p p, *Leçons de logique formelle* (Louvain, 1950), II, vol. 1, p. 37.

<sup>2</sup> В смысле формальной логики три предложения независимы, если возможны априори восемь последовательностей.



геометрическая модель. Различные ответы на три вопроса схематически представлены восемью вершинами куба. Первый вопрос соответствует альтернативе между левой и правой; второй — между нижней и верхней; третий — между передней и задней гранями. Метод Кондорсе описания коллективного мнения состоит в рассмотрении противоположных граней и в выборе грани, имеющей большинство. Эффект состоит в следующем: возможно распределить популяцию на вершинах куба, оставив пустыми некоторые углы, так что три грани большинства встречаются на пустой вершине. Несмотря на большое число возможных случаев, все их можно свести к комбинациям ситуаций, аналогичных следующей.

Индивидуальное мнение	Результирующее мнение
++—	+
+—+	+
—++	+

Эта позиция легко получается, если мы начинаем с пустого угла и находим три вершины, примыкающие к нему; если в каждую из этих трех вершин поместить по одному индивиду, на каждой грани будет по два индивида (то есть большинство). Именно эта конфигурация мнений всегда приводится как пример парадокса голосования. Данный эффект может возникать для любого числа предложений больше двух. Он также может возникать для предложений, имеющих более чем два значения. Например, помимо ответов «да» и «нет», возможным ответом является безразличие<sup>1</sup>.

Можно подвести некоторый итог. Если индивидуальные мнения представлены элементарными суждениями или ответами на серию вопросов и если мы определяем доминирующий ответ для каждого вопроса отдельно, система доминирующих ответов может быть не представленной в популяции и даже противоречить некоторому общему критерию согласованности.

Поскольку эти случайности (главным образом вторая) будут рассматриваться как серьезные недостатки, необ-

<sup>1</sup> Следует, однако, тщательно различать эквивалентность и безразличие. Пустой бюллетень может означать или «нет мнения», или «два предложенных решения имеют одинаковую ценность».

ходимо предотвратить возможность возникновения эффекта Кондорсе. Первое направление исследований сводится к тому, что эффект Кондорсе может быть получен только при определенном распределении индивидуальных мнений, но эксперимент доказывает, что это распределение (которое может быть названо мнением в единственном числе) не принадлежит ни к какому особому типу. Существуют индивидуальные взаимосвязи, составляющие в действительности объекты изучения социологии мнений. Если все мнения подобны (единогласие), это не опасно. Мы приходим к представлению, что распределения, приводящие к эффекту Кондорсе, наиболее далеки от единогласия, а сам по себе эффект Кондорсе может рассматриваться как патологический симптом необычайно глубокого заболевания социального органа. Смешно пытаться исправлять это зло усложнением избирательной системы. Эта болезнь должна быть предотвращена прежде, чем она проявит себя при голосовании. Подход Кондорсе к рассмотрению этой проблемы<sup>1</sup> не отличается от того, что мы только что описали в общих чертах; это напоминает теорию общего интереса Руссо.

Необходимо отметить, что, хотя с политической и социальной точки зрения такие взгляды закономерны, они затушевывают фундаментальную логическую проблему. Мы видели, что применение закона большинства к множеству мнений, каждое из которых состоит из суждений предпочтения, может приводить к противоречиям. Посмотрим, не присуща ли рассматривавшейся здесь популяции, помимо соответствия общим логическим требованиям<sup>2</sup>, определенная общность взглядов, которая, не будучи единогласием, обеспечивает в то же время малую вероятность эффекта Кондорсе. Мы знаем роль логических связей между компонентами индивидуального мнения. Вопрос заключается в рассмотрении роли связей между индивидуальными мнениями, и в частности, не могут ли эти новые связи, по крайней мере в определенных случаях,

---

<sup>1</sup> Конечно, такой способ рассуждений был осмеян. Те же, кто ставил в вину Кондорсе применение математики<sup>3</sup> в политических и социальных вопросах, сейчас упрекают его в недостаточном использовании математики в выводах.

<sup>2</sup> Отсутствие определенной длины цикла ( $A > B, B > C \dots \dots Z > A$ ).

уменьшить возмущающее влияние первых. Начнем с примера.

Предположим, что собрание обсуждает не различные предложения некоторого типа, а выбор числа, например величину кредита, затрат, продажной цены, налога и т. п. Весьма вероятно, что индивидуальные мнения будут иметь нечто общее. Если имеется три альтернативы — малая, средняя и большая цифры, скажем  $A = 1000$ ,  $B = 1500$  и  $C = 2000$ , — голосующие, естественно, будут разделены на три класса:

- |     |     |         |              |         |           |
|-----|-----|---------|--------------|---------|-----------|
| (a) | те, | которые | предпочитают | малую   | величину, |
| (b) | »   | »       | »            | среднюю | »         |
| (c) | »   | »       | »            | большую | »         |

Хотя можно четко подразделить класс (b) соответственно тому, считается ли кем-то из (b)  $A$  лучше  $C$  или, наоборот, сомнительно, найдутся ли люди, предпочитающие  $A$  и полагающие, что  $C$  лучше, чем  $B$ . Таким образом, мы можем подойти (по крайней мере в определенных случаях) к исключению некоторых порядков предпочтения, то есть предположить, что субъективные индивидуальные мнения связаны с естественным и объективным порядком предложенных цифр.

Такие же рассуждения будут появляться каждый раз, когда предложенные для рассмотрения альтернативы обладают объективным порядком. Если бы была четвертая альтернатива  $D = 3000$ , возможны следующие порядки:

$$\begin{array}{l|l}
 A > B > C > D & D > C > B > A \\
 B > A > C > D & C > B > A > D \\
 B > C > A > D & C > B > D > A \\
 B > C > D > A & C > D > B > A.
 \end{array}$$

Другие порядки, такие, как  $B > A > D > C$ , могут быть исключены посредством следующего рассуждения:  $B$  предпочтительнее всякой другой альтернативы,  $C$  ближе к  $B$ , чем к  $D$ , так что  $C$  должно быть предпочтительнее  $D$ . Очевидно, что из объективного порядка следуют не субъективные порядки предпочтения, а, скорее, определенные правила близости.

Рассмотрим общий случай, обозначая альтернативы буквами  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ , так что объективный порядок соответствует алфавиту. Каждое мнение пред-

ставлено комплексом простых суждений  $A < D, B < F, \dots$ , но допустим, что эти простейшие суждения не являются полностью независимыми. Они не только должны следовать общей логике предпочтений, но и допускать логическое упорядочение. Когда мнения содержат суждение  $D < K$ , это указывает, что данное мнение считает оптимальным суждение между  $D$  и  $K$ , или  $K$ , или за  $K$ . В результате все альтернативы, предшествующие (объективно)  $P$ , должны полагаться худшими (субъективно), чем все предшествующие  $K$ :

$$\begin{array}{l} C < K \quad B < K \quad A < K \\ D < J \quad C < J \quad B < J \quad A < J \\ D < I \quad C < I \quad B < I \quad A < I \text{ и т. д.} \end{array}$$

Таким образом, как только допускается суждение, образующее объективный порядок  $H > M$ , оно указывает, что оптимум предшествует  $M$ , и как следствие мы получим:

$$\begin{array}{l} H > M \quad H > O \quad H > P \\ I > M \quad I > N \quad I > O \quad I > P \\ J > M \quad J > N \quad J > O \quad J > P \text{ и т. д.} \end{array}$$

Наблюдения заставляют обратить внимание на один вид иерархии суждений — одно суждение доминирует над несколькими другими. Эту подчиненность легко изобразить в виде упорядоченной сети<sup>1</sup>, имеющей форму треугольной таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} (A < B) & \leftarrow & (A < C) & \leftarrow & (A < D) & \leftarrow & (A < E) & \leftarrow & (A < F) & \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & (B < C) & \leftarrow & (B < D) & \leftarrow & (B < E) & \leftarrow & (B < F) & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & (C < D) & \leftarrow & (C < E) & \leftarrow & (C < F) & \dots \\ & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & (D < E) & \leftarrow & (D < F) & \dots \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & (E < F) & \dots \end{array}$$

<sup>1</sup> Такая частично упорядоченная структура называется «решеткой». См.: V. G l i v e n k o, *Théorie générale des structures* (Paris, Hermann, 1938); «Actualités scientifiques», № 652, 54 pp.; H. B. C u r r y, *Leçons de logique algébrique* (Paris and Louvain, 1952, 163 pp).



Заметим, что принятие какого-либо из этих суждений предполагает принятие всех «следствий», расположенных в той же самой строке левее или в том же самом столбце выше, то есть всех следствий, расположенных левее и выше. Аналогично отрицание некоторого суждения в предыдущей таблице влечет за собой отрицание всех «причин», расположенных правее и ниже.

Если принятие (суждения) указывается знаком плюс, а отрицание — знаком минус, полное мнение некоторого индивида может быть представлено в виде следующей таблицы:

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	...
<i>A</i>	+	+	+	+	+	—	
<i>B</i>		+	+	+	—	—	
<i>C</i>			+	+	—	—	
<i>D</i>				—	—	—	
<i>E</i>					—	—	
<i>F</i>						—	
...							...

В ней имеются две различные области: одна, содержащая знаки плюс, другая — знаки минус, которые могут быть отделены границей. Эта граница представляется следующим символическим образом: все ребра, пересекающие границу, проходят от области плюсов к области минусов <sup>1</sup>.

Рассмотрим, как в процессе применения правила большинства к каждому из слагаемых суждений несколько мнений такого типа могут порождать коллективное мнение.

<sup>1</sup> Таким образом, знак плюс в приведенной выше таблице указывает, что альтернатива по столбцу предпочтительнее альтернатив по строке для индивида, чье мнение представляет таблица, в то время как знак минус означает противоположное предпочтение. Предполагаемый объективный порядок альтернатив и предположений о поведении каждого из отвечающих гарантирует, что знаки выше или левее знака плюс будут плюсами, в то время как знаки ниже или правее знака минус — минусами. Следующим шагом является рассмотрение агрегирования мнений нескольких индивидов, имеющих различные области знаков плюс и минус.— *Прим. ред. англ. текста.*



Достаточно совместить несколько таблиц и подсчитать голоса. Возьмем для примера простейший случай трех голосующих. Три границы могут не пересекаться между собой.

	I	II	III	
	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i> <i>E</i>	<i>F</i> и т. д.
<i>A</i>	+	+	+	—
	+	+	—	—
	+	—	—	—
<i>B</i>		+	+	—
		+	—	—
		—	—	—
<i>C</i>			+	—
			—	—
			—	—
<i>D</i>			—	—
			—	—
			—	—
и т. д.				

Таким образом, определены четыре области. В первой наблюдается единогласие (три знака плюс), во второй — большинство плюсов, в третьей — большинство минусов и в четвертой единогласие <sup>1</sup>.

Если принят закон большинства, установим знак плюс в первых двух областях и знак минус — в последних двух.

Окончательно закон большинства обязывает нас принять промежуточное мнение, представленное границей II, а именно  $C > B > A > D > E > F$  и т. д.

Таким образом, мы получили два важных результата: во-первых, закон большинства приводит к принятию множества суждений столь же непротиворечивых, как и компоненты каждого индивидуального мнения; и, во-вторых, этот же самый закон допускает определение «медианы»,

<sup>1</sup> Три знака в каждой ячейке этой таблицы указывают мнение каждого из трех голосующих. Например,  $\pm$  в строке *A* и столбце *D* указывают, что для голосующего номер один *D* предпочтительнее *A*, в то время как для голосующих номер два и три *A* предпочтительнее *D*. — Прим. ред. англ. текста.

или «промежуточного» мнения, как коллективного мнения. Нетрудно показать, что ситуация не меняется, если мы komponуем пять, семь или любое нечетное число индивидуальных мнений. Для четных чисел может оказаться, что существует баланс голосов «за» (+) и «против» (—). Но какое бы ни принималось решение при рассмотрении этих неприятных случаев<sup>1</sup>, результат всегда тот же: он еще называется *мнением* в силу непротиворечивости слагающих его элементов и *промежуточным* в силу его расположения. Из данного рассмотрения<sup>2</sup> следует заключение об отсутствии эффекта Кондорсе. Если в указанном значении индивидуальные мнения относятся к одному и тому же объективному порядку, закон композиции на основе большинства приведет к мнению, имеющему такую же форму. Множество рассматриваемых мнений замкнуто относительно принятого закона композиции; здесь нет риска выйти за пределы этого множества.

Точно так же важно второе заключение. В чем же причина исчезновения эффекта Кондорсе? Название «медиана», или «промежуточное мнение», представляется естественным, поскольку множество изученных нами мнений обладает известным порядком, по крайней мере частичным, который является прямым следствием частичной упорядоченности в множестве слагаемых суждений и символизируется показанной ранее треугольной сетью (решеткой) (стр. 222).

Кратко опишем структуру, превалирующую в множестве допускаемых мнений. Во-первых, имеется два экстремальных мнения<sup>3</sup>: алфавитный порядок *ABCDE* и обратный ему *EDCBA*.

Взяв, например, *CBDAE*, можно построить мнение, промежуточное между данным и одним из двух экстремальных. Например, *ABCDE* допускает все элементарные

<sup>1</sup> Например, решающий голос президента или другое аналогичное правило.

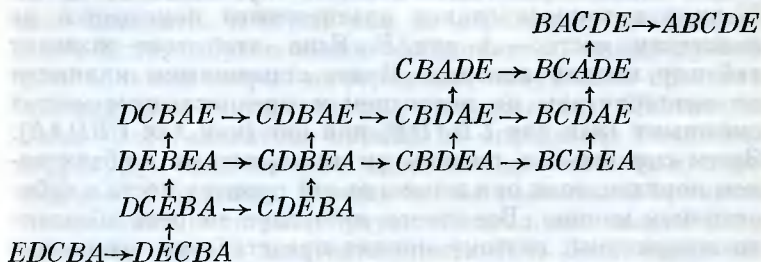
<sup>2</sup> Этот результат был получен Дунканом Блеком («Econometrica», 16, 1948, 245—261). Более глубокий анализ можно найти в: D. Black and R. A. Newing, Committee Decisions (London, Hodge, 1952, p. 59); см. также: K. J. Arrow, Social Choice, pp. 6, 75—80.

<sup>3</sup> Ограничимся рассмотрением явления на примере выбора между пятью альтернативами *A, B, C, D* и *E*. Тем не менее выводы получаются общие.

суждения, а  $CBDAE$  допускает только  
 $AE, BD, BE, CD, CE, DE$

и отрицает все остальные.

Мнение  $BCADE$  будет промежуточным, поскольку оно допускает больше, чем  $CBDAE$ , и меньше, чем  $ABCDE$ . Эти различные типы отношений могут быть изображены посредством ориентированной сети, на которой мы проверим, что  $BCDAE$  действительно лежит на одном из путей, ведущих от  $CBDAE$  к  $ABCDE$ .



Используя схему, можно следующим образом интерпретировать построение коллективных мнений, основанных на некоторых данных индивидуальных мнениях. Если различные индивидуальные мнения расположены в одной и той же цепи, удовлетворительно обычное определение медианы; в других случаях это обобщенная медиана.

Теперь мы знаем, что имеется два случая, когда не возникает эффект Кондорсе, а применение закона большинства не ведет к абсурду.

Первый случай, когда нет невозможных априори комбинаций согласий и отрицаний элементарных предложений. Если все комбинации плюсов и минусов имеют значение, очевидно, что результирующее мнение будет приемлемым. Пример, который мы только что рассмотрели, относится ко второму случаю, когда индивидуальные мнения ограничены множеством предпочтений, которое было определено ссылкой на «объективное» существование. Чтобы определить, что множество замкнуто, достаточно, как мы видели, установить, что это множество упорядочено и закон большинства эквивалентен выбору промежуточного мнения. В действительности эти два случая очень похожи, несмотря на различие формулировок. Первый может быть представлен в форме второго, и наоборот.

Начнем с представления второго случая в форме, аналогичной первому. Возьмем снова пример пяти альтернатив  $A, B, C, D, E$ . Здесь мнение состоит из порядка предпочтения, установленного для альтернатив, но не любого порядка; мы предположили, что субъективные предпочтения подчиняются некоторому объективному порядку и что имеется только 16 возможных порядков (порядки сети на стр. 226)<sup>1</sup>. Чтобы узнать мнение, не нужно задавать все вопросы « $A > B?$ », « $A > C?$ » . . . « $D > E?$ ». Существует более экономичный путь проведения опроса. Начнем с вопроса, какая альтернатива помещается на последнем месте —  $A$  или  $E$ . Ясно, что ответ разделит таблицу мнений пополам. Далее спрашиваем, являются ли альтернативы на последнем и предпоследнем местах смежными (как для  $CBADE$ ) или нет (как для  $CBDAE$ ). Затем спрашиваем, смежны ли альтернативы в объективном порядке, если они занимают два средних места в субъективном мнении. Все ответы на четыре вопроса абсолютно независимы; поэтому мнения представлены всеми возможными комбинациями «да» и «нет». Перед нами та же форма, что и в первом случае.

Наоборот, первый случай (ответы полностью независимые) может быть представлен в форме второго (упорядоченная система мнений). Множество всех полученных мнений может быть упорядочено расстановкой знаков плюс и минус всеми возможными способами. Начнем с выбора двух экстремальных мнений, которые назовем соответственно «первым» и «последним». Достаточно, чтобы они были противоположны, например если первое мнение такое, что на все вопросы ответили «нет», последнее будет состоять из ответов «да» на все вопросы. Проходя от первого к последнему, мы можем построить различные цепи, или последовательности, мнений, причем каждое мнение будет получено из предыдущего «ступенькой», путем замены «нет» на «да».

Первое . . . . .	— — — — —
Промежуточное . . . . .	{ — + — — — — + — + —
Последнее . . . . .	
	+ + + + +

<sup>1</sup> В общем случае для  $n$  альтернатив будет  $2n - 1$  допустимых порядков.



Для двух элементов такой цепи можно говорить о причинах и следствиях; результат снова является ориентированной сетью. Таким образом мы установим причины феномена Кондорсе. Система приемлемых мнений должна обладать некой внутренней непротиворечивостью, связанной с двумя понятиями порядка и полноты. Нет необходимости дальше развивать алгебраические методы <sup>1</sup>, но следует подчеркнуть значимость фундаментальной логики.

Кондорсе утверждает, что правило большинства кажется подходящим при статистическом определении типичного элемента, который сам по себе имеет наибольший вес <sup>2</sup>. Если выбрано мнение большинства, можно пренебречь большей частью информации, полученной при голосовании (или статистическом исследовании). Фактически очень часто «палитра» мнений не определяет полностью структуру: кажется, что одно мнение более или менее «близко» к другому. Почему мы не распознаем элементы голосования, которые, будучи общими для мнений меньшинства, могут в действительности быть более важными, чем только рассматриваемое мнение большинства? Полная проблема состоит в рассмотрении того, что мы условно называли структурой «палитры» мнений. Интересно видеть, что анализ любого мнения, как ответов «да» и «нет» на ряд вопросов с последующим принятием мнения, построенного из ответов большинства, приводит нас к определению этой структуры как частично упорядоченной и пониманию того, что окончательно принимаемое коллективное мнение является обобщением медианы полностью упорядоченного линейного множества.

Если элементарные вопросы независимы, возможна любая комбинация ответов: множество всех комбинаций упорядочено, но если часть этого множества запрещена (в силу критерия внутренней непротиворечивости), то оставшаяся часть обладает структурой того же самого типа — все возможные случаи могут быть предсказаны рассмотрением этих частей, имеющих структуру, аналогичную полной.

---

<sup>1</sup> Необходимо ясно представлять отношение между структурами «решетки» и «упорядоченными» структурами.

<sup>2</sup> Другое понимание *моды*, максимальной плотности вероятности связано с совершенно отличной логикой. Чтобы говорить о плотности, распределение должно иметь определенную внутреннюю состоятельность.



Определенная внутренняя гармония возможных ответов является общей формой условий, наложенных для того, чтобы ряд решений, принятых большинством голосов, сформулировал единственное непротиворечивое мнение. Нужно отметить, что голосование и правило большинства часто используются для разрешения конфликтов слишком глубоких, чтобы зависеть от этой процедуры. Исследуя более подробно голосование, мы должны, исходя из большинства, сделать некоторые выводы, являющиеся «более или менее строгими». Дело не в силе чисел, придающих больший или меньший вес проголосованному решению, а в вопросе, покажет ли голосование малую разницу индивидуальных мнений. Тогда мы достаточно близки к идеальным условиям, допускающим применение правила большинства. В первую очередь голосование выступает как проверка степени единства выборного органа.

Между прочим, можно отметить, что обычный язык не адекватно отражает поднимаемые здесь вопросы; можно было бы сказать, и время от времени так и говорят, что ряд решений, принимаемых большинством голосующих, не может ясно представлять истинное коллективное мнение, если индивидуальное мнение слишком сильно отличается: для того чтобы агрегирование было допустимым, различие мнений не должно быть слишком большим. Но это неправильная точка зрения: если различие максимально, если допустимы все комбинации «да» и «нет», тогда закон большинства правильно определяет среднее мнение<sup>1</sup>. Но если появляется разрыв, если некоторое мнение запрещено, тогда терпит поражение вся логика; и, если мы хотим спасти положение, необходимо еще больше ограничить разнообразие мнений до тех пор, пока оно не примет устойчивую форму. Таким образом, вопрос не в величине идеальной популяции возможных мнений. Чтобы узнать, является ли популяция устойчивой, есть ли в этом смысл, мы не должны обращать внимание, большая она или нет, — мы должны найти ее формы и выяснить, обладают ли они свойствами устойчивости (замкнуты ли они). Эти формы являются множествами, каждое из которых отделено от другого большим разрывом. Невозможно идти от одного к другому по ряду устойчивых

---

<sup>1</sup> В рассматривавшемся смысле.

положений, но мы должны «перепрыгнуть» от одного к другому. Мы имеем в действительности случай нарушения непрерывности<sup>1</sup>, то есть квантованность, используя современный жаргон. Тем самым показан особый характер проблемы. В наши дни это названо «алгебраическим» подходом, под которым понимается изучение операциональной и комбинаторной структуры.

## ЧТО ТАКОЕ БОЛЬШИНСТВО?

Предыдущий анализ указывает, что требуется для применения правила большинства без опасности противоречия. Когда мнения расположены в порядке предпочтения, такая опасность существует, если предпочтения произвольны, но она исчезает, если предпочтения связаны с универсальным объективным порядком. Однако можно поставить вопрос шире. Например, не можем ли мы в случае предпочтений, не ограничиваясь правилом большинства, найти закон композиции индивидуальных мнений, который всегда дает допустимый результат? Другими словами, если существует опасность противоречия, почему в первую очередь ссылаются на разнородность индивидуальных мнений, а не на правило большинства?

Мы видели, что можно рассматривать противоречия, вскрытые эффектом Кондорсе, как симптомы заболевания социального органа, делающие невозможным формирование устойчивого коллективного мнения. Но можно сказать, что это инструмент, используемый для обнаружения слишком проблематичного коллективного мнения. При замене правила большинства более детальной проверкой мнений, возможно, появится непротиворечивое результирующее мнение. *Non numerentur sed ponderentur*, говорится по поводу отыскания веских доказательств;

---

<sup>1</sup> Здесь более подходящее название «гармония» и гамма его значений. «Распределение цветов... системы... завершает проблему... замкнутой группой соотношений, имеющей свою собственную логику, свои собственные операции... это целое, которое может существовать самостоятельно...» Этот отрывок и многие другие из работ Валери пробуждают интерес к науке, так скучно названной алгеброй (P. Valéry, *Lettres à quelques-uns*, Paris, N.R.F., 1952, p. 142). Желательно также прочесть известную работу Вейля «Симметрия» («Symmetry», Princeton Univ. Press, 1952, 168 pp.). Есть русский перевод: Герман Вейль, Симметрия, М. 1968.

требуется не формальное применение современной статистики, а «взвешивание» [pesée], которое тоже является «обдумыванием» [pensée], качественной и персональной оценкой.

Необходимо рассмотреть, могут ли быть построены другие законы композиции индивидуальных мнений таким образом, чтобы избежать эффекта Кондорсе.

Хотя в формальной логике проводились некоторые исследования по этой фундаментальной проблеме, неосознанно готовился полезный материал; первые результаты, кажется, были получены в работах экономистов по теории общего интереса. Эрроу внес большой вклад в постановку и описание этой логической проблемы<sup>1</sup>.

Рассмотрим множество индивидов, которых мы по-прежнему будем называть голосующими, поскольку пытаемся выяснить их желания, задавая каждому из них ряд вопросов. Ответы всех голосующих на все вопросы могут быть представлены в виде прямоугольной таблицы, где строка соответствует вопросу, а столбец — индивиду.

Для каждой строки или вопроса строим глобальный ответ. Множество глобальных ответов будет определять результирующее мнение. Теперь необходимо изучить различные возможные пути агрегирования. Вопрос, который нас особенно интересует, заключается в следующем. Предполагая, что все индивидуальные мнения подчиняются некоторым логическим ограничениям — то есть комбинации ответов никогда не появляются ни в каком столбце, — возможно ли появление этих запрещенных (или «абсурдных») комбинаций в качестве результирующего мнения, как это происходит, согласно Кондорсе, с правилом большинства? Или, наоборот, нет ли правил, способных избавить нас от абсурда?

Эрроу доказал очень важную теорему отсутствия приемлемого правила композиции мнений предпочтения при определенном (достаточно широком) способе выбора. Мы далее снова вернемся к полученному результату. Содержание и доказательство теоремы даны ее автором в форме отрицания. Трудно утверждать о некотором неопределенном правиле, что в конечном счете будет доказана его неосуществимость. Приведение к абсурду, которым

---

<sup>1</sup> Как только логическая проблема решена, это может подготовить почву для экономического анализа.

иногда пользуются, не является наиболее сильным методом математической логики.

В дальнейшем будет использован «конструктивный» стиль, не избегающий усложнений в изложении идей, но зато гарантирующий понимание.

Исследуем метод *построения* правила композиции. Такое правило позволит прийти к «глобальному» мнению во всех случаях, если известно индивидуальное мнение. Это правило гарантирует также отсутствие противоречий в глобальном мнении.

Если индивидуальные ответы на вопросы известны, возможно «вычисление» глобального мнения. Если на вопрос  $A$  ответом индивида  $i$  было  $a_i$ , глобальное мнение  $\hat{a}$  будет определено различными  $a_i$ :

$$\hat{a} = R_A(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Рассмотрим случай (к которому могут быть сведены все остальные), когда ответами будут только «да» или «нет». Тогда правило  $R_A$  заключается в определении того, какое  $\hat{a}$  получается для каждой комбинации знаков  $a_i$ . Для двух индивидов правило  $R_A$  может быть записано в табличной форме

$$a_1 = + \quad a_1 = -$$

$a_2 = +$		
$a_2 = -$		

В каждой из четырех клеток запишем значение  $\hat{a}$ , представляющее множество  $(a_1, a_2)$ . Рассмотрим все возможные альтернативы, все воображаемые правила  $R_A$ . Имеется  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  способов заполнения четырех клеток знаками плюс и минус и, таким образом, 16 возможных правил для двух индивидов. Их перечисление весьма просто. Запишем последовательность четырех значений  $\hat{a}$  в следующем порядке.

1	3
2	4

Таким образом, символ  $(+ - + -)$  обозначает:

$$R(+ +) = +$$

$$R(+ -) = -$$



$$R(-+) = +$$

$$R(--)= -$$

Приведем полный список воображаемых правил:

- |              |               |               |
|--------------|---------------|---------------|
| 1. (+ + + +) | 7. (+ - - +)  | 13. (- - + +) |
| 2. (+ + + -) | 8. (+ - - -)  | 14. (- - + -) |
| 3. (+ + - +) | 9. (- + + +)  | 15. (- - - +) |
| 4. (+ + - -) | 10. (- + + -) | 16. (- - - -) |
| 5. (+ - + +) | 11. (- + - +) |               |
| 6. (+ - + -) | 12. (- + - -) |               |

Рассмотрим эти способы компоновки двух ответов, данных двумя индивидами. Правила 1 и 16 предполагают ответы априори. Правило 4 принимает точку зрения первого голосующего, правило 6 — точку зрения второго; правила 13 и 11 противоположны правилам 4 и 6 соответственно. Правило 7 состоит в ответе «да», когда два голосующих согласны, и «нет» в противном случае; 10 противоположно 7 и т. д. Как только выявлены все 16 правил для двух голосующих, переходим к случаю трех голосующих. Теперь каждое правило представляет функцию трех индивидуальных ответов:

$$\hat{a} = R(a_1, a_2, a_3).$$

Поэтому здесь проверяется восемь знаков. Мы рассматриваем их в произвольном порядке.

$a_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
$a_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
$a_3$	+	-	+	-	+	-	+	-

Каждое правило полностью определено последовательностью восьми знаков. Например, в соответствии с этим условием правило большинства выражается последовательностью (+ + + - + - - -).

Аналогично правило, принимающее во внимание только мнение первого голосующего, если его бюллетень положителен, и использующее в других случаях бюллетень второго голосующего (воображаемый пример), обозначается последовательностью (+ + + + + + - -).

Чтобы перечислить все возможные априори правила, необходимо образовать все возможные комбинации восьми знаков плюс или минус; их имеется  $2^8 = 256$ . Составление полного списка является весьма трудоемким делом,



а интерпретация каждого правила слишком долгой<sup>1</sup>. Таких правил должно быть около 65 000 для четырех голосующих. Даже если у нас хватит терпения составить полный список<sup>2</sup>, мы должны поразмыслить, как его использовать, не говоря уже о  $4 \cdot 10^6$  случаях для пяти голосующих<sup>3</sup>. Будем реалистами, учтем, что пять — это еще очень маленькое число голосующих!

Полное перечисление невозможно проделать. Так или иначе, мы бы хотели узнать, существует ли какое-либо привилегированное правило среди этого гигантского количества, которое не приводит к противоречиям. Конечно, было бы лучше рассмотреть их все.

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Предположим, мы выбрали правило композиции ответов большого числа голосующих. Тогда наш список примет вид

$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_i$	...	$x_n$	$\hat{x}$
+	+	—		+		—	+
—	+	+		—		—	—

Обозначим каждую строчку через  $x$ , множество индивидуальных ответов —  $x_i$ , ведущих к глобальному ответу  $\hat{x}$ , предписанному правилом. Запишем:

$$\hat{x} = R(x) = R(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Зададим два вопроса  $A$  и  $B$ . Получим две баллотиров-

<sup>1</sup> Для этого должен быть составлен список тернарных операций двухзначной логики. Общее перечисление можно найти у М. Болла; см.: «Manuel de logique scientifique» (Paris, Dunod, 1948), pp. 92—93, 108—109, 139—161. Более полное описание имеется у Пиаже; см.: «Essai sur les transformations des opérations logiques; les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions» (Paris, P.U.F., 1952). Ср. эту точку зрения с теорией переключательных функций, например, в: «Synthesis of Electronic Computing and Control Circuits» (Harvard Univ. Press, 1951), pp. 15, 259.

<sup>2</sup> Который должен заполнить четыре или пять объемистых томов.

<sup>3</sup> Каждый раз, когда мы увеличиваем выборный орган на 1, число правил возрастает в квадрате.

ки  $a$  и  $b$ , и правило <sup>1</sup> даст два ответа  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ . Если вопросы независимы, то есть каждый голосующий свободен в выборе из четырех мнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = + \\ b_i = + \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_i = + \\ b_i = - \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_i = - \\ b_i = + \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_i = - \\ b_i = - \end{array} \right\},$$

мы не должны бояться никакого противоречия. Но если два ответа связаны? Кондорсе, который интересовался судом присяжных, привел такой пример:

А. Доказано, что подсудимый виновен.

Б. Доказано, что подсудимый не виновен.

Для этого примера должны быть отброшены ответы

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = + \\ b_i = + \end{array} \right.$$

Тогда проблема заключается в следующем. Какие меры необходимо принять при конструировании правила  $R$ , чтобы ответ

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = + \\ b_i = + \end{array} \right.$$

не мог появиться при единственной баллотировке; результирующее мнение

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a} = + \\ \hat{b} = + \end{array} \right.$$

также не могло бы появиться?

Существуют четыре случая, в соответствии с которыми мнения заданы таким образом:

3) $a = +$ $b = +$ (логическое тождество)	1) $a = +$ $b = -$ (импликация $B$ через $A$ )	2) $a = -$ $b = +$ (импликация $A$ через $B$ )	4) $a = -$ $b = -$ (дизъюнкция)
---	--	--	---------------------------------------

Начнем со случаев импликации, которые подобны друг другу и легко переводятся на обычный язык.

<sup>1</sup> Мы предполагаем, что используется одно и то же правило для обоих подсчетов голосования. См. ниже более общий случай.

Если мнение

$$a = +$$

$$b = -$$

запрещено, это означает, что, когда переходят от вопроса  $A$  к вопросу  $B$ , никто из голосующих, ответивших «да», не может переключиться на «нет», но переключение другим способом допускается. Часть ответивших «да» не теряет никого из своих членов и имеет шанс увеличить-ся. Другими словами, «сторонники  $A$ » образуют часть, которая содержится<sup>1</sup> в части «сторонников  $B$ ».

Запишем<sup>2</sup>:

сторонники  $A \leq$  сторонники  $B$ .

Для обозначения двух «частей» при баллотировке удобно использовать общую символику.

Отныне будем писать  $a^+$ , обозначая множество индивидов, проголосовавших  $+$  при баллотировке, и  $a^-$  — для остальных индивидов.

Используя эти обозначения, сделаем заключение.

Если предложение  $A$  влияет на предложение  $B$ , то есть если невозможно ответить «нет» на  $B$  после ответа «да» на  $A$ , тогда мнение

$$a_i = +$$

$$b_i = -$$

не будет иметь места и соответственно  $a^+ = b^+$ <sup>3</sup>; «часть, предпочитающая  $A$ , включена в часть, предпочитающую  $B$ ».

Вернемся к правилам композиции индивидуальных ответов. Каждой системе  $x$  соответствует единственный ответ  $\hat{x}$ :  $\hat{x} = R(x)$ .

---

<sup>1</sup> По предположению, это слово включает экстремальный случай, при котором часть ответивших «да» не увеличивается ни на один член. Таким образом, используется символ  $\leq$ , а не  $<$ .

<sup>2</sup> Отметим, что это не численное соотношение между числом членов каждой части. Конечно, часть  $B$  не может иметь меньше членов, но то, что каждый человек из  $A$  является членом части  $B$ , обозначается предыдущим символом. Это соотношение качественное, что будет видно из последующего. Это третье отличающееся от общепринятого использование нами того же самого знака.

<sup>3</sup> Мы можем также сказать, что  $a^- \geq b^-$ .

Это эквивалентно разделению множества всех  $x$  (то есть множества всех возможных баллотировок или последовательностей плюсов и минусов) на два класса: те, которые дают  $\hat{x} = +$ , и те, которые дают  $\hat{x} = -$ , положительные и отрицательные баллотировки. Но мы только что видели, что, когда предложение  $A$  влияет на предложение  $B$ , положительная часть  $a^+$  «содержится» в  $b^+$ :

$$a^+ \leq b^+$$

С другой стороны, должно возникнуть противоречие, если при влиянии  $A$  на  $B$  мы тем не менее получаем результат

$$\hat{a} = +$$

$$\hat{b} = -$$

Противоречие заключается в появлении

$$1) a^+ \leq b^+$$

$$2) a = + \quad \hat{b} = -$$

Чтобы избежать этого противоречия, необходимо и достаточно, чтобы часть «плюсов» положительной баллотировки никогда не содержалась в части «плюсов» отрицательной баллотировки.

Таким же способом можно рассмотреть три остальных случая. В случае, когда  $B$  влияет на  $A$ , мы имеем

$$a^+ \geq b^+$$

$$(\text{или } a^- \leq b^-)$$

и хотим избежать правила, утверждающего, что  $\hat{a}$  отрицательно, когда  $\hat{b}$  положительно. Если запрещены два ответа «да»<sup>1</sup> (случай 3), мы имеем

$$a^+ \leq b^-$$

$$(\text{или } a^- \leq b^+)$$

и хотим исключить два положительных  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ . Наконец,

---

<sup>1</sup> Логическое тождество.

если отношение между предположениями  $A$  и  $B$  исключает два ответа «нет»<sup>1</sup>, мы имеем

$$a^+ \geq b^-$$

$$(\text{или } a^- \leq b^+)$$

и хотим исключить оба отрицательные  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ .

Итак, если мы хотим одновременно избежать четырех возможностей противоречия, мы делаем невозможным одновременное появление четырех следующих результатов:

- 1)  $\hat{a} = +$      $\hat{b} = -$     и  $a^+ \leq b^+$
- 2)  $\hat{a} = -$      $\hat{b} = +$     и  $a^- \leq b^-$
- 3)  $\hat{a} = +$      $\hat{b} = +$     и  $a^+ \leq b^-$
- 4)  $\hat{a} = -$      $\hat{b} = -$     и  $a^- \leq b^+$ .

Если невозможны эти четыре типа одновременных появлений, правило будет избавлено от противоречий, каким бы из четырех рассматриваемых способов две баллотировки ни были связаны<sup>2</sup>.

Мы определили правила, удовлетворяющие этим требованиям. Прежде всего такие правила существуют обязательно. Всегда можно принять тривиальное решение, взяв мнение одного из голосующих без учета мнений других голосующих. Тогда правило будет обладать всеми логическими связями избранного голосующего. Но вопрос заключается в том, можно ли найти другие правила, удовлетворяющие правилу непротиворечивости, и возможно ли знать их все<sup>3</sup>.

Назовем правило *допустимым*, если оно никогда не

<sup>1</sup> Это логическая «дизъюнкция».

<sup>2</sup> Можно ввести другие типы отношений, которые должны закрепить не одно, а два мнения, но легко доказать, что при этом не возникает новых проблем.

<sup>3</sup> Мы можем поставить эту проблему в терминах сетей следующим образом. Рассмотрим множество возможных баллотировок. Правило разделяет это множество на две части — положительную и отрицательную. С другой стороны, существование связи между двумя вопросами накладывает определенные связи на баллотировки (так же как совместное включение в положительные или отрицательные части). Тогда задача состоит в требовании, чтобы разделение, сделанное правилом, преобразовывало структуру соответственно связи. Сразу возникает графический образ. Представим баллотировки в виде маленьких окружностей на плоскости, а связи — в виде пересечения окружностей. Вопрос заключается в разделении множества на две категории — белые окружности и черные окруж-



ведет к противоречию и исключает упомянутые выше типы случаев.

Если правило состоит в том, что баллотировка, например  $a$ , должна вести к положительному решению  $R(a) = \hat{a} = +$ , можно сказать, что по правилу предпочтение отдается положительной части  $a^+$ , то есть предпочитают индивиды, которые проголосовали «да» (+). Но если те же индивиды проголосовали «нет» (—) или если мы рассматриваем баллотировку  $b$ , в которой  $b^-$  идентично  $a^+$  (баллотировки  $a$  и  $b$  противоположны), тогда мы имеем

$$b^- \leq a^+$$

$$a^+ \leq b^-$$

но, так как  $\hat{a} = +$ , необходимо, чтобы  $\hat{b} = -$ , если мы хотим избежать противоречия (см. выше случай 3).

Таким образом, если правило допустимо и решение предпочитает некоторую коалицию, которая голосует «да», тогда это правило будет также предпочитать эту коалицию, если она голосует «нет». Такую коалицию назовем эффективной.

Если  $e$  эффективно,  $a^+ = e$  имеет следствие  $\hat{a} = +$  и  $b^- = e$  имеет следствие  $\hat{b} = -$ .

Рассмотрим коалицию, включающую  $e$ :  $f \geq e$ . Если мы утверждаем, что  $c^+ = f$ , то будем иметь

$$c^+ \geq a^+ \quad \hat{a} = +$$

$$c^+ \geq b^- \quad \hat{b} = -$$

Чтобы избежать совместных противоречивых случаев (1 и 4), правило должно утверждать

$$\hat{c} = R(e) = +$$

Таким образом, коалиция  $f$  эффективна.

Как и следовало ожидать, одно из условий непротиворечивости заключается в следующем: эффективная коалиция не перестает быть эффективной при добавлении новых членов.

Легко доказать, что, если  $e$  эффективно, дополнительная коалиция (которая группирует всех голосующих, не включенных в  $e$ ) неэффективна. Далее, если  $g$  неэффективна, она не станет эффективной при потере членов.

ности — таким образом, чтобы никакая связь первой категории не проходила от белой окружности к черной, никакая из связей второй категории не проходила от черной к белой и т. д.

Наконец, коалиция, включающая всех голосующих, достаточно эффективна.

Мы пришли к следующим выводам. Если правило *допустимо*, определяемые этим правилом эффективные коалиции такие, что

каждая коалиция, включающая эффективную, эффективна;

каждая коалиция, содержащаяся в неэффективной коалиции, неэффективна;

дополнительная коалиция к эффективной коалиции неэффективна, и наоборот.

С другой стороны, легко доказать, что эти условия достаточны. Множество индивидов может быть разделено на две части несколькими способами. Если для каждого разделения одна из двух частей будет полагаться эффективной, правило определения результирующего мнения получено, и это правило будет *приемлемым* (свободным от противоречия), если, во-первых, единогласие эффективно, во-вторых, каждая эффективная часть не перестает быть эффективной при добавлении новых членов и, в-третьих, каждая неэффективная часть не перестает быть неэффективной при потере членов.

Ясно, чтобы избежать четырех одновременных состояний (стр. 238), эффективная часть не должна содержаться в неэффективной части.

Для каждого случая легко перечислить правила, удовлетворяющие предыдущим условиям, то есть найти приемлемые правила.

В случае двух голосующих, поскольку один из них должен быть эффективным сам по себе, мы приходим к правилу: всегда принимать мнение одного из голосующих (очевидно, всегда одного и того же). Таким образом, мы избегаем всякого противоречия.

В случае трех голосующих следует различать два случая. Первый: если один из трех голосующих эффективен сам по себе, назовем его (1); тогда коалиция (2, 3) неэффективна, тем более неэффективна коалиция (2) или (3), но ясно, что (1, 2), (1, 3) и (1, 2, 3) будут эффективны. Решение дается тривиальным правилом: принимать мнение первого голосующего.

Во втором случае, если никто из троих неэффективен, коалиция двух эффективна, и мы приходим к правилу: принимать мнение большинства.

При четырех голосующих, если исключить тривиальное решение, никто из голосующих не может быть сам по себе прав; таким образом, трое голосующих всегда более правы, чем четвертый. Что касается коалиций из двух человек, они не могут быть все эффективными или все неэффективными, будучи дополнительными по два. Тогда необходимо сделать выбор, например между коалициями (1, 2) и (3, 4). Если первая коалиция эффективна, необходимо выбрать между (1, 3) и (2, 4) и затем между (1, 4) и (2, 3). Если мы перечислим все возможные выборы, то заметим, что все они двух типов. Или три коалиции по два, которые эффективны, включают одного и того же голосующего, то есть это хорошо известное правило, наделяющее правом решающего голоса одного отдельного члена в случае разногласия, — или три неэффективные коалиции имеют общего члена. Это означает аналогичное, но противоположное правило: в случае разногласия значение одного из голосов уменьшается или, что должно давать тот же результат, преимущественный голос дается трем из четырех членов жюри<sup>1</sup>.

Мы можем продолжать анализ: для пяти голосующих разнообразие больше. При отбрасывании тривиального решения, а также решений, которые не принимают в расчет голос одного или двух голосующих<sup>2</sup>, и хорошо известного решения обычного большинства (где эффективна трехчленная часть) остается три типа новых правил, в которых эффективны некоторые части из двух голосующих (или только одна этого типа, или все, исключая одну, или только две). Если мы проверим эти новые решения, то обнаружим близкую связь с обычными правилами большинства. Например, в качестве эффективных коалиций можно выбрать

(1, 2)	(1, 3, 4)	(2, 3, 4)
	(1, 3, 5)	(2, 3, 5)
	(1, 4, 5)	(2, 4, 5)

Тогда можно сказать, что в этой системе каждый из двух привилегированных индивидов (1 или 2) «весомее» двух других, поскольку коалиция (1, 3, 4) имеет такую же «силу», как и коалиция (1, 2).

<sup>1</sup> Четвертый имеет в некотором смысле «совещательный» голос.

<sup>2</sup> Должно оставаться больше двух голосующих; как мы видели, нет другого правила, приемлемого для двоих, исключая принятие мнения одного и того же голосующего.

В этом случае мы можем получить тот же результат, отдавая по два голоса 1 и 2 и один голос каждому из остальных.

Но мы должны прежде убедиться, что это случайность. При шести голосующих появляются некоторые правила, которые не могут быть сведены к численному взвешиванию. Можно говорить о взвешенном большинстве (но не большинстве голосов). Этот случай относится к количественным структурам, и можно сказать, что противоположные силы неизмеримы. Приведем пример.

Предположим, что в комитете из семи голосующих решается, что пять голосов всегда перевешивают два других, но два отбрасываемых члена могут изменить ситуацию, если они образуют коалицию с третьим голосующим, выбранным так, что они составляют «гармоническую» тройку. Достаточно составить список этих побеждающих троек. Пусть  $A$  и  $B$  — какие-то два члена, они нуждаются в третьем, скажем в  $C$ :  $ABC$  — эффективная коалиция. Пусть  $D$  — один из остальных четырех, необходимо сформировать тройку с  $A$ ,  $D$  и еще одним, скажем  $ADE$ ; то же самое для  $BDF$  и  $CDG$ . Ясно, что  $AFG$  является побеждающей коалицией; аналогично для  $BEG$  и  $CEF$ . Таким образом, имеется<sup>1</sup> семь побеждающих троек

$ABC, ADE, BDF, CDG, AFG, BEG, CEF,$

и можно заметить, что о сконструированном таким образом множестве нельзя сказать, что некоторый член привилегирован или что даже некоторая пара привилегированна. Только тройка имеет реальное существование. Невозможно представить силу такой тройки как сумму сил индивидуальных компонентов. Невозможно дать численные веса каждому индивиду.

Введем более широкое определение концепции большинства, которое будет включать все известные случаи, а также некоторые другие<sup>2</sup>. Будем говорить, что решение

---

<sup>1</sup> Можно также представить систему, начиная с трех элементов, не образующих тройку, например  $ABD$ : скажем, что  $C$ , гармонизируя  $A$  и  $B$ , «промежуточно» между  $A$  и  $B$  и аналогично  $F$ , лежит между  $B$  и  $D$ , а  $E$  — между  $A$  и  $D$ ; это похоже на гармонические цвета. Возможно соединить в тройку три промежуточных элемента  $CEF$  или некоторый промежуточный элемент и его «дополнение» с седьмым элементом (который играет роль белого цвета).

<sup>2</sup> Этот подход аналогичен теории так называемых простых игр. См.: Д. Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономи-



является решением большинства (в широком смысле), когда в коллективе эффективные коалиции зафиксированы с самого начала, то есть для каждого разбиения мы знаем, какая из двух частей весомее другой; некоторые большинства, выбранные таким образом, будут удовлетворять условиям непротиворечивости, которые могут быть суммированы аксиомой: никакое большинство не содержится в меньшинстве. В соответствии с этим определением можно сформулировать следующую теорему: если мы хотим скомпоновать мнение нескольких голосующих в одно, не допуская никакого противоречия между голосами, то используем для этого правило большинства в широком смысле, и этого достаточно (до тех пор пока можно гарантировать, что различные мнения отдельного голосующего не будут противоречивы).

## НЕИЗБЕЖНЫЕ ПРОТИВОРЕЧИЯ

Закон большинства, расширенный таким образом, дает все решения поставленной проблемы. Большинство может принять два решения, и, если между двумя вопросами, задаваемыми при двух баллотировках, существует логическая связь, можно быть уверенным, что результат также будет соответствовать ей, если каждый из голосующих учитывает эту связь.

Но как мы знаем, непротиворечивость при двух баллотировках не всегда достаточна. Если баллотировки связаны с суждениями предпочтения, любые две баллотировки логически независимы. Можно как угодно ответить на два вопроса « $A < B?$ » и « $B < C?$ », но если мы дважды ответили «да» или дважды «нет», тогда окажемся ограниченными при третьем вопросе « $A < C?$ ».

Рассмотрение бинарной связи недостаточно; в данном случае имеются логические связи, которые существенно тернарны. С другой стороны, если мы хотим рассмотреть все тернарные связи, то должны рассмотреть все бинарные связи, составляющие часть тернарных связей. Таким образом, это законы большинства (в широком смысле), которые нам предстоит рассмотреть.

---

ческое поведение, изд-во «Наука», М., 1970. Авторы априори отбрасывают решения, называемые нами тривиальными, в которых единственный индивид может образовать большинство.



Мы уже знаем, что закон обыкновенного большинства голосов не подходит. Это не связано с тернарными отношениями, это именно эффект Кондорсе. Но можно попытаться определить, существуют ли среди других законов большинства (которые, как мы видели, разнообразны) такие, которые связаны с тернарными отношениями (или даже отношениями более высокого порядка).

Предположим, что на три вопроса *ABC* мы получили после композиции результирующие ответы

$$\begin{aligned}\hat{a} &= + \\ \hat{b} &= + \\ \hat{c} &= -\end{aligned}$$

Это означает, что «большинство» ответило «да» на *A*, «большинство» (то же самое или другое) ответило «да» на *B* и «большинство» ответило «нет» на *C*. Можно заключить, что некоторые индивиды, чьи мнения соответствуют результирующему мнению, одновременно входят во все три большинства. Тот же результат справедлив для любого числа вопросов: для того чтобы коллективное мнение (которое получается при применении правила большинства) было мнением данного индивида, необходимо и достаточно, чтобы этот индивид принадлежал всем большинствам. Таким образом, эффект Кондорсе проявляет себя, как только никакое большинство по нескольким вопросам не имеет общих элементов: тогда мнение большинства не является чьим-либо мнением.

Возвратимся назад к вопросу о структуре. Среди всех законов большинства, которые можно вообразить, существуют ли такие, для которых любые три большинства всегда имеют по крайней мере один общий элемент или для которых любое число большинства имеет по крайней мере один общий элемент?

Проверим единственно правильный для собрания из семи голосующих закон (уже упоминавшийся нами), определяемый большинством троек.

*ABC* образует большинство (против *DEFG*), но

*ADE, ADF, CDG*

и, наконец,

*AFG, BEG, CEF*

также являются большинством.

Если к этому добавить, что не существует других

эффективных группировок, закон полностью определен <sup>1</sup>.  
 Но любые два большинства должны иметь общий член <sup>2</sup>:

$ABC$

$ADE$

Добавляя третью «коалицию большинства», проверяем, содержится ли  $A$  во всех трех

$ABC$

$ADE$

$AFG$

( $A$  общее)

и нет ли общего члена во всех трех большинствах

$ABC$

$ADE$

$BDF$

Последнее доказывает возможность эффектов Кондорсе. Если, например, заданы три вопроса, такие, что на все нельзя ответить положительно, образуем большинство только из «да» на каждый вопрос, чтобы прийти к абсурдному результату:

$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	Большинство	Результат
+	+	+	-	-	-	-	( $ABC$ )	+
+	-	-	+	+	-	-	( $ADE$ )	+
-	+	-	+	-	+	-	( $BDF$ )	+

Чтобы построить закон большинства, исключаяющий всякий эффект Кондорсе, сделаем некоторую перестановку. Возвратимся к случаю произвольного числа голосующих. Вначале заметим, что две партии большинства по необходимости должны иметь общие члены; действительно, если в собрании

$ABC, \dots, XYZ$

$ABC$  — большинство, тогда  $DE, \dots, Z$  является мень-

<sup>1</sup> Каждая коалиция из пяти членов, содержащая большинство, сама является большинством, а также любая коалиция из двух является меньшинством. Коалиции из четырех достаточно разделить на те, которые дополнительны к большинствам трех, такие, как являющиеся меньшинством, и те, которые содержат большинство, подобно  $ABCD$ , и сами являются большинством.

<sup>2</sup> И, как в настоящем примере, не больше чем один общий член.

шинством и соответственно каждая часть этой партии является меньшинством, например  $DEF$ . Утверждение, что  $ABC$  и  $DEF$  оба являются больши́нствами, абсурдно.

Взяв два разных больши́нства

$$ABCDEF$$
$$ABCKLMN,$$

что можно сказать об их общей части ( $ABC$ )? Если это — меньшинство, а противоположное ему ( $DEF \dots XYZ$ ) является больши́нством и мы имеем три партии больши́нства без общих членов

$$ABCDE$$
$$ABCKLMN$$
$$DEF, \dots, XYZ,$$

может возникнуть эффект Кондорсе.

Чтобы избежать последнего, необходимо, чтобы общая часть двух партий больши́нства была сама по себе коалицией больши́нства. Поэтому множество всех партий больши́нства должно иметь общую часть, которая сама является больши́нством и, находясь в каждой коалиции больши́нства, представляет определенным образом минимальное, или предельное, больши́нство. Но этого недостаточно, поскольку, как только больши́нство найдено, скажем  $ABC$ , чтобы решить, является ли оно минимальным, мы должны проверить, являются ли его части, например  $AB$ , меньшинствами. Но если  $AB$  — меньшинство,  $CED, \dots, Z$  является больши́нством и два больши́нства  $ABC$  и  $CDE\dots$  имеют общую часть  $C$ , которая должна быть больши́нством.

Таким образом, или  $AB$ , или  $C$  — больши́нство. Повторение этого же рассуждения показывает, что не существует другого пути решения, чем следующий: выбрать единственного члена, который сам по себе составляет больши́нство.

Таким образом, единственными законами больши́нства, полностью гарантирующими отсутствие эффекта Кондорсе, являются тривиальные законы, согласно которым единственный голосующий образует «больши́нство»<sup>1</sup>, то есть мнение одного члена определяет мнение коллектива (одного и того же члена, естественно, для всех задавае-

<sup>1</sup> Эти решения названы К. Д. Эрроу «диктаторскими».

мых вопросов). Ясно, что в этом случае непротиворечивость гарантирована. Можно сформулировать следующий результат.

*Если мы хотим избежать коллективного мнения в форме, не выбранной никем из голосующих, единственно пригодными для всех воображаемых случаев, универсальными правилами будут те, которые дают право принятия решения только одному избранному индивиду.*

[Резюмируя выводы части работы Гюйбо о неразложимости общего интереса, укажем следующее.

Проблема формального определения того, что носит название социальной полезности, или общего интереса, рассмотрена многими авторами. В частности, концепция общего интереса Порето сформулирована в терминах положения, наиболее предпочтительного для каждого или по крайней мере не менее предпочтительного для кого-нибудь. Не решена проблема, заключающаяся в определении этой концепции, когда нет единогласия.

Современные авторы пытались дополнить это определение, построенное на структурах Порето, тем, что индивидуальные предпочтения должны измеряться только в терминах упорядочения различных альтернатив. Это, конечно, невозможно в свете теоремы Эрроу и приведенного ранее обсуждения. Дилемма сведена к такому утверждению:

Или (1) общий интерес не есть что-то, что может быть сконструировано из взятых неразложимых индивидуальных интересов (то есть общий интерес есть нечто большее, чем простое агрегирование лучшего для индивидов); или (2) каждый индивидуальный интерес должен, по предположению, обладать чем-то большим, чем простейшей порядковой структурой.

Однако, заключает Гюйбо, нереалистично предполагать, что коллективные решения связаны с автономией каждого индивида. Когда нет ни полного подчинения, ни единодушного согласия, тогда общее волеизъявление возникает в борьбе. Индивидуальные интересы «не комбинируются» друг с другом для формирования общей воли: факторы, рассматриваемые в обсуждениях, дебатах и сделках, являются главными частями этой борьбы. В этом смысле предполагаемая математическая модель изучения этого явления связана с теорией игр.— *Примечание редакторов английского текста.*]

### *Раздел III*

## **ПРОЦЕССЫ**





# ВОЗДЕЙСТВИЕ СТРУКТУРЫ ПОощРЕНИЙ НА ПРИЛОЖЕНИЕ УСИЛИЙ

*Дж. С. Кольмен*

В обществе и в лаборатории человек работает, чтобы получить вознаграждение и избежать наказаний. Однако в обществе не устанавливается наперед заданная система поощрения. Вместо этого большие или малые социальные системы разрабатывают свои меры поощрения и наказания для стимулирования деятельности индивидов. Разумеется, эти меры поощрения обычно не навязываются всемогущим «обществом», но устанавливаются стихийно.

Специфический характер социальных систем состоит в том, что их члены сами являются источниками поощрений и наказаний. Награда или наказание одного члена системы проявляется через действия другого. Например, в рамках деятельности группы успех одного члена влечет награды другим членам группы. Или, наоборот, успех одного способствует наказанию других, ухудшая их положение в группе. Или каким-то образом группа устанавливает для своих членов множество норм, влекущих наказание тех, кто их нарушает, и награду тем, кто их выполняет. Члены банды преступников поощряют друг друга в определенной деятельности; члены женского бридж-клуба поощряют друг друга в совершенно иной деятельности.

Цель этой статьи заключается в выяснении того, какое воздействие оказывает структура поощрения на поощряемую (или наказуемую) деятельность в группе. Потребность в этом возникла из ряда наблюдений (частично случайных, частично систематических) распределения деятельности в группах. Ряд примеров покажет, что имеется здесь в виду.

а) Мальчики в воровских шайках сообща будут выполнять преступные действия, на что они не решатся в оди-

почку. Систематическое наблюдение за их поведением показывает, что оно зависит от поощрений, определяемых другими членами шайки.

б) Обычно студенческие традиции в высших учебных заведениях ограничивают учебные усилия; с другой стороны, эти традиции поощряют неограниченные усилия в спорте. Как показало исследование, причина состоит в том, что успехи в учебе одного студента умаляют достижения других, тогда как спортивные достижения в межвузовских состязаниях приносят пользу всем студентам вуза.

в) В спортивных соревнованиях в общем случае лучшее трековое время отмечается в забегах со многими конкурентами, чем в забегах на время. Однако в противоположность этому некоторые наблюдения наводят на мысль, что самые плохие бегуны в состязаниях бегут медленнее по сравнению со своими возможностями, чем в забегах на время.

г) Обычно в рамках групповой деятельности индивид затрачивает больше усилий, чем в индивидуальной деятельности. В экспериментах, проведенных на малых группах, по изучению противодействия электрическому шоку было замечено, что более сильный шок испытывается в условиях группы, чем вне ее.

Таким образом, перед нами вполне определенная цель: описать некоторые способы характеристики структур поощрения, которые позволили бы нам объяснить и уточнить воздействие структур поощрения на приложение усилий.

В частности, имеется два типа структур поощрения, на которые я хочу обратить особое внимание.

1. Ситуации, когда успех одного человека служит цели другого и этот другой в свою очередь поощряет усилия, ведущие к успеху первого. Примером могут служить спортивные состязания двух высших учебных заведений. Достижения спортсменов одного вуза отвечают целям всех студентов и преподавателей этого вуза, который в свою очередь поощряет свою команду, предоставляя спортсменам более высокое положение и выдавая им различные награды.

2. Ситуации, в которых успех одного индивида затрудняет успех другого и этот другой не одобряет усилий, ведущих к такому успеху. Например, в высшем учебном

заведении сверхусилия в учебе одного студента заставляют больше работать других только для того, чтобы сохранить свое относительное положение. В результате другие не одобряют таких усилий.

Рассмотрим частный случай этих двух структур, представляющих особенный интерес в силу его распространенности. Это случай, когда каждый исполнитель является поощряющим (или наказывающим), а каждый поощряющий является исполнителем.

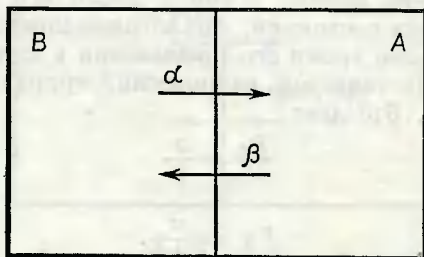


Рис. 1.

Вопрос состоит в проверке приложения усилий членов группы в двух или более деятельности при двух различных структурах поощрения: когда усилия одного члена способствуют успеху других, занятых в этой деятельности, и когда его усилия мешают их успеху. В зависимости от ситуации подходящими могут оказаться различные математические модели. Однако достаточно общая ситуация может быть промоделирована таким способом: каждый индивид в отдельности колеблется между двумя деятельностями, прилагая свои силы то к одной, то к другой. Схематически можно считать его находящимся в одном из двух состояний,  $A$  или  $B$ , с вероятностью перехода от одного состояния к другому (рис. 1). Если вероятность его перехода из  $A$  в  $B$  в достаточно малый период времени не зависит от времени, проведенного им в  $A$  (и аналогично для обратного движения), тогда система является марковским процессом с непрерывным временем и описывается уравнением

$$\frac{dP_A}{dt} = -\beta P_A + \alpha P_B, \quad (1)$$

где  $P_A$  — вероятность пребывания в состоянии  $A$ ,  $\alpha$  —

скорость перехода из  $B$  в  $A$ , не зависящая от времени ( $0 \leq \alpha < \infty$ ),  $\beta$  — не зависящая от времени скорость перехода из  $A$  в  $B$  ( $0 \leq \beta < \infty$ ) и  $P_B = 1 - P_A$ . (Так как  $P_A$  функция  $t$ , ее правильное обозначение было бы  $P_A(t)$ ; в целях удобства мы даем более краткую запись  $P_A$ .)

То есть каждый член группы как индивид имеет «тенденции»  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно к состояниям  $A$  и  $B$ . Если нет поощрения или осуждения со стороны других, можно вычислить вероятность его пребывания в каждом состоянии в какой-то момент времени после его пребывания в одном из двух состояний. Аналогично можно легко найти относительное время его пребывания в каждом состоянии при стохастическом равновесии, приравняв уравнение (1) нулю. Это дает

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2)$$

или

$$P_A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (3)$$

Какое следует ожидать распределение деятельностей в группе, состоящей из  $N$  членов, направляющих этот процесс независимо друг от друга? Очевидно, мы должны найти долю людей  $P_A$ , вовлеченных в деятельность  $A$ , и долю людей  $P_B$ , вовлеченных в деятельность  $B$ . И поскольку каждый действует независимо от других, в результате имеет место биномиальный процесс, так что если мы наблюдали эту группу некоторое время, то должны ожидать биномиальное распределение

$$p_i = \binom{N}{i} P_A^i P_B^{N-i}, \quad (4)$$

где  $p_i$  — вероятность того, что в группе из  $N$  человек какая-то часть  $i$  будет занята деятельностью  $A$ , а  $P_A$  — вероятность того, что каждый будет занят деятельностью  $A$  (находиться в состоянии  $A$ ).

## 1. СТРУКТУРЫ С ВЗАИМНЫМ ПООЩРЕНИЕМ

Предположим, что деятельности так взаимосвязаны, что усилия одного члена группы могут помочь другим ее членам, когда они заняты этой же деятельностью; в результате он поощряется к принятию участия в этой



деятельности теми, кто ею занят. Один способ рассмотрения этого эффекта состоит в учете добавочной скорости перехода  $\gamma$  к некоторой деятельности, обусловленной каждым человеком, участвующим в этой деятельности<sup>1</sup>. Если  $i$  людей занято деятельностью  $A$  и кто-то находится в состоянии  $B$ , тогда скорость его перехода к деятельности  $A$  будет равна  $\alpha + i\gamma$ ; среди остающихся  $N - 1$

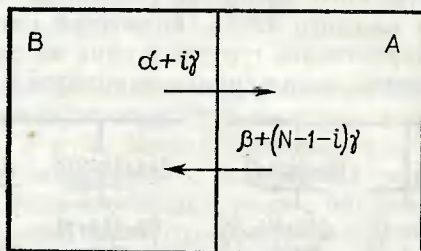


Рис. 2

человек  $N - 1 - i$  заняты деятельностью  $B$ , так что, если кто-то находится в  $A$ , скорость перехода в  $B$  будет равна  $\beta + (N - 1 - i) \lambda$  (см. рис. 2).

Если все остальные члены группы определены в своем выборе  $A$  или  $B$  (как в экспериментах Эска, где все члены группы, кроме одного, были помощниками экспериментатора), тогда вероятности участия индивида в деятельности  $A$  или  $B$  будут (см. рис. 2)<sup>2</sup>:

$$P_A = \frac{\alpha + i\gamma}{\alpha + \beta + (N-1)\gamma}, \quad (5)$$

$$P_B = \frac{\beta + (N-1-i)\gamma}{\alpha + \beta + (N-1)\gamma}. \quad (6)$$

Однако более интересная проблема возникает при мобильности всех  $N$  членов группы. Какое в этом случае следует ожидать распределение деятельностей среди  $N$  членов, если наблюдать группу некоторое время? Ответ

<sup>1</sup> Это не единственный способ рассмотрения таких эффектов. В очень разных концепциях поощрения выбору между альтернативными формами рассмотрения эффекта свойствен ряд трудностей. Эта проблема кратко рассмотрена в конце статьи.

<sup>2</sup> Из данных Эска очевидно, что испытуемые в его экспериментах не вели себя в соответствии с уравнениями (5) и (6). Однако имеется ряд факторов, указывающих на отличие экспериментов Эска от тех, что необходимы для проверки приведенной выше модели.

на этот вопрос в чем-то отличен от ответов, даваемых уравнениями (5) и (6), показывающих влияние других членов группы на поведение индивида при условии их воздействия друг на друга. В результате выясняется поведение группы, определенное данной структурой поощрения.

Групповое поведение в стохастическом процессе можно представить графически (см. рис. 3). Скорости перехода для стохастического процесса складываются из скоростей перехода для каждого члена, последний при своем переходе может переместить группу в одно из соседних положений. Например, когда группа находится в состоянии 2,

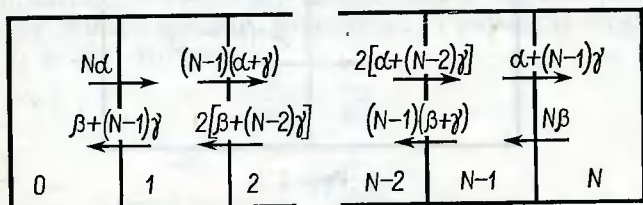


Рис. 3.

это означает, что два человека заняты деятельностью А, каждый из них характеризуется скоростью перехода к В  $\beta + (N - 2) \gamma$ . Таким образом, групповая скорость перехода в состояние 1 является суммой скоростей перехода этих двух членов (ибо, если произошел переход любого из них, группа должна перейти в состояние 1), то есть  $2 [\beta + (N - 2) \gamma]$ . Ожидаемое распределение группы при стохастическом равновесии в случае независимости переходов было биномиальным распределением. Такое распределение следует из того, что при равновесии «потоки» через каждую границу должны быть одинаковыми в противоположных направлениях.

Взяв множество  $N$  аналогичных уравнений (по одному для каждой границы) и выразив  $p_i$  через  $p_0$ , получим следующие уравнения

$$\frac{p_0}{p_0} = 1, \quad (7)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{N\alpha}{\beta + (N-1)\gamma} \quad (8)$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{N(N-1)\alpha(\alpha+\gamma)}{2[\beta+(N-1)\gamma][\beta+(N-2)\gamma]} \quad (9)$$

Используя то, что сумма  $p_i$  равна 1, можно найти  $p_0$  и затем дать общее выражение для  $p_i$  (полагая вначале  $\alpha/(\alpha + \beta) = a$  и  $\gamma/(\alpha + \beta) = c$ )<sup>1</sup>:

$$p_i = \frac{\binom{N}{i} \prod_{j=0}^{i-1} (a + jc) \prod_{j=0}^{N-i-1} (1 - a + jc)}{\prod_{j=0}^{N-1} (1 + jc)}. \quad (10)$$

Это распределение аналогично биномиальному при условии, что существует структура поощрения типа, показанного на рис. 2 и 3. Можно представить себе это распределение как зависящее от случайных параметров для поощрений, воздействующих таким образом, чтобы вовлечь все большее число групп в деятельность, выполняемую наибольшим количеством людей. Параметры  $a$  и  $c$  можно определить, используя среднее значение и дисперсию  $i$ :

$$\mu = \sum i p_i \quad (11)$$

и

$$\sigma^2 = \sum i^2 p_i - \mu^2. \quad (12)$$

Тогда

$$a = \frac{\mu}{N} \quad (13)$$

и

$$c = \frac{\sigma^2 N - \mu(N - \mu)}{N\mu(N - \mu) - \sigma^2 N}. \quad (14)$$

Странно, что равновесное распределение, полученное в этом процессе, совпадает с распределением Пойя, полученным из иной физической модели, суть которой состоит в следующем. Вытаскивают  $N$  мячей из корзины, содержащей  $\alpha$  мячей  $A$  и  $\beta$  мячей  $B$ . Каждый раз при вынимании мяча  $A$  в корзину добавляется  $c$  других мячей  $A$ , и каждый раз, когда вынут мяч  $B$ , в корзину добавляется  $c$  других мячей  $B$ . Такой эксперимент дает уравнение распределения (10) [2, стр. 109]. Однако идентичность

<sup>1</sup> Множители под первым знаком произведения в числителе исчезают для  $p_0$ , а под вторым — для  $p_N$ . То же самое соглашение справедливо для уравнений (17).

с распределением Пуассона представляет несущественный интерес для группового стохастического процесса, изображенного на рис. 3.

На связь с биномиальным распределением указывает рис. 4, где приведен ряд распределений с различными  $c$

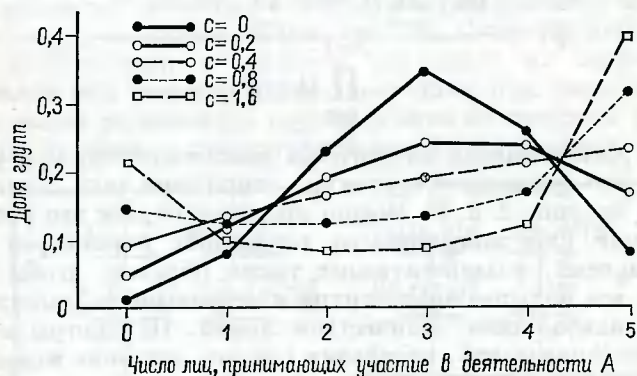


Рис. 4.

для  $N = 5$  и  $a = 0,6$ . Укажем, что здесь незаметна разница между этим распределением и непоощряемыми, независимыми деятельностями биномиального распределения. Разница вовсе не в усредненном приложении усилий в группе: оно остается распределенным пропорционально индивидуальным тенденциям  $\alpha$  и  $\beta$ . Разница скрыта в *стабильности* группы в окрестности этого среднего. Если коэффициент поощрения  $\gamma$  велик по сравнению с  $\alpha$  и  $\beta$ , группа весьма нестабильна вблизи своего среднего значения и достигает стабильности только в одном из крайних положений, когда все заняты деятельностью  $A$  или деятельностью  $B$ . Таким образом, поведение социальной системы как системы сильно отличается от агрегата независимых людей.

Сравнение с эмпирическими данными будет проведено после обсуждения другой модели.

## 2. СТРУКТУРЫ С ВЗАИМНЫМ НАКАЗАНИЕМ

В структурах деятельности, где успех одного члена умаляет успехи других, взаимозависимость проявляется в различных формах (например, если несколько юношей

стараятся привлечь внимание двух девушек, каждый юноша будет препятствовать попыткам других добиться внимания его девушки). Если  $N - 1$  членов группы определены и часть их  $i$  находится в  $A$ , в то время как другая часть  $N - 1 - i$  находится в  $B$ , поведение одного мобильного члена группы можно описать способом, показанным на рис. 5, где  $\theta$  — скорость перехода, обусловленная наказанием, исходящим от каждого члена<sup>1</sup>.

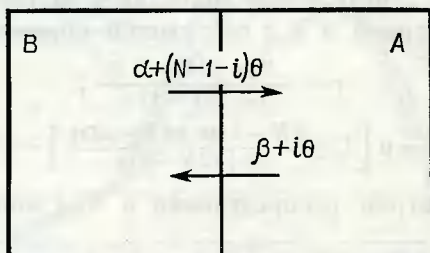


Рис. 5.

В этой модели другие люди  $i$ , занятые деятельностью  $A$ , воздействуют на мобильного члена, с тем чтобы вывести его из  $A$ , если он находится там, в то время как раньше они действовали, чтобы вовлечь его в  $A$ , если он был в  $B$ . Равновесные вероятности участия индивида в деятельности  $A$  или  $B$  будут:

$$P_A = \frac{\alpha + (N-1-i)\theta}{\alpha + \beta + (N-1)\theta} \quad (15)$$

и

$$P_B = \frac{\beta + i\theta}{\alpha + \beta + (N-1)\theta}. \quad (16)$$

Но как и в предыдущем случае, нас интересует не поведение индивида, а, скорее, поведение группы при данной структуре наказаний. Схема группового стохастического процесса показана на рис. 6. При помощи процедуры, аналогичной примененной для модели поощрения, можно найти ожидаемое распределение групп, находящихся в рав-

<sup>1</sup> Опять-таки, как покажет дальнейшее обсуждение, это не единственная форма действия механизма наказания.



$$p_i = \frac{\binom{N}{i} \prod_{j=N-1}^{N-1} (a+j s) \prod_{j=i}^{N-1} (1-a+j s)}{\prod_{j=N-1}^{N-1} (1+j s)}, \quad (17)$$

где  $s = \theta/(\alpha + \beta)$ . Среднее значение и дисперсия  $i$  связаны с параметрами  $a$  и  $s$  следующим образом:

$$\mu = \frac{N [a + (N-1) s]}{1 + 2(N-1) s}, \quad (18)$$

$$\sigma^2 = \mu \left[ 1 + \frac{(N-1) [a + (N-2) s]}{1 + (2N-3) s} \right] - \mu^2. \quad (19)$$

Двум параметрам распределения  $a$  и  $s$  можно придать

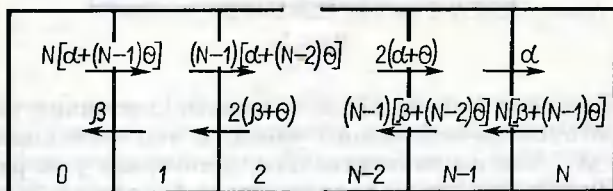


Рис. 6.

в первом приближении среднее значение и дисперсию из уравнений (11) и (12). Тогда

$$s = \frac{\mu (N-\mu) - \sigma^2 N}{\sigma^2 N (2N-3) - \mu (N-2) (N-\mu)}, \quad (20)$$

$$a = \frac{\mu}{N} + \left( \frac{2\mu - N}{N} \right) (N-1) s. \quad (21)$$

Интересно сравнить параметры распределения «наказания» с параметрами распределения «поощрения» в уравнениях (13) и (14). В первом случае индивидуальная тенденция к деятельности  $A$  прямо определялась средним числом людей, выполняющих деятельность  $A$ , что справедливо также для биномиального распределения. Во втором случае индивидуальные тенденции, характеризующие  $a$ , не определены только средним значением. Как показывает уравнение (18) и рис. 7, наказание искажает

среднее значение в направлении  $N/2$ . Среднее значение определяет  $a$  только в особых случаях: если среднее значение  $i$  равно  $N/2$  (так что в уравнении (21)  $2\mu - N = 0$ ) или если дисперсия равна биномиальной дисперсии (так что в уравнении (21)  $\mu(N - \mu) - \sigma^2 N = 0$ ). Конечно,

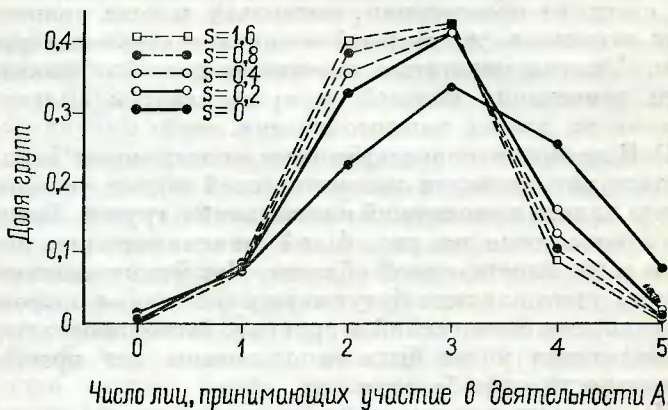


Рис. 7.

в последнем случае параметр наказания  $s$  равен нулю и процесс сводится к биномиальному. Параметр поощрения  $c$  и параметр наказания  $s$  полностью определяются величиной отклонения оцениваемой дисперсии из уравнения (12) от биномиальной дисперсии, будучи больше для процесса поощрения [см. уравнение (14)] и меньше для процесса наказания. Знаменатели в уравнениях (14) и (20) положительны, если оцениваемая дисперсия не превосходит максимальных значений для процесса поощрения, или не ниже минимальных значений для процесса наказания, совместимых с моделью, то есть когда  $\gamma \rightarrow \infty$  или  $\theta \rightarrow \infty$ .

На рис. 7 показана связь этого распределения наказания с независимым биномиальным распределением при помощи ряда распределений для  $N = 5$  и  $a = 0,6$  при различных значениях  $s$ . Влияние этой структуры наказания заключается в том, что количества людей, занятых деятельностью  $A$  и  $B$ , будут ближе к равенству, чем в случае независимого поведения индивидов.

### 3. ЭМПИРИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА

Предположим, что скептик скажет: «Ну и что? Все это элегантные интеллектуальные упражнения, но какое отношение они имеют к реальному миру? И как вы думаете их использовать в экспериментах и наблюдениях?» Сомнения скептика обоснованны, поскольку в деле практического использования моделей возникают серьезные проблемы. Укажем некоторые возможные способы практического применения моделей, и пусть скептик выдвигает возражения против каждого из них.

1) В проводимых экспериментах модель может использоваться для проверки математической формы установки и учета влияния поощрений и наказаний в группе. Результаты, показанные на рис. 4 и 7, описывают лишь некоторые возможности в этой области. Поскольку различные способы учета влияния будут давать различные равновесные распределения усилий в группах, экспериментальные распределения могут быть использованы для проверки правильности способа описания.

Но, говорит скептик, такая проверка ничего не дает, в большинстве случаев правильность способа описания можно проверить, сделав постоянной всю группу, за исключением одного члена. Проверка на индивидуальном уровне более эффективна, чем на групповом. Очевидно, если мы интересуемся действием психологических механизмов, лучше проверить их, не допуская бесконтрольно изменяющейся группы.

2) Предположим, однако, что определяемые членами группы взаимные поощрения незначительны и трудны для контроля и мы не можем «считать группу постоянной» (см. пункт 1). В этом случае скорее необходимо обратиться к следствиям, касающимся системы, чем к выводам относительно единственного «независимого» индивида.

Такое использование моделей обоснованно, скажет скептик. Тем не менее нужно помнить, что равновесное распределение — это только единственный вывод, который может быть проверен. Даже если группа не постоянна, за отдельными индивидами можно наблюдать какое-то время, обуславливая таким образом более сильные тесты по сравнению с тестами, обуславливающими единственное распределение.

3) Предположим на минуту, что мы *знаем*, какие индивидуальные механизмы заложены в этих моделях. Тогда ясно, что модели позволяют вычислять предсказания распределения усилий в группах при известных параметрах  $a$  и  $c$  или  $a$  и  $s$ .

Совершенно верно, заметит скептик, но мы еще далеки от такого знания. В лучшем случае мы знаем, при каких условиях процесс удовлетворяет предположению о независимых испытаниях Бернулли, и приходим, таким образом, к биномиальному распределению, то есть вырожденному случаю обеих моделей.

4) Можно использовать модели для «объяснения» наблюдаемых данных о действительно существующих группах (пример такого использования будет дан ниже).

Естественно, мы имеем одно из наиболее частных применений моделей этого типа, скажет скептик. Тем не менее можно быть совершенно уверенным, что эти данные могут быть одинаково хорошо объяснены рядом других моделей, получающихся при других предположениях. Трудно считать такое применение модели проверкой. Скорее, мы сводим распределения к паре параметров, интерпретация которых остается открытой.

5) Даже если мы не знаем точную форму эффекта поощрения и наказания, данные модели можно использовать при учете влияния частной структуры деятельности на поведение системы. Поскольку форма эффекта должна отличаться от постулируемой только в деталях, выводы о поведении системы должны быть ошибочны также только в деталях, если они вообще ошибочны. Это важно для социолога, интересующегося поведением системы. Если психологи не описывают ему форму процессов на уровне индивида, он должен допустить некоторую произвольную форму, с тем чтобы получить интересующие его результаты.

Ах, так, говорит скептик, я начинаю понимать, что вы делаете. В действительности вы заинтересованы в разработке теории, связывающей две переменные только на групповом уровне — в данном случае структуры поощрения выступают как независимая переменная, а распределение усилий среди различных деятельности — как зависимая переменная. Форма процесса на уровне индивида выступает у вас как неизбежное зло, которое должно быть использовано, чтобы связать эти две переменные



воедино. В этом случае данные, которые вам нужны, чтобы проверить вашу теорию, состоят из данных о группе, в которых обе переменные точно измерены: структура поощрения вместе с распределением усилий.

Однако, следует возразить скептику, он еще не полностью уяснил наши намерения. Если психологи хорошо сделали свою работу, так что можно доверять форме эффекта поощрения и наказания, вопрос «проверки» заключений на уровне группы не должен возникать, во всяком случае, не более чем вопрос проверки биномиального распределения, когда мы имеем  $N$  независимых опытов с одинаковой вероятностью успеха. В таком случае модель дает системные или агрегированные следствия этого процесса на уровне индивида. Интерес социолога к построению таких моделей заключается, таким образом, не столько в проверке отдельных процессов, сколько в синтезировании с целью проверки системных выводов.

Здесь необходимо указать на предельную слабость этих моделей в синтезе. Они значительно менее адекватны, чем это желательно, и слишком далеки от цели, которая имеется в виду. Мы надеемся, например, рассмотреть модель с рядом деятельностей, каждая из которых обладает собственной структурой поощрения, и получить затем равновесное распределение в различных деятельностях. Для действительно существующих систем такая модель должна быть более подходящей, чем описанные выше, ибо в социальных системах различные деятельности имеют различные структуры поощрения. В высших учебных заведениях, например в наиболее близкой нам области интересов, спортивная и учебная деятельности имеют совершенно разные структуры поощрения, как уже указывалось выше. Одна из наших главных целей состоит в описании ожидаемого распределения усилий в этих деятельностях, определяемого такими структурами поощрения.

Далее, поскольку структуры наказания и поощрения ведут и к другим следствиям, а не только к распределению усилий, мы надеемся проверить некоторые из них. Например, поощрения, исходящие от экспериментатора или члена группы, дают основание исполнителю связывать удовольствие с поощряющим и привязывают к нему; наказания дают основание исполнителю связывать непри-



ятность с наказывающим и отталкивают от него. Такие эффекты очевидны как в стенах лаборатории, так и в человеческих отношениях. Но предположим, что наказывающий или поощряющий не только экспериментатор, но и сам исполнитель, и предположим, что программа поощрения или наказания установлена структурой деятельностей в группе. Тогда можно вообразить себе модель, в которой зависимая переменная представляет собой не распределение усилий, но, скорее, результирующее притяжение или отвращение, испытываемое членами группы друг к другу.

Это некоторые из направлений, в которых, как я надеюсь, модели этого типа могут быть развиты в будущем. В силу пока имеющейся разницы между этими честлюбивыми целями и скромными результатами я должен представить эти результаты до некоторой степени нерешительно. Частично я поступаю таким образом, чтобы указать направление, в котором надеюсь достичь успеха, и частично — чтобы указать путь, каким могут следовать другие.

*Использование модели поощрения для объяснения эмпирических данных.* При выборе между двумя взаимно способствующими деятельностями или при поддержке одного из двух кандидатов на выборах существуют условия, в которых нужно ожидать действие структуры поощрения. В случае выборов иногда данные голосования зарегистрированы для групп. Наибольшая подборка таких данных, которая нам известна, содержит данные голосования на профсоюзных выборах среди полиграфистов в малых типографиях. Данные по профсоюзным ячейкам от 2 до 8 человек приведены в таблице 1. Очевидно, голоса избирателей распределены не случайно относительно этих групп. Слишком много для этого групп, в которых число голосов близко к предельному.

Для ячеек одинаковой численности были определены значения  $a$  (индивидуальное предпочтение кандидата  $A$ ) и  $c$  (параметр поощрения), по которым рассчитывались теоретические распределения, показанные на рис. 8 и 9. Значения  $a$  и  $c$  приведены в таблице 2. Некоторый интерес представляют значения  $c$ , поскольку (согласно модели) они определяют меру поощрения, оказываемого каждым членом группы по отношению к остальным. Из таблицы 2 очевидно, что  $c$  уменьшается с увеличением численности

Количество профсоюзных ячеек,  
численностью  $N$  в Нью-Йоркском союзе полиграфистов,  
в которых  $i$  человек голосовало за победившего кандидата

$N \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	2	11						
3	32	15	30	52					
4	22	13	20	26	62				
5	16	7	15	13	20	24			
6	9	8	19	14	17	18	21		
7	4	7	13	14	12	12	13	20	
8	5	4	2	6	8	9	6	9	16

Таблица 2

Значения  $a$  и  $c$  из уравнений (13)  
и (14) для данных таблицы 1

$N$	$a$	$c$
2	0,75	2,00
3	0,60	1,08
4	0,66	0,95
5	0,65	0,86
6	0,58	0,42
7	0,60	0,40
8	0,63	0,56

группы. Но чтобы ответить на вопрос, как уменьшается  $c$  с увеличением группы и что скрывается за этим, требуются дополнительные данные для больших групп, которые не могли быть представлены здесь. (Более полное рассмотрение данных приводится в [1].)

Это эмпирическое использование модели поощрения является примером в смысле пункта 4 предыдущего параграфа (стр. 263). Вся ценность такого применения выяснится при изучении изменения параметра в зависимости от некоторого группового признака (например, изменение  $c$  в зависимости от размера группы). Но можно повторить, что, с точки зрения социолога, вероятно, более ценно другое использование этих моделей (см. пункт 5, стр. 263).

Нам хотелось бы иметь аналогичное множество данных для модели наказания как для естественных, так и для экспериментальных ситуаций. По идее довольно просто поставить серию экспериментов, в которых каждый член,

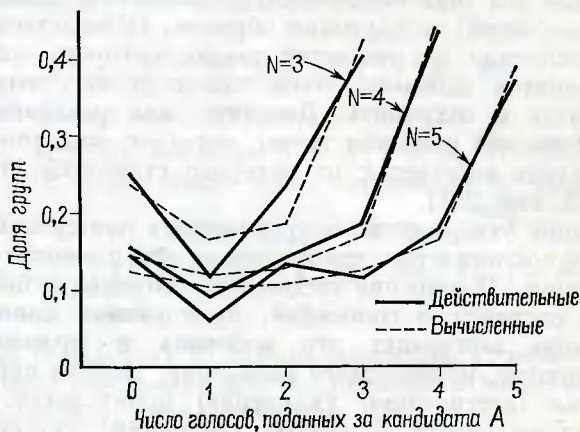


Рис. 8.

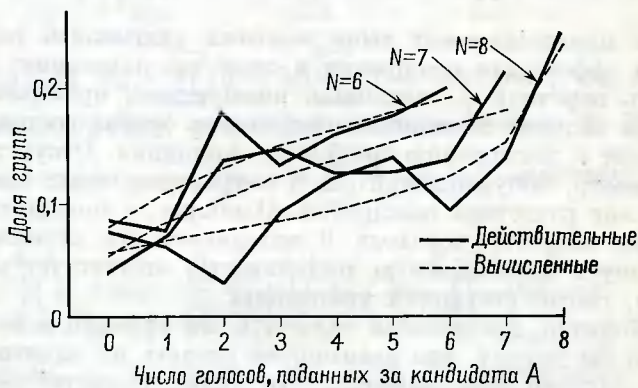


Рис. 9.

занятый некоторой деятельностью, определяет наказание для всех остальных, занятых той же деятельностью. Однако, к несчастью, нет систематических данных, которые иллюстрировали бы применение этой модели.

#### 4. ОБ ЭФФЕКТЕ ПООЩРЕНИЙ И НАКАЗАНИЙ

Торндайк в своем первоначальном обсуждении «закона эффекта» («law of effect») определил удовлетворительное состояние дел (при поощрении) и досадное состояние дел (при наказании) следующим образом: «Удовлетворительное положение дел является таким, которого животное не стремится избежать, чаще что-то делает, чтобы его достигнуть и сохранить. Досадное, или раздражающее, положение дел является таким, которого животное в общем случае избегает и от которого стремится оградить себя» [3, стр. 241].

Данное утверждение о проявлениях поощрений и наказаний состоит в том, что каждое из них приводит к двум следствиям. Поощрение побуждает субъекта к *достижению* и *сохранению* состояния, приносящего поощрение. Наказание заставляет его *избегать* и *отказываться* от состояния, приносящего наказание. Первая пара этих эффектов (достижение, уклонение) проявляется, когда индивид находится в другом состоянии; вторая пара (сохранение, отказ) проявляется, когда индивид уже находится в состоянии, в котором он поощрен или наказан.

В представленных выше моделях учитывался только один эффект для поощрения и один для наказания. Скорость перехода  $\gamma$ , вызванная поощрением, проявляется, когда индивид находится в *некотором другом* состоянии, и ведет к достижению требуемого состояния. Отсутствует параметр, побуждающий его к сохранению этого состояния как следствия поощрения. Наоборот, в модели наказания скорость перехода  $\theta$  определяет его стремление покинуть наказываемую деятельность; отсутствует параметр, соответствующий уклонению.

Конечно, невозможно включить эти эффекты в модель (хотя бы потому, что невозможно сделать их аддитивными). Однако нам кажется, что такие эффекты можно описать аналогичным образом исходя из единой концепции. Необходимо нечто типа вероятностного аналога давления или напряжения. Например, когда давление в сосуде мало по сравнению с внешним давлением, существуют два эффекта: газ, уже находящийся внутри сосуда, не покидает его, а близко находящийся газ проникает в сосуд. Требуется аналогичная концепция, которая подобным

образом учитывала бы входящую и выходящую скорости перехода.

[Примечание редакторов английского текста. Приводим вывод распределения Кольмена (10). Кольмен в своих уравнениях (7), (8), (9) дал соотношение:

$$p_j/p_0 = \binom{N}{j} \prod_{k=0}^{j-1} (\alpha + k\gamma) / \prod_{N-j}^{N-1} (\beta + k\gamma), \quad (1)$$

которое, если мы положим  $a = \alpha/(\alpha + \beta)$ ,  $b = \beta/(\alpha + \beta)$  и  $c = \gamma/(\alpha + \beta)$ , может быть переписано в следующей форме:

$$p_j/p_0 = \binom{N}{j} \prod_{k=0}^{j-1} (a + kc) \prod_{k=0}^{N-j-1} (b + kc) / \prod_{k=0}^{N-1} (b + kc). \quad (2)$$

Так как сумма всех  $p_j$  должна равняться 1, можно получить явное выражение для  $p_j$ . Кольмен в качестве решения записывает свое уравнение (10):

$$p_i = \binom{N}{i} \prod_{k=0}^{i-1} (a + kc) \prod_{k=0}^{N-i-1} (b + kc) / \prod_{k=0}^{N-1} (1 + kc). \quad (3)$$

Поскольку  $p_0 = \prod_{k=0}^{N-1} (b + kc) / \prod_{k=0}^{N-1} (1 + kc)$ , ясно, что отношения  $p_j/p_0$  будут равны требуемым значениям (2). Необходимо только показать, что  $\sum_{j=0}^N p_j = 1$  или, используя (3), что

$$\prod_{k=0}^{N-1} (1 + kc) = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} \prod_{k=0}^{i-1} (a + kc) \prod_{k=0}^{N-i-1} (b + kc). \quad (4)$$

Докажем, по индукции, что если (4) справедливо для определенного значения  $N$ , то оно будет также справедливо для  $N + 1$ .

Для этого умножим сначала обе части (4) на  $(1 + Nc)$ . Часть слева тогда получит требуемый вид, то есть

$$\prod_{k=0}^N (1 + kc).$$



Для правой части воспользуемся тем, что  $1 + Nc = a + b + Nc = a + ic + b + (N - i)c$  для любого  $i$ . Почленно умножая под знаком суммы, имеем

$$\prod_{k=0}^N (b + kc) + \sum_{i=1}^N \binom{N}{i} \prod_{k=0}^{i-1} (a + kc) \prod_{k=0}^{N-i} (b + kc) + \\ + \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} \prod_{k=0}^i (a + kc) \prod_{k=0}^{N-i-1} (b + kc) + \prod_{k=0}^N (a + kc).$$

Заменяя  $i$  на  $i - 1$  во второй сумме и соответственно меняя пределы суммирования, сводим к виду

$$\prod_{k=0}^N (b + kc) + \sum_{i=1}^N \left( \binom{N}{i} + \binom{N}{i-1} \right) \left( \prod_{k=0}^{i-1} (a + kc) + \right. \\ \left. + \prod_{k=0}^{N-i} (b + kc) \right) + \prod_{k=0}^N (a + kc).$$

Поскольку  $\binom{N}{i} + \binom{N}{i-1} = \binom{N+1}{i}$ , последнее выражение представляется в виде, необходимом для завершения доказательства:

$$\prod_{k=0}^N (1 + kc) = \sum_{i=0}^{N+1} \binom{N+1}{i} \prod_{k=0}^{i-1} (a + kc) \prod_{k=0}^{N-i} (b + kc) \Big].$$

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. James S. Coleman, Introduction to Mathematical Sociology, Glencoe, Ill., Free Press, 1964.
2. William Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2d ed., vol. 1, New York, Wiley, 1957; русск. перев.: У. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, изд-во «Мир», М., 1967.
3. E. L. Thorndike, Animal Intelligence, New York, Macmillan, 1911.

# МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ МНЕНИЯ ПРИ ПОВТОРНОМ ГОЛОСОВАНИИ

*Ж. Кревера*

Статья посвящается использованию цепей Маркова при изучении определенного мнения, выраженного группой лиц.

В параграфах 1 и 2 излагаются формальные условия выражения индивидуального мнения. В них речь идет главным образом о простом выборе, не с условием предпочтения того или иного мнения, а с возможностью выражения мнений в некоторой последовательности (примером могут служить выборы в несколько туров). Вводится понятие «состояние мнения».

В параграфе 3 определяется различие между решительными и нерешительными избирателями, а также в более точных терминах теории вероятности описывается, как результаты предшествующего голосования должны влиять на нерешительных при повторном голосовании.

В параграфе 4 рассматривается закон образования общей матрицы вероятностей перехода для случайной последовательности различных возможных состояний мнения.

В параграфе 5 наминаются элементарные понятия спектрального анализа, полезные для установления качественных и количественных характеристик процесса.

В параграфе 6 излагаются результаты спектрального анализа в применении к заданным матрицам и приводится общая схема доказательства.

В параграфе 7 описываются результаты для случая эргодического процесса, то есть когда имеются решительные избиратели.

Рассматриваются случаи, когда: 1) каждый выбор имеет своих решительных последователей; 2) некоторые выборы не имеют подобных последователей и 3) только

один выбор имеет решительных последователей. В последнем случае имеется тенденция к единодушию.

Параграф 8 относится к случаю, когда все избиратели являются нерешительными. Мы показываем, что все еще имеется стремление (хотя и небольшое) к единодушию, но характер единодушия зависит от первоначального состояния.

В параграфе 9 представляем метод вычисления *средней продолжительности* процесса при различных условиях.

В параграфе 10 дается несколько числовых результатов, установленных выше.

В параграфе 11 приводятся некоторые замечания относительно модели и указываются ее возможные применения.

## 1. ФОРМАЛЬНЫЕ ГИПОТЕЗЫ

Предположим, что членов коллектива  $V$ , состоящего из  $v$  избирателей, просят сделать выбор из некоторого множества  $\Omega$ , содержащего  $\omega$  возможных вариантов выборов.

Предполагается, что каждый из  $v$  избирателей должен сделать только один выбор, он не может сделать одновременно несколько выборов (но он может «воздержаться» от голосования; необходимо только условиться, что  $\Omega$  содержит отдельный выбор воздержания).

Совершенно ясно, что существует  $\omega^v$  различных возможных наборов ответов группы  $V$  по отношению к множеству  $\Omega$  выборов. Каждый набор характеризует *определенное состояние общественного мнения*, которое выясняется при подсчете голосов, если каждый избиратель выразит свое мнение в списке кандидатов или письменно выскажет свое особое мнение.

Во многих процедурах (вероятно, в большинстве) мы не интересуемся состоянием общественного мнения, как таковым, а лишь численным его выражением, то есть числом голосов в пользу того или иного выбора. Часто принимаются решительные меры, чтобы подсчет бюллетеней не мог (кроме особого случая единодушия) идентифицироваться с предполагаемыми результатами — это основной принцип закрытого голосования.

Если обозначить различные выборы натуральными числами от 1 до  $\omega$ , то каждое (выраженное числом) состоя-

ние общественного мнения (в дальнейшем мы будем говорить «состояние»), можно характеризовать

числом  $v_1$  избирателей, сделавших выбор 1,  
 «  $v_2$  « « 2,  
 «  $v_3$  « « 3,  
 . . . . .  
 «  $v_\omega$  « «  $\omega$ ,

то есть с помощью набора целых положительных чисел, сумма которых равна  $v$ . Это важно для вычисления количества возможных априори состояний. Легко показать, что имеется

$$\frac{(\omega-1+v)!}{(\omega-1)! v!} = \binom{\omega-1+v}{\omega-1}$$

таких состояний.

Например, если число избирателей  $v = 7$  и количество выборов  $\omega = 3$ , то существует  $\binom{9}{2} = 36$  возможных (исчисленных) состояний; понятно, что число всех возможных состояний  $3^7 = 2187$ . Ниже мы рассмотрим особый случай, когда  $\omega = 2$ ; при этом будет точно  $v + 1$  возможных состояний.

## 2. ТЕХНИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Цель нашего исследования состоит в том, чтобы «найти большинство» в пользу отдельного выбора; будем считать, что этот выбор сделан группой.

Слово «большинство» имеет разный смысл в зависимости от соглашений, принятых по поводу выборов; мы не смогли бы дать здесь полный перечень таких соглашений. В некоторых случаях можно считать, что мнение  $n$  принимается, если для него получено больше голосов, чем для любого другого мнения. Это правило относительного большинства. В других случаях считается, что выбрано мнение  $n$ , если это мнение собралось больше голосов, чем все другие, вместе взятые; это так называемое правило абсолютного большинства. Можно также усилить правило абсолютного большинства дополнительным условием: некоторое мнение считается принятым, если оно собралось опре-

деленную «критическую» часть (свыше половины) голосов, часто две трети, иногда даже 100%. Это так называемое квалифицированное большинство. Другое правило более слабое, чем правило абсолютного большинства; оно требует некоторого критического числа голосов, которое может составлять меньше половины всех голосов, но при этом требуется сочетание этого условия с наличием правила относительного большинства.

Два типа формальных причин могут препятствовать исследованию, имеющему целью получить большинство голосов. Причины первого типа связаны главным образом с тем случаем, когда имеется немного избирателей ( $\omega$  мало); при этом иногда трудно получить даже относительное большинство, поскольку возникают ситуации, когда два или более выбора «лидируют», но имеют равное число голосов. Иногда приходится прибегать к помощи жребия или использовать правило предпочтения в соответствии с вспомогательным критерием (таким, например, как возраст, если проводится выбор между кандидатами на некоторую должность). Причины другого типа, возникающие из-за более серьезных трудностей, имеют место главным образом тогда, когда существует много выборов, и они обусловлены возможностью появления такой ситуации, когда ни один из выборов не получает достаточное число голосов выше критического уровня, установленного правилом. Так, например, в случае абсолютного большинства риск подобного типа возрастает при числе выборов больше двух и существует даже при  $\omega = 2$ , если, например, критическая доля голосов составляет две трети (исключая, конечно, особый случай, когда имеются всего три избирателя).

При отсутствии достаточного большинства голосование повторяется. (Имеются другие пути: например, мы могли бы допустить или даже обязательно внести изменения в множество  $\Omega$  выборов, предлагаемых избирателям, но мы будем говорить лишь о таких изменениях, которые оставляют неизменным как  $\Omega$ , так и  $V$ .) Это есть процедура «повторного голосования».

Число следующих друг за другом голосований иногда строго ограничено самим правилом голосования, которое может устанавливать, что максимальное число голосований должно быть  $N$  и что в случае, если требуемое большинство не достигнуто при  $N$  турах голосования, должно



быть сделано то или иное снижение требуемого большинства или голосование проводится вновь спустя некоторое время. Но иногда правило не ограничивает число туров голосования, пока не будет сделан определенный выбор. Тогда туры голосования продолжают следовать друг за другом. Этой ссылки мы будем придерживаться в дальнейшем, если не будет сделано никакой оговорки.

### 3. ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Использование метода повторных голосований основано, очевидно, на убеждении, что результаты выборов будут меняться от одного тура к другому, что неоднократно подтверждалось практически.

Такие изменения могут быть весьма разнообразными, и мы не ставим целью дать их полный перечень. Наиболее важные изменения связаны, по-видимому, с количественными результатами, которые сообщаются после голосования, и особенно с тем влиянием, которое эти сведения об «общественном мнении», выраженном в предыдущем голосовании, оказывают на избирателя, когда он составляет свое собственное мнение.

Нам необходимо принять некоторые предположения относительно того, как проявляется это влияние. Предположения могут показаться слишком простыми, таковы они на самом деле. Более привлекательные предположения привели бы нас к серьезным затруднениям с нашей математической моделью, и, кроме того, результаты, которые мы получим, по-видимому, не противоречат значительному числу фактов.

Эти предположения следующие. Совокупность из  $v$  избирателей состоит из двух категорий избирателей, которых мы будем называть «решительными» и «нерешительными»; число последних будет  $s$ , а первых  $v - s$ . Мы считаем, что решительные избиратели никогда не меняют своих мнений и голосуют одинаково при каждом туре голосования.

Если  $\omega = 2$ , то будет удобно обозначить через 0 и 1 два выбора, а через  $r$  и  $r'$  обозначить число решительных сторонников соответственно выборов 0 и 1, так что

$$r + r' = v - s.$$

Что касается нерешительных избирателей, то их выбор обусловлен в известной мере случайными факторами, то есть имеет некоторую вероятность, которая равна отношению числа голосов, поданных в предыдущем голосовании за соответствующее мнение, к общему числу участвовавших в голосовании.

Предположим, например, что имеется 13 избирателей ( $v = 13$ ) и мнения 0 и 1 собрали соответственно 9 и 4 голоса (состояние (9,4), если принять обычные обозначения). Тогда *каждый из нерешительных избирателей* будет голосовать в пользу мнения 0 с вероятностью  $9/13$  и в пользу мнения 1 с вероятностью  $4/13$ . В этом примере возможны 14 состояний, но все они не будут иметь места, если предположить наличие решительных избирателей. Если, например, имеется 3 решительных сторонника мнения 0 и два решительных сторонника мнения 1 ( $r = 3, r' = 2$ ), то остается ( $s =$ ) 8 нерешительных избирателей и поэтому только ( $s+1 =$ ) 9 возможных состояний, начиная от состояния (11,2), когда все нерешительные будут голосовать за 0, и кончая состоянием (3,10), когда все нерешительные будут голосовать за 1.

В дальнейшем для удобства примем упрощенные обозначения для различных возможных состояний, указывая только число нерешительных избирателей, которые голосуют в пользу мнения 0. Таким образом, в указанном выше примере ( $v = 13, r = 3, r' = 2$ ) вместо того, чтобы говорить о состоянии (9,4), мы будем говорить о состоянии (6); такое обозначение следует понимать как более удобное. При данном голосовании число  $j$  никогда не имеет места, так же как и число  $j' = s - j$  и даже сумма  $s$  не встретится; встретится только  $j + r$  и  $j' + r'$  (здесь 9 и 4), сумма которых  $v$  (здесь 13) известна.

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕССА

Сформулированные выше условия означают, что последовательность голосований является марковским процессом с  $s+1$  возможными состояниями. Этот процесс, по существу, определяется квадратной матрицей  $M$  вероятностей перехода ( $p_i^j$ ) из состояния ( $j$ ) в состояние ( $i$ ). Будем считать, что индекс  $i$  определяет номер строки,

а индекс  $j$  — номер столбца, так что сумма элементов каждого столбца равна единице <sup>1</sup>.

$$\sum_{i=0}^s p_i^j = 1 \quad (j = 0, 1, \dots, s). \quad (1)$$

Если имело место состояние  $(j)$ , то каждый из нерешительных избирателей будет голосовать в пользу мнения 0 с вероятностью  $(j + r)/v$  и в пользу мнения 1 с вероятностью  $(j' + r')/v$  (вторая вероятность есть дополнительная к первой, то есть их сумма равна 1). При этих условиях вероятность того, что мнение 0 получит  $i$  голосов, поданных нерешительными избирателями, равна величине  $p_i^j$ , которая определяется биномиальным законом  $i' = s - i$ ):

$$p_i^j = \frac{s!}{i! i'!} \left( \frac{j+r}{v} \right)^i \left( \frac{j'+r'}{v} \right)^{i'} \quad (2)$$

или

$$p_i^j = \frac{s!}{v^s} \frac{(j+r)^i (j'+r')^{i'}}{i! i'!}. \quad (2)$$

Таким образом, матрица  $M$  полностью определена. Если мы обозначим через  $P_N$  вектор-столбец, компоненты которого являются вероятностями различных состояний после  $N$  туров голосования, то получим (по теории вероятностей и правилу умножения матриц)

$$P_{N+1} = M P_N.$$

Чтобы полностью определить вектор-столбец, нужно ввести «начальные условия» в качестве вектора  $P_0$ , что позволит нам написать равенство

$$P_N = M^N P_0.$$

Вектор  $P_0$  можно интерпретировать следующим образом.

1. Если мы следим за процессом с самого начала, то будем считать, что числа 1, 2, . . . ,  $N$  — номера туров голосования, а 0 — номер только что закончившегося

---

<sup>1</sup> Автор определяет матрицу вероятностей перехода так, что суммы элементов *столбцов* равны 1 в противоположность принятому американскому обозначению, согласно которому суммы элементов *строки* равны 1. — Прим. ред. англ. текста.

голосования. Результат последнего голосования есть некоторое состояние ( $j_0$ ). Вектор  $P_0$  имеет одну компоненту, равную 1, которая соответствует состоянию ( $j_0$ ), а все другие компоненты этого вектора равны 0 (чистый начальный вектор).

2. Здесь не может быть «нулевого» голосования, но газеты или полиция до начала процесса могут создавать такие психологические условия, при которых складывается впечатление, что голосование проходило, например, с помощью «объявления» состояния ( $j_0$ ). В таком случае все компоненты вектора  $P_0$  будут равны 0, кроме одной, равной 1 и относящейся к состоянию ( $j_0$ ).

3. В добавление к этому можно представить себе, что имеется несколько газет, каждая из которых создает «чистый начальный вектор» предыдущего типа. Если мы предположим, что нерешительные избиратели находятся под случайным влиянием различных газет до первого голосования, вероятность получить информацию газеты, рекламирующей состояние ( $j_0$ ), дает интерпретацию компоненты вектора  $P_0$ , относящейся к состоянию ( $j_0$ ) (смешанный начальный вектор).

## 5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1) Пусть  $M$  — матрица, содержащая  $(s + 1)$  строк и  $(s + 1)$  столбцов, матрица  $M^N$  может быть найдена путем вычисления матрицы  $\Delta^N$  ( $N$ -й степени матрицы  $\Delta$ ), где  $\Delta$  — матрица, *подобная*  $M$ . Говорят, что матрица  $\Delta$  подобна матрице  $M$ , если можно найти такую обратную матрицу  $A$ , что будет иметь место равенство

$$M = A^{-1}\Delta A. \quad (3)$$

Тогда для любого целого положительного числа  $N$  справедливо равенство

$$M^N = A^{-1}\Delta^N A. \quad (4)$$

Это преобразование подобия оказывается особенно полезным в том случае, когда среди матриц, подобных  $M$ , есть такая матрица  $\Delta$ , которая является диагональной; диагональными элементами этой матрицы будут числа  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , все остальные элементы — нули. Но тогда



матрица  $\Delta^N$  является диагональной и элементами главной диагонали ее служат числа  $\lambda_0^N, \dots, \lambda_s^N$ . Пусть  $(L_0, L_1, \dots, L_s)$  — совокупность строк матрицы  $A$ , а  $(C_0, C_1, \dots, C_s)$  — совокупность столбцов матрицы  $A^{-1}$ . Тогда из формулы (4) легко получить

$$M^N = \lambda_0^N C_0 L_0 + \lambda_1^N C_1 L_1 + \dots + \lambda_s^N C_s L_s. \quad (5)$$

2) Все вычисления, необходимые для представления матрицы в форме (3), обычно называются *спектральным анализом* (см., например, [4] или [7]); если они приводят к диагональной матрице (это бывает часто, но не всегда), то говорят, что матрица  $M$  *приводима к диагональному виду*. Матрицы  $M$ , которые рассматриваются ниже, всегда обладают этим свойством. Равенство (3) можно записать также в следующем виде:

$$AM = \Delta A \quad \text{или} \quad MA^{-1} = A^{-1}\Delta.$$

Эти два соотношения в случае, когда  $\Delta$  — диагональная матрица, дают  $s+1$  равенств соответственно для векторов-строк

$$L_k M = \lambda_k L_k \quad (k=0, 1, \dots, s) \quad (6)$$

и для  $s+1$  векторов-столбцов

$$M C_k = \lambda_k C_k \quad (k=0, 1, \dots, s). \quad (7)$$

Векторы  $L_k$  ( $k=0, 1, \dots, s$ ), образующие совокупность  $s+1$  независимых векторов-строк, называются *характеристическими векторами-строками* матрицы  $M$ ; аналогично  $s+1$  независимых векторов-столбцов  $C_k$  называются *характеристическими векторами-столбцами* матрицы  $M$ . Характеристические векторы являются векторами, результат умножения которых как на матрицу  $M$ , так и на число  $\lambda_k$  один и тот же. Числа  $\lambda_k$  называются собственными значениями (спектральными или характеристическими числами); вместе они составляют спектр матрицы  $M$ .

3) Наиболее употребительный метод спектрального анализа состоит в нахождении сначала собственных значений путем решения уравнений (с неизвестным  $\lambda$ ), которое называется характеристическим уравнением и полу-



чается из условия, что матрица  $M - \lambda I$  ( $I$  — единичная матрица) является вырожденной. Этот метод не может быть легко применен к матрицам  $M$ , с которыми мы имеем дело. Мы увидим в параграфе 6, что свойства элементов  $(p_{ij}^k)$  матрицы  $M$  позволяют нам вычислять векторы  $L_k$  и соответствующие им собственные значения  $\lambda_k$  одновременно.

Матрицы перехода марковского случайного процесса (часто они называются стохастическими матрицами) характеризуются тем, что все их элементы неотрицательны и сумма элементов каждого столбца равна 1. Все эти матрицы имеют с точки зрения спектрального анализа некоторые специфические свойства, из которых особенно полезны следующие (см. [2]):

а) Нет собственных значений, модуль которых больше 1.

б) Целое число 1 само всегда является собственным значением — иногда простым, иногда кратным.

в) Пусть  $\lambda = 1$  — простое собственное значение (то есть встречается только один раз) и пусть, кроме того, модули всех других собственных значений меньше 1. Тогда из равенства (5) следует, что при  $N \rightarrow \infty$  матрица  $M^N$  сходится к  $C_0 L_0$ , а  $P_N = M^N P_0$  сходится к  $C_0 L_0 P_0$ . Но мы можем считать, что  $L_0$  есть вектор-строка, чьи компоненты равны 1, так как мы имеем  $L_0 M = L_0 (= 1 \times L_0)$  в силу свойств сумм столбцов матрицы  $M$ . Поэтому  $L_0 P_0 = 1$  независимо от того, каким является  $P_0$  (элементами  $P_0$  служат вероятности, сумма которых равна 1) и  $P_N$  сходится к  $C_0$  независимо от  $P_0$ . Существует поэтому вектор  $C_0$  (ниже мы будем обозначать его через  $E$ ), который определяет предельное распределение вероятностей, к которому векторы вероятностей сходятся при  $N \rightarrow \infty$ ; это предельное распределение не зависит от выбора  $P_0$ .

Если этот факт имеет место, то предельный вектор  $E$ , или  $C_0$  (он является характеристическим вектором-столбцом, соответствующим собственному значению  $\lambda_0 = 1$ ), иногда называют эргодическим вектором, а сам процесс называется эргодическим. Эргодический процесс дает нам возможность, если мы имеем в виду достаточно далекое будущее, получить вероятностный прогноз, практически не зависящий от того, что известно в настоящее время.

## 6. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА

Вернемся к вероятности  $p_i^j$ , которая связывает состояние  $(j)$  с состоянием  $(i)$

$$p_i^j = \frac{s!}{v^s} \frac{(j+r)^i}{i!} \frac{(j'+r')^{i'}}{i'!}, \quad (7)$$

$$i + i' = j + j' = s,$$

и покажем, что они удовлетворяют тождествам, которые позволяют дать спектральный анализ матрицы  $M$ . Будем использовать краткое обозначение для «факториальных многочленов» и условимся, что для каждого целого положительного числа  $n$  имеет место

$$(x)_n = x(x-1) \dots (x-n+1) \quad (8)$$

и что  $(x)_0 = 1$  и  $(x)_1 = x$ .

1. Сначала докажем, что для каждого целого  $k$ , такого, что  $0 \leq k \leq s$ , будем иметь

$$\sum_{i=0}^s (i)_k p_i^j = \frac{(s)_k}{v^k} (j+r)^k. \quad (9)$$

В левой части равенства (9) присутствуют только члены с номерами  $i$ , такими, что  $k \leq i \leq s$ , так как  $(i)_k = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, k-1$  в силу выражения (8). Кроме того, заметим, что при  $i \geq k$  имеют место равенства

$$\frac{(i)_k}{i!} = \frac{1}{(i-k)!} \quad \text{и} \quad (j+r)^i = (j+r)^{i-k} (j+r)^{i-k},$$

так что

$$\sum_{i=0}^s (i)_k p_i^j = \frac{s!}{v^s} (j+r)^k \sum_{i=k}^s \frac{(j+r)^{i-k} (j'+r')^{i'}}{(i-k)! i'!}.$$

В последней сумме положим:  $i - k = \alpha$ ,  $i' = \alpha'$  при  $\alpha + \alpha' = s - k$ , чтобы упростить запись; тогда последнюю сумму можно записать так:

$$\frac{1}{(s-k)!} \sum_{\alpha=0}^{s-k} \frac{(s-k)!}{\alpha! \alpha'!} (j+r)^\alpha (j'+r')^{\alpha'}.$$

Полученная сумма равна  $v^{s-k}/(s-k)!$  по биномиальной формуле, где  $(j+r) + (j'+r') = v$ . Окончательно будем

ИМЕТЬ

$$\sum_{i=0}^s (i)_k p_i^j = \frac{s!}{v^s} (j+r)^k \frac{v^{s-k}}{(s-k)!}$$

и, учитывая, что  $s!/(s-k)! = (s)_k$ , получим

$$\sum_{i=0}^s (i)_k p_i^j = \frac{(s)_k}{v^k} (j+r)^k.$$

Заметим, что здесь  $k$  — любое целое число, удовлетворяющее условию  $0 \leq k \leq s$ . Таким образом, равенство (9) установлено для  $s+1$  разных значений  $k$ . В частности, при  $k=0$  мы снова приходим к равенству (1).

2. Равенство (9) дает возможность найти совокупность многочленов от неизвестных

$$L_0(x), L_1(x), \dots, L_k(x), \dots, L_s(x),$$

имеющих следующие свойства: степень каждого члена равна его индексу, коэффициент старшего члена равен 1 и, кроме того,

$$\sum_{i=0}^s L_k(i) p_i^j = \frac{(s)_k}{v^k} L_k(j) \quad \text{для} \quad \begin{matrix} j=0, 1, \dots, s \\ k=0, 1, \dots, s. \end{matrix} \quad (10)$$

То есть  $L_1(x) = x + B$ ,  $L_2(x) = x^2 + Cx + D$  и т. д., где коэффициенты  $B, C, D, \dots$  должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось уравнение (10). Эти многочлены можно определить последовательно, начиная с  $L_0(x) = 1$ . Например, положив  $L_1(x) = x + B$  и используя уравнение (10), получим

$$\sum_{i=0}^s (i+B) p_i^j = \frac{s}{v} (j+B),$$

откуда

$$\sum_{i=0}^s i p_i^j + B \sum_{i=0}^s p_i^j = \frac{s j}{v} + \frac{s B}{v}.$$

Равенство (9) дает

$$\sum_{i=0}^s i p_i^j = \frac{s}{v} (j+r) \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^s p_i^j = 1,$$

так что

$$\frac{rs}{v} = \frac{s}{v} B - B, \quad B = \frac{-rs}{v-s},$$

и, наконец,

$$L_1(x) = x - \frac{rs}{v-s}.$$

Вычисление коэффициентов любого многочлена  $L_k(x)$ , хотя и требует для этого немало времени, всегда можно проделать, используя равенство (9)<sup>1</sup>.

Окончательно будем иметь  $s+1$  различных собственных значений (где в общем случае  $s < v$ )

$$1, \frac{s}{v}, \frac{s(s-1)}{v^2}, \dots, \frac{s!}{v^s}.$$

Элементы соответствующих характеристических векторов-строк можно вычислить, придавая неизвестному  $x$  в  $L_k(x)$  по очереди различные значения  $0, 1, \dots, s$ .

Как только вычислены характеристические векторы-строки, можно, если это необходимо, найти характеристические векторы-столбцы  $C_k$ , либо вычисляя матрицу  $A$  (сама матрица  $A$  образуется из векторов  $L_0, L_1, \dots, L_s$ ), либо решая уравнение (7), в котором нам известны числа  $\lambda_k = (s)_k/v^k$ .

## 7. СЛУЧАЙ, КОГДА ИМЕЮТСЯ РЕШИТЕЛЬНЫЕ ИЗБИРАТЕЛИ

Это общий случай, который характеризуется строгим неравенством  $s < v$ . Число 1 является простым собственным значением, а остальные собственные значения заключены строго между 0 и 1; выше мы видели, что это условие достаточно, чтобы процесс был эргодическим.

В нашем случае эргодический вектор  $E = (E_0, E_1, \dots$

---

<sup>1</sup> Заметим, что равенство (10) имеет ту же форму, что и равенство (6), которое определяет характеристические корни и векторы матрицы перехода. Тот факт, что должны существовать многочлены  $L_k(x)$ , удовлетворяющие уравнению (10), означает, что собственные значения матрицы равны  $(s)_k/v^k$  для всех  $k$ . — Прим. ред. *англ. текста.*

$\dots, E_i, \dots, E_s)$  имеет неотрицательные компоненты, однозначно определяемые из системы уравнений

$$\sum_{j=0}^s p_i^j E_j = E_i \quad (i=0, 1, \dots, s), \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^s E_j = 1. \quad (12)$$

Здесь  $E_i$  — предельная вероятность кандидата 0 (когда  $N$  очень велико), набирающего  $i$  голосов при  $N$ -й баллотировке, каковы бы ни были начальные условия.

1. Предположим сначала, что числа  $r$  и  $r'$  неотрицательны (то есть каждая альтернатива имеет по крайней мере одного решительного сторонника.) Из равенства (2) ясно, что ни одно число  $p_j^i$  не может равняться нулю. Поэтому ни одно из чисел  $E_i$  не может оказаться равным нулю, так как если  $E_i = 0$ , то из равенства (11) следует, что все  $E_j$  должны быть нулями, что противоречит равенству (12).

Отсюда каждое из реализуемых состояний имеет неотрицательную эргодическую вероятность, то есть будет, несомненно, иметь место в конечном счете, если голосование продолжается неограниченно. Предположим, в частности, что правило выборов предписывает достаточное число туров голосования, чтобы одна из альтернатив 0 и 1 собрала, скажем, более двух третей голосов; чтобы это стало возможным, необходимо, чтобы большее из отношений  $(r + s)/v$  и  $(r' + s)/v$  было равно или превышало две трети. Мы знаем теперь, что это достаточно также для того, чтобы процесс имел конечную длину (конечное число туров голосования); математическое ожидание искомой величины можно вычислить (см. параграф 9).

В итоге, если голосование продолжается неограниченно, различные возможные состояния ( $i$ ) будут следовать друг за другом и повторяться в кажущемся беспорядке. Однако, если после  $N$  туров голосования мы вычислим среднее значение числа нерешительных избирателей, выбравших мнение 0, то есть  $(i_1 + i_2 + \dots + i_N)/N$ , то найдем, что эта случайная величина стремится к некоторому определенному значению

$$e = \sum_{i=0}^s i E_i. \quad (13)$$



Хотя в общем случае  $e$  не является целым числом, так же как и  $e' = s - e$ , можно считать, что  $e$  определяет «среднее состояние», или, другими словами, что  $e$  и  $e'$  определяют «среднее распределение» избирателей, которые колеблются при выборе мнений 0 и 1.

Отметим следующий интересный факт: числа  $e$  и  $e'$  пропорциональны  $r$  и  $r'$ , то есть нерешительные избиратели распределены «в среднем» пропорционально решительным избирателям. В самом деле, мы имеем

$$e = \sum_{i=0}^s i E_i = \sum_{i=0}^s (i \sum_{j=0}^s p_i^j E_j) = \sum_{j=0}^s (\sum_{i=0}^s i p_i^j) E_j.$$

Теперь выражение в круглых скобках благодаря соотношению (10) равно  $\frac{s}{v} (j + r)$ , откуда

$$e = \sum_{j=0}^s \frac{s}{v} (j + r) E_j = \frac{s}{v} \sum_{j=0}^s j E_j + \frac{sr}{v} \sum_{j=0}^s E_j.$$

Используя равенства (13) и (12), получим

$$e = \frac{se}{v} + \frac{sr}{v},$$

$$e = \frac{rs}{v-s}.$$

Так как  $e' = s - e$ , то

$$e' = \frac{r's}{v-s},$$

что мы и утверждаем.

2. Теперь предположим, что одна из альтернатив, скажем 1, имеет решительных сторонников ( $r = 0$ ,  $r' \neq 0$ ), в то время как другая альтернатива, 0, не имеет таковых и, таким образом, может появиться в качестве временного выбора нерешительных избирателей.

В столбце 0 матрицы  $M$  будем иметь

$$p_0^0 = 1 \text{ и } p_i^0 = 0 \text{ для } i \neq 0.$$

Состояние (0), которое выражает единодушие в пользу мнения 1, есть «поглощающее состояние»: при условии случайности оно должно повторяться неограниченно в силу наших предположений.

Процесс не перестанет быть эргодическим, но компонента  $E_0$  эргодического вектора равна 1, а все другие компоненты равны нулю.

Единодушие в пользу мнения 1 несомненно в конечном счете даже тогда, когда  $r' = 1$  независимо от того, какова была расположенность к выбору мнения 1 в первоначальном состоянии. Таким образом, настойчивое меньшинство восторжествует в конце концов над колеблющимся большинством.

## 8. СЛУЧАЙ, КОГДА ВСЕ ИЗБИРАТЕЛИ НЕРЕШИТЕЛЬНЫЕ

Рассмотрим специальный случай, когда  $r = r' = 0$  ( $v = s$ ). Спектральный анализ, приведенный в параграфе 6, остается в силе, за исключением того, что собственные значения 1 и  $s/v$  перестают быть различными. Число 1 теперь является собственным значением кратности 2, и имеются  $s - 1$  других собственных значений

$$\frac{s-1}{s}, \frac{(s-1)(s-2)}{s^2}, \dots, \frac{(s-1)!}{s^{s-1}}.$$

Однако и в этом случае матрицу  $M$  можно привести к диагональному виду, так как имеются два независимых вектора-строки

$$L_0 = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

$$L_1 = [0 \ 1 \ 2 \ \dots \ s],$$

и эти векторы являются характеристическими; каждый из них соответствует собственному значению 1. Заметим, что для нахождения компонент вектора  $L_1$  достаточно из равенства (10) при  $k = 0$ ,  $k = 1$  и  $r = 0$  найти  $L_1(x) = x$ .

Кроме того,  $p_0^0 = p_s^s = 1$ ; столбец 0 матрицы  $M$  состоит из одной единицы, за которой следуют нули; последний элемент  $s$ -го столбца матрицы  $M$  равен 1, а все предыдущие элементы равны 0. Каждый вектор-столбец с  $s + 1$  компонентами, из которых только первая и последняя отличны от нуля, является характеристическим вектором-столбцом, соответствующим собственному значению 1. В частности, первые два столбца  $C_0$  и  $C_1$  матрицы  $A^{-1}$ , которые могут быть найдены из четырех условий

$$L_0 C_0 = L_1 C_1 = 1 \quad \text{и} \quad L_0 C_1 = L_1 C_0 = 0,$$

будут

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1/s \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1/s \end{pmatrix}$$

Когда  $N$  неограниченно возрастает,  $M^N$  в силу равенства (5) стремится к  $C_0 L_0 + C_1 L_1$  и  $P_N = M^N P_0$  стремится к

$$C_0 L_0 P_0 + C_1 L_1 P_0 = C_0 + C_1 (L_1 P_0).$$

Но  $L_1 P_0$  имеет простую интерпретацию. Если, например,  $P_0$  — «чистый начальный вектор» (см. параграф 4), единственная ненулевая компонента которого есть состояние ( $i_0$ ), то  $L_1 P_0 = i_0$ . Тогда  $P_N$  стремится к  $C_0 + i_0 C_1$ , к вектору-столбцу, первая и последняя компоненты которого (все другие нули) равны соответственно

$$1 - \frac{i_0}{s} \quad \text{и} \quad \frac{i_0}{s}. \quad (14)$$

В конечном итоге в этом случае установится единодушие, и оно будет поглощающим. Но отсутствие эргодичности (поскольку число 1 есть собственное значение кратности 2) делает характер единодушия — альтернатива, которая будет выбрана, — предсказуемым только в терминах вероятности и зависит от «начального вектора». Величины (14) можно истолковать следующим образом: математическое ожидание того, что мнения 0 и 1 достигнут конечного единодушия, всегда пропорционально числу голосов, которое они только что собрали.

## 9. ВЕРОЯТНАЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПРОЦЕССА

В некоторых марковских случайных процессах произвольную часть множества возможных состояний можно рассматривать как два взаимно дополнительных класса состояний, которые называются «продолжающимися состояниями» и «прекращающимися состояниями», и можно задать

вопрос: какое число шагов необходимо, чтобы из данного продолжающего состояния достичь некоторого прекращающего состояния?

Общее решение задачи получить нетрудно: соответствующие условия можно найти, например, в работе Кемени и Снелла [5]. Пусть  $S_c$  — множество продолжающих состояний, и пусть  $(j)$  таково, что  $(j) \in S_c$ . Пусть  $s_j$  — математическое ожидание числа шагов, необходимых, чтобы достичь первоначально прекращающего состояния. Тогда ясно, что

$$s_j = 1 + \sum_{(i) \in S_c} p_{ij}^i s_i.$$

Этот факт можно записать с помощью матриц, вводя подматрицу  $M_c$  матрицы  $M_s$ , соответствующую продолжающим состояниям; вектор-строка  $S$  соответствует  $s_j$ , а вектор-строка  $H$  имеет все компоненты, равные 1;  $I$  — единичная матрица

$$S = H + SM_c,$$

откуда

$$S(I - M_c) = H \quad \text{и} \quad S = H(I - M_c)^{-1}.$$

Этот результат позволяет проводить вычисление (исходя из некоторого начального продолжающего состояния) ожидаемой продолжительности процесса независимо от того, какое правило остановки принято — первое осуществление единодушия или «квалифицированное большинство».

## 10. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

*Пример А.* В соответствии с обозначениями § 1  $v = 7$ ,  $\omega = 2$ ,  $r = 2$ ,  $r' = 1$ , ( $s = 4$ ).

Строки и столбцы матрицы  $M$  дают пять возможных состояний: (0), (1), (2), (3), (4), которые отвечают объявленным результатам: (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).

$$M = \frac{1}{2401} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 625 & 256 & 81 & 16 & 1 \\ 1000 & 768 & 432 & 160 & 24 \\ 600 & 864 & 864 & 600 & 216 \\ 160 & 432 & 768 & 1000 & 864 \\ 16 & 81 & 256 & 625 & 1296 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Все собственные значения простые, так как  $\omega=2$ :

$$\lambda_0=1, \lambda_1=\frac{4}{7}, \lambda_2=\frac{12}{49}, \lambda_3=\frac{24}{843},$$

$$\lambda_4=\frac{24}{2401}.$$

Эргодический вектор

$$E = \frac{1}{84\ 167\ 193} \begin{pmatrix} 2\ 713\ 569 \\ 10\ 320\ 040 \\ 21\ 002\ 136 \\ 28\ 404\ 256 \\ 21\ 727\ 192 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,12 \\ 0,25 \\ 0,34 \\ 0,26 \end{pmatrix}$$

Делитель 84 167 193 есть произведение вида (7—4) (49—12) (343—24) (2401—24), связанное в расчетах с множителем  $(1 - s/v) \dots (1 - sl/v^s)$ .

*Пример В.* В этом примере данные те же, что и в первом примере, но имеются следующие предположения относительно начала и окончания: вначале каждый из четырех нерешительных избирателей случайно выбирает между мнениями 0 и 1; выбор, который первым дает «квалифицированное большинство» в две трети — по крайней мере 5 голосов, — является «предпочтительным».

При этих условиях ожидаемое число туров голосования, необходимых для достижения решения, равно 2,54..., и априорные вероятности конечного выбора равны примерно

0,16 для мнения 1 (5 против 2),  
0,84 для мнения 0 (0,66 при 5 против 2)  
(0,18 при 6 против 1).

*Пример С.* В этом примере  $v=5$ , а  $\omega$  — неограниченно. Мнение 1 имеет  $r_1$  решительных сторонников, а оставшиеся  $s=5-r_1$  избирателей являются нерешительными.

Ожидаемое число туров голосования, необходимых для достижения единодушия, если исходить из начального состояния, в котором ни один из нерешительных избира-



телей не выбрал мнение 1, равно (для четырех возможных случаев):

$$r_1 = 4, s = 1: \frac{5}{5-1} = 1,25 \dots$$

$$r_1 = 3, s = 2: \frac{145}{(5-2)(25-2)} = 2,10 \dots$$

$$r_1 = 2, s = 3: \frac{16\,915}{(5-3)(25-6)(125-6)} = 3,74 \dots$$

$$r_1 = 1, s = 4: \frac{6\,085\,625}{(5-4)(25-12)(125-24)(625-24)} = 7,71 \dots$$

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель, описанная здесь в строгих математических понятиях, представляет собой исследование лишь сравнительно широкого класса матриц, спектры которых обладают интересным свойством: они всегда рациональны, хотя это не сразу очевидно.

Подкласс матриц, соответствующих нашему случаю, когда  $\omega = 2$ ,  $r_1 = r_2 = 0$ , а  $s$  — четное число, мы находим в генетике; правда, там встречается наряду с собственным значением, равным 1, и наибольшее собственное значение матрицы.

С точки зрения ее применения модель можно интерпретировать несколькими способами.

С одной стороны, это может быть вероятностное описание формальной процедуры голосования, «психологические гипотезы» которой могут быть подвергнуты серьезной критике, но «технические гипотезы» которой приемлемы и довольно часто удовлетворяют на практике.

С другой стороны, модель может быть использована для сравнения с данными, полученными из реальных ситуаций, таких, как выборы в академию или даже политические выборы, которые проводятся в соответствии со специальными предположениями. Тогда сравнение имеет целью тщательное испытание психологических гипотез.

Если мы не обращаемся к исследованиям подобного рода, то лишь по причине, что имеющаяся в настоящее время документация неполна, а также потому, что полагаем, что эти испытания будут малоубедительны: общая

модель для определенного числа избирателей, по существу, зависит от стольких параметров, сколько имеется выборов, этими параметрами является  $r_n$  (число решительных избирателей) для каждого выбора. Может показаться, что существуют слишком большие возможности для изменения мнений; и в результате, стремясь опровергнуть некоторые указанные гипотезы, мы будем редко преуспевать в доказательстве того, что относится к совокупности всех возможных численных предположений.

Примененная таким образом модель будет сразу же отвергнута в ситуации следующего типа.

Некоторое мнение не получило голоса в  $N$ -м туре голосования, но получило один или больше голосов при  $(N + 1)$ -м голосовании. Хорошо известно, что это иногда случается. Тем не менее, если быть снисходительным при рассмотрении модели, можно все же защитить ее от таких строгих практических испытаний, утверждая, что эта модель разумно суммирует психологию поведения если не всех избирателей, то по крайней мере огромного большинства их.

Но было бы бессмысленно спасать модель, опровергая исторические доводы, которые можно выдвинуть против нее, поскольку данных общих физиологических наблюдений, по-видимому, достаточно, чтобы опровергнуть модель.

Напомним, что решительные избиратели безусловно останавливаются на одном выборе и что нерешительные избиратели фактически нейтральны, их «склонность» выбрать некоторое мнение измеряется степенью его популярности, определить их выбор можно только с помощью вероятности. Помимо этого, каждый из нерешительных избирателей принимает условно «первое мнение, которое приходит». Это выражение надо понимать в следующем смысле: мнение, поддержанное наугад взятым избирателем, имеет ту же самую вероятность независимо от того, взят ли он из числа решительных или нерешительных избирателей или тех и других вместе.

Добавим, что абсолютная приверженность к мнению есть исключительное явление и что в действительности привязанность к определенному выбору наиболее часто комбинируется с рядом состояний возможного стратегического отхода, которые возникают более или менее произвольно в зависимости от обстоятельств.

Более совершенны такие модели, которые принимают в расчет эти сложные факторы. Принципиальное обоснование рассмотренной модели, грубо говоря, состоит в том, чтобы показать возможность формализации гипотез некоторого типа применительно к способу, каким индивид реагирует на взаимное влияние других индивидов, и, таким образом, обнаружить динамические свойства определенного «коллективного желания».

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. Arrow K. J., Social Choice and Individual Values (Cowles Commission Monograph 12), New York, Wiley, 1951.
2. Feller W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, New York, Wiley 1960.
3. Guilhaud G. T., Les Theories de L'intérêt général et le problème logique de l'aggrégation, «Economie Appliquée, № 4., Paris, Publications de l'Université Francois, 1952 (дана в настоящем сборнике. — Прим. ред.).
4. Hohn F., Elementary Matrix Algebra. 2d ed. New York, Macmillan, 1964.
5. Kemeny J. G. and Snell J. L., Finite Markov Chains. Princeton, N. J., Van Nostrand, 1960.
6. Malecot G., Sur un problème de probabilités en chaîne que la dépétique, C. R. de l'Akadémie des Sciences, vol. 219 (1044) p. 379.
7. Ville J., Principes d'analyse matricielle Paris Publications de l'Institut de Statistique de l'Universil de Paris, 1955.

# СРАВНЕНИЕ ВОСЬМИ МОДЕЛЕЙ

Р. Буш, Ф. Мостеллер

## ВВЕДЕНИЕ

При испытании модели или теории в науке редко имеют общую меру или универсальный критерий, с помощью которого принимается или отвергается модель. Действительно, наука не идет и не будет идти по этому пути; теория работает до тех пор, пока не появится новая теория, которая окажется лучше прежней. Один из путей, по которому идет наука, состоит в сравнении двух или более теорий с целью определения их относительных достоинств в обработке соответствующих данных. В этой статье мы сравним восемь моделей обучения, применяя каждую модель для анализа данных, взятых из одного и того же эксперимента<sup>1</sup>.

Главная цель любой модели состоит в том, чтобы правильно предсказать кривую обучения, изображающую отношение числа правильных ответов к числу испытаний. Однако почти каждая модель с двумя или тремя свободными параметрами может дать результат, выражающийся некоторой функциональной зависимостью. Поэтому при сравнении нескольких моделей необходим другой критерий. Критерий, которым пользуются в последнее время, показывает, в какой степени модель может воспроизвести структуру последовательности ответов. С этой целью можно придумать много различных свойств. В данной статье используется 14 таких свойств.

Общим показателем соответствия данным одной модели по сравнению с другой является отношение правдоподобия. Однако против использования этого метода имеются три возражения. Первое — для многих моделей его трудно

---

<sup>1</sup> В одном из следующих параграфов авторы используют те же самые данные при испытании другой модели. — *Прим. ред. англ. текста.*



вычислить. Второе — применение отношения правдоподобия не выделяет сильные и слабые стороны модели, и поэтому нельзя установить, почему модель неадекватна. Третье — отношение правдоподобия выявляет малосущественные различия между моделью и экспериментом. Поэтому мы не используем отношение правдоподобия в данной статье.

Удовлетворительное предсказание результатов обучения на основании одного эксперимента не может быть решающим критерием модели. Можно указать другие критерии, необходимые для этой цели. Например, модель с определенными числовыми значениями параметра инвариантна по отношению к изменениям независимых переменных, входящих в модель. Подобные требования не исследуются в данной статье. Наши исследования ограничиваются проблемой предсказуемости последовательных данных. Мы полагаем, что, после того как получена кривая обучения, это является вторым значительным шагом вперед.

Частные данные, использованные для сравнения восьми моделей, были получены Соломоном и Вайном из эксперимента по исследованию уклонения собак от дрессировки [8]. В каждом из 25 испытаний собака могла избежать действия сильного электрического импульса посредством прыжка через барьер в пределах десяти секунд после появления условных сигналов. Основные данные: последовательность импульсов ( $S$ ) и уклонений ( $A$ ) для 30 собак. В одной из предшествующих работ [1, глава 11] мы анализировали эти данные с помощью двухоператорной линейной модели. Это одна из восьми моделей, которые рассматриваются в данной статье, и поэтому результаты кратко изложены ниже.

Для большинства моделей обучения можно получить формулы для математических ожиданий и дисперсий нескольких последовательных статистик. Такие формулы имеют большое значение при применении моделей к исходным данным. Однако часто оказывается, что для частной модели точные формулы получить очень трудно или даже практически невозможно. Поэтому, учитывая цель данной работы, мы прибегли в каждой модели к подсчету методом Монте-Карло [1, стр. 129]. Проводится прямое сравнение моделей по каждой из четырнадцати статистических выборок. Эта процедура не используется лишь при рассмотре-



нии марковской модели. Для некоторых свойств отдельных моделей мы включили формулы, даже если эти формулы не используются в окончательном сравнении моделей.

В целях единообразия в дальнейшем будем обозначать через  $p_n$  — вероятность уклонения ( $A$ ) в  $n$ -м испытании, а через  $q_n = 1 - p_n$  — вероятность шока ( $S$ ) в том же испытании. Номер испытания обозначается через  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

## ДВУХОПЕРАТОРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Модель, примененная ранее [1] к исходным данным Соломона — Вайна, утверждает, что

$$q_{n+1} = \begin{cases} \alpha_2 q_n, & \text{если в } n\text{-м испытании имеет место } S \\ \alpha_1 q_n, & \text{если в } n\text{-м испытании имеет место } A. \end{cases}$$

Здесь  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ ,  $q_1 = 1,00$ .

Было использовано несколько методов для определения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  из исходных данных, но окончательные оценки таковы:  $\hat{\alpha}_1 = 0,80$  и  $\hat{\alpha}_2 = 0,92$ . С этими значениями параметров мы испытали 30 собак и рассчитали значения четырнадцати статистик, приведенных в таблице 1 (стр. 314—315).

## МОДЕЛЬ ХАЛЛА <sup>1</sup>

К. Халл подробно не рассматривает проблему уклонения в процессе тренировки в своих «Принципах поведения», но он дает общую теорию приобретения навыка [2]. Он утверждает, что усиление привычки при каждом испытании является постоянной пропорцией «потенциального усиления еще не образовавшихся привычек». Далее он говорит, что показатель силы привычки есть «процент правильного возбуждения реакции». Это означает, что

<sup>1</sup> Каждой из остальных моделей мы присваиваем имя человека, который, по нашему мнению, внес наибольший вклад в разработку этой модели. Это не означает, что каждый из исследователей предложил свою модель для опыта Соломона — Вайна, и не означает также, что наша интерпретация приемлема для авторов модели. В лучшем случае мы упрощаем их понятия. Использование имен для обозначения моделей может помочь читателю.

если  $p_n$  есть вероятность уклонения при  $n$ -м испытании, то

$$p_{n+1} = p_n + (1 - \alpha)(1 - p_n),$$

где  $1 - \alpha$  есть константа пропорциональности. В терминах  $q_n$ , вероятности удара, этот переходный закон примет вид  $q_{n+1} = \alpha q_n$ . Заметим, что закон эквивалентен основному предположению двухоператорной линейной модели, если  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

В модели Халла математическое ожидание  $T$ , числа ударов в 25 испытаниях, равно

$$E(T) = \sum_{n=1}^{25} q_n = \sum_{n=1}^{25} \alpha^{n-1} q_1 = q_1 \frac{1 - \alpha^{25}}{1 - \alpha}.$$

Как и выше,  $q_1 = 1$ . Из исходных данных получим, что среднее число ударов на одну собаку  $\bar{T} = 7,80$ . Приравнявая  $E(T)$  и  $\bar{T}$ , находим  $\hat{\alpha} = 0,88$ . При этом значении  $\alpha$  было испытано 30 собак и подсчитаны статистики последовательностей. Результаты приведены в таблице 1.

## МОДЕЛЬ ХАЛЛА С ИНДИВИДУАЛЬНЫМИ РАЗЛИЧИЯМИ

Анализ таблицы 1 показывает, что собаки Халла менее разнообразны, чем настоящие собаки, и поэтому можно предполагать, что модель Халла применима к отдельным собакам, но при этом для разных собак значения параметра  $\alpha$  должны быть различными. Чтобы построить модель, учитывающую поправку на индивидуальные различия, необходимо сделать некоторые предположения относительно распределения  $\alpha$  и определить параметры этого распределения из исходных данных.

Значения  $\alpha$  заключены на единичном интервале. Приемлемой, удобной и хорошо известной функцией плотности вероятностей на единичном интервале является бета-функция [5]

$$f(\alpha) = \frac{(r+s+1)!}{r!s!} \alpha^r (1-\alpha)^s,$$

где оба параметра  $r$  и  $s$  больше  $-1$ . Среднее значение и дисперсия этого распределения равны

$$E(\alpha) = \frac{r+1}{r+s+2}, \quad \text{var}(\alpha) = \frac{(r+1)(s+1)}{(r+s+3)(r+s+2)^2}.$$

Предположим, что  $\alpha$  имеет бета-распределение, и определим  $r$  и  $s$  из данных Соломона — Вайна.

Для этого выразим математическое ожидание и дисперсию числа ударов через  $r$  и  $s$ , сделаем их соответственно равными величинам, затем при помощи полученных уравнений произведем необходимые вычисления. Частное значение  $\alpha$  определяет параметр биномиального распределения для единичного испытания, и, следовательно, нам нужны вероятности этих биномиальных распределений, так же как и вероятности предполагаемого бета-распределения. Обозначения  $b$  и  $\beta$  в вероятностном операторе  $E$  указывают на применение биномиального и бета-распределения. Общее число ударов, полученных собакой при неограниченном числе испытаний, представляется случайной величиной  $T$ . Ясно, что для фиксированного  $\alpha$

$$E_b(T) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Дисперсия случайной величины  $T$  равна

$$\text{var}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n (1 - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} (1 - \alpha^{n-1}) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha^2}.$$

Поэтому

$$E_b(T^2) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

Нам нужны теперь вероятности бета-распределения (предположим, что они существуют):

$$\begin{aligned} E_{\beta} E_b(T) &= E_{\beta} \left( \frac{1}{1-\alpha} \right) = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-\alpha} f(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \frac{(r+s+1)!}{r! s!} \alpha^r (1-\alpha)^{s-1} d\alpha = \\ &= \frac{r+s+1}{s} \int_0^1 \frac{(r+s)!}{r! (s-1)!} \alpha^r (1-\alpha)^{s-1} d\alpha. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен 1, так как подынтегральная функция есть плотность вероятностей бета-распределения с параметрами  $r$  и  $s-1$ . Таким образом, упрощая обозна-

чения, получаем

$$E(T) = \frac{r+s+1}{s}.$$

Аналогично легко получить

$$E_{\beta} \left( \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right) = \frac{(r+s)(r+s+1)}{(s-1)s}.$$

Чтобы вычислить  $E_{\beta} E_b(T^2)$ , необходимо найти

$$E_{\beta} \left( \frac{1}{1-\alpha^2} \right) = \int_0^1 \frac{(r+s+1)!}{r!s!} \alpha^r \frac{(1-\alpha)^{s-1}}{1+\alpha} d\alpha.$$

Вычисление этого интеграла вызывает некоторые трудности, но мы можем разложить  $\frac{1}{1+\alpha}$  в ряд по степени  $1-\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\alpha} &= \frac{1}{2-(1-\alpha)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(1-\alpha)/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1-\alpha}{2} + \frac{(1-\alpha)^2}{4} + \frac{(1-\alpha)^3}{8} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} E_{\beta} \left( \frac{1}{1-\alpha^2} \right) &= \frac{r+s+1}{2s} + \frac{1}{4} + \frac{s+1}{8(r+s+2)} + \\ &+ \frac{(s+1)(s+2)}{16(r+s+2)(r+s+3)} + \dots \end{aligned}$$

Это даст возможность написать

$$E(T^2) = \frac{(r+s)(r+s+1)}{(s-1)s} + \frac{r+1}{2s} + \frac{1}{4} - \delta,$$

где

$$\delta = \frac{s+1}{8(r+s+2)} \left[ 1 + \frac{s+2}{2(r+s+3)} + \dots \right].$$

Следовательно, дисперсия  $T$  равна

$$\text{var}(T) = \frac{(r+1)(r+s+1)}{s^2(s-1)} + \frac{r+1}{2s} + \frac{1}{4} - \delta.$$

Последнее соотношение и формула для  $E(T)$  являются равенствами, необходимыми для дальнейших вычислений.

Для упрощения вычислений положим

$$\mu = E(T) = \frac{r+s+1}{s}, \quad \sigma^2 = \text{var}(T).$$

Отсюда получим выражение для  $s$ :

$$s = \frac{\mu(\mu-1)}{\sigma^2 - \frac{1}{2}(\mu-1) - \frac{1}{4} + \delta}, \quad (1)$$

где

$$\delta = \frac{s+1}{8(s\mu+1)} \left[ 1 + \frac{s+2}{2(s\mu+2)} + \dots \right].$$

Определив  $s$  из уравнения (1), найдем затем  $r$  из равенства  $r = s(\mu - 1) - 1$ .

Данные Соломона — Вайна дают величины  $\hat{\mu} = 7,80$ ,  $\hat{\sigma}^2 = 6,58$ , которые в свою очередь приводят к оценкам  $\hat{s} = 19$ ,  $\hat{r} = 128$ . Используя эти значения, получаем

$$E(\alpha) = 129/149 = 0,866,$$

$$\text{var}(\alpha) = \frac{(129)(20)}{(150)(149)^2} = 0,000775,$$

$$\sigma(\alpha) = 0,0278.$$

Чтобы использовать имеющиеся таблицы, выберем  $s = 19$ ,  $r = 130$ ; это даст нам  $E(\alpha) = 0,868$ ,  $\sigma(\alpha) = 0,0275$ .

Используя таблицы [6] для функции  $F(\alpha)$  бета-распределения при  $r = 130$ ,  $s = 19$ , вычислим первые разности (см. приведенную ниже таблицу).

$\alpha$	$F(\alpha)$	$\Delta F(\alpha)$	$\alpha$	$F'(\alpha)$	$\Delta F(\alpha)$
0,76	0,000		0,88	0,657	0,285
0,78	0,003	0,003	0,90	0,887	0,230
0,80	0,013	0,010	0,92	0,983	0,096
0,82	0,051	0,038	0,94	0,999	0,016
0,84	0,158	0,107	0,96	1,000	0,001
0,86	0,372	0,214			

Чтобы аппроксимировать это распределение для 30 собак, была составлена следующая таблица частот:

$\alpha$	Номер	$\alpha$	Номер
0,81	1	0,89	7
0,83	3	0,91	3
0,85	6	0,93	1
0,87	9		



Среднее значение равно 0,871, а стандартное отклонение равно 0,0271. Можно считать, что эти величины достаточно близки к ожидаемым величинам 0,866 и 0,0278.

Используя указанный выше набор значений  $\alpha$ , испытывали 30 собак; испытания дали статистики, приведенные в таблице 1.

## ПЕРВАЯ МОДЕЛЬ ТЕРСТОУНА

В 1917 году Терстоун предложил гиперболический закон обучения [9]

$$y = \frac{a(n+c)}{n+c+b},$$

где  $y$  — число успехов в единицу времени,  $n$  — число испытаний,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — постоянные. Если  $y$  — вероятность уклонения, равная нулю при  $n = 1$  и стремящаяся к единице при  $n \rightarrow \infty$ , то уравнение Терстоуна примет вид

$$p_n = \frac{n-1}{n-1+b},$$

при этом вероятность удара равна

$$q_n = \frac{b}{n-1+b}.$$

Ожидаемое число ударов за первые  $N$  испытаний равно

$$E(T) = \sum_{n=1}^N q_n = \sum_{n=1}^N \frac{b}{n-1+b}.$$

Эта сумма может быть аппроксимирована интегралом

$$\int_{1/2}^{N+(1/2)} \frac{b \, dn}{n-1+b} = b \log \frac{b+N-(1/2)}{b-(1/2)}.$$

При  $N = 25$  и  $\bar{T} = 7,80$  получаем  $\hat{b} = 3,5$ . Кроме того, вычисление суммы при  $b = 3,5$  дает величину 7,80. При этом значения  $b$  были вычислены значения  $q_n$  и проведены испытания 30 собак. Результаты приведены в таблице 1.

Одной из первых стохастических моделей обучения с непостоянным успехом была схема Терстоуна [10]. Его идея состоит в том, что если дана урна с черными и белыми шарами, то представляется вероятность ответа в ситуации с двумя возможными исходами. При этом, если случайно вынутый шар оказался белым, этому событию приписывается ответ 1, для черного шара имеет место ответ 2. Содержимое урны может быть изменено в зависимости от результатов испытаний. Например, если имел место  $i$ -й исход, можно добавить в урну  $a_i$  белых и  $b_i$  черных шаров. Хотя  $a$  и  $b$  могут принимать отрицательные значения, должно выполняться некоторое условие, чтобы гарантировать, что число шаров каждого цвета всегда положительно и что в урне всегда имеется по крайней мере один шар. В модели, которая рассматривается, мы будем добавлять только белые шары<sup>1</sup>.

Предположим, что содержимое урны в момент, непосредственно предшествующий  $n$ -му испытанию, определяется парой  $(a_n, b_n)$ , где  $a_n$  — число белых, а  $b_n$  — число черных шаров. Тогда вероятность удара в  $n$ -м испытании равна

$$q_n = \frac{b_n}{a_n + b_n}.$$

Если извлечен белый шар, то имеет место уклонение. Белый шар заменяется, вместо него в урну добавляется  $c_1$  белых шаров. Если извлечен черный шар, то имеет место удар; в этом случае черный шар заменяется и  $c_2$  белых шаров добавляется в урну. Таким образом, и удар и уклонение увеличивают вероятность уклонения, если предполагать, что величины  $c_i$  положительны.

Во время испытания собак начальная вероятность уклонения равнялась нулю. Таким образом, можно взять  $q_1 = 1$ , то есть  $b_1 = 1$ ,  $a_1 = 0$ . Мы не будем реализовывать идею шаров в чистом виде. Будем считать, что параметры непрерывны, а не дискретны. Это не искажает первоначальную идею.

<sup>1</sup> Авторы статьи указывают, что если число белых шаров, которые добавляются в урну, пропорционально числу белых шаров, находящихся в ней, то модель Терстоуна, по существу, эквивалентна бета-модели, рассматриваемой ими в следующем параграфе. — *Прим. ред. англ. текста.*

чальной идеи Терстоуна. Он, очевидно, употребил шары для большей привлекательности своей идеи. Тогда вообще при  $n$ -м испытании вероятность удара равна

$$q_{ij} = \frac{1}{1 + ic_2 + jc_1} \quad (i + j = n - 1), \quad (2)$$

где  $i$  — число ударов, предшествующих  $n$ -му испытанию,  $j$  — соответствующее число  $\Delta$  уклонений.

Можно рассмотреть несколько вычислительных процедур для получения величин  $c_1$  и  $c_2$ . Некоторые из них довольно утомительны. Воспользуемся несложным методом.

Заметим сначала, что  $\hat{q}_{ij} = x_{ij}/n_{ij}$ , где  $n_{ij}$  — число собак, у которых в предыдущих испытаниях было  $i$  ударов и  $j$  уклонений, а  $x_{ij}$  — число собак, получивших удар в  $n = i + j + 1$  испытании. Тогда по аналогии с уравнением (2) можно записать

$$x_{ij}(1 + ic_2 + jc_1) \hat{=} n_{ij},$$

где  $\hat{=}$  означает «оценивает» или «оценивается как».

Чтобы определить параметры  $c_1$  и  $c_2$ , необходимо иметь пару совместных уравнений. Их можно получить путем суммирования двух различных рядов в соответствии с выбором пар индексов  $(ij)$ . Обозначим эти ряды  $A$  и  $B$  и получим уравнения

$$c_2 \sum_A ix_{ij} + c_1 \sum_A jx_{ij} = \sum_A (n_{ij} - x_{ij}),$$

$$c_2 \sum_B ix_{ij} + c_1 \sum_B jx_{ij} = \sum_B (n_{ij} - x_{ij}).$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  подскажут, как выбрать ряды  $A$  и  $B$ . Вообще говоря, желательно в одном из уравнений коэффициент  $c_1$  взять большим, а коэффициент  $c_2$  — малым. В другом уравнении нужно, чтобы это соотношение было обратным. Поэтому мы выберем для ряда  $A$  такие пары  $(ij)$ , для которых  $i > j$ . Тогда в сумму  $B$  войдут те пары, для которых  $j \geq i$ . Хотя тем самым мы не гарантируем удовлетворительный результат (так как величины  $x_{ij}$  вносят свой вклад в уравнение), можно надеяться, что общий результат приблизительно верный. Величины, которые получены таким способом, дали нам предварительную оценку. (Фактически мы берем  $i > j + 1$  для  $A$  и  $i \leq j + 1$  для  $B$ .)

Казалось бы, разумно улучшить эту оценку путем придания весов (коэффициентов важности) различным элементам. Мы решили ввести в уравнения вида

$$x_{ij}(1 + ic_2 + jc_1) = n_{ij}$$

веса, обратные дисперсиям элементов. Дисперсия левой части равна

$$(1 + ic_2 + jc_1)^2 n_{ij} \left( \frac{1}{1 + ic_2 + jc_1} \right) \left( \frac{ic_2 + jc_1}{1 + ic_2 + jc_1} \right) = \\ = n_{ij} (ic_2 + jc_1).$$

Деление общих частей равенства на этот результат, а затем умножение на  $n_{ij}$  снова дает

$$x_{ij} = \left( \frac{1 + ic_2 + jc_1}{ic_2 + jc_1} \right) \hat{=} \frac{n_{ij}}{ic_2 + jc_1}.$$

Из исходных оценок  $c_1$  и  $c_2$  следует, что  $c_1$  равно примерно  $3c_2$ ; поэтому окончательные веса равны  $\frac{1}{i+3j}$ . После суммирования были получены оценки  $\hat{c}_1 = 0,446$ ,  $\hat{c}_2 = 0,111$ . С применением значений  $c_1$  и  $c_2$  проводились испытания 30 собак и вычислялись несколько статистик.

## МОДЕЛЬ МАРКОВА

Наиболее простая модель обучения — цепь Маркова с двумя состояниями. Такие модели рассмотрены Миллером [4]. Напомним, что через  $S$  обозначаются удары, а через  $A$  — уклонение. Предполагается, что обе условные вероятности,  $P\{S|S\}$  и  $P\{A|A\}$ , постоянны. Здесь  $P\{X|X\}$  означает вероятность того, что событие  $X$  происходит в данном испытании при условии, что оно имело место в предыдущем испытании. Нам нужна начальная вероятность удара  $q_1(S)$ , но из исходных данных подходящим значением этой величины является 1,00. К тому же Соломон и Вайн сообщают, что при числе испытаний свыше 25 нет собак, которые получили бы удар. Таким образом, мы берем  $P\{A|A\} = 1,00$ . У нас остается один параметр  $a = P\{S|S\}$ , который вычисляется из исходных данных. Легко показать, что математическое

ожидание числа ударов равно

$$E(T) = \frac{1}{1-a}.$$

Взяв  $\bar{T} = 7,8$ , получим  $\hat{a} = 0,872$ . Далее, можно показать, что

$$\text{var}(T) = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

При  $a = 0,872$  имеем  $\text{var}(T) = 53,1$ ,  $\sigma(T) = 7,30$ .

Так как  $P\{A | A\} = 1$ , если имеет место уклонение, то модель предсказывает, что собаки и дальше будут уклоняться от ударов. Таким образом, все статистики, выписанные в табл. 1, вычисляются теоретически без проведения испытаний собак. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

## МОДЕЛЬ РЕСТЛА

Рестл описал модель опытов на распознавание [7]. Модификация его модели может быть предназначена для описания тренировок в уклонении. Следуя Рестлу, предположим, что ситуация стимулирования содержит  $r$  правильных стимулов и  $i$  неправильных. Правильный стимул может быть или не быть обусловлен ответом (в нашей задаче уклонения от удара) в  $n$ -м испытании; вероятность того, что всякий единичный правильный стимул обусловлен испытанием  $n$ , согласно Рестлу, равна  $c_n = 1 - (1 - \theta)^{n-1}$ . Неправильный стимул становится «приспособленным», то есть перестает существовать для субъекта. Вероятность того, что при  $n$ -м испытании произвольный неправильный (ложный) стимул адаптируется, равна  $a_n = 1 - (1 - \theta)^{n-1}$ . Другое предположение Рестла состоит в том, что  $\theta = r/(r + 1)$ .

В приведенном ниже уравнении для вероятности ответа при  $n$ -м испытании мы отклоняемся от модели Рестла. Предположим, что только обусловленные стимулы содействуют отклонению. Таким образом,

$$p_n = \frac{rc_n}{r + i(1 - a_n)}.$$

Из предыдущих уравнений получаем

$$p_n = 1 - \frac{(1 - \theta)^{n-1}}{\theta + (1 - \theta)^n}.$$



Вероятность удара

$$q_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{\theta + (1-\theta)^n}.$$

Математическое ожидание числа ударов

$$E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\theta)^{n-1}}{\theta + (1-\theta)^n}.$$

Заменяя сумму интегралом от  $1/2$  до  $\infty$ , получим приближенное значение этой суммы

$$E(T) = \frac{\log \theta - \log(\theta + \sqrt{1-\theta})}{(1-\theta) \log(1-\theta)}.$$

При  $\theta = 0,23$  правая часть этого соотношения равна 7,82, а сумма равна 7,78. Поэтому берем  $\hat{\theta} = 0,23$ . При этом значении  $\theta$  были вычислены величины  $q_n$  и испытаны 30 собак. Результаты приводятся в таблице 1.

## МОДЕЛЬ КРИЧЕВСКОГО

В течение десяти или более лет начиная примерно с 1930 года велась полемика между теорией «непрерывности» и «скачков» [3]. Вторая из упомянутых школ (Лешли, Кричевский) утверждала, что внезапная обученность возникает после начального периода предварительного решения; теоретики «непрерывности» (Халл, Спенс) настаивали на том, что усвоение имело место с самого начала.

Одна из возможных формализаций «разрывной» теории описана в этом параграфе.

Определим случайную величину

$$x_{in} = \begin{cases} 1, & \text{если имеет место событие } A \text{ при } n\text{-м испытании} \\ & i\text{-го животного} \\ 0, & \text{если имеет место событие } S \text{ при } n\text{-м испытании} \\ & i\text{-го животного.} \end{cases}$$

Тогда  $p_{in} = P\{x_{in} = 1\}$ , а  $q_{in} = P\{x_{in} = 0\}$ . Предположим, что  $i$ -е животное находится в некотором состоянии  $S_0$  в начале опыта, а в начале некоторого испытания  $N_i$  переходит в состояние  $S_1$  и остается в нем в течение оставшейся части эксперимента. Будем рассматривать

изменение состояния при испытании  $N_i$  как появление события  $E$ .

В этом случае вероятность уклонения подчиняется следующему закону:

$$P_{in} = \begin{cases} p, & \text{если } i\text{-е животное находится в состоянии } S_0 \\ & \text{при } n\text{-м испытании} \\ 1, & \text{если } i\text{-е животное находится в состоянии } S_1 \\ & \text{при } n\text{-м испытании.} \end{cases}$$

Далее, существует некоторая постоянная вероятность события  $E$  (переход из состояния  $S_0$  в состояние  $S_1$ )

$$P \{S_1 \text{ при } n | S_0 \text{ при } n-1\} = \beta.$$

Отсюда случайная величина  $N_i$  (номер испытаний внутреннего или полного обучения) имеет отрицательное биномиальное распределение, задаваемое формулой

$$P \{N_i = j\} = \beta (1 - \beta)^{j-1} \quad (j = 1, 2 \dots).$$

Эти аксиомы определяют случайный процесс, который обладает рядом простых свойств.

Кривая группового обучения получается, если определить количество животных, которые имеют успех в  $n$ -м испытании (в зависимости от  $n$ ). Ордината графика есть

$$\bar{x}_n = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I x_{in},$$

где  $I$  — число животных в группе. Теоретическая кривая получена из математического ожидания величины  $x_{in}$ , которое находится следующим образом.

Из аксиом модели имеем

$$P \{x_{in} = 1 | n < N_i\} = p, \quad P \{x_{in} = 1 | n \geq N_i\} = 1$$

и

$$P \{N_i \leq n\} = \sum_{j=1}^n \beta (1 - \beta)^{j-1} = 1 - (1 - \beta)^n,$$

$$P \{N_i > n\} = (1 - \beta)^n.$$

Отсюда следует, что

$$E(x_{in}) = 1 - (1 - p)(1 - \beta)^n.$$

Таким образом, теоретическая кривая группового обучения рассчитывается посредством параметров модели  $p$

и  $\beta$ . Интересно отметить, что только что выведенную функцию обучения можно получить также из модели Халла. Конечно, из этой модели можно получить также совершенно другие предсказания относительно других аспектов исходных данных.

Обозначим общее число ударов, полученных  $i$ -м животным, через  $T_i$ . Для испытаний, предшествующих событию  $E$ ,  $T_i$ , имеет биномиальное распределение

$$P\{T_i = k | N_i = j + 1\} = \binom{j}{k} q^k p^{j-k} \quad (k \leq j).$$

Мы уже видели, что

$$P\{N_i = j + 1\} = \beta (1 - \beta)^j$$

и, таким образом,

$$P\{T_i = k\} = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} q^k p^{j-k} \beta (1 - \beta)^j.$$

Суммируя, получим

$$P\{T_i = k\} = \gamma (1 - \gamma)^k \quad (k = 0, 1, \dots),$$

где

$$\gamma = \frac{\beta}{1 - p(1 - \beta)}.$$

Итак,  $T_i$  имеет отрицательное биномиальное распределение с параметром  $\gamma$ .

Хорошо известно, что математическое ожидание и дисперсия величины  $T_i$  соответственно равны

$$E(T_i) = \frac{1 - \gamma}{\gamma} = q \frac{1 - \beta}{\beta}, \quad (3)$$

и, таким образом,

$$\text{var}(T_i) = \frac{1 - \gamma}{\gamma^2} = q \frac{1 - \beta}{\beta^2} [1 - (1 - q)(1 - \beta)].$$

Обозначим через  $L_i$  номер испытания, при котором имел место последний удар у  $i$ -го животного. Пусть  $L_i < N_i$ , поэтому можно ввести новую случайную величину  $Y_i = N_i - L_i - 1$ , которая соответствует номеру испытаний после испытания  $L_i$ , но перед испытанием  $N_i$ . Если считать, что испытания происходят в обратном порядке, то легко видеть, что  $Y_i$  имеет отрицательное биномиальное распределение

$$P\{Y_i = h\} = qp^h \quad (h = 0, 1, 2, \dots).$$

Мы уже знаем, что

$$P\{N_i = j + 1 + h\} = \beta (1 - \beta)^{j+h},$$

и поэтому совместное распределение  $Y_i$  и  $N_i$  таково:

$$P \{N_i = j+1+h, Y_i = h\} = \beta (1-\beta)^{j+h} qp^h.$$

Отсюда получим распределение  $L_i$ , поскольку

$$\begin{aligned} P \{L_i = j\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P \{N_i = j+1+h, Y_i = h\} = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \beta (1-\beta)^{j+h} qp^h. \end{aligned}$$

Суммируя, будем иметь

$$P \{L_i = j\} = \frac{q\beta (1-\beta)^j}{1-p(1-\beta)}.$$

Эта функция не является нормированной плотностью распределения. В самом деле,

$$\sum_{j=1}^{\infty} P \{L_i = j\} = 1 - \frac{\beta}{1-p(1-\beta)}.$$

Это связано с тем, что  $L_i$  не всегда существует: может случиться, что не происходят удары. Известно, что

$$P \{T_i = 0\} = \gamma = \frac{\beta}{1-p(1-\beta)}.$$

Поэтому более удобно иметь дело с условными вероятностями

$$P \{L_i = j | T_i \neq 0\} = \frac{P \{L_i = j\}}{P \{T_i \neq 0\}}.$$

Получим

$$P \{L_i = j | T_i \neq 0\} = \beta (1-\beta)^{j-1},$$

что в точности совпадает с распределением  $N_i$ .

Математическое ожидание и дисперсия равны

$$\begin{aligned} E(L_i | T_i \neq 0) &= \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \text{var}(L_i | T_i \neq 0) = \\ &= \frac{1-\beta}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Эти теоретические величины можно сравнить с эмпирическими величинами  $L_i$  для животных, получивших по крайней мере один удар.

Уравнения (3) и (4) использованы для вычисления параметров  $p$  и  $\beta$ . Приравнивая математические ожидания и наблюдаемые средние значения, полученные из данных Соломона — Вайна, имеем  $q(1 - \beta)/\beta \cong 7,80$ ;  $(1 - \beta)/\hat{\beta} \cong 11,33$ . Решив уравнения, получим  $\hat{\beta} = 0,081$ ,  $\hat{p} = 0,312$ . Эти величины были использованы в 30 вычислениях методом Монте-Карло, и в результате получены четырнадцать статистик, указанных в таблице 1.

Закон распределения вероятностей, определяемый моделью, является биномиальным для испытаний, которые предшествуют событию  $E$ . Таким образом, распределение чередований представляется существенным фактом для биномиального распределения. В  $j$ -м испытании с биномиальным законом распределения при условии, что вероятности успеха и неудачи соответственно равны  $p$  и  $q$ , ожидаемое число серий, как это хорошо известно, равно

$$2(j-1)pq + 1 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Число чередований меньше, чем число серий. Уклонение обязательно имеет место в испытании  $N_i$  и, если  $N_i - 1$  есть испытание, исходом которого является удар, число чередований увеличивается на одно. Поэтому, если  $A_i$  есть число чередований для  $L$ -го животного, то

$$E(A_i | N_i = j \neq 1) = 2(j-2)pq + q.$$

Мы знаем, что

$$E(N_i | N_i \neq 1) = \frac{1}{\beta} + 1.$$

Таким образом,

$$E(A_i) = 2 \frac{1-\beta}{\beta} pq + q.$$

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализ таблицы 1 позволяет выявить недостатки восьми рассмотренных моделей. При этом оказывается, что марковская модель наименее удовлетворительна: первое и второе уклонение наступают слишком поздно, последний удар наступает слишком рано, чередований ударов и уклонений слишком мало. Это не является неожиданным с точки зрения строения модели — все обучение происходит на отдельном случайном испытании.



# Сравнение восьми моделей с данными,

Статистика		Данные испытаний собак	Двухоператорная линейная модель	Модель Халла
Число испытаний до первого уклонения	<i>Mn</i>	4.50	4.13	3.17
	<i>SD</i>	2.25	2.08	1.79
Число испытаний до второго уклонения	<i>Mn</i>	6.47	6.20	5.03
	<i>SD</i>	2.62	2.06	1.82
Общее число ударов	<i>Mn</i>	7.80	7.60	7.57
	<i>SD</i>	2.52	2.27	1.73
Число испытаний до послед- него удара	<i>Mn</i>	11.33	12.53	17.57
	<i>SD</i>	4.36	4.78	4.09
Число чередований	<i>Mn</i>	5.47	5.87	7.40
	<i>SD</i>	2.72	2.11	2.04
Длина самой длинной серии ударов	<i>Mn</i>	4.73	4.33	3.53
	<i>SD</i>	2.03	1.89	1.57
Число испытаний до первой серии из четырех уклонений	<i>Mn</i>	9.70	9.47	7.83
	<i>SD</i>	4.14	3.48	3.00

По аналогичной причине модель Кричевского также совершенно неудовлетворительна. Согласно этой модели, первое и второе уклонения происходят слишком рано, последний удар наступает слишком поздно и слишком мало чередований. Поэтому можно заключить, что ни одна из «разрывных» моделей не является адекватной.

Модель Халла имеет несколько слабых мест: первое и второе уклонения наступают слишком рано, последний удар происходит слишком поздно и слишком много чередований. Все стандартные отклонения (*SD*) слишком малы. Подобный недостаток проявляется и в модели Халла с индивидуальными различиями, хотя она, несомненно, более усовершенствованна по сравнению с его простейшей моделью.

Подобно модели Халла, ранняя модель Терстоуна предсказывает, что уклонения происходят слишком рано,

полученными при испытании собак

Модель Халла с индивид. различиями	Ранняя модель Терстоуна	Поздняя модель Терстоуна	Модель Маркова	Модель Рестла	Модель Кричевского
3.57	3.13	4.10	7.80	4.40	1.77
1.81	1.17	2.91	7.30	1.73	2.11
5.33	4.87	6.53	8.80	6.37	4.03
1.71	1.28	2.74	7.30	1.83	2.52
7.50	8.50	8.67	7.80	7.73	6.07
1.62	2.23	2.80	7.30	1.76	5.37
15.80	19.97	18.97	6.80	12.97	7.73
5.36	4.70	5.11	7.30	4.60	7.46
7.10	9.17	7.37	1.00	5.87	3.87
2.94	3.28	2.62	0.00	2.56	3.34
3.70	3.40	4.44	7.80	4.47	3.43
1.69	1.04	2.73	7.30	1.59	2.45
10.03	10.13	9.57	7.80	10.03	7.50
4.20	5.78	3.59	7.30	3.34	6.96

что последний удар наступает слишком поздно и что чередований слишком мало. Очевидно, что удовлетворительная модель должна иметь некоторый механизм для задержки ранних уклонений и в то же время ускоритель момента наступления последнего удара. Поздняя модель Терстоуна достигает первой цели, но не имеет успеха в достижении второй цели; в этой модели обучение не происходит достаточно быстро к концу опыта.

Две модели, которые кажутся более удовлетворительными, — это двухоператорная линейная модель и модель Рестла. Обе модели предсказывают правильные средние значения ( $Mn$ ) по всем семи свойствам. Однако обе модели предсказывают такие стандартные отклонения, которые сравнительно малы по всем свойствам, за исключением числа испытаний до последнего удара. Двухоператорная модель и модель Рестла так близки, что данные таблицы 1 не позволяют сделать выбор между ними. Поэтому возник-

кает вопрос, существует ли статистика, которая более чувствительна к различиям между этими моделями. Главное различие между ними состоит в следующем: модель Рестла предполагает, что все организмы имеют одно значение  $q_n$  при  $n$ -м испытании, тогда как двухоператорная модель порождает распределение  $q_n$  для  $n > 1$ . Рассмотрим один из результатов этого различия.

Оценки  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в двухоператорной модели показывают, что удар имеет меньшее влияние, чем уклонение. Поэтому собаки, получившие, например, пять ударов в первых пяти испытаниях, имеют более высокую вероятность удара в шестом испытании по сравнению с собаками, получившими менее пяти ударов в первых пяти испытаниях.

Следовательно, общее число ударов, полученных после пяти испытаний, должно быть больше для тех собак, которые имели удары в каждом из первых пяти испытаний. Данные Соломона — Вайна показывают, что 13 собак получили удар во всех первых пяти испытаниях и что эти собаки получили среднее значение числа ударов 4,77 при последующих испытаниях; другие 17 собак получили среднее значение числа ударов 2,70 после пяти испытаний. Это существенное различие, как показывает проверка Манна — Вайтнея ( $P < 0,01$ ). Модель Рестла, подобно всем моделям, которые имеют одно значение  $q_n$  при  $n$ -м испытании для всех организмов, предсказывает, что подобное различие не может иметь места.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из сказанного ясно, что среди всех представленных моделей лучше описывает исходные данные двухоператорная модель. Критик может отметить, что объект исследования данной статьи легко позволяет авторам защищать их собственную модель. Такому критику можно было бы ответить, что авторы не замалчивают никаких моделей, однако такой ответ не отвечал бы духу данной статьи. Мы вполне допускаем, что некоторые из рассмотренных моделей могут быть значительно усовершенствованы, хотя бы за счет математических и статистических исследований (главная трудность — оценка параметров). В данной статье мы пытались определить последовательность моде-

лей, каждая из которых имеет некоторую связь с прошлым психологическим представлением об обучении, и обнаружить, где именно наше толкование этих моделей имеет недостатки в описании экспериментов.

Можно взять нашу формулировку в качестве первого приближения и увидеть, каковы ее недостатки. Такой шаг поможет ему выбрать то направление, в котором модель необходимо улучшить, и указать на те аспекты более общей психологической теории, которые были специально отброшены в нашей формулировке.

Исследование, содержащееся в данной работе, можно рассматривать как математическое экспериментирование в отличие от лабораторного экспериментирования. Первое необходимо для того, чтобы получить некоторое представление о разнообразии возможных моделей и предотвратить поспешный выбор случайной модели именно потому, что этой моделью уже пользовались другие.

Авторы сознают, что в этой работе слишком мало внимания было уделено способности разных моделей воспроизводить точную структуру исходных данных, свою работу они представляют как иллюстрацию исследований в этом направлении.

## Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

1. R. R. Bush and F. Mosteller, Stochastic models for learning, New York, Wiley, 1955.
2. C. L. Hull, Principles of behavior, New York, Appleton-Century-Crofts, 1943, chap. 8.
3. I. Krechevsky, A study of the continuity of the problem-solving process, «Psychol. Rev.», 45, 1938, 107—133.
4. G. A. Miller, Finite Markov processes in psychology, «Psychometrika», 17, 1952, 149—167.
5. A. M. Mood, Introduction to the theory of statistics, New York, McGraw-Hill, 1950, p. 115.
6. K. Pearson, Tables of the incomplete beta function, London, Cambridge University Press, 1932.
7. F. Restle, A theory of discrimination learning, «Psychol. Rev.», 62, 1955, 11—19.
8. R. L. Solomon and L. C. Wynne, Traumatic avoidance learning: acquisition in normal dogs, «Psychol. Monogr.», 67, № 4 (whole № 354), 1953.
9. L. L. Thurstone, The learning curve equation, «Psychol. Monogr.», 26, № 3 (whole № 114), 1919.
10. L. L. Thurstone, The learning function, «J. gen. Psychol.», 3, 1930, 469—491.



# ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ И ПСИХОЛИНГВИСТИКА: ТЕОРИЯ ЧАСТОТ СЛОВ

*Б. Манделброт*

Статья посвящена современной теории частот слов, возникшей на грани двух важных научных направлений — теории информации и психолингвистики. В настоящее время эти направления развиваются собственными путями, однако уже имеются плоды их взаимодействия. Теорию частот слов можно было бы описать на языке этих направлений, но это, по-видимому, не лучший путь. Целью данной работы является иллюстрация взаимосвязи современных направлений в математике и некоторых проблем, поставленных классическими науками. Все выкладки, содержащие основные логические соотношения, мы рассмотрим в приложениях, а теперь остановимся на основных понятиях.

Теория информации сформировалась окончательно в двух статьях Клода Шеннона, опубликованных в 1948 году. Ее основу составляет своеобразное сочетание понятий алгоритма и случайности — древнейших и фундаментальнейших научных идей. Разумеется, эти понятия были близки по значению, начиная от вероятностных игр в XVII—XVIII вв. Они проникли вначале в статистическую механику около 1900 года, а затем в квантовую механику около 1925 года. Поэтому теория Шеннона с самого начала не была чем-то совершенно новым. В современную теорию вероятности она вошла в качестве еще одной интересной главы. Впрочем, надо отметить, что до 1948 года целый ряд попыток формализовать естественный язык потерпел крах из-за его слишком сложной структуры и слишком высокой степени непредсказуемости. Работа Шеннона 1948 года дала возможность описать эту структуру алгоритмами кодирования и учесть непредсказуемость при помощи марковской модели, которая, кстати, родилась у Маркова при анализе романа Пушкина «Евгений Онегин». Шеннону принадлежит заслуга интерпрета-



ции энтропии как «меры количества информации». Им была предложена также идея описания структуры системы с использованием степени ее беспорядка, измеряемой функцией вероятностей различных событий (см. «Приложение I»). Шенноновское определение «количества информации», разумеется, не исчерпывало содержания понятия «информация», и многие специалисты пришли к выводу, что его определение не раскрывает даже основных свойств понятия «количество информации». Теория информации, конечно, применима не только к анализу естественных языков, но и к любому типу сообщения. Более того, при анализе естественных языков возникает слишком много непреодолимых трудностей, которые приходится обходить.

Важность работы Шеннона всегда была очевидна. Впрочем, спустя много лет трудно представить реакцию тех времен, когда появились первые работы, содержавшие часть накопленных за время войны результатов. Результаты Шеннона, как и потребности в них, были настолько велики, что не успели просохнуть чернила, как появилась надежда на скорый успех в применении теории информации к любым задачам. Однако консерваторы отказывались от применения теории информации, заявляя, что это слишком просто, чтобы быть правильным, другие добавляли, что это не может быть математической панацеей, если профессиональные математики отнеслись к ней столь прохладно. Теперь этих разногласий нет, ибо, как это часто бывает, большинство предсказаний оказались недостаточно обоснованными.

Впоследствии выяснилось, что применение теории информации не является легким делом и не решает всех задач. Профессиональные математики, проявив активность, попытались компенсировать свое запоздалое подключение к решению новых задач. В результате всех усилий теория информации стала хорошо подтверждаемой главой исчисления вероятностей. Тем временем обнаружилась ограниченность в решении некоторых практических задач.

Вторым основным понятием является психолингвистика. Видимо, нет наук, изучающих естественный язык, с названием короче, чем «лингвистика». Один из первых результатов в психолингвистике — статистический закон, открытый Эступом и Дж. Зипфом.

Сделаем снова небольшое историческое отступление. В использовании естественного языка всегда возникали технические проблемы, которые обусловили появление криптографии, стенографии и телеграфии. Теперь эти проблемы стали частью теории информации, но я хочу показать, что они могут рассматриваться и как часть лингвистики. Рассмотрим причины, из-за которых криптографы и стенографы занимаются специальными преобразованиями фонетических и графических знаков, совершенно произвольными в смысле Соссюра. Криптограф хочет получить код, лишенный какой-бы то ни было структуры, которая может быть использована для раскрытия тайны его сообщения. Напротив, для стенографа, как и для телеграфиста, целью является получение кода, который может быть раскодирован за кратчайшее время. Исследуем более подробно эти два типа кодов.

Прежде всего мы будем игнорировать технологические проблемы, существующие, разумеется, в обоих случаях. Для этого допустим, что можно построить кодирующие и декодирующие устройства любой сложности и что человеческая память, в широком смысле слова, является неограниченной. При такой идеализации очевидно, что любой прогресс в нашем понимании структуры языка и речи дает возможность усовершенствовать работу криптографов или стенографистов. Например, даже знание правил грамматики покажет нам, что на такую-то фразу мы никогда не натолкнемся в грамматически правильной речи: так, если наниматель говорит на правильном английском языке, то стенографисту нельзя использовать последовательность символов, обозначающих неправильные предложения. Аналогично знание статистики речи подскажет нам, что клише может быть представлено специальными короткими символами; стенограмма будет короче, а, так как расшифровка сильно зависит от клише, криптограмма будет более ясной. Таким образом, криптографу и стенографисту следует максимально использовать любую возможность, даваемую лингвистикой. И наоборот, эмпирические новообразования в техническом языке расширяют наши познания в языке <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Обычно связь между теорией и практикой заключается во взаимодействии разных групп лингвистов и практиков, имеющих дело с переводом с одного языка на другой с помощью автоматиче-

Позволим себе краткое методологическое отступление. Обратим внимание на то, что едва ли следует ожидать эмпирических фактов, наиболее важных для лингвистов-инженеров, которые бы вызвали такой же интерес у большинства традиционных лингвистов. Часто наблюдается следующий эффект: из-за ошибок, возможных в процессе эмпирических наблюдений, специалисты по грамматике и технические лингвисты могут воспринимать общий объект изучения настолько по-разному, что их теоретические выводы могут быть, строго говоря, логически противоречивы. Открытие подобных случаев довольно сильно травмировало некоторых лингвистов, опыт которых не включал достаточно длинных логических выкладок, чтобы всегда контролировать логические противоречия. Представители так называемых точных наук, таких, как физика, наоборот, очень хорошо знакомы с тем фактом, что общее описание данной реальности требует использования нескольких несовместимых теорий.

Для психологов имеются веские основания завидовать успехам физиков в их попытках объяснить сложные факты при помощи очень простых понятий. Например, представители точной науки физики успешно в течение столетий использовали понятия воображаемого мира атомов, хотя никто не мог проконтролировать их предполагаемые свойства; на протесты философов против таких неоперационалистских процедур обычно обращали мало внимания. (Это хороший пример того, что Э. Вигнер охарактеризовал как «непонятная эффективность математиков в естественных науках».) Теперь, наоборот, причиной затруднений является применение математики к социальным наукам: любой набор предположений, который мог бы оказаться плодотворным, благоразумным и полезным, допустим только для некоторого класса экспериментов, и эксперименты же из-за своей неточности могут показать непригодность этих гипотез.

Будучи уверены в том, что никто — ни теоретики, ни практики — не оказался на должной высоте, резюмируем наше мнение о криптографии и стенографии. Ясно, что специалисты в этих областях работают с такими практи-

---

ского поискового словаря. Впрочем, современные работы в этой области решают и другие вопросы, возникающие при машинном переводе.

чески очевидными конструкциями, что едва ли могут воспользоваться возможностями, предоставляемыми лингвистами. Наоборот, профессиональная литература в этой области вряд ли известна другим; с точки зрения теории информации наиболее важным исключением являются частотные характеристики как для «средних выборок речи» различных смешанных источников, так и для выборок из отдельных авторов. Существенное значение здесь имеет разница в простоте между двумя наиболее важными «артикуляциями» — буква или фонема и слово. Частоты отдельных букв, составленных из последовательностей букв, давно принимались во внимание криптографами и телеграфистами. За десятилетия до обоснования теории информации Сэмюель Морзе знал, что возможно использование простейшей комбинации точек и тире для обозначения наиболее частых букв, а криптографы еще за столетия до этого учитывали частоту букв. Более того, делались даже многочисленные попытки связать относительную частоту фонем с некой степенью сложности ее произношения. Но все это не пошло особенно далеко. Действительно, кажется, что с точки зрения статистического моделирования отдельные буквы слишком малы, чтобы быть существенными единицами; знание частоты распределения букв не облегчает работу с более длинными кусками текста. Слова удобны для теоретиков. Хотя точное лингвистическое значение этих объектов до конца еще не определено, несомненно, понимание текста опирается на объекты, длина которых приблизительно равна длине слова, и имеются веские причины, чтобы начать с изучения слов, которые можно определить как последовательности букв между двумя ближайшими пробелами.

Такая работа была проведена уже давно, и, насколько мне известно, первым исследователем в этой области был стенографист французского парламента Ж.-Б. Эступ. Его работа мотивировалась, по всей видимости, дискуссией относительно преимуществ нескольких систем французской стенографии. Им установлен научный факт, который подтвердил предложенную им систему. Аналогичные исследования неоднократно проводились ради здорового интеллектуального любопытства другими исследователями. Однако их авторы работали разрозненно и их многочисленные результаты не идут ни в какое сравнение с результатами Джорджа Кингсли Зипфа, посвятившего



этому вопросу всю свою жизнь и написавшего в простой и строгой манере несколько книг. Чтобы характеризовать открытия этих авторов, следует предварительно дать несколько определений.

Возьмем большой кусок текста одного автора и проанжируем все слова в порядке убывания частоты их появления. Слово ранга 1 чаще всего встречается в последовательности букв, заключенных между двумя ближайшими пробелами, в английском языке таким словом является *the*, но в некоторых случаях им может быть *I*. Слово ранга 2 чаще всего встречается в тексте, если исключить слова ранга 1. Слово ранга 3 чаще всего встречается, если исключить слова ранга 1 и 2 и так далее. Обозначим символом  $W(r)$  слово, которое в нашей последовательности имеет ранг  $r$ . Необходимо отметить, что существуют редкие слова, которые в данном куске текста встречаются 1 или 2 раза. Их ранг неопределенен и даже несуществен, и, таким образом, их можно ранжировать произвольно. При помощи данных определений можно следующим образом описать эмпирические результаты.

В первом приближении отношение  $i(r, k)/k$ , которое представляет собой относительное число повторений слова  $W(r)$  в выборке длины  $k$ , обратно пропорционально  $10r$ :

$$i(r, k)/k = 1/(10r) = (1/10) (1/r).$$

Числовой множитель  $1/10$  получен эмпирически. Следует также подчеркнуть, что определение ранга подразумевает только, что  $r$  и  $i(r, k)$  изменяются в *противоположных направлениях*. Тот факт, что  $i(r, k)$  *обратно пропорционально*  $r$ , не очевиден и должен быть подтвержден эмпирически. Обычно для проверки связей такой формы применяется логарифмическая шкала; по оси абсцисс откладывается логарифм  $r$ , а по оси ординат — логарифм  $i(r, k)$ . Первое приближение закона частот слов, выраженного графиком  $\log [i(r, k)]$ , как функция от  $\log r$ , представляет прямую линию с угловым коэффициентом  $-1$ . Прямая параллельна второй биссектрисе координатных осей, как показано сплошной линией на рис. 1.

*Второе приближение.* Согласно некоторым авторам, закон  $i(r, k) = k^{(1/10)} (1/r)$  должен быть справедливым для любого текста независимо от того, на каком языке он написан. Фактически установлено, что большинство эмпирических графиков существенно отличается от пря-



мой с угловым коэффициентом  $-1$ . *Первое замечание:* некоторые наиболее часто повторяющиеся слова не удовлетворяют этому закону. Фактически в таких языках, как французский, определение «слова» неясно в случае сокращенных форм, например, как  $l'$ , принадлежащих

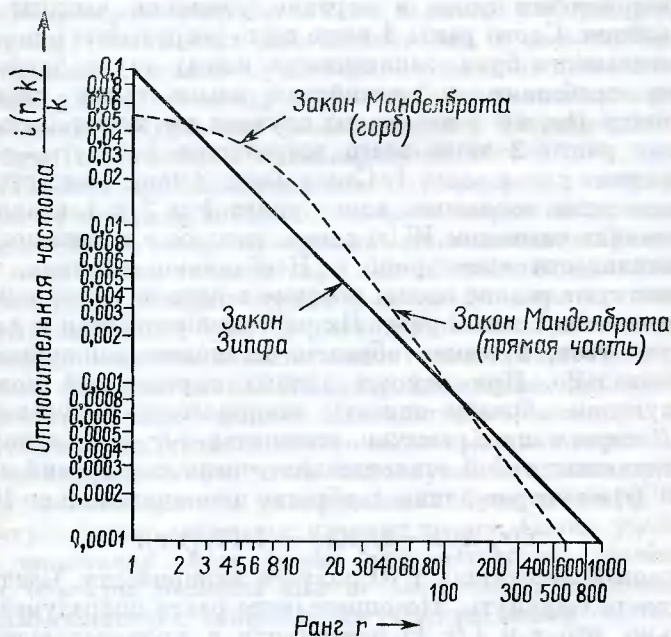


Рис. 1.

к наиболее часто повторяющимся, подобно *the* в английском, так что распределение наиболее частых слов недетерминировано. *Второе замечание:* найдено, что большое количество графиков  $\log i(r, k)$  не параллельны второй биссектрисе, и закон частот слов зависит от того, что называется «богатством словарного запаса» субъекта. Такая зависимость не является неожиданной. Резюмируя сказанное, данные можно представить аналитически в виде следующей формулы, которой соответствует кривая, изображенная пунктирной линией на рис. 1:

$$i(r, k) = Pk(r + V)^{-B}.$$

Ранг  $r$  определен. Параметры  $P$ ,  $V$  и  $B$  фиксированны

для данного субъекта, но различны для разных субъектов. Они не характеризуют язык, хотя очень может быть, что различные языки «предпочитают» различные значения величин их параметров. Легче всего измерить параметр  $B$ , который является абсолютной величиной наклона дважды логарифмического графика  $\log [i(r, k)]$  как функция от  $\log r$  (исключая наиболее частые слова). Закон первой аппроксимации — частный случай закона второй аппроксимации: написав его как  $i(r, k) = (1/10) kr^{-1}$ , легко видеть, что ему соответствуют следующие значения параметров:  $B = 1$ ,  $V = 0$ ,  $P = 1/10$ . Для обобщенного закона  $i(r, k) = Pk(r + V)^{-B}$  следует обратить внимание на то, что он не может быть получен в виде «простой кривой». Пытаясь объяснить закон первой аппроксимации  $i(r, k) = 1/10 kr^{-1}$ , я неизменно получал более общую вторую аппроксимацию и только позже понял, что эта более общая формула необходима и более точно совпадает с эмпирическими данными<sup>1</sup>. Примеры представлены на рис. 3.

Можно считать, что закон  $i(r, k) = Pk(r + V)^{-B}$  — один из наиболее установленных результатов в этой области и фактически является одним из немногих законов, которые постоянно подтверждаются на практике. То, что этот закон наблюдается, означает, что не было ничего абсурдного в предположениях обобщенного закона частот слов. Чтобы показать, что нет никакого конфликта между фактами и чисто человеческой интуицией в вопросе о свойствах речи, рассмотрим, например, слово «кофе». Несомненно, если субъект хочет выразить некую мысль, он не привлекает такую конструкцию, как последовательность букв с данной частотой к-о-ф-е. Прежде всего вероятностные свойства структуры речи определяют относительную частоту слов только в среднем. Это очень напоминает хорошо известные факты, связанные с бросанием монеты или кости: если в длинной последовательности партий повторяется какое-нибудь очко, можно быть уверенным, что игра нечестна. В идеальной модели случайного бросания кости наблюдаемая частота каждого очка должна быть что-то около  $1/6$ . Аналогично можно наблюдать флуктуа-

<sup>1</sup> Следует отметить,<sup>1</sup> что двойные логарифмические графики очень наглядны, когда коэффициент наклона  $B$  порядка 1 (см. Манделброт, 1963). Нет необходимости говорить о том, что двойные логарифмические графики не наглядны при  $B \gg 1$  (например, когда он больше 4).

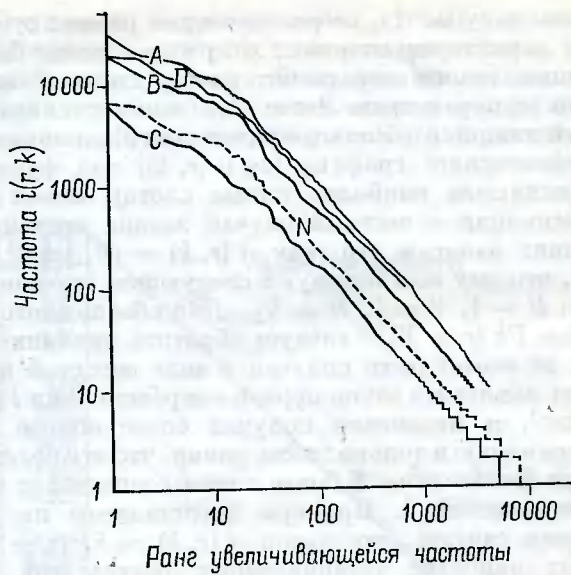


Рис. 2.

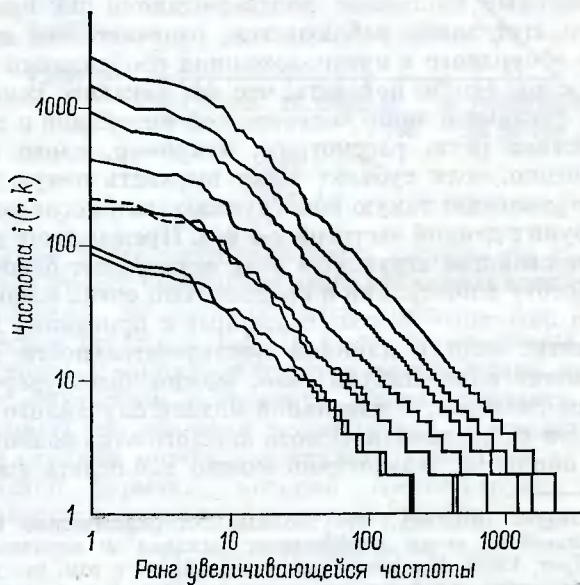


Рис. 3.

цию частоты слов. Естественно, с точки зрения говорящего, флуктуация частот слов не происходит по чистой случайности. Скорее всего, это связано с тем, что он «хочет сказать», но, с точки зрения воспринимающего, появление слов, по крайней мере частично, непредсказуемо и «чистая случайность» не что иное, как модель непредсказуемости. Можно заметить, что эта модель в некоторых случаях неадекватна, но нельзя сказать, что она априори противоречит каким-то интуитивным представлениям.

Далее, закон не ограничивается утверждением, что каждое слово имеет вполне определенную частоту; предполагается также связь между частотами различных слов. Ни то ни другое утверждение не является абсурдным. Прежде всего закон ничего не говорит о частоте слова *кофе*, как такового. Он утверждает следующее: Поля сказал мне, что, по его оценкам, ранг слова *кофе* в его словаре 177, в то время как Пит нашел, что у него ранг 315 в его словаре. В первом приближении это наводит на мысль, что у Поля в среднем каждое 1770-е слово — *кофе*, а у Пита — каждое 3150-е. Таким образом, закон частот слов связывает в систему слова Пита и Поля, рассматриваемые как одно целое. Более того, «система слов» не является синонимом выражения «система идей». Соответствие между ними достаточно произвольно; возможно, что одной системе слов соответствует несколько систем идей, и наоборот.

Убедив скептиков в приемлемости существования закона частот слов, остается объяснить, почему этот закон имеет вышеприведенный вид. Оказалось, что это выражение — одно из самых простейших, применяемых в статистике; но большинство профессионалов отрицают его до сих пор, поэтому почти все доводы (начиная с Зипфа в отношении аргументов «минимальной ошибки») опирались либо на примитивный инструмент, либо на некорректное применение математики. Следовательно, насколько мне известно, единственными приемлемыми моделями оказались различные варианты идеи, которая была предложена мной в 1951 году и была расширена различными авторами. Эти варианты математически полностью эквивалентны, но они относятся к столь разным типам мышления, что самые строгие критики одного варианта могут быть самыми большими сторонниками другого; фактически некоторые варианты были вновь откры-



ты конструктивными критиками. Но их автор давно уже отказался от попытки определить, который из этих вариантов лучше. Полезно отметить, что проблема предсказания в физике называется «корректно поставленной», если небольшие отклонения в начальных условиях ведут к незначительному изменению результата. Аналогично мою задачу можно назвать корректно поставленной, так как изменения в предположениях не приводят к значительным изменениям в результатах; если же предположения значительно модифицировать, то будут получены совсем другие результаты.

Два основных варианта моей модели частот слов легко приводятся к задачам криптографии и телеграфии, которые упоминались выше. Можно показать это. Предположим, что криптограф или телеграфист должен использовать кодирующий алфавит и что ему требуется закодировать каждое слово словом, причем за кодом каждого слова должен следовать специальный знак, который играет такую же роль, как интервал в речи или пробел в тексте. Теория информации показывает, что это правило кодирования является наилучшим как в смысле секретности, так и в смысле экономии, потому что символ, который может быть сэкономлен при переводе, легко дает ключ к расшифровке. Кодирующая процедура, предлагаемая такой теорией, в общем, уменьшит размер слова. При использовании для сообщения более длинных кодов априори можно ожидать, что кодирование типа «слово на слово» приведет к уменьшению ясности при попытках декодирования и потере экономичности при передаче сообщения. Однако бывает, что в реально наблюдаемых статистиках слов нет потерь, вызванных необходимостью выделения слов и разделения их пробелами. Другими словами, можно сказать, что если используемый пробел соответствует концепции слова, то единственной ситуации, когда слово является естественным сегментом языка, соответствует статистика, точно удовлетворяющая приведенному в «Приложении II» закону.

Форма этих критериев очень знакома физикам, предпочитающим характеризовать наблюдаемые факты с помощью таких формулировок, как «принцип наименьшего действия», «принцип наибольшей энтропии». Отправная идея этих принципов заимствована из интроспективного критерия оптимального человеческого поведения, и после



долгого использования в физике эти принципы вернулись в социальные науки в облике зипфовского «принципа наименьших ошибок». Под таким названием была опубликована книга Зипфа, давшая толчок началу работы над моим законом частот слов, в котором «телеграфная оптимизация» характеризуется как локализация количества информации в определенных условиях. Многие читатели, к сожалению, были очень смущены неизбежной связью такой модели с чисто зипфовской идеей идеальных слов, а также связью количества информации с многими аспектами слова *информация*, которые у Шеннона были слишком слабо выражены. Поэтому методически важно делать акцент на оптимальности наблюдений статистики слов, связанной с криптографией.

Кроме подхода, основанного на проблеме телеграфии и секретности, упомянем вкратце третий вариант моей основной модели. Структура системы частоты слова незначительно меняется как между индивидуумами, так и между средними значениями для групп. Относительно природы этого изменения я сделал некоторые предположения — простые и достаточно разумные в рамках «необъяснимой эффективности математики в естественных науках», на которую я уже ссылался. Поскольку полученная таким образом модель является лишь интерпретацией двух критериев оптимальности, это снова приводит к эмпирически наблюдаемому закону. Иначе говоря, существует некая вероятность того, что система, образованная случайным образом, может считаться «идеальной».

Неожиданно я обнаружил, что не воздавал должного психологии, как таковой. На этом можно закончить комментарии некоторых аспектов моих моделей. Независимо от специфики предпочитаемого варианта они все в конечном счете сводятся к разбиению слов на более элементарные единицы. Например, при анализе критерия оптимальности криптографии или телеграфии подразумевается представление слов с помощью специальных символов, таких, как точка и тире в азбуке Морзе. Фактически это разбиение объясняет успех наших моделей, так как, используя подходящие новые формы «закона больших чисел», можно показать, что тот же самый закон частот слов соответствовал бы широкому классу микроскопических структур. Это соответствует также применению в лингвистике метода «макромodelей», используемого при

отсутствии «микроданных» метода, который является мощным орудием физиков (различные методы с тем же названием получили распространение и у экономистов). Несмотря на то что частоты слов, несомненно, не зависят от технических деталей изобретения Сэмюэля Морзе, можно ожидать, что они связаны с частотой фонем или, в первом приближении, с частотой букв. Например, более общие формы моделей, кратко описанные в «Приложении II», требуют введения «веса» слова. Хотелось бы проверить предположение о том, что вес слова равен количеству букв в нем, что и делается в «Приложении II». Однако это невозможно, и остается рассмотреть понятие «веса» на основе принципов декодирования языка центральной нервной системой как получателя сообщений и, возможно, даже как их источника.

Кое-что, впрочем, известно об этих этапах. Похоже, что при кодировании используются определенные единицы, меньшие, чем фразы, но большие, чем фонемы или буквы. Естественно попытаться выяснить, являются ли эти единицы словами; если бы это удалось, наши модели сводились бы к взаимной адаптации кодов слов и их частот. К несчастью, единственным простым методом испытания этих гипотез являются скорости измерения распознавания слов. Эти испытания оказались положительными для моих гипотез, однако обращение к более высоким функциям еще проблематично. Впрочем, будем надеяться, что эта ситуация ничуть не хуже, чем у статистической физики в период расцвета энергетики, когда она смело бросала вызов философам науки, свободно рассуждая о следствиях состояния ненаблюдаемых атомов. Более осторожные ученые предпочитают иметь дело с так называемым феноменологическим методом, для которого теории, предсказывающие хорошие результаты возможных экспериментов, не нуждаются в дальнейшем развитии.

## Приложение I

### КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ

Для большей полноты полезно определить количество информации и прокомментировать его.

Дискретное распределение вероятности есть последовательность положительных чисел  $p_n$ , равных в сумме 1.

Шеннонова информация такого распределения определяется как

$$H = -\sum p_n \log_2 p_n,$$

где суммирование  $\sum$  проводится по всем значениям  $n$ , от  $n = 1$  до  $n = N$  ( $N$  может быть равным бесконечности). Теперь приведем три обоснования этого определения. Чтобы сформулировать их, необходимо выяснить различие между двумя широко распространенными толкованиями термина «слово». С одной стороны, говорят, что «словарь — это список слов». Таким образом, элементы словаря могут быть названы «словами-типами» (word-types). С другой стороны, говорят, что «текст — это последовательность слов». Такие элементы текста могут быть названы «словами-символами» (word-tokens). Можно говорить о «вероятности слова-типа», но нельзя говорить о «вероятности слова-символа», поэтому, чтобы избежать излишней педантичности, будем говорить о «вероятности слова». Предлагаются три мотивировки определения  $H$  в порядке увеличения содержательности и повышения уязвимости.

1. Существует теорема, сформулированная Шенноном, согласно которой  $H$  является нижней границей числа бинарных цифр, необходимых в среднем для перевода сообщения; последовательные символы перевода независимы, а его типы  $W_n$  имеют вероятности  $p_n$  (двоичная цифра-символ, которая может принимать только два значения, скажем  $-1, +1$ ). Когда какое-либо выражение играет столь важную роль, полезно дать ему название, даже если оно вводится первоначально только как математическое выражение, не имея интуитивных оснований, как в случае с доказательством теоремы Шеннона. С этой точки зрения выбор термина *количество информации*, обозначенного  $H$ , чисто условен.

2. Другие доказательства теории Шеннона вводят  $H$  более интуитивно; например,  $k_n$  — число повторений  $W_n$  в случайной последовательности  $k$  символов. Элементарное комбинаторное рассмотрение показывает, что число различных сообщений, каждое из которых характеризуется той же последовательностью величин  $k_n$ , равно

$$Q = \frac{k!}{\prod k_n!},$$

где  $\prod$  означает произведение по  $n$  от 1 до  $N$ . Предположим

теперь, что  $k$  очень велико и что формула Стирлинга может быть применена и к каждому из факториалов  $k_n!$ . В длинном сообщении  $k_n/k \rightarrow p_n$  комбинаторное представление  $Q$  будет приблизительно

$$2^{-k \sum p_n \log_2 p_n} = 2^{kH}.$$

Таким образом,  $kH$  интерпретируется как логарифм по основанию 2 количества  $Q$  сообщения из  $k$  слов, характеризующихся средними частотами слов  $k_n = kp_n$ . Это число обобщает все, что можно узнать о сообщении из  $k$  слов, по крайней мере для целей связи. Впрочем, лучше иметь дело с  $\log_2 Q$ , чем с  $Q$ , так как  $\log_2 Q$  растет менее стремительно при увеличении  $k$  и может быть равномерно распределен на все  $k$  слов-символов, содержащихся в нашем сообщении:  $\log_2 Q/k$  равен  $H$ . Можно сказать, что каждое слово-символ несет количество  $H$  некой «субстанции», и эта «субстанция» обозначается как «информация».

3. Многие авторы воспринимают термин «информация» значительно более серьезно, чем это предполагалось выше (в пунктах 1 или 2). Они доказывают, что расплывчатое, интуитивное понятие информации может быть выражено с помощью определенных аксиом, которым  $H$ , кстати, и удовлетворяет. Если аксиомы выбраны в определенном, кажущемся необходимым виде, можно даже показать, что  $H$  — единственно возможная функция  $p_n$ , которая законно может быть названа информацией.

Я полагаю, что аксиоматический подход чаще оказывается вредным, чем полезным. Его основной недостаток заключается в том, что в различных обстоятельствах необходимо использовать различные концепции информации, например концепцию Фишера относительно оценки параметров. В каждом случае также имеется возможность выделить ряд аксиом. Их необходимость поэтому иллюзорна или по крайней мере находится под вопросом, и аксиоматика оказывается наиболее ненадежным подходом, которого следует избегать.

## Приложение II

### ВЫВОД ЗАКОНА ЧАСТОТ СЛОВ

Рассмотрим длинную случайную последовательность  $k$  слов-символов. Слово-тип  $W(r)$  ранга  $r$  имеет относительную частоту  $i(r, k)/k$ , которая может быть близко аппро-



ксимирована вероятностью  $p(r)$ . В настоящем приложении представлено несколько выводов о соотношении  $p$  и  $r$ .

II. 1. Частота слов в случае, когда текст является случайной последовательностью независимых символов — букв и пробелов, обозначающих границы между словами.

На первом этапе предположим следующее:

(а) вероятность появления пробела равна  $p_0$ ;

(б) существует  $M > 1$  типов букв, каждая из которых имеет одинаковую вероятность появления  $(1 - p_0)/M$ ;

(в) текст, воспроизводимый обезьяной на печатной машинке, представляет собой случайную последовательность независимых букв и пробелов. Таким образом, если слово содержит  $m$  букв, его вероятность будет равна произведению вероятностей составляющих букв и пробелов, то есть

$$p_0 \left[ \frac{1-p_0}{M} \right]^m = P_0 \exp \{ -m \log [M/(1-p_0)] \}.$$

Это может быть записано как  $p_0 \exp \{ -\beta m \}$ , где  $\beta = -\log \frac{M}{1-p_0}$  — положительная величина, зависящая от  $p_0$  и  $M$ .

Теперь необходимо установить зависимость между числом букв  $m$  и рангом слова из  $m$  букв при упорядочении всех слов по мере возрастания частот. Необходимо заметить, что два пробела могут следовать друг за другом в независимой последовательности букв и пробелов. Таким образом, имеется слово, состоящее из 0 букв, более того, имеется  $M$  слов из 1 буквы,  $M^2$  слов из 2 букв и т. д.,  $M^m$  слов из  $m$  букв. Самым частым словом является слово с рангом 1, следующее за ним слово имеет ранг 2 и т. д. Если, однако, два слова имеют одинаковую вероятность или частоту появления, они могут быть ранжированы произвольно. Если слово имеет  $m$  букв, его ранг  $r$  находится в следующих границах:  $r$  больше, чем общее число различных слов, содержащих  $m-1$  или меньшее число букв, то есть

$$r > 1 + M + M^2 + \dots + M^{m-1} = \frac{M^m - 1}{M - 1},$$

или, наоборот,

$$m < \frac{\log [(M-1)r + 1]}{\log M};$$



$r$  также больше общего числа различных слов, содержащих  $m$  или меньшее число букв, то есть

$$r \leq 1 + M + M^2 + \dots + M^m = \frac{M^{m+1} - 1}{M - 1},$$

или, наоборот,

$$m \geq -1 + \frac{\log[(M-1)r + 1]}{\log M}.$$

Из этого следует, что зависимость между рангом и вероятностью дается ступенчатой функцией, которая постоянна, когда  $r$  изменяется между двумя  $(M^m - 1)/(M - 1)$ , соответствующая последовательным значениям  $m$ . Такая зависимость не может быть представлена простым аналитическим выражением. Впрочем, если  $m$  достаточно велико, то вышеуказанная граница для  $r$  различается незначительно в относительных величинах и можно написать

$$m \sim \frac{\log[(M-1)r]}{\log M}.$$

При этих условиях вероятность  $p_0 \exp\{-\beta m\}$  слова из  $m$  букв может быть представлена в следующей форме, в которой  $B = \beta/\log M$  и  $P = p_0(M-1)^B$ :

$$\begin{aligned} p(r) &= p_0 \exp\left\{-\frac{\beta}{\log M} \cdot \log[(M-1)r]\right\} = p_0(M-1)^{-B} r^{-B} = \\ &= Pr^{-B}. \end{aligned}$$

*Эта связь между вероятностью и рангом почти идентична «второй аппроксимации», о которой шла речь выше.*

Таким образом, на первый взгляд странный закон частоты слов может быть рассмотрен как последовательный ряд весьма простых предположений. Четыре основных свойства вышеприведенных результатов, *строго говоря*, требуют дальнейшего обсуждения. Во-первых, необходимо, чтобы количество различных типов слов было бесконечным. Во-вторых, параметры  $B$ , будучи равными  $1 - \log(1 - p_0)/\log M$ , должны быть больше 1. В-третьих, связь между  $p$  и  $r$  описывается ступенчатой функцией. В-четвертых, не фиксируется параметр  $V$ . В некоторых случаях все эти свойства приемлемы; однако в других случаях одно или несколько свойств противоречат эксперименту. Мы попытаемся вернуться к этому факту в приложении II.2 и II.3 после следующего обсуждения.

*Обсуждение.* Представленная модель не делает существенного различия между собственно буквами и пробелами. В результате при рассмотрении этой модели следует обратить серьезное внимание на то, что распределение вида  $p(r) = Pr^{-B}$  сохранится и для «псевдослов», образованных последовательным повторением некоторой буквы. Миллер и Ньюмен отметили этот факт для псевдослов естественного языка, определенных буквой *e*. Они нашли, что псевдослова не следуют нашему закону  $p(r)$  при  $B > 1$ , как это должно быть, если бы модель случайной генерации была абсолютно верной. Псевдослова, видимо, гораздо ближе к нашему закону  $p(r)$  при  $B < 1$ . Иначе говоря, свойство повторения пробелов более присуще этому способу представления, чем повторение любой другой буквы. Это, видимо, также подтверждается грубыми психологическими экспериментами, которые предполагают, что чтение написанного текста (или восприятие речевых списков) осуществляется не буква за буквой, а, скорее, слово за словом. Если так, то естественно считать, что случайность применяется к последовательности некоторых более абстрактных элементов кодирования головного мозга, чем к буквам. Единственным элементом, общим для всех кодирующих систем, будет пробел, так что наша зависимость  $p(r)$  для простых слов обеспечивает только мысленный контроль случайности элементов более высокого порядка кодирования. Требуется больше свидетельств о *e*-словах, чтобы подробно разработать это предположение.

Вернемся теперь к упомянутым четырем трудностям. Третья и четвертая из них могут быть разрешены путем замены модели приложения II.1 на модель, которая будет рассмотрена в приложении II.2.

*II.2. Оптимальные системы частот слов, то есть таких, для которых требуется наименьшее возможное число букв при заданной информации или наибольшее количество информации при заданном количестве букв.*

Предположим теперь, что число различных слов  $R$  произвольно, то есть может быть конечным или бесконечным. Таким образом, среди всех типов слов, определяемых как последовательность букв, следующих за пробелом, только  $R$  имеют неисчезающую вероятность. Минимизация

среднего числа букв проводится в два этапа. Для краткости вместо  $\sum_{r=1}^R$  будем писать  $\Sigma$ .

*Первый этап.* Ясно, что в любой данной последовательности вероятностей слов среднее число букв на слово минимально, если список слов, проранжированный по убыванию вероятностей, совпадает со списком  $R$  кратчайших буквенных последовательностей, проранжированных по возрастанию количества букв. Пусть  $m(r)$  — число букв в слове — функция, выведенная в приложении II.1.

*Второй этап.* По определению вероятность последовательности величин  $p(r)$  должна удовлетворять соотношению

$$\Sigma p(r) = 1.$$

Более того, требуется, чтобы наша информационно оптимальная система вероятностей  $p(r)$  несла такое количество информации  $H$ , что последовательность должна удовлетворять также соотношению

$$-\Sigma p(r) \log_2 p(r) = H.$$

Эта величина  $H$  может принимать значение между 0 и  $\log_2 R$ . При этих двух ограничениях на числа  $p(r)$  необходимо минимизировать среднее число букв в данном слове, а именно

$$\Sigma p(r) m(r).$$

Такая задача минимизации при ограничениях классически решается методом «множителей Лагранжа», состоящим из двух этапов: 1. Совершенно произвольно выбираются два числа  $\alpha$  и  $\beta$  и переменные  $p(r)$ , такие, что минимизируется линейно весовое выражение

$$-\Sigma p(r) \log p(r) - \beta \Sigma p(r) m(r) + \alpha \Sigma p(r).$$

Для этого необходимо, чтобы все частные производные этой формы по каждому  $p(r)$  равнялись 0, откуда получим  $R$  уравнений

$$-1 - \log p(r) - \beta m(r) + \alpha = 0.$$

Это можно переписать как

$$p(r) = \exp(\alpha - 1) \exp[-\beta m(r)].$$

2. На втором этапе метода Лагранжа  $\alpha$  и  $\beta$  подбираются

такие, что удовлетворяются два первоначальных требования. Параметр  $\alpha$  исключается благодаря уравнению  $\sum p(r) = 1$ , что дает  $\exp(1 - \alpha) = \sum_{s=1}^R \exp[-\beta m(s)]$ , и, следовательно,

$$p(r) = \frac{\exp[-\beta m(r)]}{\sum_{s=1}^R \exp[-\beta m(s)]}.$$

Что касается параметра  $\beta$ , то он определяется из требования, чтобы выражение  $-\sum p(r) \log_2 p(r)$  было равно данному  $H$ . Область возможных значений  $\beta$  зависит от общего числа  $R$  слов-типов. Если  $R$  конечно,  $\beta$  неограниченно; если  $R$  бесконечно, то необходимо, чтобы  $\beta$  было больше  $\log m$ . Этот результат, полученный по методу Лагранжа, имеет еще одно толкование: в основном при *максимизации информации, даваемой средним количеством букв*, используются одни и те же манипуляции.

Единственное различие будет на самом последнем шаге, где  $\beta$  следует определять через среднее число букв в слове, а не через информацию.

Для  $r \leq R$  формальная зависимость  $p(r)$  от  $m$  точно такая же, как в случае закона  $p_0 \exp(-\beta m)$ , полученного в приложении II.1 (использующем совершенно различные основы). Поэтому, дополняя связь между  $r$  и  $m$ , снова обнаружим для больших  $r$  соотношение

$$p(r) \sim Pr^{-B}.$$

Таким образом получен другой вывод закона частот слов, в котором общее число слов может быть конечным и наклон  $B$  может быть меньше 1. Заметим, что параметр  $P$  теперь зависит от  $R$  и величина его не такая, как в модели приложения II.1.

Указав, как можно урегулировать две из четырех трудностей, упомянутых перед обсуждением в приложении II.1, скажем теперь несколько слов о методе урегулирования двух других трудностей.

**II.3. Понятие веса буквы-типа и марковская модель языка.** Предположим, что каждая буква может быть охарактеризована положительной величиной, называемой ее весом, такой, что вес слова является суммой весов составляющих ее букв. Основным критерий коммуникационной оптимальности может быть переписан с учетом того требования,



что средний вес слова может быть как малым, так и сравнимым с описанной величиной количества информации. Обозначим тогда через  $C(r)$  вес  $r$ -го слова в ранжировании всех слов по возрастанию веса. Легко видеть, что в этом случае метод множителей Лагранжа дает нам

$$p(r) = P \exp[-\beta C(r)].$$

Более того, можно показать, что для больших значений  $r$  все еще имеется экспоненциальная зависимость между  $C$  и  $r$  в выражении

$$C(r) \sim (1/\beta') \log r,$$

где  $\beta'$  — некоторое положительное число, которое зависит от характера последовательности весов букв и может быть как меньше, так и больше  $\beta$ , ибо величины  $\beta'$  и  $\beta$  определяются совершенно независимыми путями. После этого соотношение между  $C$  и  $r$  подставим в соотношение между  $p$  и  $C$  и снова получим асимптотический закон  $p(r)$  приложения II.2. Область применимости этого закона распространяется, таким образом, и на случай неравномерно стоящих букв.

Последнее утверждение дает нам способ, который избавляет от третьей и четвертой трудностей, отмеченных в приложении II.1. Будем кратки. Во-первых, неизбежно существование ступеней в теоретическом законе  $p(r)$ , но амплитуда этих ступеней уменьшается с возрастанием величины наибольшего общего делителя весов букв. В результате допустимо, что гладкая функция  $p(r)$  может быть представлена законом частот слов для значений  $r$ , столь малых, что они принадлежат к асимптотическому рангу. Во-вторых, «премия» за использование букв с различными весами может быть выбрана для  $p(r)$  при помощи функции  $P(r+V)^{-B}$ , где  $V$  может значительно изменяться в соответствии с распределением весов букв. Введенный таким образом параметр  $V$  разрешает четвертую из перечисленных трудностей приложения II.1.

Последнее замечание: если допустимы ограничения  $B > 1$  и  $R = \infty$ , то полученные результаты с неодинаково весящими буквами будут соответствовать приложению II.1. Для этого достаточно предположить, что последовательность букв не является независимой, а образует марковскую цепь (см.: М а н д е л б р о т, 1954).



- Jean Baptiste Estoup, Les Gammes Sténographiques, Paris, 1916.
- Benoit Mandelbrot, Adaptation d'un message à la ligne de transmission, «Comptes Rendus des Séances Hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris», 232, 1951, 1638—1640.
- Benoit Mandelbrot, On Recurrent Noise Limiting Coding, в: «Information Networks, the Brooklin Polytechnic Institute Symposium», 1954, 205—221.
- Benoit Mandelbrot, Lingwistique statistique macroscopique, в: L. Apostel, B. Mandelbrot and A. Morf, Loguque, Langage et Théorie de l'Information, Paris, 1957.
- Benoit Mandelbrot, On the Theory of Word Frequencies and on Related Markovian Models of Discourse, в: «Structure of Language and Its Mathematical Aspects, Proceedings of Symposia on Applied Mathematics», vol. XII, ed. Roman Jakobson, Providence, R.I., American Methematical Society, 1961.
- Benoit Mandelbrot, New Methods in Statistical Economies, «Journal of Political Economy», 71, 1963, 421—440, или: «Bulletin of the International Statistical Institute».
- Benoit Mandelbrot, La théorie de l'information est-elle encore utile?, в: «Le Concept d'Information dans la Science Contemporaine, Cahier de Royaumont», Paris, 1965, 78—98.
- A. Markov, Essai d'une recherche statistique sur le texte du roman *Eugène Onéguine*, «Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg», VII, 1913.
- George A. Miller and A. Noam Chomsky, Finitary Models of Language Users, в: «Handbook of Mathematical Psychology», vol. II, eds. R. R. Bush, E. Galanter and R. D. Luce, New York, Wiley, 1963.
- Claude A. Shannon, Mathematical Theory of Communication, в: «Bell System Technical Journal», 28, 1948, 379—423, 623—656.
- George Kingsley Zipf, Human Behavior and the Principle of Least Effort, Reading, Mass., Adisson-Wesley, 1949.

XXIV съезд КПСС поставил перед марксистско-ленинской социологической наукой задачи большой исторической важности. Это — разработка концепции социального планирования, отвечающей современным потребностям общественного развития СССР; создание прогностических моделей социального развития советского общества на ближайшую и более отдаленную перспективу; выработка системы показателей и индикаторов социального развития, при помощи которой можно было бы измерять различные социальные аспекты жизни общества и планировать их изменение; разработка научных принципов и методик изучения связи показателей социального и экономического развития.

Конкретное решение этих задач, стоящих перед марксистско-ленинской социологией, требует дальнейшего развития методов качественного и количественного анализа социальной действительности и применения в социологических исследованиях точных методов, и в первую очередь математики. История конкретных социологических исследований в СССР за последние десять лет была связана со все более широким и более специализированным использованием математических методов сбора и анализа первичной социальной информации. По мере развития социологических исследований применялись все более сложные математические методы анализа социальных данных и выборки. Оперирование с большими массивами первичной социальной информации привело к необходимости использования вычислительной техники — счетно-перфорационных и электронно-вычислительных машин.

Решение практических социальных задач, поставленных перед марксистско-ленинской социологией XXIV съез-

дом КПСС, требует глубокого анализа всего арсенала математических методов, применяемых при проведении социологических исследований, и всестороннего обсуждения всего круга методологических проблем применения математики в социологии.

В связи со все расширяющимся применением математики в сфере социального научного знания перед философами, социологами и математиками встал вопрос об оценке с позиций диалектического и исторического материализма возможностей и перспектив применения математики в социологических исследованиях.

Рассматривая связи и преемственность в использовании математических методов в экономике, социологии, психологии, лингвистике, демографии и других социальных науках, нельзя не обратить внимание на тот факт, что количественные методы выступают как необходимый этап социального исследования, который связан с поисками новых методов, использованием новейших достижений математической науки в соответствии со спецификой социальных наук.

Трудности применения математики в социальных науках обусловлены, на наш взгляд, во-первых, сложностью социальных явлений; во-вторых, тем, что социолог имеет дело с фактами не только объективными, но и субъективными, перевод которых в количественную форму требует разработки специального математического аппарата; в-третьих, эти трудности связаны с тем, что в социологии очень трудно свести к минимуму связь между наблюдаемым явлением и наблюдателем: «С одной стороны, наблюдатель может оказывать значительное влияние на явление, привлекая его внимание... С другой стороны, ученый-социолог не может взирать на свои объекты с холодных высот вечности и вездесущности... Другими словами, в общественных науках мы имеем дело с короткими статистическими рядами и не можем быть уверены, что значительная часть наблюдаемого нами не создана нами самими»<sup>1</sup>.

Величины, характеризующие социальные явления, в ряде случаев не подчиняются аксиомам арифметики. Нельзя сказать, например, что отношение к работе одного человека вдвое или втрое больше отношения к работе

---

<sup>1</sup> Н. В и н е р, Кибернетика, М., 1958, стр. 201—202.

другого человека, даже если и есть основания думать, что оно больше. Физика достигла большого успеха, в частности, потому, что аксиомы арифметики реализовывались во всех областях физических явлений. Это последнее не имеет места в социальных науках. Видимо, в социальных науках необходима иная, чем в естественных науках, теория измерения.

В последнее время в нашей стране появилось большое число работ по проблемам применения математики в социальных науках. Это — «Количественные методы в социологии» (М., 1966), «Методика и техника статистической обработки первичной социологической информации» (М., 1968), «Распознавание образов в социальных исследованиях» (Новосибирск, 1968), П. П. Маслов, «Статистика в социологии» (М., 1971) и многие другие.

Проблемы применения математических методов плодотворно разрабатываются в Москве (ИСИ и ЦЭМИ АН СССР), Новосибирске (Институт экономики и организации промышленного производства СО АН СССР), а также в социологических центрах в Ленинграде, Свердловске, Таллине и других городах страны.

Советские социологи весьма эффективно применяют математику при построении выборки объекта социологического исследования, анализе социологических данных, измерении и моделировании социальных явлений. Непрерывно расширяется арсенал математических средств, используемых в конкретных социологических исследованиях, накапливается и расширяется опыт, повышается уровень использования математики и ЭВМ в социологии.

Предлагаемый советскому читателю перевод широко известной за рубежом книги «Математические методы в социальных науках», вышедшей под редакцией крупных американских социологов П. Лазарсфельда и Н. Генри, представляет собой сборник статей видных, главным образом американских, специалистов в области применения математических методов в социальных науках.

Это не первый перевод на русский язык работ буржуазных авторов по проблемам применения математических методов в социальных науках. В 1963 г. в издательстве «Иностранная литература» вышла в свет книга Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсона «Введение в конечную математику», известная часть которой посвящена применению математических методов к бихевиори-



стским (поведенческим) проблемам. В 1966 г. в издательстве «Прогресс» была опубликована книга «Математические методы в современной буржуазной социологии», в состав которой были включены статьи главным образом школы Н. Рашевского и П. Лазарсфельда. Из других переводных публикаций следует назвать книгу Дж. Кемени, Дж. Снелла «Кибернетическое моделирование» (М., «Советское радио», 1972), в которой представлены методы моделирования социальных явлений, разрабатываемые американскими социологами, и книгу Г. Хармана «Современный факторный анализ» (М., «Статистика», 1972), содержащую большой материал по применению методов многомерной статистики в социальных и социально-психологических исследованиях.

В целях более правильного понимания характера и направления применения математических методов в буржуазных социальных науках необходимо сделать некоторый экскурс в историю.

Первую попытку применить математические методы к анализу социальных явлений предприняла так называемая естественнонаучная, или позитивистская, школа в буржуазной социологии, сложившаяся под непосредственным влиянием идей О. Конта. Позитивистская школа в социологии возникла в начале XX века и постепенно заняла видное место среди других буржуазных социологических школ вплоть до настоящего времени. Ее основоположниками были Георг Ландберг, Стюард Додд, Николай Рашевский и другие буржуазные социологи, пришедшие в социологию из математики и естествознания.

Основным постулатом позитивизма (а в дальнейшем и неопозитивизма) было отрицание специфики социальных наук, отождествление наук о природе и обществе, провозглашение социологии естественной наукой.

Поскольку социология, согласно утверждениям неопозитивистов, является естественной наукой, ее основная задача сводится к тому, чтобы открывать в сфере социальной теории те же закономерности, которые действуют в природе. Эти закономерности, считают неопозитивисты, можно открыть только при помощи математики, потому что только математика может свести хаос социальных явлений в строгую логическую систему.

Практическая беспомощность, бессодержательность неопозитивизма в социологии вскоре подорвали к нему



всякое доверие. Его бывшие приверженцы превратились в его злейших врагов.

Наиболее сильный удар неопозитивистской школе был нанесен вышедшими из ее рядов представителями так называемой школы плюралистического поведения, главой которой до сих пор является один из редакторов и авторов данной книги П. Лазарсфельд.

В противоположность неопозитивизму школа плюралистического поведения делает акцент на специфику социальных наук. Будучи органически чужда какой-либо социологической теории, эта школа рассматривает социальное поведение как простую сумму индивидуальных поведений, при этом исследование индивидуальных поведений проводится путем выявления их психологической основы. В исследовании социального поведения плюралистических бихевиористов интересует главным образом количественная сторона, а основным исследовательским инструментом выступает статистика. Программировать ситуацию — это значит раскрыть количественную характеристику и классифицировать определенные социально-психологические черты поведения составляющих ее индивидов. Разложение ситуации на ее составные элементы, а затем сведение этих элементов при помощи математического аппарата в строгую логическую систему — такова методология исследования плюралистических бихевиористов.

В общетеоретическом подходе к социальным явлениям плюралистические бихевиористы близки к позициям представителей субъективного идеализма в социологии. Любое социальное явление для них — это механический агрегат индивидов и «психических основ» жизнедеятельности индивидов, а «психические основы» отрываются от материальных факторов и условий жизни капиталистического общества. Сами по себе расчеты и технические приемы буржуазных социологов заслуживают известного внимания. Но и здесь необходимо обратить внимание на то, что ориентирование на проблему взаимоотношения объекта и субъекта наблюдения — это специфическая черта буржуазной математической социологии; она характеризует определенный уровень буржуазного и мелкобуржуазного сознания, когда требуется жесткая отработка методики и техники проведения наблюдений наблюдателем, когда наблюдаемые не доверяют наблюдателю и в своем поведении используют защитные механизмы. Необходим весьма

разработанный методический аппарат для описания этого сложного взаимодействия, довольно изощренная техника, разрабатываемая применительно к социальному исследованию.

Представляя советскому читателю статьи буржуазных авторов, публикуемые в книге «Математические методы в социальных науках», нельзя не отметить, что в некоторых из них проявилась двойственность, присущая школе плюралистического поведения вообще: субъективизм в выборе проблематики, с одной стороны, научная разработка проблем социологического измерения, латентных структур социального поведения и процессов — с другой стороны.

Использование математических методов и моделей, разрабатываемых буржуазными авторами, при анализе социалистической действительности ограничено как противоположностью теоретических подходов, с позиций которых эти методы и модели применяются, так и различием объектов, то есть социалистических и буржуазных социальных и социально-психологических отношений, к исследованию которых эти методы и модели применяются.

Статьи книги группируются по трем разделам, которые отражают главные направления использования математических методов в социологии — измерение (раздел I) и моделирование (разделы II и III).

В первом разделе излагаются проблемы измерения в социальных науках. В социальных науках требуется иная теория измерения, чем в естественных и технических науках. Эта теория измерения была предложена С. Стивенсом еще в 40-х гг. (см. «Экспериментальная психология», т. I, ИЛ, М., 1960) и развита в работах К. Кумбса, К. Айдукевича, П. Суппеса. Измерение понимается как установление соответствия между некоторой числовой системой и системой наблюдаемых (измеряемых) объектов. В зависимости от характера числовой системы имеет место тот или иной уровень измерения. Проблема измерения включает 2 аспекта — логико-теоретический и эмпирический, операциональный. Логико-теоретический аспект связан с характеристикой числовой системы.

Эмпирический аспект означает множество операций над самими объектами, посредством которых эти объекты могут наблюдаться в отношении некоторых своих свойств так, чтобы удовлетворить определенным аксиомам число-

вой системы. Так, на экзамене ставится оценка, при тестировании — тестовой балл. Какова природа чисел, которыми выражаются экзаменационные оценки и тестовые баллы, — вопрос логического аспекта измерения. Как известно, мы оперируем с оценками, как с обычными числами (мы складываем их, делим, находим среднее). В действительности оценки обладают более слабыми свойствами. Они только порядковые величины. Их можно сравнивать, но с ними, строго говоря, нельзя производить операции сложения и деления. Например, нелепо считать, что студент, получивший оценку четыре балла, в два раза лучше знает предмет, чем студент с оценкой два балла.

Задачей социального измерения на эмпирическом уровне, которое и рассматривается в первом разделе данной книги, является соотношение конкретной величины (в данном случае балльной оценки) с измеряемой переменной, определение способов перехода от эмпирической (наблюдаемой) переменной к переменной латентной (скрытой).

Все эти вопросы рассматриваются в статьях У. Гибсона, Ф. Лорда и Дж. Раска, взаимодополняющих друг друга и связанных единой логической структурой. Авторы статей рассматривают проблему взаимоотношения факторного и латентно-структурного анализов в эмпирическом исследовании, роль и место теории тестов в латентно-структурном анализе, проблему математической обоснованности теории тестов.

Применение латентно-структурного анализа в социологии сопряжено с рядом трудностей, которые характеризуют современный уровень разработки самого факторного анализа. Это в первую очередь проблемы оценки взаимосвязей, вращения и криволинейности. Обобщение латентно-структурной модели до уровня латентного профиля для соотношений между количественными измерениями позволяет обойтись без решения проблемы специфики переменных факторного анализа. Этот путь преодоления трудностей факторного анализа, предложенный У. Гибсоном, заслуживает, на наш взгляд, внимания и дальнейшего развития.

Практическое применение латентно-структурного анализа неразрывно связано с проведением тестов. Именно поэтому разработка проблемы взаимосвязи латентно-структурного анализа и теории тестов приобретает исклю-

чительно большое значение для эмпирических исследований. П. Лазарсфельд, как нам кажется, успешно решает в своей статье эту проблему, а Ф. Лорд и Дж. Раск, исходя из теоретических положений П. Лазарсфельда, разрабатывают математический аппарат теории тестов на уровне выявления отношения между тестовым баллом и исследуемой характеристикой на уровне индивидуального подхода к анализу вопросов. Разрабатывая математическую теорию тестов, Ф. Лорд исходит из использования весьма широкого класса характеристических функций теста, а Дж. Раск вводит достаточно жесткие ограничения на эти функции.

Второй раздел книги, озаглавленный «Структуры», посвящен выявлению механизмов, действующих в социальных группах и структурах. В этом разделе представлены работы Г. Саймона, Г. Гутцкова, Х. Уайта, Дж. Маршака, М. Шубика и Дж. Гюйбо — известных специалистов в области применения математических методов в социальных науках, имеющих немалый опыт в проведении эмпирических исследований.

Раздел открывается статьей Г. Саймона и Г. Гутцкова «Механизмы, вызывающие стремление к единообразию в группах». Статья развивает теорию Л. Фестингера о коммуникационных процессах в малых группах. Авторы статьи пытаются выделить в отличие от Л. Фестингера постоянно действующие механизмы группового давления. Они выдвигают ряд гипотез, касающихся механизмов группового давления, и подвергают их анализу на основе сравнения с проведенными в свое время экспериментами «группового влияния» Бека и «межличностного взаимодействия» Фестингера. На основе проведенного анализа авторы формулируют простые постулаты о механизмах сцепления таких переменных, как «значимость» и «стремление к общению».

Статья Х. С. Уайта «Модели систем родства с предписанным браком» посвящена математическому анализу правил, допускающих брак в первобытных обществах. Как известно из работ Леви-Стросса, эти правила направлены на предотвращение браков между близкими родственниками. Статья Х. Уайта базируется на идее известного математика А. Вейля об изучении структур родства посредством циклических групп, на исследованиях Р. Буша, предложившего в качестве более удобного средства ана-



лиза брачных структур матрицы перестановок, и на книге Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсона «Введение в конечную математику», разработавших типологию всех систем с предписанным браком. Х. С. Уайт систематически выводит и описывает все специфические структуры родства, которые удовлетворяют аксиомам Дж. Кемени, Дж. Снелла и Дж. Томпсона, и анализирует один из видов предписанного брака — между двоюродными братьями и сестрами.

Дж. Маршак в статье «Эффективные и жизнеспособные организационные формы» пытается найти пути повышения эффективности действий индивида в организации. Главное в организации, согласно автору статьи, — это анализ взаимодействия между набором правил, предписанных тому или иному члену организации, и получаемой в процессе его деятельности информацией. Автор статьи, используя теорию игр, ставит и пытается решить вопрос о том, что должен делать индивид при получении информации, чтобы обеспечить оптимальное соотношение между своими собственными притязаниями и интересами организации.

Если в статье Дж. Маршака рассматривается частный случай применения теории игр к анализу организации, то в статье «Теоретико-игровые решения и производственная организация» М. Шубика обосновывается целесообразность применения различных вариаций теории игр к исследованию производственной организации: игр двух лиц с постоянной суммой, позиционных игр, решений для игр  $n$  лиц, решений для динамических игр и т. д. Причем применение теории игр к анализу производственной организации преследует цель нахождения главных решений, которые в максимальной степени способствовали бы повышению ее эффективности как в экономическом, так и в социальном аспектах.

В статье Дж. Гюйбо «Теории общего интереса и логическая проблема агрегации» ставится такая проблема: как индивидуальные выборы в группе создают коллективное решение. Сущность статьи можно раскрыть на следующем примере. Возьмем трех кандидатов А, В, С и четырнадцать голосующих, из которых шесть отдадут предпочтение порядку АВС, в то время как каждые четыре других отдадут предпочтение порядкам ВСА и СВА соответственно. Если подсчитано только главное предпочтение, ясно, что А — победитель. Но если мы проведем



четырнадцать сравнений между А и В, шесть из них будет за А и восемь — за В. Эта невозможность группового решения получила название парадокса Кондорсе. Один из подобных неразрешенных случаев изучен К. Эрроу<sup>1</sup>. Автор рассматривает варианты парадокса Кондорсе — Эрроу.

Третий раздел начинается статьями Дж. Колмена «Структура поощрения и изложение усилий» и Ж. Кревера «Модель изменения мнения при повторном голосовании». Общее, что присуще обеим этим статьям, — это применение теории марковских цепей в исследовании социальных явлений и процессов.

Дж. Колмен — автор монографии «Введение в математическую социологию», в которой он показывает использование математических методов в различных сферах социальных явлений. В данной статье используется аппарат теории марковских цепей для описания процесса влияния в группе, когда влияние одних членов группы на других выражается определенным поощрением к некоторой деятельности. Эффект, вызванный поощрением, выражается в скорости перехода индивида от некоторого состояния к требуемому состоянию.

Кревера формулирует положение о том, как можно анализировать эффект предшествующего голосования в последовательности выборов при предположении, что голосующие разделены на две группы, и те, которые всегда остаются в одной и той же партии, и те, у кого нет убежденности. Это предположение приводит к матрице перехода, обладающей определенными математическими свойствами, которые позволяют заключить, что должно случиться, если представлены различные комбинации убежденных и неубежденных избирателей.

Для работ Колмена и Кревера характерны два момента. Во-первых, в статьях содержатся подходы, позволяющие на основе математического анализа эмпирического материала вывести некоторые социальные закономерности, касающиеся проблем группового влияния в процессе выборов, изменения мнений голосующих и т. д. Во-вторых, в статьях абсолютно игнорируется вопрос о том, для кого и в каких целях исследуется общественное

---

<sup>1</sup> См.: Р. Д. Льюис и Х. Райф, Игры и решения, гл. 14, М., 1961.

мнение и итоги голосования при выборах в представительные органы буржуазного государства.

В действительности же в обществе, где господствует капитал, общественное мнение не является самовыражением нации или народа. Оно штампуется, формируется с помощью средств массовой коммуникации, находящихся в руках монополий.

Последние две статьи — Р. Буша, Ф. Мостеллера «Сравнение восьми моделей» и Б. Мандельброта «Теория информации и психоллингвистика» — посвящены специальным дисциплинам — теории обучения и психоллингвистике. Первая статья показывает математическую структуру модели обучения и методику сравнения моделей, которая может быть использована при сравнении моделей социальных явлений. Во второй статье показывается, что истоки таких современных наук, как теория информации и психоллингвистика, лежат в решении жизненных, социальных задач, стоявших перед стенографией и криптографией.

Моделирование — мощное средство научного познания. Оно берет свое начало еще в античной науке. У истоков науки Нового времени пробивает себе дорогу математическое моделирование, сыгравшее огромную роль в развитии механики, физики, астрономии. Классический образец построения числовой модели экономики имеется в «Капитале», где К. Маркс дает схемы расширенного воспроизводства.

К настоящему времени в советской литературе существует большой и положительный опыт использования математики при моделировании в общественных науках: использование математического аппарата при моделировании социальных проблем демографии, международных отношений, групповой динамики, социальной структуры и т. п.

Предлагая читателю математические модели социальных явлений, разработанные буржуазными социологами, необходимо иметь в виду, что методологические установки математического моделирования в марксистско-ленинской и буржуазной социологии коренным образом различаются.

Буржуазные социологи осуществляют моделирование социальных явлений, «...не улавливая объективной закономерности в развитии системы общественных отношений,

не усматривая корней этих отношений в степени развития материального производства»<sup>1</sup>.

Методологической основой математического моделирования в современной буржуазной социологии является идеализм. Практическим основанием исследований буржуазных социологов так же, как и 100 лет назад, является стремление упрочить отживший капиталистический строй. «Бескорыстное исследование уступает место сражениям наемных писак, беспристрастные научные изыскания заменяются предвзятой угодливой апологетикой»<sup>2</sup>.

Другой важной составной частью методологии моделирования буржуазной социологии становится формально-математический подход к решению задач и замена качественного, содержательного анализа анализом количественным и формальным. Именно на эту особенность буржуазной методологии обращал внимание К. Маркс, характеризуя работы Кетле. Он писал: «...объяснение этой необходимости ему никогда не удавалось, он не двигался вперед, а только расширял материал своего наблюдения и исчисления»<sup>3</sup>. Современные буржуазные социологи в своих исследованиях в области моделирования социальных явлений и процессов подходят в лучшем случае к обнаружению социальной зависимости, но не к объяснению ее. Диалектико-материалистический подход к моделированию вообще и к математическому моделированию социальных процессов в частности обязывает рассматривать не только внешнюю сторону явлений, но и их сущность, переходить от наблюдения к обобщению, то есть к раскрытию социальных законов.

Общественно-историческая практика является основой, целью и критерием познания социальных явлений.

Опыт моделирования в буржуазной социологии важен для советских социологов с точки зрения техники и используемых методов. Ознакомление с этим опытом имеет значение также и в целях более конструктивной и содержательной критики социологических построений буржуазных социологов. Математический аппарат в предлагаемых статьях достаточно прост, основывается на начальных представлениях алгебры, анализа и теории вероятностей. Посредством этого аппарата проводятся весьма

<sup>1</sup> В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 26, стр. 56.

<sup>2</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 23, стр. 17.

<sup>3</sup> К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 32, стр. 496.

тонкие, интересные с технической точки зрения исследования.

Математические методы могут успешно применяться в социологии только с позиций подлинно научной общей социологической теории — исторического материализма.

Опираясь на незыблемый фундамент диалектического и исторического материализма, советские социологи добились известных успехов в применении математических методов в социологических исследованиях, разработали ряд новых методов, отвечающих потребностям развития этих исследований.

Важнейшей задачей является изучение и выработка специфических математических теорий, средств и методов для каждого уровня исследования: на уровне общей теории, теории среднего уровня и т. п. Это относится не только к математическим методам, но и к научным понятиям, ибо перенесение социологических понятий с одного уровня на другой может привести и приводит к серьезным теоретическим и практическим ошибкам. Эти ошибки нередко усугубляются тем, что некоторые социологи, некритически заимствуя понятийный математический аппарат и модели, выработанные буржуазными социологами, пытаются применить этот аппарат и модели к анализу социалистической действительности, что наносит вред развитию математических методов в марксистской социологии и их практическому применению в процессе исследования социальной действительности.

Союз социологов-марксистов и математиков на незыблемой основе диалектического и исторического материализма, подход к математическому анализу эмпирического материала с позиций марксистско-ленинской науки об обществе, непримиримость к различным попыткам буржуазных социологов навязать свою идеологию под прикрытием математизации — только такой путь применения математических методов в конкретных социологических исследованиях признает марксистско-ленинская социология.

*Э. П. Андреев*

*Г. В. Осипов*



# СОДЕРЖАНИЕ

От издательства . . . . .	5
Раздел I. Измерение	
В. Гибсон. Факторный, латентно-структурный и латентно-профильный анализ (перевод В. А. Ирикова) . . . . .	9
Пауль Ф. Лазарсфельд. Латентно-структурный анализ и теория тестов (перевод М. И. Шабунина) . . . . .	42
Фредерик М. Лорд. Отношение между тестовым баллом и исследуемой способностью (перевод В. А. Ирикова) . . . . .	54
Дж. Рэск. Индивидуальный подход к анализу вопросов (перевод М. И. Шабунина) . . . . .	91
Раздел II. Структуры	
Герберт А. Саймон, Гарольд Гутцков. Механизмы, вызывающие стремление к единообразию в группах (перевод В. Г. Шеверова) . . . . .	117
Харрисон Уайт. Модели систем родства с предписанным браком (перевод В. А. Ирикова) . . . . .	138
Джекоб Маршак. Жизнеспособные и эффективные организационные формы (перевод В. А. Ирикова) . . . . .	153
Мартин Шубик. Теоретико-игровые решения и производственная организация (перевод М. И. Шабунина) . . . . .	170
Д. Т. Гьюбо. Теории общего интереса и логическая проблема агрегирования (перевод В. Г. Шеверова) . . . . .	196
Раздел III. Процессы	
Дж. С. Кольмен. Воздействие структуры поощрений на приложение усилий (перевод В. Г. Шеверова) . . . . .	253
Ж. Кревера. Модель изменения мнения при повторном голосовании (перевод М. И. Шабунина) . . . . .	273
Р. Буш, Ф. Мостеллер. Сравнение восьми моделей (перевод М. И. Шабунина) . . . . .	295
Б. Манделброт. Теория информации и психолингвистика: теория частот слов (перевод В. А. Ирикова) . . . . .	316
Послесловие . . . . .	338



## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИАЛЬНЫХ НАУКАХ**

Редактор *В. Барсуков*

Художник *С. Елинсон*

Художественный редактор *В. Пузанков*

Технический редактор *И. Боясова*

Корректор *В. Слепенкова*

Сдано в производство 27/III 1973 г. Подписано  
к печати 24/IX 1973 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>, тип. № 1. Бум.  
л. 51<sup>1</sup>/<sub>2</sub>. Печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 18,15. Изд. № 9/14319  
Цена 1 р. 62 к. Заказ 1/0951

Издательство «Прогресс» Государственного комитета  
Совета Министров СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли  
Москва, Г-21, Zubовский бульвар, 21

Ордена Трудового Красного знамени Московская типография № 7  
«Искра революции» Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9

15.527



**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
В СОЦИАЛЬНЫХ  
НАУКАХ**