

П.Ф. Цвайфель

# Физика реакторов

Атомиздат 1977

Специально для библиотеки  
Полярного Сияния

Книга не предназначена  
для распространения на  
коммерческой основе

"Физика реакторов" П. Ф. Цвайфель.  
Пер. с англ. Ю. И. Колесникова.  
279 с. М., Атомиздат, 1977

В книге даны основы физики ядерных реакторов, теории переноса нейтронов. Описаны способы: нейтронно-физических расчетов реактора, определения эффектов реактивности, расчета эффективности органов регулирования и многие другие вопросы физики и кинетики ядерных реакторов.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава 1. Вводные замечания . . . . .</b>	<b>8</b>
§ 1.1. Основные концепции физики реакторов . . . . .	8
§ 1.2. Физическое описание цепной реакции . . . . .	15
Список литературы . . . . .	17
<b>Глава 2. Уравнение диффузии нейтронов . . . . .</b>	<b>18</b>
§ 2.1. Введение и определения . . . . .	18
§ 2.2. Уравнение переноса нейтронов . . . . .	25
§ 2.3. Односкоростное уравнение переноса . . . . .	27
§ 2.4. Еще одна форма уравнения переноса . . . . .	27
§ 2.5. Закон Фика . . . . .	28
§ 2.6. Граничные условия . . . . .	31
§ 2.7. Применимость диффузионного приближения . . . . .	34
§ 2.8. Диффузионное уравнение в плоской геометрии . . . . .	35
§ 2.9. Диффузионное уравнение в сферической геометрии . . . . .	40
§ 2.10. Диффузионное уравнение в цилиндрической геометрии . . . . .	44
§ 2.11. Измерение диффузионных параметров . . . . .	48
Задачи . . . . .	49
Список литературы . . . . .	50
<b>Глава 3. Расчет реактора в односкоростном приближении . . . . .</b>	<b>51</b>
§ 3.1. Введение. Основное уравнение . . . . .	51
§ 3.2. Плоский реактор без отражателя . . . . .	53
§ 3.3. Общие замечания о расчетах реакторов . . . . .	55
§ 3.4. Критическая масса и критические размеры . . . . .	57
§ 3.5. Расчет критичности для других геометрий . . . . .	60
§ 3.6. Физический смысл условия критичности . . . . .	64
§ 3.7. Распределение энерговыделения . . . . .	65
§ 3.8. Использование интегрального уравнения . . . . .	66
§ 3.9. Многозонные реакторы . . . . .	69
Задачи . . . . .	72
Список литературы . . . . .	72
<b>Глава 4. Нестационарные задачи . . . . .</b>	<b>73</b>
§ 4.1. Введение . . . . .	73
§ 4.2. Асимптотическая кинетика реактора . . . . .	73
§ 4.3. Уравнения кинетики с запаздывающими нейтронами . . . . .	77
§ 4.4. Многоступенчатый процесс образования запаздывающих нейтронов . . . . .	80
§ 4.5. Одна группа запаздывающих нейтронов . . . . .	82

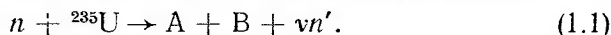
§ 4.6. Измерение реактивности. Установившийся период . . . . .	83
§ 4.7. Эксперименты со сбросом стержня . . . . .	85
§ 4.8. Эксперименты с импульсом нейтронов . . . . .	87
§ 4.9. Обратное размножение . . . . .	89
§ 4.10. Передаточная функция реактора . . . . .	91
§ 4.11. Эксперименты с нейтронными волнами . . . . .	93
Задачи . . . . .	95
Список литературы . . . . .	95
<b>Глава 5. Расчет реактивности . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 5.1. Введение . . . . .	96
§ 5.2. Линейные операторы . . . . .	97
§ 5.3. Вариационный принцип . . . . .	104
§ 5.4. Теория возмущений . . . . .	109
§ 5.5. Функция ценности . . . . .	113
§ 5.6. Супервариационный принцип . . . . .	115
§ 5.7. Вариационный принцип для неоднородного уравнения . . . . .	119
Задачи . . . . .	122
Список литературы . . . . .	123
<b>Глава 6. Численные методы . . . . .</b>	<b>124</b>
§ 6.1. Введение . . . . .	124
§ 6.2. Внешние итерации . . . . .	124
§ 6.3. Расчеты потока нейтронов: одномерный случай . . . . .	127
§ 6.4. Двух- и трехмерные задачи: внутренние итерации . . . . .	132
§ 6.5. Доказательство сходимости . . . . .	137
§ 6.6. Методы экстраполяции . . . . .	139
§ 6.7. Итерация лапласиана, синтез потока нейтронов . . . . .	140
Задачи . . . . .	142
Список литературы . . . . .	142
<b>Глава 7. Регулирование реактора . . . . .</b>	<b>143</b>
§ 7.1. Введение . . . . .	143
§ 7.2. Прямой расчет эффективности регулирующего стержня . . . . .	143
§ 7.3. Коэффициент самоэкранировки . . . . .	145
§ 7.4. Вероятность выхода нейтронов первого пролета . . . . .	151
§ 7.5. Черный стержень в диффузионной теории: поглощающая поверхность . . . . .	155
§ 7.6. Эффекты выгорания топлива . . . . .	159
§ 7.7. Отравление продуктами деления . . . . .	163
§ 7.8. Отравление ксеоном . . . . .	165
§ 7.9. Другие насыщающиеся продукты деления . . . . .	171
Задачи . . . . .	172
Список литературы . . . . .	172
<b>Глава 8. Задачи с энергетической зависимостью: многогрупповой метод . . . . .</b>	<b>173</b>
§ 8.1. Введение . . . . .	173
§ 8.2. Многогрупповой метод . . . . .	173
§ 8.3. Вывод многогрупповых уравнений . . . . .	176
§ 8.4. Аналитические решения многогрупповых уравнений . . . . .	182
§ 8.5. Численное решение многогрупповых уравнений . . . . .	188
§ 8.6. Интегральная форма уравнений . . . . .	189

§ 8.7. Измерение $k_{\infty}$ . . . . .	190
§ 8.8. Эффективная доля запаздывающих нейтронов	198
Задачи . . . . .	201
Список литературы . . . . .	202
<b>Глава 9. Расчеты замедления . . . . .</b>	<b>203</b>
§ 9.1. Введение . . . . .	203
§ 9.2. Ядро столкновения: упругое рассеяние . . . . .	204
§ 9.3. Ядро столкновения: неупругое рассеяние . . . . .	209
§ 9.4. Возрастная теория Ферми . . . . .	212
§ 9.5. Резонансное поглощение в бесконечной среде	219
§ 9.6. Резонансное поглощение в блокированных по-	
глопителях . . . . .	224
§ 9.7. Температурные эффекты . . . . .	229
§ 9.8. Константы тепловой группы . . . . .	233
§ 9.9. Вариационные принципы и теория возмущений	
в многогрупповом формализме . . . . .	235
Задачи . . . . .	238
Список литературы . . . . .	238
<b>Глава 10. Некоторые специальные вопросы . . . . .</b>	<b>239</b>
§ 10.1. Введение . . . . .	239
§ 10.2. Некоторые задачи, встречающиеся при проекти-	
ровании легководных реакторов . . . . .	239
§ 10.3. Реакторы на быстрых нейтронах . . . . .	246
§ 10.4. Ториевый конвертер . . . . .	250
§ 10.5. Тяжеловодные реакторы . . . . .	250
§ 10.6. Графитовые реакторы . . . . .	253
§ 10.7. Температурные коэффициенты . . . . .	253
Список литературы . . . . .	255
Приложение А. Матрицы . . . . .	256
Приложение Б. Дельта-распределение . . . . .	259
Приложение В. Преобразования Фурье и Лапласа . . . . .	260
Приложение Г. Специальные функции реакторной физики . . . . .	265
Приложение Д. Дивамика упругих столкновений . . . . .	268
Приложение Е. Телеграфное уравнение . . . . .	272
Алфавитно-предметный указатель . . . . .	273

## ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

### § 1.1. ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ ФИЗИКИ РЕАКТОРОВ

Ядерный реактор представляет собой сборку, содержащую такое количество *делящихся изотопов\**, например  $^{235}\text{U}$  или  $^{239}\text{Pu}$ , что становится возможной самоподдерживающаяся цепная реакция. Принципы работы реактора весьма просты. Когда делящееся ядро поглощает нейтрон, оно может испытать деление. Например,



При поглощении ядром  $^{235}\text{U}$  нейтрона оно делится на два более легких ядра, называемых обычно осколками деления [они обозначены в уравнении (1.1) символами А и В] с образованием дополнительных нейтронов, среднее число которых обозначено  $\nu$ . Величина  $\nu$  слабо зависит от энергии нейтрона, вызвавшего деление, и сильно зависит от типа делящегося изотопа. Так, в рассматриваемой реакции в случае нейтронов низкой энергии (*тепловые* нейтроны)  $\nu \approx 2,42$ .

Помимо реакции (1.1) может иметь место радиационный захват



Отношение числа радиационных захватов нейтронов к числу вызванных нейтронами делений обычно обозначается символом  $\alpha$ . В действительности эта величина равна отношению микроскопических сечений\*\* захвата и деления:

$$\alpha = \sigma_c / \sigma_f. \quad (1.3)$$

В табл. 1.1 приведена величина  $\alpha$  как функция энергии налетающего нейтрона для  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ . Другая величина, часто используемая в литературе по физике реакторов, — среднее число нейтронов, испускаемых на один нейтрон, поглощенный делящимся изотопом, обозначаемое обычно  $\eta$ .

Из предыдущих определений следует, что

$$\eta = \nu / (1 + \alpha); \quad (1.4a)$$

$$\eta = \nu \sigma_f / (\sigma_c + \sigma_f); \quad (1.4б)$$

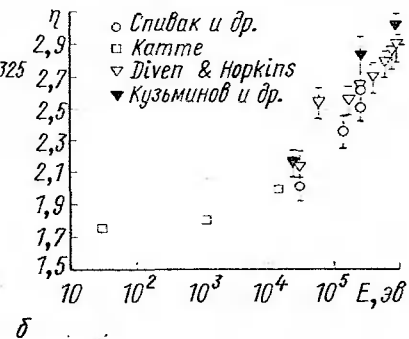
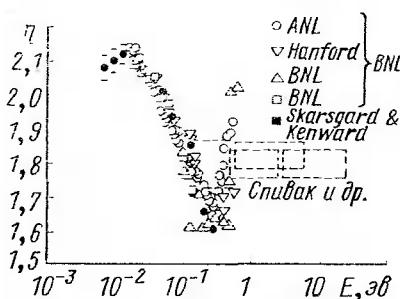
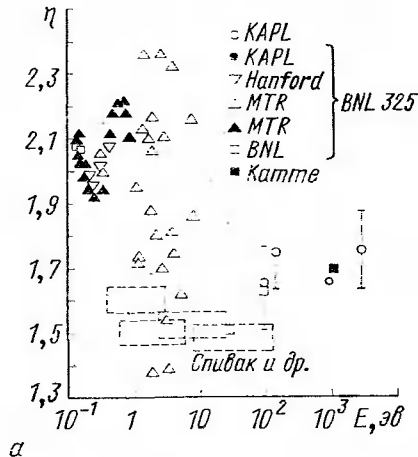
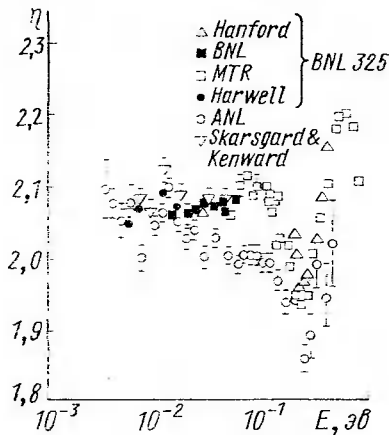
$$\eta = \nu \sigma_f / \sigma_a. \quad (1.4в)$$

\* Называемых обычно *топливо*.

\*\* Понятие *сечение* детально описано в § 2.1.

Значения  $\alpha$  в зависимости от энергии поглощенного нейтрона

Изотоп	Энергия	$\alpha$	Изотоп	Энергия	$\alpha$
$^{235}\text{U}$	Тепловая	0,18	$^{239}\text{Pu}$	Тепловая	0,42
	30 эв	0,65		100 эв	0,81
	100 эв	0,52		1200 эв	0,60
	1200 эв	0,47		15 кэВ	0,45
	15 кэВ	0,41			

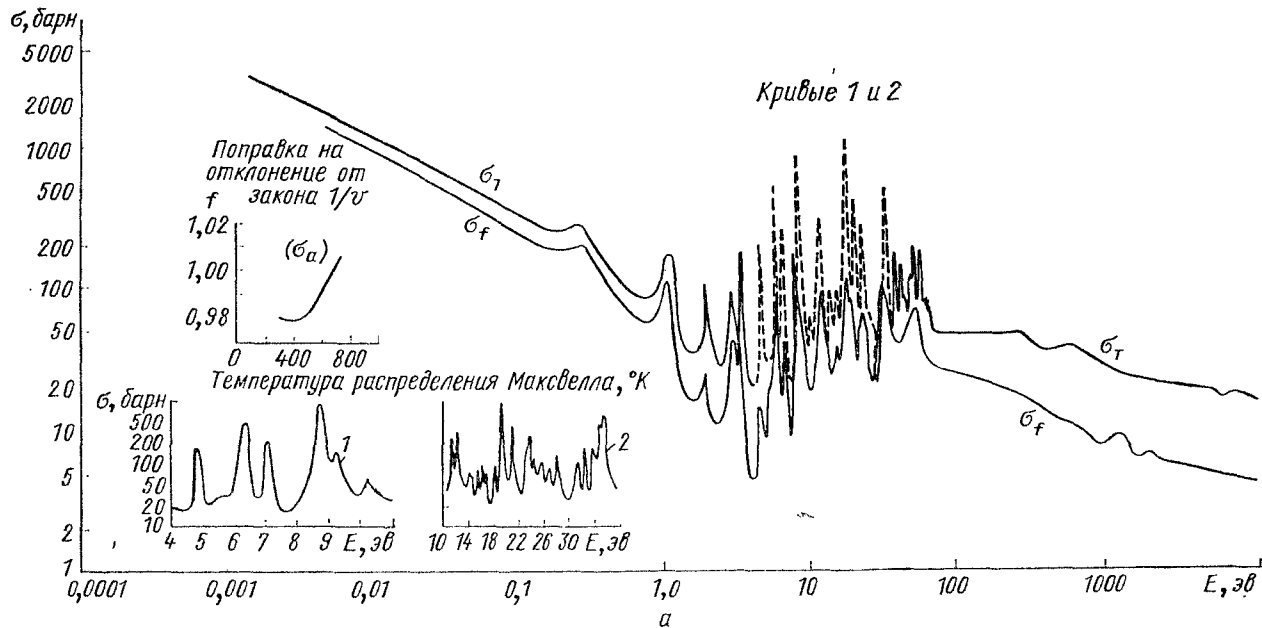
Рис. 1.1. Выход вторичных нейтронов на один поглощенный  $\eta$  для  $^{235}\text{U}$  (а) и  $^{239}\text{Pu}$  (б) в функции от энергии

Здесь введено полное сечение поглощения

$$\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f. \quad (1.5)$$

Зависимость  $\eta$  от энергии нейтрона  $E$  представлена на рис. 1.1.

Цепная реакция имеет место, если какой-нибудь из  $\nu$  нейтронов, испускаемых при делении, поглощается другим делящимся ядром,



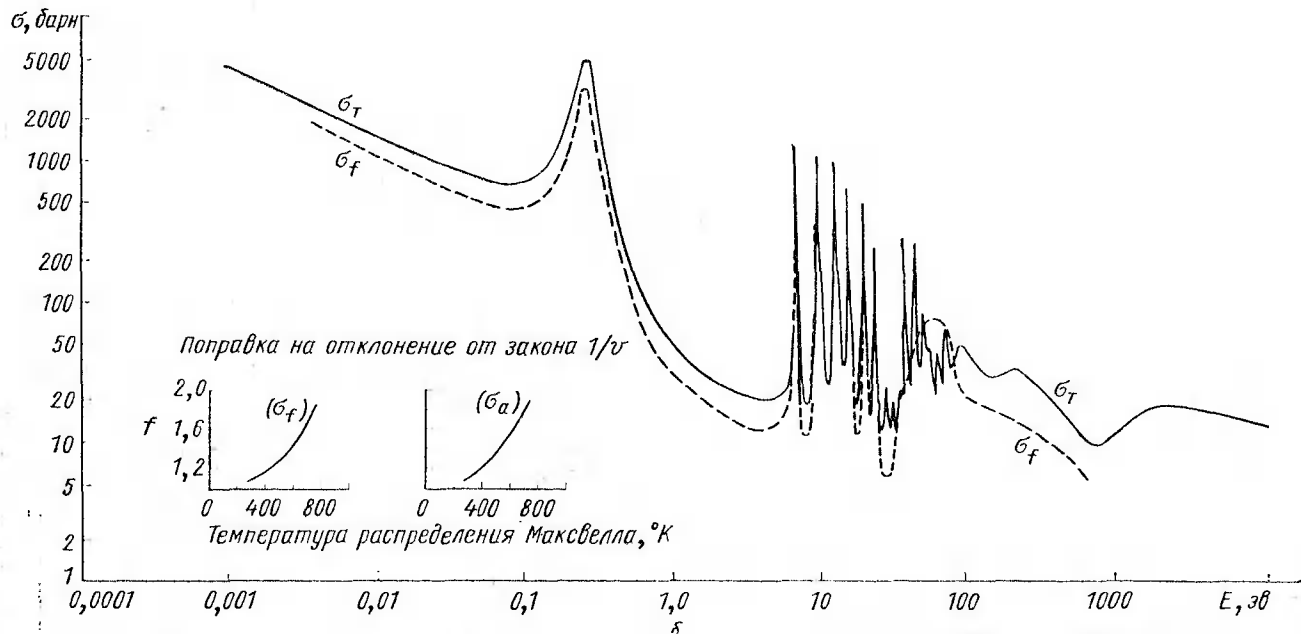


Рис. 1.2. Сечение деления как функция энергии падающего нейтрона для  $^{235}\text{U}$  (а) и  $^{239}\text{Pu}$  (б)

снова вызывая деление, и т. д. Для реактора, число делений в котором постоянно во времени (т. е. для *критического* реактора), необходимо, чтобы существовало точное равенство числа исчезающих и вновь появляющихся при делении нейтронов. В число исчезающих нейтронов следует включать не только те, которые вызывают деление или захватываются по реакции (1.2) (радиационный захват в топливе), но и поглощенные в ядрах других элементов, которые присутствуют в системе (конструкционные материалы, теплоноситель, замедлитель), и утекающие из системы. Одна из задач реакторной физики — определение размеров и состава системы, которые обеспечивают условия критичности.

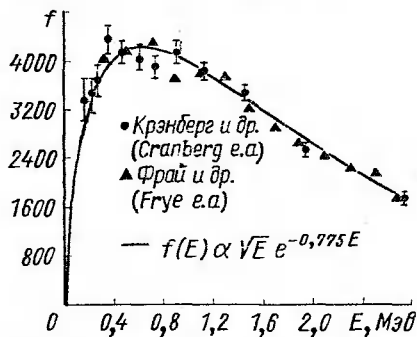


Рис. 1.3. Спектр нейтронов деления, испускаемых  $^{235}\text{U}$

ной физики — определение размеров и состава системы, которые обеспечивают условия критичности.

Сечение деления сильно зависит от энергии налетающих нейтронов. Из рис. 1.2 видно, что нейтроны с энергией 1 эв или менее значительно эффективнее для поддержания цепной реакции, чем быстрые. На основании рис. 1.3 можно заключить, что испускаемые при делении нейтроны имеют энергию примерно 2 Мэв\*.

Для уменьшения энергии нейтронов деления в реактор может быть добавлен материал, называемый замедлителем и состоящий из ядер легких элементов. Потеря энергии в этом случае происходит за счет упругих столкновений. Очевидно, для легких элементов при столкновении с нейтроном доля передаваемой ядру энергии больше, чем для тяжелых. Поэтому обычно замедлители содержат водород, дейтерий, бериллий или графит. Водород и дейтерий, как правило, применяют в виде обычной или тяжелой воды, хотя иногда используются

\* Энергетический спектр осколков деления очень хорошо описывается формулой

$$N(E) = aE^{1/2} \exp[-(E/k_B T_f)],$$

где  $E$  — энергия, Мэв. Параметры  $a$  и  $k_B T_f$  приведены в следующей таблице:

Изотоп	$a$	$k_B T_f$
$^{233}\text{U}$	1.872	1.290
$^{235}\text{U}$	1.888	1.306
$^{239}\text{Pu}$	2.121	1.333

Среднее значение энергии нейтронов составляет 1,93 Мэв для  $^{235}\text{U}$  и  $^{233}\text{U}$  и 2,00 Мэв для  $^{239}\text{Pu}$ .

органические соединения. Все эти материалы не только замедляют, но и поглощают нейтроны, и это следует учитывать при проектировании реакторов.

Реактор, не содержащий замедлителя, называют *реактором на быстрых нейтронах*. Из-за малого сечения взаимодействия при высокой энергии нейтронов такие реакторы требуют значительно большей загрузки ядерного топлива, чем реакторы с замедлителем. Однако даже в реакторах на быстрых нейтронах нейтроны в какой-то мере замедляются при неупругих столкновениях с ядрами топлива и конструкционных материалов, а также при упругих и неупругих столкновениях с ядрами теплоносителя (обычно жидкого натрия). Как правило, средняя энергия нейтронов в реакторе на быстрых нейтронах без замедлителя составляет примерно 200 кэв, в то время как средняя энергия нейтронов деления, как было отмечено, близка к 2 Мэв.

Поскольку металлический уран по ряду причин нежелательно использовать в качестве ядерного топлива, в реакторах на быстрых нейтронах применяются окислы и карбиды урана, содержащие значительные количества легких элементов. В результате энергетический спектр нейтронов еще более смягчается, и средняя энергия нейтронов лежит в пределах от 1 до 10 кэв. При дальнейшем добавлении замедлителя в реактор спектр нейтронов смещается в так называемую область *промежуточных энергий*, а затем — *тепловых*. Под последней понимается область энергий, сравнимых с энергией теплового движения атомов в реакторе, т. е.  $k_B T$ , где  $T$  — абсолютная температура, а  $k_B$  — постоянная Больцмана (при 20° С  $k_B T \approx 0,025$  эв).

Проектирование реактора на тепловых нейтронах, т. е. реактора, в котором нейтроны находятся в квазиравновесии с совершающими тепловое движение атомами, сопряжено с некоторыми сложными проблемами. Например, при рассмотрении столкновений быстрых нейтронов с атомами последние могут считаться покоящимися. Однако для тепловых нейтронов следует также учитывать движение ядер. Эта проблема, известная как *термализация нейтронов*, выходит за рамки настоящей книги, хотя некоторые замечания по этому поводу делаются в гл. 9 и 10.

Хорошо известно, что изотоп урана, ответственный за деление, —  $^{235}\text{U}$ ; его содержание в естественном уране составляет всего лишь 0,71%\*. Однако благодаря большому сечению деления  $^{235}\text{U}$  тепловыми нейтронами в некоторых случаях возможно поддержание цепной реакции в естественном уране (в случае водяного замедлителя сечение поглощения водорода столь велико, что требуется слабообогащенное  $^{235}\text{U}$  топливо — 1% или несколько меньше).

Для реакторов же на быстрых нейтронах требуется топливо, обогащенное  $^{235}\text{U}$  по крайней мере до 20%. Это является большим не-

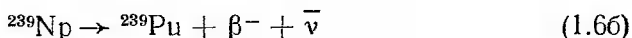
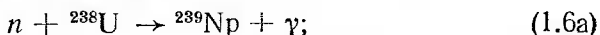
---

\*  $^{238}\text{U}$  также делится быстрыми нейтронами, но эта реакция вносит малый вклад в поддержание цепного процесса.

достатком реакторов на быстрых нейтронах. Однако они обладают и некоторыми достоинствами.

Прежде всего остановимся на производстве энергии в реакторе. В результате реакции деления (1.1) выделяется энергия, равная приблизительно  $200 \text{ Мэв}^*$ . Иными словами, полное деление 1 г урана сопровождается выделением  $24\,000 \text{ квт}\cdot\text{ч}$  полезной энергии. Большая ее часть представляет собой кинетическую энергию осколков деления. Масса этих осколков относительно велика, а пробег — мал; поэтому они остаются в том топливном элементе, где образовались. В результате топливный элемент нагревается, и тепло должно быть удалено тем или иным теплоносителем. Способ преобразования этого тепла в электрическую энергию практически одинаков \*\* для атомной и для обычной (на угле) электростанций, и поэтому он здесь не обсуждается.

Возвращаясь к вопросу о достоинствах реактора на быстрых нейтронах, нужно в начале рассмотреть производство  $^{239}\text{Pu}$ , который образуется в результате реакций:



(здесь  $\bar{\nu}$  обозначает антинейтрино).

Эта реакция — единственный способ получения  $^{239}\text{Pu}$ ; в природе он не встречается. Желательность его получения обусловлена ограниченным количеством  $^{235}\text{U}$  в природе. Оценки точного количества  $^{235}\text{U}$  различаются, но совершенно очевидно, что его в 140 раз меньше, чем  $^{238}\text{U}$ . Поэтому если бы весь  $^{238}\text{U}$  был превращен в  $^{239}\text{Pu}$ , то количество ядерного топлива существенно бы выросло. Ясно, что в любом реакторе, содержащем  $^{238}\text{U}$ , образуется  $^{239}\text{Pu}$ . Его производство (а также производство более тяжелых изотопов, например  $^{240}\text{Pu}$ ) является важным фактором, оказывающим подчас то или иное влияние на конструкцию и экономику реактора. При этом существенно, чтобы образовывалось больше ядер  $^{239}\text{Pu}$ , чем сгорает ядер  $^{235}\text{U}$  (или  $^{239}\text{Pu}$ ). Отношение числа образовавшихся делящихся ядер к числу выгоревших называется *коэффициентом воспроизводства*; желательно иметь коэффициент воспроизводства больше единицы.

Вспомним теперь о величине  $\eta$ , введенной ранее [см. уравнение (1.4)]. Из  $\eta$  образовавшихся при поглощении нейтрона топливом новых нейтронов один должен пойти на поддержание цепной реакции и один на образование ядра  $^{239}\text{Pu}$ . В результате на утечку и поглощение в замедлителе, теплоносителе и т. д. остается  $\eta - 2$  нейтронов. Только если  $\eta - 2 > 0$ , коэффициент воспроизводства может быть больше единицы. Вернемся к рис. 1.1, где величина  $\eta$  пред-

\* Часть энергии уносится высокоэнергетическими частицами, такими, как нейтрино.

\*\* За исключением возможности активации теплоносителя при прохождении через активную зону.

ставлена как функция энергии. Следует обратить внимание на возрастание  $\eta$  при увеличении энергии нейтронов и на то, что для  $^{238}\text{Pu}$  величина  $\eta$  больше, чем для  $^{235}\text{U}$ . Этим обусловлен повышенный интерес к реакторам на быстрых нейтронах с плутониевым топливом.

До сих пор не обсуждался еще один делящийся изотоп —  $^{233}\text{U}$ . Он также не встречается в природе и образуется при поглощении нейтронов в тории. Много внимания было уделено проблеме создания ториевого конвертера, особенно в Ок-Риджской национальной лаборатории; многие полагают, что такой реактор обладает рядом преимуществ по сравнению с реакторами на быстрых нейтронах, особенно в том, что касается обеспечения безопасности их эксплуатации.

Здесь по необходимости только упоминаются некоторые принципиальные аспекты реакторной физики, влияющие на выбор типа реактора. Они детально обсуждаются в последующих главах, где рассмотрены такие не затронутые здесь проблемы, как выбор органов регулирования и отражателя, анализ кампании и т. п.

Корректное рассмотрение распределения нейтронов в реакторе требует учета энергетической зависимости ядерных констант. Обычно это делается в рамках так называемой *многогрупповой схемы*, где предполагается, что вместо непрерывного энергетического спектра нейтроны распределены по дискретным энергетическим уровням. Это приближение, весьма упрощающее расчет реакторов, оказалось вполне надежным. Однако в первой части книги мы будем предполагать, что все нейтроны имеют одинаковую энергию. Такое приближение называют *одногорупповым* (или *односкоростным*). Естественно, что оно оказывается недостаточно точным с точки зрения практических приложений. Но значительная часть физических и математических аспектов расчетов реакторов может быть должным образом рассмотрена в односкоростном случае. Переход к многогрупповой схеме представляется тривиальным.

В книге легко обнаружить отсутствие многих рассуждений, которые стали традиционными в учебниках по физике реакторов. Это связано со стремлением подготовить читателя к использованию электронных вычислительных машин. Даже такой стандартный расчет, как решение возрастного уравнения Ферми, приводится только как метод получения многогрупповых констант, используемых затем в машинных расчетах. Хотя такой подход может не устроить консерваторов, нам он представляется соответствующим духу времени.

## § 1.2. ФИЗИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЦЕПНОЙ РЕАКЦИИ

В § 1.1 сделаны довольно общие замечания о цепной реакции деления и ее особенностях в реакторах различного типа. На основе этих замечаний можно выразить в символической форме условие критичности реактора.

Начнем с введения величины, обозначаемой  $k$  и называемой *коэффициентом размножения*. Для критического реактора  $k = 1$ . Если  $k > 1$ , говорят, что реактор *надкритичен*, и физически это

означает, что число нейтронов в таком реакторе растет со временем. Если  $k < 1$ , говорят, что реактор *подкритичен*, и число нейтронов убывает. Физически  $k$  есть отношение числа нейтронов в данном поколении к числу нейтронов в предыдущем.

Удобно рассмотреть реактор таких больших размеров, что из него не утекают нейтроны. Для такого *бесконечного* реактора коэффициент размножения обозначают  $k_\infty$ . Очевидно,

$$k_\infty > k. \quad (1.7)$$

Рассмотрим историю нейтрона, поглощенного делящимся ядром. Если реактор критический, то в следующем поколении в топливе должен также поглотиться один нейтрон. В результате поглощения первого нейтрона образуется  $\eta$  новых нейтронов. Ограничимся на время однопрупповым рассмотрением бесконечного реактора. Тогда из  $\eta$  нейтронов доля  $\Sigma_a^f / \Sigma_a$  будет снова поглощена в топливе (здесь  $\Sigma_a^f$  — макроскопическое сечение поглощения топлива;  $\Sigma_a$  — сечение поглощения всех материалов в реакторе, включая топливо). Таким образом, в этой упрощенной модели

$$k_\infty = \eta f \text{ (одна группа)}. \quad (1.8)$$

Здесь введена величина  $f$  — *коэффициент использования тепловых нейтронов*:

$$f = \Sigma_a^f / \Sigma_a. \quad (1.9)$$

Если рассматривать реактор конечных размеров, то

$$k = \eta f P_T \text{ (одна группа)}, \quad (1.10)$$

где  $P_T$  — вероятность того, что нейтрон не покинет пределов реактора (*вероятность избежать утечки*).

Рассмотрим теперь случай немонотонных нейтронов. Предположим, что появляющиеся в результате делений быстрые нейтроны замедляются до тепловых энергий и затем вызывают деление (такая упрощенная модель применима только для реакторов на тепловых нейтронах). Некоторые быстрые нейтроны вызывают деление  $^{238}\text{U}$ . Отношение числа нейтронов, замедляющихся ниже порога деления  $^{238}\text{U}$  (около 1,2 Мэв), к числу первоначально появляющихся в системе обозначается  $\epsilon$  и называется *коэффициентом размножения на быстрых нейтронах*. При замедлении этих нейтронов через область резонансов доля нейтронов  $p$  избежит резонансного поглощения. Величина  $p$  называется вероятностью избежать резонансного поглощения. Таким образом,

$$k_\infty = \eta \epsilon p f \text{ (реактор на тепловых нейтронах)}. \quad (1.11)$$

Это выражение называют *формулой четырех сомножителей*. С учетом утечки нейтронов

$$k = \eta \epsilon p f P_f P_T, \quad (1.12)$$

где  $P_f$  — вероятность того, что быстрый нейтрон не покинет пределов реактора.

Такое описание цепной реакции чрезвычайно упрощает истинную картину. Прежде всего, величины  $\rho$ ,  $f$ ,  $P_f$ ,  $P_T$  сильно зависят от конструкции реактора и могут быть легко рассчитаны лишь для очень идеализированных моделей. Во-вторых, в рамках этого описания предполагается, что все деления вызываются тепловыми ( $^{235}\text{U}$ ) или быстрыми ( $^{238}\text{U}$ ) нейтронами. Поэтому формулы такого типа полезны только для качественного рассмотрения. Тем не менее они дают некоторое представление о физике происходящих в реакторе процессов. Кроме того, как мы увидим далее в этой книге, вычисление некоторых величин, входящих в приведенные выше формулы, полезно для определения некоторых параметров (групповых констант), используемых для расчета реакторов. Поэтому следует четко представлять физический смысл введенных в этом параграфе величин.

Можно модифицировать формулы этого раздела с тем, чтобы учесть, скажем, деление надтепловыми нейтронами. Тогда

$$k = k_{\text{надтепл}} + k_{\text{т}}, \quad (1.13)$$

где  $k_{\text{надтепл}}$  — вклад в  $k$  от делений на надтепловых нейтронах, а  $k_{\text{т}}$  — на тепловых. Подобный подход может быть обобщен на многогрупповой случай. Однако такие формулы практически не используются и посему не обсуждаются далее в этой книге.

### Список литературы

1. **Reactor Physics Constants**, ANL-5800, 2d ed.
2. **Вейнберг А., Вигнер Е.** Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Я. В. Шевелева. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

---

\* Эти величины включают усредненные по пространству и энергии скорости реакций.

## УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ

### § 2.1. ВВЕДЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основные физические процессы, определяющие поведение ядерного реактора, зависят от распределения нейтронов в реакторе. Математическое описание распределения нейтронов основывается на уравнении баланса нейтронов, называемом *уравнением переноса нейтронов* или просто *уравнением переноса*. По существу оно представляет собой линеаризованную форму уравнения Больцмана, применяющегося для описания происходящих в газах процессов (по этой причине уравнение переноса иногда называют уравнением Больцмана). К сожалению, уравнение переноса настолько сложно, что его решение найдено только для довольно простых физических моделей, но не для реальных реакторных систем. По этой причине при анализе реакторов используется приближение к уравнению переноса, известное как *диффузионное уравнение*; в настоящей книге в основном используется это приближение. Однако сначала выведем полное уравнение переноса и затем покажем, как на его основе может быть получено данное приближение.

Прежде чем вывести уравнение переноса, мы должны дать несколько определений.

**Определение 2.1.** Плотность нейтронов  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ .

Рассмотрим среду, в которой диффундируют нейтроны. В любом элементе объема  $d^3r$  вблизи точки  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  находится некоторое количество нейтронов с разными скоростями. Рассмотрим только те из них, чья скорость лежит в элементе пространства скоростей  $d^3u$  в окрестности скорости  $\mathbf{u}^*$ . Число таких нейтронов равно  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)d^3r d^3u$ . Другими словами,  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  есть плотность нейтронов на единичный объем фазового пространства в точке  $\mathbf{r}$  со скоростью  $\mathbf{u}$  в момент времени  $t$ .

**Определение 2.2.** Вектор средней скорости нейтронов  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Среднее понимается здесь с точки зрения кинетической теории, т. е. результат должен быть верен статистически:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{u} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3u}{\int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3u}. \quad (2.1a)$$

\* В гл. 9 этот же символ используется для обозначения летаргии. Ее трудно спутать со скоростью  $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|$ .

Отметим, что для изотропного распределения нейтронов ( $\psi$  зависит только от  $u$ , модуля вектора  $\mathbf{u}$ )  $\mathbf{v} \equiv 0$ . Важно не путать векторы средней скорости  $\mathbf{v}$  и переменную  $\mathbf{u}$ .

При рассмотрении задач с немонотонными нейтронами иногда приходится иметь дело с вектором средней скорости нейтронов с данной скоростью  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, u, t)$ . Он определяется по формуле, аналогичной (2.1а), где  $d^3u = u^2 du d\Omega$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, u, t) = \frac{\int u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega}{\int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega}. \quad (2.1б)$$

О п р е д е л е н и е 2.3. *Средняя скорость*

$$\bar{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int d^3u u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)}{\int d^3u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)}. \quad (2.2)$$

Средняя скорость есть среднее модуля вектора  $\mathbf{u}$ . Очевидно,  $\bar{v}$  не совпадает с  $v(\mathbf{r}, t)$ . Например, в случае изотропного распределения нейтронов  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ , в то время как  $\bar{v}(\mathbf{r}, t) \neq 0$ . Заметим также, что величина  $\bar{v}(\mathbf{r}, u, t)$  может быть определена по формуле, аналогичной (2.1б).

О п р е д е л е н и е 2.4. *Полный поток нейтронов\**

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3u u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \quad (2.3а)$$

либо

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \bar{v}(\mathbf{r}, t) \int d^3u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t); \quad (2.3б)$$

либо

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \bar{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t). \quad (2.3в)$$

Здесь введен символ  $\rho(\mathbf{r}, t)$  для обозначения плотности нейтронов, т. е. полной плотности нейтронов всех скоростей в точке  $\mathbf{r}$ . Аналогично определяется полный поток нейтронов, имеющих скорость  $u$ :

$$\phi(\mathbf{r}, u, t) = \int d\Omega u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.3г)$$

О п р е д е л е н и е 2.5. *Полный ток нейтронов*

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3u u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

или

Видно, что определение  $\mathbf{J}$  подобно определению  $\phi$ , за исключением того, что в последнем случае вместо вектора средней скорости

\* Автор использует термин поток (flux) там, где по смыслу следует понимать плотность потока нейтронов. — Прим. перев.

ти нейтронов фигурирует средняя скорость\* (ср. уравнения (2.3) и (2.4)). Таким образом, единицы измерения тока и потока совпадают [нейтр/(см<sup>2</sup>·сек)], но ток есть векторная величина, а поток — скалярная.

Обе введенные выше величины имеют определенный физический смысл. Рассмотрим сначала ток нейтронов.

**Теорема 2.1.** *Результирующий ток нейтронов, пересекающих поверхность  $dS$  в единицу времени, есть  $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ .*

Прежде чем доказывать эту довольно простую теорему, нужно определить, что такое результирующий ток. В каком-то смысле это алгебраическое понятие. Пусть один нейтрон пересекает  $dS$  в направлении единичного вектора  $\Omega$  и пусть в рассматриваемый временной интервал другой нейтрон пересекает  $dS$  в противоположном направлении —  $-\Omega$ . Эти два нейтрона алгебраически в сумме дают нуль, так что если в рассматриваемый временной интервал никакие другие нейтроны не пересекают  $dS$ , результирующий ток нейтронов будет равен нулю, хотя полное число пересекающих  $dS$  нейтронов равно двум.

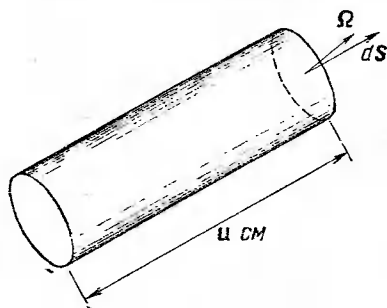


Рис. 2.1. К вычислению утечки нейтронов

Таким образом,  $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$  представляет собой *утечку* нейтронов через  $dS$  и в таком качестве используется в диффузионном уравнении.

**Доказательство.** Рассмотрим число нейтронов, пересекающих  $dS$  со скоростью  $\mathbf{u}$  (рис. 2.1). Построим цилиндр с осью  $\mathbf{u}$  и основанием  $dS$ . Его объем есть  $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$ , а число нейтронов со скоростью  $\mathbf{u}$  в этом цилиндре есть произведение его объема и плотности нейтронов

$$n(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.5)$$

Так как цилиндр имеет длину  $u$ ,  $n(\mathbf{u})$  есть также число нейтронов со скоростью  $\mathbf{u}$ , которые пересекают  $dS$  в 1 сек. Таким образом, результирующее число нейтронов, которые пересекают  $dS$  в 1 сек, получается интегрированием уравнения (2.5) по всем  $\mathbf{u}$ :

$$\left. \begin{aligned} n &= \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3 u; \\ n &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \rho(\mathbf{v}, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

При выводе уравнений (2.6) были использованы уравнения (2.1) и (2.3). Уравнение (2.6) представляет собой искомый результат, так как  $\mathbf{J} = \mathbf{v} \rho$ .

\* Поэтому для изотропного распределения нейтронов  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$ , хотя  $\phi(\mathbf{r}, t) \neq 0$ .

Для описания физического смысла потока  $\phi$  нам потребуется ввести понятие *среднего свободного пробега нейтрона*. В физике реакторов обычно имеют дело с распределением нейтронов в той или иной среде. Естественно, это распределение в значительной мере определяется столкновениями между нейтронами и ядрами среды\*. Эти столкновения могут быть различного типа (в частности, рассеяние, поглощение и деление).

**О п р е д е л е н и е 2.6.** *Средний свободный пробег  $\lambda_i$ . С каждым процессом  $i$  мы связываем такую величину  $\lambda_i$ , что вероятность  $\Delta P_i$  для нейтрона принять участие в таком процессе на малом отрезке  $dx$  определяется отношением  $dx/\lambda_i$ , т.е.*

$$\Delta P_i = dx/\lambda_i. \quad (2.7)$$

Величина  $\lambda_i$  называется *средним свободным пробегом*, а  $1/\lambda_i$  есть вероятность того, что нейтрон претерпит реакцию типа  $i$  на единичном пути. Напомним, что индекс  $i$  характеризует рассматриваемый процесс, причем  $\lambda_a$  относится к поглощению,  $\lambda_s$  — к рассеянию,  $\lambda_f$  — к делению.

Какова же вероятность  $P_i(l)$  того, что нейтрон пролетит расстояние  $l$ , не участвуя в реакции типа  $i$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, предположим, что мы имеем дело с  $n_0$  нейтронами, летящими в заданном направлении, и рассмотрим ослабление этого пучка нейтронов в результате столкновений  $i$ -го типа. Обозначая  $n(l)$  число нейтронов, остающихся в пучке на расстоянии  $l$  от начальной точки, и используя уравнение (2.7), имеем

$$dn(l)/dl = -n(l)/\lambda_i, \quad (2.8a)$$

так что

$$n(l) = n_0 \exp(-l/\lambda_i). \quad (2.8b)$$

Таким образом, ослабление пучка нейтронов описывается экспоненциальной зависимостью.

**О п р е д е л е н и е 2.7.** *Сечение. Величина обратная  $\lambda_i$  называется макроскопическим сечением и обозначается*

$$\Sigma_i = 1/\lambda_i. \quad (2.9)$$

*Макроскопическое сечение есть взвешенная по всем наличествующим ядрам сумма микроскопических сечений этих ядер:*

$$\Sigma_i = \sum_{\nu} N_{\nu} \sigma_{i\nu}^{\nu}, \quad (2.10)$$

\* В принципе нейтроны также сталкиваются друг с другом. Однако из-за низкой плотности нейтронов ( $\sim 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ) по сравнению с плотностью вещества ( $\sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ) в типичном реакторе нейтрон-нейтронными столкновениями можно пренебречь. При этом, конечно, предполагается, что сечение взаимодействия нейтрона с нейтроном не более чем в  $10^{12}$  раз превосходит сечения взаимодействия нейтронов с ядрами. На самом деле эти сечения оказываются одного порядка. Это означает, что уравнение, определяющее распределение нейтронов, можно считать линейным.

где  $N_v$  — плотность ядер  $i$ -го типа (отметим, что  $\Sigma_i$  имеет размерность, обратную длине, а  $\sigma_i^v$  — размерность площади, с чем и связан термин «сечение»).

Ядерная плотность определяется по формуле

$$N_v = n_v L_0 Z_v / M_v, \quad (2.11)$$

где  $n_v$  — плотность данного вещества,  $г/см^3$ ;  $L_0$  — число Авогадро ( $0,602 \cdot 10^{24}$  моль $^{-1}$ );  $M_v$  — молекулярная масса,  $г/моль$ ;  $Z_v$  — число атомов  $v$ -го типа в молекуле. Так, при вычислении ядерной плотности  $N_H$  водорода в воде  $n_H = 1$   $г/см^3$ ,  $M_H = 18$   $г/моль$  и  $Z_H = 2$ , так что  $N_H = 0,067 \cdot 10^{24}$   $см^{-3}$ . Множитель  $10^{24}$  часто опускается, потому что общепринятая единица измерения микроскопического сечения  $\sigma$  барн равна  $10^{-24}$   $см^2$ .

Сумма макроскопических сечений всех возможных процессов называется *полным* макроскопическим сечением и обозначается  $\Sigma_{tot}$  (а соответствующее микроскопическое сечение, естественно,  $\sigma_{tot}$ ). Микроскопические сечения рассчитываются и определяются экспериментально. Лучшие, по мнению автора, ядерные данные содержатся в отчете BNL-325, хотя имеются и другие доступные источники информации\*.

Понятие сечения, как макроскопического, так и микроскопического, широко используется в этой книге, и поэтому желательно, чтобы по его поводу не осталось у читателя никаких неясностей.

Обычно сечение  $\Sigma_i$  сильно зависит от модуля вектора скорости нейтрона  $u$ . В существенно анизотропных материалах, например в монокристаллах,  $\Sigma_i$  может быть также функцией направления  $v$ . Однако такие анизотропные материалы редко используются в реакторостроении.

**О п р е д е л е н и е 2.8.** *Плотность столкновений.* Рассмотрим диффузию нейтронов в среде. Полное определение плотности столкновений  $R_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  состоит в том, что  $R_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3u d^3r$  есть число нейтронов в  $d^3r$  вблизи точки  $\mathbf{r}$  со скоростями в  $d^3u$  и вблизи скорости  $\mathbf{u}$ , претерпевающих реакцию типа  $i$  в интервал времени  $dt$  около  $t$ . Вероятность того, что нейтрон со скоростью  $\mathbf{u}$  будет участвовать в реакции типа  $i$  в единицу времени, есть расстояние, которое он проходит в единицу времени ( $u$ , см), умноженное на сечение реакции типа  $i$  ( $\Sigma_i$ ,  $см^{-1}$ ) (см. определение 2.6). Тогда  $R_i$  есть число нейтронов в единице объема фазового пространства, умноженное на определенную выше вероятность для одиночного нейтрона:

$$R_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.12)$$

\* Библиотеки ядерных данных для реакторных материалов имеются сейчас на магнитных лентах для непосредственного использования на вычислительных машинах. Эти данные непрерывно обновляются. В частности, систему ядерных данных под названием ENDF-B можно получить в Брукхейвенской национальной лаборатории.

Отметим попутно, что можно рассматривать плотность поглощений  $\Sigma_a u \psi$ , плотность рассеяний  $\Sigma_s u \psi$ , плотность делений  $\Sigma_f u \psi$  и полную плотность столкновений  $\Sigma_{tot} u \psi$ . В некоторых случаях представляет интерес плотность столкновений с какими-то определенными ядрами, например с ядром урана. Обозначая ее  $R_a^U$ , имеем

$$R_a^U = N_U \sigma_a^U u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.13)$$

Можно обозначить произведение  $N_U \sigma_a^U$  символом  $\Sigma_a^U$  и назвать его макроскопическим сечением поглощения урана. Оно обратно пропорционально среднему свободному пробегу для данного процесса — поглощения нейтронов ураном.

Из уравнения (1.5) видно, что сечения для независимых процессов аддитивны. Точно так же из уравнения (2.10) видно, что макроскопические сечения для различных типов ядер аддитивны. Следовательно, средний свободный пробег находится как обратная величина суммы величин, обратных пробегам. Это легко видно из уравнения (2.9).

Допустим, мы хотим определить полную плотность столкновений во всем диапазоне скоростей нейтронов. Для этого достаточно проинтегрировать выражение (2.12) по скоростям:

$$R_i(\mathbf{r}, t) = \Sigma_i(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\bar{v} \rho(\mathbf{r}, t)}{\lambda_i(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_i(\mathbf{r}, t) &= \int d^3u R_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t); \\ \Sigma_i(\mathbf{r}, t) &= \int d^3u u \frac{\Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)}{\phi(\mathbf{r}, t)}; \\ \frac{1}{\lambda_i(\mathbf{r}, t)} &= \int d^3u \frac{u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)}{\lambda_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \phi(\mathbf{r}, t)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

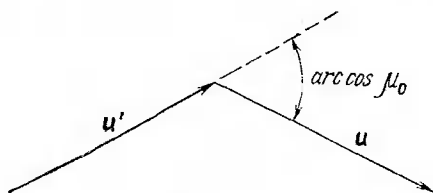
Если представляет интерес плотность столкновений при данной скорости  $u$  (или энергии  $E = mu^2/2$ ), величины  $\phi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{r}, t)$ ,  $v(\mathbf{r}, t)$  и т. д. должны быть заменены соответственно  $\phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ ,  $\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  и т. д.

Связь между плотностью столкновений и потоком (2.14) по существу определяет физический смысл введенного ранее потока нейтронов. Конечно, такая интерпретация оправдана только в том случае, когда сечение не зависит от  $\mathbf{u}$  и  $\Sigma_i(\mathbf{r}, t)$  в (2.15) не зависит от потока.

**О п р е д е л е н и е 2.9.** Дифференциальное сечение рассеяния. Один из рассмотренных в определении 2.8 процессов — рассеяние. Предположим, что скорость нейтрона до столкновения была  $u'$ , а после столкновения —  $u$  (рис. 2.2). Если  $u' = u$ , между нейтроном и ядром не происходит обмена энергией. Вообще говоря, нет оснований считать, что  $u' = u$ , так как процесс передачи энергии от

нейтрона к ядру вполне возможен\*. Если увеличивается только кинетическая энергия нейтрона, процесс называется упругим. Если в результате столкновения возбуждаются внутренние дискретные уровни ядра, столкновение называют неупругим. Эти уровни соответствуют энергии несколько кэв или более. Процессы упругого и неупругого рассеяния совершенно различны. Очевидно, процесс неупругого рассеяния возможен только для нейтронов с энергией, превосходящей нижний уровень ядра. (В принципе существует возможность включить процесс деления в наше определение, но обычно он рассматривается как отдельный источник нейтронов.)

Теперь мы можем определить дифференциальное сечение рассеяния как такое, что  $[\Sigma_s(u' \rightarrow u) d^3u]^{-1}$  есть средний свободный пробег нейтрона для процесса, в результате которого нейтрон со скоростью  $u'$  попадает в элемент пространства скоростей  $d^3u$  около  $u^{**}$ . Таким образом, согласно (2.12), плотность столкновений, приводящих к такому изменению скорости, есть



$$dR_s(u' \rightarrow u, r, t) = u' \psi(r, u', t) \Sigma_s(u' \rightarrow u) d^3u. \quad (2.16)$$

Рис. 2.2. Схема процесса рассеяния

Введем обозначение  $u = u\Omega$ , где  $\Omega$  — единичный вектор в направлении скорости. Используя симметрию вращения, можно показать, что во всех представляющих практический интерес случаях  $\Sigma_s(u' \rightarrow u)$  есть функция только  $u'$ ,  $u$  и косинуса угла рассеяния  $\mu_0 = \Omega' \cdot \Omega$  (см. рис. 2.2).

Полное сечение рассеяния получается интегрированием по всем конечным скоростям нейтронов, поскольку, как мы установили в определении 2.8, макроскопические сечения аддитивны:

$$\Sigma_s(u') = \int d^3u \Sigma_s(u' \rightarrow u). \quad (2.17)$$

Изотропное рассеяние означает, что все значения  $\mu_0$  равновероятны, так что  $\Sigma_s(u' \rightarrow u)$  не есть функция  $\mu_0$ . Однако в реакторных системах рассеяние, вообще говоря, не изотропно.

В односкоростном приближении, которое используется в первых семи главах этой книги, предполагается, что нет обмена энергией между нейтроном и ядром, т. е.  $u' = u$ . В этом случае рассеяние может изменить только направление скорости нейтрона. Это означает, что  $\Sigma_s(u' \rightarrow u)$  может быть записано в форме

$$\Sigma_s(u' \rightarrow u) = \frac{\delta(u' - u)}{u^2} \Sigma_s(\Omega' \cdot \Omega). \quad (2.18)$$

\* Поскольку ядро совершает тепловое движение, возможно и увеличение энергии нейтрона. Однако этот процесс возможен только для нейтронов с энергией менее 1 эв.

\*\* Мы не всегда будем указывать зависимость  $\Sigma$  от  $r$  и  $t$ .

## § 2.2. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Мы ограничимся в этой книге простым феноменологическим выводом уравнения переноса\*. Рассмотрим баланс числа нейтронов в малом элементе объема фазового пространства  $d^3rd^3u$ , а затем изменение за время  $dt$   $dN$  — числа нейтронов в  $d^3u$  вблизи  $\mathbf{u}$  и в  $d^3r$  вблизи  $\mathbf{r}$ . Обозначим  $S$  поверхность, ограничивающую объем  $V$ .

В соответствии с определением 2.1

$$dN = d^3u dt \int \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d^3r. \quad (2.19)$$

Очевидно, это уравнение непосредственно следует из определений  $dN$  и  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ . Можно указать все возможные способы изменения величины  $N$ , что позволит записать уравнение баланса:

$dN =$  — (a) — результирующее число нейтронов, уходящих через поверхность  $S$  за время  $dt$ ;  
 — (b) — число нейтронов, сталкивающихся за время  $dt$ ;  
 + (c) — число рассеянных нейтронов, имеющих скорость в диапазоне  $d^3u$  и образующихся за время  $dt$ ;  
 + (d) — число нейтронов, появляющихся за время  $dt$  за счет источников.

Слагаемое (a) описывает те нейтроны, которые покидают рассматриваемый объем  $d^3r$  или влетают в него без изменения скорости; слагаемое (b) описывает те нейтроны, которые уходят из  $d^3u$  в результате рассеяния или поглощения; слагаемое (c) описывает те нейтроны, которые при рассеянии меняют свою скорость и попадают в диапазон  $d^3u$ , и, наконец, слагаемое (d) описывает те нейтроны, которые появляются в  $d^3u d^3r$  за счет внешних источников и делений.

Уравнение (2.6) описывает результирующий ток нейтронов, пересекающих любую поверхность в единицу времени. Поэтому

$$(a) = d^3u dt \int \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.20a)$$

или, в соответствии с теоремой Гаусса — Остроградского,

$$(a) = d^3u dt \int d^3r \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.20b)$$

Плотность столкновений обсуждается в определении 2.8, и из уравнения (2.12) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} (b) &= d^3u dt \int d^3r \frac{u\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)}{\lambda_T(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)} = \\ &= d^3u dt \int d^3r \Sigma_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Аналитическое описание процесса рассеяния дано в определении 2.9. В частности, слагаемое (c) равно интегралу (2.16) по всем начальным скоростям нейтронов  $\mathbf{u}'$ :

$$(c) = d^3u dt \int d^3u' \int d^3r u' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \Sigma_s(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}). \quad (2.22)$$

\* Строгий вывод уравнения переноса приводится в работе [1].

Наконец, если обозначить плотность источников  $S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ , то

$$(d) = d^3 u dt S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.23)$$

Подставляя (2.19)—(2.23) в наше основное уравнение баланса, получаем

$$\int d^3 r \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + u \Sigma_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) - \right. \\ \left. - S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) - \int d^3 u' u' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \Sigma_s(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{r}, t) \right\} = 0. \quad (2.24)$$

Поскольку объем, по которому проводится интегрирование, произволен, подынтегральное выражение в (2.24) должно обращаться в нуль в любой точке  $\mathbf{r}$ . Эти соображения позволяют написать уравнение баланса нейтронов следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + u \Sigma_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \\ = \int d^3 u' u' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \Sigma_s(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}) + S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.25)$$

В этом уравнении можно перейти к потоку

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = u \psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.26)$$

Тогда уравнение переноса примет вид

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \Sigma_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \\ = \int d^3 u' u \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \Sigma_s(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}) + S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (2.27a)$$

Здесь фигурирует единичный вектор  $\mathbf{\Omega}$ , введенный в § 2.1 (определение 2.9). В том же параграфе было отмечено, что для всех рассматриваемых систем  $\Sigma_s(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$  является функцией  $\mu_0 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}'$ , а не  $\mathbf{\Omega}$  или  $\mathbf{\Omega}'$  в отдельности. Это означает, что все сечения есть функции модуля, а не вектора скорости, т. е. вероятность реакции не зависит от направления полета нейтрона, вызвавшего реакцию.

Кроме того, предположим, что все сечения не зависят от времени. Строго говоря, это предположение неверно (например, при учете отравления ксеноном и выгорания топлива). Однако изменения сечений происходят за время, большее по сравнению с тем, за которое имеет место представляющее интерес изменение распределения нейтронов. Поэтому временная зависимость сечений учитывается другим образом.

С учетом этих замечаний уравнение (2.27a) может быть переписано в форме

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \Sigma_{tot}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \\ = S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \int d^3 u' u \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) \Sigma_s(\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{\Omega}' \cdot \mathbf{\Omega}). \quad (2.27b)$$

Наконец, для часто рассматриваемого стационарного случая уравнение переноса имеет вид

$$\begin{aligned} & \Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, u) + \Sigma_{tot}(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u) = \\ & = S(\mathbf{r}, u) + \int d^3 u' \Phi(\mathbf{r}, u') \Sigma_s(u' \rightarrow u, \Omega' \cdot \Omega). \end{aligned} \quad (2.27b)$$

### § 2.3. ОДНОСКОРОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Выведенное выше уравнение переноса оказывается слишком сложным для приближенных расчетов, при проведении которых используется односкоростное приближение. Переход к этому приближению тривиален. Мы просто должны предположить, что при столкновении нейтрона с ядром не происходит обмена энергией, так что в уравнение (2.27) можно подставить (2.18). Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Sigma_{tot}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \\ & = S(\mathbf{r}, \Omega, t) + \int d\Omega' \Phi(\mathbf{r}, \Omega', t) \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь  $u$  заменено  $\Omega$  в аргументах  $\Phi$  и  $S$ . Следует отметить, что  $u$  входит в односкоростное уравнение только в качестве параметра.

В односкоростном приближении удобно ввести полные поток и ток, проинтегрированные по  $\Omega$ , а не по  $u$ , как в (2.3) и (2.4):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d\Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t); \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d\Omega \Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (2.29b)$$

Уместно кратко обсудить применимость односкоростного приближения, которое будет широко использоваться в первой половине книги. Как было отмечено во введении, основные соображения в пользу этого приближения — чисто педагогические. Однако односкоростное приближение может оказаться полезным и в прикладных задачах, если сечения должным образом усреднены по спектру нейтронов, как в (2.15). (Это, в частности, имеет место в системах на быстрых нейтронах, где энергетический спектр нейтронов перекрывает сравнительно узкий интервал.) На основании односкоростного приближения могут быть интерпретированы некоторые качественные особенности встречающихся систем, хотя не следует слишком увлекаться его применением.

### § 2.4. ЕЩЕ ОДНА ФОРМА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Еще одна форма уравнения переноса может быть получена, если уравнение (2.28) проинтегрировать по всем направлениям вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \nabla \cdot \int d\Omega \Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) + \Sigma_{tot}(\mathbf{r}) \int d\Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \\ & = \int d\Omega S(\mathbf{r}, \Omega, t) + \int d\Omega' \Phi(\mathbf{r}, \Omega', t) \int d\Omega \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Очевидно, уравнение (2.30) есть уравнение баланса для нейтронов со всеми направлениями скорости в элементе пространства  $d^3r$ . Поскольку мы используем односкоростное приближение, то в силу (2.17) и (2.18)

$$\Sigma_s(\mathbf{r}) = \int d\Omega \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega). \quad (2.31a)$$

С учетом определения (2.29) и с использованием выражения для полного источника  $S(\mathbf{r})$ :

$$S(\mathbf{r}) = \int d\Omega S(\mathbf{r}, \Omega) \quad (2.31b)$$

можно переписать (2.30) в виде

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t). \quad (2.32)$$

При этом мы воспользовались определением полного сечения (определение 2.7), чтобы записать:

$$\Sigma_a = \Sigma_{tot} - \Sigma_s. \quad (2.33)$$

Эта форма уравнения баланса оказывается значительно проще уравнения (2.28). При наличии соответствующих граничных условий уравнение (2.28) позволяет найти единственную функцию  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  [2]. Уравнение (2.32) само по себе недостаточно для определения единственных  $\phi(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ . Можно получить единственное решение уравнения (2.32) только с помощью (приближенного) соотношения между  $\phi$  и  $\mathbf{J}$ .

## § 2.5. ЗАКОН ФИКА

Уравнение (2.32) представляет собой одно уравнение с четырьмя неизвестными ( $\phi$  и три компоненты вектора  $\mathbf{J}$ ). Наш следующий шаг будет состоять в выводе трех дополнительных уравнений (или, что то же, одного векторного уравнения), связывающего  $\phi$  и  $\mathbf{J}$ . Это уравнение, известное как *закон Фика*, является только приближенным. Когда эти приближенные уравнения подставляются в (точное) уравнение баланса (2.32), получается диффузионное уравнение. По этой причине закон Фика считается основным уравнением диффузионного приближения.

Для получения закона Фика разложим  $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, t)$  в ряд\*:

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \frac{1}{4\pi} [A(\mathbf{r}, t) + 3\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \Omega + \dots]. \quad (2.34)$$

Ограниченность этого ряда двумя слагаемыми служит причиной того, что закон Фика является только приближенным. Если поток нейтронов изотропен (т. е. не зависит от  $\Omega$ ), то в этом ряде остается только первое слагаемое. Включение второго слагаемого означает, что мы считаем распределение нейтронов «почти изотропным».

\* Численные множители  $1/4\pi$  и 3 введены для удобства.

Если уравнение (2.34) проинтегрировать по  $\Omega$ , то в силу (2.29а)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t), \quad (2.35)$$

поскольку

$$\int d\Omega = 4\pi \quad (2.36)$$

и

$$\int \Omega \cdot \mathbf{V} d\Omega = 0. \quad (2.37)$$

Таким образом,  $A(\mathbf{r}, t)$  представляет собой полный поток нейтронов.

Затем умножим уравнение (2.34) на  $\Omega_z$  и проинтегрируем по  $d\Omega$ . С помощью (2.29б) имеем

$$J_z(\mathbf{r}, t) = B_z(\mathbf{r}, t). \quad (2.38)$$

Здесь использованы соотношения:

$$\int \Omega_z d\Omega = \int \Omega_z \Omega_x d\Omega = \int \Omega_z \Omega_y d\Omega = 0; \quad (2.39а)$$

$$\int \Omega_z^2 d\Omega = 4\pi/3. \quad (2.39б)$$

(Уравнения (2.37) и (2.39) легко проверить, если представить компоненты  $\Omega$  в сферических полярных координатах:  $\Omega_z = \cos \theta$ ,  $\Omega_x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\Omega_y = \sin \theta \sin \varphi$ .) Подобным же образом можно получить, что

$$\left. \begin{aligned} J_x(\mathbf{r}, t) &= B_x(\mathbf{r}, t); \\ J_y(\mathbf{r}, t) &= B_y(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

так что

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

Таким образом, уравнение (2.34) принимает вид

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}, t) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)] + \dots \quad (2.41)$$

Если подставить это разложение в уравнение (2.28), то получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\mathbf{r}, t) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{4\pi} \Sigma_{tot}(\mathbf{r}) [\phi(\mathbf{r}, t) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)] + \\ & + \frac{1}{4\pi} \Omega \cdot \nabla [\phi(\mathbf{r}, t) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{4\pi} S(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \Sigma_s(\mathbf{r}, t) + \\ & + \frac{3}{4\pi} \int d\Omega' \Omega' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Мы предполагали, что источник изотропен, и, используя (2.31б), применяли соотношение  $S(\mathbf{r}, \Omega) = S(\mathbf{r})/4\pi$ . Если умножить (2.42), скажем, на  $\Omega_z$  и проинтегрировать по всем  $\Omega$ , то

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4\pi u} \frac{\partial}{\partial t} \int d\Omega \Omega_z \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \Sigma_{tot}(\mathbf{r}) \int d\Omega \Omega_z \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \Omega_z \Omega \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi} \int d\Omega' \Omega' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \int d\Omega \Omega_z \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega). \end{aligned} \quad (2.43)$$

При выводе этой формулы были использованы соотношение (2.37) и

$$\int d\Omega \Omega_\mu \Omega_\nu \Omega_\gamma = 0, \quad (2.44)$$

где  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\gamma$  относятся к компонентам  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Учитывая определение  $\mu_0$  (см. рис. 2.2), можно написать

$$\begin{aligned} \int d\Omega \Omega_z \Sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega) &= 2\pi \int_{-1}^1 d\mu_0 \mu_0 \Sigma_s(\mathbf{r}, \mu_0) \Omega'_z = \\ &= \Sigma_s(\mathbf{r}) \overline{\mu}(\mathbf{r}) \Omega'_z. \end{aligned} \quad (2.45a)$$

Очевидно, что  $\overline{\mu}(\mathbf{r})$  — соответствующим образом усредненный косинус угла рассеяния:

$$\overline{\mu} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\mu_0 \mu_0 \Sigma_s(\mathbf{r}, \mu_0)}{\Sigma_s(\mathbf{r})}. \quad (2.45b)$$

Если подставить (2.45b) в (2.43) и использовать (2.39) для интегрирования по  $\Omega'$ , то получим

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} J_z(\mathbf{r}, t) + [\Sigma_{tot}(\mathbf{r}) - \Sigma_s(\mathbf{r}) \overline{\mu}(\mathbf{r})] J_z(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{3} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial z}. \quad (2.46)$$

Можно, конечно, вывести подобное уравнение для двух других компонент вектора  $\mathbf{J}$ . Полученные три уравнения могут быть записаны в векторной форме:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{tr}(\mathbf{r}) \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.47)$$

где  $\Sigma_{tr}$  — транспортное сечение:

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_{tot} - \Sigma_s \overline{\mu}. \quad (2.48)$$

Уравнение (2.47) обеспечивает еще одну связь между  $\mathbf{J}$  и  $\phi$ . Комбинация уравнений (2.47) и (2.32) дает телеграфное уравнение\*. Диффузионное уравнение получается при отбрасывании первого слагаемого в уравнении (2.47). Это можно сделать, так как  $u$  очень велико ( $\sim 10^9$  см/сек даже для тепловых нейтронов). Обычно  $\Sigma_{tr} \sim \sim 1$  см<sup>-1</sup> и  $\phi(\mathbf{r}, t)$  изменяется заметно на расстоянии около 1 см. Таким образом, чтобы отбрасываемое слагаемое давало заметный вклад (для тепловых нейтронов),  $\mathbf{J}$  должно существенно изменяться за время порядка  $10^{-5}$  сек и менее. Такие быстрые изменения обычно не наблюдаются. Для быстрых нейтронов  $u$  еще больше, и изменение  $\mathbf{J}$  должно происходить еще быстрее.

\* Более детально телеграфное уравнение и приближения, приводящие к диффузионному уравнению, рассматриваются в приложении Е.

Пренебрегая первым слагаемым в (2.47), получаем закон Фика, связывающий  $\phi$  и  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.49)$$

где  $D(\mathbf{r})$  — коэффициент диффузии

$$D(\mathbf{r}) = 1/3 \Sigma_{tr}(\mathbf{r}).$$

Подставляя (2.49) в (2.32), получаем, наконец, диффузионное уравнение

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t). \quad (2.50)$$

## § 2.6. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Диффузионное уравнение (2.50) должно быть дополнено начальными и граничными условиями; только в этом случае может быть найдено его полное решение. Обычно определение начальных условий не связано ни с какими трудностями. Соответствующие граничные условия должны быть выбраны на основании физических соображений. Рассмотрим три типа границ (ниже обсуждаются граничные условия для каждого из них):

- 1) границы на бесконечности;
- 2) границы между двумя средами;
- 3) границы между средой и вакуумом.

Граничные условия на бесконечности являются наипростейшими: мы требуем только, чтобы плотность нейтронов оставалась конечной\*. По существу плотность нейтронов должна оставаться конечной повсеместно, за исключением непосредственной окрестности источника. Вряд ли стоит упоминать, что из физических соображений поток нейтронов нигде не может быть отрицательным.

На границе между двумя средами точные теоретические условия состоят в том, что плотность  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  должна быть непрерывной функцией  $\mathbf{r}$  для любого  $\mathbf{u}$ . Это условие не может быть точно выполнено в диффузионном приближении. Однако мы можем потребовать, чтобы полный поток  $\phi(\mathbf{r}, t)$  и ток  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  были непрерывными.

Интересно проследить, как эти условия непрерывности трансформируются, если на границе расположен источник. Рассмотрим бесконечную в направлениях  $y, z$  среду с бесконечным плоским источником интенсивностью  $Q$  нейтр/ (см<sup>2</sup>·сек), расположенным при  $x = 0$ . Тогда из соображений симметрии (или соображений, основывающихся на теории групп) [2]

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \quad (2.51a)$$

$$J_y = J_z = 0, \quad (2.51b)$$

\* Некоторые специальные случаи обсуждаются в тексте.

так что уравнение (2.50) принимает вид\*

$$\frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = Q\delta(x) - \Sigma_a \phi(x, t) - \frac{\partial J_x}{\partial x}(x, t). \quad (2.52)$$

Если это уравнение проинтегрировать от  $x - \epsilon$  до  $x + \epsilon$  ( $\epsilon$  бесконечно мало и положительно), то получим

$$J_x(0+) - J_x(0-) = Q. \quad (2.53)$$

Таким образом, разрыв тока равен интенсивности источника. Уравнение (2.53) обычно называют *условием скачка*. Этот результат является общим. В случае диффузионного приближения  $J_x$  заменяется следующим выражением:

$$J_x = -D\partial\phi/\partial x. \quad (2.54)$$

Наконец, рассмотрим граничные условия для третьего типа границ, т. е. границ между средой и вакуумом. Снова для простоты ограничимся плоским симметричным случаем, так что поток и ток зависят только от одной координаты  $x$ . Корректные граничные условия состоят в том, что не должно быть нейтронов, возвращающихся из вакуума в среду. Это условие также не может быть выполнено в диффузионном приближении, так что мы вынуждены выбрать более слабое условие. Потребуем, чтобы результирующее число нейтронов, возвращающихся из вакуума в среду, обращалось в нуль. Очевидно, что это правильно, но это более слабое условие, чем требование отсутствия возвращающихся нейтронов вообще. Последнее условие может быть выполнено только в том случае, если мы имеем дело с плотностью нейтронов  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ , а не с полным потоком и током, как в диффузионном приближении. Итак,

$$\int_{\Omega_x > 0} d\Omega_x \Phi(x_s, \Omega_x) = 0,$$

где под  $x_s$  понимается любая точка на поверхности. С помощью уравнений (2.41) и (2.49) получаем\*\*

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2D}. \quad (2.55)$$

Если в окрестности границы  $\phi(x)$  заменить линейной функцией  $x$ , т. е.

$$\phi(x) = \phi(0)(1 + Kx), \quad (2.56)$$

то из сравнения уравнений (2.55) и (2.56) видно, что  $K = -3\Sigma_{tr}/2$ , так что

$$\phi(x) = \phi(0)(1 - 3x\Sigma_{tr}/2). \quad (2.57)$$

\* См. приложение Б для обсуждения свойств  $\delta$ -функции Дирака.

\*\* См. задачу 2.9.

Заметим, что поток не обращается в нуль при  $x = 0$ . Поток, линейно экстраполированный за границу, обращается в нуль в точке

$$z_0 = 2\lambda_{tr}/3 = 2/3\Sigma_{tr}. \quad (2.58)$$

Величина  $z_0$  называется *длиной линейной экстраполяции*. Вообще говоря, поток вблизи границы не подчиняется линейному закону. Продолженный за границу с такой же кривизной, что и в рассматриваемой среде, поток нейтронов обратился бы в нуль совсем в другой точке (рис. 2.3).

Вычисление длины экстраполяции можно найти в любом пособии по физике реакторов. Она зависит от соотношения между процессами деления, поглощения и рассеяния в среде. Для случая чистого рассеяния (т. е. без деления и поглощения) найдено, что поток вблизи границы, удаленной от других границ и источников нейтронов, действительно описывается линейным законом; тогда  $z_0$  определяется выражением, которое зависит от анизотропии рассеяния. При изотропном рассеянии\*

$$z_0 = 0,7104\lambda. \quad (2.59)$$

Отметим, что в этом специальном случае  $\lambda_{tr} = \lambda_s = \lambda_{tot} = \lambda$ .

Для криволинейных поверхностей расчет длины экстраполяции значительно более сложный. Однако если радиус кривизны велик, даже криволинейные поверхности могут считаться плоскими с достаточно высокой степенью точности. Кроме того, длина экстраполяции обычно мала по сравнению с размерами реактора. Если это не так, то можно сделать вывод, что система слишком мала для того, чтобы можно было применять диффузионное приближение. Поэтому всегда будем считать, что

$$z_0 = 0,7\lambda_{tr} \quad (2.60)$$

для любых соотношений между процессами деления, поглощения и рассеяния и для любых форм граничных поверхностей. Граничное условие состоит в том, что экстраполированный поток обращается в нуль на расстоянии  $z_0$  от физической границы рассматриваемой системы.

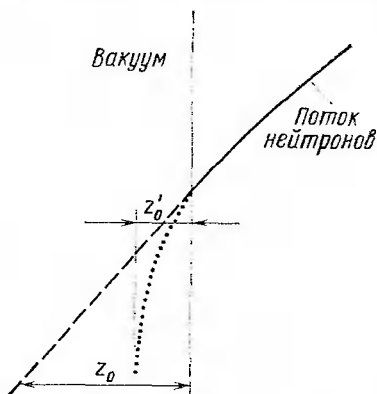


Рис. 2.3. Длина линейной экстраполяции  $z_0$  и истинная длина  $z'_0$

\* В 1970 г. Коэн опубликовал результаты расчета  $z_0$  с точностью до 25-го десятичного знака [3]:

$$z_0 = 0,7104460895987630727325241 \lambda_{tr}.$$

Приведем еще раз те граничные условия, с помощью которых будем решать диффузионные уравнения:

1) поток остается ограниченным везде, кроме непосредственной окрестности источника нейтронов;

2) поток и ток непрерывны везде внутри рассматриваемой среды, за исключением источника, где имеет место разрыв [см. уравнение (2.53) для плоского случая];

3) на границе диффузионной среды поток вычисляется так, чтобы он обращался в нуль на расстоянии  $0,7\lambda_{tr}$  от границы.

В заключение следует отметить, что на самом деле поток не обращается в нуль в точке, оговоренной в условии 3), иначе незачем было бы окружать реактор биологической защитой! Это условие является математическим приемом, который позволяет правильно определить распределение нейтронов только *внутри* реактора. Если необходимо знать распределение нейтронов вне реактора (например, при рассмотрении биологической опасности), должны быть привлечены другие методы, равно как и в том случае, когда использование длины экстраполяции представляется вносящим слишком большую ошибку [2].

### § 2.7. ПРИМЕНИМОСТЬ ДИФFUЗИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

На основе приведенного выше вывода диффузионного уравнения можно сделать несколько общих замечаний о его применимости. Прежде всего, следует отметить, что поток  $\Phi$  был разложен в ряд по степеням  $\Omega$  с точностью до двух первых членов разложения [см. уравнение (2.41)]. Таким образом, в случае сильной анизотропии потока диффузионное приближение неприменимо. Это имеет место в среде с большим сечением поглощения или в любой среде на малых расстояниях (несколько средних свободных пробегов) от границ. Точно так же можно ожидать, что диффузионное приближение будет давать плохие результаты, если сечения быстро изменяются с расстоянием. Во всех перечисленных случаях поток резко изменяется на малых расстояниях, а при этом он существенно анизотропен.

Эти общие умозаключения были получены при сравнении решения диффузионного уравнения с точными решениями уравнения переноса в рамках односкоростного приближения [2]. В односкоростном случае оказывается удобным ввести параметр  $c$  — *среднее число вторичных нейтронов при одном столкновении*. Для среды, не содержащей делящихся изотопов,

$$c = \Sigma_s / \Sigma_{tot}, \quad (2.61)$$

т. е. равно отношению сечений рассеяния и полного. Если в среде имеются делящиеся изотопы, то

$$c = (\Sigma_s + \nu \Sigma_f) / \Sigma_{tot}. \quad (2.62)$$

Диффузионное приближение дает хорошие результаты при  $c \rightarrow 1$ .

Точное распределение нейтронов состоит из двух компонент: асимптотической части, которая описывает распределение вдали от границ и источников, и переходной части, вклад которой в точное распределение велик вблизи границ и источников. Диффузионное приближение описывает асимптотическую компоненту распределения нейтронов. При  $c \approx 1$  асимптотическая часть хорошо описывается диффузионным уравнением и, кроме того, переходная часть играет малую роль. При  $c \ll 1$  диффузионное приближение неприменимо по двум причинам. Во-первых, оно недостаточно хорошо описывает асимптотическую часть, а во-вторых, возрастает роль переходной компоненты. Более того, при  $c = 0$  асимптотическая составляющая решения отсутствует вообще — все решение определяется переходной частью\*.

## § 2.8. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Теперь, после того как выведено диффузионное уравнение и описаны соответствующие граничные условия, можно обсудить его решение. Проанализируем сначала случай плоской симметрии, который уже обсуждался в § 2.6. В частности, рассмотрим диффузию нейтронов в среде, бесконечной в направлениях  $y$  и  $z$  и со свойствами, зависящими только от координаты  $x$ . В этом случае поток и ток также зависят только от  $x$  и, кроме того, ток имеет только  $x$ -ю компоненту. Стационарное диффузионное уравнение имеет вид

$$\left[ -\frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} + \Sigma_a(x) \right] \phi(x) = S(x). \quad (2.63)$$

Сделаем замену переменных

$$dy = dx/D(x); \quad (2.64a)$$

$$\phi(y)dy = \phi(x)dx; \quad (2.64б)$$

$$S(y)dy = S(x)dx. \quad (2.64в)$$

Тогда уравнение (2.63) переписывается в виде

$$\left[ -\frac{d^2}{dy^2} + D(y) \Sigma_a(y) \right] \phi(y) = D(y) S(y). \quad (2.65)$$

Нетрудно видеть, что в этом уравнении все расстояния измеряются в единицах  $\lambda_{tr}/3$ . Его легче решать, чем уравнение (2.63), если произведение  $D(y)\Sigma_a(y)$  постоянно; при этом  $D$  и  $\Sigma_a$  в отдельности могут зависеть от координаты. Предположим, что это произведение постоянно, и обозначим

$$D(y)\Sigma_a(y) = \rho^2; \quad (2.66)$$

$$S(y)D(y) = S_0(y). \quad (2.67)$$

\* Очевидно,  $c$  должно быть положительной величиной, и если  $\Sigma_s = 0$ , то в однопрупповом приближении  $c = k_\infty$  [см. уравнение (1.8)].

Тогда уравнение (2.65) примет вид

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \rho^2\right) \phi(y) = S_0(y), \quad (2.68a)$$

а при отсутствии источников

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + \rho^2\right) \phi(y) = 0. \quad (2.68б)$$

Рассмотрим различные решения этого уравнения.

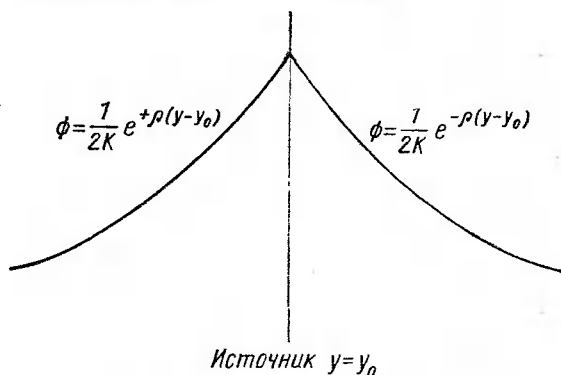


Рис. 2.4. Функция Грина для бесконечной среды

**Функция Грина для плоского источника в бесконечной среде** представляет собой не что иное, как решение уравнения (2.68a) в бесконечной среде с источником (рис. 2.4):

$$S_0(y) = D(0)\delta(y) = D\delta(y), \quad (2.69)$$

т. е. с плоским источником в плоскости  $y = 0$ . Это решение (назовем его  $G_\infty(0 \rightarrow y)$ ) удовлетворяет однородному уравнению (2.68) везде, кроме начала координат, где должно быть использовано условие (2.53).

Решение однородного уравнения (2.68), которое исчезает на бесконечности, есть

$$G_\infty(0 \rightarrow y) = A_1 \exp(-\rho y) \quad y > 0 \quad (2.70a)$$

и

$$G_\infty(0 \rightarrow y) = A_2 \exp(+\rho y) \quad y < 0, \quad (2.70б)$$

так что при любом  $y$

$$G_\infty(0 \rightarrow y) = A_1 \exp(-\rho |y|). \quad (2.70в)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что  $A_1 = A_2$ , так как  $G$  должно быть непрерывно при  $y = 0$ . Чтобы найти  $A_1$ , определим ток в соответствии с уравнением (2.54):

$$J_x(0\pm) = \pm K A_1, \quad (2.71)$$

так что на основании условия скачка

$$A_1 = 1/2K, \quad (2.72)$$

где

$$K = \sqrt{\Sigma_a/D} = \rho/D. \quad (2.73)$$

Итак,

$$G_\infty(0 \rightarrow y) = (1/2K) \exp(-\rho |y|). \quad (2.74a)$$

Очевидно, начало координат может быть сдвинуто, скажем, в точку  $y_0$  в результате замены  $y \rightarrow y - y_0$ . Тогда общая форма функции Грина в бесконечной среде может быть записана следующим образом:

$$G_\infty(y_0 \rightarrow y) = (1/2K) \exp(-\rho |y - y_0|). \quad (2.74b)$$

Перейдем теперь снова к переменной  $x$  (при постоянном  $D$ ). На основании уравнения (2.64б)

$$G_\infty(y_0 \rightarrow y) dy = G_\infty(x_0 \rightarrow x) dx, \quad (2.75)$$

причем  $dy/dx$  определяется уравнением (2.64a), так что

$$G_\infty(x_0 \rightarrow x) = (1/2DK) \exp(-K |x_0 - x|). \quad (2.76)$$

Физически  $G_\infty(x_0 \rightarrow x)$  есть поток нейтронов в точке  $x$  от бесконечного плоского источника в точке  $x_0$  в *бесконечной среде*. Вообще функция Грина имеет именно этот смысл; индекс  $\infty$  указывает на то, что рассматривается бесконечная среда. Следует отметить, что  $G_\infty$  есть функция только  $|x_0 - x|$ , что дает основание называть  $G_\infty$  ядром смещения\*. Теперь можно вычислить средний квадрат расстояния, которое нейтрон проходит от источника до места поглощения

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 G_\infty(x-x_0) dx}{\int_0^{\infty} G_\infty(x) dx} = \frac{\int_0^{\infty} x^2 \exp(-Kx) dx}{\int_0^{\infty} \exp(-Kx) dx} = 2/K^2. \quad (2.77)$$

Величина  $1/K^2$  называется *площадью диффузии* и обозначается  $L^2$ , а  $L$  есть *длина диффузии*.

Функция Грина может быть использована для вычисления потока нейтронов при распределенном источнике  $S(x)$ \*\*:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x_0) G_\infty(x_0 - x) dx_0. \quad (2.78)$$

\* На самом деле ядро смещения может зависеть от  $x_0 - x$ , а не только от  $|x_0 - x|$ . Таким образом,  $G_\infty$  представляет собой особую форму ядра смещения. Все ядра для бесконечной среды имеют эту форму.

\*\* Это соотношение непосредственно следует из обсуждавшегося ранее физического смысла функции Грина.

Предположим, например, что источник  $S(x)$  постоянен по всему пространству и его интенсивность равна  $Q$  нейтр/см<sup>3</sup>. Тогда

$$\phi(x) = Q \int_{-\infty}^{\infty} G_{\infty}(x_0 - x) dx_0 \quad (2.79)$$

или

$$\phi(x) = Q/\Sigma_a. \quad (2.80)$$

Уравнение (2.80) имеет простую интерпретацию: плотность поглощений  $\Sigma_a \phi$  равна скорости появления нейтронов в среде.

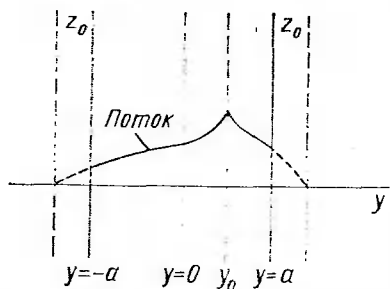


Рис. 2.5. Функция Грина для пластины

**Функция Грина для конечной среды.** Рассмотрим задачу, отличающуюся от предыдущей тем, что диффузия нейтронов происходит в среде конечных размеров, например в пластине толщиной  $2a$  (рис. 2.5). Будем считать, что начало координат находится в центре пластины, а источник — в плоскости, находящейся на произвольном расстоянии от начала координат. Тогда

$$G(y_0 \rightarrow y) = \begin{cases} A_1 \exp(-\rho y) + A_2 \exp(\rho y) & y > y_0; \\ A_3 \exp(-\rho y) + A_4 \exp(\rho y) & y < y_0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Это есть общее решение уравнения (2.686). Применим следующие граничные условия. Во-первых, поток должен обращаться в нуль на экстраполированных границах, т. е.

$$G(y_0 \rightarrow a + z_0) = 0; \quad (2.82a)$$

$$G(y_0 \rightarrow -a - z_0) = 0. \quad (2.82b)$$

При  $y = y_0$  поток непрерывен:

$$G(y_0 \rightarrow y_0+) = G(y_0 \rightarrow y_0-) \quad (2.83)$$

и выполняется условие скачка

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y_0 \rightarrow y) \Big|_{y_0+} - \frac{\partial}{\partial y} G(y_0 \rightarrow y) \Big|_{y_0-} = -D(y_0). \quad (2.84)$$

Этих четырех условий достаточно для определения четырех коэффициентов  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ . Обозначая  $a + z_0 = a'$ , имеем

$$A_1 = -A_2 \exp(2\rho a'); \quad (2.85a)$$

$$A_3 = -A_4 \exp(-2\rho a'). \quad (2.85b)$$

Таким образом,

$$G(y_0 \rightarrow y) = A_2 [\exp(\rho y) - \exp(-\rho(y - 2a'))] \quad y > y_0; \quad (2.85a)$$

$$G(y_0 \rightarrow y) = A_4 [\exp(\rho y) - \exp(-\rho(y + 2a'))] \quad y < y_0. \quad (2.85b)$$

На основании (2.83)

$$A_2 = A_4 \frac{\exp(\rho y_0) - \exp(-\rho(y_0 + 2a'))}{\exp(\rho y_0) - \exp(-\rho(y_0 - 2a'))} = A_4 \frac{\operatorname{sh} \rho(y_0 + a')}{\operatorname{sh} \rho(y_0 - a')}. \quad (2.87)$$

Наконец, из (2.84)

$$D + A_2 \rho [\exp(\rho y_0) + \exp(-\rho(y_0 - 2a'))] = A_4 \rho [\exp(\rho y_0) + \exp(-\rho(y_0 + 2a'))], \quad (2.88)$$

так что в соответствии с (2.87) и (2.88)

$$A_4 = D \left\{ \rho [\exp(\rho y_0) + \exp(-\rho(y_0 + 2a'))] - \right. \\ \left. - \rho \exp(-2\rho a') \frac{\operatorname{sh} \rho(y_0 + a') [\exp(\rho y_0) + \exp(-\rho(y_0 - 2a'))]}{\operatorname{sh} \rho(y_0 - a')} \right\}^{-1}, \quad (2.89)$$

что после упрощений сводится к виду

$$A_4 = D \frac{\exp(\rho a')}{2\rho} \frac{\operatorname{sh} \rho(y_0 - a')}{\operatorname{sh} 2\rho a'}. \quad (2.90)$$

Итак,

$$G(y_0 \rightarrow y) = \begin{cases} \frac{\exp(-\rho a') \operatorname{sh} \rho(y_0 + a')}{2K \operatorname{sh} 2\rho a'} [\exp(\rho y) - \exp(-\rho(y - 2a'))] & y > y_0; \\ \frac{\exp(\rho a') \operatorname{sh} \rho(y_0 - a')}{2K \operatorname{sh} 2\rho a'} [\exp(\rho y) - \exp(-\rho(y + 2a'))] & y < y_0. \end{cases} \quad (2.91)$$

**Многослойные пластины.** В качестве последнего примера решения диффузионного уравнения в плоской геометрии рассмотрим задачу о диффузии нейтронов в соприкасающихся пластинах (рис. 2.6). Для простоты возьмем симметричную задачу с источником на оси. Будем также предполагать, что сечения постоянны в каждой из областей. Тогда решения диффузионного уравнения суть:

$$\phi_1 = A_1 \exp(-K_1 |x|) + A_2 \exp(K_1 |x|) \quad \text{в области 1}; \quad (2.92a)$$

$$\phi_2 = A_3 \exp(-K_2 |x|) + A_4 \exp(K_2 |x|) \quad \text{в области 2}. \quad (2.92b)$$

Эти решения справедливы при  $x > 0$  и  $x < 0$ . Вследствие симметрии  $\phi(-x) = \phi(x)$ .

Для определения четырех констант существуют четыре условия-

1)  $\phi_2(a + b + z_0) = 0$ ;

2)  $\phi_1(a) = \phi_2(a)$  — непрерывность потока на границе раздела сред;

3)  $-D_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x=a} = -D_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \Big|_{x=a}$  — непрерывность тока на границе раздела сред;

4) условие скачка при  $x = 0$ .

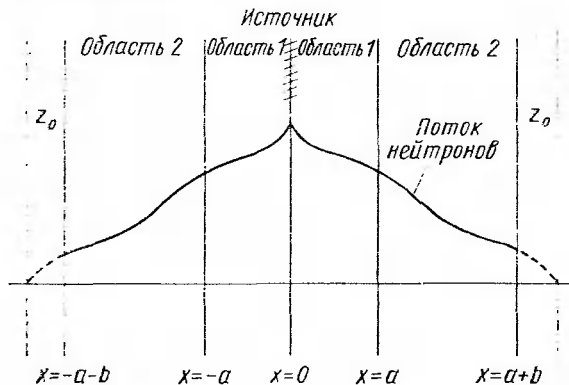


Рис. 2.6. Функция Грина для многослойной пластины

Получение четырех коэффициентов предоставляется читателю в качестве упражнения. Точно таким же образом решение может быть найдено для любого числа слоев как в симметричном, так и в произвольном случае.

### § 2.9. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Перейдем теперь к изучению диффузии нейтронов в случае сферической симметрии. Предположим, что рассматриваемая область состоит из концентрических сферических слоев, в каждом из которых  $D$  и  $\Sigma_a$  постоянны. В этом случае поток зависит только от  $r$ , расстояния от точки симметрии до данной точки, а ток  $\mathbf{J}$  имеет только радиальную компоненту

$$J_r = -D \partial \phi / \partial r. \quad (2.93a)$$

Предположим, что  $D$  не зависит от  $r$ . Тогда второе слагаемое в диффузионном уравнении (2.50) примет вид

$$\nabla \cdot D \nabla \phi(r) = D \nabla^2 \phi(r) = D \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr}. \quad (2.93b)$$

Мы ввели здесь выражение для  $\nabla^2$  в сферической системе координат, опустив производные по углам, так как по предположению  $\phi$  зависит только от  $r$ . Рассмотрим сначала распределение в бесконечной однородной среде для источника в форме тонкого сферического слоя  $S [\delta(r - r_0)/(4\pi r^2)]$  (рис. 2.7).

Прежде всего нужно вывести аналог условия скачка (2.53) [это легко делается тем же методом, с помощью которого получено уравнение (2.53)]:

$$J_r(r_0+) - J_r(r_0-) = S/(4\pi r_0^2). \quad (2.94)$$

Диффузионное уравнение имеет вид

$$-\frac{d^2}{dr^2} \phi - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \phi + K^2 \phi = \frac{S(r)}{D}. \quad (2.95)$$

С помощью преобразования

$$u(r) = r\phi(r) \quad (2.96)$$

оно сводится к виду

$$-\frac{d^2}{dr^2} u(r) + K^2 u(r) = \frac{rS(r)}{D}. \quad (2.97)$$

Решение этого уравнения есть

$$u(r) = A_1 \exp(-Kr) \quad r > r_0; \quad (2.98a)$$

$$u(r) = A_2 \exp(-Kr) + A_3 \exp(Kr) \quad r < r_0. \quad (2.98b)$$

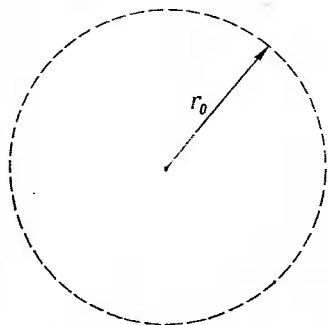


Рис. 2.7. Источник в форме сферического слоя

В выражении (2.98a) опущено слагаемое с положительной экспонентой, чтобы поток не расходился на бесконечности. А чтобы он не расходился в нуле, в выражении (2.98b) надо положить

$$A_2 = -A_3. \quad (2.99)$$

Таким образом,  $\phi(r) = (A_1/r) \exp(-Kr) \quad r > r_0;$  (2.100a)

$$\phi(r) = (A_2/r) \text{sh} Kr \quad r < r_0. \quad (2.100b)$$

Поток должен быть непрерывен при  $r = r_0$ :

$$A_1 = A_2 \exp(Kr_0) \text{sh} Kr_0. \quad (2.101)$$

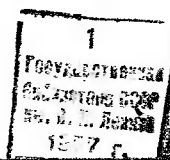
Наконец, в соответствии с условием скачка

$$A_1 \exp(-Kr_0) \left( \frac{1}{r_0^2} + \frac{K}{r_0} \right) - A_2 \left( \frac{\text{sh} Kr_0}{r_0} - \frac{K \text{ch} Kr_0}{r_0} \right) = \frac{S}{4\pi r_0^2 D}. \quad (2.102)$$

Отсюда находим

$$\phi = \frac{S}{4\pi D} \frac{\text{sh} Kr_0}{Kr_0 r} \frac{\exp[-K(r-r_0)]}{\text{sh} Kr_0 + \text{ch} Kr_0} \quad r > r_0; \quad (2.103a)$$

$$\phi = \frac{S}{4\pi D K r_0 r} \frac{\text{sh} Kr}{\text{sh} Kr_0 + \text{ch} Kr_0} \quad r < r_0. \quad (2.103b)$$



При  $r_0 \rightarrow 0$  и  $S \rightarrow 1$  из уравнения (2.103а) можно получить функцию Грина для точечного источника в бесконечной среде:

$$G_T = \frac{1}{4\pi D} \frac{\exp(-Kr)}{r}. \quad (2.104)$$

Если интенсивность источника  $Q$  постоянна по всему пространству, то

$$\phi = Q \int d^3r G_T(r) = \frac{Q}{D} \int_0^\infty r \exp(-Kr) dr = \frac{Q}{\Sigma_a}. \quad (2.105)$$

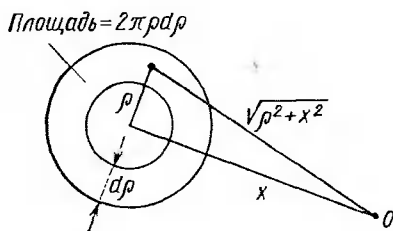


Рис. 2.8. Связь между потоками для плоского и точечного источников

Результат совпадает, конечно, с уравнением (2.80), которое было получено интегрированием функции Грина для плоского источника в бесконечной среде.

Функция Грина для плоского источника в бесконечной среде может быть получена интегрированием по плоскости источника функции Грина для точечного источника в бесконечной

среде (рис. 2.8). Поток на расстоянии  $x$  от плоскости обусловлен вкладом от всех элементов плоскости:

$$G_\infty(0 \rightarrow x) = \int_0^\infty 2\pi\rho d\rho G_T(\sqrt{\rho^2 + x^2}). \quad (2.106)$$

При замене переменных

$$R^2 = \rho^2 + x^2, \quad (2.107)$$

так что

$$RdR = \rho d\rho, \quad (2.108)$$

уравнение (2.106) принимает вид

$$G_\infty(0 \rightarrow x) = 2\pi \int_x^\infty R dR G_T(R). \quad (2.109)$$

Уравнение (2.109) может быть обращено дифференцированием:

$$G_T(R) = -\frac{1}{2\pi x} \frac{dG_\infty}{dx} (0 \rightarrow x) |_{x=R}. \quad (2.110)$$

Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку того, что функции Грина (2.76) и (2.104) действительно удовлетворяют уравнениям (2.109) и (2.110).

Представляет интерес вычислить  $\langle r^2 \rangle$ , средний квадрат расстояния от точки рождения нейтрона до точки поглощения. По аналогии с уравнением (2.77) можно написать:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int d^3 r r^2 G_T(r)}{\int d^3 r G_T(r)} = \frac{\int_0^\infty r^3 \exp(-Kr) dr}{\int_0^\infty r \exp(-Kr) dr}; \quad (2.111a)$$

$$\langle r^2 \rangle = 6/K^2 = 6L^2. \quad (2.111b)$$

Таким образом,  $\langle r^2 \rangle = 3\langle x^2 \rangle$ . Это не удивительно, поскольку  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  и  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$  в силу вращательной симметрии бесконечной среды с точечным источником.

Вычисление плотности нейтронов в сферически-симметричной системе конечных размеров производится точно таким же образом, как в многослойной плоской системе. В качестве примера рассмотрим сферу (область 1), окруженную сферическим слоем (область 2) с точечным источником в центре (рис. 2.9). Имеем

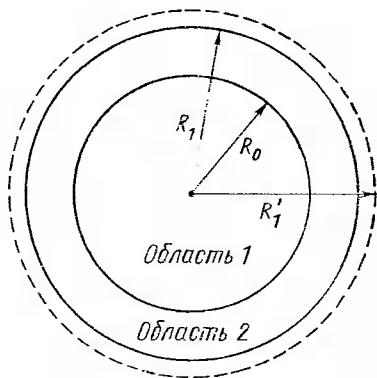


Рис. 2.9. Многослойная система

$$\phi_1 = A_1 \frac{\exp(-K_1 r)}{r} + A_2 \frac{\exp(K_1 r)}{r} \quad \text{область 1}; \quad (2.112a)$$

$$\phi_2 = A_3 \frac{\exp(-K_2 r)}{r} + A_4 \frac{\exp(K_2 r)}{r} \quad \text{область 2}. \quad (2.112b)$$

Прежде всего  $\phi_2(R_1 + z_0) = \phi_2(R_1') = 0$ , так что

$$A_3 = -A_4 \exp(2K_2 R_1'). \quad (2.113)$$

Условия непрерывности при  $r = R_0$  записываются в виде

$$\phi_1(R_0) = \phi_2(R_0); \quad (2.114a)$$

$$-D_1 \frac{d}{dr} \phi_1|_{r=R_0} = -D_2 \frac{d}{dr} \phi_2|_{r=R_0}. \quad (2.114b)$$

Этих трех уравнений недостаточно для нахождения четырех констант. Прежде в качестве четвертого уравнения использовалось условие скачка, но в сформулированном ранее виде оно не может быть применено к точечному источнику. Можно, однако, решить задачу для источника в форме сферического слоя радиусом  $r_0$  и затем устремить  $r_0$  к нулю. Однако проще решить задачу несколько иным

способом. Если окружить источник сферой радиусом  $r_0$ , то при  $r_0 \rightarrow 0$  число нейтронов, пересекающих сферу, равно мощности источника:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[ -D_1 \frac{d}{dr} \phi_1 |_{r=r_0} \right] = Q. \quad (2.115)$$

### § 2.10. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Решение диффузионного уравнения в цилиндрической геометрии используется значительно чаще, чем в плоской или сферической, так как в реакторах очень часто применяются топливные элементы цилиндрической формы, окруженные замедлителем. При рассмотрении таких систем предполагают, что все источники тепловых нейтронов локализованы в замедлителе, где в основном замедляются нейтроны. Типичной задачей с таким предположением является задача о вычислении коэффициента использования тепловых нейтронов  $f$  в реакторной решетке (рис. 2.10).

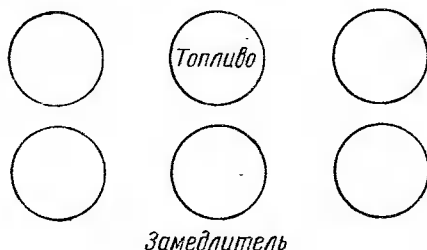


Рис. 2.10. Реакторная решетка

В этом случае предполагается, что решетка бесконечная и

что поэтому достаточно провести расчеты для *элементарной ячейки*. Из соображений симметрии очевидно, что ток на границе ячейки обращается в нуль; это требование является граничным условием.

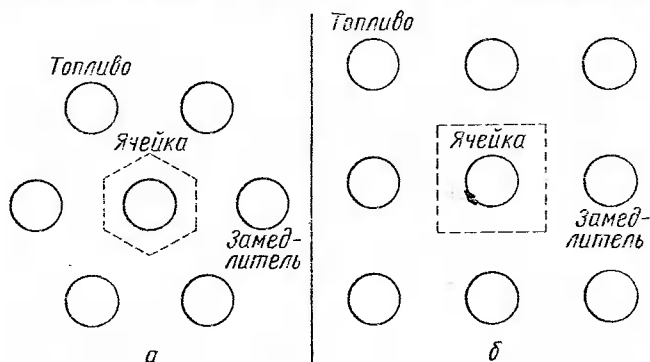


Рис. 2.11. Гексагональная (а) и квадратная (б) решетки

В целях облегчения расчетов квадратная (или шестигранная) внешняя граница ячейки обычно заменяется цилиндрической, так что диффузионное уравнение решается для системы, состоящей из цилиндрического топливного элемента, окруженного кольцевым слоем замедлителя (рис. 2.11).

В цилиндрической системе координат при азимутальной симметрии

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (2.116)$$

так что диффузионное уравнение имеет вид

$$\left[ -D_M \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \Sigma_{aM} \right] \phi_M = q_M; \quad (2.117a)$$

$$\left[ -D_F \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \Sigma_{aF} \right] \phi_F = 0. \quad (2.117б)$$

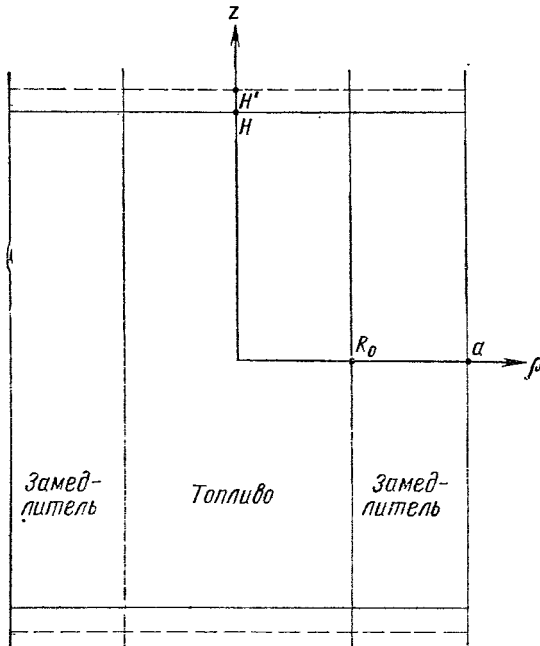


Рис. 2.12. Упрощенная элементарная ячейка (вид сбоку)

Здесь индексы  $M$  и  $F$  относятся к зонам замедлителя и топлива соответственно. Поток должен быть определен в каждой из рассматриваемых зон с помощью уравнений (2.117) и соответствующих граничных условий. На границе между зонами  $\rho = R_0$  выполняются условия непрерывности тока и потока.

Решим сначала уравнение (2.117a) (рис.2.12) с граничными условиями

$$\phi_M(\rho, \pm H') = 0; \quad (2.118a)$$

$$-D_M \frac{\partial \phi_M}{\partial \rho}(\rho, z) \Big|_{\rho=a} = 0. \quad (2.118б)$$

Первое условие означает, что поток обращается в нуль на верхней и нижней экстраполированных границах реактора\*, а второе — что ток через внешнюю границу ячейки отсутствует.

Прежде чем решать уравнение (2.117а), мы должны конкретизировать форму  $q_M(\rho, z)$ . Обычно предполагают, что эта величина не зависит от  $\rho$ , а зависимость от  $z$  определяется осевым распределением потока нейтронов, обращающегося в нуль на экстраполированных границах, т. е.

$$q_M(\rho, z) = q_M \cos(\pi z/2H'). \quad (2.119)$$

Будем искать решение уравнения (2.117а) в форме

$$\phi_M(\rho, z) = \chi_M(\rho) \cos(\pi z/2H'). \quad (2.120)$$

Подстановка этого выражения в (2.117а) дает уравнение для нахождения  $\chi_M(\rho)$ :

$$\left\{ -D_M \left[ -\left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \Sigma_{aM} \right\} \chi_M = q_M \quad (2.121)$$

или

$$\left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \left[ \frac{\Sigma_{aM}}{D_M} + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2 \right] \right\} \chi_M = \frac{q_M}{D_M}. \quad (2.122)$$

Решение этого уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Очевидно,

$$\chi_p = \frac{q_M}{\Sigma_{aM} + D_M(\pi/2H')^2} \quad (2.123)$$

есть частное решение неоднородного уравнения. Перепишем однородное уравнение в виде

$$-\left[ \chi_H''(\rho) + \frac{1}{\rho} \chi_H'(\rho) \right] + \kappa_M^2 \chi_H(\rho) = 0. \quad (2.124a)$$

Здесь

$$\kappa_M^2 = \frac{\Sigma_{aM}}{D_M} + \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2. \quad (2.124b)$$

Уравнение (2.124а) есть уравнение Бесселя (см. приложение Г). Его решение имеет вид

$$\chi_H(\rho) = AI_0(\kappa_M \rho) + CK_0(\kappa_M \rho), \quad (2.125a)$$

где  $A$  и  $C$  — произвольные константы.

Тогда

$$\phi_M = [\chi_H(\rho) + \chi_p(\rho)] \cos(\pi z/2H'). \quad (2.125b)$$

\* Предполагается, что экстраполированная поправка представляет собой среднее значение поправок, соответствующих топливу и замедлителю.

Мы видим, что граничные условия (2.118а) автоматически выполняются. Чтобы удовлетворить (2.118б), достаточно положить

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial \rho} I_0(\kappa_M \rho) + C \frac{\partial}{\partial \rho} K_0(\kappa_M \rho) \right]_{\rho=a} = 0 \quad (2.126а)$$

или (см. приложение Г)

$$\kappa_M [A I_1(\kappa_M \rho) - C K_1(\kappa_M \rho)]_{\rho=a} = 0, \quad (2.126б)$$

так что

$$C = A I_1(\kappa_M a) / K_1(\kappa_M a). \quad (2.126в)$$

Тогда

$$\phi_M = \left\{ \chi_p(\rho) + A \left[ I_0(\kappa_M \rho) + \frac{I_1(\kappa_M a)}{K_1(\kappa_M a)} K_0(\kappa_M \rho) \right] \right\} \cos \frac{\pi z}{2H'}. \quad (2.126г)$$

Решение уравнения (2.117б) находят аналогично, за исключением того, что:

1) отсутствует частное решение, так как уравнение (2.117б) однородно;

2) слагаемое, включающее  $K_0$ , отсутствует, так как  $K_0 \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ .

Таким образом,

$$\phi_F(\rho) = A' I_0(\kappa_F \rho) \cos(\pi z / 2H'), \quad (2.127а)$$

где  $\kappa_F$  определено аналогично  $\kappa_M$ , т. е.

$$\kappa_F^2 = (\Sigma_{aF} / D_F) + (\pi / 2H')^2; \quad (2.127б)$$

$A'$  — произвольная константа. Условие непрерывности потока при  $\rho = R_0$  дает

$$A' I_0(\kappa_F R_0) = A \left[ I_0(\kappa_M R_0) + \frac{I_1(\kappa_M a)}{K_1(\kappa_M a)} K_0(\kappa_M R_0) \right] + \frac{q_M}{D_M \kappa_M^2}, \quad (2.128а)$$

а условие непрерывности тока

$$A' D_F \kappa_F I_1(\kappa_F R_0) = A D_M \kappa_M \left[ I_1(\kappa_M R_0) - \frac{I_1(\kappa_M a)}{K_1(\kappa_M a)} K_1(\kappa_M R_0) \right]. \quad (2.128б)$$

Последние два уравнения позволяют определить  $A$  и  $A'$ . Потоки в топливе и замедлителе находят затем в соответствии с уравнениями (2.126г) и (2.127а). Оставим все это читателю для упражнений.

В задаче 2.7 ставится очень важная проблема. Причина того, что в гетерогенном топливе поглощается относительно меньше нейтронов, чем в гомогенном, состоит в *экранировании* внутренних слоев топливного элемента наружными. Другими словами, поток нейтро-

нов  $\phi_F(\rho)$  спадает по направлению к центру топливного элемента, так что в центре поглощается меньше нейтронов (это тот самый эффект, который обсуждается в § 7.3 в связи с самоэкранированием). Важность этого эффекта при проектировании реактора обусловлена тем, что в гетерогенном топливе уменьшается коэффициент использования тепловых нейтронов  $f$ , но уменьшается и резонансное поглощение. Оказывается, реактор можно спроектировать так, что произведение  $\rho f$ , а следовательно, и  $k_\infty$  возрастают при использовании гетерогенного топлива по сравнению с гомогенным того же состава. Если бы не это, первый реактор CP1 (уран-графитовая сборка) был бы подкритическим.

### § 2.11. ИЗМЕРЕНИЕ ДИФфуЗИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Существует несколько экспериментальных методов для измерения параметров, входящих в диффузионное уравнение. Один из них, основанный на использовании импульсов нейтронов, обсуждается в гл. 4. Наиболее прямой метод измерения  $L^2$  состоит во

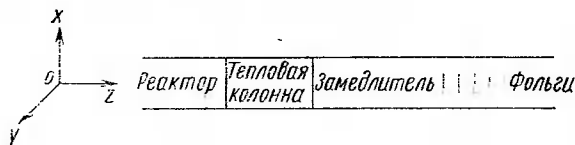


Рис. 2.13. Схема эксперимента для измерения длины диффузии

введении источника тепловых нейтронов, длина диффузии которых подлежит определению, и использовании одного из полученных в предыдущем параграфе соотношений для вывода  $L^2$ . Схема такого эксперимента представлена на рис. 2.13.

Тепловые нейтроны получаются при прохождении нейтронов из реактора через *тепловую колонну*, которая представляет собой блок графита длиной 1,5 м, предназначенный для замедления практически всех поступающих из реактора нейтронов. Таким образом, получается плоский источник тепловых нейтронов, которые затем попадают в изучаемый замедлитель, например большой бак с водой. Вдоль оси бака располагаются детекторы тепловых нейтронов (обычно это фольги из  $^{235}\text{U}$ , покрытые кадмием, активация которых в каждой данной точке пропорциональна потоку нейтронов в этой точке).

Чтобы проанализировать такой эксперимент, напишем диффузионное уравнение для условий эксперимента:

$$(-DV^2 + \Sigma_a)\phi = S_0\delta(z)\cos(\pi x/2a')\cos(\pi y/2b'). \quad (2.129)$$

В данном случае предполагается, что пространственная зависимость источника в направлениях  $x$  и  $y$  описывается косинусами, которые обращаются в нуль на экстраполированных границах  $x = \pm a'$ ,  $y = \pm b'$ . При этом делается предположение, что тепловая колонна

имеет достаточную длину, чтобы пренебречь *более высокими гармониками*, например пропорциональными  $\cos(3\pi x/2a')$ .

Полагая  $\phi = \chi(z) \cos(\pi x/2a') \cos(\pi y'/2b')$  в формуле (2.129), получаем уравнение для  $\chi(z)$ :

$$\left\{ -D \left[ -\left(\frac{\pi}{2a'}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2b'}\right)^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right] + \Sigma_a \right\} \chi(z) = S_0 \delta(z) \quad (2.130a)$$

или

$$-\chi''(z) + \left[ \frac{1}{D} \Sigma_a + \left(\frac{\pi}{2a'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b'}\right)^2 \right] \chi(z) = \frac{S_0}{D} \delta(z). \quad (2.130b)$$

Для замедлителя, бесконечного в направлении  $z$ , решение уравнений (2.130) для  $z > 0$  имеет следующий вид:

$$\chi = \chi_0 \exp \left[ -\frac{\Sigma_a}{D} - \left(\frac{\pi}{2a'}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2b'}\right)^2 \right] z. \quad (2.131)$$

Произвольная константа  $\chi_0$  может быть определена с помощью условия источника, но в этом нет необходимости при определении  $L$ . Из уравнения (2.131) видно, что график зависимости  $\ln \chi(z)$  от  $z$  имеет наклон, равный

$$-\left[ \frac{\Sigma_a}{D} + \left(\frac{\pi}{2a'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b'}\right)^2 \right] = -\left[ \frac{1}{L^2} + \left(\frac{\pi}{2a'}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b'}\right)^2 \right]. \quad (2.132)$$

Поскольку наведенная в фольге активность пропорциональна  $\chi(z)$ , остается построить зависимость ее в полулогарифмическом масштабе и определить наклон. Затем  $L^2$  находят из уравнения (2.132).

При проведении эксперимента следует соблюдать некоторую осторожность и проводить измерения на достаточном расстоянии от плоскости  $z = 0$ , где диффузионное приближение дает хорошие результаты (напомним, что диффузионное приближение неприменимо вблизи границ, где поток быстро изменяется). Кроме того, при написании решения (2.131) предполагалось, что среда, в которой проводится эксперимент, бесконечна в направлении  $z$ . В случае ограниченной среды следовало бы учесть слагаемое с положительной экспонентой, коэффициент перед которой должен быть таким, чтобы величина  $\chi(z)$  обращалась в нуль на экстраполированной границе  $z = c'$ . Поэтому измерения не должны проводиться у края экспериментальной сборки, где вклад положительной экспоненты в решение становится важным.

## Задачи

2.1. Найти с помощью функции Грина, определяемой формулой (2.746),  $\phi(x)$  для случая постоянного источника при  $\Sigma_a$  и  $D$ , зависящих от координаты.

2.2. Используя  $G(y_0 \rightarrow y)$  [уравнение (2.91)], вычислить поток нейтронов в пластине, содержащей постоянный источник  $S$ . Сравнить с результатом прямого решения диффузионного уравнения.

2.3. Вычислить константы в уравнениях (2.92a) и (2.92b).

2.4. Вычислить коэффициент проигрыша  $F$ , определенный как отношение среднего потока в топливе к среднему потоку по всей ячейке (под средним понимается среднее по пространству т. е.

$$\bar{\phi}_F = \frac{2\pi}{V_F} \int \rho d\rho dz \phi_F(\rho, z)$$

и т. д.). Использовать цилиндрическую геометрию, описанную в § 2.10.

2.5. Вычислить коэффициент использования тепловых нейтронов  $f$ , определенный как отношение числа нейтронов, поглощенных в топливе, к полному числу поглощенных нейтронов. Как  $f$  связан с коэффициентом проигрыша? (Использовать § 2.10.)

2.6. Вычислить функцию Грина для цилиндрической геометрии, т. е. поток от источника в форме цилиндра радиусом  $\rho_0$ . Найти функцию Грина для нитевидного источника, перейдя к пределу  $\rho_0 \rightarrow 0$ .

2.7. В однородной среде

$$f_h = \Sigma_{aF} / (\Sigma_{aF} + \Sigma_{aM}).$$

Доказать, что коэффициент  $f$ , вычисленный в задаче 2.5, всегда меньше  $f_h$ .

2.8. Получить выражение для определения длины диффузии в случае конечных размеров экспериментальной сборки.

2.9. Вывести уравнение (2.55).

2.10. Найти константы в уравнениях (2.92).

2.11. Найти константы в уравнениях (2.112).

## Список литературы

1. Osborn R. K., Yip S. The Foundations of Neutron Transport Theory. N. Y., 1966.
2. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
3. Cohen E. R. «Nucl. Sci. Engng», 1970, v. 42, p. 23.

---

### РАСЧЕТ РЕАКТОРА В ОДНОСКОРОСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

---

#### § 3.1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь перейдем к расчету ядерного реактора в одноклассовом приближении. Как уже указывалось в § 1.2, реактор можно представить как смесь делящихся изотопов (топливо) с конструкционными материалами, теплоносителем и, если речь идет о реакторе на тепловых нейтронах, с замедлителем. Как мы уже отмечали, упругие и неупругие столкновения всегда приводят к уменьшению энергии нейтронов ниже энергии деления ( $\sim 2$  Мэв). По этой причине от одноклассового описания реактора вряд ли можно ожидать надежных результатов. Однако оно позволяет понять основные процессы, что дает возможность легко перейти к используемой на практике многогрупповой схеме, обсуждаемой в гл. 8. Кроме того, одноклассовое приближение дает достаточно разумные результаты, особенно для систем с очень мягким или очень жестким спектром нейтронов. При проведении одноклассовых расчетов сечения должны быть соответствующим образом усреднены по той представляющей интерес области энергий, в которой плотность нейтронов имеет наименьшее значение. Надежный метод получения таких усредненных сечений обсуждается в гл. 9.

В одноклассовом приближении нет необходимости рассматривать замедлитель. Тем не менее, чтобы сделать результаты более осмысленными, мы будем предполагать, что в реакторе наряду с топливом находятся *замедлитель*, теплоноситель, конструкционные материалы и т. д. В этой сильно упрощенной модели предполагается, что в процессе деления испускается  $\nu$  нейтронов. Некоторые из них поглощаются вне топлива, часть поглощается в топливе, не вызывая деления, а часть покидает реактор. Предполагается, что все эти процессы происходят при одной и той же энергии. Чтобы в реакторе осуществлялась самоподдерживающаяся цепная реакция, нужно обеспечить поглощение одного нейтрона в топливе с последующим делением (эта проблема обсуждалась более подробно в § 1.2).

Попытаемся записать эти соображения математически. Необходимо обеспечить стационарное распределение нейтронов в реакторе без внешних источников (которые принимались во внимание в предыдущей главе), но с источниками деления. Последние, очевидно,

определяются произведением плотности деления  $\Sigma_f \phi(\mathbf{r})$  и средним числом вторичных нейтронов на одно деление:

$$\text{Источник нейтронов} = \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Уравнение баланса в диффузионном приближении может быть записано в виде\*

$$\frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \Sigma_a \phi - \nabla \cdot D \nabla \phi = \nu \Sigma_f \phi. \quad (3.2)$$

Если предположить, что временная зависимость потока определяется выражением

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \exp(-\Lambda t), \quad (3.3)$$

то уравнение (3.2) превращается в уравнение на собственное значение\*\*

$$(\Sigma_a - \nu \Sigma_f - \nabla \cdot D \nabla) \phi(\mathbf{r}) = (\Lambda \bar{v}) \phi(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

Нас интересует собственное значение  $\Lambda$ , равное нулю; при этом распределение нейтронов, как видно из уравнения (3.2), будет стационарным. Говорят, что реактор с  $\Lambda = 0$  является *критическим*. При  $\Lambda < 0$  поток растет во времени, и реактор является *надкритическим*. В случае  $\Lambda > 0$  поток нейтронов экспоненциально убывает со временем, и реактор является *подкритическим*. Таким образом,  $\Lambda$  тесно связано с коэффициентом размножения  $k$ , введенным в § 1.2

Иногда задача на собственное значение (3.4) формулируется несколько иначе. Рассмотрим, например, подкритическую систему. Если бы каким-либо образом удалось сделать  $\nu$  несколько больше реального значения, реактор мог бы стать критическим. В этом случае  $\phi(\mathbf{r})$  будет описываться стационарным вариантом уравнения (3.4) с некоторым другим значением  $\nu$ ; назовем его  $\nu_c$ :

$$(\Sigma_a - \nabla \cdot D \nabla) \phi(\mathbf{r}) = \nu_c \Sigma_f \phi(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Можно вычислить затем это  $\nu_c$ , для чего, конечно, придется решить уравнение (3.5). Если  $\nu_c = \nu$ , реактор и в самом деле будет критическим. Но если  $\nu_c < \nu$ , реактор надкритичен (для поддержания цепной реакции нужно меньше нейтронов, чем обеспечено природой), в то время как при  $\nu_c > \nu$  реактор подкритичен (требуется больше нейтронов). Величина  $\nu_c$  связана с коэффициентом размножения соотношением

$$k = \nu / \nu_c. \quad (3.6)$$

\* Односкоростное приближение отличается от *однoгруппового* тем, что в последнем должны быть использованы усредненные сечения и т. п., хотя математическое описание в обоих приближениях совпадает. Поэтому в уравнении (3.2) используется  $\bar{v}$  вместо  $v$ .

\*\* Понятие *собственное значение* подробно обсуждается в гл. 5.

При  $k = 1$   $v = v_c$  и реактор является критическим, при  $k < 1$  — подкритическим и при  $k > 1$  — надкритическим. Введем величину

$$\rho = (k - 1)/k, \quad (3.7)$$

которая называется *реактивностью*. При положительной (отрицательной) реактивности реактор является надкритическим (подкритическим).

При сравнении уравнений (3.4) и (3.5) появляется возможность установить связь между собственными значениями  $\Lambda$  и  $v_c$  (или  $k$  и  $\rho$ ) (это будет сделано ниже).

### § 3.2. ПЛОСКИЙ РЕАКТОР БЕЗ ОТРАЖАТЕЛЯ

Рассмотрим в качестве простейшего случая плоский реактор без отражателя шириной  $2a$ , экстраполированной шириной  $2a'$  (см. рис. 3.1) и найдем условие его критичности. Будем считать реактор однородным, так что все сечения не зависят от координаты. В этом случае диффузионное уравнение (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \left( -D \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a - \nu \Sigma_f \right) \phi(x) = \\ = \frac{\Lambda}{v} \phi(x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

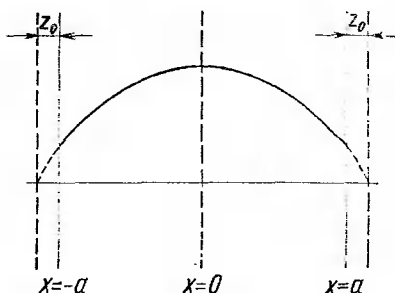


Рис. 3.1. Плоский реактор без отражателя

Будем искать решение этого уравнения в виде\*

$$\phi(x) = \phi_0 \cos Bx. \quad (3.9)$$

Очевидно, не всякое значение  $B$  приемлемо. Поток нейтронов должен обращаться в нуль на экстраполированной границе реактора. Поскольку

$$\cos \frac{2n+1}{2} \pi = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

величина  $B$  может принимать лишь значения

$$B = B_n = \frac{2n+1}{2a'} \pi. \quad (3.11)$$

Тогда

$$(DB_n^2 + \Sigma_a - \nu \Sigma_f) \phi_0 = \phi_0 \Lambda_n / \bar{v} \quad (3.12)$$

или

$$\Lambda_n = \bar{v} \Sigma_a (L^2 B_n^2 + 1 - \nu \Sigma_f / \Sigma_a). \quad (3.13)$$

\* Поток  $\phi(x)$  должен быть симметричен относительно  $x = 0$ .

Мы ввели здесь квадрат длины диффузии тепловых нейтронов  $L^2 = D/\Sigma_a$  (см. гл. 2).

Из (3.11) видно, что значения  $B_n$  (и  $A_n$ ) возрастают с увеличением  $n$ . Поэтому  $\Lambda_0$  есть наименьшее из всех  $\Lambda_n$ . Распределение нейтронов в реакторе можно записать в виде суммы слагаемых вида (3.3):

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-\Lambda_n t) \cos B_n x. \quad (3.14)$$

Так как  $\Lambda_0$  — наименьшее из всех  $\Lambda_n$ , после достаточно продолжительного времени наибольший вклад в поток будет давать первое слагаемое в (3.14):

$$\phi(x, t) \rightarrow a_0 \exp(-\Lambda_0 t) \cos B_0 x. \quad (3.15)$$

Отметим также, что  $\cos B_0 x$  является единственным слагаемым в (3.14), которое не отрицательно для  $-a < x < a$ . Из физических соображений следует, что основной вклад в поток положителен в любой точке реактора.  $B_0^2$  обычно обозначается  $B_g^2$  и называется *геометрическим лапласианом*:

$$B_g^2 = B_0^2 = (\pi/2a')^2. \quad (3.16)$$

Для того чтобы реактор был критическим, необходимо, чтобы основная мода не зависела от времени, а остальные отсутствовали. Поэтому для критического реактора  $\Lambda_0 = 0$  и (3.13) может быть записано при  $n = 0$  следующим образом:

$$\frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + B_g^2 L^2} = 1. \quad (3.17)$$

Это уравнение определяет так называемый *материальный лапласиан*  $B_m^2$ :

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a - 1}{L^2}. \quad (3.18)$$

Условие критичности может быть записано в виде

$$B_g^2 = B_m^2, \quad (3.19)$$

т. е. в критическом реакторе геометрический лапласиан равен материальному.

Рассмотрим ту же проблему с другой точки зрения. Вернемся к уравнению (3.5), которое может быть переписано в виде

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + B_c^2 \phi(x) = 0, \quad (3.20)$$

где

$$B_c^2 = (\nu_c \Sigma_f - \Sigma_a) / D. \quad (3.21)$$

Уравнение имеет решение

$$\phi(x) = \phi_0 \cos B_c x, \quad (3.22)$$

причем мы требуем, чтобы

$$B_c = (2n + 1)\pi/2a' \quad (3.23)$$

для выполнения граничных условий на экстраполированных границах

$$\phi(\pm a') = 0. \quad (3.24)$$

В силу изложенных выше соображений мы должны оставить только наименьшее собственное значение ( $n = 0$ ). Очевидно,  $B_g = B_c$ . Если, кроме того,  $B_g = B_m$ , причем  $B_m$  определено уравнением (3.18), реактор критичен. При  $B_m > B_g$ , очевидно,  $\nu > \nu_c$ , и реактор надкритичен. Можно вычислить  $\nu_c$  из уравнения (3.21):

$$\nu_c = (DB_g^2 + \Sigma_a)/\Sigma_f; \quad (3.25)$$

$$\nu_c = (1 + L^2 B_g^2) \Sigma_a / \Sigma_f. \quad (3.26)$$

Таким образом,  $k = \nu/\nu_c$  определяется выражением

$$k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a (1 + L^2 B_g^2)}. \quad (3.27)$$

Итак, чтобы определить критичность плоского реактора без отражателя, следует:

1) найти геометрический лапласиан  $B_g^2$ , который является наименьшим собственным значением уравнения

$$d^2 \phi(x)/dx^2 + B^2 \phi(x) = 0 \quad (3.28)$$

при обращении потока в нуль на экстраполированных границах;

2) вычислить  $k$  по уравнению (3.27) ( $\nu_c$  — по (3.25)) и выяснить, является ли реактор надкритическим, критическим или подкритическим.

### § 3.3. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАСЧЕТАХ РЕАКТОРОВ

При расчете реакторов обычно следуют процедуре, описанной в конце § 3.2. Сначала выбирают некоторую геометрическую конфигурацию и состав активной зоны. Затем, решая диффузионное уравнение, вычисляют  $\nu_c$  и сравнивают его с  $\nu$ , что позволяет определить состояние реактора. Если реактор оказывается не критическим, надлежит внести соответствующие изменения в его состав или геометрию\*, причем характер и величина этих изменений определяются знаком и величиной отклонения  $k$  от 1.

Предположим, что  $k < 1$ . Тогда какой-либо поглощающий нейтроны материал, который всегда есть в реакторе, например в виде стержней регулирования, может быть удален из реактора. После проведения расчетов  $k$  получается зависимость коэффициента размножения от изменяемого параметра, которая позволяет

\* Обычно проще изменить состав, поскольку размеры определяются конструктивными соображениями.

определить критическую конфигурацию. В завершение следует сделать проверочный расчет в целях уточнения коэффициента размножения.

Реакторы проектируют обычно таким образом, что по мере надобности  $k$  можно устанавливать больше или меньше единицы. Обычно это делают с помощью управляющих стержней (или, например, жидких поглотителей). Естественно, в работающем реакторе  $k = 1$ . Однако в процессе его работы некоторые эффекты приводят к уменьшению  $k$ . К ним относится, в частности, выгорание топлива (каждый акт деления означает потерю одного делящегося ядра). Существуют, правда, процессы, сопровождающиеся увеличением  $k$ , например образование  $^{239}\text{Pu}$  в реакторе со значительным количеством  $^{238}\text{U}$ . Тем не менее в целом реактивность работающего реактора, как правило, убывает. Поэтому должен быть предусмотрен некий способ приведения реактивности реактора к единице в любой момент кампании.

Избыточная реактивность в начале кампании, т. е. возможное превышение  $k$  над единицей, должна быть компенсирована с помощью системы регулирования. Иначе говоря, поглощающие стержни в начале кампании должны быть так введены в активную зону, чтобы обеспечивалось равенство  $k$  единице. По мере уменьшения  $k$  стержни должны постепенно выводиться из активной зоны. При полном выведении стержней из зоны эксплуатация реактора прекращается для перегрузки топлива\*.

В процессе проектирования реактора определяется избыточная реактивность, которая зависит от требуемой кампании, темпа выгорания топлива, скорости накопления плутония, эффективности системы регулирования и т. п. Проблема проектирования реактора очень усложняется тем, что многие из этих важных факторов могут быть только грубо оценены в начале работы над реактором. Затем эти факторы должны быть пересчитаны, что приведет к новому расчету реактора, и т. д.

Другая сложность связана с тем, что реальный реактор не может быть так просто рассчитан, как гомогенный реактор без отражателя, рассматриваемый в этой главе. Обычно активная зона реактора — это довольно сложное сочетание топливных элементов, охлаждающих каналов и т. д.; она, как правило, окружена отражателем или иногда зоной воспроизводства, содержащей естественный уран, и биологической защитой. Даже распределение топлива в активной зоне редко бывает однородным, поскольку, как мы видели, однородное распределение топлива приводит к заметному

---

\* Во многих реакторах, в частности в больших водо-водяных,  $k$  увеличивается с уменьшением температуры (отрицательный температурный коэффициент). Поэтому даже в конце кампании такой реактор может некоторое время продолжать работу при пониженной температуре и, следовательно, на пониженном уровне мощности. Это иногда оказывается полезным, если для перегрузки энергетического реактора потребуется его остановка в период пиковой нагрузки.

всплеску энерговыделения в центре реактора ( $\phi \approx \cos(\pi x/2a')$ ). Так как распределение энерговыделения пропорционально плотности делений, которая, в свою очередь, пропорциональна потоку, такой реактор имеет «горячую точку» в центре или вблизи него. С этим связаны серьезные проблемы отвода тепла. Отражатель (или зона воспроизводства), который окружает большинство активных зон, в какой-то мере улучшает эту ситуацию, поскольку с его помощью во внешние области активной зоны возвращаются уходящие из нее нейтроны. Еще большего эффекта можно добиться при неоднородной загрузке топлива (рис. 3.2).

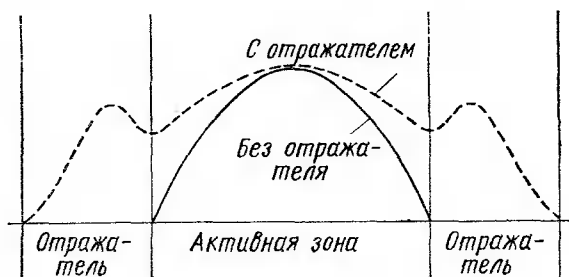


Рис. 3.2. Форма потока тепловых нейтронов в реакторах с отражателем и без него (всплеск потока тепловых нейтронов в реакторе обсуждается в гл. 8)

Следует добавить, что рассматриваемое здесь одногрупповое или односкоростное приближение не применяется на практике. Обычно используются по крайней мере две группы, а как правило, больше (до двадцати).

Все это означает, что простые аналитические результаты, полученные в этой главе, не могут быть использованы. Для решения диффузионных уравнений применяют численные методы. Однако каким бы способом ни получалось решение, процедура его нахождения одна и та же; она подобна описанной здесь. Все эти проблемы и некоторые из используемых методов обсуждаются в следующих главах книги.

### § 3.4. КРИТИЧЕСКАЯ МАССА И КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРЫ

Принимая во внимание сказанное в § 3.3, опишем некоторые методы определения нужных размеров реактора при заданном составе или соответствующего состава при заданных размерах. Такие расчеты в состоянии дать только общее представление об условиях критичности, а для практических расчетов, как мы уже указывали, должны быть использованы более сложные методы.

Предположим для начала, что состав реактора задан. Тогда  $\Sigma_f$ ,  $\Sigma_a$  и  $L^2$  известны, и с помощью уравнения (3.18) можно вычислить  $B_m^2$ :

$$B_m^2 = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a - 1}{L^2}.$$

Тогда критическая *экстраполированная* ширина  $2a'$  плоского реактора без отражателя (см. рис. 3.1) определяется из равенства

$$B_m^2 = B_g^2, \quad (3.29)$$

где  $B_g^2$  находится из уравнения (3.16). Так как  $a' = a + z_0$ , имеем

$$a = \pi / (2B_m) - z_0. \quad (3.30)$$

Иногда состав реактора таков, что ни при какой ширине, как бы велика она ни была, не удается обеспечить условия критичности. Это означает, что в этом случае  $k_\infty < 1$  ( $k_\infty$  определяется уравнением (1.11)). При  $k_\infty > 1$  критическая ширина всегда существует, а при  $k_\infty = 1$  она равна бесконечности.

Поставим обратную задачу: размеры заданы, а требуется найти загрузку топлива (критическую массу). Тогда известно  $B_g^2$ , и имеем

$$\frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a - 1}{L^2} = B_g^2 = \left( \frac{\pi}{2a'} \right)^2. \quad (3.31)$$

Предположим для простоты, что активная зона состоит только из двух материалов: топлива (индекс  $F$ ) и замедлителя\* (индекс  $M$ ). Тогда

$$\Sigma_a = \Sigma_f + \Sigma_c^F + \Sigma_c^M, \quad (3.32)$$

где индекс  $c$  означает *захват*, т. е. поглощение нейтронов без последующего деления. Полное сечение поглощения, естественно, определяется *суммой* сечений захвата и деления.

Далее имеем

$$L^2 = D / \Sigma_a = 1 / (3 \Sigma_{tr} \Sigma_a) = 1 / [3 (\Sigma_{tr}^F + \Sigma_{tr}^M) (\Sigma_a^F + \Sigma_a^M)]. \quad (3.33)$$

Это выражение может быть записано в виде

$$L^2 = L_M^2 / [(1 + \Sigma_{tr}^F / \Sigma_{tr}^M) (1 + \Sigma_a^F / \Sigma_a^M)], \quad (3.34a)$$

где

$$L_M^2 = 1 / (3 \Sigma_{tr}^M \Sigma_a^M). \quad (3.34b)$$

---

\* В односкоростном приближении замедлитель является своего рода «внутренним отражателем», удерживающим нейтроны в пределах активной зоны. На самом деле замедлитель только замедляет нейтроны.

Так как большинство реакторов имеет сравнительно небольшую загрузку\*, обычно принято пренебрегать отношением  $\Sigma_{tr}^F/\Sigma_{tr}^M$ , так что

$$L^2 = L_M^2/(1 + W), \quad (3.35)$$

где

$$W = \Sigma_a^F/\Sigma_a^M. \quad (3.36)$$

Распишем теперь отношение

$$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a^F} \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M}. \quad (3.37)$$

Отметим, что

$$\nu\Sigma_f/\Sigma_a^F = \nu\sigma_f/\sigma_a^F \equiv \eta \quad (3.38)$$

не зависит от концентрации топлива\*\*. Это отношение является константой, зависящей только от типа используемого топлива. Далее

$$\Sigma_a^F/(\Sigma_a^F + \Sigma_a^M) = W/(1 + W). \quad (3.39)$$

Таким образом, уравнение (3.31) принимает вид

$$[(\eta - 1)W - 1]/L_M^2 = (\pi/2a')^2. \quad (3.40)$$

Оно позволяет вычислить  $W$  ( $L_M^2$  и  $\eta$  считаются известными\*\*\*). Найдя  $W$ , можно определить критическую массу следующим образом. Уравнение (3.36) может быть переписано:

$$W = \frac{N_F}{N_M} \frac{\sigma_a^F}{\sigma_a^M}. \quad (3.41)$$

Здесь  $N_F$  и  $N_M$  — ядерные плотности топлива и замедлителя соответственно, а отношение  $\sigma_a^F/\sigma_a^M$  считается известным. Предполагая по-прежнему, что топливо не занимает никакого объема, в соответствии с (2.11) имеем

$$N_M = n_M L_0 Z_M / M_M. \quad (3.42)$$

Теперь может быть определена величина  $N_F$ , так как все остальные величины известны.

\* Это неверно для реакторов на быстрых нейтронах, но для них рассматриваемый подход вообще неприменим.

\*\*  $\eta = 2,08$  для деления  $^{235}\text{U}$  тепловыми нейтронами.

\*\*\* На самом деле  $L_M^2$  в какой-то мере зависит от концентрации замедлителя, которая неизвестна до тех пор, пока не определена загрузка топлива. Обычно концентрация топлива оказывается столь малой, что оно практически не вытесняет замедлитель и  $L_M^2$  принимается как для чистого замедлителя. Заметим, что топливо может содержать некоторые добавки, например кислород в  $\text{UO}_2$ , но они должны считаться частью топлива, а не замедлителя.

Критическая масса  $m_F$  есть произведение  $N_F$  на массу одного ядра топлива ( $A/L_0$ , где  $A$  — относительная атомная масса топлива,  $L_0$  — число Авогадро) и на объем реактора  $V$ :

$$m_F = N_F A V / L_0. \quad (3.43)$$

Для плоского реактора объем, а также критическая масса бесконечны, и поэтому лучше говорить о критической массе на единицу объема, т. е. о критической концентрации  $m_F/V$ , или о критической массе на единицу поверхности пластины

$$m_F/S = N_F A 2a / L_0. \quad (3.44)$$

Здесь  $2a$  — действительная (не экстраполированная) ширина пластины.

В табл. 3.1 приведены некоторые ядерные данные, необходимые для расчета критичности этой простой модели.

Таблица 3.1

Данные для одногруппового расчета критичности\*

Вещество	$L^2, \text{см}^2$	$\sigma_a, \text{барн}$	$\sigma_{tr}, \text{барн}$	$\sigma_f, \text{барн}$	$\eta$	$\nu$	$n, \text{г/см}^3$
H <sub>2</sub> O	7,45	0,58	69,5	—	—	—	1
D <sub>2</sub> O	$1,16 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^{-3}$	25,9	—	—	—	1,1
<sup>9</sup> Be	432	$10 \cdot 10^{-3}$	5	—	—	—	1,85
C	2900	$3 \cdot 10^{-3}$	6	—	—	—	1,60
<sup>233</sup> U	—	523	—	476	2,29	2,51	18,7
<sup>235</sup> U	—	603	10	500	2,07	2,47	18,7
<sup>238</sup> U	—	2,75	8,3	—	—	—	18,7
<sup>239</sup> Pu	—	1200	9,7	690	2,09	2,91	—
<sup>10</sup> B	—	3840	—	—	—	—	2,34
V	—	759	—	—	—	—	2,34
<sup>113</sup> Cd	—	$2,1 \cdot 10^4$	—	—	—	—	8,37
<sup>135</sup> Xe	—	$2,7 \cdot 10^6$	—	—	—	—	—

\* Следует обратить внимание на то, что микроскопические сечения H<sub>2</sub>O и D<sub>2</sub>O относятся к молекулам при температуре 4° С. Плотность урана приведена для металла. Приведенные данные носят чисто иллюстративный характер, хотя их можно в какой-то мере использовать для анализа критических экспериментов.

### § 3.5. РАСЧЕТ КРИТИЧНОСТИ ДЛЯ ДРУГИХ ГЕОМЕТРИЙ

Описанный выше метод определения критичности плоского реактора может быть применен и к реакторам другой геометрической формы. Уравнение Гельмгольца

$$\Delta^2 \phi + B_c^2 \phi = 0 \quad (3.45)$$

должно быть решено для рассматриваемой геометрии с учетом соответствующих граничных условий. Затем  $\nu_c$  вычисляется по формуле

$$\frac{\nu_c \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + L^2 B_c^2} = 1. \quad (3.46)$$

Таким образом, единственное отличие от случая бесконечного плоского реактора связано с необходимостью решать уравнение Гельмгольца (3.45). Существенно, что в этом уравнении разделение переменных осуществляется в 11 координатных системах [1]. Здесь мы рассмотрим только несколько простых примеров.

**Сферический реактор без отражателя.** Как и в § 2.9,  $\phi$  есть функция только  $r$ . Уравнение (3.45) принимает вид

$$\frac{d^2}{dr^2} r \phi + B_c^2 r \phi = 0 \quad (3.47)$$

или

$$\phi = \phi_0 \sin(B_c r)/r. \quad (3.48)$$

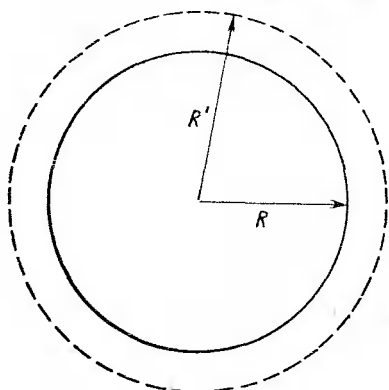
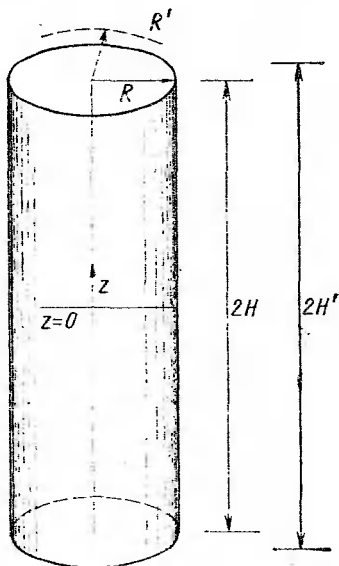


Рис. 3.3. Сферический реактор без отражателя

Рис. 3.4. Цилиндрический реактор без отражателя



Здесь  $\phi_0$  — константа, а слагаемое  $\cos(B_c r)/r$  опущено, поскольку оно расходится при  $r \rightarrow 0$ . Условие  $\phi(R') = 0$  означает, что

$$\sin(B_c R') = 0. \quad (3.49)$$

Таким образом, лапласиан сферического реактора (рис. 3.3) есть

$$B_c = \pi/R'. \quad (3.50)$$

**Конечный цилиндр.** Мы должны записать уравнение (3.45) в цилиндрической системе координат (рис. 3.4). В этом случае  $\phi$  зависит от  $\rho$  и  $z$ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + B_c^2 \phi = 0. \quad (3.51)$$

Это уравнение в частных производных решается стандартным методом разделения переменных:

$$\phi(\rho, z) = X(\rho) Z(z). \quad (3.52)$$

Подстановка этого выражения в (3.51) и деление на  $X(\rho) Z(z)$  дают

$$\frac{X''}{X} + \frac{1}{\rho} \frac{X'}{X} + \frac{Z''}{Z} = -B_c^2 \quad (3.53)$$

(штрихи означают дифференцирование по аргументу). Переменные здесь разделяются, так что

$$X'' + \frac{X'}{\rho} + \alpha^2 X = 0 \quad (3.54a)$$

и

$$Z'' + \beta^2 Z = 0, \quad (3.54b)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — константы, удовлетворяющие соотношению

$$\alpha^2 + \beta^2 = B_c^2. \quad (3.54b)$$

Соответствующее решение уравнения (3.54b), которое обращается в нуль на  $H'$  ( $H'$  — полувисота реактора), есть

$$Z = Z_0 \cos(\beta z), \quad (3.55)$$

причем

$$\beta = \pi/2H'. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.54a) есть уравнение Бесселя (см. приложение Г). Подстановка  $x = \alpha\rho$  приводит его к виду

$$X''(x) + X'(x) + \alpha^2 X(x) = 0. \quad (3.57)$$

Решение последнего уравнения есть

$$X = X_0 J_0(\alpha\rho) + X'_0 Y_0(\alpha\rho), \quad (3.58)$$

где  $X_0$  и  $X'_0$  — произвольные константы. Поскольку  $Y_0(\alpha\rho) \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $X'_0 = 0$ . Требуем, чтобы

$$J_0(\alpha R') = 0. \quad (3.59)$$

Первый нуль функции  $J_0(x)$  есть 2,405 (см. приложение Г). Поэтому

$$\alpha = 2,405/R'. \quad (3.60)$$

Итак, лапласиан конечного цилиндрического реактора есть

$$B_c^2 = \left(\frac{\pi}{2H'}\right)^2 + \left(\frac{2,405}{R'}\right)^2, \quad (3.61)$$

а поток в нем описывается выражением

$$\phi(\rho) = \phi_0 \cos \frac{\pi z}{2H'} J_0\left(\frac{2,405}{R'} \rho\right). \quad (3.62)$$

**Полусферический реактор.** В этом случае (рис. 3.5) поток  $\phi$  есть функция  $r$  и  $\theta$  — полярного угла и не зависит от азимутального угла. Тогда

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \phi. \quad (3.63a)$$

Опять воспользуемся разделением переменных:

$$\phi = X(r) \Theta(\theta), \quad (3.636)$$

так что уравнение (3.45) принимает вид

$$\Theta X'' + \frac{2\Theta X'}{r} + \frac{X}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta \Theta')] + B_c^2 X \Theta = 0. \quad (3.64)$$

После деления на  $\Theta$  переменные разделяются. Обозначая константу разделения  $\beta^2$ , имеем

$$X'' + \frac{2}{r} X' + \left( B_c^2 - \frac{\beta^2}{r^2} \right) X = 0 \quad (3.65)$$

и

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta \Theta')] + \beta^2 \Theta = 0. \quad (3.66)$$

При замене переменных

$$\mu = \cos \theta \quad (3.67)$$

уравнение (3.66) принимает более простую форму:

$$(1 - \mu^2) \Theta'' - 2\mu \Theta' + \beta^2 \Theta = 0. \quad (3.68)$$

Это уравнение есть уравнение Лежандра (см. приложение Г), решение которого существует при

$$\beta^2 = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.69)$$

Соответствующее решение этого уравнения обозначается  $P_l(\mu)$  ( $l$  — целое) и называется *полином Лежандра порядка  $l$* .

Чтобы  $\phi(r, \theta)$  обращалось в нуль при  $\theta = \pi/2$  для любого  $r$ , мы должны потребовать, чтобы

$$\Theta(\pi/2) = 0. \quad (3.70)$$

Этому условию удовлетворяют все  $P_{2n+1}$ , т. е. все полиномы Лежандра нечетного порядка. Однако из них только

$$P_1(\mu) = \mu = \cos \theta \quad (3.71)$$

положителен везде при  $0 < \theta < \pi/2$ . Таким образом,

$$\Theta(\theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad (3.72)$$

и

$$\beta^2 = 2, \quad (3.73)$$

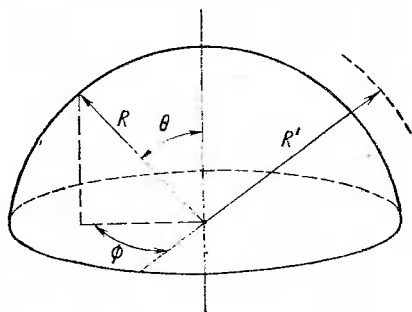


Рис. 3.5. Полусферический реактор без отражателя

так что уравнение (3.65) принимает вид

$$X'' + \frac{2}{r} X' + \left( B_c^2 - \frac{2}{r^2} \right) X = 0. \quad (3.74)$$

Решение этого уравнения есть сферическая функция Бесселя (см. приложение Г):

$$X = X_0 j_1(B_c r) = X_0 \left( \frac{\sin(B_c r)}{B_c^2 r^2} - \frac{\cos(B_c r)}{B_c r} \right). \quad (3.75)$$

Так как  $\phi(R')$  должна равняться нулю при всех  $\theta$ ,

$$j_1(B_c R') = 0. \quad (3.76)$$

Первый нуль функции  $j_1(x)$  имеет место при  $x = 4,49$ , поэтому

$$B_c = 4,49/R'. \quad (3.77)$$

Итак,

$$\phi(r, \theta) = \phi_0 j_1(4,49 r/R') \cos \theta. \quad (3.78)$$

Отметим, что лапласиан для этого случая ( $4,49/R'$ ) гораздо больше, чем для сферы ( $3,141/R'$ ) того же радиуса. Как показано в § 3.6, это связано с большими утечками нейтронов в случае полусферы.

### § 3.6. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УСЛОВИЯ КРИТИЧНОСТИ

Вернемся к уравнению

$$k = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + B_c^2 L^2} = 1 \quad (3.79)$$

для критического реактора. Попробуем, принимая во внимание сказанное в § 1.2, проинтерпретировать его с физической точки зрения. В § 3.4 числитель последнего выражения был представлен в виде двух сомножителей

$$\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{\nu \sigma_f}{\sigma_a} \frac{\Sigma_a^F}{\Sigma_a^F + \Sigma_a^M} = \eta f. \quad (3.80)$$

Если бы утечка из системы отсутствовала, произведение  $\eta f$ , очевидно, равнялось бы единице для критической системы. Поэтому дополнительный множитель в уравнении (3.79) должен каким-то образом описывать вероятность того, что нейтрон не покинет пределов системы (т. е. что он будет поглощен в ней). Значит, из уравнения (3.79) следует, что

Вероятность для нейтрона быть поглощенным $(1 + L^2 B_c^2)^{-1}$	×	Вероятность того, что поглощение произойдет в топливе $f$	×	Среднее число вторичных нейтронов на один поглощенный в топливе $\eta$	= 1	(3.81)
--	---	---	---	--	-----	--------

для критической системы. Этот результат физически очевиден.

Остается теперь доказать, что множитель  $(1 + L^2 B_c^2)^{-1}$  действительно представляет собой вероятность для нейтрона быть поглощенным в реакторе. Для этого рассмотрим сферический реактор без отражателя, для которого

$$\phi(r) = \phi_0 [\sin(B_c r)]/r. \quad (3.82)$$

Тогда

$$J(r) = -D \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\phi_0 D B_c \left( \frac{\cos(B_c r)}{r} - \frac{\sin(B_c r)}{r^2} \right). \quad (3.83)$$

Вероятность для нейтрона быть поглощенным в реакторе есть просто отношение числа поглощенных в реакторе нейтронов к полному числу рожденных. Очевидно, последняя величина есть сумма чисел поглощенных в реакторе и утекающих из него нейтронов:

$$P_a = \frac{\Sigma_a \int_V \phi(r) d^3 r}{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \Sigma_a \int_V \phi(r) d^3 r}. \quad (3.84)$$

Будем считать, что вместо интегрирования по внешней поверхности реактора мы можем интегрировать по экстраполированной поверхности, где  $\sin BR' = 0$  и  $\cos BR' = \cos \pi = -1$ . С учетом (3.83)

$$\int_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi R' \phi_0 D B_c. \quad (3.85)$$

Аналогично

$$\int_{V'} \phi(r) d^3 r = 4\pi \phi_0 R' / B_c, \quad (3.86)$$

так что

$$P_a = (1 + B_c^2 L^2)^{-1}, \quad (3.87)$$

как и предсказывалось. Хотя эти расчеты проведены для сферического реактора, они могут быть проделаны для реактора без отражателя любой формы. Результат не является, конечно, точным из-за замены истинной поверхности реактора экстраполированной.

### § 3.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЯ

Уравнение переноса нейтронов в реакторе — *однородное*. Поэтому решение может быть определено с точностью до произвольного множителя. В принципе амплитуда распределения потока нейтронов по реактору может иметь *любое* значение между нулем и бесконечностью. На самом деле она ограничена возможностями отвода тепла и разного рода температурными эффектами реактив-

ности\*. Но на любом уровне мощности работающий стационарный реактор должен быть критическим.

Чтобы определить амплитуду потока нейтронов, надо определить уровень мощности реактора. Так как при каждом делении выделяется около 200 *Мэв*, то

$$\text{Мощность} = \text{Полная плотность делений} \times 200 \text{ Мэв} \quad (3.88)$$

или (так как 1 *Мэв* = 1,6 · 10<sup>-13</sup> *вт · сек*)

$$P = \int_V \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) d^3r \times 3,20 \cdot 10^{-11} \text{ вт.} \quad (3.89)$$

Например, в случае однородного сферического реактора без отражателя в предположении, что  $R \approx R'$ , имеем

$$\int \phi(\mathbf{r}) d^3r = 4\pi \phi_0 R/B_c, \quad (3.90)$$

так что

$$P = 3,20 \cdot 10^{-11} (4\phi_0 \Sigma_f R^2) \text{ вт.} \quad (3.91)$$

Каким же образом можно изменить мощность реактора? Для этого используются поглощающие стержни, уже упоминавшиеся в § 3.3 в связи с проблемой компенсации изменения реактивности при выгорании. Допустим, что реактор работает на постоянном уровне мощности  $P$  (поток  $\phi$ ). При этом  $k = 1$  и  $\Lambda_0 = 0$ , причем поток изменяется по закону (см. уравнение (3.3))

$$\phi(t) \approx \exp(-\Lambda_0 t). \quad (3.92)$$

Для повышения уровня мощности необходимо увеличить  $k$  путем выведения стержней регулирования. Переписав уравнение (3.13) в виде

$$\Lambda_0 = v\Sigma_a (1 + B^2L^2) (1 - k), \quad (3.93)$$

можем отметить, что  $k > 1$  при  $\Lambda_0 < 0$ , и наоборот. После того как мощность реактора достигнет желаемого уровня, стержни регулирования должны вернуться в исходное положение, обеспечивая, таким образом,  $k = 1$ . Аналогично уровень мощности можно понизить, делая  $k$  меньшим единицы. Влияние  $\Lambda_0$  на кинетику реактора (с учетом запаздывающих нейтронов, которые пока еще не рассматривались) обсуждается в гл. 4.

### § 3.8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Другой подход к проблеме критичности основывается на использовании интегрального уравнения. Он отличается математической элегантностью. Но, что еще более важно, он легко обоб-

\* С изменением температуры в реакторе происходят различные процессы. Например, за счет теплового расширения меняется его объем. Кроме того, меняются используемые в однокрупном приближении сечения из-за смещения спектра нейтронов.

щается на случай, когда распределение нейтронов описывается в более точном приближении, чем используемое здесь одногрупповое.

В гомогенном реакторе поток нейтронов  $\phi(\mathbf{r})$  описывается интегральным уравнением

$$\phi(\mathbf{r}) = \nu \Sigma_f \int_V \phi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) d^3 r', \quad (3.94)$$

где  $G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$  — функция Грина. Иными словами,  $G$  есть решение уравнения

$$(-DV^2 + \Sigma_a) G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{R}') = 0, \quad (3.95)$$

где  $\mathbf{R}'$  по-прежнему экстраполированная граница реактора. Уравнение (3.95) является обобщением функции Грина для точечного источника в бесконечной среде (см. уравнение (2.104)) на случай конечной среды.

Легко видеть, что при воздействии на обе части уравнения (3.94) оператором  $-DV^2 + \Sigma_a$  получается уравнение, аналогичное (3.5). В самом деле,

$$\begin{aligned} (-DV^2 + \Sigma_a) \phi(\mathbf{r}) &= \nu \Sigma_f \int_V \phi(\mathbf{r}') (-DV^2 + \Sigma_a) G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) d^3 r' = \\ &= \int_V \phi(\mathbf{r}') \nu \Sigma_f \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^3 r' = \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Отметим, что  $\phi$ , определяемое уравнением (3.94), автоматически удовлетворяет граничным условиям

$$\phi(\mathbf{R}') = 0, \quad (3.97)$$

где  $\mathbf{R}'$  — экстраполированная граница.

Воспользуемся здесь приближением, применяемым в асимптотической теории реакторов [2]. В рамках этого приближения  $G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$  заменяется  $G_\infty(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$ , определяемой уравнением (2.104). Интегральное уравнение принимает в этом случае вид

$$\phi(\mathbf{r}) = \nu \Sigma_f \int \phi(\mathbf{r}') G_\infty(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d^3 r'. \quad (3.98)$$

Удобно воспользоваться преобразованием Фурье уравнения (3.98) (см. приложение В). Обозначим изображения  $\bar{\phi}(\mathbf{k})$  и  $\bar{G}_\infty(\mathbf{k})$ :

$$\bar{\phi}(\mathbf{k}) = \int d^3 r \phi(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}); \quad (3.99a)$$

$$\bar{G}_\infty(\mathbf{k}) = \int d^3 r G_\infty(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.99b)$$

Обратное преобразование есть

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \bar{\phi}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (3.99b)$$

Если умножить обе части уравнения (3.98) на  $\exp(\mathbf{ik} \cdot \mathbf{r})$ , проинтегрировать по  $d^3r$  и воспользоваться тем, что преобразование Фурье свертки функций  $f$  и  $g$ , имеющей вид

$$f * g \equiv \int d^3r' f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (3.100)$$

есть произведение изображений  $\overline{fg}$ , то

$$\overline{\phi}(\mathbf{k}) = v \Sigma_f \overline{\phi}(\mathbf{k}) \overline{G}_\infty(\mathbf{k}). \quad (3.101)$$

Из уравнения (3.101) следует, что  $\overline{\phi}(\mathbf{k})$  обращается в нуль, если только не выполняется условие

$$1 = v \Sigma_f \overline{G}_\infty(\mathbf{k}). \quad (3.102)$$

Это уравнение является уравнением критичности, а уравнение (3.98) может быть решено для определения потока.

Интересно сопоставить результаты этого параграфа с полученными ранее. Используя выражение для функции Грина (2.104), можно найти его изображение (см. приложение B):

$$\overline{G}_\infty(\mathbf{k}) = \overline{G}_\infty(k) = \frac{1}{4\pi D} \int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{\exp(-Kr)}{r} \frac{\sin kr}{kr} dr; \quad (3.103)$$

$$\overline{G}_\infty(k) = 1/[D(K^2 + k^2)]. \quad (3.104)$$

Подстановка этого выражения в (3.101) приводит к одностороннему уравнению критичности

$$1 = v \Sigma_f / [D(K^2 + k^2)], \quad (3.105)$$

решение которого есть

$$k^2 = B_m^2. \quad (3.106)$$

Уравнение (3.98) также может быть преобразовано в дифференциальное уравнение. При этом следует иметь в виду, что только при выполнении условия (3.106)  $\overline{\phi}(\mathbf{k}) \neq 0$ . Воздействуя на обе стороны уравнения (3.99в) оператором  $\nabla^2$ , получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k \overline{\phi}(\mathbf{k}) \nabla^2 \exp(-\mathbf{ik} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k \overline{\phi}(\mathbf{k}) (-k^2) \exp(-\mathbf{ik} \cdot \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} (-B_m^2) \int d^3k k \overline{\phi}(\mathbf{k}) \exp(-\mathbf{ik} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Здесь использовано равенство (3.106) и константа  $-B_m^2$  вынесена из-под знака интеграла, поскольку интеграл обращается в нуль, если  $k^2 \neq -B_m^2$ . Итак,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -B_m^2 \phi(\mathbf{r}), \quad (3.108)$$

т. е. в нашей упрощенной одногрупповой модели поток описывается уравнением Гельмгольца! Для получения более точного результата надлежит воспользоваться более корректным выражением для  $G$ . В любом случае поток нейтронов находится из решения уравнения (3.108). Для вычисления более точных значений  $G_\infty$  можно использовать модели, в которых учитывается энергетическая зависимость, или модели, основанные на теории переноса нейтронов. В этом случае можно получить более точное условие критичности.

### § 3.9. МНОГОЗОННЫЕ РЕАКТОРЫ

Как уже отмечалось в § 3.3, обычно реакторы не сооружают в виде однозонных гомогенных систем без отражателей. Чаще всего реактор представляет собой совокупность нескольких гомогенных зон\*, в каждой из которых вещество распределено равномерно. В этом случае диффузионное уравнение может быть решено отдельно для каждой зоны, как это делалось, например, в § 2.8, с последующей сшивкой решений на границах раздела.

Простейший случай, который мы сейчас рассмотрим, — плоская активная зона, окруженная бесконечным отражателем (рис. 3.6). Делящееся вещество содержится только в активной зоне. Присвоим активной зоне номер 1, а отражателю — 2, так что  $D_1, \Sigma_{a1}, \Sigma_{f1}$  и поток  $\phi_1$  относятся к активной зоне, а  $D_2, \Sigma_{a2}, \Sigma_{f2}$  и  $\phi_2$  — к отражателю.

Необходимо решить два диффузионных уравнения:

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1 + \Sigma_{a1} \phi_1 = \nu \Sigma_{f1} \phi_1; \quad (3.109a)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2 + \Sigma_{a2} \phi_2 = 0. \quad (3.109b)$$

Отметим, что первое из них может быть записано в виде

$$\nabla^2 \phi_1 + B_m^2 \phi_1 = 0, \quad (3.110)$$

причем

$$B_m^2 = (\nu \Sigma_{f1} - \Sigma_{a1}) / D_1 \quad (3.111)$$

совпадает с выражением для реактора без отражателя. Таким образом, материальный лапласиан одинаков для реакторов с отражателем и без отражателя, поскольку он определяется исключительно

\* Зона считается гомогенной, если физические неоднородности малы по сравнению со средним свободным пробегом нейтрона. Даже в случае невыполнения этого условия существуют различные схемы гомогенизации (см. § 7.3), которые позволяют использовать гомогенные методы расчета.

но свойствами активной зоны. Точно так же совпадают и выражения для потоков:

$$\phi_1(x) = \phi_0 \cos B_m x, \quad (3.112)$$

но граничные условия отличаются. Вместо обращения в нуль потока на экстраполированной границе мы должны потребовать теперь непрерывности потока и тока на границе раздела активной зоны и отражателя. Решение уравнения (3.110) есть

$$\phi_2(x) = \phi'_0 \exp(-x/L_2), \quad (3.113)$$

причем положительная экспонента в решении отброшена из-за ее расходимости на бесконечности\*.

Из условия непрерывности потока на границе раздела следует, что

$$\phi_0 \cos B_m a - \phi'_0 \exp(-a/L_2) = 0, \quad (3.114)$$

а из условия непрерывности тока —

$$\phi_0 D_1 B_m \sin B_m a - \phi'_0 (D_2/L_2) \exp(-a/L_2) = 0. \quad (3.115)$$

Уравнения (3.114) и (3.115) представляют собой систему двух однородных уравнений относительно  $\phi_0$  и  $\phi'_0$ . Нетривиальное решение этой системы существует, если определитель, составленный из ее коэффициентов, обращается в нуль, или

$$(D_2/L_2) \cos(B_m a) = D_1 B_m \sin(B_m a), \quad (3.116)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(B_m a) = D_2/(D_1 L_2 B_m). \quad (3.117)$$

Интересно, что при  $L_2 \rightarrow 0$  нейтроны не возвращаются обратно в активную зону, и мы опять имеем дело по существу с реактором без отражателя. В этом случае

$$\operatorname{tg} B_m a = \infty \quad (3.118a)$$

или

$$B_m = \pi/(2a), \quad (3.118b)$$

как и для реактора без отражателя (за исключением того, что при выкладках экстраполированная граница заменена истинной).

Уравнение (3.117) связывает величины  $a$  и  $B_m$ . Если задана толщина активной зоны, могут быть найдены  $B_m$  и критическая масса, как это изложено в § 3.4. Если же задан состав активной зоны, то может быть найдена критическая толщина  $2a$ . Решая уравнение (3.117), имеем

$$a = \frac{1}{B_m} \operatorname{arctg} \frac{D_2}{D_1 L_2 B_m}. \quad (3.119)$$

Экономия за счет отражателя  $\delta$  определяется в данном случае как величина, на которую уменьшается полутолщина критического

\* Отметим, что мы находим поток только для  $x > 0$ . В силу симметрии  $\phi(x) = \phi(-x)$ . Как и прежде,  $\phi_0$  и  $\phi'_0$  — произвольные константы.

реактора при введении отражателя. Так как реактор без отражателя того же состава имел бы полутолщину

$$a_B = \pi/(2B_m) - z_0, \quad (3.120)$$

то

$$\delta = \frac{\pi}{2B_m} - z_0 - \frac{1}{B_m} \operatorname{arctg} \frac{D_2}{D_1 L_2 B_m}. \quad (3.121)$$

Для плоского реактора с отражателем конечной толщины  $b$  процедура расчета такая же. Основная разница состоит в том, что условие ограниченности потока на бесконечности заменяется условием, что  $\phi_2(a + b + z_0) = 0$  (т. е. обращаем поток в нуль на экстраполированной границе реактора). В этом случае в выражении для потока нейтронов в отражателе  $\phi_2$  должны быть сохранены обе экспоненты: как положительная, так и отрицательная.

Другая интересная проблема связана с использованием активной зоны, состоящей из двух зон с разными свойствами. Обычно это делается для выравнивания поля энерговыделения (см. § 3.3). Рассмотрим сферический трехзонный реактор; две зоны содержат делящееся вещество, а третья является бесконечным отражателем (рис. 3.7). Поток нейтронов в этом случае описывается уравнениями:

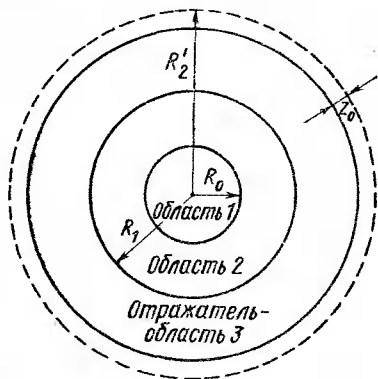


Рис. 3.7. Сферический реактор с отражателем и двухслойной активной зоной

$$\frac{d^2}{dr^2} (r \phi_1) + B_1^2 (r \phi_1) = 0; \quad (3.122a)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (r \phi_2) + B_2^2 (r \phi_2) = 0; \quad (3.122b)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (r \phi_3) - \frac{1}{L_3^2} (r \phi_3) = 0 \quad (3.123)$$

$B_1^2$  и  $B_2^2$  определяются уравнением (3.111)). Для зоны 1 решение есть

$$\phi_1 = A_1 \frac{\sin(B_1 r)}{B_1 r}. \quad (3.124a)$$

Для зоны 2 решение содержит два слагаемых:

$$\phi_2 = A_2 \frac{\sin(B_2 r)}{B_2 r} + C_2 \frac{\cos(B_2 r)}{B_2 r}, \quad (3.124b)$$

так как она не включает в себя начала координат. Наконец, в отражателе

$$\phi_3 = \frac{A_3 \exp(-r/L_3)}{r/L_3} + \frac{C_3 \exp(r/L_3)}{r/L_3}. \quad (3.124B)$$

На трех границах выполняются граничные условия:

- 1) непрерывность потока и тока при  $r = R_0$ ;
- 2) непрерывность потока и тока при  $r = R_1$ ;
- 3)  $\phi_3(R_2) = 0$ .

С их помощью получается условие критичности, представляющее собой требование обращения в нуль определителя пятого порядка. С ростом числа зон возрастает и порядок определителя.

Приведенное здесь одnogрупповое описание реактора с отражателем не позволяет учесть одну из его важнейших особенностей — всплеск энерговыделения вблизи границы активной зоны. Физически этот эффект обусловлен быстрыми нейтронами, которые влетают в отражатель, замедляются в нем и возвращаются обратно в активную зону с тепловыми энергиями. Для описания этого эффекта требуется по крайней мере двухгрупповое приближение.

## Задачи

- 3.1. Является ли реактор надкритическим или подкритическим, если  $B_m^2 > B_g^2$ ?
- 3.2. Вычислить критическую массу плоского реактора толщиной 20 см без отражателя с топливом, состоящим из равных количеств  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ , и замедлителем, содержащим равные количества обычной и тяжелой воды.
- 3.3. Вычислить массу  $^{235}\text{U}$ , обеспечивающую  $k = 1,1$  в плоском реакторе без отражателя. Затем вычислить количество  $^{10}\text{B}$ , которое нужно однородно добавить, чтобы сделать реактор критическим.
- 3.4. Вычислить размеры цилиндрического реактора заданного состава с минимальной критической массой.
- 3.5. Вычислить геометрический лапласиан прямоугольного параллелепипеда со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ .
- 3.6. Вычислить лапласиан квадранта сферы (без отражателя).
- 3.7. Вычислить выгорание топлива в реакторе на каждый выработанный квт·ч энергии.
- 3.8. Вычислить  $\delta$  для плоского реактора толщиной  $2a$ , окруженного отражателем толщиной  $b$ .
- 3.9. Получить условие критичности для двухзонного сферического реактора, вывод которого начат в § 3.9

## Список литературы

1. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Ferziger J., Zweifel P. The Theory of Neutron Slowing Down in Nuclear Reactors. N. Y., Pergamon Press, 1966.

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

### § 4.1. ВВЕДЕНИЕ

Теперь перейдем к рассмотрению поведения потока нейтронов во времени и проблем управления реактором. Эффекты, которые выводят реактор из критического состояния, разделяются на два типа в зависимости от продолжительности их воздействия. С выгоранием ядерного топлива и накоплением продуктов деления связаны медленные изменения реактивности, в то время как температурные коэффициенты реактивности, случайные флуктуации по той или иной причине или преднамеренные воздействия на реактивность в целях повышения или понижения уровня мощности носят кратковременный характер. Все эти эффекты уже упоминались в § 3.3, а сейчас мы их рассмотрим более подробно. Остановимся сначала на кратковременных изменениях, которые обычно называют *кинетикой реактора*.

### § 4.2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КИНЕТИКА РЕАКТОРА \*

Начнем с диффузионного уравнения (2.50). Будем для простоты считать, что сечения не зависят от времени\*\*. Тогда уравнение (2.50) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = (DV^2 - \Sigma_a + v\Sigma_f) \phi(\mathbf{r}, t). \quad (4.1)$$

Здесь источник  $S(\mathbf{r}, t)$  заменен источником деления  $v\Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t)$ . Чтобы решить это уравнение, разложим  $\phi(\mathbf{r}, t)$  в ряд по полной системе функций  $x_n(\mathbf{r})$ , которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца с соответствующими граничными условиями (обращение в нуль на экстраполированной границе реактора):

$$(\nabla^2 + B_n^2) x_n(\mathbf{r}) = 0; \quad (4.2a)$$

$$x_n(\mathbf{R}') = 0, \quad (4.2b)$$

т. е.

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n A_n(t) x_n(\mathbf{r}). \quad (4.3)$$

\* Это приближение иногда называют *точечной моделью реактора*.

\*\* Здесь по-прежнему используется одгрупповое приближение. Кроме того, в этом параграфе не учитывается влияние запаздывающих нейтронов.

Подстановка этого разложения в уравнение (4.1) дает дифференциальное уравнение для  $A_n(t)$ :

$$\sum_n x_n(\mathbf{r}) \left[ \frac{1}{v} \dot{A}_n(t) + (DB_n^2 - \nu \Sigma_f + \Sigma_a) A_n(t) \right] = 0. \quad (4.4)$$

В силу линейной независимости  $x_n$  выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль для любого  $n$ , так что

$$\frac{1}{v} \dot{A}_n(t) + (DB_n^2 - \nu \Sigma_f + \Sigma_a) A_n(t) = 0. \quad (4.5)$$

Решение этого уравнения есть

$$A_n(t) = A_n(0) \exp \left[ -\bar{v} (DB_n^2 - \nu \Sigma_f + \Sigma_a) t \right]. \quad (4.6)$$

Отметим, что

$$l_a = \lambda_a \bar{v} = 1/\bar{v} \Sigma_a \quad (4.7)$$

— среднее время жизни нейтрона до его поглощения. Поскольку мы уже определили  $DB^2$  как сечение утечки\*, величина

$$l_{\text{эф}} = \frac{1}{\bar{v} (\Sigma_a + DB^2)} = \frac{1}{\bar{v} \Sigma_a (1 + L^2 B^2)} \quad (4.8)$$

представляет среднее время жизни нейтрона до его поглощения или утечки. Приписывая  $l_{\text{эф}}$ , связанному с  $B_n^2$ , индекс  $n$ , можно переписать уравнение (4.6) в виде

$$A_n(t) = A_n(0) \exp \left[ (k_n - 1) t / l_{\text{эф}}^{(n)} \right]. \quad (4.9a)$$

Мы ввели здесь по аналогии с уравнением (3.27)

$$k_n = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + L^2 B_n^2}; \quad (4.9б)$$

$$l_{\text{эф}}^{(n)} = \frac{1}{\bar{v} \Sigma_a (1 + L^2 B_n^2)}. \quad (4.9в)$$

Иногда вводят обозначение  $\delta k_n = k_n - 1$ . Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$\dot{A}_n(t) - \frac{\delta k_n}{l_{\text{эф}}^{(n)}} A_n(t) = 0. \quad (4.10)$$

Отметим, что  $k_n$  образуют монотонную последовательность

$$k = k_0 > k_1 > k_2 > \dots, \quad (4.11)$$

так как  $B_n^2$  увеличивается с возрастанием  $n$  (см., например, уравнение (3.11)). (Стоит напомнить, что для двух- и трехмерных систем

\* Введены уже три различных символа для геометрического лапласиана:  $B_g$ ,  $B_c$  и  $B_0$ . Введем вместо них один —  $B$ .

индекс  $n$  представляет собой сокращенную запись двух или трех индексов, каждый из которых связан с одной переменной. Но и в этом случае  $B_n^2$  могут быть расположены в возрастающей последовательности, так что (4.11) будет иметь место.) Из уравнения (4.6) непосредственно следует, что при больших значениях  $t$  слагаемое с  $n = 0$  является определяющим. Поэтому отбросим все слагаемые, кроме  $n = 0$ , и запишем

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A_0(0) x_0(\mathbf{r}) \exp[(k-1) t / l_{\text{эф}}]. \quad (4.12)$$

Если  $k$  сильно отличается от единицы, описанное приближение неприемлемо, и требуется другой подход.

Прежде всего определим масштаб величины высших мод в (4.3). Предположим, например, что мы рассматриваем критический реактор с  $k = 1$ . Тогда

$$DB^2 + \nu \Sigma_f + \Sigma_a = 0. \quad (4.13)$$

С помощью этого соотношения можно переписать (4.6) в виде

$$A_n(t) = A_n(0) \exp[-\bar{\nu} D (B_n^2 - B^2) t]. \quad (4.14)$$

Обычно  $D(B_n^2 - B^2) \approx n^2 \text{ см}^{-1}$  для тепловых нейтронов (см., например, гл. 3). Тогда, поскольку  $\bar{\nu} \approx 10^5 \text{ см/сек}$ ,

$$A_n(t) = A_n(0) \exp(-10^5 t n^2). \quad (4.15)$$

Очевидно, спад высших мод ( $n \geq 1$ ) происходит очень быстро. На самом деле он происходит столь быстро, что нарушаются условия, при которых справедлив закон Фика (2.49а).

Итак, можно сказать, что высшие моды ( $n \geq 1$ ) в (4.3) затухают очень быстро. Кроме того, слагаемые с  $n \geq 1$  в (4.3) не в состоянии соответствующим образом описать изменение потока за очень малое время\*. Для описания таких процессов нужны более точные приближения, чем диффузионное. Обычно нецелесообразно вычислять высшие слагаемые в (4.3).

Предположим, что  $k = 1,001$ . Это очень небольшое отклонение от критичности, однако в соответствии с (4.12) при  $l_{\text{эф}} = 10^{-3} \text{ сек}$  (типичное значение для реактора на тепловых нейтронах с тяжеловодным или графитовым замедлителем)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A_0(0) x_0(\mathbf{r}) \exp(t), \quad (4.16)$$

т. е. мощность реактора возрастает в  $e$  раз за  $1 \text{ сек}$ \*\* . Это очень быстрый рост, особенно для такого небольшого отклонения от критичности, и реактор было бы очень трудно удерживать в стационарном состоянии, если бы не влияние запаздывающих нейтро-

\* Здесь под *очень малым временем* понимается такое, которое не может быть описано в рамках асимптотической теории ( $n=0$ ). Кстати, для *очень* больших реакторов  $D(B_n^2 - B^2) \ll n^2 \text{ см}^{-1}$ , и высшие моды могут описываться достаточно точно в диффузионном приближении.

\*\* В реакторе с обогащенным ураном, где  $l_{\text{эф}}$  может быть порядка  $10^{-5} \text{ сек}$ , скорость нарастания мощности еще выше.

нов. Оказывается, что из 2,5 нейтронов, высвобождаемых при делении, 99,3% испускаются в момент деления (*мгновенные нейтроны*), а остальные 0,7% — с запаздыванием от долей секунды до почти минуты. Запаздывающие нейтроны не играют никакой роли при рассмотрении стационарного состояния, в частности при расчете критичности. Это объясняется тем, что в каждый данный момент стационарной работы реактора дефицит в 0,7% нейтронов покрывается за счет запаздывающих нейтронов, образованных в предшествующее время. Однако в случае изменения потока со временем, например возрастания, число запаздывающих нейтронов, появляющихся в каждый данный момент, меньше числа нейтронов, теряющихся в данный момент за счет запаздывания их испускания. Поэтому для правдоподобного описания кинетики реактора в рассмотрение должны быть включены запаздывающие нейтроны.

В табл. 4.1 приводятся характеристики *шести групп* запаздывающих нейтронов, включая выход нейтронов каждой группы и постоянные распада их предшественников (период полураспада =  $= \lambda_i^{-1}$ ) [1]\*. Таким образом, в уравнении (4.12) под  $l_{эф}$  следует понимать не время жизни мгновенных нейтронов  $10^{-8}$  сек, а среднее время жизни всех нейтронов, мгновенных и запаздывающих, т. е.

$$l \approx (1 - \beta) l_{эф} + \sum_i \beta_i l_i, \quad (4.17)$$

где  $\beta = \sum_i \beta_i$ . Хотя  $\beta$  очень мало, но  $l_i$  столь велики, что

$$l \approx 0,1 \text{ сек.} \quad (4.18)$$

Поэтому при  $k = 1,001$  вместо (4.16) имеем

$$\phi(r, t) = A_0(0) x_0(r) \exp(t/100), \quad (4.19)$$

т. е. мощность реактора увеличивается в  $e$  раз за 100 сек. При таком темпе изменения мощности реактором, очевидно, можно управлять.

Таблица 4.1

Характеристики групп запаздывающих нейтронов при делении  $^{235}\text{U}$  тепловыми нейтронами ( $\beta = 0,0065$ ;  $\nu = 2,43$ )

Группа	Постоянная распада $\lambda_i, \text{сек}^{-1}$	Относительный выход $\beta_i/\beta$	Средняя энергия запаздывающего нейтрона, кэв
1	0,0124	0,033	250 ± 50
2	0,0305	0,219	550 ± 100
3	0,111	0,196	550 ± 100
4	0,301	0,395	600 ± 200
5	1,14	0,115	400 ± 70
6	3,01	0,042	—

\* Средняя энергия запаздывающих нейтронов меньше средней энергии мгновенных нейтронов. При рассмотрении задач с энергетической зависимостью различие их энергетических спектров необходимо принимать во внимание.

### § 4.3. УРАВНЕНИЯ КИНЕТИКИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ НЕЙТРОНАМИ \*

Запаздывающие нейтроны каждой из перечисленных в табл. 4.1 групп испускаются ядрами-предшественниками сразу же после того, как они претерпят  $\beta$ -распад. Обозначим концентрации предшественников  $i$ -й группы запаздывающих нейтронов  $C_i(\mathbf{r}, t)$ ; она описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t), \quad i=1, \dots, 6. \quad (4.20)$$

Здесь слагаемое  $\lambda_i C_i$  характеризует обычный радиоактивный распад, а  $\beta_i \nu \Sigma_f \phi$  — образование предшественников при делении. Очевидно, пространственное распределение  $C_i(\mathbf{r}, t)$  такое же, как и  $\phi(\mathbf{r}, t)$ . В этом можно убедиться, рассматривая стационарное распределение (индекс 0)

$$C_{i0}(\mathbf{r}) = (\beta_i / \lambda_i) \nu \Sigma_f \phi_0(\mathbf{r}). \quad (4.21)$$

В нашей модели зависимость потока от времени и пространства разделяется так, что пропорциональность пространственного распределения  $C_i(\mathbf{r}, t)$  и  $\phi(\mathbf{r}, t)$  имеет место для любых  $t$ .

Уравнение (4.20) надо рассматривать вместе с уравнением

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) &= [D\nabla^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) \nu \Sigma_f] \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) = \\ &= [-DB^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) \nu \Sigma_f] \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (4.22a)$$

которое записано в соответствии с сформулированным в § 4.2 положением о том, что решение определяется модой с наименьшим лапласианом. Это уравнение часто записывают с использованием  $\delta k$ ,  $l_{\text{эф}}$  [см. уравнения (4.8) и (3.27)] и плотности нейтронов  $n = \phi / \bar{v}^{**}$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\delta k}{l_{\text{эф}}} n - \beta \frac{k}{l_{\text{эф}}} n + \sum_i \lambda_i C_i. \quad (4.22б)$$

В этих обозначениях уравнение (4.20) имеет вид

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\lambda_i C_i + \beta_i \frac{k}{l_{\text{эф}}} n. \quad (4.22в)$$

\* В случае реактора с циркулирующим топливом уравнения данного параграфа должны быть модифицированы. В таком реакторе топливо в форме суспензии или сплава циркулирует через активную зону и теплообменник. Поэтому часть запаздывающих нейтронов испускается вне активной зоны. Здесь кинетика такого реактора не рассматривается.

\*\* Раньше мы использовали символ  $\rho$  для обозначения плотности нейтронов, как это принято в теории переноса, но теперь будем обозначать ее  $n$ , чтобы избежать путаницы с реактивностью.

Будем искать решения уравнений (4.22б) и (4.22в) в виде

$$C_i(\mathbf{r}, t) = \tilde{C}_i \exp(\omega t); \quad (4.23a)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\phi} \exp(\omega t). \quad (4.23б)$$

Их подстановка в уравнения (4.22б) и (4.22в) дает

$$(\omega + \lambda_i) \tilde{C}_i = \beta_i \nu \Sigma_f \tilde{\phi}; \quad (4.24a)$$

$$\left\{ \frac{\omega}{v} + \Sigma_a (1 + L^2 B^2) [1 - (1 - \beta) k] \right\} \tilde{\phi} = \sum_i \lambda_i \tilde{C}_i. \quad (4.24б)$$

Исключив  $\tilde{C}_i$  из последних двух уравнений, получим

$$\left\{ \frac{\omega}{v} + \Sigma_a (1 + L^2 B^2) [1 - (1 - \beta) k] \right\} \tilde{\phi} = \nu \Sigma_f \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i} \tilde{\phi}. \quad (4.25)$$

Разделим обе части уравнения на  $\Sigma_a (1 + L^2 B^2)$ , сократим на  $\tilde{\phi}$  и воспользуемся определением (4.8):

$$[\omega l_{\text{эф}} + (1 - k) + \beta k] = k \sum_i \frac{\beta_i \lambda_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (4.26a)$$

Таким образом,

$$\frac{\omega l_{\text{эф}}}{k} - \rho = \sum_i \beta_i \left( \frac{\lambda_i}{\omega + \lambda_i} - 1 \right) = -\omega \sum_i \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (4.26б)$$

Здесь использована *реактивность*, введенная в гл. 3:

$$\rho = (k - 1)/k. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.26б) может быть представлено в несколько более удобной форме:

$$\rho = \frac{\omega l_{\text{эф}}}{k} + \omega \sum_i \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i} \quad (4.28)$$

или, так как в соответствии с (4.27)

$$k = 1/(1 - \rho), \quad (4.29)$$

$$\rho = \frac{\omega l_{\text{эф}}}{1 + \omega l_{\text{эф}}} + \frac{\omega}{1 + \omega l_{\text{эф}}} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (4.30)$$

Выше предполагалось, что учитывается  $N$  групп запаздывающих нейтронов. Следует отметить, что  $k$  должно быть близко к единице\*,

\* Можно показать, что рассматриваемое приближение ( $n = 0$  в уравнении (4.3)) оказывается неприемлемым, если  $k$  существенно отличается от единицы.

так что при  $\omega$ , близком к нулю, уравнение (4.28) может быть приближенно записано в виде

$$\rho = \omega l_{\text{эф}} + \omega \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i}. \quad (4.31)$$

Вернемся к уравнению (4.30) и вычислим  $\omega$  как функцию  $\rho$ . Уравнение (4.30) представляет собой уравнение  $(N + 1)$ -й степени по  $\omega$ , так что при заданном  $\rho$  должны получить  $N + 1$  решение  $\omega$ . Наибольшее (алгебраически) из них соответствует асимптотическому решению, которое получается при больших значениях  $t$

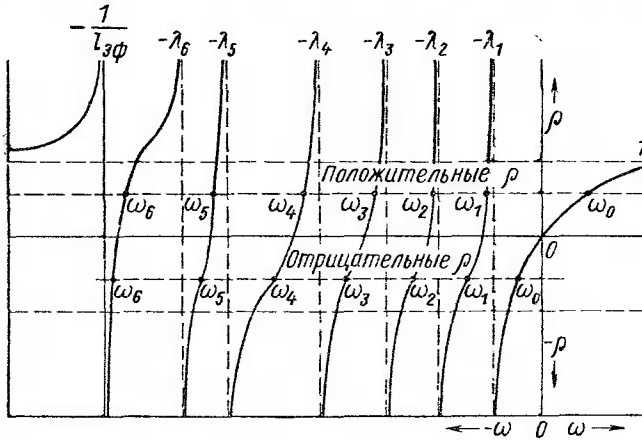


Рис. 4.1. Зависимость  $\omega$  от  $\rho$

(в данном случае это доли секунды, так что остается только этот асимптотический член, который обычно и имеет практическое значение).

Из уравнения (4.30) видно, что  $\omega$  представляет собой многозначную функцию  $\rho$ , причем в точках  $\omega = -\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  и  $\omega = -1/l_{\text{эф}}$  она имеет разрывы на бесконечности. Кроме того, при  $\omega \rightarrow \infty$   $\rho \rightarrow 1$  асимптотически. Связь между  $\omega$  и  $\rho$  графически изображена на рис. 4.1.

Итак, уравнение (4.30) имеет  $N + 1$  решение; назовем их  $\omega_i$ , так чтобы  $\omega_i$  убывали с ростом  $i$ , т. е.

$$\omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_N. \quad (4.32)$$

Тогда поток имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi_0 \exp(\omega_0 t) + \phi_1 \exp(\omega_1 t) + \dots + \phi_N \exp(\omega_N t) \rightarrow \\ &\rightarrow \phi_0 \exp(\omega_0 t), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где стрелка обозначает асимптотическое решение. В силу сделанных ранее предположений все  $\phi_i$  имеют одну и ту же пространственную зависимость (т. е.  $\phi_0$ ), различаясь только по амплитуде.

Величина  $\omega_0^{-1} = T$  называется *периодом реактора* (или иногда *установившимся периодом*). Если подставить  $\omega = 1/T$  в уравнение (4.28), то получим

$$\rho = \frac{l_{\text{эф}}}{kT} + \sum_i \frac{\beta_i}{1 + \lambda_i T}. \quad (4.34)$$

Это соотношение называется *формулой обратных часов*. *Обратный час* — единица реактивности  $\rho$ , для которой период реактора равен 1 ч (т. е. реактивность, которая получается, если в уравнение (4.34) подставить  $T = 3600$  сек). Однако следует отметить, что реактивность в два обратных часа не соответствует установившемуся периоду 30 мин. Эта странная нелинейная единица, к счастью, в настоящее время не используется.

Уравнение (4.33) следует интерпретировать следующим образом. Пусть реактор работает в критическом состоянии с потоком  $\phi(\mathbf{r}, t) = x_0(\mathbf{r})$ , т. е.  $T = \infty$ . В какой-то момент времени, скажем  $t = 0$ , реактивность меняется на некоторую величину. В результате поток изменяется в соответствии с уравнением (4.33а), а спустя некоторое время\* — (4.33б). По скорости изменения  $\phi$  с помощью уравнения (4.34) можно определить период  $T = 1/\omega$ .

#### § 4.4. МНОГООРУВЕНЧАТЫЙ ПРОЦЕСС ОБРАЗОВАНИЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ

В § 4.3 мы рассматривали запаздывающие нейтроны, испускаемые в момент  $\beta$ -распада осколка деления. Предположим, что запаздывающий нейтрон испускается в конце серии  $\beta$ -распадов осколка деления. Такой подход можно рассматривать как небольшую модификацию развитого выше метода.

Предположим, например, что запаздывающие нейтроны испускаются в момент второго  $\beta$ -распада некоего осколка деления. Иначе говоря, предполагаем, что  $\beta$ -активный осколок  $A$  распадается с постоянной распада  $\lambda'$  с образованием ядра-предшественника запаздывающих нейтронов  $C$ , которое испускает нейтрон с постоянной распада  $\lambda$ . Если это единственный процесс, приводящий к образованию запаздывающих нейтронов, то можно написать уравнения кинетики для ядер  $A$  и  $C$  (обозначая их концентрации теми же буквами):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\lambda' A + \beta v \Sigma_f \phi; \quad (4.35a)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda C + \lambda' A. \quad (4.35b)$$

Эти уравнения надо решать совместно с уравнением для потока

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = [-DB^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) v \Sigma_f] \phi + \lambda C. \quad (4.35в)$$

\* Как показано в § 4.6, это время составляет доли секунды.

Как и ранее [см. уравнение (4.23)], предположим, что величины  $A$ ,  $C$ ,  $\phi$  экспоненциально зависят от времени:

$$\left. \begin{aligned} A &= \tilde{A} \exp(\omega t); \\ C &= \tilde{C} \exp(\omega t); \\ \phi &= \tilde{\phi} \exp(\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Подставим (4.36) в (4.35) и аналогично (4.24) получим

$$(\omega + \lambda') \tilde{A} = \beta v \Sigma_f \tilde{\phi}; \quad (4.37a)$$

$$(\omega + \lambda) \tilde{C} = \lambda' \tilde{A}; \quad (4.37b)$$

$$\left\{ \frac{\omega}{v} + \Sigma_a (1 + L^2 B^2) [1 - (1 - \beta) k] \right\} \tilde{\phi} = \lambda \tilde{C} \quad (4.37b)$$

или, исключая  $A$  и  $C$ ,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\omega}{v} + \Sigma_a (1 + L^2 B^2) [1 - (1 - \beta) k] \right\} \tilde{\phi} = \\ = \frac{\beta v \Sigma_f \lambda \lambda'}{\lambda' - \lambda} \tilde{\phi} \left( \frac{1}{\omega + \lambda} - \frac{1}{\omega + \lambda'} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Очевидно, уравнение (4.38) имеет такую же математическую форму, как (4.25) с двумя группами запаздывающих нейтронов. Однако в правой части (4.38) множители, стоящие вместо долей запаздывающих нейтронов, могут быть отрицательными. Если какая-либо из постоянных распада мала (т. е.  $\lambda \gg \lambda'$  или  $\lambda' \gg \lambda$ ), то (4.38) сводится к (4.25) с одной группой запаздывающих нейтронов.

Уравнение (4.38) можно обобщить на случай произвольного числа цепочек различной длины, приводящих к образованию запаздывающих нейтронов. В этом случае появляется уравнение вида (4.25), причем эффективные доли запаздывающих нейтронов могут быть отрицательными.

Экспериментальное изучение запаздывающих нейтронов обычно не включает **детального** рассмотрения предшественников запаздывающих нейтронов и цепочек, которые приводят к их образованию. Как правило, образец, содержащий делящееся вещество, облучается известным потоком нейтронов в реакторе. Измеренная затем нейтронная активность образца используется для подбора таких  $\beta$ ,  $\lambda$  и числа групп запаздывающих нейтронов, чтобы наилучшим образом описать результаты экспериментов. При подобной интерпретации экспериментальных данных отрицательные значения долей запаздывающих нейтронов не получались. Однако их приходилось вводить при описании запаздывающих нейтронов в реакторах с тяжелой водой и бериллием [1]. Поскольку дейтерий и бериллий имеют заметные сечения реакции  $(\gamma, n)$ , запаздывающее

$\gamma$ -излучение осколков деления играет роль дополнительных групп запаздывающих нейтронов. В опубликованных данных по запаздывающим нейтронам бериллия можно найти отрицательные значения  $\beta$ , что объясняется приведенным выше анализом.

#### § 4.5. ОДНА ГРУППА ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ \*

Для иллюстрации численных расчетов, которые придется проводить при анализе характерных переходных процессов, предположим, что мы имеем дело с единственной группой запаздывающих нейтронов с параметрами

$$\beta = \sum_i \beta_i = 0,0065 \quad (4.39a)$$

и

$$\lambda = \left( \frac{1}{\beta} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right)^{-1} = 0,077 \text{ сек}^{-1}. \quad (4.39b)$$

Хотя это приближение является весьма грубым, оно позволяет получить качественное представление о поведении ядерного реактора.

Итак, перепишем уравнение (4.31) в виде

$$\rho = \omega l_{эф} + \beta \omega / (\omega + \lambda). \quad (4.40)$$

Это уравнение является квадратным по  $\omega$ . Его решение есть

$$\omega_{\pm} = -\frac{\beta - \rho + \lambda l_{эф}}{2l_{эф}} \left[ 1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\lambda\rho l_{эф}}{(\beta - \rho + \lambda l_{эф})^2}} \right]. \quad (4.41)$$

Чтобы упростить это выражение, положим, что  $l_{эф} \approx 10^{-3}$  сек,  $\lambda \approx 0,08 \text{ сек}^{-1}$ , а  $\rho$  — порядка  $10^{-3}$  (если  $\rho \geq \beta$ , реактор мгновенно критичен, т. е. критичен на одних мгновенных нейтронах). Даже при  $\rho - \beta \approx 10^{-2}$

$$(\beta - \rho + \lambda l_{эф})^2 \gg 4\lambda\rho l_{эф}, \quad (4.42)$$

так что уравнение (4.41) может быть переписано приблизительно так:

$$\omega_{\pm} = -\frac{\beta - \rho + \lambda l_{эф}}{2l_{эф}} \left[ 1 \mp \frac{2l_{эф}\lambda\rho}{(\beta - \rho + \lambda l_{эф})^2} \right] \quad (4.43)$$

или

$$\omega_{+} = \frac{\lambda\rho}{\beta - \rho + \lambda l_{эф}} \quad (4.44a)$$

и

$$\omega_{-} = -\frac{\beta - \rho + \lambda l_{эф}}{l_{эф}}. \quad (4.44b)$$

\* Очевидно, результаты этого параграфа справедливы для времени, малого по сравнению с временем жизни предшественников самой короткоживущей группы запаздывающих нейтронов.

В последних выражениях можно пренебречь  $\lambda l_{эф}$  по сравнению с  $\beta - \rho$ , если реактор не близок к мгновенной критичности, т. е.

$$\omega_+ = \lambda \rho / (\beta - \rho); \quad (4.45a)$$

$$\omega_+ = \lambda \$ / (1 - \$); \quad (4.45б)$$

$$\omega_- = - \frac{1 - \$}{l_{эф} / \beta}. \quad (4.45в)$$

Здесь введена реактивность в долларах  $\$$  ( $\$ = \rho/\beta$ ). Цент — естественно, одна сотая часть доллара\*.

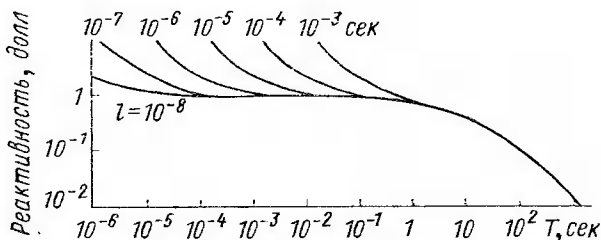


Рис. 4.2. Реактивность как функция асимптотического периода  $T$  при различном времени жизни нейтронов  $l$  для  $^{235}\text{U}$  (рассчитано по формуле (4.41))

Таким образом, поток в рассматриваемом приближении описывается выражением

$$\phi(t) = \phi_+ \exp\{[\lambda \$ / (1 - \$)] t\} + \phi_- \exp\{-[1 - \$] / (l_{эф} / \beta)] t\}. \quad (4.46)$$

Так как  $\omega_+ > \omega_-$ , установившийся период равен

$$T = 1/\omega_+ = (1 - \$) / (\lambda \$). \quad (4.47)$$

Аналогично

$$C(t) = C_+ \exp\{[\lambda \$ / (1 - \$)] t\} + C_- \exp\{-[1 - \$] / (l_{эф} / \beta)] t\}. \quad (4.48)$$

Область применимости полученного приближения на рис. 4.2 расположена при значениях реактивности, меньших 1 долл.

#### § 4.6. ИЗМЕРЕНИЕ РЕАКТИВНОСТИ. УСТАНОВИВШИЙСЯ ПЕРИОД

Предположим, что в момент времени  $t = 0$  происходит изменение реактивности в системе, находившейся в течение достаточно долгого времени в критическом состоянии. Тогда при простом измерении потока или мощности в функции от времени получаем

\* При реактивности, близкой к 1 долл., для анализа следует пользоваться уравнением (4.41) (см., например, рис. 4.2).

значение установившегося периода (по-прежнему предполагается, что имеется одна группа запаздывающих нейтронов):

$$T = (1 - \beta)/(\lambda\beta), \quad (4.49)$$

так что реактивность может быть определена, поскольку  $\lambda$  известно. Допустим, мы рассматриваем малое изменение реактивности, скажем, 1 цент. Определим скорость изменения переходной части потока:

$$\omega_- = -\frac{0,99 \cdot 0,0065}{0,001} = -6,43 \text{ сек}^{-1}; \quad (4.50a)$$

$$T_- = -1/\omega_- = 0,156 \text{ сек}. \quad (4.50б)$$

Отсюда видно, что переходная часть потока спадает очень быстро. Установившийся период в этом случае составляет

$$T = \frac{0,99}{0,08 \cdot 0,01} \approx 20 \text{ мин}. \quad (4.51)$$

С увеличением реактивности разница периодов не столь велика, но вплоть до реактивности  $\sim 1$  долл. переходной член уменьшается сравнительно быстро. Так, при реактивности 90 центов

$$\omega_- = -\frac{0,1 \cdot 0,0065}{0,001} = -0,65 \text{ сек}^{-1}, \quad (4.52)$$

в то время как

$$T \approx \frac{0,1}{0,08 \cdot 0,9} \approx 1,4 \text{ сек}. \quad (4.53)$$

В этом случае  $\omega_+$  и  $\omega_-$  примерно равны, но, так как  $\omega_-$  отрицательно, через несколько секунд после изменения реактивности мощность реактора будет меняться с установившимся периодом.

Для отрицательных реактивностей ситуация аналогична, в чем легко убедиться, подставив соответствующие значения в выражение для  $\omega_{\pm}$ . Таким образом, всегда можно определить время после изменения реактивности, по истечении которого можно будет приступить к измерению установившегося периода. Естественно, при проведении экспериментов в этом нет необходимости. Когда имеет место чисто экспоненциальный рост или спад мощности, установившийся период уже можно измерять. Отметим, что при  $\rho > 0$  величины  $\omega_{\pm}$  имеют разный знак, за исключением случаев  $\rho > 1$ , что не может иметь места (см. уравнение (4.27)). Поэтому, когда период реактора положителен, переходный процесс характеризуется убывающей экспонентой. При  $\rho < 0$  оба слагаемых отрицательны, но  $|\omega_0| < < |\omega_1|$ . С помощью рис. 4.1 нетрудно убедиться, что общее уравнение имеет один положительный корень при  $\rho > 0$  и ни одного положительного при  $\rho < 0$ .

Интересно выразить величину обратного часа в долларах. Так как для реактивности в 1 обратный час установившийся период равен 3600 сек, из уравнения (4.49)

$$(1 - \$/) / \$ = 3600 \cdot 0,08 \quad (4.54)$$

или

$$\frac{\$}{1 \text{ обратный час}} = \frac{1}{300}, \quad (4.55)$$

т. е. 1/3 цента. Таким образом, мы убедились, что 1 обратный час — действительно крайне малая единица реактивности.

#### § 4.7. ЭКСПЕРИМЕНТЫ СО СБРОСОМ СТЕРЖНЯ

Прямо измерить реактивность в долларах можно и без измерения установившегося периода, если изменение реактивности происходит столь быстро, что его можно считать мгновенным. Поскольку эти эксперименты обычно проводятся с помощью быстрого введения поглощающего стержня в критический реактор, они обычно называются *экспериментами со сбросом стержня*, хотя с таким же успехом можно быстро вводить положительную реактивность (например, извлекать стержень из критического реактора). Очевидно, из соображений безопасности введение стержня предпочтительнее.

Для анализа этих экспериментов нам понадобятся уравнения (4.20) и (4.22а), которые мы перепишем здесь для одной группы запаздывающих нейтронов\*:

$$\frac{\partial}{\partial t} C = -\lambda C + \beta v \Sigma_f \phi; \quad (4.56a)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi = [-DB^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) v \Sigma_f] \phi + \lambda C. \quad (4.56b)$$

Вспользуемся преобразованием Лапласа (см. приложение В):

$$\omega \hat{C} - C(0) = -\lambda \hat{C} + \beta v \Sigma_f \hat{\phi}; \quad (4.57a)$$

$$\frac{1}{v} [\omega \hat{\phi} - \phi(0)] = [-DB^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) v \Sigma_f] \hat{\phi} + \lambda \hat{C}. \quad (4.57b)$$

Так как перед экспериментом реактор работал на стационарном уровне мощности,  $C(0)$  и  $\phi(0)$  связаны уравнением (4.21), так что (4.57) принимает вид

$$\hat{C} = \frac{\beta v \Sigma_f}{\omega + \lambda} \left[ \hat{\phi} + \frac{1}{\lambda} \phi(0) \right]. \quad (4.58)$$

\* Хотя приближение одной группы запаздывающих нейтронов удобно с точки зрения понимания идеи эксперимента, он должен быть описан с использованием всех групп. Результаты при этом выглядят гораздо сложнее, но получить их можно аналогично тому, как это сделано в настоящем параграфе. Предоставим это читателю.

Подстановка этого выражения в (4.57) дает

$$\phi(\omega) = \phi(0) \frac{\omega + \lambda + \bar{v}\beta\nu\Sigma_f}{\omega(\omega + \lambda) - [(\omega + \lambda)/l_{\text{эф}}] [(1 - \beta)k - 1] - \bar{v}\beta\nu\Sigma_f \lambda}, \quad (4.59)$$

тогда с помощью обратного преобразования Лапласа получаем

$$\phi(t) = \phi(0) [R_+ \exp(\omega_+ t) + R_- \exp(\omega_- t)], \quad (4.60)$$

где  $\omega_{\pm}$  — полюсы правой части, а  $R_{\pm}$  — соответствующие вычеты. Конечно, полюсы  $\omega_{\pm}$  в точности совпадают с корнями  $\omega_{\pm}$ , най-

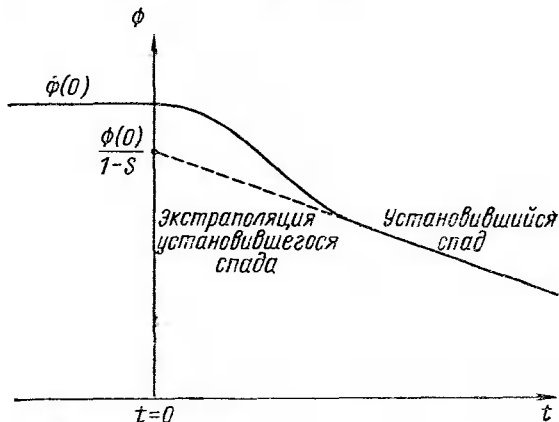


Рис. 4.3. Поток нейтронов после сброса стержня

денными ранее другим методом (см. уравнение (4.41) для точного и (4.45) для приближенного выражений). Вычеты оценены в том же приближении (4.45). Итак,

$$\phi(t) = \phi(0) \left( \frac{1}{1 - \beta} \exp \{ [\lambda \beta / (1 - \beta)] t \} - \frac{\beta}{1 - \beta} \exp \{ - [(1 - \beta) t / (l_{\text{эф}} / \beta)] \} \right). \quad (4.61)$$

Как и прежде, второе слагаемое становится исчезающе малым за время порядка секунды. Таким образом, асимптотический поток есть

$$\phi(t) \rightarrow \frac{\phi(0)}{1 - \beta} \exp \{ [\lambda \beta / (1 - \beta)] t \}. \quad (4.62)$$

Если эту функцию проэкстраполировать линейно назад к  $t = 0$  (рис. 4.3), можно обнаружить, что при  $t = 0$  поток мгновенно изменяется в  $1/(1 - \beta)$  раз\*. Так можно непосредственно измерить

\* На самом деле такая экстраполяция не столь проста из-за наличия более чем одной группы запаздывающих нейтронов.

реактивность в долларах. При этом нет надобности знать какие-либо параметры запаздывающих нейтронов или реактора ( $\beta$ ,  $\lambda$  или  $L_{эф}$ ). Комбинируя описанные в этом параграфе измерения с измерениями периода, можно определить  $\lambda$ , так как

$$T = (1 - \beta)/(\lambda \beta). \quad (4.63)$$

Очевидно, случай положительной реактивности отличается только знаком экспоненты.

#### § 4.8. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ИМПУЛЬСОМ НЕЙТРОНОВ

Другой метод измерения реактивности, в частности при больших отрицательных значениях, связан с использованием импульсов нейтронов. В этом случае в момент времени  $t = 0$  в реактор импульсно вводят пучок нейтронов (с помощью генератора нейтронов того или иного типа), а затем наблюдают спад потока нейтронов в течение времени, достаточно долгого для того, чтобы переходной составляющей можно было пренебречь, но достаточно короткого по сравнению с временем жизни запаздывающих нейтронов (это означает проведение измерений в миллисекундном диапазоне). Переходная составляющая обусловлена эффектами, связанными с энергетической зависимостью параметров размножающей среды и с высшими модами лапласана. В рамках одnogруппового приближения первая группа эффектов, конечно, никак не проявляется.

Используем уравнение (4.22а)\* с дополнительным  $\delta$ -образным источником:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) + S_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t). \quad (4.64)$$

Раскладывая, как и в § 4.2,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \alpha_n(t) x_n(\mathbf{r}) \quad (4.65)$$

и

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \sum_n x_n(\mathbf{r}_0) x_n(\mathbf{r}), \quad (4.66)$$

получаем уравнение для  $\alpha_n(t)$ :

$$\frac{1}{v} \dot{\alpha}_n(t) = -[DB_n^2 + \Sigma_a - (1 - \beta) v \Sigma_f] \alpha_n(t) + S_0 x_n(\mathbf{r}_0) \delta(t). \quad (4.67)$$

Перепишем это уравнение, вводя обычные обозначения:

$$\dot{\alpha}_n(t) = - \frac{1}{l_{эф}^{(n)}} \left( 1 - \frac{1 - \beta}{1 - \rho_n} \right) \alpha_n(t) + \bar{v} S_0 x_n(\mathbf{r}_0) \delta(t). \quad (4.68)$$

\* Так как мы рассматриваем времена, малые по сравнению с  $1/\lambda_i$ , можно пренебречь слагаемыми  $\lambda_i C_i$ .

Мы ввели здесь величину  $\rho_n$ , определенную равенством

$$k_n = 1/(1 - \rho_n) \quad (4.69)$$

[см. уравнение (4.9б)]. Решение этого уравнения может быть получено с помощью преобразования Лапласа

$$\omega \hat{\alpha}_n - \alpha_n(0) + \frac{1}{l_{\text{эф}}^{(n)}} \left( 1 - \frac{1-\beta}{1-\rho_n} \right) \hat{\alpha}_n = \bar{v} S_0 x_n(\mathbf{r}_0); \quad (4.70)$$

$$\alpha_n(t) = [\alpha_n(0) + \bar{v} S_0 x_n(\mathbf{r}_0)] \exp \left( (t/l_{\text{эф}}^{(n)}) \{ [(1-\beta)/(1-\rho_n)] - 1 \} \right). \quad (4.71)$$

Значения  $\alpha$  при  $n > 0$  уменьшаются быстрее, чем при  $n = 0$  (см. § 4.2\*). Задача, таким образом, состоит в том, чтобы выждать достаточно долгое время (его легко определить экспериментально, дождавшись чисто экспоненциального спада потока). Подставив значения параметров в (4.71), можно убедиться, что это время мало по сравнению с временами жизни запаздывающих нейтронов. Тогда экспоненциальная постоянная спада

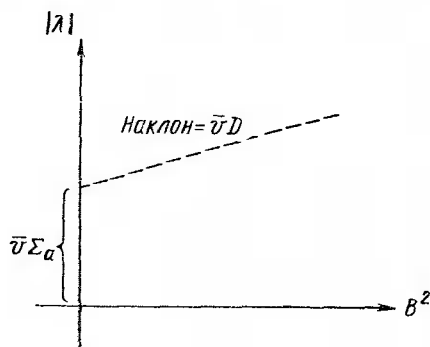


Рис. 4.4. Постоянная спада как функция  $B^2$  для эксперимента с импульсом нейтронов

$$\lambda = \frac{1}{l_{\text{эф}}} \left( \frac{1-\beta}{1-\rho} - 1 \right) \approx \frac{-\beta}{l_{\text{эф}}} (\$ - 1), \quad (4.72)$$

где, как и прежде,  $\$ = \rho/\beta$ . Отметим, что при  $\rho < \beta$  значение  $\lambda$  отрицательно, что соответствует убывающему потоку. Естественно, это справедливо только для малых времен, так как при  $0 < \rho < \beta$  уменьшение потока сменится его возрастанием после появления запаздывающих нейтронов.

Следует отметить, что отношение  $\rho/l_{\text{эф}}$  может быть определено при импульсном введении пучка нейтронов в критический реактор ( $\rho = 0$ ), так как в этом случае

$$\lambda = -\beta/l_{\text{эф}}. \quad (4.73)$$

Этот метод часто используется для определения эффективности системы регулирования [2].

Интересная информация может быть получена при использовании метода импульсов нейтронов в неразмножающихся средах ( $k = 0$  и поэтому  $\rho = -\infty$ ). Тогда

$$\lambda = -1/l_{\text{эф}} = -\bar{v}(\Sigma_a + DB^2). \quad (4.74)$$

\* По-прежнему можно утверждать, что слагаемые с  $n \geq 1$  точно описывают переходные процессы.

Измерения обычно проводят при различных размерах среды одного и того же состава, меняя таким образом  $B^2$ . Когда построена прямая  $\lambda$  ( $B^2$ ) (рис. 4.4), ее наклон характеризует  $\bar{v}D$ , а точка пересечения с осью ординат —  $\bar{v}\Sigma_a$ . На самом деле приведенный здесь простой анализ не совсем точен: оказывается, что  $\lambda$  содержит слагаемые, пропорциональные  $B^4$ ,  $B^6$  и т. п. Этот эффект известен под названием *диффузионного охлаждения* [3].

#### § 4.9. ОБРАТНОЕ РАЗМНОЖЕНИЕ

Рассмотрим подкритическую сборку, в которой с помощью источника  $S$  поддерживается стационарное распределение нейтронов. Из рассмотрения, проведенного в § 3.6, ясно, что благодаря такому источнику в сборке образуется  $kS$  нейтронов. Они, в свою очередь, образуют  $kkS = k^2S$  нейтронов и так далее, так что полное число нейтронов в сборке будет

$$\begin{aligned} N &= S(1 + k + k^2 + \dots) = \\ &= S/(1 - k). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Поэтому значение  $k$  можно найти, определяя величину

$$M = N/S = 1/(1 - k). \quad (4.76)$$

На самом деле удобнее иметь дело с величиной  $1/M$ .

Предположим, что подкритический реактор переводится в критическое состояние с помощью перемещения поглощающих стержней. Если в реакторе имеется источник, величину  $1/M$  можно измерять в функции от положения поглощающих стержней (рис. 4.5). Положение стержней, обеспечивающее критическое состояние реактора, можно определить, экстраполируя кривую к  $1/M = 0$ , т. е. к  $k = 1$ , что позволяет безопасно приближаться к критическому состоянию. Тот же подход можно использовать и при догрузке топлива в реактор, в этом случае  $1/M$  строится в функции от загрузки топлива. Отметим, что  $M$  и, следовательно, поток нейтронов стремятся к бесконечности при  $k \rightarrow 1$ . Поэтому *критический реактор* с источником на самом деле находится в слегка подкритическом состоянии\*. Значение  $k$  может быть найдено, если известен поток

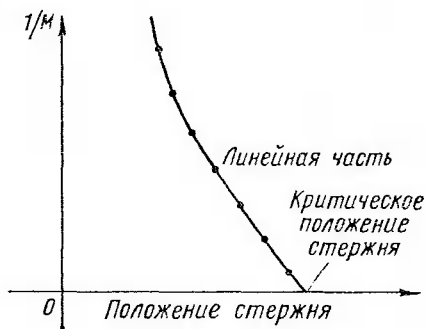


Рис. 4.5. Кривая обратного размножения

\* В реакторе почти всегда имеются внешние источники нейтронов, например, благодаря  $(\gamma, n)$ -реакции, происходящей на  $\gamma$ -квантах, испускаемых продуктами деления. Иногда такие внешние источники исключают надобность во внешнем источнике типа  $Pu(\alpha, n)Be$ . В частности, это имеет место в реакторах с  $D_2O$  и  $Be$ , так как дейтерий и бериллий имеют большое сечение реакции  $(\gamma, n)$ .

нейтронов

$$N = \frac{1}{V} \int_V \phi(\mathbf{r}) d^3 r, \quad (4.77)$$

и из (4.75)

$$k = 1 - S/N. \quad (4.78)$$

На самом деле, как всегда, ситуация оказывается значительно сложнее. Коэффициент размножения  $k$  применим только для тех нейтронов, которые распределены (по энергии и пространству) в соответствии с основной модой. Поэтому для каждого поколения нейтронов нужно использовать свой собственный множитель  $k_i$ , хотя, конечно,  $k_i$  быстро сходятся к  $k$  (через 2—3 поколения). Более корректные расчеты могут быть проведены с помощью итерации источников (см. гл. 6). За начальное принимается фактическое распределение источника  $S$ . Тогда первая итерация  $S_1$  представляет собой первое поколение нейтронов деления, а  $S_2$  — второе поколение и т. п. Наконец, оказывается, что  $S_{j+1}$  пропорционально  $S_j$  для всех  $j > j_0$ , причем коэффициент пропорциональности есть, конечно,  $k$ . Тогда

$$N = S_0 + S_1 + \dots + S_{j_0} + S_{j_0+1}/(1-k). \quad (4.79)$$

С помощью такой комбинации расчетов и экспериментов можно очень точно определить значение  $k$ . При  $k$ , близком к единице, последнее слагаемое в уравнении (4.79) может стать определяющим, и в этом случае формула (4.75) оказывается верной. Это значит, что кривая  $1/M$  ведет себя линейно вблизи критического состояния, которое может быть определено линейной экстраполяцией.

Следует обратить внимание на необходимость некоторой аккуратности при проведении измерений. Предположим, что производятся измерения в двух подкритических состояниях. При переходе от одного к другому, как было показано в § 4.2, поток нейтронов описывается двумя членами, один из которых (переходный), соответствующий высшим модам, быстро затухает. Измерения нельзя проводить до тех пор, пока переходные моды не исчезнут, причем время ожидания может быть определено с помощью уравнения (4.6) при  $n = 1$ . Отметим также, что в соответствии с уравнением (4.76) измерения должны быть абсолютными. Однако можно обойтись и без абсолютных измерений. Если все измерения проводятся в одном и том же масштабе, все ординаты на рис. 4.5 умножаются на один и тот же множитель. Кривая  $1/M$  будет при этом иметь другой наклон, но точка ее пересечения с осью  $x$  не изменится. С практической точки зрения это означает, что детекторы в подкритической сборке могут располагаться там, где это удобно.

#### § 4.10. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ РЕАКТОРА

Концепция *передаточной функции* широко используется при рассмотрении поведения ядерных реакторов во времени. Чтобы разобраться с этим понятием, предположим, что система описывается линейным оператором  $H$  и функциями  $I(t)$  (входная функция) и  $O(t)$  (выходная функция), такими, что

$$HO(t) = I(t). \quad (4.80)$$

Если воспользоваться преобразованием Фурье\* (см. приложение В), то получим

$$\bar{O}(\omega) = R(\omega) \bar{I}(\omega) \quad (4.81)$$

или

$$O(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) R(\omega) \bar{I}(\omega) d\omega. \quad (4.82)$$

Функция  $R(\omega)$  есть передаточная функция. Если  $R(\omega)$  имеет полюсы в нижней полуплоскости  $\omega$ , то зависимость  $O(t)$  от времени характеризуется положительными экспонентами. Говорят, что такая система неустойчива. Следовательно, полюсы передаточной функции определяют устойчивость (линейной) системы. В частности, часто достаточно просто измерить передаточную функцию экспериментально, что позволит легко определить критерии устойчивости.

Рассмотрим простой пример: реактор, описываемый уравнениями кинетики (4.22а) и (4.20). Здесь входная функция — синусоидально меняющееся во времени возмущение  $\delta k$  (например, с помощью перемещений поглощающего стержня). Тогда, считая  $k = 1$ , имеем\*\*  $\delta k(t) = \delta k_0 \exp(i\omega_0 t)$  и

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\beta}{l_{\text{эф}}} \delta k_0 \exp(i\omega_0 t) - \frac{\beta n}{l_{\text{эф}}} [1 + \delta k_0 \exp(i\omega_0 t)] + \sum_i \lambda_i C_i \quad (4.83а)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\lambda_i C_i + \frac{\beta_i n}{l_{\text{эф}}} [1 + \delta k_0 \exp(i\omega_0 t)]. \quad (4.83б)$$

Запишем  $n(t)$  и  $C_i(t)$  в виде

$$n(t) = n_0 + n_1(t); \quad (4.84а)$$

$$C_i(t) = C_{i0} + C_{i1}(t), \quad (4.84б)$$

где  $n_0$  и  $C_{i0}$  относятся к стационарному критическому реактору, а  $n_1(t)$  характеризует поведение системы при введении возмущения  $\delta k(t)$ . Предположим, что  $n_1(t)$  мало, так что произведения вида

\* Преобразование Лапласа также может быть использовано.

\*\* Конечно,  $\delta k$  не может быть комплексным. При сравнении с экспериментом надо отдельно рассматривать действительную и мнимую части (4.83а) и (4.83б).

$n_1 \delta k$  могут быть отброшены (это линеаризует уравнения (4.83)).  
Тогда

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\delta k_0}{l_{\text{эф}}} n_0 \exp(i\omega_0 t) - \frac{\beta}{l_{\text{эф}}} \{ [1 + \delta k_0 \exp(i\omega_0 t)] n_0 + n_1(t) \} + \sum_i \lambda_i (C_{i0} + C_{i1}(t)) \quad (4.85a)$$

и

$$\frac{\partial C_{i1}(t)}{\partial t} = -\lambda_i (C_{i0} + C_{i1}(t)) + \frac{\beta_i}{l_{\text{эф}}} \{ [1 + \delta k_0 \exp(i\omega_0 t)] n_0 + n_1(t) \}. \quad (4.85b)$$

Эти уравнения можно упростить, воспользовавшись соотношениями, справедливыми для критического реактора\*:

$$\frac{\beta}{l_{\text{эф}}} n_0 = \sum_i \lambda_i C_{i0}; \quad (4.86a)$$

$$\lambda_i C_{i0} = \frac{\beta_i n_0}{l_{\text{эф}}}, \quad (4.86b)$$

так что

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{\delta k_0 n_0}{l_{\text{эф}}} \exp(i\omega_0 t) - \frac{\beta}{l_{\text{эф}}} [\delta k_0 n_0 \exp(i\omega_0 t) + n_1] + \sum_i \lambda_i C_{i1}; \quad (4.87a)$$

$$\frac{\partial C_{i1}}{\partial t} = -\lambda_i C_{i1} + \frac{\beta_i}{l_{\text{эф}}} [\delta k_0 n_0 \exp(i\omega_0 t) + n_1]. \quad (4.87b)$$

Воспользуемся преобразованием Фурье:

$$-i\omega \bar{n}_1(\omega) = \frac{2\pi \delta k_0 n_0}{l_{\text{эф}}} \delta(\omega + \omega_0) + \sum_i \lambda_i \bar{C}_{i1}(\omega) - \frac{\beta}{l_{\text{эф}}} [2\pi \delta k_0 n_0 \delta(\omega + \omega_0) + \bar{n}_1(\omega)]; \quad (4.88a)$$

$$\bar{C}_{i1}(\omega) (-i\omega + \lambda_i) = \frac{\beta_i}{l_{\text{эф}}} [2\pi \delta k_0 n_0 \delta(\omega + \omega_0) + \bar{n}_1(\omega)]. \quad (4.88b)$$

Решая эти уравнения относительно  $\bar{n}_1(\omega)$ , имеем

$$\frac{\bar{n}_1(\omega)}{n_0} = 2\pi \delta k_0 \delta(\omega + \omega_0) \times \frac{1 - \beta + \sum_i (\lambda_i \beta_i / l_{\text{эф}})}{-i\omega \left\{ l_{\text{эф}} + \sum_i [\beta_i / (i\omega + \lambda_i)] \right\}} = 2\pi \delta k_0 \delta(\omega + \omega_0) R(\omega). \quad (4.89)$$

\* Надо положить  $\partial n / \partial t = \partial C_i / \partial t = 0$ ,  $k = 1$ ,  $\delta k = 0$  в уравнениях (4.22б) и (4.22в).

Величина  $R(\omega)$  называется передаточной функцией реактора *нулевой мощности*. Отметим схожесть полученного уравнения с уравнением обратных часов (4.34),  $-i\omega = T^{-1}$ . Эта передаточная функция не представляет особого интереса, так как реактор, очевидно, устойчив при  $k(0) \leq 1$  и неустойчив при  $k(0) > 1$ . Значительно интереснее передаточная функция энергетического реактора. В этом случае коэффициенты (сечения и т. п.) являются функциями мощности или потока нейтронов в силу наличия обратных связей\*, и уравнения становятся нелинейными, так что само по себе значение  $k(0) \leq 1$  не характеризует устойчивость реактора. Именно в таких случаях измерение передаточных функций особенно важно.

#### § 4.11. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕЙТРОННЫМИ ВОЛНАМИ [4]

В § 2.11 представлен метод измерения диффузионной длины, основанный на измерении экспоненциально спадающего потока тепловых нейтронов. Затем в § 4.9 рассмотрены эксперименты с импульсами нейтронов. Эксперименты с нейтронными волнами могут в некотором смысле рассматриваться как их комбинация. Например, организация эксперимента может быть такой же, как описано в § 2.11, за исключением того, что источник должен быть модулирован, например, с помощью колебания кадмиевого экрана перед тепловой колонной. В этом случае применимо уравнение (2.130а) с дополнительным слагаемым  $(1/\bar{v})(\partial/\partial t)\chi$ , учитывающим тот факт, что поток зависит от времени. Кроме того, источник модулируется множителем  $1 + S_1 \exp(i\omega_0 t)$ . Уравнение, описывающее распределение потока в направлении оси  $z$ , имеет вид\*\*

$$\frac{1}{\bar{v}} \frac{\partial \chi}{\partial t} - D \left[ -\left(\frac{\pi}{2a'}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2b'}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \chi(z, t) + \Sigma_a \chi(z, t) = S_0 \delta(z) [1 + S_1 \exp(i\omega_0 t)]. \quad (4.90)$$

Если решение искать в виде

$$\chi(z, t) = \chi_0(z) + \chi_1(z) \exp(i\omega_0 t), \quad (4.91a)$$

то

$$\frac{i\omega_0}{\bar{v}} \chi_1 \exp(i\omega_0 t) + \Sigma_b [\chi_0 + \chi_1 \exp(i\omega_0 t)] - D [\chi_0'' + \chi_1'' \exp(i\omega_0 t)] = S_0 \delta(z) [1 + S_1 \exp(i\omega_0 t)]. \quad (4.91b)$$

\* Например, при увеличении мощности возрастает температура, материалы расширяются, в силу чего изменяются макроскопические сечения. Существует много и других эффектов.

\*\* Как и в уравнении (4.83а), для описания эксперимента надо брать действительную или мнимую часть уравнения (4.90).

Здесь для простоты обозначено

$$\Sigma_b = \Sigma_a + D \left[ \left( \frac{\pi}{2a'} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{2b'} \right)^2 \right]; \quad (4.92a)$$

$$\chi_j'' = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi_j(z) \quad (4.92b)$$

(т. е.  $\Sigma_b$  есть сумма сечений поглощения и утечки).

Если в уравнении (4.91) приравнять члены, не зависящие от времени и пропорциональные  $\exp(i\omega_0 t)$ , то

$$\Sigma_b \chi_0 - D \chi_0'' = S_0 \delta(z); \quad (4.93a)$$

$$\left( \Sigma_b + \frac{i\omega_0}{v} \right) \chi_1 - D \chi_1'' = S_0 S_1 \delta(z). \quad (4.93b)$$

Таким образом,  $\chi_0$  есть та самая экспоненциально убывающая функция, которая измеряется при определении диффузионной длины (см. § 2.11). В решение, кроме того, входит функция  $\chi_1$ .

Чтобы решить уравнение (4.93b) относительно  $\chi_1$ , воспользуемся преобразованием Фурье ( $k$  — переменная):

$$\chi_1(k) = \frac{S_0 S_1 / D}{k^2 + (\Sigma_b + i\omega_0/v)/D}. \quad (4.94)$$

Таким образом,

$$\chi_1(z, t) = R_+ \exp \left( -z \sqrt{\frac{\Sigma_b + i\omega_0/v}{D}} + i\omega_0 t \right), \quad (4.95)$$

где  $R_+$  — вычет, умноженный на  $2\pi i$ :

$$R_+ = \frac{\pi S_0 S_1 / D}{V(\Sigma_b + i\omega_0/v)/D}. \quad (4.96)$$

Квадратный корень легко вычисляется:

$$\sqrt{\frac{\Sigma_b + i\omega_0/v}{D}} = a + ib \quad (4.97a)$$

или

$$\frac{\Sigma_b + i\omega_0/v}{D} = a^2 - b^2 + 2iab. \quad (4.97b)$$

Приравнивая действительную и мнимую части, находим

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2D} (\Sigma_b + V \Sigma_b^2 + \omega_0^2/v^2)}; \quad (4.98a)$$

$$b_{\pm} = \pm \frac{\omega_0}{v \sqrt{2D (\Sigma_b + V \Sigma_b^2 + \omega_0^2/v^2)}}. \quad (4.98b)$$

Тогда

$$\chi(z, t) = R_+ \exp [i(-b_+ z + \omega_0 t) - a_+ z]. \quad (4.99)$$

Мы должны выбрать  $a > 0$  (знак «+» в уравнении (4.98)), так что (4.99) описывает затухающую волну, движущуюся вправо. Ее фазовая скорость есть

$$C_p = \omega_0/b_+ = \bar{v} \sqrt{2D(\Sigma_b + \sqrt{\Sigma_b^2 + \omega_0^2/\bar{v}^2})}. \quad (4.100)$$

Измеряя фазовую скорость волны и коэффициент затухания  $a_+$  (см. уравнение (4.98а)), получаем два соотношения для определения  $\Sigma_b$  и  $D$ . Некоторые экспериментаторы предпочитают этот метод импульсному методу, хотя в обоих случаях измеряется одно и то же. На самом деле, поскольку

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega, \quad (4.101)$$

в экспериментах с нейтронными волнами присутствует единственная компонента Фурье импульсного метода.

## Задачи

- 4.1. Вычислить период реактора при реактивности 2 обратных часа (одна группа запаздывающих нейтронов).
- 4.2. Вычислить период реактора при реактивности 1 долл. (одна группа запаздывающих нейтронов).
- 4.3. Используя передаточную функцию, показать, что реактор с  $k(0) < 1$  ( $> 1$ ) устойчив (неустойчив).
- 4.4. Получить выходную функцию для эксперимента с импульсом нейтронов, проинтегрировав результат для эксперимента с нейтронными волнами по всем  $\omega_0$ .

## Список литературы

1. Кипин Дж. Р. Физические основы кинетики ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. В. А. Кузнецова. М., Атомиздат, 1967.
2. Simmons B. E., King J. S. «Nucl. Sci. Engng», 1958, v. 3, p. 595.
3. Williams M. M. R. The Slowing Down and Thermalization of Neutrons. Amsterdam, 1966.
4. Uhrig R. E. «Trans Amer. Nucl. Soc.», 1959, v. 2, p. 2.

---

**РАСЧЕТ  
РЕАКТИВНОСТИ**


---

**§ 5.1. ВВЕДЕНИЕ**

В предыдущей главе мы обсудили поведение реактора при введении реактивности  $\rho$ . Теперь наша задача — вычислить эту реактивность. Можно вернуться к методу, описанному в гл. 3, и, в частности, использовать уравнение (3.25) в виде

$$v_c = (DB^2 + \Sigma_a)/\Sigma_f. \quad (5.1)$$

Тогда, естественно,

$$\rho = (v - v_c)/v. \quad (5.2)$$

Если  $v \neq v_c$ , реактор не критичен. Но можно, дифференцируя уравнение (5.1), найти такие изменения различных параметров, которые сделали бы реактор критическим:

$$\begin{aligned} \delta v_c = & [(2DB\delta B + B^2\delta D + \delta\Sigma_a) \Sigma_f - \\ & - (DB^2 + \Sigma_a) \delta\Sigma_f]/\Sigma_f^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Недостаток такого подхода состоит в том, что изменения параметров в уравнении (5.3) должны равномерно вводиться по всему объему реактора, поскольку уравнение (5.1) применимо только к гомогенной системе без отражателя. Из выражения (5.3) нельзя найти малые локализованные изменения какого-либо одного параметра (например, изменение положения поглощающего элемента), приводящие реактор к критическому состоянию.

Другой подход мог бы состоять в проведении прямых численных расчетов (см. гл. 6) при таком произвольном варьировании параметров, которое в конце концов привело бы к нахождению критического состояния. Однако такой подход вряд ли оправдан, поскольку необходимые изменения параметров должны быть угаданы до проведения расчетов; кроме того, численные расчеты обычно трудоемки и требуют больших затрат машинного времени. Другая сложность состоит в том, что результатом расчета является  $k$  (или  $v_c$ ), а не  $\rho$ . Поэтому, так как

$$k = 1/(1 - \rho), \quad (5.4a)$$

имеем

$$\delta k/k = \delta\rho/(1 - \rho). \quad (5.4b)$$

Поскольку  $k$  обычно близко к единице, для получения достаточно точного значения  $\rho$  требуется такая высокая точность расчета  $k$ , которую обычно трудно обеспечить.

В этой главе мы обсудим методы прямого расчета  $\rho$  для неоднородных изменений состава реактора. Попутно получим методы, приемлемые для определения условий критичности неоднородного реактора\*.

## § 5.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Для развития упомянутых в § 5.1 методов мы должны прежде всего дать краткое описание теории линейных операторов\*\*. Оператор  $\theta$  будет определен как отображение пространства функций  $\{f\}$  самого на себя. Иначе говоря, это означает, что если  $f$  — некоторая функция в заданном пространстве, то  $\theta f$  — другая функция в том же пространстве; назовем ее  $g$ , т. е.

$$\theta f = g. \quad (5.5)$$

Под термином *то же пространство* подразумеваем, например, функции, обладающие некоторыми свойствами, которые, как нам известно, должны физически иметь место для рассматриваемых систем.

Принято рассматривать функции, для которых существует интеграл по некоторому интервалу от квадрата этих функций, т. е.

$\int_a^b |f|^2 dx < \infty$ . Такая совокупность функций называется пространством  $L_2(a, b)$ . Однако оператор  $\theta$  воздействует не на все функции в этом пространстве. Во-первых,  $\theta f$  должна удовлетворять тому же условию интегрируемости в квадрате. Во-вторых,  $\theta$  воздействует только на те функции, которые удовлетворяют некоторым граничным условиям. Совокупность функций, на которые действует оператор  $\theta$ , называется множеством функций оператора  $\theta$  и обозначается  $D(\theta)$ .

Мы будем рассматривать такие множества функций, которые обращаются в нуль на (экстраполированной) границе рассматриваемого реактора и могут иметь некоторые другие свойства, необходимые для того, чтобы их можно было рассматривать как поток нейтронов (например, положительность).

Примером оператора является  $d/dx$ . Он изменяет функцию  $f$  в ее производную  $f'$ . Другой пример —  $\cos$ . Теперь введем понятие *линейный* оператор, который обладает тем свойством, что если  $f$  и  $g$  —

\* Эти методы не могут быть эффективно использованы для существенно гетерогенного реактора. В этом случае единственным оправданным подходом являются численные методы. Но при более или менее плавных изменениях свойств реактора по пространству эти методы дают хорошие результаты.

\*\* См., например, [1].

функции, а  $c_1$  и  $c_2$  — (комплексные) константы, то

$$\theta (c_1 f + c_2 g) = c_1 \theta f + c_2 \theta g. \quad (5.6)$$

Видно, что  $d/dx$  — линейный оператор, а  $\cos$  — нет (так как  $\cos(f + g) \neq \cos f + \cos g$ ).

В области определения  $\theta$  существует обычно *подпространство* функций  $\{\xi_n\}$ , обладающих таким свойством, что воздействие  $\theta$  на любую из них приводит к умножению этой функции на (комплексную) константу, т. е.

$$\theta \xi_n = a_n \xi_n, \quad (5.7)$$

где  $a_n$  — комплексное число. Совокупность функций  $\{\xi_n\}$  называется *собственными функциями* оператора  $\theta$ , а число  $a_n$ , соответствующее данной функции  $\xi_n$ , — *собственным значением\**.

Выше мы привели пример линейного *дифференциального* оператора  $d/dx$ . Если  $\theta$  в уравнении (5.7) заменить  $d/dx$ , получим дифференциальное уравнение для собственных функций

$$\frac{d}{dx} \xi_n(x) = a_n \xi_n(x). \quad (5.8)$$

Известно, что решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка требует введения  $n$  *граничных условий*. Мы всегда должны быть уверены, имея дело с дифференциальным оператором, что установлено достаточное количество граничных условий, которые ограничивают область определения. При рассмотрении простого оператора  $d/dx$  иногда вводят *периодические граничные условия*, которые просто означают, что  $\xi_n$  есть периодическая функция с заданным периодом. Например,

$$\xi_n(x) = \xi_n(x + d), \quad (5.9)$$

где  $d$  — некоторая произвольная константа.

Общее решение уравнения (5.8) есть

$$\xi_n = C_n \exp(a_n x), \quad (5.10)$$

где  $C_n$  — произвольная константа. Собственное значение  $a_n$  может быть определено с помощью граничного условия (5.9)

$$\exp[a_n(x + d)] = \exp(a_n x), \quad (5.11a)$$

так что

$$\exp(a_n d) = 1 \quad (5.11b)$$

или

$$a_n d = 2n\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.11в)$$

\* В некоторых случаях несколько функций  $\xi_n$  имеют одно и то же собственное значение. Тогда говорят, что это собственное значение  $N$ -кратно вырождено, где  $N$  — число собственных функций с этим собственным значением.

Таким образом, собственные функции суть

$$\xi_n(x) = C_n \exp(2\pi n x i / d), \quad (5.12a)$$

а соответствующие им собственные значения

$$a_n = 2\pi i / d \quad (5.12b)$$

с  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отметим наличие произвольной константы  $C_n$ . Ее появление связано с тем, что уравнение (5.7) — однородное; решение, умноженное на любую константу, есть снова решение. Константа  $C_n$  может быть определена, если наложено условие *нормировки*. Например, мы можем потребовать

$$\int_0^d |\xi_n(x)|^2 dx = 1, \quad (5.13a)$$

откуда следует

$$C_n = \sqrt{1/d} \quad (5.13b)$$

вне зависимости от  $n$ .

Другое дифференциальное уравнение на собственное значение было введено в гл. 3:

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0. \quad (5.14)$$

Рассмотрим случай плоского реактора без отражателя и придадим  $\phi$  и  $B^2$  индексы, которые будут напоминать, что уравнение (5.14) является уравнением на собственное значение:

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) = -B_n^2 \phi_n(x). \quad (5.15)$$

Соответствующие граничные условия (два, поскольку уравнение (5.15) — второго порядка) уже известны:

$$\phi_n(x) = \phi_n(-x); \quad (5.16a)$$

$$\phi_n(a') = 0. \quad (5.16b)$$

Условие (5.16a) устанавливает тот факт, что поток должен быть симметричен относительно центра реактора ( $x = 0$ ), а (5.16b) — что поток обращается в нуль на экстраполированной границе.

Общее решение уравнения (5.15) есть

$$\phi_n(x) = A_n \cos B_n x + C_n \sin B_n x. \quad (5.17)$$

В силу (5.16a)  $C_n = 0$ . На основании (5.16b)

$$B_n = \frac{2n+1}{2a'} \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.18a)$$

и

$$\phi_n(x) = A_n \cos \left( \frac{2n+1}{2a'} \pi x \right). \quad (5.18b)$$

Эта собственная функция уже обсуждалась в гл. 3. Но там рассматривали лишь  $\phi_0$ , поскольку только  $\phi_0$  удовлетворяет физическому требованию  $\phi > 0$  при  $-a \leq x \leq a$ , т. е. требованию положительности потока во всем рассматриваемом интервале. Однако для некоторых целей может понадобиться полный набор собственных функций, как это, например, имеет место при рассмотрении задач с временной зависимостью (см. гл. 4).

Константы  $A_n$  могут быть также определены из произвольных условий нормировки. В гл. 3, например, мы выбирали  $A_n$  таким образом, чтобы интеграл по всему объему реактора от  $\Sigma_f \phi_0$  был равен его мощности, деленной на  $2,88 \cdot 10^{-11}$  *вт* [см. уравнение (3.89)].

Во многих случаях существует оператор, *обратный*  $\Theta$  и обозначаемый  $\Theta^{-1}$ . Он обладает тем свойством, что  $\Theta\Theta^{-1} = \Theta^{-1}\Theta = 1$ .

Вернемся теперь к нашему общему рассмотрению собственных значений и собственных функций. Будем, как обычно, считать каждый набор  $\{\xi_i\}$  *полным*. Это означает, что любая функция в пространстве оператора  $\theta$  может быть разложена в ряд по  $\{\xi_i\}$ :

$$f = \sum_i f_i \xi_i, \quad (5.19)$$

где  $f_i$  — (комплексные) константы, называемые *коэффициентами разложения*.

Определим далее *скалярное произведение* в рассматриваемом пространстве. Оно вводится как комплексное число, соответствующее каждой паре функций  $f$  и  $g$  в нашем пространстве, и обозначается  $(f, g)^*$ . Это комплексное число имеет следующие свойства:

$$(f, g) = (g, f)^* \quad (5.20a)$$

(звездочка означает комплексно-сопряженную величину);

$$(f + h, g) = (f, g) + (h, g); \quad (5.20б)$$

$$(f, Cg) = C (f, g), \quad (5.20в)$$

где  $C$  — некоторая комплексная константа.

Из (5.20a) и (5.20в) следует, что

$$(Cf, g) = C^* (f, g). \quad (5.21)$$

\* Пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *гильбертовым пространством*, если оно *полно* и *сепарабельно*.

Пространство является *полным*, если каждая сходящаяся последовательность сходится к элементу пространства (т. е. пространство содержит все свои предельные точки). Пространство является *сепарабельным*, если оно содержит базис, т. е. счетный набор функций, подобных определенным ранее  $\xi_i$ , которые образуют полную систему. Величина  $(f, f)^{1/2}$  называется *нормой*  $f$  и может рассматриваться как «длина» функции  $f$ . В гильбертовом пространстве требуется, чтобы норма любой функции была конечным числом. Отметим, что гильбертово пространство линейно в том смысле, что если  $f$  и  $g$  — элементы пространства, то  $c_1 f + c_2 g$  тоже принадлежит пространству [см. (5.20)]. Функциональное пространство со всеми свойствами гильбертова пространства, кроме скалярного произведения, называется *банаховым пространством*.

Если  $(f, g) = 0$ , мы говорим, что  $f$  и  $g$  ортогональны. Отметим, что  $(f, f) \geq 0$ , причем равенство выполняется только при  $f = 0$ .

Теперь введем оператор  $\theta^+$ , сопряженный оператору  $\theta$ , такой, что

$$(f, \theta g) = (\theta^+ f, g). \quad (5.22)$$

Точно так же, как и в случае оператора  $\theta$ , для оператора  $\theta^+$  должны быть сформулированы свои граничные условия (называемые сопряженными граничными условиями). В определении (5.22) предполагается, что функция  $g$  удовлетворяет граничным условиям, связанным с оператором  $\theta$ , а  $f$  — сопряженным граничным условиям\*.

Введем в качестве примера такое определение скалярного произведения:

$$(f, g) = \int_V f^*(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (5.23)$$

Это определение, как легко видеть, удовлетворяет требованиям (5.20). Рассмотрим теперь оператор  $d/dx$  с прямыми граничными условиями (5.9) и попытаемся определить сопряженный оператор  $(d/dx)^+$  и сопряженные граничные условия\*\*. Тогда

$$(f, \theta g) = \left( f, \frac{d}{dx} g \right) = \int_0^a f^*(x) \frac{d}{dx} g(x) dx. \quad (5.24a)$$

Интегрирование по частям дает

$$(f, \theta g) = - \int_0^a \frac{df^*(x)}{dx} g(x) dx + f^*(x) g(x) \Big|_0^a. \quad (5.24b)$$

Последнее слагаемое исчезает, если

$$f^*(a) = f^*(0). \quad (5.25)$$

В этом случае

$$\left( f, \frac{d}{dx} g \right) = \left( -\frac{df}{dx}, g \right), \quad (5.26a)$$

так что

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^+ = -\frac{d}{dx} \quad (5.26b)$$

с сопряженными граничными условиями (5.25);

$$D \frac{d}{dx} = D \left( \frac{d}{dx} \right)^+.$$

\* В будущем, когда это необходимо, мы будем называть  $\theta$  прямым оператором, а соответствующие граничные условия — прямыми граничными условиями.

\*\* В этом случае считаем, что границы реактора расположены при  $x = 0$  и  $x = a$ .

Подобным же образом можно найти оператор, сопряженный  $d^2/dx^2$  с условиями (5.16). Легко показать\*, что

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^+ = \frac{d^2}{dx^2} \quad (5.27)$$

с прямыми и сопряженными граничными условиями, определяемыми (5.16). Оператор  $d^2/dx^2$  называется *самосопряженным\*\**.

Следует заметить, что для любого оператора

$$\{\theta^+\}^+ = \theta. \quad (5.28)$$

На самом деле последнее соотношение не выдерживается для *незамкнутых* операторов, но с ними не приходится иметь дело в диффузионном приближении.

Сопряженный оператор  $\theta^+$  имеет собственные значения и собственные функции

$$\theta^+ \xi_i = b_i \xi_i. \quad (5.29)$$

Теперь докажем важную теорему.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\xi_k$  — собственная функция оператора  $\theta$ , соответствующая собственному значению  $a_k$ , а  $\zeta_l$  — оператора  $\theta^+$ , соответствующая собственному значению  $b_l$ . Тогда или

$$a_k = b_l^*, \quad (5.30a)$$

или

$$(\zeta_l \xi_k) = 0. \quad (5.30b)$$

**Доказательство.** Напишем два уравнения:

$$\theta \xi_k = a_k \xi_k; \quad (5.31a)$$

$$\theta^+ \zeta_l = b_l \zeta_l. \quad (5.31b)$$

Найдем скалярное произведение  $\zeta_l$  (слева) с обеими частями уравнения (5.31a) и  $\xi_k$  (справа) с обеими частями уравнения (5.31b):

$$(\zeta_l, \theta \xi_k) = a_k (\zeta_l, \xi_k); \quad (5.32a)$$

$$(\theta^+ \zeta_l, \xi_k) = b_l^+ (\zeta_l, \xi_k). \quad (5.32b)$$

В правой части этих уравнений использованы соотношения (5.20a) и (5.21). Нетрудно видеть, что левые части уравнений (5.32) равны. Вычитая эти уравнения одно из другого, находим

$$(a_k - b_l^+) (\zeta_l, \xi_k) = 0, \quad (5.33)$$

что доказывает теорему.

\* См. задачу 5.9. В этом случае удобнее считать, что границы реактора находятся при  $x = -d$  и  $x = d$ . Тогда  $(f, g) = \int_{-d}^d f^* g dx$ .

\*\* Если  $\theta^+ = \theta$ , но  $D(\theta) \neq D(\theta^+)$ , оператор несамосопряженный. Такой оператор называют *симметричным* или *эрмитовым*.

Практическое следствие этой теоремы состоит в следующем: можно обозначить собственные функции прямого и сопряженного операторов таким образом, чтобы собственные значения, соответствующие  $\xi_i$ , являлись комплексно-сопряженными собственным значениям, соответствующим  $\zeta_i$ . Тогда  $\xi_i$  и  $\zeta_l$  ортогональны, т. е.

$$(\zeta_l, \xi_i) = 0, \quad i \neq l. \quad (5.34)$$

В частности, мы будем полагать, что собственные функции всегда могут быть нормированы так, что \*

$$(\zeta_i, \xi_i) = \delta_{ii}. \quad (5.35)$$

Особый интерес представляет *самосопряженный* оператор  $\theta$ , для которого

$$\theta = \theta^+ \quad (5.36)$$

с одинаковыми граничными условиями для  $\theta$  и  $\theta^+$ . Из доказательства теоремы (5.33) следует, что самосопряженный оператор всегда имеет действительные собственные значения, хотя несамосопряженный оператор также может, конечно, иметь действительные собственные значения. Из (5.35) следует, что самосопряженным операторам соответствуют ортогональные системы собственных функций. К сожалению, операторы теории ядерных реакторов в общем случае не являются самосопряженными. Однако в случае однопроводного приближения оператор является самосопряженным.

Сопряженный оператор имеет следующий физический смысл: пусть  $G^+(\tau' \rightarrow \tau)$  — функция Грина оператора  $\theta$ , т. е.

$$\theta G(\tau_1 \rightarrow \tau) = \delta(\tau - \tau_1), \quad (5.37a)$$

и пусть  $G^+$  — функция Грина сопряженного оператора

$$\theta^+ G^+(\tau_2 \rightarrow \tau) = \delta(\tau - \tau_2). \quad (5.37b)$$

Тогда докажем, что

$$G(\tau_1 \rightarrow \tau_2) = G^+(\tau_2 \rightarrow \tau_1), \quad (5.38)$$

т. е. сопряженная функция Грина получается прямой заменой переменных. Здесь под  $\tau$  следует понимать совокупность всех переменных, от которых может зависеть оператор  $\theta$ . В односкоростном диффузионном приближении  $\theta$  зависит только от пространственных переменных, но в случае учета энергетической зависимости появляются еще и энергетические переменные. Этим объясняется тот факт, что зависящие от энергии операторы диффузии нейтронов несамосопряженные. Если бы они были самосопряженными, то это означало бы, в соответствии с уравнением (5.38), что введение в систему нейтронов высокой энергии приводило бы к такому же распределению тепловых нейтронов, какое установилось бы для

\* Дельта-символ Кронекера означает, что  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$  и  $\delta_{ii} = 1$  при  $i = k$ .

быстрых нейтронов при введении в систему тепловых. Очевидно, подобная ситуация не имеет места\*.

Теперь, чтобы доказать справедливость утверждения (5.38), умножим уравнение (5.37а) на  $G^+$  ( $\tau_2 \rightarrow \tau$ ), а уравнение (5.37б) — на  $G$  ( $\tau_1 \rightarrow \tau$ ), проинтегрируем результаты по  $\tau$  и вычтем один из другого. С помощью (5.22) немедленно доказывается (5.38).

### § 5.3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Обратимся теперь к рассмотрению методов расчета собственных значений оператора  $\theta$ :

$$\theta \xi_i = a_i \xi_i. \quad (5.39)$$

Можем сразу вычислить  $a_i$ , найдя скалярное произведение (5.39) с какой-либо функцией  $f$ :

$$a_i = (f, \theta \xi_i) / (f, \xi_i) \quad (5.40)$$

(в предположении, конечно, что  $(f, \xi_i) \neq 0$ ).

Такое же выражение может быть получено для собственного значения сопряженного оператора  $\theta^+$ :

$$\theta^+ \zeta_i = b_i \zeta_i \quad (5.41)$$

с помощью некоторой функции  $g$ :

$$b_i = (g, \theta^+ \zeta_i) / (g, \zeta_i), \quad (5.42a)$$

причем, конечно,

$$b_i = a_i^*. \quad (5.42б)$$

Если, в частности, в качестве функции  $f$  в уравнении (5.40) выберем  $\zeta_i$  [или  $\xi_i$  вместо  $g$  в уравнении (5.42а)], то получим выражение

$$a_i = (\zeta_i, \theta \xi_i) / (\zeta_i, \xi_i), \quad (5.43)$$

которое обладает очень интересными свойствами. Допустим, что нам не известны ни  $\zeta_i$ , ни  $\xi_i$ , но мы можем попытаться угадать, каковы они; назовем эти угаданные функции  $\zeta_T$  и  $\xi_T$  (их называют обычно *пробные функции*). Они отличаются от истинных собственных функций:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_T &= \zeta_i + \delta \zeta_i, \\ \xi_T &= \xi_i + \delta \xi_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

причем ошибки обозначены  $\delta \zeta_i$  и  $\delta \xi_i$ . Тогда вместо  $a_i$  вычисляется

$$a_T = a_i + \delta a_i, \quad (5.45)$$

и уравнение (5.43) должно быть переписано в виде

$$a_T = (\zeta_T, \theta \xi_T) / (\zeta_T, \xi_T). \quad (5.46)$$

\* Иначе говоря, общее уравнение переноса нейтронов не инвариантно по отношению к замене знака времени (в отличие от одиогруппового приближения).

Следует оценить величину  $\delta a_i$ , т. е. ответить на вопрос, насколько точно можно вычислить собственные значения с помощью уравнения (5.43), используя только пробные функции.

Ответ на этот вопрос в какой-то мере удивителен. Подставим уравнения (5.44) и (5.45) в (5.46):

$$(a_i + \delta a_i) (\zeta_i + \delta \zeta_i, \xi_i + \delta \xi_i) = [\zeta_i + \delta \zeta_i, \theta (\xi_i + \delta \xi_i)] \quad (5.47)$$

или

$$(a_i + \delta a_i) [(\zeta_i, \xi_i) + (\delta \zeta_i, \xi_i) + (\zeta_i, \delta \xi_i) + (\delta \zeta_i, \delta \xi_i)] = \\ = [(\zeta_i, \theta \xi_i) + (\delta \zeta_i, \theta \xi_i) + (\zeta_i, \theta \delta \xi_i) + (\delta \zeta_i, \theta \delta \xi_i)]. \quad (5.48)$$

Это выражение упрощается, если принять во внимание, что

$$(\zeta_i, \theta \xi_i) = a_i (\zeta_i, \xi_i); \quad (5.49a)$$

$$(\delta \zeta_i, \theta \xi_i) = a_i (\delta \zeta_i, \xi_i) \quad (5.49b)$$

и

$$(\zeta_i, \theta \delta \xi_i) = (\theta + \zeta_i, \delta \xi_i); \quad (5.50a)$$

$$= (b_i \zeta_i, \delta \xi_i); \quad (5.50b)$$

$$= b_i^* (\zeta_i, \delta \xi_i); \quad (5.50b)$$

$$= a_i (\zeta_i, \delta \xi_i). \quad (5.50r)$$

Сокращая одинаковые члены в левой и правой частях уравнения (5.48), находим

$$\delta a_i = \frac{(\delta \zeta_i, \theta \delta \xi_i) - a_i (\delta \zeta_i, \delta \xi_i)}{(\zeta_i, \delta \xi_i)}. \quad (5.51)$$

Таким образом,  $\delta a_i$  пропорциональна произведению ошибок собственных функций. Грубо говоря, если каждая из функций  $\zeta_i$  и  $\xi_i$  известна с погрешностью 10%, то можно надеяться получить  $a_i$  с погрешностью 1%. В этом состоит одно из достоинств так называемого вариационного метода. Часто очень грубая оценка собственной функции дает возможность вычислить весьма точно собственное значение. Естественно, пробные функции должны выбираться с известными ограничениями; например, они должны обладать свойствами симметрии и удовлетворять граничным условиям, которые должны, как нам заранее известно, быть наложены на точное решение.

Предположим, что при вычислении двух различных величин  $a_T$  были использованы две разные системы пробных функций. Можно попытаться выяснить, какое из этих значений ближе к истинному. К сожалению, в общем случае на этот вопрос нельзя ответить. Однако это можно сделать, если в частном случае самосопряженного оператора  $\theta$  искать наименьшее или наибольшее

собственное значение (что обычно имеет место). Тогда уравнение (5.46) принимает вид

$$a_T = (\xi_T, \theta \xi_T) / (\xi_T, \xi_T). \quad (5.52)$$

Разложим  $\xi_T$  в ряд по  $\xi_i$ :

$$\xi_T = \sum_i \alpha_i \xi_i. \quad (5.53)$$

Тогда

$$a_T = \frac{\sum_{i,j} \alpha_i^* \alpha_j (\xi_i, \theta \xi_j)}{\sum_{i,j} \alpha_i^* \alpha_j (\xi_i, \xi_j)} = \frac{\sum_{i,j} \alpha_i^* \alpha_j (\xi_i, \xi_j) a_i}{\sum_{i,j} \alpha_i^* \alpha_j (\xi_i, \xi_j)} = \frac{\sum_i |\alpha_i|^2 a_i}{\sum_i |\alpha_i|^2}. \quad (5.54)$$

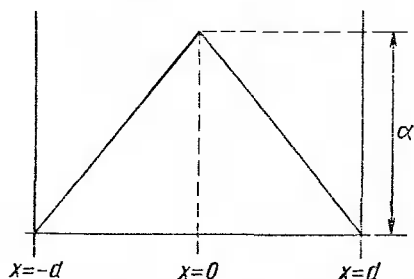


Рис. 5.1. Пробная функция для плоского реактора без отражателя

Здесь использовано уравнение (5.35). Из уравнения (5.54) следует, что

$$a_{\min} \leq a_T \leq a_{\max}. \quad (5.55)$$

Предположим, что ищется наименьшее собственное значение и что вычислены два значения  $a_T$  с использованием двух различных пробных функций. Тогда меньшее значение  $a_T$  ближе к истинному. Обычно принято параметризовать пробные функции; в этом случае минимум (или максимум) может быть найден дифференцированием по параметру.

В качестве примера вычислим собственное значение гомогенного плоского реактора без отражателя. Уравнение для потока (см. § 3.2) есть

$$\theta \phi = v_c \phi, \quad (5.56a)$$

где

$$\theta = -\frac{D}{\Sigma_f} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_f}. \quad (5.56b)$$

Воспользуемся пробной функцией, изображенной на рис. 5.1. Следует обратить внимание на то, что пробная функция выбрана четной функцией  $x$ , обращающейся в нуль на экстраполированных границах реактора. Для простоты расчетов положим, что  $d' = d$ . Тогда

$$\phi_T(x) = \begin{cases} \alpha(1+x/d) & x < 0; \\ \alpha(1-x/d) & x > 0. \end{cases} \quad (5.57a)$$

$$(5.57b)$$

Используя результаты приложения Б, получаем

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi_T(x) = -\frac{2\alpha}{d} \delta(x). \quad (5.58)$$

Вычисление вариационного выражения

$$v_{cT} = \frac{\int_{-d}^d dx \phi_T(x) \theta \phi_T(x)}{\int_{-d}^d dx \phi_T^2(x)} \quad (5.59)$$

при такой пробной функции не представляет труда. В результате получаем выражение

$$v_{cT} = \left( \frac{3}{d^2} D + \Sigma_a \right) / \Sigma_f. \quad (5.60a)$$

Его следует сравнить с точным значением:

$$v_c = \left( \frac{\pi^2}{4d^2} D + \Sigma_a \right) / \Sigma_f. \quad (5.60b)$$

Совпадение  $v_{cT}$  с  $v_c$  вполне удовлетворительное. Отметим, что в этом случае параметр  $\alpha$  не входит в конечное выражение для  $v_c$ . Если бы он входил, мы имели бы выражение  $v_c(\alpha)$ . Полагая производную  $dv_c/d\alpha = 0$  и решая полученное уравнение относительно  $\alpha$ , можно было бы получить наилучшее значение  $v_c$  при пробной функции данного типа. Если бы *учитывалась* длина линейной экстраполяции,  $d$  в уравнениях (5.57) и (5.58) следовало бы заменить  $d'$ , хотя пределы интегрирования в (5.59) сохранились бы теми же. Отметим также, что в случае использования в качестве пробной функции точного выражения для  $\phi(x)$ , т. е.  $\cos(\pi x/2d)$ , получается правильный результат, т. е. (5.60б).

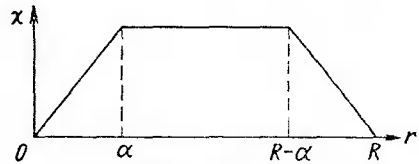


Рис. 5.2. Пробная функция для расчета лапласиана сферического реактора

Другим интересным приложением вариационного метода является вычисление лапласиана, т. е. наибольшего собственного значения уравнения

$$\nabla \phi^2 = -B^2 \phi. \quad (5.61)$$

Рассмотрим сферический реактор, для которого при  $\chi = r\phi$  (см. гл. 3)

$$\frac{d^2}{dr^2} \chi = -B^2 \chi. \quad (5.62)$$

Воспользуемся пробной функцией, изображенной на рис. 5.2. (Следует отметить, что при выборе этой функции проявлен здравый смысл: как и точное решение  $\chi(r) = \sin(\pi r/R)$ , пробная функция обращается в нуль при  $r=0$  и  $r=R$ ; по-прежнему полагается  $R=R'$ . Значение  $\alpha$  пока что не определено.)

Видно, что

$$\chi_T(r) = r/\alpha, \quad 0 \leq r \leq \alpha; \quad (5.63a)$$

$$\chi_T(r) = 1, \quad \alpha \leq r \leq R - \alpha; \quad (5.63b)$$

$$\chi_T(r) = (R - r)/\alpha, \quad R - \alpha \leq r \leq R. \quad (5.63b)$$

Так как

$$\chi_T'(r) = 1/\alpha, \quad 0 \leq r \leq \alpha; \quad (5.64a)$$

$$\chi_T'(r) = 0, \quad \alpha \leq r \leq R - \alpha; \quad (5.64b)$$

$$\chi_T'(r) = -1/\alpha, \quad R - \alpha \leq r \leq R, \quad (5.64b)$$

то

$$\begin{aligned} \chi_T''(r) = & [\chi_T'(\alpha + \varepsilon) - \chi_T'(\alpha - \varepsilon)] \delta(r - \alpha) + \\ & + [\chi_T'(R - \alpha + \varepsilon) - \chi_T'(R - \alpha - \varepsilon)] \delta(r - R + \alpha). \end{aligned}$$

(В уравнении (5.65)  $\varepsilon$  мало и положительно. Ищется предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ .) Таким образом,

$$\chi_T''(r) = -(1/\alpha) [\delta(r - \alpha) + \delta(r - R + \alpha)] \quad (5.66)$$

или

$$\int_0^R \chi_T(r) \chi_T''(r) dr = -\frac{2}{\alpha}. \quad (5.67)$$

Точно так же легко найти, что

$$\int_0^R [\chi_T(r)]^2 dr = \int_0^\alpha \frac{r^2}{\alpha^2} dr + \int_\alpha^{R-\alpha} dr + \int_{R-\alpha}^R \frac{(R-r)^2}{\alpha^2} dr \quad (5.68)$$

или

$$\int_0^R [\chi_T(r)]^2 dr = R - 4\alpha/3. \quad (5.69)$$

Итак,

$$-B_T^2 = \frac{\int_0^R \chi_T(r) \chi_T''(r) dr}{\int_0^R [\chi_T(r)]^2 dr} \quad (5.70)$$

или

$$-B_T^2(\alpha) = -\frac{2}{R\alpha - 4\alpha^2/3}. \quad (5.71)$$

Результат зависит от  $\alpha$ . Поскольку ищется максимальное собственное значение (т. е. минимальное значение  $B_T^2$ ), то нужно найти такое  $\alpha$ , при котором  $B_T^2$  минимально:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [-B_T^2(\alpha)] = \frac{2(R - 8\alpha/3)}{(R\alpha - 4\alpha^2/3)^2}. \quad (5.72)$$

Производная обращается в нуль при

$$\alpha = \alpha_m = 3R/8. \quad (5.73)$$

Тогда

$$-B_T^2(\alpha_m) = -32/(3R^2) = -10,67/R^2. \quad (5.74)$$

Этот результат можно сопоставить с точным значением

$$-B^2 = -\pi^2/R^2 = -9,86/R^2. \quad (5.75)$$

Вариационный принцип удобно использовать для определения критичности реактора с неоднородными свойствами. Предположим, например, что концентрации замедлителя и поглотителя постоянны по объему реактора, а топливо распределено таким образом, чтобы выровнять поле энерговыделения. Тогда приближенно

$$D = \text{const}; \quad (5.76a)$$

$$\Sigma_f = \Sigma_f(x); \quad (5.76б)$$

$$\Sigma_a = \Sigma_{am} + \alpha \Sigma_f(x) \quad (5.76в)$$

(вкладом поглощения урана в  $D$  пренебрегаем). Следовательно,

$$v_{cT} = \frac{\int dx \phi_T(x) \left[ -\frac{D}{\Sigma_f(x)} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha \Sigma_f(x) + \Sigma_{am}}{\Sigma_f(x)} \right] \phi_T(x)}{\int dx [\phi_T(x)]^2}, \quad (5.77)$$

и интегрирование может быть выполнено при любой форме функции  $\Sigma_f(x)$  и при любом выборе пробной функции. Если загрузка топлива не очень отличается от однородной, в качестве пробной функции имеет смысл выбрать распределение потока, соответствующее однородному распределению топлива, т. е.  $\cos(\pi x/2d')$ . Если же загрузка топлива резко возрастает по направлению к внешней границе реактора, представляется целесообразным выбирать пробную функцию, уплотненную в центре. В любом случае ее следует выбирать симметричной относительно  $x=0$  и обращаемой в нуль на (экстраполированной) границе системы\*.

Применение этого метода в случае какой-либо другой геометрий или другого распределения топлива очевидно, и мы поэтому не будем обсуждать его далее.

#### § 5.4. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Развитый в § 5.3 вариационный принцип наиболее эффективно может быть использован в том случае, когда представляющий интерес оператор только слегка отличается от другого оператора, для которого заранее известны собственные функции и собственные значения. Это может иметь место, например, когда гомогенный реактор без отражателя *возмущается* при введении небольшого количест-

\* Если распределение топлива симметрично.

ва поглощающего материала в одном или нескольких местах реактора. В этом случае оператор  $\theta$  может быть записан как сумма оператора  $\theta_0$ , собственные функции и собственные значения которого известны, и возмущения  $\delta\theta$ :

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta, \quad (5.78a)$$

где

$$\theta_0 \xi_k^{(0)} = a_k^{(0)} \xi_k^{(0)}. \quad (5.78б)$$

Кроме того, считаются известными собственные функции и собственные значения оператора  $\theta_0^+$ :

$$\theta_0^+ \zeta_k^{(0)} = a_k^{* (0)} \zeta_k^{(0)}. \quad (5.78в)$$

Следует найти собственные значения  $a_h$  оператора  $\theta$ :

$$\theta \xi_h = a_h \xi_h. \quad (5.79)$$

Используя вариационный принцип для нахождения  $a_h$ , имеем

$$a_h \approx (\zeta_k^{(0)}, \theta \xi_k^{(0)}) / (\zeta_k^{(0)}, \xi_k^{(0)}). \quad (5.80)$$

Иначе говоря, мы используем собственную функцию и сопряженную функцию невозмущенного реактора в качестве пробных функций для нахождения  $a_h$ .

С учетом уравнений (5.78) и (5.80)

$$a_h - a_k^{(0)} = (\zeta_k^{(0)}, \delta\theta \xi_k^{(0)}) / (\zeta_k^{(0)}, \xi_k^{(0)}). \quad (5.81)$$

Уравнение (5.81) является основной формулой теории возмущений. Оно описывает изменение собственного значения при возмущении системы, т. е. при изменении оператора, приводящем к изменению собственной функции. Если обозначить  $a_h - a_k^0 = \delta a_h$ , то

$$\delta a_h = (\zeta_k^{(0)}, \delta\theta \xi_k^{(0)}) / (\zeta_k^{(0)}, \xi_k^{(0)}). \quad (5.82)$$

Полученная здесь формула теории возмущений первого порядка достаточно точна даже при сравнительно больших возмущениях  $\delta\theta$ , так как она получена с использованием вариационного принципа.

При использовании теории возмущений в качестве собственного значения удобно брать не  $v_c$ , а  $\Lambda$  из уравнения (3.4)\*:

$$\theta \phi = \Lambda \phi, \quad (5.83)$$

где

$$\theta = \bar{v} (-\nabla \cdot D \nabla + \Sigma_a - v \Sigma_f). \quad (5.84)$$

Если под  $\Lambda$  понимать наименьшее собственное значение уравнения (5.83), то  $\Lambda^{-1}$  представляет собой установившийся период, который связан с  $\rho$  уравнением обратных часов (4.34) или приближенной

\* Такой подход можно применить и в вариационном методе. Его преимущество состоит в том, что отпадает необходимость вычислять вариации величины типа  $D/\Sigma_f$  или  $\Sigma_a/\Sigma_f$ .

формулой (4.47). Используя  $v_c$  в качестве собственного значения, ценой некоторого усложнения вариационного выражения можно избежать решения уравнения переноса (см. сноску на с. 110).

Из уравнения (5.84) имеем

$$\delta\theta = (\delta\bar{v}/\bar{v}) \theta^{(0)} + \bar{v} (-\nabla \cdot \delta D \nabla + \delta \Sigma_a - \nu \delta \Sigma_f). \quad (5.85)$$

Необходимо предусмотреть возможность того, что средняя скорость нейтронов  $\bar{v}$  может меняться, например при изменении температуры реактора. Тогда уравнение (5.82) дает (напомним, что  $\theta = \theta^+$  в однокоростном приближении)

$$\delta\Lambda = \left[ (\delta\bar{v}/\bar{v}) \int \phi^{(0)}(\mathbf{r}) \theta^{(0)} \phi^{(0)}(\mathbf{r}) d^3 r + \bar{v} \int \phi^{(0)}(\mathbf{r}) (-\nabla \cdot \delta D \nabla + \delta \Sigma_a - \nu \delta \Sigma_f) \phi^{(0)}(\mathbf{r}) d^3 r \right] / \int [\phi^{(0)}(\mathbf{r})]^2 d^3 r. \quad (5.86)$$

Первые два слагаемых могут быть упрощены, так как

$$\int \phi^{(0)} \theta \phi^{(0)} d^3 r = \Lambda^{(0)} \int (\phi^{(0)})^2 \phi^{(0)} d^3 r, \quad (5.87)$$

и после интегрирования по частям с учетом обращения в нуль поверхностных членов

$$\int \phi^{(0)} \nabla \cdot \delta D \nabla \phi^{(0)} d^3 r = - \int (\nabla \phi^{(0)})^2 \delta D d^3 r. \quad (5.88)$$

Тогда

$$\delta\Lambda = \frac{\Lambda^{(0)} \delta\bar{v}}{\bar{v}} + \bar{v} \frac{\int [(\bar{v} \phi^{(0)})^2 \delta D + (\phi^{(0)})^2 (\delta \Sigma_a - \nu \delta \Sigma_f)] d^3 r}{\int [\phi^{(0)}(\mathbf{r})]^2 d^3 r}. \quad (5.89)$$

В случае возмущения *критического* реактора ( $\Lambda^{(0)} = 0$ ) первое слагаемое в правой части выражения (5.89) исчезает.

Значение  $\delta\Lambda$  может быть связано с  $\rho$  более удобным образом с помощью формулы обратных часов, если  $\delta\Lambda$  мало (т. е.  $T$  велико). Тогда  $k \approx 1$ , и из уравнения (4.34) следует, что

$$\rho \approx (1/T) (l_{\text{эф}} + \sum_i \beta_i / \lambda_i). \quad (5.90)$$

Эта формула представляет собой *уравнение обратных часов в случае малой реактивности*. Величина

$$l_{\text{эф}} + \sum_i \beta_i / \lambda_i$$

есть среднее время жизни нейтронов с учетом запаздывающих нейтронов. Видно (см. гл. 4), что первое слагаемое в этом выражении пренебрежимо мало по сравнению со вторым, так что с хорошей степенью точности уравнение (5.90) можно переписать в виде

$$\rho = \sum_i \beta_i / (\lambda_i T). \quad (5.91)$$

Если формула (5.89) относится к первоначально критическому реактору, то

$$\delta\Lambda = \Lambda = -1/T, \quad (5.92)$$

так что, наконец, \*

$$\frac{\rho}{\beta} = -\frac{\bar{v}}{\lambda} \frac{\int [(\nabla \phi^{(0)})^2 \delta D + (\phi^{(0)})^2 (\delta \Sigma_a - \nu \delta \Sigma_f)] d^3 r}{\int (\phi^{(0)})^2 d^3 r}, \quad (5.93)$$

где

$$1/\lambda = (1/\beta) \sum_i \beta_i / \lambda_i.$$

Иногда используется понятие *коэффициент реактивности R* (раньше использовался термин *коэффициент опасности*, но в настоящее время он больше не применяется). Оно характеризует реактивность, вводимую в критический реактор маленьким образцом из представляющего интерес материала в данной точке реактора. Обычно коэффициент реактивности выражается в центах на моль. Определяют его следующим образом. Если образец объемом  $\delta V$  вводится в точке  $r_0$ , то в предположении, что  $\phi_0$  постоянно по  $\delta V$ ,

$$\frac{\rho}{\beta} = \mathcal{R} = \frac{\bar{v}}{\lambda} \frac{\{-\delta D [\nabla \phi^{(0)}(r_0)]^2 + [(\nu \bar{\Sigma}_f - \bar{\Sigma}_a) (\phi^{(0)}(r_0))^2\} \delta V}{\int (\phi^{(0)})^2 d^3 r}, \quad (5.94)$$

где величины с чертой относятся к образцу. Если рассеяние нейтронов в образце мало, первым членом можно пренебречь, и

$$\bar{\Sigma} = N \bar{\sigma} \quad (5.95)$$

или

$$\bar{\Sigma} = L_0 m \bar{\sigma} / \delta V, \quad (5.96)$$

где, как и прежде,  $L_0$  — число Авогадро, а  $m$  — число молей. Тогда

$$R = \frac{\mathcal{R}}{m} = \frac{\bar{v} L_0}{\lambda} \frac{(\nu \bar{\sigma}_f - \bar{\sigma}_a) [\phi^{(0)}(r_0)]^2}{\int [\phi^{(0)}(r)]^2 d^3 r}. \quad (5.97)$$

Иногда  $R$  вычисляют, выполняя два расчета  $\nu_c$  или  $k$ , один с образцом, а другой — без него. Однако описанный здесь метод предпочтителен, поскольку при этом не требуется находить малую разность больших величин.

Из уравнения (5.97) следует, что, как и должно быть, увеличение сечения деления приводит к возрастанию реактивности, а увеличение сечения поглощения — наоборот, к снижению ее. Кроме того, увеличение  $D$  всегда уменьшает реактивность, так как при этом возрастает утечка нейтронов\*\*.

\* В случае несамосопряженного оператора  $\nabla (\phi^{(0)})^2 \rightarrow \nabla \phi^{(0)} + \times \nabla \phi^{(0)}$ ,  $(\phi^{(0)})^2 \rightarrow \phi^{(0)+} \phi^{(0)}$ . В остальном формула остается той же самой, за исключением того, что при учете энергетической зависимости могут появиться дополнительные возмущения.

\*\* Это неверно в случае, если учитывается энергетическая зависимость.

## § 5.5. ФУНКЦИЯ ЦЕННОСТИ

Представляет интерес рассмотреть поведение критического реактора после того, как в некоторую точку реактора введен дополнительный нейтрон. Очевидно, свойства реактора при этом не меняются, так что система остается критической. Поэтому введение дополнительного нейтрона приводит к переходным процессам, которые затухают со временем, так что реактор оказывается на новом, более высоком уровне мощности.

Можно рассмотреть эту проблему в более общем виде, чем мы это делали до сих пор, не ограничиваясь односкоростным приближением. Допустим, что некая линейная система описывается уравнением вида

$$M\psi = 0, \quad (5.98)$$

причем линейный оператор  $M$  имеет собственные функции  $\xi_n$ , а сопряженный оператор  $M^+$  —  $\zeta_n$ :

$$M\xi_n = \Lambda_n \xi_n; \quad (5.99a)$$

$$M^+ \zeta_n = \Lambda_n^* \zeta_n. \quad (5.99b)$$

Рассмотрим теперь поведение системы после введения возмущения в виде единичного импульса

$$\left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + M \right) \psi(t) = \delta(t) \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0), \quad (5.100)$$

где вектор  $\mathbf{w}$  означает совокупность всех переменных, от которых может зависеть  $\psi^*$ .

Разложим решение этого уравнения в ряд по собственным функциям

$$\psi(t) = \sum_n \alpha_n(t) \xi_n(\mathbf{w}), \quad (5.101)$$

так что

$$\sum_n \xi_n [(\dot{\alpha}_n/v) + \Lambda_n \alpha_n] = \delta(t) \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0). \quad (5.102)$$

Умножение на  $\zeta_m$  и интегрирование по  $d\mathbf{w}$  дает (так как  $(\zeta_m, \xi_n) = \delta_{mn}$ )

$$(\dot{\alpha}_m/v) + \Lambda_m \alpha_m = \delta(t) \zeta_n(\mathbf{w}_0). \quad (5.103)$$

Преобразование Лапласа этого уравнения есть

$$\left( \frac{p}{v} + \Lambda_m \right) \alpha_m(p) = \zeta_n(\mathbf{w}_0) + \frac{1}{v} \alpha_m(0), \quad (5.104)$$

так что

$$\alpha_m(t) = [v \zeta_n(\mathbf{w}_0) + \alpha_m(0)] \exp(-\Lambda_m vt), \quad (5.105)$$

\* В односкоростном приближении  $\mathbf{w} = \mathbf{r}$ , в общем случае  $\mathbf{w} = (\mathbf{r}, E)$ .

и при  $t \rightarrow \infty$

$$\psi(t) \rightarrow [\bar{v} \xi_0(\mathbf{w}_0) + \alpha_0(0)] \xi_0(\mathbf{w}) \exp(-\Lambda_0 \bar{v} t), \quad (5.106)$$

где  $\Lambda_0$  — наименьшее собственное значение. Очевидно, поскольку система первоначально (и после достаточно продолжительного времени) находится в критическом состоянии,  $\Lambda_0 = 0$  и

$$\phi(t) = \psi_0 + \bar{v} \xi_0(\mathbf{w}_0) \xi_0(\mathbf{w}), \quad (5.107)$$

где  $\alpha_0(0) \xi_0$  заменено  $\psi_0$ . Изменение  $\phi$ , таким образом, пропорционально сопряженной функции в той точке (фазового пространства), где вводилось возмущение.

Уравнение переноса в односкоростном приближении является самосопряженным, и в этом случае увеличение потока благодаря введению нейтрона в точке  $\mathbf{r}_0$  пропорционально  $\phi^{(0)}(\mathbf{r}_0)^*$ .

В силу сказанного выше сопряженная функция иногда называется *функцией ценности*. Если нейтрон вводится в такую точку реактора, где сопряженная функция велика (мала), соответствующее увеличение мощности будет велико (мало), так что введенный нейтрон обладает большей (меньшей) *ценностью* (очевидно, все эти рассуждения справедливы и в том случае, когда нейтрон изымается из некоторой точки реактора, только при этом будет иметь место *уменьшение* мощности. Отметим также, что в рассмотрение не были включены запаздывающие нейтроны, что сделано исключительно ради простоты. Их учет не меняет ни способа решения поставленной задачи, ни полученных результатов).

Удобно нормировать функцию ценности специальным образом, как это сделал Гурвиц [2]. Полное число делений в реакторе  $N_F$  (пропорциональное мощности) есть

$$N_F = \int \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r. \quad (5.108)$$

До введения нейтрона

$$N_{F_0} = \alpha_0(0) \int \Sigma_f(\mathbf{r}) \xi_0(\mathbf{r}) d^3r, \quad (5.109a)$$

а через большой промежуток времени после введения

$$N_{F_\infty} = [\bar{v} \xi_0(\mathbf{r}_0) + \alpha_0(0)] \int \Sigma_f(\mathbf{r}) \xi_0(\mathbf{r}) d^3r. \quad (5.109b)$$

Изменение числа делений, таким образом, определяется выражением

$$\Delta N_F = \bar{v} \xi_0(\mathbf{r}_0) \int \Sigma_f(\mathbf{r}) \xi_0(\mathbf{r}) d^3r \quad (5.110)$$

или

$$\Delta N_F / N_F = \bar{v} \xi_0(\mathbf{r}_0) / \alpha_0(0). \quad (5.111)$$

Эти соотношения были использованы Гурвицем для построения теории возмущений в элегантно форме.

\* В общем случае, как мы видели, увеличение потока пропорционально сопряженной функции  $\phi^{(0)+}(\mathbf{w}_0)$ , т. е. если нейтрон со скоростью  $v_0$  введен в точку  $\mathbf{r}_0$ , изменение потока пропорционально решению сопряженного уравнения переноса  $\psi^+(\mathbf{r}_0, v_0)$ .

В критическом реакторе функция ценности  $\xi_0$  должна быть нормирована так, чтобы

$$\int v \Sigma_f \phi \xi_0 d^3r = \int \Sigma_f \phi d^3r, \quad (5.112)$$

так как каждому делению в следующем поколении нейтронов должно соответствовать *одно* деление в предыдущем. Нормированная таким образом функция ценности [Гурвиц обозначил ее  $F(\mathbf{r})$ ] имеет вид

$$F(\mathbf{r}) = \frac{\xi_0(\mathbf{r}) \int \Sigma_f(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') d^3r'}{v \int \Sigma_f(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \xi_0(\mathbf{r}') d^3r'}. \quad (5.113)$$

С использованием  $F(\mathbf{r})$  формула теории возмущений имеет очень простой вид. Пусть, например, в точку  $\mathbf{r}_0$  реактора введен поглотитель. Это эквивалентно появлению отрицательного источника нейтронов  $\Sigma_a(\mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0)$ , а изменение числа делений за счет введения поглотителя есть просто

$$\Sigma_a(\mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) F(\mathbf{r}_0),$$

так что

$$\Delta k = - \Sigma_a(\mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) F(\mathbf{r}_0). \quad (5.114)$$

Подобным образом могут быть рассмотрены и другие возмущения.

### § 5.6. СУПЕРВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

В § 5.3 и 5.4 мы рассмотрели расчет собственных значений, сначала используя вариационный принцип, а затем теорию возмущений, причем при вычислении скалярных произведений использовались соответствующие пробные функции. Можно получить весьма точную оценку всех собственных значений оператора, комбинируя эти методы.

Рассмотрим представление оператора  $\theta$  в форме (5.78а). Предположим, что «малый» оператор  $\delta\theta$  может быть записан в виде

$$\delta\theta = \varepsilon\theta_1, \quad (5.115)$$

где  $\varepsilon$  — малая константа, а оператор  $\theta_1$  сравним с  $\theta_0$  (т. е. величина  $(\xi, \theta_0\xi)$  сравнима с  $(\xi, \theta_1\xi)$ ). Можно разложить собственные функции операторов  $\theta$  и  $\theta^+$  в ряд по собственным функциям операторов  $\theta_0$  и  $\theta_0^+$  [ср. с уравнениями (5.79) и (5.87)]:

$$\xi_k = \sum_{k'} b_{kk'} \xi_k^{(0)}; \quad (5.116a)$$

$$\zeta_k = \sum_{k'} c_{kk'} \zeta_k^{(0)}. \quad (5.116б)$$

Предположим, что мы можем разложить  $b_{kk'}$  и  $c_{kk'}$  в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$b_{kk'} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n b_{kk'}^{(n)}; \quad (5.117a)$$

$$c_{kk'} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n c_{kk'}^{(n)}. \quad (5.117b)$$

Первые члены в (5.117a) и (5.117b) должны давать собственные векторы  $\theta_0$  и  $\theta_0^+$ , так что

$$b_{kk'}^{(0)} = c_{kk'}^{(0)} = \delta_{kk'}. \quad (5.118)$$

Предположим, что мы вычислили  $\xi_k$  и  $\zeta_k$  правильно с точностью до  $\varepsilon^N$ . Иначе говоря, имеем приближенные собственные функции

$$\xi_k^{(N)} = \sum_{n=0}^N \sum_{k'} b_{kk'}^{(n)} \varepsilon^n \xi_{k'}^{(0)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} B_{kk'}^{(n)} \varepsilon^n \xi_{k'}^{(0)}; \quad (5.119a)$$

$$\zeta_k^{(N)} = \sum_{n=0}^N \sum_{k'} c_{kk'}^{(n)} \varepsilon^n \zeta_{k'}^{(0)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} C_{kk'}^{(n)} \varepsilon^n \zeta_{k'}^{(0)}. \quad (5.119b)$$

Вклад в решение членов порядка  $\varepsilon^{N+1}$  и выше может присутствовать (обычно  $B_{kk'}^{(n)}$  и  $C_{kk'}^{(n)}$  — не нули), но его точность не гарантируется

$$(B_{kk'}^{(n)} \neq b_{kk'}^{(n)}, \quad C_{kk'}^{(n)} \neq c_{kk'}^{(n)}).$$

Сравнивая (5.117) и (5.119), можно заключить, что собственные функции могут быть представлены как суммы  $\zeta_k^{(N)}$  (или  $\xi_k^{(N)}$ ) плюс члены более высокого порядка:

$$\xi_k = \xi_k^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} b'_{kk'}^{(n)} \varepsilon^n \xi_{k'}^{(0)}; \quad (5.120a)$$

$$\zeta_k = \zeta_k^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} c'_{kk'}^{(n)} \varepsilon^n \zeta_{k'}^{(0)}; \quad (5.120b)$$

где

$$b'_{kk'}^{(n)} = b_{kk'}^{(n)} - B_{kk'}^{(n)}; \quad (5.121a)$$

$$c'_{kk'}^{(n)} = c_{kk'}^{(n)} - C_{kk'}^{(n)}. \quad (5.121b)$$

Уравнение (5.79) может быть теперь записано в виде

$$\begin{aligned} (\theta_0 + \varepsilon\theta_1)(\xi_k^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} \varepsilon^n b'_{kk'}^{(n)} \xi_{k'}^{(0)}) = \\ = a_k \left( \xi_k^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} \varepsilon^n b'_{kk'}^{(n)} \xi_{k'}^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (5.122a)$$

Подобным же образом может быть записано уравнение для сопряженной функции:

$$\begin{aligned} (\theta_0^+ + \varepsilon\theta_1^+) \left( \zeta_k^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} \varepsilon^n c_{kk'}^{(n)} \zeta_{k'}^{(0)} \right) = \\ = a_k^* \left( \zeta_k^{(N)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{k'} \varepsilon^n c_{kk'}^{(n)} \zeta_{k'}^{(0)} \right). \end{aligned} \quad (5.122б)$$

Попытаемся улучшить наше приближение, переписав уравнения (5.122а) и (5.122б) с точностью до членов порядка  $\varepsilon^{N+1}$ :

$$\begin{aligned} (\theta_0 + \varepsilon\theta_1) \left( \xi_k^{(N)} + \varepsilon^{N+1} \sum_{k'} b_{kk'}^{(N+1)} \xi_{k'}^{(N)} \right) = \\ = a_k \left( \xi_k^{(N)} + \varepsilon^{N+1} \sum_{k'} b_{kk'}^{(N+1)} \xi_{k'}^{(N)} \right). \end{aligned} \quad (5.123а)$$

Здесь отброшены слагаемые более высокого порядка, чем  $\varepsilon^{N+1}$ , и использован тот факт, что с той же степенью точности  $\varepsilon^{N+1} \xi_{k'}^{(0)} = \varepsilon^{N+1} \xi_{k'}^{(N)}$ . Уравнения (5.122а) и (5.123а) совпадают вплоть до членов порядка  $\varepsilon^{N+1}$ . Оба уравнения содержат слагаемые и более высокого порядка, но они различны для каждого из уравнений. Существенно, что решение (5.123) является точным вплоть до членов порядка  $\varepsilon^{N+1}$ .

Аналогично с точностью до членов порядка  $\varepsilon^{N+1}$  можно переписать уравнение (5.122б):

$$\begin{aligned} (\theta_0^+ + \varepsilon\theta_1^+) \left( \zeta_k^{(N)} + \varepsilon^{N+1} \sum_{k'} c_{kk'}^{(N+1)} \zeta_{k'}^{(N)} \right) = \\ = a_k^* \left( \zeta_k^{(N)} + \varepsilon^{N+1} \sum_{k'} c_{kk'}^{(N+1)} \zeta_{k'}^{(N)} \right). \end{aligned} \quad (5.123б)$$

Вычислим скалярное произведение обеих частей уравнения (5.123а) и  $\zeta_{k_0}^{(N)}$ . В § 5.3 было показано, что вариационная оценка собственного значения точна вплоть до членов второго порядка малости, если собственные функции точны до первого. Поэтому оценка собственного значения

$$a_{kN} \equiv (\zeta_k^{(N)}, \theta \xi_k^{(N)}) / (\zeta_k^{(N)}, \xi_k^{(N)}) \quad (5.124)$$

точна вплоть до членов  $\varepsilon^{2N}$ . Рассмотрим также скалярное произведение  $(\zeta_{k''}^{(N)}, \theta \xi_{k'}^{(N)})$ . Оценка нам потребуется с точностью до  $\varepsilon^0$  при  $k' \neq k''$ :

$$\begin{aligned} (\zeta_{k''}^{(N)}, \theta \xi_{k'}^{(N)}) &= (\zeta_{k''}^{(0)}, \theta_0 \xi_{k'}^{(0)}) + 0(\varepsilon) = \\ &= a_{k''}^{(0)} \delta_{k''k'} (\zeta_{k''}^{(0)}, \xi_{k'}^{(0)}) + 0(\varepsilon) = \\ &= a_{k''N} \delta_{k''k'} (\zeta_{k''}^{(N)}, \xi_{k'}^{(N)}) + 0(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.125)$$

Теперь вычислим искомое скалярное произведение ( $k_0 \neq k$ ):

$$\begin{aligned} & (\zeta_{k_0}^{(N)}, \theta \xi_k^{(N)}) + \varepsilon^{N+1} \sum_{k'} b'_{kk'}^{(N+1)} (\zeta_{k_0}^{(N)}, \theta \xi_{k'}^{(N)}) = \\ & = a_k \left[ (\zeta_{k_0}^{(N)}, \xi_k^{(N)}) + \varepsilon^{N+1} \sum_{k'} b'_{kk'}^{(N+1)} (\zeta_{k_0}^{(N)}, \xi_{k'}^{(N)}) \right]. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Конечно,  $\zeta_{k_0}^{(N)}$  и  $\xi_k^{(N)}$  ортогональны при  $k_0 \neq k$ .

С точностью до  $\varepsilon^{2N}$  можно  $a_k$  заменить  $a_{kN}$  [см. уравнение (5.124)]. В слагаемом, содержащем множитель  $\varepsilon^{N+1}$ , мы должны вычислить скалярное произведение с точностью до  $\varepsilon^0$ , так что можно использовать уравнение (5.125). Тогда с точностью до  $\varepsilon^{N+1}$  уравнение (5.126) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (\zeta_{k_0}^{(N)}, \theta \xi_k^{(N)}) + \varepsilon^{N+1} b'_{kk_0}^{(N+1)} a_{k_0N} (\zeta_{k_0}^{(N)}, \xi_k^{(N)}) = \\ & = a_{kN} \varepsilon^{N+1} b'_{kk_0}^{(N+1)} (\zeta_{k_0}^{(N)}, \xi_k^{(N)}). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Решение этого уравнения есть

$$\varepsilon^{N+1} b'_{kk_0}^{(N+1)} = \frac{(\zeta_{k_0}^{(N)}, \theta \xi_k^{(N)})}{a_{kN} (\zeta_k^{(N)}, \xi_k^{(N)}) - a_{k_0N} (\zeta_{k_0}^{(N)}, \xi_k^{(N)})}, \quad k \neq k_0. \quad (5.128)$$

Любое значение  $b'_{kk_0}^{(N+1)}$  обеспечивает решение с точностью до  $\varepsilon^{N+1}$ . Простейший случай  $b = 0$ . Естественно, необходимо соблюдать некоторую осторожность; выражение (5.128) является решением, только если

$$a_{kN} \neq a_{k_0N}. \quad (5.129)$$

При выполнении этого условия с помощью уравнений (5.128) и (5.120а) можно найти собственную функцию с точностью до  $\varepsilon^{N+1}$ :

$$\xi_k^{(N+1)} = \xi_k^{(N)} + \sum_{k' \neq k} \frac{(\zeta_{k'}^{(N)}, \theta \xi_k^{(N)}) \xi_{k'}^{(N)}}{a_{kN} (\zeta_{k'}^{(N)}, \xi_{k'}^{(N)}) - a_{k'N} (\zeta_{k'}^{(N)}, \xi_k^{(N)})}. \quad (5.130а)$$

В последнем слагаемом этого выражения использован тот факт, что с точностью до  $\varepsilon^{N+1}$   $\varepsilon^{N+1} \xi_k^{(0)} = \varepsilon^{N+1} \xi_k^{(N)}$ .

Аналогично

$$\zeta_k^{(N+1)} = \zeta_k^{(N)} + \sum_{k' \neq k} \frac{(\xi_{k'}^{(N)}, \theta \zeta_k^{(N)}) \zeta_{k'}^{(N)}}{a_{kN}^* (\xi_k^{(N)}, \zeta_k^{(N)}) - a_{k'N}^* (\xi_{k'}^{(N)}, \zeta_k^{(N)})}. \quad (5.130б)$$

Для применения изложенного метода требуется некоторая начальная оценка собственных функций операторов  $\theta_0$  и  $\theta_0^+$ . Затем с помощью (5.124) может быть определено собственное значение оператора  $\theta$ . Далее собственные функции улучшаются с использованием уравнений (5.130а) и (5.130б), и итерации могут продолжаться до получения желаемой степени точности. Сходимость должна быть очень быстрой, так как на  $N$ -м шаге собственное значение оценивается с точностью до  $\varepsilon^{2N}$ .

**§ 5.7. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП  
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ \***

Вариационный принцип, описанный в § 5.3, применялся для оценки собственных значений. Другими словами, он использовался для решения однородных уравнений. Вариационный принцип может быть развит и для *неоднородных* уравнений. Такой подход все более широко используется для решения задач реакторной физики.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\theta \phi(\omega) = f(\omega), \quad (5.131)$$

где, как и прежде,  $\theta$  — линейный оператор, а  $\omega$  обозначает совокупность всех переменных, от которых может зависеть поток  $\phi$ . Функция  $f(\omega)$  считается известной (например, это может быть источник нейтронов). Решение  $\phi(\omega)$  может быть получено, если существует возможность определить обратный оператор  $\theta^{-1}$ , например, численными методами, описанными в гл. 6. При проектировании реактора может возникнуть потребность получить некоторую достоверную информацию, например полное число делений в реакторе, в то время как поток нейтронов не представляет интереса. В этом случае полезно ввести сопряженное неоднородное уравнение

$$\theta^+ \phi^+(\omega) = g(\omega), \quad (5.132)$$

где  $g$  — пока еще не определенный источник. Ниже показано, как его следует выбирать для наших целей.

Рассмотрим величину  $J$ , определенную соотношением

$$J = -(\phi^+, \theta \phi) + (\phi^+, f) + (g, \phi) \quad (5.133)$$

и называемую *функционалом потока  $\phi$  и сопряженной функции  $\phi^+$* . Вид функционала  $J$  не дает возможности определить, зачем он нужен. Чтобы выяснить это, воспользуемся уравнением (5.131) для первого слагаемого (5.133). Тогда

$$J = -(\phi^+, f) + (\phi^+, f) + (g, \phi) = (g, \phi). \quad (5.134)$$

Напомним, что  $g$  — источник для сопряженной функции  $\phi^+$ . Таким образом, мы не только выяснили пользу введения функционала, но и определили выбор  $g$ . Если мы, например, хотим определить полное число поглощений нейтронов в  $^{238}\text{U}$ , то в качестве источника  $g$  следует выбрать сечение поглощения  $^{238}\text{U}$ , и тогда  $J$  будет представлять собой искомую величину.

Используя определение  $\theta^+$ , функционал  $J$  можно переписать так:

$$J = (\theta^+ \phi^+, \phi) + (\phi^+, f) + (g, \phi), \quad (5.135a)$$

\* Автор признателен доктору А. Булларду за значительную помощь при подготовке этого параграфа. Впервые рассматриваемый метод опубликован в работе [3].

а с использованием (5.132)

$$J = (\phi^+, \bar{f}). \quad (5.135б)$$

Таким образом, показано, что  $J$  имеет конкретный физический смысл. Однако остается открытым вопрос о том, почему использован этот довольно сложный метод получения выражений для этих величин. Причина в том, что функционал  $J$  вариационно стационарен до второго порядка. Это означает, что при вычислении  $J$  с использованием приближенных значений  $\phi$  и  $\phi^+$  в уравнении (5.133) ошибка  $J$  будет второго порядка малости по сравнению с ошибками в  $\phi$  и  $\phi^+$ .

Для доказательства этого утверждения введем пробные функции  $\phi_T$  и  $\phi_{\bar{T}}$ , такие, что

$$\phi_T = \phi + \delta\phi \quad (5.136а)$$

и

$$\phi_{\bar{T}} = \phi^+ + \delta\phi^+. \quad (5.136б)$$

Тогда ошибка  $\delta J$  будет пропорциональна  $\delta\phi\delta\phi^+$ . В самом деле, вычислим

$$\begin{aligned} J + \delta J &= -(\phi_{\bar{T}}, \theta\phi_T) + (\phi_{\bar{T}}, \bar{f}) + (g, \phi_T) = \\ &= -(\phi^+ + \delta\phi^+, \theta[\phi^+ + \delta\phi]) + (\phi^+ + \delta\phi^+, \bar{f}) + \\ &\quad + (g, \phi + \delta\phi). \end{aligned} \quad (5.137а)$$

Раскрывая скобки и используя (5.134а), получаем

$$\begin{aligned} \delta J &= -(\phi^+, \theta\delta\phi) - (\delta\phi^+, \theta\phi) - (\delta\phi^+, \theta\delta\phi) + \\ &\quad + (\delta\phi^+, \bar{f}) + (g, \delta\phi). \end{aligned} \quad (5.137б)$$

Используя определения (5.22) и (5.132), первое слагаемое можно преобразовать к виду

$$(\phi^+, \theta\delta\phi) = (\theta^+\phi^+, \delta\phi) = (g, \delta\phi), \quad (5.138)$$

и оно взаимно уничтожается с последним. Аналогично второе слагаемое взаимно уничтожается с предпоследним, так что

$$\delta J = -(\delta\phi^+, \theta\delta\phi), \quad (5.139)$$

что доказывает сделанное утверждение.

Пример применения этого метода уже упоминался: определение полного числа делений в реакторе. В соответствии с уравнением (5.134б) и определением скалярного произведения

$$J = \int d\omega g(\omega) \phi(\omega), \quad (5.140)$$

причем  $g$  предполагается действительным.

Предположим, что под источником в уравнении (5.132) понимается сечение деления. Тогда  $\phi^+$  есть решение сопряженного диффузионного уравнения (или уравнения переноса) с источником,

который имеет ту же пространственную и энергетическую зависимость, что и сечение деления. Если решение этого уравнения, а также уравнения для потока (5.131) может быть найдено некоторым приближенным и быстрым методом, то выражение (5.133) будет давать с точностью до второго порядка полное число делений, т. е.

$$J = \int d\omega \Sigma_f(\omega) \phi(\omega). \quad (5.141)$$

В качестве простого примера приложения рассмотренного метода рассчитаем полное число поглощений в пластине (область 1) толщиной  $2a$  с источниками  $q$ , помещенной в среду (область 2) (рис. 5.3). Уравнения для потока и сопряженной функции имеют вид

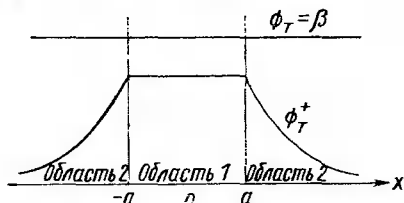


Рис. 5.3. Пробные функции  $\phi_T^+$  и  $\phi_T$

$$\theta \phi = -D \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) + \Sigma_a \phi(x) = q; \quad (5.142a)$$

$$\theta^+ \phi^+ = -D \frac{d^2}{dx^2} \phi^+(x) + \Sigma_a \phi^+(x) = \Sigma_{a1} H(x), \quad (5.142b)$$

где

$$H(x) = \begin{cases} 1 & -a \leq x \leq a; \\ 0 & |x| > a. \end{cases} \quad (5.143)$$

Выберем в качестве пробных функций

$$\phi_T^+ = \begin{cases} \alpha, & |x| < a; \\ \alpha \exp(-|x-a|/L), & |x| > a; \end{cases} \quad (5.144a)$$

$$\phi_T = \beta. \quad (5.145)$$

Отметим, что функция  $\phi_T^+$  непрерывна, симметрична относительно  $x=0$  и обращается в нуль на бесконечности.

Функционал

$$J = -2 \left[ \int_0^\infty \phi_T^+ \theta \phi_T dx - \int_0^\infty \phi_T^+ q dx - \int_0^\infty \Sigma_{a1} H(x) \phi_T(x) dx \right], \quad (5.146)$$

как показано выше, дает оценку искомой величины:

$$N_1 = 2 \int_0^\infty \phi(x) \Sigma_{a1}(x) H(x) dx = 2 \int_0^a \phi(x) \Sigma_{a1}(x) dx. \quad (5.147)$$

Интегралы в (5.146) легко вычисляются:

$$J = 2(-\alpha\beta a \Sigma_{a1} - \alpha\beta L_2 \Sigma_{a2} + \alpha q L_2 + \beta \Sigma_{a1} a). \quad (5.148)$$

Чтобы закончить вычисления, следует положить

$$\partial J / \partial \alpha = \partial J / \partial \beta = 0 \quad (5.149)$$

и найти вариационно оптимальные значения  $\alpha$  и  $\beta$ . В результате

$$\alpha_M = \frac{\Sigma_{a1} a}{\Sigma_{a1} a + \Sigma_{a2} L_2} \quad (5.150a)$$

и

$$\beta_M = \frac{q L_2}{\Sigma_{a1} a + \Sigma_{a2} L_2}. \quad (5.150b)$$

Итак, вариационная оптимальная оценка искомой величины есть

$$N_1 \approx J = 2 \frac{\Sigma_{a1} a L_2 q}{\Sigma_{a1} a + \Sigma_{a2} L_2}. \quad (5.151)$$

### Задачи

5.1. Вычислить ошибку в критической массе гомогенного реактора без отражателя, соответствующую погрешности в 1% значения  $k$ . Предположить, что критичность достигается только изменением размеров.

5.2. Определить оператор, сопряженный оператору  $V^2$  (напомним, что  $g(\mathbf{R}') = f(\mathbf{R}') = 0$ ).

5.3. Определить оператор, сопряженный оператору  $K$  (умножение на комплексную константу).

5.4. Доказать, что если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — операторы, то  $(\Omega_1 \Omega_2)^+ = \Omega_2^+ \Omega_1^+$ . Вообще говоря,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не коммутируют, т. е.  $\Omega_1 \Omega_2 \neq \Omega_2 \Omega_1$ .

5.5. Используя супервариационный принцип, определить собственные значения и функции матрицы

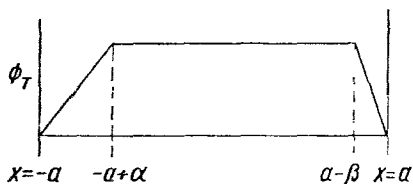


Рис. 5.4. Пробная функция для задачи 5.6

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 11 & 1 \\ 11 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве исходной матрицы взять

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6. Вычислить лапласиан сферы, используя пробную функцию, представленную на рис. 5.4 (оптимизировать по отношению к  $\alpha$  и  $\beta$ ).

5.7. Решить задачу, рассмотренную в конце § 5.7, используя в качестве пробных функций (5.144) и

$$\phi_T(x) = \begin{cases} \beta [1 - \exp(-x/L_2)] & |x| > a; \\ \beta & |x| < a. \end{cases}$$

5.8. Собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

суть

$$\lambda = \pm \sqrt{2}, \quad \phi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Используя теорию возмущений первого порядка, найти собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.9. Вывести уравнение (5.27).

5.10. Доказать, что оператор  $id/dx$  с граничными условиями (5.9) является самосопряженным.

5.11. Доказать, что оператор  $id/dx$  с граничными условиями  $f(0) = f(d) = 0$  является эрмитовым и несамосопряженным.

### Список литературы

1. Akheizer N. I., Glazman I. M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. N. Y., 1961.
2. Hurwitz H. KAPL-98, 1948.
3. Roussopolous P. «Compt. Rend.», 1953, v. 236, p. 1858.

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

### § 6.1. ВВЕДЕНИЕ

Аналитические методы, описанные в гл. 3, полезны для понимания физических процессов, происходящих в ядерных реакторах. Они используются также для приближенных расчетов. Однако для получения более подробной и точной информации о свойствах ядерных реакторов необходимо использовать численные методы расчета. Основная причина необходимости применения таких методов состоит в том, что конструктивно ядерный реактор представляет собой систему, значительно более сложную, чем состоящий из простых зон реактор, который рассмотрен в гл. 3. Действительно, из-за присутствия в активной зоне топливных элементов, теплоносителя, регулирующих стержней и т. д. в реакторе почти непрерывно меняется распределение материалов.

Расчеты реакторов обычно не проводят в односкоростном приближении, которого мы все еще придерживаемся в настоящей главе. Однако с помощью такого приближения можно наглядно продемонстрировать основные особенности численных методов; используемые же на практике многогрупповые расчеты рассмотрены в гл. 8.

### § 6.2. ВНЕШНИЕ ИТЕРАЦИИ

Рассмотрим диффузионное уравнение

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \nu_c \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

которое мы предполагаем решить численным методом. Перепишем его в операторном виде, чтобы наиболее простым образом провести обобщение на многогрупповую задачу (отметим, что в данной главе используется собственное значение  $\nu_c$ , описанное в § 3.1):

$$A \phi = \nu_c F \phi, \quad (6.2)$$

где

$$A = -\nabla \cdot D \nabla + \Sigma_a \quad (6.3a)$$

и

$$F = \Sigma_f. \quad (6.3b)$$

Определим теперь *источник*

$$S(\mathbf{r}) = \nu_c F \phi(\mathbf{r}) \quad (6.4)$$

или

$$\phi(\mathbf{r}) = (1/v_c) F^{-1} S(\mathbf{r}). \quad (6.5)$$

Тогда источник  $S(\mathbf{r})$  удовлетворяет операторному уравнению (с использованием (6.2) и (6.5)):

$$(1/v_c) S(\mathbf{r}) = PS(\mathbf{r}), \quad (6.6a)$$

где

$$P = FA^{-1}. \quad (6.6b)$$

Как показано ниже, уравнение (6.6a) используется для установления свойств сходимости итераций источника (или внешних итераций). Однако это уравнение не применяется при расчетах, так как оператор  $A^{-1}$  неизвестен точно. Кроме того, известно, что уравнение (6.6a) имеет единственное решение, которое всюду положительно, а соответствующее собственное значение максимально (см. § 3.4).

Формально уравнение (6.6a) можно решить следующим образом. Выберем первое приближение для источника  $S$  в виде  $S^{(0)}$ . Затем решим уравнение

$$S^{(1)} = PS^{(0)} \quad (6.7)$$

и, продолжая этот процесс, получим в общем виде

$$S^{(k)} = PS^{(k-1)} = P^{(k)} S^{(0)}. \quad (6.8)$$

Предположим, что после достаточного числа итераций разность между  $S^{(k)}$  и  $S^{(k-1)}$  будет (с точностью до постоянного множителя) меньше, чем заранее заданная величина\*. В этом случае говорят, что итерации *сходятся*, и отношение двух последовательных итераций дает собственное значение

$$S^{(k)}(\mathbf{r})/S^{(k-1)}(\mathbf{r}) = 1/v_c. \quad (6.9)$$

Такой же итерационный процесс можно использовать для решения любого уравнения на собственное значение. В качестве примера определим (с погрешностью до 1%) собственное значение и собственную функцию следующего матричного оператора:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{v_c} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

\* Так как  $S^{(k)}(\mathbf{r})$  и  $S^{(k-1)}(\mathbf{r})$  являются функциями пространственной переменной, то это утверждение означает, что их отношение будет постоянной величиной  $\pm v$  в любой точке  $\mathbf{r}$  (т. е. они будут иметь одинаковую пространственную зависимость). Тогда отношение их амплитуд представляет собой собственное значение  $1/v_c$ .

Примем в качестве первого приближения для источника

$$S^{(0)} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(0)} \\ \phi_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Тогда

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Отметив, что  $\phi_1^{(1)}/\phi_1^{(0)}$  и  $\phi_2^{(1)}/\phi_2^{(0)}$  отличаются более чем на 1%, продолжаем итерационный процесс:

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 37 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Так как  $17/3 = 5,67$ , а  $37/7 = 5,30$ , то мы приближаемся к допустимой погрешности 1%. Оказывается достаточной еще всего одна итерация:

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91 \\ 199 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Нетрудно видеть, что  $\phi_1^{(3)}/\phi_1^{(2)} = 91/17$  с погрешностью до 1% совпадает с  $\phi_2^{(3)}/\phi_2^{(2)} = 199/37$ . Таким образом, собственная функция равна (пропорциональна)

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 91 \\ 199 \end{pmatrix}, \quad (6.16a)$$

а собственное значение есть

$$\frac{1}{v_c} = \frac{91}{17} = \frac{199}{37} = 5,36. \quad (6.16b)$$

На практике обычно рассчитывают  $1/v_c$  из отношения норм  $S^{(k)}$  и  $S^{(k-1)}$ , которые определяются как корни квадратные из суммы квадратов элементов рассматриваемой в данном примере матрицы или как интегралы от квадратов модулей, если  $P$  — дифференциальный оператор. Таким образом, в нашем примере

$$\frac{1}{v_c} = \frac{\sqrt{91^2 + 199^2}}{\sqrt{17^2 + 37^2}}, \quad (6.17a)$$

в то время как для дифференциального оператора  $P$

$$\frac{1}{v_c} = \frac{\int d^3 r |S^{(k)}(\mathbf{r})|^2}{\int d^3 r |S^{(k-1)}(\mathbf{r})|^2}. \quad (6.17b)$$

Если сходимость итераций достаточно хорошая, то отношение норм должно равняться отношению последовательных итераций в любой точке  $\mathbf{r}$  (или для любой компоненты  $\phi_i$  в рассмотренном выше случае, где  $P$  — матричный оператор).

Описанный метод относится к так называемым *степенным* методам. В § 6.5 мы рассмотрим некоторые математические доказательства сходимости этого метода и возможные пути его улучшения\*.

Так как матрица 2-го ранга имеет обычно два собственных значения и две соответствующие им собственные функции, то возникает вопрос, какие из этих двух величин были получены в рассмотренном выше примере. Ответ дается в § 6.5, где показано, что с помощью описанного итерационного процесса получено наибольшее собственное значение.

Возвращаясь вновь к задаче расчета ядерных реакторов, рассмотрим, как проводятся на практике итерации источника. Уравнение (6.2) можно переписать для  $k$ -й итерации в виде

$$A\phi^{(k)} = S^{(k)}, \quad (6.18)$$

и когда в качестве первого приближения для источника принимается  $S^{(0)}$ , это уравнение решается относительно  $\phi^{(0)}$  методами, описанными в следующем параграфе. После того как  $\phi^{(0)}$  определено, из уравнения (6.8) рассчитывается  $S^{(1)}$ , так как  $v_c$  неизвестно:

$$S^{(k)} = PS^{(k-1)} = F\phi^{(k-1)}. \quad (6.19)$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не достигается сходимость. (Сравнение делается между последовательными итерациями источника  $S$ , а не потока  $\phi$ .)

Задача нахождения потока нейтронов  $\phi$  при известном источнике  $S$ , т. е. решение уравнения (6.18), обсуждается в следующем параграфе.

### § 6.3. РАСЧЕТЫ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ: ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В § 6.2 мы рассмотрели итерации источника, или внешние итерации, которые используются на практике для решения уравнения диффузии нейтронов. При этом мы обходили вниманием проблему решения уравнения (6.18), т. е. расчет потока нейтронов  $\phi^{(k)}$ , когда источник  $S^{(k)}$  известен. (Расчет потока из уравнения  $S^{(k+1)} = F\phi^{(k)}$  является, конечно, тривиальным.) Уравнение для потока нейтронов представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение. В гл. 2 было показано, как можно найти аналитические решения этого уравнения для простых реакторных систем. Однако для реакторов сложной геометрии получить аналитические решения не представляется возможным, так что необхо-

\* Одна из трудностей рассматриваемого метода, которую можно обнаружить и в иллюстрируемом примере, состоит в том, что последовательные итерации могут неуклонно возрастать (или уменьшаться) по величине. Это может привести к серьезным трудностям при постановке таких задач для вычислительных машин, если число необходимых итераций оказывается чрезмерно большим.

дим использовать численные методы расчета. С этой целью уравнение

$$A \phi^{(k)} = S^{(k)} \quad (6.20a)$$

или (если ввести определение оператора  $A$ )

$$(-\nabla \cdot D \nabla + \Sigma_a) \phi^{(k)}(\mathbf{r}) = S^{(k)}(\mathbf{r}) \quad (6.20b)$$

представляется в виде дифференциального уравнения. В настоящем параграфе рассматривается только одномерная геометрия, так что уравнение (6.20b) принимает вид

$$\left[ -\frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} + \Sigma_a(x) \right] \phi^{(k)}(x) = S^{(k)}(x). \quad (6.21)$$

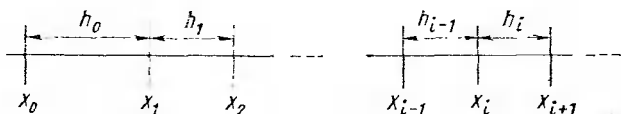


Рис. 6.1. Расчетная сетка для одномерного конечно-разностного уравнения

Весь интервал изменения пространственной переменной  $x$ , который включает в себя защиту реактора, отражатель, зону воспроизводства и активную зону (иначе говоря, любую из зон, которая должна рассматриваться в уравнении диффузии), разбивается на ряд интервалов. Точки между этими интервалами обозначаются  $x_i$  и называются *счетными точками*; интервал между двумя соседними точками  $x_i$  и  $x_{i-1}$  обозначается  $h_{i-1}$  (рис. 6.1).

Отметим, что счетные точки не обязательно должны находиться на равных расстояниях одна от другой. Действительно, в тех областях реактора, где его свойства меняются достаточно резко, например вблизи топливных и поглощающих элементов, каналов теплоносителя и т. д., естественно использовать более мелкую сетку счетных точек, чем, скажем, в отражателе.

Уравнение (6.21) интегрируется теперь от  $x_i - h_{i-1}/2$  до  $x_i + h_i/2$ . При интегрировании членов  $\Sigma_a(x) \phi(x)$  и  $S(x)$  можно сделать ряд предположений\*. Примем только, что пространственная сетка выбрана достаточно мелкой для того, чтобы эти члены можно было принять постоянными на интервале интегрирования. В этом случае

$$\int_{x_i - h_{i-1}/2}^{x_i + h_i/2} \Sigma_a(x) \phi(x) dx = \Sigma_{ai} \phi_i \frac{h_i + h_{i-1}}{2} \quad (6.22a)$$

и

$$\int_{x_i - h_{i-1}/2}^{x_i + h_i/2} S(x) dx = S_i \frac{h_i + h_{i-1}}{2}. \quad (6.22b)$$

\* Мы пренебрегаем здесь индексом, обозначающим шаг итерации.

Здесь использованы обозначения

$$f(x_i) = f_i. \quad (6.23)$$

Интегрирование члена, содержащего производные, дает следующий результат:

$$\int_{x_i - h_{i-1}/2}^{x_i + h_i/2} \frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} \phi(x) dx = D(x) \frac{d}{dx} \phi(x) \Big|_{x_i - h_{i-1}/2}^{x_i + h_i/2}. \quad (6.24)$$

При вычислении этого интеграла можно использовать двухточечную конечно-разностную формулу для производной:

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h_i}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (6.25a)$$

и

$$\frac{d}{dx} \phi(x) = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (6.25b)$$

Можно аппроксимировать также коэффициент диффузии  $D(x)$  в точке  $x_i + h_i/2$  его усредненным значением в точках  $x_i$  и  $x_{i+1}$ :

$$D(x_i + h_i/2) = (D_{i+1} + D_i)/2. \quad (6.26a)$$

Аналогичное выражение можно получить и для  $D(x_i - h_{i-1}/2)$ .

В результате правая часть уравнения (6.24) принимает вид

$$\phi_{i+1} \frac{D_{i+1} + D_i}{2h_i} - \phi_i \left( \frac{D_{i+1} + D_i}{2h_i} + \frac{D_i + D_{i-1}}{2h_{i-1}} \right) + \phi_{i-1} \frac{D_i + D_{i-1}}{2h_{i-1}}. \quad (6.26b)$$

Комбинируя все эти результаты, находим, что конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (6.21), можно записать в следующем виде:

$$a_{i, i-1} \phi_{i-1} + a_{i, i} \phi_i + a_{i, i+1} \phi_{i+1} = S_i, \quad (6.27a)$$

где

$$a_{i, i-1} = \frac{D_i + D_{i-1}}{h_{i-1}} \frac{1}{h_i + h_{i-1}}; \quad (6.27b)$$

$$a_{i, i} = \Sigma a_i - \left( \frac{D_{i+1} + D_i}{h_i} + \frac{D_i + D_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \frac{1}{h_i + h_{i-1}}; \quad (6.27b)$$

$$a_{i, i+1} = \frac{D_{i+1} + D_i}{h_i} \frac{1}{h_i + h_{i+1}}. \quad (6.27г)$$

Мы представили лишь один из многих возможных способов, с помощью которых дифференциальное уравнение может быть превращено в конечно-разностное. Другие схемы привели бы к отличающимся коэффициентам конечно-разностного уравнения. Важно отметить, что уравнение (6.27a) представляет собой трехчленное

уравнение, т. е. оно содержит значения потока нейтронов в трех соседних точках\*. Индекс  $i$  в коэффициенте  $a_{i,j}$  обозначает, что интегрирование, в результате которого получено уравнение (6.27а), проведено по ячейке, содержащей счетную точку  $i$ .

На границах, соответствующих значениям  $i = 0$  и  $i = N$ , получаются уравнения, несколько отличающиеся от приведенных выше. Рассмотрим, например, случай  $i = 0$ . Тогда интегрирование можно проводить только от  $x = 0$  до  $x = h_0/2$ . Уравнения (6.22) при этом остаются без существенных изменений (только  $h_{i-1} = h_{-1} = 0$ ), однако уравнение (6.24) изменяется и принимает следующий вид:

$$\int_0^{h_0/2} \frac{d}{dx} D(x) \frac{d}{dx} \phi(x) dx = \frac{D_1 + D_0}{2} \frac{\phi_1 - \phi_0}{h_0} - D_0 \frac{d\phi_0}{dx}. \quad (6.28)$$

Таким образом, уравнение в нулевой счетной точке, т. е. в граничной точке, имеет вид

$$a_{00} \phi_0 + a_{01} \phi_1 + D_0 d\phi_0/dx = S_0. \quad (6.29)$$

Граничные условия могут быть поставлены либо для  $d\phi_0/dx$  (граничные условия для тока нейтронов), либо для отношения  $\frac{d\phi_0/dx}{\phi_0}$ . В любом случае  $d\phi_0/dx$  можно исключить из уравнения (6.29), и первое уравнение из системы линейных уравнений для  $\phi_i$  становится двухчленным уравнением (аналогичные аргументы применяются и к последнему уравнению системы, т. е. к уравнению для другой границы).

Простой расчет показывает, что мы имеем  $N + 1$  неоднородных уравнений с  $N + 1$  неизвестными значениями потоков в счетных точках  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$ . Решение такой системы уравнений всегда существует.

Систему уравнений для  $\phi_i$  можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-1, N-1} & a_{N-1, N} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N, N-1} & a_{N, N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

или более компактно

$$A\phi = S. \quad (6.31)$$

(Отметим теперь, что при представлении  $S(\mathbf{r})$  для внешних итераций, описанных в § 6.2, определяется  $N + 1$  значение функции

\* Это следует из того, что мы использовали двухчленную конечно-разностную формулу, т. е. уравнения (6.25), для представления члена  $d\phi(x)/dx$ .

$(S_0, \dots, S_N)$ , по одному в каждой счетной точке. Из сравнения последовательных итераций находим отношение  $S_i^{(k)}$  к  $S_i^{(k-1)}$  в каждой счетной точке. Когда эти отношения \* совпадают, источник в последовательных итерациях имеет один и тот же вид, и внешние итерации сходятся.)

Для решения уравнения (6.31) можно предложить простой алгоритм [1]. Этот алгоритм, известный как *метод исключения Гаусса*, применим, однако, только к трехчленным уравнениям, что означает, в применении к реакторной физике, что его можно использовать для решения одномерных задач. (В следующем параграфе мы обсудим некоторые методы, применяемые к решению двух- и трехмерных задач.)

Матрица  $A$  в уравнении (6.31) называется *трехдиагональной*. Если первый ряд матричного уравнения (6.30) разделить на  $a_{00}$ , то получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{01}}{a_{00}} & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_0}{a_{00}} \\ S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Умножим теперь первый ряд уравнения (6.32) на  $-a_{10}$  и прибавим результат почленно ко второму ряду. Тогда получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{01}}{a_{00}} & 0 & \dots \\ 0 & a_{11} - \frac{a_{01} a_{10}}{a_{00}} & a_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_0}{a_{00}} \\ S_1 - \frac{a_{10}}{a_{00}} S_0 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Далее разделим второй ряд на диагональный элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{01}}{a_{00}} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{01} a_{10}/a_{00}} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_0}{a_{00}} \\ \frac{S_1 - (a_{10}/a_{00}) S_0}{a_{11} - a_{10} a_{01}/a_{00}} \\ S_2 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

\* В пределах заданной точности.

Продолжая таким образом, исходное матричное уравнение (6.30) можно привести к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & h_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

где  $h_n$  и  $\alpha_n$  определяются по рекуррентным формулам:

$$h_n = \frac{a_{n, n+1}}{a_{n, n} - a_{n, n-1} h_{n-1}}; \quad h_0 = \frac{a_{01}}{a_{00}}; \quad (6.36)$$

$$\alpha_n = \frac{S_n - a_{n, n-1} S_{n-1} / a_{n-1, n-1}}{a_{n, n} - a_{n, n-1} a_{n-1, n} / a_{n-1, n}}, \quad \alpha_0 = \frac{S_0}{a_{10}}. \quad (6.37)$$

Система уравнений (6.35) решается тривиально начиная с  $N$ -го значения потока

$$\phi_N = \alpha_N. \quad (6.38)$$

Затем

$$\phi_{N-1} = -h_{N-1} \phi_N + \alpha_{N-1} = -h_{N-1} \alpha_N + \alpha_{N-1}. \quad (6.39)$$

Продолжая этот процесс от  $\phi_N$  к  $\phi_1$ , можно получить поток нейтронов в каждой счетной точке.

#### § 6.4. ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ: ВНУТРЕННИЕ ИТЕРАЦИИ

Метод исключения Гаусса, описанный в § 6.3, сводится к прямому численному обращению матрицы  $\mathbf{A}$ . Этот метод применим, так как матрица  $\mathbf{A}$  является трехдиагональной, что, в свою очередь, обусловлено тем, что при решении одномерных задач используются двухточечные конечно-разностные формулы [см. уравнения (6.25)]. В двух- и трехмерных задачах, даже если используются двухточечные конечно-разностные формулы, матрица  $\mathbf{A}$  не является трехдиагональной, и простой алгоритм обращения матрицы  $\mathbf{A}$  получить нельзя. В этом случае используется другой метод, а именно метод внутренних итераций.

Чтобы понять существо данного метода, опишем сначала, как получаются конечно-разностные уравнения в двумерной геометрии. Для простоты ограничимся рассмотрением плоской  $x - y$ -геометрии (случай цилиндрической  $r - \theta$ -геометрии рассмотрен в работе [1]). Область изменения переменных  $xy$  делится пространственной сеткой на *элементарные ячейки* (рис. 6.2). Отметим, что обычно для представления разностей координат счетных точек используются символы  $R$  (для правой стороны;  $R = x_{i+1} - x_i$ ),  $L$  (для левой),  $T$  (для верхней) и  $B$  (для нижней) (см. рис. 6.2). Умножим теперь обе части уравнения (6.18) на  $dxdy$  и проинтегрируем по области, ограниченной на рис. 6.2 сплошной линией.

Используем теорему Гаусса для приведения полученных поверхностных интегралов к линейным. Тогда, например,

$$\int_{x_i-L/2}^{x_i+R/2} dx \int_{y_i-B/2}^{y_i+T/2} dy \nabla \cdot D \nabla \phi = \int_{pabc} D \frac{\partial \phi}{\partial n} dl + \int_{pcae} D \frac{\partial \phi}{\partial n} dl +$$

$$+ \int_{pefg} D \frac{\partial \phi}{\partial n} dl + \int_{pgha} D \frac{\partial \phi}{\partial n} dl. \quad (6.40)$$

Здесь  $\partial \phi / \partial n$  — нормальная производная  $\phi$ , а индекс, например  $pabc$ , обозначает ту область, в данном случае  $I$ , по которой ведется интегрирование.

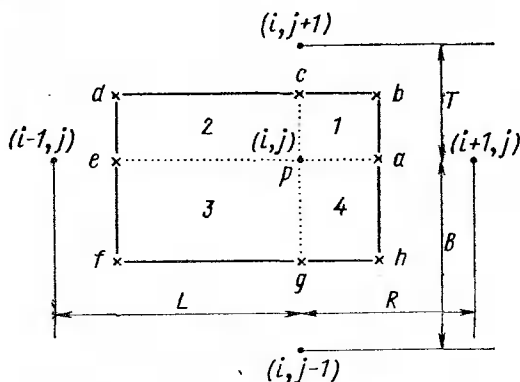


Рис. 6.2. Расчетная сетка для двумерного конечно-разностного уравнения

Отметим, что в четырех приведенных выше интегралах имеются перекрывающиеся члены. Например, в первом интеграле присутствует член, описывающий интегрирование вдоль линейного отрезка от точки  $c$  к точке  $p$ . Точно такой же член, описывающий интегрирование вдоль отрезка от  $p$  к  $c$ , присутствует и во втором интеграле. При суммировании перекрывающиеся члены взаимно уничтожаются и остается интегрирование по внешней границе сегмента.

Интегрирование легче всего провести, если разложить подынтегральные выражения в ряды Тейлора. Например, в интеграле вдоль линейного сегмента от  $a$  до  $b$   $\partial \phi / \partial n = \partial \phi / \partial x$ , и при разложении этой производной в ряд Тейлора имеем

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{x=R/2+x_i} = \phi_x(1) + \frac{R}{2} \phi_{xx}(1) + y \phi_{xy}(1) + \dots, \quad (6.41a)$$

где индексы означают дифференцирование. Интегрирование вдоль линейного сегмента от  $a$  до  $b$  означает интегрирование только по  $dy$ , так что

$$\int_a^b D(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = D_1 \left[ \frac{T}{2} \phi_x(1) + \frac{TR}{4} \phi_{xx}(1) + \frac{T^2}{8} \phi_{xy}(1) \right]. \quad (6.416)$$

Здесь мы ввели обозначения  $D_1$ ,  $\phi_x(1)$ ,  $\phi_{xx}(1)$ ,  $\phi_{xy}(1)$  для значения этих величин в квадрате 1 рис. 6.2.

Аналогичное выражение для интеграла от  $d$  до  $e$  в квадрате 2 имеет вид

$$\int_d^e D(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = D_2 \left[ -\frac{T}{2} \phi_x(2) + \frac{TL}{4} \phi_{xx}(2) - \frac{T^2}{8} \phi_{xy}(2) \right]. \quad (6.42)$$

Из условия непрерывности тока нейтронов следует, что

$$D_1 \phi_x(1) = D_2 \phi_x(2) \quad (6.43a)$$

и

$$D_1 \phi_{xy}(1) = D_2 \phi_{xy}(2). \quad (6.436)$$

Тогда, складывая уравнения (6.41) и (6.42), получаем

$$\int_a^b D(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial n} dl + \int_d^e D(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial n} dl = \frac{D_1 TR}{4} \phi_{xx}(1) + \frac{D_2 TL}{4} \phi_{xx}(2). \quad (6.44)$$

Мы продолжим эту процедуру по всей внешней границе интегрирования и, кроме того, используем конечно-разностные выражения для производных:

$$\phi_{xx}(1) = \frac{2(\phi_{i+1, j} - \phi_{ij})}{R^2} - \frac{2\phi_x(1)}{R}; \quad (6.45a)$$

$$\phi_{xx}(2) = \frac{2(\phi_{i-1, j} - \phi_{ij})}{L^2} + \frac{2\phi_x(2)}{L} \quad (6.456)$$

и т. д.

В результате получим пятиточечное конечно-разностное представление дифференциального уравнения (6.18) в двумерной геометрии [вновь используя (6.43)]:

$$\begin{aligned} & \frac{TD_1 + BD_4}{2R} (\phi_{ij} - \phi_{i+1, j}) + \frac{TD_2 + BD_3}{2L} (\phi_{ij} - \phi_{i-1, j}) + \\ & + \frac{RD_1 + LD_2}{2T} (\phi_{ij} - \phi_{i, j+1}) + \frac{RD_4 + LD_3}{2B} (\phi_{ij} - \phi_{i, j-1}) = S_{ij}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Как и в одномерной задаче, для значения потоков в граничных точках должны быть получены специальные уравнения. Здесь не дан детальный вывод этих уравнений, интересующийся читатель может найти его в работе [1].

Для решения системы уравнений (6.46) используется итерационный метод. Сначала уравнения должны быть представлены в матричном виде. Вектор потока можно определить в следующем виде:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{00} \\ \phi_{10} \\ \vdots \\ \phi_{N_0} \\ \phi_{01} \\ \vdots \\ \phi_{NM} \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

где компоненты вектора организованы таким образом, что первый индекс  $i$  пробегает значения от 0 до  $N$  при фиксированном втором индексе  $j$ , а затем второй индекс пробегает значения от 0 до  $M$  при фиксированном первом\*.

Аналогично конструируются матрица коэффициентов, которую вновь обозначим  $\mathbf{A}$ , и вектор источника  $\mathbf{S}$ . Таким образом, опять приходим к линейной системе:

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{S}. \quad (6.48)$$

Существенное отличие от одномерной задачи состоит в том, что невозможно предложить простой алгоритм решения уравнения в двумерной геометрии, поскольку матрица  $\mathbf{A}$  уже не является трехдиагональной. Поэтому для решения уравнения (6.48) используется метод внутренних итераций.

В действительности уравнение (6.48) в том виде, в котором оно получено выше, неудобно для решения методом итераций, так как зависимая переменная появляется в ней только однажды. Однако можно разбить матрицу  $\mathbf{A}$  на две части:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N} + \mathbf{D}, \quad (6.49)$$

где  $\mathbf{D}$  представляет собой матрицу, содержащую все диагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е.

$$(\mathbf{D})_{jj'} = a_{jj} \delta_{jj'}. \quad (6.50)$$

Таким образом, обращение матрицы  $\mathbf{D}$  тривиально:

$$(\mathbf{D}^{-1})_{jj'} = \delta_{jj'} / a_{jj}. \quad (6.51)$$

\* Предполагается, что по оси  $x$  имеется  $N + 1$  счетных точек, а по оси  $y$  —  $M + 1$  счетных точек. Вектор потока имеет  $(N + 1)(M + 1)$  компонент, а матрица  $\mathbf{A}$  имеет ранг  $(N + 1)(M + 1)$ .

Теперь уравнение (6.49) можно переписать в виде

$$\Phi = D^{-1}S - D^{-1}N\Phi \quad (6.52)$$

и решать его методом итераций, выбирая в качестве начальной пробной функции в каждой из  $(N + 1)(M + 1)$  счетных точек значение потока  $\Phi^0$ ; затем подставляя ее в правую часть уравнения (6.52), вычисляя  $\Phi^{(1)}$ , вновь подставляя полученную функцию в правую часть уравнения и т. д. Этот метод называется методом *релаксации*, так как мы начинаем с приближенного решения уравнения и приводим его к точному решению.

Описанный выше метод называется *методом одновременной релаксации*, так как величина потока нейтронов одновременно релаксирует в каждой точке пространственной сетки. На практике более экономичным и удобным оказывается *метод последовательной релаксации*. Чтобы понять его, перепишем уравнение (6.52) в виде

$$\begin{pmatrix} \phi_{00}^{(k)} \\ \vdots \\ \phi_{NM}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{00}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{a_{NM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{00} \\ \vdots \\ S_{NM} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{01}}{a_{00}} & \frac{a_{02}}{a_{00}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{10}}{a_{11}} & 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{00}^{(k-1)} \\ \vdots \\ \phi_{NM}^{(k-1)} \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Здесь подробно проведено умножение матриц  $D^{-1}N$ .

Уравнение (6.53) представляет собой в действительности систему  $(N + 1)(M + 1)$  уравнений, которые определяют значения потоков  $\phi_{ij}^{(k)}$  через  $\phi_{ij}^{(k-1)}$ . Отметим, что уравнение для  $\phi_{00}^{(k)}$  содержит  $\phi_{j0}^{(k-1)}$ , где  $1 \leq j \leq 3^*$ . Следующим является уравнение, в котором  $\phi_{10}^{(k)}$  выражается через  $\phi_{j0}^{(k-1)}$ , а  $0 \leq j \leq 4$ . Однако  $\phi_{00}^{(k)}$  было рассчитано на предыдущем шаге. Идея метода последовательной релаксации состоит в замене члена  $\phi_{00}^{(k-1)}$  уже вычисленным членом  $\phi_{00}^{(k)}$  и проведении таких замен всюду, где это возможно, в течение всего итерационного процесса. Как можно было ожидать, этот метод сходится значительно быстрее, чем описанный выше простой метод одновременной релаксации. Математически

\* Здесь использовали тот факт, что матрица  $A$  представляет собой пятичленную линейную систему.

метод одновременной релаксации можно представить, переписывая уравнение (6.52) в следующем виде:

$$\Phi^{(k)} = D^{-1}S - D^{-1}N\Phi^{(k-1)}, \quad (6.54a)$$

в то время как уравнение метода последовательной релаксации имеет вид

$$\Phi^{(k)} = D^{-1}S - U\Phi^{(k-1)} - L\Phi^{(k)}. \quad (6.54b)$$

Из уравнения (6.53) видно, что матрица  $U$  содержит все элементы произведения  $D^{-1}N$ , расположенные *выше* диагонали, а матрица  $L$  — расположенные *ниже* диагонали.

Методы решения трехмерных задач аналогичны описанным выше. Конечно-разностные уравнения получаются интегрированием по объему трехмерной ячейки. Можно легко показать, что описанная выше простая расчетная схема приводит к девятиточечной формуле в трехмерной задаче. В любом случае устанавливается матричное уравнение и используются описанные выше методы релаксации.

В следующем параграфе обсудим некоторые математические доказательства того, что описанные итерационные схемы действительно сходятся к точному решению.

### § 6.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ

Описанные в § 6.2 и 6.4 схемы внешних и внутренних итераций предполагались сходящимися. Однако в действительности требуется математическое доказательство сходимости рассматриваемых итерационных схем. Такое доказательство выходит за рамки настоящей книги, однако отметим некоторые аргументы, используемые математиками для доказательства сходимости рассматриваемых методов.

Рассмотрим сначала метод внешних итераций. Обсудим здесь степенной метод решения уравнения (6.6 а):

$$PS = \lambda S, \quad (6.55)$$

где  $\lambda = 1/v_c$ .

Предположим, что оператор  $P$  воздействует на полную систему ортогональных собственных функций  $\psi_j$  с соответствующими собственными значениями  $\lambda_j$ , такими, что

$$P\psi_j = \lambda_j \psi_j. \quad (6.56)$$

Начальная пробная функция для источника  $S^{(0)}$  раскладывается в ряд по собственным функциям  $\psi_j$ :

$$S^{(0)} = \sum_j c_j \psi_j. \quad (6.57)$$

Так как  $k$ -я итерация источника  $S^{(k)}$  связана с начальной пробной функцией  $S^{(0)}$  соотношением

$$S^{(k)} = (P)^k S^{(0)}, \quad (6.58)$$

то имеем, согласно уравнению (6.57),

$$S^{(k)} = \sum_j c_j (\lambda_j)^k \psi_j = (\lambda_0)^k \sum_j c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_0}\right)^k \psi_j. \quad (6.59)$$

Здесь  $\lambda_0$  — наибольшее собственное значение. Таким образом,  $(\lambda_j/\lambda_0)^k \rightarrow 0$ , когда  $k \rightarrow \infty$ , для  $j \neq 0$ , и уравнение (6.59) в пределе приводится к следующему виду:

$$S^{(k)} = (\lambda_0)^k c_0 \psi_0. \quad (6.60)$$

Это доказывает сходимость  $S^{(k)}$  и  $\psi_0$ , собственной функции оператора  $P$ , которой соответствует *наибольшее* собственное значение  $\lambda_0$  (и следовательно, *наименьшее* собственное значение  $\nu_c$ ). При этом предполагаются существование и полнота системы ортогональных собственных функций  $\psi_j$  и существование наибольшего собственного значения  $\lambda_0$ . На строго математической основе было показано, что эти условия полностью выполняются для операторов  $P$ , которые используются в реакторной физике. Кроме того, было установлено, что  $\psi$  является единственной собственной функцией, которая существенно положительна по всему объему реактора, так что она представляет собой решение уравнения (6.55), имеющее физический смысл.

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (6.55) используется только для теоретических целей. На практике уравнения реактора решаются с помощью ранее описанных методов. Хотя этот момент не важен в одnogрупповой теории, он имеет большое значение при решении многогрупповых задач.

Обратимся теперь к вопросу сходимости метода внутренних итераций. Рассмотрение можно проводить либо для метода одновременной релаксации [уравнение (6.54a)], либо для метода последовательной релаксации [уравнение (6.54б)]. Рассмотрим первый из них и определим вектор ошибки  $\varepsilon_k$  для  $k$ -й итерации как разность между  $\Phi^{(k)}$  и точным решением, обозначаемым  $\Phi^{(\infty)}$ :

$$\Phi^{(\infty)} - \Phi^{(k)} = \varepsilon_k. \quad (6.61)$$

Очевидно, что  $\Phi^{(\infty)}$  удовлетворяет уравнению (6.52):

$$\Phi^{(\infty)} = D^{-1}S - D^{-1}N\Phi^{(k-1)}. \quad (6.62)$$

Таким образом, поскольку

$$\Phi^{(k)} = D^{-1}S - D^{-1}N\Phi^{(k-1)}, \quad (6.63)$$

то

$$\varepsilon_k = -D^{-1}N\varepsilon_{k-1}. \quad (6.64)$$

Определим собственные значения и собственные функции матрицы  $D^{-1}N$  в следующем виде:

$$D^{-1}NX_j = \lambda_j X_j. \quad (6.65)$$

Разложим теперь  $\epsilon_k$  в ряд по собственным функциям  $X_j$ :

$$\epsilon_k = \sum_j a_j^{(k)} X_j,$$

так что

$$\epsilon_{k-1} = \sum_j a_j^{(k-1)} X_j \quad (6.66)$$

или, так как

$$\epsilon_k = (D^{-1}N)^k \epsilon_0, \quad (6.67)$$

то

$$\epsilon_k = \sum_j a_j^{(0)} (\lambda_j)^{k-1} X_j. \quad (6.68)$$

Таким образом,  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , когда  $k \rightarrow \infty$ , если все собственные значения матрицы  $D^{-1}N$  меньше единицы. Наибольшее (по абсолютной величине) собственное значение оператора называется *спектральным радиусом* этого оператора. Было доказано, что спектральный радиус операторов, присутствующих в уравнениях диффузии нейтронов, меньше единицы, так что сходимость метода внутренних итераций гарантирована. В действительности можно показать, что спектральный радиус для метода последовательной релаксации вдвое меньше спектрального радиуса для метода одновременной релаксации, проанализированного выше. Следовательно, скорость сходимости в методе последовательной релаксации вдвое больше, чем в методе одновременной релаксации.

Этот очень поверхностный анализ дает только самые общие представления о сходимости обычно используемых итерационных схем. Более полное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в работе [1].

## § 6.6. МЕТОДЫ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Для ускорения сходимости внешних и внутренних итераций использовались различные методы. Здесь мы обсудим только один из них, называемый *методом экстраполяции*. Предположим, что в методе внешних итераций сделан выбор пробной функции источника  $S^{(0)}$  и вычислена первая итерация  $S^{(1)}$ . Если предположить, что  $S^{(0)}$  является линейной функцией  $k$ , то значения  $S^{(0)}$  и  $S^{(1)}$  можно экстраполировать к  $S^{(2)}$  в соответствии с выражением

$$S^{(2)} = S^{(1)} + (S^{(1)} - S^{(0)}). \quad (6.69)$$

Затем  $S^{(2)}$  можно переобозначить через  $S^{(1)}$ . Обычно на практике вводится параметр экстраполяции  $\alpha$ , так что используется следующее соотношение между  $S^{(2)}$ ,  $S^{(1)}$  и  $S^{(0)}$ :

$$S^{(2)} = S^{(1)} + \alpha (S^{(1)} - S^{(0)}), \quad (6.70)$$

или лущше, с учетом уравнения (6.8),

$$S^{(2)} = PS^{(0)} + \alpha (P - 1)S^{(0)} = (\alpha + 1)PS^{(0)} - \alpha S^{(0)}. \quad (6.71)$$

Параметр  $\alpha$  принимает значения в интервале от 0 до 1. Как нетрудно видеть, случай  $\alpha = 0$  соответствует неэкстраполируемому степенному методу. Оптимальный выбор параметра  $\alpha$  представляет собой сложную задачу, которая подробно обсуждается в книге Вакспресса [1]. Тот же самый метод, называемый в этом случае методом *верхней релаксации*, можно использовать для внутренних итераций. Таким образом, говорят о *методе последовательной верхней релаксации*.

Развитием простого метода экстраполяции может быть использование всех предыдущих итераций для построения следующей пробной функции. Этот метод иногда применяется, и оказывается, что оптимальный выбор коэффициентов предыдущих  $k$  итераций связан с полиномами Чебышева  $k$ -го порядка. По этой причине метод известен как *полиномиальный метод Чебышева*. Более подробные сведения об этом, так же как и о других методах ускорения сходимости внутренних итераций, можно найти в книге Вакспресса [1].

### § 6.7. ИТЕРАЦИЯ ЛАПЛАСИАНА, СИНТЕЗ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ

Иногда желательно провести двумерный расчет реактора, когда имеется только одномерная программа расчетов, или трехмерный расчет, когда есть только одномерные или двумерные программы. Это можно сделать с помощью метода, называемого *синтезом потока нейтронов* или *итерацией лапласиана*.

Из уравнения критичности (3.17), которое можно записать в виде

$$1 = \nu \Sigma_f (\Sigma_a + DB^2)^{-1}, \quad (6.72)$$

следует, что член  $DB^2$  можно интерпретировать как сечение утечки. Кроме того, из § 3.5 следует, что для двух- и трехмерных систем лапласиан  $B^2$  можно записать в виде суммы компонент вдоль различных координатных осей. Таким образом, например, в цилиндрической системе координат

$$B^2 = B_\rho^2 + B_z^2, \quad (6.73)$$

где  $B_\rho^2 = (2,405/R')^2$  называется *радиальным лапласианом*, а  $B_z^2 = (\pi/2H')^2$  — *аксиальным лапласианом*. Точно так же  $\nabla^2$  можно записать в виде суммы компонент, используя уравнение (3.51):

$$\nabla^2 = \nabla_\rho^2 + \nabla_z^2, \quad (6.74)$$

где

$$\nabla_\rho^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad (6.75a)$$

и

$$\nabla_z^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6.75b)$$

Предположим теперь, что поток нейтронов можно представить как функцию с разделенными переменными:

$$\phi(\rho, z) = Z(z)R(\rho). \quad (6.76)$$

Сначала рассчитаем аксиальное распределение. Для этого возьмем в качестве первого приближения

$$R(\rho) \approx J_0(B_0\rho), \quad (6.77)$$

а в качестве пробного значения для  $B_0$ , например, геометрический лапласиан голого цилиндра (см. § 3.5). Тогда

$$-D(\nabla_\rho^2 + \nabla_z^2)\phi(\rho, z) + (\Sigma_a - \nu\Sigma_f)\phi(\rho, z) = 0; \quad (6.78)$$

так как

$$\nabla^2 J_0(B_0\rho) = -B_0^2 J_0(B_0\rho), \quad (6.79)$$

уравнение (6.78) приводится к следующему виду:

$$(-D\nabla_z^2 + DB_0^2 + \Sigma_a - \nu\Sigma_f)Z(z) = 0. \quad (6.80)$$

Это уравнение можно решить (численно) как одномерное уравнение, поскольку задано начальное значение  $B_0^2$ . После того как  $Z(z)$  найдено, можно определить аксиальную утечку:

$$\text{Аксиальная утечка} = \int_{\text{границная поверхность}} J_z dS, \quad (6.81a)$$

где

$$J_z = -D \frac{\partial Z}{\partial z} R(\rho). \quad (6.81b)$$

Таким образом, уравнение (6.81a) приводится к виду

$$\text{Аксиальная утечка} = \int_0^R \rho d\rho R(\rho) [J_z(h) + J_z(-h)]. \quad (6.81в)$$

Это выражение для утечки можно приравнять интегралу по объему от  $DB_0^2\phi(\rho, z)$ :

$$\text{Аксиальная утечка} = B_0^2 \int_{-h}^h dz \int_0^R \rho d\rho D(\rho, z) Z(z) R(\rho). \quad (6.82)$$

Так как все величины в уравнениях (6.81a) и (6.82) известны (или, как в случае с  $R(\rho)$ , предполагаются известными),  $B_0^2$  можно определить.

Это значение  $B_0^2$  затем используется в уравнении, аналогичном (6.80), для радиальной функции  $R(\rho)$ . Таким образом, радиальный лапласиан можно рассчитать описанным выше способом и сравнить его с начальным пробным значением. Если согласие не достигнуто, то этот процесс можно продолжить, хотя он не обязательно должен сходиться для каждого случая.

Если мы рассматриваем двумерную задачу со 100 счетными точками в каждом направлении, то полное число счетных точек равно

$10^4$ , а машинное время по крайней мере пропорционально числу счетных точек. Таким образом, расчет 100 одномерных задач можно провести с такой же затратой машинного времени, как и одной двумерной задачи. Так как для того, чтобы достичь сходимости в методе синтеза потока, требуется значительно меньше 100 итераций, то преимущества этого метода с точки зрения экономии машинного времени очевидны. Однако необходимо отметить, что этот метод не дает такой точности, как полный двумерный расчет, который и используется обычно для получения точных проектных данных.

Основной предпосылкой метода синтеза нейтронного потока является предположение о том, что переменные разделяются, т. е. что радиальное распределение потока нейтронов одинаково в любом сечении по высоте, а аксиальное распределение одинаково на любом радиусе. Конечно, на практике такое разделение переменных отсутствует, так что метод синтеза, естественно, менее точен, чем прямой многомерный расчет. Однако если реактор спроектирован достаточно симметричным, то разделение переменных может оказаться вполне удовлетворительным приближением для того, чтобы проводить широкие варианты расчеты, не требующие больших затрат машинного времени. Для детальных реперных расчетов метод синтеза неприменим, и требуются прямые многомерные расчеты.

## Задачи

- 6.1. Вывести девятиточечные конечно-разностные уравнения для трехмерной декартовой системы координат.
- 6.2. Вывести пятиточечные конечно-разностные уравнения для бесконечного цилиндра ( $\rho, \theta$ -геометрия) (не предполагая азимутальной симметрии).
- 6.3. Вывести пятиточечные конечно-разностные уравнения для цилиндра конечной длины с азимутальной симметрией ( $\rho, z$ -геометрия).

## Список литературы

1. Wachspress E. Iterative Solution of Elliptic Systems. N. Y. Prentice-Hall, 1966.

---

### РЕГУЛИРОВАНИЕ РЕАКТОРА

---

#### § 7.1. ВВЕДЕНИЕ

Причины, по которым приходится изменять реактивность работающего реактора, уже обсуждались в предыдущей главе. Напомним, что к ним относятся необходимость регулировать уровень мощности реактора, изменяя его размножающие свойства, необходимость компенсации выгорания топлива и накопления продуктов деления, а также компенсации небольших флуктуаций реактивности, обусловленных температурными и другими эффектами. В гл. 6 мы обсудили некоторые методы расчета эффективности поглощающего элемента (например, регулирующего стержня), а также расчета изменения реактивности из-за выгорания топлива и накопления продуктов деления.

Наиболее мощный метод расчета эффективности регулирующего стержня состоит в численном решении уравнения переноса нейтронов способами, аналогичными тем, которые описаны в гл. 6\*. В соответствии с ними поверхность и внутренняя часть регулирующего стержня, на которых ожидается резкое изменение потока нейтронов, разбиваются на ряд счетных точек. В настоящей главе мы не будем подробно рассматривать этот расчетный метод, а остановимся на некоторых аналитических приближениях, которые могут иногда оказаться полезными, если по той или иной причине численные методы не используются.

#### § 7.2. ПРЯМОЙ РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГУЛИРУЮЩЕГО СТЕРЖНЯ

Одно из наиболее очевидных приближений для расчета эффективности регулирующего стержня — использование вариационных методов или методов теории возмущений, описанных в гл. 5. Такое приближение наиболее приемлемо для реактора на быстрых нейтронах, в котором поглощающая способность регулирующего стержня из-за резкого уменьшения сечения поглощения с энергией может быть достаточно малой. Однако в реакторах на

---

\* Диффузионная теория неприменима для расчетов эффективности регулирующих стержней из-за высоких поглощающих способностей их материала.

тепловых нейтронах сечения поглощения регулирующих стержней настолько велики, что эти методы оказываются не очень точными.

Другое приближение состоит в прямом аналитическом решении уравнения диффузии для активной зоны реактора, содержащей один или более регулирующих стержней. Поскольку такие расчеты могут быть проведены лишь для систем с достаточно простой геометрией, то их практическое применение весьма ограничено. Однако для демонстрации того, как вести такие расчеты, приведем некоторые методы расчета эффективности регулирующих *пластин* в плоском реакторе.

В качестве первого примера рассмотрим плоский реактор шириной  $2a$  с регулирующей пластиной шириной  $2d$ , расположенной в центре активной зоны. Если предположить, что пластина является абсолютно *черной*, т. е. поглощает все падающие на нее нейтроны, то две половины реактора эффективно подразделяются на два реактора с экстраполированной шириной  $a - d + 2z_0$ , где  $z_0$  — длина экстраполяции для активной зоны реактора.

В любом случае реактивность всей системы в целом просто равна реактивности каждой половины отдельно; таким образом, определяя  $a_1$  в виде

$$a_1 = a - d + 2z_0, \quad (7.1)$$

а  $a'$  как экстраполированную полуширину голого реактора, имеем для реактора с удаленным регулирующим элементом\*

$$v_c = \frac{D(\pi/2a')^2 + \Sigma_a}{\Sigma_f}, \quad (7.2)$$

а для реактора с введенным регулирующим элементом

$$v_{c1} = \frac{D(\pi/2a_1)^2 + \Sigma_a}{\Sigma_f}. \quad (7.3)$$

Тогда изменение реактивности  $\delta k$ , обусловленное регулирующим элементом, можно записать следующим образом:

$$\delta k = \frac{v_c - v_{c1}}{v} = \frac{D}{v\Sigma_f} \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a_1^2} \right). \quad (7.4)$$

Введение черного регулирующего элемента может *не* полностью изолировать две части реактора, например, если стержень вводится в цилиндрический реактор. Тогда поток нейтронов можно найти из решения уравнения диффузии, используя соответствующие граничные условия на поверхности регулирующего стержня и внешней поверхности реактора. В этом случае  $v_c$  можно найти из соотношения

$$v_c = \frac{\int -\nabla \cdot D \nabla \phi d^3 r + \int \Sigma_a \phi d^3 r}{\int \Sigma_f \phi d^3 r}, \quad (7.5)$$

где  $\phi$  — точное решение.

\* Предполагается, что при удалении регулирующего элемента его место заполняется веществом активной зоны.

### § 7.3. КОЭФФИЦИЕНТ САМОЭКРАНИРОВКИ

Очевидно, что если бы поглотитель вводился в реактор однородно, а не в виде стержня или дискретного элемента, то было бы легче рассчитать его эффективность. Трудность, возникающая при расчёте блокированных поглотителей, состоит в том, что поток нейтронов существенно ослабляется внутри блока поглотителя, и этот коэффициент ослабления потока, или коэффициент самоэкранировки, очень трудно рассчитать.

Допустим, например, что реактор состоит из двух зон  $A$  и  $B$ . Предполагается, что зона  $A$  представляет собой блок поглотителя. На рис. 7.1 показан случай двух плоских размножающих зон, разделённых поглощающей пластиной. Зоны  $A$  и  $B$  будут иметь отличающиеся сечения поглощения (скажем,  $\Sigma_a^A$  и  $\Sigma_a^B$ ). Можно обозначить поток в таком реакторе  $\phi_1$ . Очевидно, что для определения  $\phi_1$  необходимо задать значительно больше параметров, чем только сечения поглощения. Мы должны знать сечения деления, источники, диффузионные длины и различные другие параметры. Предположим, что все эти параметры заданы и поток нейтронов  $\phi_1$  известен.

Допустим теперь, что мы заменяем вещество в зоне  $A$  веществом, идентичным тому, из которого состоит зона  $B$  (включая источники). В этом случае поток нейтронов можно обозначить  $\phi_2$ . Соответствующее различие в поведении обоих потоков в плоской геометрии приведено на рис. 7.1.

Средние потоки нейтронов в зоне  $A$  в этих двух случаях даются выражениями:

$$\bar{\phi}_{1A} = \frac{1}{V_A} \int_{V_A} d^3 r \phi_1(r); \quad (7.6a)$$

$$\bar{\phi}_{2A} = \frac{1}{V_A} \int_{V_A} d^3 r \phi_2(r). \quad (7.6b)$$

Коэффициент самоэкранировки поглотителя в зоне  $A$  определяется в виде

$$F = \bar{\phi}_{1A} / \bar{\phi}_{2A}. \quad (7.6c)$$

Тогда интенсивность поглощения в зоне  $A$  для первого случая

$$R_A = \bar{\phi}_{1A} V_A \Sigma_a^A = \bar{\phi}_{2A} V_A \Sigma_a^A F. \quad (7.7)$$

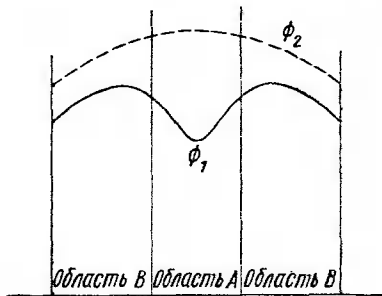


Рис. 7.1. Поток нейтронов в гомогенной и гетерогенной системах. Сплошная линия относится к гетерогенному случаю, когда сечение поглощения равно  $\Sigma_a^A$  в области  $A$  и  $\Sigma_a^B$  в области  $B$ ; пунктирная — к случаю, когда сечение гомогенизировано по обеим областям

Последнее соотношение устанавливает связь между интенсивностью поглощения в блоке поглотителя и потоком нейтронов, который имел бы место, если бы поглотитель был заменен веществом, идентичным веществу окружающей среды. Воспользуемся этим результатом для получения метода «размазывания» блока поглотителя по всей области  $A + B$ .

Причина введения коэффициента самоэкранировки состоит в том, что он слабо зависит от детальных свойств области  $B$ , поэтому можно один раз рассчитать коэффициент  $F$  для некоторой характерной композиции области  $B$ , а в последующих расчетах, при умеренных изменениях свойств области  $B$ , использовать это значение  $F$  и вычислять интенсивность поглощения с помощью более простых расчетов потока нейтронов  $\bar{\phi}_{2A}$ , а не  $\bar{\phi}_{1A}$  (расчет  $\bar{\phi}_{2A}$  более прост, чем расчет  $\bar{\phi}_{1A}$ , поскольку  $\bar{\phi}_{2A}$  относится к *гомогенной среде*). Если бы можно было точно вычислить коэффициент  $F$  в диффузионной теории, то его использование в расчетах не потребовало бы больших затрат машинного времени. Однако поглощающие элементы обычно состоят из материалов с большим сечением поглощения нейтронов. Как уже отмечали в гл. 2, диффузионная теория в этом случае не дает хороших результатов. Проще говоря, основная причина введения коэффициента  $F$  состоит в том, что распределение нейтронов должно рассчитываться с использованием теории переноса. Приведенные выше замечания об относительной нечувствительности коэффициента самоэкранировки к небольшим изменениям свойств области  $B$ , конечно, справедливы, однако, как отмечалось, основная причина введения коэффициента  $F$  — важность транспортных эффектов в поглощающих элементах.

Прежде чем перейти к методам расчета коэффициента самоэкранировки, следует ввести определение и доказать теорему.

**О п р е д е л е н и е 7.1.** *Рассмотрим две однородные области  $A$  и  $B$ , которые могут быть, вообще говоря, неодносвязными и занимать все пространство (если не оговорено противное). Величина  $P_{AB}$  определяется как вероятность того, что нейтроны, рожденные равномерно и изотропно в области  $A$ , будут поглощены в области  $B$ . Очевидно, что аналогично определяются величины  $P_{BA}$ ,  $P_{AA}$  и  $P_{BB}$ . Если области  $A$  и  $B$  занимают все пространство, то, согласно определению,*

$$P_{AB} + P_{AA} + P_{BA} + P_{BB} = 1. \quad (7.8)$$

В этом случае величина  $P_{AB}$  называется *вероятностью выхода* (или *вероятностью избежать столкновений*) для нейтронов, рожденных в области  $A$ , и обозначается  $P_A$ ;  $P_{BA}$  — та же величина для нейтронов, рожденных в области  $B$ .

**Теорема 7.1.**

$$P_{AB} = P_{BA} \frac{V_B \Sigma_a^B}{V_A \Sigma_a^A}. \quad (7.9)$$

Здесь  $V_B/V_A$  — отношение объемов областей  $B$  и  $A$ , а  $\Sigma_a^B$  и  $\Sigma_a^A$  — соответствующие сечения поглощения (отметим, что  $P_{BA}$  относится к задаче с источником в области  $B$ , а  $P_{AB}$  — к задаче с источником в области  $A$ ).

Чтобы доказать эту теорему, необходимо доказать следующее.

**Лемма.** Функция Грина односкоростного диффузионного уравнения является симметричной функцией своих аргументов, т. е.

$$G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1). \quad (7.10)$$

Действительно, эта лемма доказывается тривиально для бесконечной среды, поскольку, как мы видели, в этом случае  $G = G(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ . На самом деле лемма справедлива для любой системы. В этом можно убедиться, если вспомнить, что функция Грина оператора и его сопряженной величины связаны перестановкой переменных источника и поля (т. е.  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ ) и что односкоростной диффузионный оператор является самосопряженным. Можно доказать лемму также и прямым способом. Напишем уравнения, которым удовлетворяют функции Грина\*:

$$-\nabla \cdot D \nabla G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_1); \quad (7.11a)$$

$$-\nabla \cdot D \nabla G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_2). \quad (7.11b)$$

Умножим теперь уравнение (7.11a) на  $G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r})$ , а (7.11b) на  $G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r})$ , проинтегрируем по  $\mathbf{r}$  и вычтем одно из другого. Первые члены с оператором  $\nabla$  можно проинтегрировать по частям, после чего становится очевидно, что они идентичны (можно предположить, что члены, содержащие интегрирование по поверхности, обращаются в нуль из-за обычных граничных условий). Аналогично взаимно уничтожаются и члены, содержащие сечения поглощения. Интегрируя  $\delta$ -функции, получаем соотношение (7.10).

Вернемся теперь к теореме.

**Доказательство.** Если в области  $A$  имеется однородный источник  $q$ , то поток нейтронов в области  $B$

$$\phi^B(\mathbf{r}) = q \int_A d^3r' G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}). \quad (7.12)$$

Тогда  $P_{AB}$  есть полное число поглощений в области  $B$ , деленное на полное число нейтронов, рожденных в области  $A$ , т. е.

$$P_{AB} = \Sigma_a^B \int_B \frac{\phi^B(\mathbf{r}) d^3r}{qV_A} = \frac{\Sigma_a^B}{V_A} \int_B d^3r \int_A d^3r' G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}). \quad (7.13a)$$

Аналогично можно написать выражение и для  $P_{BA}$ :

$$P_{BA} = \frac{\Sigma_a^A}{V_B} \int_B d^3r \int_A d^3r' G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}). \quad (7.13b)$$

\* Для доказательства леммы мы используем диффузионную теорию. Можно провести доказательство и для теории переноса (см. [1]).

Сравнивая (7.13а) и (7.13б) и используя свойство симметрии функции Грина  $G(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$ , получаем, что соотношение (7.9) действительно выполняется, т. е. теорема доказана.

Предположим теперь, что область  $B$  содержит однородный источник  $q$ . Тогда интенсивность поглощения в области  $A$  есть произведение числа нейтронов, рожденных в области  $B$ , и вероятности выхода  $P_{BA}$ :

$$R_A = qV_B P_{BA}. \quad (7.14а)$$

Эта величина связана со средним потоком нейтронов в области  $A$  соотношением (7.7), так что

$$\bar{\phi}_{1A} = \frac{qV_B P_{BA}}{V_A \Sigma_a^A}. \quad (7.14б)$$

Если области  $A$  и  $B$  очень велики, то  $\phi_2$  (поток нейтронов в случае, когда вещество области  $A$  заменяется веществом, идентичным веществу области  $B$ ) постоянен по пространству

$$\phi_2 = q/\Sigma_a^B = \bar{\phi}_{2A}. \quad (7.14в)$$

Так как коэффициент самоэкранировки определяется как отношение потоков  $\bar{\phi}_{1A}$  и  $\bar{\phi}_{2A}$ , то имеем

$$F = \frac{\Sigma_a^B V_B}{\Sigma_a^A V_A} P_{BA}, \quad (7.15а)$$

или, используя (7.9),

$$F = P_{AB}. \quad (7.15б)$$

При выводе соотношения (7.15б) предполагалось, что область  $B$  содержит постоянный изотропный источник. В гл. 9 мы увидим, что распределение тепловых нейтронов, рожденных в результате замедления нейтронов деления, аппроксимируется постоянным изотропным источником. Таким образом, можно ожидать, что выведенное выше выражение для коэффициента самоэкранировки будет применимо для тепловых нейтронов в реакторе.

Может оказаться желательным «размазать» поглотитель по областям  $A$  и  $B$ . При этом, как следует из рассмотрения эффектов самоэкранировки, необходимо определить эффективное сечение поглощения, которое должно быть добавлено к сечению поглощения для областей  $A$  и  $B$ . Области  $A$  и  $B$  не обязательно занимают весь реактор (рис. 7.2).

Введение эффективного сечения  $\Sigma_a^{\text{эф}}$ , такого, что сечение поглощения в областях  $A$  и  $B$  становится равным  $\Sigma_a^{\text{эф}} + (V_B/V)\Sigma_a^B$ , требует введения соответствующего потока нейтронов  $\phi_3$ . Предполагая по-прежнему, что объем  $V = V_A + V_B$  достаточно велик, чтобы использовать решение задачи для бесконечной системы, получаем

$$\phi_3 = \frac{q}{V_B \Sigma_a^B/V + \Sigma_a^{\text{эф}}}. \quad (7.16)$$

Интенсивность поглощения, обусловленная сечением  $\Sigma_a^{\text{эф}}$ , есть

$$R = \phi_3 V \Sigma_a^{\text{эф}}. \quad (7.17a)$$

Эта величина должна быть приравнена к интенсивности поглощения в истинном поглощающем элементе (уравнение (7.14a)), т. е.

$$\phi_3 V \Sigma_a^{\text{эф}} = R_A = q V_B P_{BA}; \quad (7.176)$$

$$\phi_3 V \Sigma_a^{\text{эф}} = q \frac{\Sigma_a^A V_A}{\Sigma_a^B} F. \quad (7.17b)$$

Решая это уравнение относительно  $\Sigma_a^{\text{эф}}$ , получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_a^{\text{эф}} = \\ = \frac{V_B V_A}{V^2} F \frac{\Sigma_a^A}{1 - (\Sigma_a^A V_A / \Sigma_a^B V) F}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Расчет вероятностей выхода в диффузионной теории тривиален. В действительности вероятности выхода были рассчитаны по точной односкоростной теории переноса, и численные значения затабулированы [2]. Однако необходимо отметить, что большинство таблиц относятся к вероятностям выхода для нейтронов *первого пролета* (см. § 7.4).

Пренебрежем на время неточностями диффузионной теории для таких расчетов и вычислим вероятность выхода для пластины шириной  $2a$  с *бесконечными отражателями* (рис. 7.3).

Имеем для области *A*

$$\left( -D^A \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a^A \right) \phi_A(x) = q, \quad (7.19a)$$

а для области *B* (область отражателя)

$$\left( -D^B \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a^B \right) \phi_B(x) = 0. \quad (7.19b)$$

Тогда

$$\phi_A(x) = q / \Sigma_a^A + C_A \text{ch} \kappa_A x \quad (7.20a)$$

и

$$\phi_B(x) = C_B \exp(-\kappa_B x), \quad (7.20b)$$

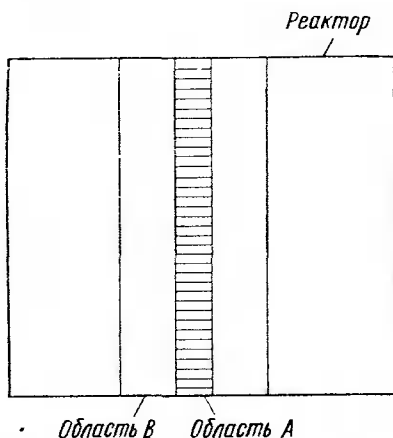


Рис. 7.2. Схематическое изображение реактора, используемое при расчете эффектов самоэкранировки

где использован тот факт, что  $\phi(x) = \phi(-x)^*$ . Коэффициент  $C_A$  можно найти, приравнявая потоки и токи нейтронов в точке  $x = a$ :

$$C_A = -\frac{q_A}{\Sigma_a^A} \left( \frac{\kappa_A D^A}{\kappa_B D^B} \operatorname{sh} \kappa_A a + \operatorname{ch} \kappa_A a \right)^{-1}. \quad (7.21)$$

Теперь можно вычислить

$$P_{AA} = \frac{\Sigma_a^A \int_A \phi_A(x) dx}{2aq} \quad (7.22a)$$

и, конечно,

$$P_{AB} = 1 - P_{AA}. \quad (7.22б)$$

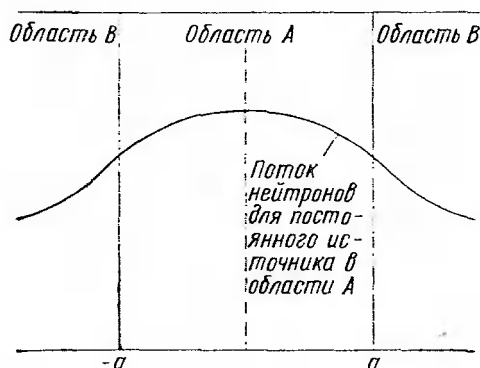


Рис. 7.3. Плоский реактор с отражателем для расчета вероятности выхода нейтрона

Используя соотношение (7.20a) для потока нейтронов и (7.21) для коэффициента  $C_A$ , можно провести интегрирование в уравнении (7.22a) и получить следующее выражение:

$$P_{AB} = \frac{\operatorname{sh} \kappa_A a}{\kappa_A a} \left( \operatorname{ch} \kappa_A a + \frac{D^A \kappa_A}{D^B \kappa_B} \operatorname{sh} \kappa_A a \right)^{-1}. \quad (7.23a)$$

Интенсивность поглощения в пластине определяется уравнениями (7.7) и (7.15):

$$R_A = \bar{\phi}_B V \frac{V_A}{V} P_{AB} \Sigma_a^A; \quad (7.23б)$$

$$R_A = \frac{q}{\Sigma_a^B} \frac{V_A \operatorname{sh} \kappa_A a}{\kappa_A a} \frac{1}{(D^A \kappa_A / D^B \kappa_B) \operatorname{sh} \kappa_A a + \operatorname{ch} \kappa_A a}. \quad (7.23в)$$

Нетрудно видеть, что полученные выражения для интенсивности поглощения находятся в хорошем согласии с результатами вариацион-

\* Здесь  $\kappa = \sqrt{\Sigma_a / D}$ .

ного расчета (5.151) в случае, когда  $k_{DA}$  достаточно мало, чтобы можно было провести разложения:

$$\operatorname{ch} k_{DA} \approx 1; \quad (7.24a)$$

$$\operatorname{sh} k_{DA} \approx k_{DA} \quad (7.24б)$$

(напомним, что  $Dk = L$ ).

На практике большинство расчетов коэффициента самоэкранировки проводятся для задач с тяжелыми поглотителями, для которых, как уже отмечалось ранее, диффузионная теория неприменима. По этой причине целесообразнее использовать затабулированные значения вероятностей выхода, которые получены более точными методами. Приведенные выше расчеты представляют скорее академический интерес и приведены для того, чтобы продемонстрировать возможные пути использования коэффициентов самоэкранировки в расчетах реакторов.

#### § 7.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫХОДА НЕЙТРОНОВ ПЕРВОГО ПРОЛЕТА

В § 7.3 мы установили, что коэффициент самоэкранировки связан с вероятностью выхода  $P_{AB}$ . Часто вероятность выхода аппроксимируется вероятностью выхода нейтронов первого пролета  $P_0^*$ , которую значительно легче рассчитывать. Вероятность выхода нейтронов первого пролета  $P_0^*$  (иногда называемая вероятностью избежать столкновения) определяется как вероятность того, что путь пролета нейтрона заканчивается вне той области, где он родился. Приведенные выше расчеты, основанные на диффузионной теории, дают истинные вероятности выхода. Если обе рассматриваемые области являются чисто поглощающими (т. е. нерассеивающими), то эти две величины идентичны.

Трудность состоит в том, что истинные вероятности выхода легко рассчитываются в диффузионном приближении, которое, однако, неприменимо при использовании тяжелых поглотителей. Расчет же более точными методами, основанными на теории переноса, сталкивается со сложностями учета рассеяния.

Рассмотрим специальный случай, в котором область  $A$  представляет собой изолированный выпуклый объем (рис. 7.4). Тогда нейтрон, вышедший через поверхность этого объема, скажем вдоль пути  $R(\Omega, \nu)$ , не может вернуться в объем, не испытав столкнове-

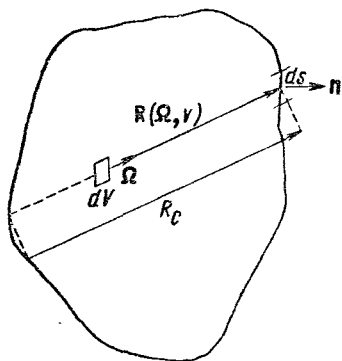


Рис. 7.4. Изолированный замкнутый объем для расчета вероятности выхода нейтронов первого пролета ( $n$  — нормаль к поверхности)

ния в области  $B$ . Таким образом, в этом случае необходимо рассчитать только вероятность того, что нейтрон достигнет поверхности. Разумеется, вероятность выхода нейтронов первого пролета из изолированного выпуклого объема (обозначаемая здесь  $P_0$ ) не зависит от свойств материала, окружающего объем.

Величина  $P_0$  в этом случае определяется следующим образом:

$$P_0 = \frac{1}{4\pi V_0} \int_{V_0} dV \int d\Omega \exp[-\Sigma_T^A R(\Omega, v)]. \quad (7.25)$$

Удобно выбрать элемент объема  $dV$  в виде

$$dV = dR(\Omega, v) dS \Omega \cdot \mathbf{n}, \quad \Omega \cdot \mathbf{n} > 0. \quad (7.26)$$

Тогда  $P_0$  принимает вид

$$P_0 = \frac{1}{4\pi V_0} \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} d\Omega \int_{S_0} dS \Omega \cdot \mathbf{n} \int_0^{R_c} dR \exp(-\Sigma_T^A R) \quad (7.27a)$$

или

$$P_0 = \frac{1}{4\pi V_0} \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} d\Omega \int_{S_0} dS \Omega \cdot \mathbf{n} \frac{1 - \exp(-\Sigma_T^A R_c)}{\Sigma_T^A} \quad (7.27b)$$

( $V_0$  — полный объем;  $S_0$  — полная поверхность). Для очень малых областей  $\Sigma_T^A R_c \ll 1$ , и любой нейтрон, появившийся в объеме, должен выйти из него, так что

$$P_0^{\text{мал. обл.}} = 1. \quad (7.28a)$$

Для очень больших областей  $\Sigma_T^A R_c \gg 1$  и

$$\begin{aligned} P_0^{\text{больш. обл.}} &\approx \frac{1}{4\pi V_0} \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} d\Omega \int_{S_0} dS \Omega \cdot \mathbf{n} \frac{1}{\Sigma_T^A} = \\ &= \frac{1}{4\pi V_0 \Sigma_T^A} \int_{S_0} dS \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu = \frac{S_0}{4V_0 \Sigma_T^A}. \end{aligned} \quad (7.28b)$$

Отметим, что для больших областей  $4V_0/S_0$  велико, а для малых — мало. Мы установили, что для малых областей  $P_0 = 1$ , а для больших обратно пропорциональна  $4V_0/S_0$ . Можно представить  $P_0$  в виде простой рациональной функции от  $4V_0/S_0$ , удовлетворяющей этим предельным случаям:

$$P_0^R = \frac{1}{1 + \bar{r} \Sigma_T^A}, \quad (7.29a)$$

где  $\bar{r} = 4V_0/S_0$ .

Выражение (7.29а) называется *рациональным приближением Вигнера*. Из табл. 7.1 следует, что рациональное приближение Вигнера дает значение  $P_0$  с погрешностью не более 20%.

Таблица 7.1

Вероятность выхода  $P_0$  как функция отношения средней длины хорды к среднему свободному пробегу для различных геометрий и в рациональном приближении

$\bar{r} \Sigma_T^A$	Сфера	Цилиндр	Пластина	Рациональное приближение
0,04	0,978	0,974	0,952	0,962
0,1	0,947	0,939	0,902	0,909
0,2	0,896	0,885	0,837	0,823
0,3	0,850	0,819	0,785	0,769
0,5	0,767	0,753	0,701	0,667
1	0,607	0,596	0,557	0,500
2	0,411	0,407	0,390	0,333
3	0,302	0,302	0,295	0,250
5	0,193	0,193	0,193	0,167
10	0,099	0,099	0,100	0,091

Можно получить более точное приближение для расчета  $P_0$ . Из табл. 7.1 видно, что значение  $P_0$  для трех геометрий различается не более чем на 9%. Таким образом, можно ожидать, что удастся найти такое приближение для  $P_0$ , которое будет давать результаты с погрешностью в пределах 5%. Действительно, выражение

$$P_0^r = \frac{10 + 5\bar{r} \Sigma_T^A + 5(\bar{r} \Sigma_T^A)^2}{10 + 14\bar{r} \Sigma_T^A + 5(\bar{r} \Sigma_T^A)^2 + 5(\bar{r} \Sigma_T^A)^3} \quad (7.29б)$$

дает значения  $P_0$  для аргументов, приведенных в табл. 7.1, с погрешностью 6%.

Как отмечалось ранее, полученные выше результаты применимы только к вероятностям выхода нейтронов первого пролета из изолированных выпуклых поглотителей. Для теснорасположенных блоков поглотителя или поглотителей с углублениями на поверхности расчеты оказываются гораздо сложнее. В этих случаях нейтрон может выйти из поглотителя и вновь вернуться, не испытав столкновения.

В случае, когда несколько поглотителей расположены близко друг к другу, нейтрон, выходящий через поверхность первого поглотителя и пересекающий одну или несколько областей, окружающих поглотитель, будет испытывать свое следующее столкновение в другом поглотителе (рис. 7.5). Такая возможность должна быть учтена при расчете вероятности выхода  $P_0$ . Мы не будем давать здесь вывод соответствующего выражения для  $P_0$ , а приведем

лишь результат, который является хорошим приближением к точному значению (табл. 7.2):

$$P_0^* = P_0 \frac{1-c}{1 - (1 - \bar{r} \Sigma_T^A) P_0 c} \quad (7.30a)$$

Величина  $c$  известна как *поправка Данкова — Гинзбурга*. Она за-табулирована во многих работах (например, в [21]). Еще одно, несколько менее точное приближение для  $P_0^*$  имеет вид

$$P_0^*(\bar{r}) = P_0 (\bar{r} / (1 - c)) \quad (7.30б)$$

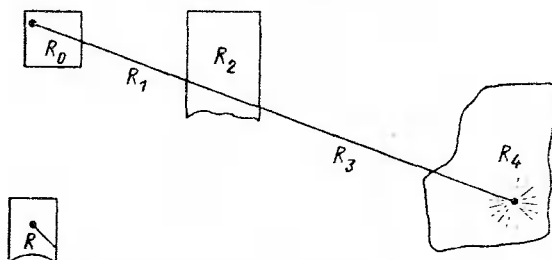


Рис. 7.5. Типичная длина пролета нейтрона в гомогенной системе

Таблица 7.2

Различные приближения для  $P_0^*$  для стержней, размещенных в квадратной решетке, при отношении объемов воды и поглотителя, равном единице

Диаметр стержня, см	$\bar{r} \Sigma_T^A$	$c$	Точное значение $P_0^*$	$P_0 \frac{1-c}{1 - (1 - \bar{r} \Sigma_T^A) P_0 c}$		$P_0 \left( \frac{\bar{r}}{1-c} \right)$
0,625	0,5	0,464	0,572	0,571	0,611	
0,625	1	0,464	0,397	0,393	0,425	
0,625	6	0,464	0,088	0,088	0,089	
1,5	0,5	0,208	0,691	0,689	0,710	
1,5	1	0,208	0,522	0,520	0,535	
1,5	6	0,208	0,133	0,310	0,131	

Иначе говоря, вероятность выхода  $P_0^*$  для теснорасположенных поглотителей приблизительно равна вероятности выхода для изолированного поглотителя, у которого отношение объема к поверхности увеличивается в  $1/(1-c)$  раз.

В табл. 7.2 приближения (7.30a) и (7.30б) сравниваются с точными расчетами. Видно, что формула (7.30a) дает очень хорошие результаты как для теснорасположенных, так и для достаточно удаленных друг от друга стержней, в то время как формула (7.30б) дает несколько меньшую точность (погрешность  $\sim 10\%$ ) для теснорасположенных стержней.

## § 7.5. ЧЕРНЫЙ СТЕРЖЕНЬ В ДИФфуЗИОННОЙ ТЕОРИИ: ПОГЛОЩАЮЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

В предыдущих параграфах данной главы мы отмечали, что диффузионная теория неприменима для точного предсказания поглощения в сильно поглощающей (черной) среде. Однако, используя коэффициент самоэкранировки, можно ввести *эффективное* сечение поглотителя таким образом, что диффузионная теория оказывается применимой для этого случая. В настоящем параграфе применим диффузионную теорию к расчету реактивности черного регулирующего стержня в реакторе, отмечая, что если стержень яв-

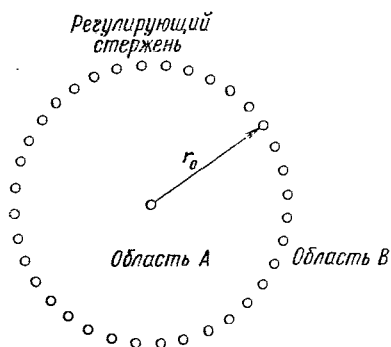


Рис. 7.6. Черный регулирующий стержень

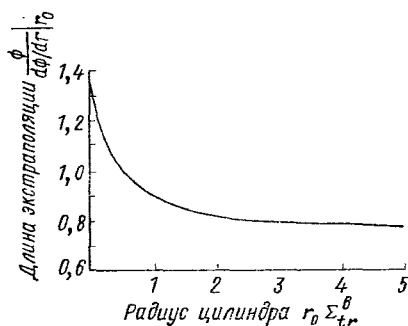


Рис. 7.7. Длина экстраполяции для цилиндра (длина экстраполяции и радиус цилиндра выражены в единицах среднего свободного пробега)

ляется действительно черным, то результаты мало обоснованы. Однако в случае «серого» стержня, т. е. когда можно с помощью коэффициента самоэкранировки ввести эффективное сечение поглотителя, целесообразно использовать развитые ниже идеи.

Черный стержень (область А) размещается в бесконечной области В, содержащей однородный источник (рис. 7.6).

Ранее мы описали, как можно проводить этот расчет для черной регулирующей пластины, введенной в плоский реактор. В этом расчете предполагалось, что экстраполированный поток обращался в нуль внутри пластины в соответствии со следующим условием:

$$\left. \frac{\phi(x)}{d\phi/dx} \right|_{gr} = 0,71/\Sigma_{tr}^B = d. \quad (7.31)$$

Если бы мы пытались провести такой же расчет в более сложной геометрии, то мы не могли бы использовать уравнение, подобное (7.31). В частности, нельзя использовать уравнение (7.31) для случая черного цилиндрического регулирующего стержня.

В некоторых работах (см., например, [37]) изучались соответствующие граничные условия для черных цилиндрических регули-

рующих стержней. Результаты этих исследований, приведенные на рис. 7.7, можно суммировать в следующем виде:

$$\left. \frac{\phi}{d\phi/d\rho} \right|_{r_0} = d(r_0), \quad (7.32)$$

где

$$d(r_0) = \frac{0,71 + 0,31/(r_0 \Sigma_{tr}^B + 0,50)}{\Sigma_{tr}^B}.$$

Очевидно, что в предельном случае больших  $r_0$  эти соотношения дают хорошо известный результат, выраженный уравнением (7.31). Конечно, уравнение (7.32) представляет собой приближенное выражение такого же типа, которое мы использовали для получения условия (2.60).

Начнем с решения диффузионного уравнения в области  $B$ :

$$(-D^B \nabla^2 + \Sigma_a^B) \phi(\rho) = q, \quad (7.33a)$$

или, представляя  $\nabla^2$  в цилиндрических координатах (2.116),

$$\left( -D^B \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} + \Sigma_a^B \right) \phi(\rho) = q. \quad (7.33b)$$

Частное решение уравнения (7.33b) имеет вид

$$\phi_p(\rho) = q/\Sigma_a^B. \quad (7.34a)$$

Общее решение однородного уравнения вновь дается в виде, приведенном в (2.125a). Так как область  $B$  предполагается бесконечной, то в решении должен присутствовать только член, исчезающий при  $\rho = \infty$ . Таким образом,

$$\phi_H(\rho) = CK_0(\kappa_B \rho), \quad (7.34b)$$

где

$$\kappa_B = \sqrt{\Sigma_a^B/D^B}. \quad (7.34b)$$

Полное решение имеет вид

$$\phi(\rho) = \phi_p(\rho) + \phi_H(\rho) = q/\Sigma_a^B + CK_0(\kappa_B \rho). \quad (7.35)$$

Постоянная  $C$  определяется из граничного условия (7.32)

$$\frac{q/\Sigma_a^B + CK_0(\kappa_B r_0)}{-CK_B K_1(\kappa_B r_0)} = d(r_0) \quad (7.36a)$$

или

$$C = \frac{q/\Sigma_a^B}{K_0(\kappa_B r_0) + \kappa_B d(r_0) K_1(\kappa_B r_0)}. \quad (7.36b)$$

Используя этот результат, можно записать полный поток нейтронов в области  $B$  следующим образом:

$$\phi(\rho) = \frac{q}{\Sigma_a^B} \left[ 1 - \frac{K_0(\kappa_B \rho)}{K_0(\kappa_B r_0) + \kappa_B d(r_0) K_1(\kappa_B r_0)} \right]. \quad (7.37)$$

Так как стержень черный, ток нейтронов  $-D^B(d/d\rho)\phi(\rho)$  на границе  $r_0$  направлен внутрь стержня. Число нейтронов, поглощенных в единицу времени на единичной площади стержня, равно току нейтронов на поверхности

$$|J(r_0)| = \left| D^B \frac{d}{d\rho} \phi(\rho) \right|_{r_0}, \quad (7.38a)$$

или, используя (7.37),

$$|J(r_0)| = \frac{q}{\kappa_B} \times \frac{K_1(\kappa_B r_0)}{K_0(\kappa_B r_0) + \kappa_B d(r_0) K_1(\kappa_B r_0)}. \quad (7.38b)$$

Число нейтронов, поглощенных стержнем в единицу времени на единицу длины, равно произведению тока  $|J(r_0)|$  на длину окружности стержня  $2\pi r_0$ . Отношение числа нейтронов, поглощенных в единицу длины стержня, к числу нейтронов в единицу объема, рожденных вне стержня,  $q$ , называется *поглощающей поверхностью* стержня  $A_a$ :

$$A_a = \frac{2\pi r_0}{\kappa_B} \frac{K_1(\kappa_B r_0)}{K_0(\kappa_B r_0) + \kappa_B d(r_0) K_1(\kappa_B r_0)}. \quad (7.39a)$$

Зависимость  $A_a$  от радиуса стержня  $r_0$  приведена на рис. 7.8.

Понятие поглощающей поверхности стержня было введено Гурвицем и Роз [4]. Они ввели также некоторые соотношения эквивалентности для других, более сложных геометрий стержня:

$$A_a = \frac{2\pi r_{\text{эф}}}{\kappa_B} \frac{K_1(\kappa_B r_{\text{эф}})}{K_0(\kappa_B r_{\text{эф}}) + \kappa_B d(r_{\text{эф}}) K_1(\kappa_B r_{\text{эф}})}, \quad (7.39b)$$

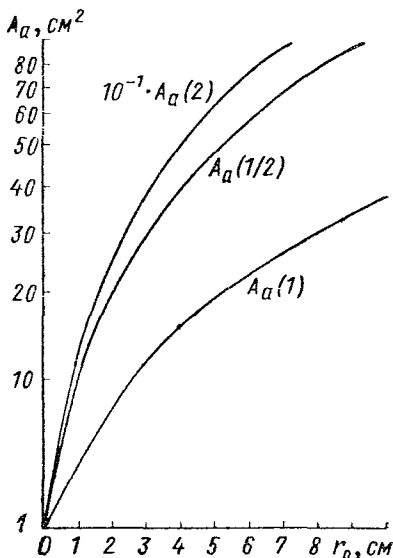


Рис. 7.8. Зависимость поглощающих поверхностей  $A_a(\kappa_B)$  для цилиндрических стержней от радиуса  $r_0$

где  $r_{эф}$  — эффективный радиус эквивалентного цилиндра. Например, поглощающая поверхность для трех геометрий стержня, приведенных на рис. 7.9, определяется из уравнения (7.39б), где

$$r_{эф} = d/\sqrt{2} \quad \text{черный крест;} \quad (7.40a)$$

$$r_{эф} = d/2 \quad \text{черная пластина;} \quad (7.40б)$$

$$r_{эф} = (d + b)/2 \quad \text{черный эллипс.} \quad (7.40в)$$

Понятие поглощающей поверхности можно использовать для оценки эффективного уменьшения реактивности в критическом реакторе, обусловленного введением черного регулирующего стержня



Рис. 7.9. Конфигурации стержней, используемые при расчетах поглощающих поверхностей

длиной  $l$ . Предположим, что источником тепловых нейтронов, равномерно распределенным по замедлителю\*, служит источник нейтронов деления

$$q = \frac{v_c}{V} \int \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) d^3 r, \quad (7.41)$$

где  $V$  — объем реактора. Тогда, согласно определению  $A_a$ , число нейтронов, поглощаемых каждую секунду регулирующим стержнем длиной  $l$ , равно

$$n_a = \frac{l A_a}{V} \int v_c \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (7.42a)$$

Напомним, что  $v_c$  выбирается как увеличенное значение числа вторичных нейтронов на деление, необходимое для достижения критичности. Тогда увеличение числа нейтронов деления равно

$$\delta n_f = (v_c - v) \int \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (7.42б)$$

\* Мы докажем справедливость такого предположения в гл. 9. Оно устанавливает тот факт, что быстрые нейтроны деления, прежде чем замедлиться, широко диффундируют по реактору, так что они «забывают» место своего рождения. Кроме того, в этом предположении пренебрегается граничными эффектами, поэтому для небольших реакторов с высокообогащенным топливом оно неприменимо. Наконец, это предположение означает, что средний свободный пробег для надтепловых нейтронов больше, чем для тепловых, поэтому пространственные неоднородности не оказывают существенного влияния на распределение надтепловых нейтронов.

Критичность можно обеспечить, полагая  $n_a = \delta n_f$ , что дает

$$v_c = \frac{v}{1 - lA_a/V} \quad (7.42\text{в})$$

или

$$\delta k = \frac{v - v_c}{v} = \frac{1}{1 - V/lA_a}, \quad (7.42\text{г})$$

что для небольших стержней ( $lA_a \ll V$ ) приводит к следующему результату:

$$\delta k = -lA_a/V. \quad (7.42\text{д})$$

Полученные уравнения являются, конечно, только грубым приближением для эффективности стержней.

### § 7.6. ЭФФЕКТЫ ВЫГОРАНИЯ ТОПЛИВА

При работе реактора на достаточно высоком уровне мощности в течение определенного времени появляется целый ряд эффектов, воздействующих на критичность реактора. Эти эффекты уже были описаны качественно в § 3.3, а теперь (и в § 7.7) мы попытаемся дать их количественную оценку. На самом деле, подробные расчеты этих эффектов весьма трудоемки и выходят за рамки настоящей книги, так что мы изложим здесь лишь наиболее общие идеи.

Рассмотрим эффекты, связанные с выгоранием топлива, и предположим для удобства, что топливо содержит только  $^{235}\text{U}$ , а  $^{238}\text{U}$  отсутствует. Тогда выгорание топлива пропорционально удельной мощности, и изменение его концентрации можно описать уравнением

$$\frac{dN_{25}(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\Sigma_a^{25} \phi(\mathbf{r}, t) = -\sigma_a^{25} N_{25}(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t), \quad (7.43)$$

пренебрегая на время самоэкранировкой\*. Интегрируя это уравнение, получаем

$$N_{25}(\mathbf{r}, t) = N_{25}(\mathbf{r}, 0) \exp \left[ -\sigma_a^{25} \int_0^t \phi(\mathbf{r}, t') dt' \right]. \quad (7.44)$$

Аналогичное уравнение можно записать, естественно, для любого другого материала, присутствующего в активной зоне реактора и поглощающего нейтроны. Отметим, что  $N_{25}$  — концентрация  $^{235}\text{U}$  экспоненциально зависит от  $\int \phi(\mathbf{r}, t') dt'$ , которая является мерой эффективной продолжительности работы реактора. Если реактор работает при постоянном потоке нейтронов, то  $\phi$  не зависит от времени. Однако обычно реакторы работают на постоянной мощности, и так как  $N_{25}$  изменяется со временем,

\* Здесь используются обычные обозначения:  $^{235}_{92}\text{U} = 25$ ,  $^{238}_{92}\text{U} = 28$  и  $^{239}_{94}\text{Pu} = 49$ , где первая цифра — это вторая цифра атомного номера  $Z$ , а вторая — последняя цифра массового числа  $A$ .

то и поток нейтронов  $\phi$  также изменяется со временем. Иначе говоря,  $\phi$  есть функционал концентрации  $N_{25}$ , поскольку по мере выгорания урана результирующее уменьшение сечения будет приводить к возрастанию потока нейтронов, в результате чего произведение этих величин (пропорциональное мощности) остается постоянным\*.

Зависящие от времени уравнения изменения концентрации топлива при длительной работе реактора на мощности решаются интегрированием по небольшим временным интервалам, в течение которых  $\phi(\mathbf{r})$  предполагается не зависящим от  $t$ . Тогда на каждом шаге рассчитывается новое значение  $N_{25}$ , затем определяется соответствующий поток нейтронов  $\phi$ , и процесс повторяется (этот метод в какой-то мере аналогичен численному интегрированию стационарных уравнений реактора, описанному в гл. 6). Еще одна трудность, встречающаяся при практических расчетах, состоит в том, что по мере выгорания топлива регулирующие стержни будут извлекаться из активной зоны для поддержания критичности реактора. Это также приводит к изменению распределения потока нейтронов в реакторе. Эту трудность вновь можно обойти, интегрируя уравнения по небольшим временным интервалам в предположении постоянства потока на каждом интервале.

Рассмотрим теперь уравнение (7.34) с учетом эффектов самоэкранировки. В этом случае можно использовать рациональное приближение Вигнера, которое приводит к следующему виду уравнений:

$$\frac{dN_{25}(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\sigma_a^{25} \phi(\mathbf{r}, t) \frac{N_{25}(\mathbf{r}, t)}{1 + V' N_{25}(\mathbf{r}, t)}, \quad (7.45)$$

где введено обозначение

$$V' = \frac{4V_0}{S_0} \sigma_a^{25}. \quad (7.46)$$

Уравнение (7.45) также можно проинтегрировать. В результате получим

$$\begin{aligned} N_{25}(t) \exp\{-V' [N_{25}(t) - N_{25}(0)]\} = \\ = N_{25}(0) \exp\left[-\sigma_a^{25} \int_0^t \phi(t') dt'\right]. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Все замечания о применимости и методах решения уравнения (7.44) справедливы и для уравнения (7.47).

Описанный выше метод решения дает реализуемую на практике схему расчета выгорания ядер различного типа при работе реактора. Однако расчет накопления плутония оказывается более слож-

\* Для реакторов, содержащих большое количество  $^{238}\text{U}$ , со временем будут накапливаться  $^{239}\text{Pu}$  и более тяжелые изотопы плутония, так что поток нейтронов сильно зависит также и от их концентрации.

ной задачей. Одна из причин этого состоит в том, что плутоний, образующийся в результате радиационного захвата нейтронов  $^{238}\text{U}$ , сам выгорает как за счет деления, так и за счет радиационного захвата нейтронов  $^{239}\text{Pu}$  с образованием более тяжелых изотопов плутония. Некоторые из этих тяжелых изотопов плутония являются делящимися, другие — сильными поглотителями, однако сечения и тех, и других известны недостаточно хорошо.

Еще одна проблема состоит в том, что поглощение нейтронов  $^{238}\text{U}$  происходит в основном в резонансной области, хотя тепловые нейтроны также вносят некоторый вклад в полное сечение поглощения. Если вспомнить введенные в гл. I определения вероятности избежать резонансного поглощения  $p$  и утечки быстрых нейтронов  $P_F$ , то очевидно, что число нейтронов, поглощенных в резонансах  $^{238}\text{U}$  за единицу времени в единице объема реактора, будет равно\*

$$n = v \Sigma_f \phi P_F (1 - p) = v \sigma_f^{25} N_{25} P_F (1 - p) \phi. \quad (7.48)$$

Если включить сюда поглощение в  $^{238}\text{U}$  и тепловых нейтронов, а также учесть размножение на быстрых нейтронах, то получим (пренебрегая запаздыванием между захватом нейтронов ядрами  $^{238}\text{U}$  и последующим образованием ядер  $^{239}\text{Pu}$ )

$$\begin{aligned} \frac{dN_{28}(t)}{dt} = & -\phi [(\sigma_a^{28} + \sigma_f^{28}) N_{28}(t) + v^{25} \sigma_f^{25} N_{25}(t) P_F (1 - p) + \\ & + v^{49} \sigma_f^{49} N_{49}(t) P_F (1 - p)]; \end{aligned} \quad (7.49a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_{49}(t)}{dt} = & \phi [\sigma_a^{28} N_{28}(t) + v^{25} \sigma_f^{25} N_{25}(t) P_F (1 - p) + \\ & + v^{49} \sigma_f^{49} N_{49}(t) P_F (1 - p) - \sigma_a^{49} N_{49}(t)]. \end{aligned} \quad (7.49b)$$

Члены, содержащие  $\sigma_f^{49}$ , учитывают деление плутония; при этом пренебрегается различием вероятности избежать утечки нейтронов деления  $P_F$  для плутония и урана.

Интегрирование этих уравнений несколько облегчается, если пренебречь изменением концентрации  $^{238}\text{U}$ , т. е. положить  $N_{28} = \text{const}$  (следовательно,  $p$  также будет постоянно). Уравнение (7.49b) можно тогда проинтегрировать, вводя *интегрирующий множитель*, т. е. используя следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_{49}(t) + [\sigma_a^{49} - v^{49} \sigma_f^{49} P_F (1 - p)] \phi(t) N_{49}(t) = \\ = \exp \left\{ - [\sigma_a^{49} - v^{49} \sigma_f^{49} P_F (1 - p)] \int_0^t \phi(t') dt' \right\} \times \\ \times \frac{d}{dt} \left\{ N_{49}(t) \exp \left\{ [\sigma_a^{49} - v^{49} \sigma_f^{49} P_F (1 - p)] \int_0^t \phi(t') dt' \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

\* Предполагается, что утечка быстрых нейтронов происходит до достижения ими резонансной области. Уравнение (7.48) тогда следует непосредственно из определений  $P_F$ ,  $p$  и  $v \Sigma_f \phi$ .

Таким образом, если обозначить

$$A^{49} = \sigma_a^{49} - v^{49} \sigma_f^{49} P_F (1 - p), \quad (7.51a)$$

то уравнение (7.49б) примет вид

$$\begin{aligned} N_{49}(t) = & N_{49}(t) \exp \left[ -A^{49} \int_0^t \phi(t') dt' \right] + \\ & + \int_0^t dt' [v^{25} \sigma_f^{25} N_{25}(t') P_F (1 - p) + \\ & + \sigma_a^{28} N_{28} \phi(t')] \exp \left[ -A^{49} \int_{t'}^t \phi(t'') dt'' \right]. \end{aligned} \quad (7.51б)$$

Входящая в это уравнение концентрация  $N_{25}(t)$  определяется из уравнения (7.47). Предположение о постоянстве  $N_{28}$  можно ослабить, оставляя постоянной только вероятность избежать резонансного поглощения  $p$ . Тогда уравнения (7.49а) и (7.49б) можно решить совместно, например методом преобразования Лапласа (см. приложение В).

После того как концентрация  $N_{49}(t)$  вычислена на данном временном шаге, ее нужно включать в полную концентрацию топлива и проводить новые расчеты критичности и потока нейтронов. Этот процесс должен продолжаться вплоть до окончания работы реактора. Более сложные, чем представленные выше, расчеты могут включать пространственные эффекты, например распределение плутония по урановому стержню.

В реакторах на тепловых нейтронах плутоний производится главным образом в активной зоне, так как в них обычно используется топливо низкого обогащения. Однако в реакторах на быстрых нейтронах производство плутония несколько отличается от производства в реакторах на тепловых нейтронах. В активной зоне реакторов на быстрых нейтронах также содержится  $^{238}\text{U}$  (хотя и меньше, чем в реакторах на тепловых нейтронах), но большая доля  $^{238}\text{U}$ , а следовательно, и большее количество производимого  $^{239}\text{Pu}$  находится в зоне воспроизводства, обычно окружающей активную зону. В любом случае распределение потока нейтронов, используемое в приведенных выше расчетах, находится при диффузионных (многогрупповых) расчетах, так что с точки зрения проведения расчетов безразлично, где происходит накопление плутония.

По причинам, которые были изложены в гл. 1, реакторами-размножителями (или бридерами), т. е. реакторами, в которых плутония производится больше, чем расходуется исходного топлива ( $^{235}\text{U}$  или  $^{239}\text{Pu}$ ), могут быть только реакторы на быстрых нейтронах. Исключение возможно лишь для реакторов на тепловых нейтронах, в которых используется торий.

Расчеты, приведенные в данном параграфе, очень важны для практических целей, так как для достижения наилучших экономи-

ческих показателей необходимо стремиться к максимально возможному выгоранию топлива в реакторах (это обусловлено высокой стоимостью производства тепловыделяющих элементов и, в меньшей степени, стоимостью переработки топлива).

Продолжительность работы тепловыделяющего элемента выражается в единицах  $Mвт \cdot сутки/m$  начального топлива, что представляет собой просто выражение количества энергии, полученной на единицу массы начального топлива. Очевидно, что количество энергии

$$E = C \int d^3 r \int_0^t dt' [\sigma_f^{25} N_{25}(t') + \sigma_f^{49} N_{49}(t')] \phi(t'), \quad (7.52)$$

где интегрирование по времени проводится по всему периоду работы реактора. Коэффициент  $C$  представляет собой выход энергии на деление;  $N_{25}(t)$ ,  $N_{49}(t)$  и  $\phi(t)$  получаются из приведенных ранее формул с помощью описанного выше метода дискретных временных интервалов.

## § 7.7. ОТРАВЛЕНИЕ ПРОДУКТАМИ ДЕЛЕНИЯ

При выгорании топлива накапливаются продукты деления, некоторые из них сильно поглощают нейтроны. Этот эффект известен как *отравление продуктами деления*. Продукты деления грубо можно разделить на два класса — насыщающиеся и ненасыщающиеся. К насыщающимся относятся те из них, сечения которых настолько велики, что спустя короткое время после начала работы реактора скорость их образования компенсируется скоростью выгорания, так что устанавливается постоянная плотность (равновесная концентрация). Наиболее важными из насыщающихся продуктов деления являются  $^{135}\text{Xe}$ , рассматриваемый более подробно в § 7.8, и  $^{149}\text{Sm}$ . К этому же классу относятся  $^{150}\text{Sm}$ ,  $\text{Gd}$ , два изотопа европия и изотоп рубидия.

Ненасыщающиеся продукты деления, в свою очередь, можно подразделить на три группы, две из которых в действительности являются насыщающимися. Сечения поглощения продуктов деления первой группы имеют значения около 80 *барн* на 1 ядро\* и насыщение для них достигается (для типичного легководного реактора) спустя 50 — 100 суток после начала работы. Продукты деления второй группы со средним сечением 50 *барн* на 1 ядро достигают насыщения спустя примерно 6 месяцев после начала работы, в то

\* Следовательно, 160 *барн* на 1 деление, так как при каждом делении образуется два осколка деления. Типичные кривые накопления продуктов деления приведены на рис. 7.10.

время как продукты третьей группы с сечением 30 барн на 1 ядро являются по существу ненасыщающимися\*.

Каждая из этих групп ненасыщающихся продуктов деления должна изучаться отдельно. Для простоты пренебрежем свойствами насыщения групп с сечениями поглощения 80 и 50 барн на 1 ядро и предположим, что в системе на каждое деление образуются два осколка, не достигающие насыщения, с сечением 160 барн на 1 ядро.

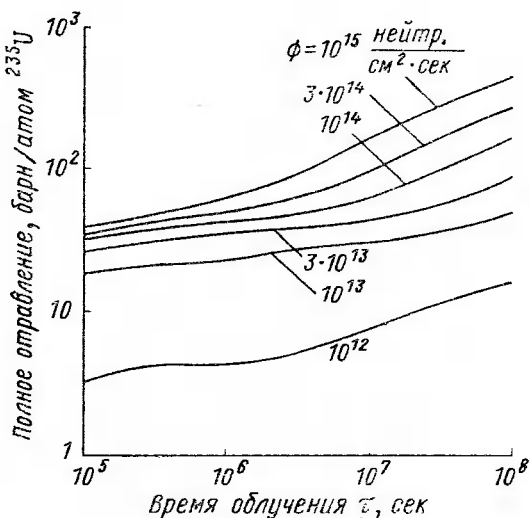


Рис. 7.10. Накопление отравляющих продуктов деления в зависимости от времени облучения и потока нейтронов

Более интересная задача связана с изучением *частично насыщающихся* продуктов деления, достигающих насыщения через 50 — 100 суток после начала работы. Из уравнения (7.54а), приводимого ниже, видно, что в равновесном случае  $dN_p/dt = 0$  и плотность частично насыщающихся продуктов деления определяется в виде

$$N_{p0}^{PS} = \frac{2\gamma_p (\sigma_f^{25} N_{25} + \sigma_f^{49} N_{49})}{\bar{\sigma}_a}, \quad (7.53)$$

где  $\bar{\sigma}_a = 80$  барн. Интересно отметить, что входящие в это уравнение концентрации  $^{235}\text{U}$  ( $N_{25}$ ) и  $^{239}\text{Pu}$  ( $N_{49}$ ) изменяются во времени, так что в действительности  $N_{p0}^{PS}$  не является постоянной величиной (аналогично и равновесная концентрация ксенона меняется

\* Предполагается, что среднее сечение включает в себя эффект поглощения нейтронов ядрами, возникающими при поглощении нейтронов в первичных ядрах. В действительности эффект вторичных поглотителей невелик. Кроме того, эффективные сечения различных групп меняются из-за различия в выходах продуктов деления от одного делящегося материала к другому. Здесь этими эффектами пренебрегают.

со временем). Использование коротких ( $\sim 20$  суток) временных интервалов при интегрировании уравнений выгорания позволяет обойти эту трудность при рассмотрении как насыщающихся, так и частично насыщающихся продуктов деления.

Для оценки влияния продуктов деления на свойства реактора необходимо знать их плотность в любой момент работы реактора. Концентрации продуктов деления рассчитываются тем же способом, что и концентрация  $^{249}\text{Pu}$ . Если записать уравнение изменения плотности продуктов деления в виде

$$\frac{dN_p}{dt} = 2\gamma_p (\sigma_f^{25} N_{25} + \sigma_f^{49} N_{49}) \phi - \bar{\sigma}_a N_p \phi, \quad (7.54a)$$

то решение будет следующим:

$$N_p(t) = 2\gamma_p \sigma_f^{25} \int_0^t \left[ N_{25}(t') + \frac{\sigma_f^{49}}{\sigma_f^{25}} N_{49}(t') \right] \times \\ \times \phi(t') \exp \left[ -\sigma_a \int_0^t dt'' \phi(t'') \right] dt', \quad (7.54b)$$

где, конечно,  $N_p(0) = 0$ . Так как  $N_{25}(t')$ ,  $N_{49}(t')$  и  $\phi(t')$  известны, то  $N_p(t)$  можно получить в явном виде. Множитель  $\gamma_p$  представляет собой *выход* продуктов деления данной группы, обычно он предполагается одинаковым для  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ .

## § 7.8. ОТРАВЛЕНИЕ КСЕНОНОМ

Изотоп  $^{135}\text{Xe}$  оказывает большое влияние на работу реакторов на тепловых нейтронах из-за наличия гигантского резонанса в тепловой области ( $\sim 0,08 \text{ эВ}$ ), среднее сечение которого достигает  $8 \cdot 10^6 \text{ барн}$ . Это наибольшее из всех известных сечений, почти равное максимально возможному значению, которое может быть получено на основании теоретических расчетов.

Некоторое количество  $^{135}\text{Xe}$  образуется непосредственно при делении ядер топлива, однако большая часть его получается в результате цепочки радиоактивных распадов, начинающейся с изотопа  $^{135}\text{Te}$  (период полураспада 2 мин), который превращается в  $^{135}\text{I}$  (период полураспада 6,7 ч), распадающийся с образованием  $^{135}\text{Xe}$ , имеющего период полураспада 9,2 ч.

Когда реактор только начинает работать, в нем отсутствуют и иод, и ксенон. Спустя некоторое время достигается *равновесная* концентрация этих изотопов, обусловленная тем, что их образование за счет прямого выхода при делении и распада предшественника компенсируется собственным распадом и выгоранием.

Интересное явление происходит при остановке реактора. В этом случае ксенон уже не выгорает, но все еще образуется за счет распада иода, который, разумеется, еще присутствует в системе с равновесной концентрацией. Таким образом, в течение некоторого

времени концентрация ксенона интенсивно возрастает, и только после того, как становится преобладающим радиоактивный распад ксенона, его концентрация начинает спадать, постепенно приближаясь к нулю. Максимальная концентрация ксенона, достигаемая обычно через 12 ч после остановки реактора при потоке тепловых нейтронов  $2 \cdot 10^{12}$  нейтр./( $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$ ), может увеличить отравление не менее чем на порядок величины. Этот эффект особенно заметен при более высоких потоках нейтронов, так как в этом случае член, описывающий выгорание ксенона, имеет большее значение, и его отсутствие после остановки реактора оказывает соответственно более сильное влияние на реактивность.

Для изучения этого эффекта запишем уравнение изменения концентрации йода (пренебрежем при этом изотопом  $^{135}\text{Te}$ , имеющим очень малый период полураспада, и предположим, что  $^{135}\text{I}$  получается непосредственно при делении):

$$dI(t)/dt = \gamma_1 \Sigma_f \phi - \sigma_1 I(t) \phi - \lambda_1 I(t), \quad (7.55)$$

Где  $\gamma_1$  — выход йода при делении\*;  $\sigma_1 = 8$  барн — сечение поглощения йода;  $\lambda_1 = 2,89 \cdot 10^{-5}$  1/сек — постоянная распада йода. Используя эти значения, можно показать, что даже для  $\phi = 10^{15}$  нейтр./( $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$ )  $\sigma_1 \phi \ll \lambda_1$ , так что уравнение (7.55) преобразуется к виду

$$dI(t)/dt + \lambda_1 I(t) = \gamma_1 \Sigma_f \phi, \quad (7.56a)$$

решение которого

$$I(t) = \exp(-\lambda_1 t) \left[ I(0) + \gamma_1 \Sigma_f \int_0^t \phi(t') \exp(\lambda_1 t') dt' \right]. \quad (7.56b)$$

Если реактор начинает работать при условии, что йод отсутствует, то  $I(0) = 0$ . Предположим, кроме того, что поток нейтронов возрастает от нуля до постоянного значения  $\phi_0$  за короткое время\*\*. В этом случае

$$I(t) = \frac{\gamma_1 \Sigma_f \phi_0}{\lambda_1} [1 - \exp(-\lambda_1 t)]. \quad (7.57)$$

Равновесная концентрация йода  $I_0$  описывается выражением

$$I_0 = \gamma_1 \Sigma_f \phi_0 / \lambda_1. \quad (7.58)$$

Если реактор останавливается в момент времени  $t = 0$  при равновесной концентрации йода, то после остановки

$$I(t) = I(0) \exp(-\lambda_1 t), \quad (7.59)$$

\* Выход йода различен для разных делящихся изотопов. Для  $^{235}\text{U}$   $\gamma_1 = 0,061$ , для  $^{239}\text{Pu}$   $\gamma_1 = 0,055$ , а для  $^{233}\text{U}$   $\gamma_1 = 0,051$ .

\*\* Это условие вводится для удобства проведения расчетов, так как время вывода реактора на мощность значительно меньше, чем время, характеризующее такие эффекты, приводящие к изменению потока, как выгорание топлива и накопление продуктов деления

где предполагается, что остановка реактора происходит очень быстро (если реактор останавливается в течение продолжительного времени, то для определения  $I(t)$  нужно использовать уравнение (7.56) с условием  $I(0) = I_0$  и  $\phi(t)$ , определяемым режимом снижения мощности).

Рассмотрим теперь концентрацию ксенона  $X(t)$ , которая подчиняется уравнению

$$dX(t)/dt = \lambda_1 I(t) + \gamma_2 \Sigma_f \phi - \lambda_2 X(t) - \sigma_2 \phi X(t). \quad (7.60)$$

Здесь  $\gamma_2$  — прямой выход ксенона при делении;  $\lambda_2$  — постоянная распада ксенона;  $\sigma_2$  — сечение поглощения ксенона, имеющее вид, представленный на рис. 7.11. Приведенные параметры имеют следующие значения\*:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= 0,003; \\ \lambda_2 &= 2,09 \cdot 10^{-5} \text{ 1/сек}; \\ \sigma_2 &= 3 \cdot 10^6 \text{ барн}. \end{aligned} \right\} \quad (7.61)$$

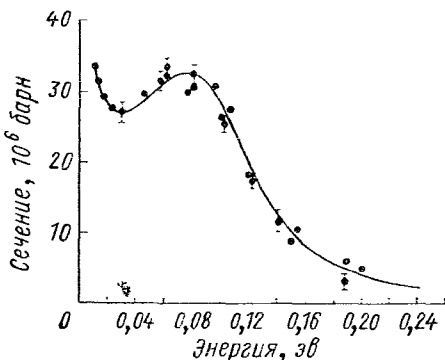


Рис. 7.11. Зависимость полного сечения  $^{135}\text{Xe}$  от энергии

(Величина  $\sigma_2$  представляет собой усредненное по спектру тепловых нейтронов сечение поглощения ксенона, см. гл. 9.)

Уравнение (7.60) легко решается:

$$X(t) = \exp \left\{ - \int_0^t [\lambda_2 + \sigma_2 \phi(t')] dt' \right\} \left( \int_0^t \exp \left\{ \int_0^{t'} [\lambda_2 + \sigma_2 \phi(t'')] dt'' \right\} \times \right. \\ \left. \times [\lambda_1 I(t') + \gamma_2 \Sigma_f \phi(t')] dt' + X(0) \right), \quad (7.62)$$

где  $I(t')$  определяется из уравнения (7.566) или (7.57). Используя те же предположения, что и при сведении уравнения (7.566) к (7.57), приведем уравнение (7.62) к следующему виду:

$$X(t) = X_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left( \frac{\gamma_1 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1 + \sigma_2 \phi_0} - \gamma_2 \right) \exp [ - (\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0) t ] - \right. \\ \left. - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1 + \sigma_2 \phi_0} \exp ( - \lambda_1 t ) \right\}, \quad (7.63)$$

где принято  $X(0) = 0$ .

\*Для  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$   $\gamma_2 = 0$ .

Равновесная концентрация ксенона может быть получена из уравнения (7.60), если положить в нем  $dX/dt = 0$ :

$$X_0 = \frac{\lambda_1 I_0 + \gamma_2 \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0}, \quad (7.64)$$

где использовано уравнение (7.58).

Предположим, что рассматривается влияние ксенона на реактивность реактора, работающего в стационарном режиме. Уравнение диффузии в этом случае имеет вид\*

$$-DV^2 \phi_0 + \left[ \Sigma'_a + \frac{\sigma_2 (\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} \right] \phi_0 = \nu \Sigma_f \phi_0, \quad (7.65)$$

т. е. эффект ксенона вводится в диффузионное уравнение в виде нелинейного члена. Рассмотрим предельный случай высокого потока, когда  $\sigma_2 \phi_0 \gg \lambda_2$ . Тогда

$$-DV^2 \phi_0 + \Sigma'_a \phi_0 = \nu \Sigma_f \phi_0 - (\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \phi_0. \quad (7.66)$$

Этот предельный случай легко исследовать, так как очевидно, что влияние ксенона можно учесть, просто  $\nu$  заменяя  $\nu - \gamma_1 - \gamma_2$ . Таким образом,  $\nu_c = \nu + \gamma_1 + \gamma_2$ , и изменение реактивности за счет ксенона

$$\rho = \frac{k-1}{k} = \frac{\nu/\nu_c - 1}{\nu/\nu_c} = \frac{\nu - \nu_c}{\nu} \quad (7.67a)$$

становится равным

$$\rho_{Xe} = -(\gamma_1 + \gamma_2)/\nu. \quad (7.67b)$$

Иначе говоря, реактор в начале кампании должен иметь запас реактивности для того, чтобы он мог работать по достижении равновесной концентрации ксенона. Этот запас, равный величине  $\rho_{Xe}$  [см. уравнение (7.67)], обеспечивается обычно стержнями регулирования. Поскольку  $\gamma_1 + \gamma_2 \approx 0,06$ , то

$$\rho_{Xe} = -0,024 \quad (7.68)$$

или

$$\rho_{Xe} \approx -3,30 \text{ долл.} \quad (7.69)$$

Очевидно, что это максимальная реактивность, вносимая равновесной концентрацией ксенона.

Для меньших значений потока нейтронов можно линеаризовать уравнение (7.65). Умножим его прежде всего на  $\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0$

$$-D\lambda_2 \nabla^2 \phi_0 - D\sigma_2 \phi_0 \nabla^2 \phi_0 + \Sigma'_a \lambda_2 \phi_0 + \sigma_2 \Sigma'_a \phi_0^2 + \sigma_2 (\gamma_1 + \gamma_2 - \nu) \Sigma_f \phi_0^2 = \nu \Sigma_f \lambda_2 \phi_0. \quad (7.70)$$

Если предположить, что поток нейтронов слабо отличается от того значения  $\psi$ , которое представляет собой поток нейтронов в от-

\*  $\Sigma'_a$  представляет собой сечение поглощения всех материалов, кроме ксенона.

существование ксенона и удовлетворяет линейному уравнению

$$-D\nabla^2\psi + \Sigma'_a\psi = \nu\Sigma_f\psi, \quad (7.71)$$

то можно записать

$$\phi_0 = \psi + \varepsilon. \quad (7.72)$$

Подставляя (7.72) в уравнение (7.70) и пренебрегая членами, пропорциональными  $\varepsilon^2$ , получаем

$$\begin{aligned} -D\lambda_2\nabla^2(\psi + \varepsilon) - D\sigma_2(\psi\nabla^2\psi + \varepsilon\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varepsilon) + \\ + \Sigma'_a\lambda_2(\psi + \varepsilon) + \sigma_2[\Sigma'_a + (\gamma_1 + \gamma_2 - \nu)\Sigma_f](\psi^2 + 2\varepsilon\psi) = \\ = \nu\Sigma_f\lambda_2(\psi + \varepsilon). \end{aligned} \quad (7.73)$$

Это уравнение линейно относительно  $\varepsilon$ , так как  $\psi$  — известная функция, представляющая собой решение уравнения (7.71). Из этого уравнения можно найти  $\nu_c$  и, следовательно,  $\rho$ . Описанный метод линеаризации нелинейного уравнения не является единственным возможным, однако используется чаще всего. Еще одно приближение состоит в численном решении уравнения (7.70).

На рис. 7.12 приводится относительная доля поглощения в ксеноне по сравнению с поглощением в  $^{235}\text{U}$  для реактора с высокообогащенным топливом. Как видно из рисунка, эта величина стремится к асимптотическому значению.

Вернемся теперь к вопросу (который качественно обсуждался в первой части настоящего параграфа) о концентрации ксенона после остановки реактора. Для простоты предположим, что реактор работает в установившемся режиме и что поток нейтронов спадает мгновенно до нуля в момент времени  $t = 0$ . В этом случае из уравнения (7.59) для концентрации иода следует

$$I(t) = I_0 \exp(-\lambda_1 t) = \frac{\gamma_1 \Sigma_f}{\lambda_1} \phi_0 \exp(-\lambda_1 t). \quad (7.74)$$

Для концентрации ксенона  $X(t)$  мы имеем уравнение (7.62) с условиями  $\phi(t) = 0$  и  $X(0) = X_0$  [уравнение (7.64)]

$$\begin{aligned} X(t) = \exp(-\lambda_2 t) \left[ \int_0^t dt' \exp((\lambda_2 - \lambda_1)t') \gamma_1 \Sigma_f \phi_0 + \right. \\ \left. + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} \right]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

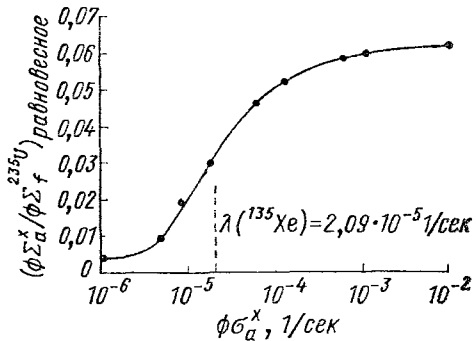


Рис. 7.12. Относительное поглощение нейтронов ксеноном в реакторе на тепловых нейтронах с высокообогащенным топливом

Проводя интегрирование, получаем

$$X(t) = \exp(-\lambda_2 t) \left\{ \frac{\gamma_1 \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) - 1 \right] + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} \right\}. \quad (7.76)$$

Отметим, что производная

$$\dot{X}(0) = \gamma_1 \Sigma_f \phi_0 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1} \right) \quad (7.77)$$

положительна, если

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} < \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (7.78a)$$

т. е. если

$$\frac{\sigma_2 \phi_0}{\lambda_2} > \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \approx 0,05 \quad (7.78b)$$

или

$$\phi_0 > 5 \cdot 10^{11} \text{ нейтр./}(см^2 \times \text{сек}). \quad (7.79)$$

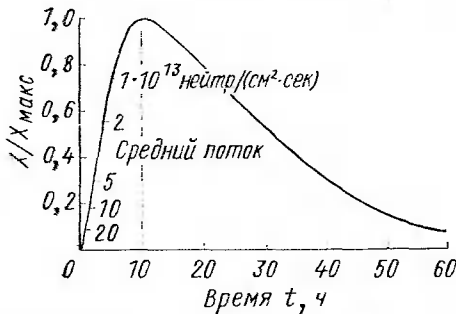


Рис. 7.13. Изменение концентрации ксенона после полной остановки реактора

Таким образом, для потока нейтронов, превышающего это значение, концентрация ксенона после остановки реактора будет сначала возрастать, а затем [см. уравнение (7.75)] снижаться до нуля с постоянной спада  $1/\lambda_2 = 14$  ч. Это изменение концентрации ксенона приведено на рис. 7.13. Время достижения максимальной концентрации ксенона можно найти, полагая  $\dot{X}(t) = 0$  и решая уравнение относительно  $t$ :

$$\dot{X}(t) = -\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t) \left\{ \frac{\gamma_1 \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) - 1 \right] + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \phi_0}{\lambda_2 + \sigma_2 \phi_0} \right\} + \exp(-\lambda_1 t) \gamma_1 \Sigma_f \phi_0 = 0. \quad (7.80)$$

Влияние на реактивность максимальной концентрации ксенона определяется теми же методами, что и для равновесной концентрации.

Еще один метод расчета зависимости реактивности системы от концентрации ксенона (хотя он и является слишком грубым) состоит в использовании формулы

$$k = \frac{\eta f \epsilon p}{1 + L^2 B^2}. \quad (7.81a)$$

Так как наличие ксенона не сказывается на значениях  $\epsilon$ , и  $p$ , то

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta f}{f} - \frac{B^2}{1 + L^2 B^2} \delta L^2. \quad (7.81b)$$

Вспоминая, что коэффициент использования тепловых нейтронов в активной зоне без ксенона равен

$$f = \Sigma_a^u / \Sigma_a, \quad (7.82)$$

где  $\Sigma_a$  — полное сечение поглощения в активной зоне, получаем

$$\delta f = \frac{\Sigma_a^u}{\Sigma_a' + \Sigma_a^{Xe}} - \frac{\Sigma_a^u}{\Sigma_a'} = - \frac{f}{1 + \Sigma_a' / \Sigma_a^{Xe}}. \quad (7.83)$$

Аналогично,

$$\delta L^2 = \frac{\delta D}{\Sigma_a} = L_0^2 \frac{1}{1 + \Sigma_a' / \Sigma_a^{Xe}}. \quad (7.84)$$

Таким образом, мы видим, что величина  $1/(1 + \Sigma_a' / \Sigma_a^{Xe})$  входит в оба выражения. Описанный метод расчета влияния ксенона на реактивность не является точным, так как в нем предполагается, что наличие ксенона не изменяет пространственного распределения потока нейтронов. Если от такого предположения отказаться, то уравнения (7.81а) и (7.81б) оказываются несправедливыми.

### § 7.9. ДРУГИЕ НАСЫЩАЮЩИЕСЯ ПРОДУКТЫ ДЕЛЕНИЯ

Как уже отмечалось в § 7.5, следующим за  $^{135}\text{Xe}$  по важности продуктом деления является  $^{149}\text{Sm}$ . Он отличается от  $^{135}\text{Xe}$  только тем, что нерадиоактивен. Предшественником  $^{149}\text{Sm}$  является  $^{149}\text{Pm}$ , имеющий постоянную распада  $\lambda_1$ , равную  $4,1 \cdot 10^{-6}$  /сек. Сечение поглощения  $^{149}\text{Sm}$  равно  $5,3 \cdot 10^4$  барн\*. Как и для  $^{135}\text{I}$ , поглощением нейтронов в  $^{149}\text{Pm}$  можно пренебречь. Кроме того,  $\gamma_2 = 0$  (так как отсутствует прямой выход  $^{149}\text{Sm}$  при делении) и  $\lambda_2 = 0$  (так как  $^{149}\text{Sm}$  нерадиоактивен). При таких значениях параметров можно применять непосредственно те результаты, которые получены в § 7.8. Используя вновь предельный случай высокого потока нейтронов, можно получить кривые, приведенные на рис. 7.14.

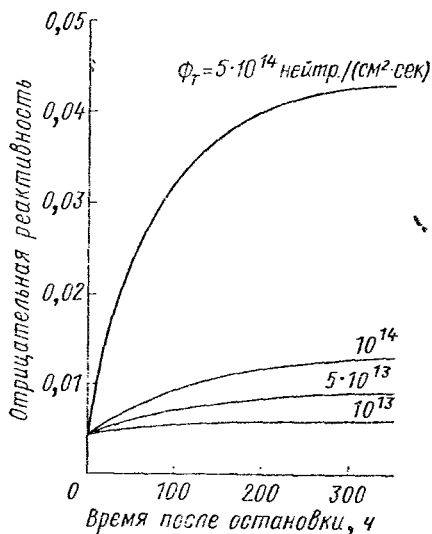


Рис. 7.14. Накопление  $^{149}\text{Sm}$  после остановки реактора для различных значений потока нейтронов в работающем реакторе

\* Здесь используются те же обозначения, что и в § 7.8, только индекс 1 относится теперь к  $^{149}\text{Pm}$ , а индекс 2 — к  $^{149}\text{Sm}$ .

Отметим, что после остановки реактора накопление самария определяется концентрацией предшественника; поскольку сам  $^{149}\text{Sm}$  нерадиоактивен, то снижения его концентрации со временем, как в случае с  $^{185}\text{Xe}$ , не происходит.

## Задачи

7.1. Используя теорию возмущений первого порядка, рассчитать  $\delta k$  для регулирующей пластины в голом плоском реакторе. Сравнить результаты с уравнением (7.4).

7.2. Какова остаточная реактивность остановленного голого плоского реактора шириной  $2a$  с черной регулирующей пластиной шириной  $2d$ , центр которой размещен на расстоянии  $b$  справа от центральной линии реактора?

7.3. Рассчитать  $P_{AB}$  для сферы, используя диффузионную теорию.

7.4. Рассчитать  $P_{AB}$  для бесконечного цилиндра радиусом  $R$ , используя диффузионную теорию.

7.5. Вывести уравнение (7.47).

7.6. Вывести точное выражение для  $P_0$  для пластины.

7.7. Показать, что  $A$  (уравнение (7.39a)) возрастает линейно с  $r_0$  для больших  $r_0$ .

7.8. Рассчитать эффект реактивности  $^{149}\text{Sm}$  после остановки реактора в зависимости от времени. Оценить численно эту величину для длительных времен.

7.9. Для реактора с максимальной удельной мощностью  $1 \text{ Мвт/л}$  рассчитать эффект реактивности максимальной концентрации ксенона.

## Список литературы

1. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
2. Case K. M., de Hoffman F., Placzek G. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, 1953.
3. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Я. В. Шевелева. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Hurwitz H., Roe G. KAPL 1136, March. 24, 1955.

---

### **ЗАДАЧИ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ: МНОГОГРУППОВОЙ МЕТОД**

---

#### **§ 8.1. ВВЕДЕНИЕ**

В первых семи главах настоящей книги мы проводили изучение физики реакторов в предположении, что все нейтроны имеют одну энергию, т. е. использовали односкоростное, или одногрупповое, приближение. Хотя это предположение далеко от реальности, существуют тем не менее серьезные причины использовать его при рассмотрении реакторных задач. Первая причина — педагогическая. Большинство математических методов, применяемых в одногрупповом приближении, могут быть перенесены с небольшими модификациями на многогрупповой метод. В настоящей главе описываются необходимые модификации этих методов при проведении многогрупповых расчетов критичности и потока нейтронов. Вторая причина состоит в том, что существуют такие задачи, для которых одногрупповой метод может быть вполне удовлетворительным приближением, особенно для приближенных расчетов. В качестве примера таких задач можно привести расчеты отравления ксеноном, выгорания топлива\* и накопления плутония (см. гл. 7).

#### **§ 8.2. МНОГОГРУППОВОЙ МЕТОД**

В многогрупповом методе предполагаем, что распределение нейтронов в реакторе можно представить зависящим не от одной энергии, а от нескольких дискретных энергетических групп. Число используемых энергетических групп зависит от желаемой точности расчетов и от возможностей вычислительной машины, но обычно выбирается в интервале от 2 до 18 (очевидно, что чем больше число групп, тем выше точность расчетов, поскольку действительное непрерывное энергетическое распределение в реакторе естественно лучше представляется большим числом таких дискретных групп). Группы нумеруются от 1 (для группы с наивысшей энергией) до  $N$  (для группы с наиминизшей энергией). При расчете теплового реактора  $N$ -ю группу обычно относят к тепловым нейтронам\*\*.

---

\* Расчеты выгорания топлива в действительности проводятся в псевдоодногрупповом приближении, так как необходимо учитывать резонансное поглощение, (см. § 7.6).

\*\* Хотя в некоторых случаях область тепловых энергий разбивается на две или больше групп.

Поток нейтронов в  $k$ -й группе обозначим  $\phi_k$ , сечение захвата  $\Sigma_{ak}$ , коэффициенты диффузии  $D_k$  и сечение деления  $\Sigma_{fk}$ . Кроме того, определим  $\chi_k$  как долю нейтронов деления, испускаемых в  $k$ -й группе, а  $\nu_k$  — как среднее число нейтронов на каждое деление, вызываемое нейтронами  $k$ -й группы. Так как величина  $\nu$  очень слабо зависит от энергии, то можно опустить у нее индекс  $k$  (это несправедливо для реакторов на быстрых нейтронах, однако и в этом случае групповую зависимость  $\nu$  можно объединить, при этом появятся только небольшие различия в формулах). Наконец, определим сечение  $\Sigma_{ij}$ , которое представляет собой сечение рассеяния (упругого или неупругого) нейтронов из группы  $i$  в группу  $j$ .

При таких определениях отметим, что источник деления для  $i$ -й группы можно записать в виде

$$\chi_i \nu \sum_k \phi_k \Sigma_{fk} \equiv \chi_i \nu S(\mathbf{r}). \quad (8.1)$$

Другими словами, источник деления в каждой группе имеет одинаковую пространственную зависимость, он отличается от группы к группе только амплитудным фактором  $\chi_i$ . Этот факт оказывается очень важным при построении численных схем решения многогрупповых уравнений.

Помимо источника деления в каждой энергетической группе, кроме первой, имеется источник замедляющихся нейтронов\*. Очевидно, что для  $i$ -й группы этот источник имеет вид

$$\sum_{k < i} \Sigma_{ki} \phi_k. \quad (8.2)$$

Нейтроны уходят из  $i$ -й группы как за счет поглощения с сечением  $\Sigma_{ai}$ , так и за счет рассеяния в низкоэнергетические группы. Последний вклад дается выражением

$$\phi_i \sum_{k < i} \Sigma_{ik} \equiv \phi_i \Sigma_{si}, \quad (8.3)$$

где сечение замедления  $\Sigma_{si}$  определено для  $i$ -й группы.

Объединяя все эти члены, мы видим, что уравнение диффузии для нейтронов в  $i$ -й группе можно записать в виде

$$-\nabla \cdot D_i \nabla \phi_i(\mathbf{r}) + (\Sigma_{ai} + \Sigma_{si}) \phi_i(\mathbf{r}) = \nu \chi_i S(\mathbf{r}); \quad (8.4a)$$

$$S(\mathbf{r}) = \sum_k \phi_k(\mathbf{r}) \Sigma_{fk}. \quad (8.4b)$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде

$$M\Phi = \nu F\Phi, \quad (8.5)$$

\* Мы пренебрегаем рассеянием, приводящим к возрастанию энергии нейтронов; это справедливо, если используется не более одной тепловой группы.

где  $\Phi$  — вектор, элементами которого являются групповые потоки нейтронов:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

$M$  — многогрупповой матричный оператор

$$M = \begin{pmatrix} -D_1 V^2 + \Sigma_{ув1} & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -\Sigma_{12} & -D_2 V^2 + \Sigma_{ув2} & 0 & 0 \dots & 0 \\ -\Sigma_{13} & -\Sigma_{23} & -D_3 V^2 + \Sigma_{ув3} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Sigma_{1T} & -\Sigma_{2T} & -\Sigma_{3T} & \dots & -D_T V^2 + \Sigma_{aT} \end{pmatrix}. \quad (8.7a)$$

Отметим, что эта матрица является *треугольной* (т. е. выше главной диагонали все ее элементы равны нулю). Этот факт существенно облегчает решение уравнения (8.5). Определим для удобства *сечение увода*  $\Sigma_{Rh}$  для  $k$ -й группы как сумму сечений поглощения и замедления.

Матрица  $F$  имеет следующий вид:

$$F = \begin{pmatrix} \chi_1 \Sigma_{f1} & \chi_1 \Sigma_{f2} & \chi_1 \Sigma_{f3} & \dots & \chi_1 \Sigma_{fN} \\ \chi_2 \Sigma_{f2} & \chi_2 \Sigma_{f2} & \dots & \dots & \chi_2 \Sigma_{fN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_N \Sigma_{f1} & \chi_N \Sigma_{f2} & \dots & \dots & \chi_N \Sigma_{fN} \end{pmatrix}. \quad (8.7b)$$

Отметим, кроме того, что

$$F\Phi = \chi S(r), \quad (8.8)$$

где  $\chi$  — вектор, имеющий следующий вид:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_N \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

а  $S(r)$  — источник деления, определяемый уравнением (8.1). Тогда уравнение (8.5) можно записать в виде

$$M\Phi = \nu\chi S(r). \quad (8.10)$$

Эти два уравнения, а именно (8.5) и (8.10), являются двумя основными формами многогруппового уравнения, решение которого мы рассмотрим в следующих параграфах настоящей главы.

### § 8.3. ВЫВОД МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Используя интуицию и результаты первых семи глав, мы записали многогрупповые диффузионные уравнения. В гл. 2 мы вывели зависящее от энергии уравнение переноса нейтронов (см. уравнение (2.27)), которое должно точно описывать поведение нейтронов в реакторе. Как же связаны между собой эти две системы уравнений? При ответе на этот вопрос мы найдем также способ определения многогрупповых констант. Сначала выведем зависящие от энергии уравнения  $P_1$ -приближения (аналогичные односкоростные уравнения были получены в гл. 2 методом, очень напоминающим тот, который будет использован в настоящей главе).

Рассмотрим поток нейтронов  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ , определенный уравнением (2.26). Более удобно работать с переменными  $E$  и  $\Omega$ . Мы определили поток  $\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  так, что  $(1/u)\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d^3rdEd\Omega$  представляет собой ожидаемое число нейтронов в фазовом объеме  $d^3rdEd\Omega$  в окрестности точки  $\mathbf{r}$ ,  $E$ ,  $\Omega$  в момент времени  $t$ . Так как и  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ , и  $\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  должны предсказывать одно и то же число нейтронов в выделенном элементе фазового пространства, то

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) d\Omega dE = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d^3u. \quad (8.11a)$$

Используя соотношения  $E = mu^2/2$  и  $d^3u = u^2 du d\Omega$ , получаем

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \sqrt{m^3/(2E)} \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega). \quad (8.11b)$$

Можно определить нестационарное уравнение переноса для потока нейтронов  $\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega)$  из уравнения (2.27в):

$$[\Omega \cdot \nabla + \Sigma_T(\mathbf{r}, E)] \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = S(\mathbf{r}, E, \Omega) + \int d\Omega' \int dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega) \Phi(\mathbf{r}, E', \Omega'), \quad (8.12)$$

где источник  $S$  и сечение рассеяния  $\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega)$  даются следующими соотношениями:

$$S(\mathbf{r}, E, \Omega) = \sqrt{2E/m^3} S(\mathbf{r}, \mathbf{u}); \quad (8.13a)$$

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega) = \sqrt{2E/m^3} \Sigma_s(u' \rightarrow u, \Omega' \cdot \Omega). \quad (8.13b)$$

Интегрируя уравнение (8.12) по  $\Omega$ , получим

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) = S(\mathbf{r}, E) + \int dE' \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E'), \quad (8.14)$$

где

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \int d\Omega \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (8.15a)$$

и

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = d\Omega \Omega \Phi(\mathbf{r}, E, \Omega). \quad (8.15b)$$

Кроме того,

$$S(\mathbf{r}, E) = \int d\Omega S(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (8.15\text{в})$$

и\*

$$\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) = \int d\Omega \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega). \quad (8.15\text{г})$$

Теперь так же, как в односкоростной теории (см. уравнение (2.41)), предполагаем, что можно разложить поток  $\Phi$  в двухчленный степенной ряд по углу  $\Omega$ :

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}, E) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)]. \quad (8.16)$$

Если подставить это разложение в уравнение (8.12), то получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} [\Omega \cdot \nabla + \Sigma_T(\mathbf{r}, E)] [\phi(\mathbf{r}, E) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] = \\ & = S(\mathbf{r}, E, \Omega) + \frac{1}{4\pi} \int dE' [\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') + \\ & \quad + 3\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \int d\Omega' \Omega' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega)], \end{aligned} \quad (8.17)$$

где использовано соотношение (8.15г). Из уравнения (2.45) следует, что

$$\int d\Omega \Omega \Omega' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega) = \Omega \Sigma_s^1(E' \rightarrow E), \quad (8.18\text{а})$$

где

$$\Sigma_s^1(E' \rightarrow E) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu_0 \mu_0 \Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu_0). \quad (8.18\text{б})$$

Таким образом, можно переписать уравнение (8.17) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} [\Omega \cdot \nabla + \Sigma_T(\mathbf{r}, E)] [\phi(\mathbf{r}, E) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E)] = \\ & = S(\mathbf{r}, E, \Omega) + \frac{1}{4\pi} \int dE' [\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E) + \\ & \quad + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^1(E' \rightarrow E)]. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Предположим теперь, что источник  $S(\mathbf{r}, E, \Omega)$  не зависит от  $\Omega$ . Тогда, умножая (8.19) на  $\Omega$  и интегрируя по  $\Omega$  (вновь используя уравнение (2.39)), получаем

$$\begin{aligned} & (1/3)\nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \\ & = \int dE' \mathbf{J}(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^1(E' \rightarrow E). \end{aligned} \quad (8.20)$$

\* В уравнении (8.15г) величина  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  равна  $\Sigma_s(E')P(E' \rightarrow E)$  (см. § 9.2). Угловая зависимость величины  $\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega)$  в полном виде в данном параграфе не используется, а используются только ее нулевые и первые моменты [см. уравнение (8.22) для первого момента].

Уравнения (8.14) и (8.20) известны как уравнения  $P_1$ -приближения\*. Видно, что уравнение (8.20) устанавливает связь между  $\mathbf{J}$  и  $\phi$ . Эта связь, однако, не такая простая, как в законе Фика, который мы получили для односкоростного метода в гл. 2.

Как указывалось в первых двух параграфах настоящей главы, наша цель — свести уравнение  $P_1$ -приближения к многогрупповым уравнениям, определенным через энергетические интервалы, представленные на рис. 8.1:

$$\phi_k(\mathbf{r}) = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \phi(\mathbf{r}, E). \quad (8.21)$$

При обычных условиях мы должны предположить, что используем этот дискретный метод потому, что поток  $\phi(\mathbf{r}, E)$  и сечения почти постоянны по принятым энергетическим интервалам. Однако достаточно обратиться к рис. 1.2,

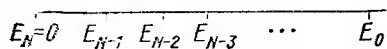


Рис. 8.1. Энергетические интервалы

чтобы убедиться, что для выполнения условия почти постоянных сечений по каждому энергетическому интервалу пришлось бы иметь многие тысячи таких интервалов. Таким образом, необходимо тщательно рассмотреть справедливость использования многогрупповых уравнений с небольшим количеством групп.

При выводе многогрупповых диффузионных уравнений мы должны сначала рассмотреть уравнение, связывающее ток и поток нейтронов, т. е. уравнение (8.20). Наличие интеграла в правой части этого уравнения вызывает некоторые трудности из-за того, что мы не имеем простого выражения для зависящего от энергии закона Фика, как в уравнении (2.49). Можно напомнить, что сечение  $\Sigma_s^1(E' \rightarrow E)$  связано со средним углом рассеяния  $\bar{\mu}$  таким соотношением (см. уравнение (2.45)):

$$\Sigma_s^1(E' \rightarrow E) = \bar{\mu} \Sigma_s^0(E' \rightarrow E). \quad (8.22)$$

Тогда для изотропного рассеяния сечение  $\Sigma_s^1(E' \rightarrow E)$  равно нулю, и уравнение (8.20) определяет зависящий от энергии коэффициент диффузии:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E), \quad (8.23a)$$

где

$$D(E) = \frac{1}{3\Sigma_T(\mathbf{r}, E)}. \quad (8.23b)$$

В большинстве случаев неупругое рассеяние не изотропно, и зависящий от энергии коэффициент диффузии определить нельзя.

\* Термин « $P_1$ -приближение» относится к разложениям по угловой переменной вплоть до линейных членов, соответствующих разложению по полиномам Лежандра  $P_l$  вплоть до  $l = 1$ .

Как мы увидим дальше, это обстоятельство не мешает получить многогрупповые диффузионные уравнения.

Мы определили многогрупповые потоки нейтронов в уравнении (8.21). Аналогичным образом можно определить и многогрупповые токи нейтронов:

$$J_h(\mathbf{r}) = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \mathbf{J}(\mathbf{r}, E). \quad (8.24)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (8.20) по  $k$ -му энергетическому интервалу:

$$\begin{aligned} & \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \left[ \frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) \right] = \\ & = \sum_{k'=1}^N \int_{E_{k'+1}}^{E_{k'}} dE' \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \mathbf{J}(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^1(E' \rightarrow E). \end{aligned} \quad (8.25a)$$

В уравнении (8.25a) мы заменили интегрирование по  $E'$  суммой интегралов по  $N$  энергетическим интервалам. Уравнение (8.25a) дает следующее выражение для  $z$ -й компоненты тока нейтронов:

$$\begin{aligned} & \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \left[ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) J_z(\mathbf{r}, E) \right] = \\ & = \sum_{k'=1}^N \int_{E_{k'+1}}^{E_{k'}} dE' \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE J_z(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^1(E' \rightarrow E). \end{aligned} \quad (8.25b)$$

Представим теперь приближенно правую часть уравнения (8.25b) в следующем виде, оставляя в сумме только член с  $k' = k$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \phi_k(\mathbf{r}) + \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE J_z(\mathbf{r}, E) \left[ \Sigma_T(\mathbf{r}, E) - \right. \\ & \left. - \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE' \Sigma_s^1(E \rightarrow E') \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.25b)$$

где мы переставили переменные интегрирования  $E$  и  $E'$  в члене правой части уравнения (8.25b) и перенесли этот член в левую часть уравнения. Теперь необходимо доказать справедливость исключения из суммы в уравнении (8.25b) членов с  $k' \neq k$ . В сущности, доказательством является то общее правило, что сечение  $\Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \cdot \Omega)$  обращается в нуль, если  $|E' - E|$  достаточно велико. Тогда мы видим, что если  $E$  и  $E'$  принадлежат разным энергетическим ин-

тервалам, то сечение  $\Sigma_s^1(E' \rightarrow E)$  должно быть много меньше, чем в случае, когда они находятся в одном интервале\*.

Уравнение (8.25в) можно использовать для определения коэффициента диффузии на  $k$ -м интервале. С этой целью запишем его в виде

$$3 \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE J_z(\mathbf{r}, E) \left[ \Sigma_T(\mathbf{r}, E) - \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE' \Sigma_s^1(E' \rightarrow E) \right] = \frac{J_{zh}(\mathbf{r})}{D_h(\mathbf{r})}, \quad (8.26)$$

где  $J_{zh}(\mathbf{r})$  дается уравнением (8.24). Уравнение (8.26) определяет коэффициент диффузии  $D_h(\mathbf{r})$ , который при таком методе определения может сильно зависеть только от свойств материалов реактора. Кроме того, следует ожидать, что, используя компоненты  $J_x$  и  $J_y$ , получаем такое же значение коэффициента диффузии. Это приводит к многогрупповой версии закона Фика:

$$\mathbf{J}_k(\mathbf{r}) = -D_h \nabla \phi_k(\mathbf{r}). \quad (8.27)$$

Умножим уравнение (8.14) на  $dE$  и проинтегрируем по  $k$ -му энергетическому интервалу:

$$\int_{E_{k+1}}^{E_k} dE [\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E)] = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE S(\mathbf{r}, E) + \\ + \sum_{k'=1}^N \int_{E_{k'+1}}^{E_{k'}} dE' \int_{E_{k+1}}^{E_k} \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE. \quad (8.28)$$

Тогда можно использовать следующие определения групповых констант:

$$\Sigma_{Tk}(\mathbf{r}) = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \frac{\Sigma_T(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E)}{\phi_k(\mathbf{r})}; \quad (8.29a)$$

$$\Sigma_{k'k}(\mathbf{r}) = \int_{E_{k'+1}}^{E_{k'}} dE' \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \frac{\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E')}{\phi_{k'}(\mathbf{r})}; \quad (8.29б)$$

$$S_k(\mathbf{r}) = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE S(\mathbf{r}, E). \quad (8.29в)$$

В делящихся материалах  $S(\mathbf{r}, E)$  представляет собой источник нейтронов деления, рассмотренный в гл. 1. Его можно записать в виде

$$S_f(\mathbf{r}, E) = N(E) \int dE' \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E'), \quad (8.30a)$$

\* Очевидно, что эти результаты зависят от выбора энергетических интервалов и свойств замедлителя. Мы обсудим уравнения замедления нейтронов и различные приближения для них в гл. 9.

где  $N(E)$  — спектр нейтронов деления (см. гл. 1). Как мы уже отмечали,  $N(E)$  часто ищут в следующем виде:

$$N(E) = \nu \chi(E), \quad (8.30б)$$

где  $\nu$  — среднее число нейтронов на деление, а интеграл от  $\chi(E)$  по всем энергиям равен единице.

Для источника нейтронов деления  $S_k(\mathbf{r})$  можно записать в виде

$$S_{fk}(\mathbf{r}) = \nu \chi_k \sum_{k'} \phi_{k'}(\mathbf{r}) \Sigma_{jk'}(\mathbf{r}), \quad (8.31а)$$

где  $\Sigma_{jk'}$  и  $\chi_k$  определяются в виде

$$\Sigma_{jk'}(\mathbf{r}) = \int_{E_{k'+1}}^{E_k} dE \frac{\phi(\mathbf{r}, E) \Sigma_f(E)}{\phi_{k'}(\mathbf{r})} \quad (8.31б)$$

и

$$\chi_k = \int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \chi(E). \quad (8.31в)$$

Очевидно, что соотношение (8.31а) идентично (8.1), а (8.31б) и (8.31в) дают точные определения групповых констант.

Используя эти определения в уравнении (8.28), получаем

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \mathbf{J}_k(\mathbf{r}) + \Sigma_{Tk}(\mathbf{r}) \phi_k(\mathbf{r}) = \\ & = \nu \chi_k \sum_{k'} \Sigma_{jk'}(\mathbf{r}) \phi_{k'}(\mathbf{r}) + \sum_{k'} \Sigma_{k'k}(\mathbf{r}) \phi_{k'}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Так как пренебрегаем рассеянием, приводящим к возрастанию энергии, то  $\Sigma_{k'k} = 0$  для  $k' > k$ . Кроме того, удобно включить в рассмотрение член с  $k' = k$ , определяя сечение увода\* в виде

$$\Sigma_{Rk}(\mathbf{r}) = \Sigma_{Tk}(\mathbf{r}) - \Sigma_{kk}(\mathbf{r}). \quad (8.33)$$

Используя теперь закон Фика (8.27), перепишем уравнение (8.32) следующим образом:

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot D_k(\mathbf{r}) \nabla \phi_k(\mathbf{r}) + \Sigma_{Rk}(\mathbf{r}) \phi_k(\mathbf{r}) = \\ & = \nu \chi_k \sum_{k'} \Sigma_{jk'}(\mathbf{r}) \phi_{k'}(\mathbf{r}) + \sum_{k' < k} \Sigma_{k'k}(\mathbf{r}) \phi_{k'}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (8.34)$$

которое, как нетрудно видеть, идентично уравнению (8.10).

Рассмотрим определения групповых констант в уравнениях (8.29) и (8.31). Очевидно, что они зависят от потоков  $\phi(\mathbf{r}, E)$ . Таким образом, чтобы определить групповые константы, нужно знать решение уравнений для зависящих от энергии потоков нейтронов.

\* Это определение согласуется с тем, которое было использовано при выводе уравнения (8.7а).

Обычный подход (подробно рассматриваемый в гл. 9) состоит в использовании спектра, т. е. зависящего от энергии потока нейтронов, для усреднения групповых констант, причем спектр нейтронов получается из упрощенных расчетов.

В любом случае, если группы выбираются в достаточно узком интервале энергии, то схема «усреднения» не имеет существенного значения. Однако, как мы отметили ранее, наши энергетические группы не настолько малы, чтобы можно было ожидать, что поток нейтронов  $\phi(r, E)$  и сечения будут постоянны по данному энергетическому интервалу. Так как сечения и потоки нейтронов изменяются довольно существенно на энергетическом интервале, то групповые константы будут сильно зависеть от композиции активной зоны (в значительно большей мере, чем просто через ядерные плотности материалов, входящие в макроскопические сечения). Эта зависимость, обусловленная зависимостью от энергии потока нейтронов  $\phi(r, E)$  в данной энергетической группе, будет определяться композицией материалов, и можно ожидать, что энергетическая зависимость потока нейтронов значительно изменится с изменением композиции реактора. Таким образом, необходимо, как указывалось выше, усреднение групповых констант по спектру нейтронов. Это приближение справедливо, поскольку обычно\* не ожидается, что в процессе работы реактора композиции материалов претерпевают слишком сильные изменения; следовательно, при умеренных изменениях композиции активной зоны можно ожидать, что групповые константы будут существенно постоянными.

Можно отметить, что более строгий анализ изменения характеристик реактора в течение кампании должен включать в себя пересчет групповых констант по мере изменения свойств активной зоны, обусловленного такими эффектами, как выгорание  $^{235}\text{U}$  и накопление  $^{239}\text{Pu}$ . В действительности анализ таких реакторов, как BWR (кипящий реактор), очень затруднен, так как групповые константы должны быть пересчитаны всякий раз, как изменяется паросодержание.

Более подробно проблемы, связанные с расчетом групповых констант, будут обсуждены в гл. 9 и 10.

#### **§ 8.4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ**

Для очень простых задач, т. е. задач с малым числом групп и малым количеством зон (в каждой из которых групповые сечения постоянны), можно получить аналитические решения многогрупповых уравнений. В действительности эти аналитические решения имеют небольшую практическую ценность, так что мы остановимся на самых простых из них, чтобы с их помощью рассмотреть методы расчета групповых констант.

\* Исключая, конечно, кипящие реакторы, такие, как BWR.

Рассмотрим двухгрупповые уравнения для голого гомогенного реактора. Прежде всего перепишем определения некоторых групповых констант для этого случая. Потоки нейтронов имеют вид:

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \int_0^{E_2} dE \phi(\mathbf{r}, E); \quad (8.35a)$$

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \int_{E_2}^{E_1} dE \phi(\mathbf{r}, E). \quad (8.35b)$$

Обычно в двухгрупповых уравнениях граничная энергия  $E_2$  принимается равной  $\sim 1$  эв. Тогда индекс 2 относится к *тепловой группе*, индекс 1 — к *быстрой*.

Источники нейтронов деления в этом случае имеют вид:

$$\chi_2 = \int_0^{E_2} dE \chi(E); \quad (8.36a)$$

$$\chi_1 = \int_{E_2}^{E_3} dE \chi(E). \quad (8.36b)$$

Так как  $E_2 \approx 1$  эв, а  $E_3 \approx 10^7$  эв, то  $\chi_1 = 1$ , а  $\chi_2 = 0$ , т. е. источник нейтронов деления присутствует только в группе 1 (хотя он и содержит вклады из обеих групп):

$$S_{f1}(\mathbf{r}) = \nu \phi_1(\mathbf{r}) \Sigma_{f1}(\mathbf{r}) + \nu \phi_2(\mathbf{r}) \Sigma_{f2}(\mathbf{r}). \quad (8.36b)$$

Другое упрощение касается сечения увода в группе 2. Поскольку в тепловой группе отсутствует замедление, то интегрирование сечения рассеяния по группе 2 дает полное сечение рассеяния

$$\int_0^{E_2} dE \Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E'), \quad 0 \leq E' \leq E_2. \quad (8.37a)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (8.29б), видим, что  $\Sigma_{22}$  представляет собой в точности среднее сечение рассеяния в группе 2, т. е.

$$\Sigma_{22} = \Sigma_{s2} = \int_0^{E_2} dE \frac{\Sigma_s(E) \phi(\mathbf{r}, E)}{\phi_2(\mathbf{r})}. \quad (8.37b)$$

Тогда сечение увода для группы 2 равно среднему сечению поглощения в этой группе:

$$\Sigma_{R2}(\mathbf{r}) = \Sigma_{T2}(\mathbf{r}) - \Sigma_{s2}(\mathbf{r}) = \Sigma_{a2}(\mathbf{r}). \quad (8.37b)$$

Все другие групповые константы определяются так, как в уравнениях (8.29), (8.31) и (8.33), и двухгрупповые диффузионные уравнения имеют следующий вид:

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) + \Sigma_{R1} \phi_1(\mathbf{r}) = \nu \Sigma_{f1} \phi_1(\mathbf{r}) + \nu \Sigma_{f2} \phi_2(\mathbf{r}); \quad (8.38a)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}) + \Sigma_{a2} \phi_2(\mathbf{r}) = \Sigma_{12} \phi_1(\mathbf{r}). \quad (8.38б)$$

Предположим, что рассматривается голый гомогенный реактор; в этом случае граничные условия имеют вид\*

$$\phi_1(\mathbf{R}') = \phi_2(\mathbf{R}') = 0. \quad (8.38в)$$

Рассмотрим далее решения уравнений (8.38) в виде, содержащем геометрический лапласиан (см. гл. 3):

$$(\nabla^2 + B_g^2) \phi_1(\mathbf{r}) = 0; \quad (8.39a)$$

$$(\nabla^2 + B_g^2) \phi_2(\mathbf{r}) = 0, \quad (8.39б)$$

где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  удовлетворяют граничному условию (8.38в).

Используя уравнения (8.39a) и (8.39б), можно записать уравнения (8.38a) и (8.38б) в следующем виде:

$$(D_1 B_g^2 + \Sigma_{R1} - \nu \Sigma_{f1}) \phi_1 - \nu \Sigma_{f2} \phi_2 = 0; \quad (8.40a)$$

$$-\Sigma_{12} \phi_1 + (D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) \phi_2 = 0. \quad (8.40б)$$

Условие критичности получается, если отметить, что однородные уравнения (8.40) для  $\phi_1$  и  $\phi_2$  имеют ненулевые решения в том случае, когда определитель матрицы обращается в нуль, т. е.

$$\begin{vmatrix} D_1 B_g^2 + \Sigma_{R1} - \nu \Sigma_{f1} & -\nu \Sigma_{f2} \\ -\Sigma_{12} & D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.41)$$

Расписывая определитель и используя определения диффузионных длин быстрой и тепловой групп:

$$L_2^2 = D_2 / \Sigma_{a2}; \quad (8.42a)$$

$$L_1^2 = D_1 / (\Sigma_{R1} - \nu \Sigma_{f1}), \quad (8.42б)$$

получаем условие критичности

$$(1 + B_g^2 L_1^2) (1 + B_g^2 L_2^2) = \frac{\nu \Sigma_{f2} \Sigma_{12}}{\Sigma_{a2} (\Sigma_{R1} - \nu \Sigma_{f1})}. \quad (8.43)$$

Некоторые из величин, входящих в уравнение (8.43), уже обсуждались ранее в связи с одногрупповой теорией. Мы отмечали, что величина  $\nu \Sigma_{f2} / \Sigma_{a2}$  в уравнении (3.80) равна произведению ко-

\* Предполагается, что экстраполированные границы в обеих группах одинаковы. Такое предположение справедливо, так как и в тепловой, и в быстрой группе длина экстраполяции много меньше размеров реактора.

эффективности использования тепловых нейтронов  $f$  и числа вторичных нейтронов на каждый поглощенный тепловой нейтрон  $\eta$ , т. е.

$$v\Sigma_{f2}/\Sigma_{a2} = \eta f. \quad (8.44)$$

Как показано в уравнении (3.87) для однокрупного приближения, величины  $(1 + B_g^2 L_1^2)^{-1}$  и  $(1 + B_g^2 L_2^2)^{-1}$  представляют собой вероятности избежать утечки для быстрых и тепловых нейтронов, соответственно

$$P_T = 1/(1 + B_g^2 L_2^2); \quad (8.45a)$$

$$P_F = 1/(1 + B_g^2 L_1^2). \quad (8.45b)$$

Если не принимать во внимание утечку нейтронов, то число нейтронов, уходящих каждую секунду из группы 1, равно  $\phi_1 \Sigma_{R1}$ , в то время как число нейтронов, замедляющихся из группы 1 в группу 2, равно  $\phi_1 \Sigma_{12}$ . Отношение этих двух величин представляет собой вероятность для нейтрона избежать поглощения в группе 1. Так как большая часть поглощений в группе 1 происходит, как отмечалось в гл. 1, в области резонансов, то эту величину можно рассматривать как *вероятность избежать резонансного поглощения*, т. е.

$$p = \Sigma_{12}/\Sigma_{R1}. \quad (8.46)$$

Напомним, что коэффициент размножения на быстрых нейтронах  $\epsilon$  определяется как отношение полного числа нейтронов, полученных при делении  $v\Sigma_{f1}\phi_1 + v\Sigma_{f2}\phi_2$ , к числу нейтронов, полученных за счет деления на тепловых нейтронах  $v\Sigma_{f2}\phi_2$ :

$$\epsilon = \frac{v\Sigma_{f1}\phi_1 + v\Sigma_{f2}\phi_2}{v\Sigma_{f2}\phi_2}. \quad (8.47a)$$

При этом предполагается, что утечка нейтронов отсутствует. Можно использовать уравнение (8.40a) (с  $B_g = 0$ , так как коэффициент размножения на быстрых нейтронах  $\epsilon$  определяется при отсутствии утечки) для представления величины  $v\Sigma_{f2}\phi_2$  через поток  $\phi_1$ . Выразив  $v\Sigma_{f2}\phi_2$  через  $\phi_1$  с помощью (8.40a) и подставляя результат в (8.47a), получаем

$$\epsilon = \Sigma_{R1} / (\Sigma_{R1} - v\Sigma_{f1}). \quad (8.47b)$$

Скомбинируем полученные результаты, чтобы показать, что уравнение (8.43) идентично формуле шести сомножителей, выведенной в гл. 1 [уравнение (1.12)]. Подставляя определения  $P_F$  и  $P_T$  [уравнения (8.45a) и (8.45b)] в уравнение (8.43), получаем

$$1 = P_F P_T \frac{v\Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{R1}} \frac{\Sigma_{R1}}{\Sigma_{R1} - v\Sigma_{f1}}. \quad (8.48a)$$

С помощью выражений (8.44), (8.46) и (8.47b) для произведения  $\eta f$ , вероятности избежать резонансного поглощения  $p$  и коэффициента

размножения на быстрых нейтронах  $\epsilon$  уравнение (8.48а) приводится к условию критичности в виде формулы шести сомножителей:

$$1 = P_F P_T \eta f p \epsilon. \quad (8.48б)$$

До сих пор мы связывали двухгрупповые формулы для голого реактора с ранее полученными (более общими) результатами. Напомним уравнение (3.89) для мощности реактора (в ваттах):

$$P = 3,2 \cdot 10^{-11} (\bar{\phi}_1 \Sigma_{f1} + \bar{\phi}_2 \Sigma_{f2}), \quad (8.49)$$

где

$$\bar{\phi}_1 = \int_V d^3 r \phi_1(\mathbf{r}). \quad (8.50а)$$

и

$$\bar{\phi}_2 = \int_V d^3 r \phi_2(\mathbf{r}). \quad (8.50б)$$

Если проинтегрировать (8.40а) и (8.40б) по объему реактора и использовать уравнение (8.49), то можно получить выражения для  $\bar{\phi}_1$  и  $\bar{\phi}_2$  через мощность реактора (в ваттах):

$$\bar{\phi}_1 = \frac{(D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) \Sigma_{f2}}{(D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) \Sigma_{f1} + \Sigma_{f2} \Sigma_{12}} \cdot \frac{P}{3,2 \cdot 10^{-11}}; \quad (8.51а)$$

$$\bar{\phi}_2 = \frac{\Sigma_{12} \Sigma_{f2}}{(D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) \Sigma_{f1} + \Sigma_{f2} \Sigma_{12}} \cdot \frac{P}{3,2 \cdot 10^{-11}}. \quad (8.51б)$$

Нередко представляет интерес возможность «сворачивания» двухгрупповых констант в одногрупповые. (Такой метод часто используется в практических расчетах; 50 групп, например, можно свернуть к 4.) Если сложить уравнения (8.40а) и (8.40б) и проинтегрировать по объему реактора, то можно получить

$$(D_1 \bar{\phi}_1 + D_2 \bar{\phi}_2) B_g^2 + (\Sigma_{11} \bar{\phi}_1 + \Sigma_{a2} \bar{\phi}_2 - \Sigma_{12} \bar{\phi}_2) - v \Sigma_{f1} \bar{\phi}_1 - v \Sigma_{f2} \bar{\phi}_2 = 0. \quad (8.52)$$

Одногрупповые константы получаются, если записать уравнение (8.52) через полный поток  $\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2$ :

$$\bar{D} B_g^2 (\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) + \bar{\Sigma}_a (\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) - v \bar{\Sigma}_f (\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) = 0, \quad (8.53)$$

где

$$\bar{D} = \frac{D_1 \bar{\phi}_1 + D_2 \bar{\phi}_2}{\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2} = \frac{(D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) D_1 + \Sigma_{12} D_2}{D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2} + \Sigma_{12}}; \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_a &= \frac{\Sigma_{R1} \bar{\phi}_1 + \Sigma_{a2} \bar{\phi}_2 - \Sigma_{12} \bar{\phi}_1}{\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2} = \\ &= \frac{(\Sigma_{R1} - \Sigma_{12}) (D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) + \Sigma_{a2} \Sigma_{12}}{D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2} + \Sigma_{12}}; \end{aligned} \quad (8.55)$$

$$v \bar{\Sigma}_f = v \frac{\Sigma_{f1} \bar{\phi}_1 + \Sigma_{f2} \bar{\phi}_2}{\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2} = v \frac{(D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2}) \Sigma_{f1} + \Sigma_{12} \Sigma_{f2}}{D_2 B_g^2 + \Sigma_{a2} + \Sigma_{12}}. \quad (8.56)$$

Условие критичности (8.41) устанавливает дополнительные соотношения между величинами, входящими в приведенные выше уравнения. Обычно реактор поддерживается критическим с помощью регулирующих стержней, которые поглощают нейтроны в тепловой группе. Таким образом, удобно выразить условие критичности в виде условия на сечение поглощения нейтронов в тепловой группе:

$$\Sigma_{a2} = \frac{v \Sigma_{12} \Sigma_{f2}}{D_1 B_g^2 + \Sigma_{R1} - v \Sigma_{f1}} - D_2 B_g^2. \quad (8.57)$$

Если пренебречь делением во всех группах, кроме тепловой, то можно легко распространить метод, описанный выше для двух групп, на  $N$  групп. В этом случае условие критичности аналогично формуле (8.48б):

$$\frac{\eta f \prod_{i=1}^{N-1} p_i}{\prod_{i=1}^N (1 + L_i^2 B_g^2)} = 1; \quad (8.58)$$

где

$$p_i = \sum_{k>i} (\Sigma_{ik} / \Sigma_{Ri}), \quad (8.59a)$$

$$p = \prod_{i=1}^{N-1} p_i, \quad (8.59b)$$

$p_i$  интерпретируется как вероятность избежать резонансного поглощения в группе  $i$ . Аналогично

$$L_i^2 = D_i / \Sigma_{Ri} \quad (8.60)$$

представляет собой диффузионную длину в группе  $i$ . Если  $B_g^2$  мало (что обычно и имеет место), то

$$\prod_{i=1}^N (1 + L_i^2 B_g^2) \approx 1 + B_g^2 \sum_{i=1}^N L_i^2, \quad (8.61a)$$

а сумма всех  $L_i^2$ , обычно обозначаемая  $M^2$ , называется площадью миграции

$$M^2 = \sum_i L_i^2. \quad (8.61b)$$

Хотя рассмотренные выше уравнения и условия критичности справедливы только для реакторов на тепловых нейтронах, они знакомы с методами расчета групповых констант, которые могут стать основой для расчета констант, применимых к любому типу реакторов.

## § 8.5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Численное решение многогрупповых уравнений, записанных в виде уравнения (8.8), аналогично решению одногрупповых диффузионных уравнений, рассмотренных в гл. 6, так что требуется лишь минимум необходимых комментариев. В качестве первого приближения в методе внешних итераций мы принимали функцию источника  $S^{(0)}(\mathbf{r})$ . Отметим, что не обязательно выбирать пробные функции для потока нейтронов в каждой группе; необходимо иметь только одну функцию пространственной переменной  $S^{(0)}(\mathbf{r})$ .

Рассмотрим уравнение (8.60), которое, будучи матричным уравнением, представляет собой в действительности сокращенный метод записи  $N$  уравнений ( $N$  — число групп). Если обратиться к определению матрицы  $M$  [уравнение (8.7)], то можно видеть, что первое из уравнений имеет вид (здесь  $S(\mathbf{r})$  заменено  $S^{(0)}(\mathbf{r})$  — первой пробной функцией источника)

$$(-\nabla \cdot D_1 \nabla + \Sigma_{R1}) \phi_1 = \nu \chi_1 S^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (8.62a)$$

Это — односкоростное диффузионное уравнение, численное решение которого подробно обсуждалось в гл. 6.

Второе уравнение в системе (8.10) такое:

$$(-\nabla \cdot D_2 \nabla + \Sigma_{R2}) \phi_2 = \nu \chi_2 S^{(0)}(\mathbf{r}) + \Sigma_{12} \phi_1. \quad (8.62b)$$

Оно вновь имеет вид односкоростного диффузионного уравнения. В предположении, что уравнение (8.62a) было предварительно решено, поток нейтронов  $\phi_1$  в правой части этого уравнения является известной функцией и просто добавляется к члену источника. Таким методом можно последовательно решить  $N$  уравнений (8.10). Простота этого метода достигается благодаря тому, что матрица является треугольной, что, в свою очередь, связано с предположением о том, что при столкновениях нейтроны не могут приобретать энергию (т. е. отсутствует рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов).

Когда получено  $N$  значений потоков  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ , с помощью уравнения (8.46) рассчитывается новая функция источника  $S^{(1)}(\mathbf{r})$ . Затем вычисляют новые значения потоков, получают вторую итерацию источника и т. д. Эта процедура аналогична методу внешних итераций, описанному в гл. 6.

Если необходимо учитывать рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов, то уравнения нельзя решить таким простым способом. В этом случае часть уравнений должна быть решена одновременно, при этом их число зависит от числа групп, в которых присутствует рассеяние, приводящее к возрастанию энергии. Методы решения таких уравнений рассмотрены в работе [1].

## § 8.6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

В § 3.8 мы рассмотрели односкоростную задачу на критичность в интегральной форме уравнений и отметили, что такое рассмотрение могло бы быть применено и к более общим задачам.

Действительно, полученные там результаты, интерпретированные соответствующим образом, можно непосредственно использовать в задачах с энергетической зависимостью.

Уравнение критичности, выведенное в § 3.8, имеет вид

$$1 = \nu \Sigma_f \bar{G}_\infty(B^2), \quad (8.63)$$

где  $\bar{G}_\infty$  — фурье-преобразование функции Грина для бесконечной системы  $G_\infty(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ . Для односкоростного диффузионного приближения  $\bar{G}_\infty$  имеет вид (см. уравнение (3.104)).

$$\bar{G}_\infty = 1 / [\Sigma_a (1 + L^2 B^2)]. \quad (8.64)$$

Предположим, рассматривая настоящую задачу, что мы записываем  $G_\infty$  как свертку члена замедления  $g_\infty(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  с диффузионным ядром (2.104). Тогда, записывая

$$\bar{G}_\infty(\mathbf{r}) = \int d^3 r' g_\infty(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \frac{\exp(-r'/L)}{4\pi D r'}, \quad (8.65a)$$

мы имеем

$$\bar{G}_\infty(B^2) = \bar{g}_\infty(B^2) \frac{1}{\Sigma_a (1 + L^2 B^2)}. \quad (8.65b)$$

Для получения уравнения (8.65b) мы использовали теорему о свертке, рассмотренную в приложении В. Символом  $L$  без индекса обозначена, как обычно, длина диффузии тепловых нейтронов. Таким образом, уравнение критичности принимает вид

$$\eta_f \bar{g}_\infty(B^2) / (1 + L^2 B^2) = 1, \quad (8.66)$$

и по аналогии с приведенной выше интерпретацией уравнения критичности можно рассматривать  $\bar{g}_\infty(B^2)$  как произведение вероятностей того, что нейтрон в процессе замедления не поглощается и не уходит из системы\*. В двухгрупповой модели (т. е. если процесс замедления описывается одной быстрой группой)

$$\bar{g}_\infty(B^2) = \rho / (1 + L_F^2 B^2), \quad (8.67)$$

где  $L_F$  — длина диффузии быстрых нейтронов. В случае двух быстрых групп

$$\bar{g}_\infty(B^2) = \frac{\rho_1 \rho_2}{(1 + L_{1F}^2 B^2)(1 + L_{2F}^2 B^2)} \quad (8.68)$$

\* Делением на быстрых нейтронах пренебрегается. Кроме того, отметим, что вероятности избежать поглощения и утечки в процессе замедления в действительности не являются независимыми, хотя предположение об их независимости не приводит к слишком плохим результатам.

и т. д. В гл. 9 мы представим другой метод (возрастной метод Ферми), который дает лучшую оценку  $\bar{g}_\infty (B^2)$ , чем многогрупповые методы\*. Однако непосредственно в расчетах на критичность его можно использовать только для простых систем. Для практических расчетов все же требуются численные многогрупповые методы, однако возрастная теория оказывается полезной при определении групповых констант.

Из интегральной формы уравнений можно почерпнуть некоторые дополнительные сведения. Предположим, что для потока тепловых нейтронов  $\phi_T(\mathbf{r})$  записывается интегральное уравнение (3.98):

$$\phi_T(\mathbf{r}) = \nu \Sigma_f \int \phi_T(\mathbf{r}') G_\infty(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d^3r'. \quad (8.69)$$

Мы знаем, что поток нейтронов  $\phi_T$  удовлетворяет диффузионному уравнению с *источником замедляющихся нейтронов*. Кроме того, из уравнения (8.69) известно, что поток  $\phi_T$  пропорционален наименьшей собственной функции  $\chi_0(\mathbf{r})$  уравнения Гельмгольца с лапласианом  $B_m^2$ , который является положительным решением уравнения (8.66) (все это было показано в § 3.8). Однако поток нейтронов с любой энергией можно записать в виде уравнения (8.69), т. е.

$$\phi(E, \mathbf{r}) = \int d^3r' \nu \Sigma_f \phi_T(\mathbf{r}') G_\infty(E, |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|). \quad (8.70)$$

Таким образом, все те аргументы, которые мы использовали в уравнении (8.69), можно применить и к уравнению (8.70), чтобы показать, что поток  $\phi(E, \mathbf{r})$  пропорционален  $\chi_0(\mathbf{r})$  и, следовательно, может быть представлен в виде произведения  $F(E) \chi_0(\mathbf{r})$ .

Этот анализ справедлив только для голого гомогенного реактора, в котором предполагается, что связь между экстраполированными граничными точками не зависит от энергии [2].

### § 8.7. ИЗМЕРЕНИЕ $k_\infty$

**Французский промежуточный эксперимент.** Вскоре после открытия деления в 1938 г. было установлено, что в процессе деления выделяются дополнительные нейтроны. Точное число их было неизвестно, хотя предварительные измерения показали, что на каждое деление приходится 2 — 3 дополнительных нейтрона.

Непосредственно за этим во многих странах была доказана возможность осуществления цепной ядерной реакции. Достижение *критичности* зависело от значения ряда параметров, известных ныне как коэффициент размножения на быстрых нейтронах  $\epsilon$ , вероятность избежать резонансного поглощения  $p$  и коэффициент использования тепловых нейтронов  $f$  (грубые измерения выхода вторичных нейтронов  $\eta$  к этому времени уже существовали). Переводя вновь ранние идеи на современный язык, ученые работали над тем, чтобы

\* Отметим, что возрастная теория Ферми применима только к тяжелым замедлителям, таким, как графит. Для  $H_2O$  и  $D_2O$  должны быть использованы другие методы.

обеспечить значение  $k_{\infty}$  больше единицы для достижения критичности. Для *практических* целей интересно также было знать, насколько  $k_{\infty}$  может превысить единицу, однако самые ранние измерения не давали таких сведений.

Важно понять значение концепции  $k_{\infty}$ . Если бы не существовало понятия этой величины и если бы не было способа определить ее значение, то было бы трудно установить заранее возможность достижения критичности реактора конкретного типа без реального его строительства. Даже если бы реактор был построен и оказался бы подкритическим, то оставалось бы неясно, что реактор не достиг критичности только из-за того, что был слишком мал ( $k_{\infty} > 1$ ,  $k < 1$ ).

Французские ученые решили эту проблему очень остроумно. Небольшой сферический алюминиевый контейнер был заполнен материалом активной зоны. (Они рассматривали гомогенные смеси  $H_2O$  и окиси естественного урана, а также  $D_2O$  и окиси естественного урана. Кроме того, изучались гетерогенные сборки парафина и окиси естественного урана. Обогащенного урана в то время не существовало.) Вокруг этой сферы, которую мы будем называть *активной зоной*,

размещалась большая зона воды, которую мы будем называть *отражателем*. Отражатель был настолько большим, что для всех практических целей он считался бесконечным. В активной зоне и отражателе размещались небольшие фольги, так что с помощью активационного анализа можно было получить радиальное распределение потока тепловых нейтронов. Нейтронный источник размещался в центре активной зоны (рис. 8.2).

В отдельном эксперименте было проведено радиальное измерение потока тепловых нейтронов при отсутствии активной зоны. Этот эксперимент можно рассматривать таким же, как и первый для предельного случая  $R_0 \rightarrow 0$  (мы в дальнейшем увидим важность этого эксперимента).

Для анализа рассмотренного эксперимента используем двухгрупповую теорию. Обозначим индексами  $s$  и  $R$  величины, относящиеся к активной зоне и отражателю соответственно, а индексами 1 и 2 — быструю и тепловую группы. Тогда поток нейтронов в активной зоне описывается двумя уравнениями:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_1^s + \Sigma_{R1}^s \phi_1^s = \nu \Sigma_f^s \phi_2^s + Q_0 \delta(\mathbf{r}); \quad (8.71)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_2^s + \Sigma_{a2}^s \phi_2^s = \Sigma_{12}^s \phi_1^s. \quad (8.72)$$



Рис. 8.2. Схема проведения измерений во французском эксперименте

При написании этих уравнений были сделаны следующие предположения:

- 1) все нейтроны деления рождаются в быстрой группе;
- 2) внешний источник (интенсивностью  $Q_0$ ) испускает быстрые нейтроны;
- 3) делением на быстрых нейтронах пренебрегается.

В отражателе уран отсутствует, так что  $\Sigma_f^R = 0$ . Так как в чистой воде поглощение нейтронов в быстрой группе практически отсутствует, то  $\Sigma_{a1}^R = 0$ . В результате поток нейтронов в отражателе описывается уравнениями:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_1^R + \Sigma_{12}^R \phi_1^R = 0; \quad (8.73a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_2^R + \Sigma_{a2}^R \phi_2^R = \Sigma_{12}^R \phi_1^R. \quad (8.73б)$$

Проинтегрируем теперь уравнение (8.73a) по  $r$  от 0 до  $R_0$ , а уравнение (8.73б) от  $R_0$  до  $\infty$ . Используя теорему Гаусса, получим:

$$R_0^2 J_1(R_0) + \Sigma_{R1}^c \Phi_1^c = \nu \Sigma_f^c \Phi_2^c + Q_0; \quad (8.74a)$$

$$R_0^2 J_0(R_0) + \Sigma_{a2}^c \Phi_2^c = \Sigma_{12}^c \Phi_1^c; \quad (8.74б)$$

$$-R_0^2 J_1(R_0) + \Sigma_{12}^R \Phi_1^R = 0; \quad (8.74в)$$

$$-R_0^2 J_2(R_0) + \Sigma_{a2}^R \Phi_2^R = \Sigma_{12}^R \Phi_1^R. \quad (8.74г)$$

Здесь индексы  $c$  или  $R$  при символах, обозначающих токи нейтронов,  $J_1(R_0)$  и  $J_2(R_0)$  не обязательны, так как  $J_i^R(R_0) = J_i^c(R_0)$  (условие непрерывности тока нейтронов)\*.

Кроме того, мы ввели обозначения

$$\Phi_i^c = \int_0^{R_0} r^2 dr \phi_i^c(r), \quad i=1, 2; \quad (8.75a)$$

$$\Phi_i^R = \int_{R_0}^{\infty} x^2 dr \phi_i^R(r), \quad i=1, 2. \quad (8.75б)$$

Уравнение (8.74в) можно использовать для исключения  $J_1(R_0)$  из (8.74a). Если затем исключить  $\Phi_1^c$  и  $\Phi_1^R$  из остающихся уравнений, то получим

$$\left( \nu \Sigma_f^c - \frac{\Sigma_{R1}^c \Sigma_{a2}^c}{\Sigma_{12}^c} \right) \Phi_2^c = -Q_0 + \Sigma_{a2}^R \Phi_2^R + \\ + \left( \frac{\Sigma_{R1}^c}{\Sigma_{12}^c} - 1 \right) R_0^2 J_2(R_0). \quad (8.76)$$

\* Кроме того, ток нейтронов имеет только радиальную компоненту, так что его скорее можно рассматривать как скалярную, а не векторную величину.

Для определения источника  $Q_0$  обратимся к ранее описанному эксперименту, в котором активная зона отсутствует, т. е.  $R_0 \rightarrow 0$ . Тогда, поскольку каждый испущенный источником нейтрон должен поглотиться как тепловой, имеем

$$Q_0 = \Sigma_{a2}^R \Phi_2^1, \quad (8.77)$$

где  $\Phi_2^1$  — проинтегрированный поток тепловых нейтронов для этого эксперимента, т. е.

$$\Phi_2^1 = \int_0^\infty r^2 dr \phi_2(r). \quad (8.78)$$

Напомним выражения для вероятности избежать резонансного поглощения  $p$ , произведения  $\eta f$  и коэффициента размножения  $k_\infty$ :

$$p = \Sigma_{12}^c / \Sigma_{R1}^c; \quad (8.79)$$

$$\eta f = v \Sigma_f^c / \Sigma_{a2}^c; \quad (8.80)$$

$$k_\infty = \eta f p; \quad (8.81)$$

$$k_\infty = (v \Sigma_f^c / \Sigma_{a2}^c) (\Sigma_{12}^c / \Sigma_{R1}^c). \quad (8.82)$$

Тогда, используя уравнения (8.77) и (8.82), можно привести уравнение (8.76) к следующему виду:

$$(k_\infty - 1) \Phi_2^c = \frac{\Sigma_{a2}^R}{\Sigma_{a2}^c} p (\Phi_2^R - \Phi_2^1) + \frac{1-p}{\Sigma_{a2}^c} R_0^2 J_2(R_0). \quad (8.83)$$

Описанные выше эксперименты и их анализ были выполнены группой французских ученых в 1939 — 1940 гг. В эту группу входили Ф. Жолио-Кюри, Х. ван Халбан и Л. Коварски. В анализе они пренебрегали членом  $R_0^2 J_2(R_0)$ , т. е. предполагали, что отсутствует перенос тепловых нейтронов между активной зоной и отражателем. В этом случае, как было отмечено, достаточно только определить величины  $\Phi_2^R$  и  $\Phi_2^1$ , интегрируя активности фольг. Если  $\Phi_2^R > \Phi_2^1$ , то следует, что  $k_\infty > 1$ , и наоборот.

Можно выяснить, к чему приводит пренебрежение членом  $J_2(R_0)$ . Из анализа реактора с отражателем следует, что  $J_2(R_0) < 0$ , т. е. результирующий ток нейтронов должен быть направлен из отражателя в активную зону. Тогда, так как  $k < 1$ ,

$$\Phi_2^R - \Phi_2^1 \approx (k_\infty - 1) + \delta, \quad (8.84)$$

где  $\delta > 0$ . Предположим, что из экспериментов установлено, что  $\Phi_2^R - \Phi_2^1 < 0$ . Тогда *определенно*  $k_\infty < 1$ . Однако если  $\Phi_2^R - \Phi_2^1 > 0$ , то все же  $k_\infty$  может оказаться меньше единицы. Таким образом, достаточным, но не необходимым условием того, что данная конфигурация активной зоны реактора не обеспечит самоподдерживающейся цепной реакции, является неравенство  $\Phi_2^1 > \Phi_2^R$ .

Поскольку французские ученые в те годы своей основной целью ставили создание гарантированной схемы ядерного реактора, они сконцентрировали свои усилия на нахождении такой системы,

для которой выполняется условие  $\Phi_2^R > \Phi_2^1$ . После проведения экспериментов с гомогенной смесью  $\text{H}_2\text{O}$  и естественного урана и гетерогенными сборками естественного урана и парафина они сделали вывод, что в этих системах условие  $\Phi_2^R > \Phi_2^1$  нельзя выполнить и поэтому мала вероятность создать работающий реактор с естественным ураном и водородсодержащим замедлителем. (Мы знаем сегодня, что это заключение было правильным. Однако если повысить содержание  $^{235}\text{U}$  в естественном уране с 0,7 до 0,9%, то в гетерогенной системе можно осуществить самоподдерживающуюся цепную реакцию.)

Последующие эксперименты французские ученые проводили с естественным ураном и  $\text{D}_2\text{O}$  и установили, что хотя дейтерий не является таким хорошим замедлителем, как водород, его сечение поглощения тепловых нейтронов настолько мало (по сравнению с сечением поглощения водорода, равным 0,33 *барн*), что в такой системе  $k_\infty$  должно быть больше единицы. В декабре 1940 г. эксперименты в Англии (куда после оккупации Парижа Германией было вывезено все оборудование лаборатории) показали, что  $\Phi_2^R > \Phi_2^1$  для по крайней мере двух различных концентраций естественного урана, гомогенно размешанного с  $\text{D}_2\text{O}$ . Грубая оценка величин, входящих в уравнение (8.83), т. е.  $\Sigma_{a2}^R$ ,  $\Sigma_{a2}^c$  и  $\rho$ , а также измерение потока нейтронов  $\Phi_2^c$  (которое было проведено в предположении  $J_2(R_0) = 0$ ) дали численные значения  $k_\infty$ , очень близкие к тем, которые получены сегодня. Эксперименты в декабре 1940 г. были первым доказательством того, что осуществление самоподдерживающейся цепной реакции возможно (хотя в то время получение достаточного количества тяжелой воды было неразрешимой задачей).

**Экспоненциальный эксперимент Ферми.** В то же время в США под руководством Энрико Ферми группа ученых, работая над проблемой создания ядерного реактора, пришла также к заключению, что естественный уран с легководным замедлителем не может обеспечить самоподдерживающуюся цепную реакцию. Однако, в отличие от французских ученых, основное внимание было сосредоточено не на тяжеловодном, а на графитовом реакторе. Важно отметить, что отказ от легководного замедлителя был сделан *не* на основе каких-либо измерений в легководных системах, а исключительно на гениальной интуиции Ферми. Его решение использовать в качестве замедлителя графит, а не тяжелую воду основывалось на значительно большей доступности графита\*.

В начале 1941 г., прежде чем результаты французских экспериментов были получены в США, Ферми рассмотрел методы, с помощью которых он собирался измерять  $k_\infty$  в своих графитовых сборках. Его первой идеей было создание нескольких различныхборок, одинаковых по композиции, но различных по размерам. Затем он предпо-

\* Последующие события подтверждали правильность такого решения. Первый графитовый реактор достиг критичности в декабре 1942 г., и прежде чем был создан тяжеловодный реактор, промышленные графитовые реакторы произвели большое количество плутония.

лагал измерять коэффициент размножения этих сборок  $M$  (см. § 4.9) в зависимости от  $B^2$ . Для  $k_\infty < 1$  кривая зависимости  $M$  от  $B^2$  должна была асимптотически приближаться к величине  $1/(1 - k_\infty)$ . С другой стороны, для  $k_\infty > 1$  значение  $M$  должно беспрестанно возрастать с увеличением  $B^2$ , т. е. с увеличением размеров сборки (рис. 8.3).

При использовании этого метода столкнулись с целым рядом трудностей. Прежде всего для измерений необходимо было создать несколько различныхборок. Кроме того, как и у французских ученых, невозможно было провести абсолютное измерение  $k_\infty$  (действительно, если бы можно было получить прямое измерение коэффициента  $M$ , то это позволило бы измерить и значение  $k_\infty$  меньше единицы).

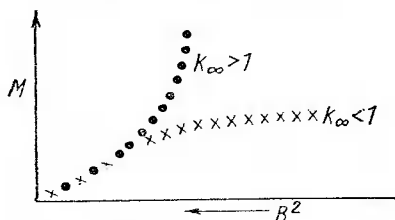


Рис. 8.3. Зависимость  $M$  от  $B^2$

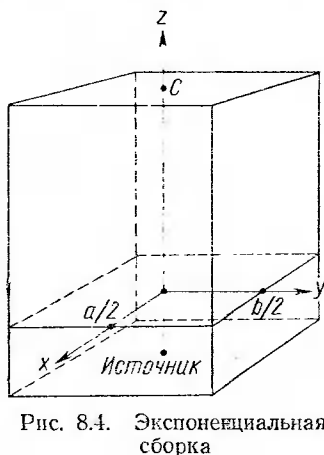


Рис. 8.4. Экспоненциальная сборка

Весной 1941 г. Ферми предложил *экспоненциальный эксперимент*. Он во многом напоминал эксперимент французских ученых, однако для изучения  $k_\infty$  требовалась только одна-единственная сборка. Преимущество метода состояло также и в значительно более простом способе получения численных значений  $k_\infty$ , так как число параметров, которые необходимо для этого знать, было существенно меньше, чем во французском эксперименте [см. уравнение (8.83)]. Неизвестно, способствовали ли французские работы возникновению идеи экспоненциальной сборки, однако хорошо известно, что Ферми тщательно изучал их в период между тем временем, когда он предложил описанный выше метод, и временем создания экспоненциальной сборки.

Экспоненциальный эксперимент аналогичен измерениям диффузионной длины, описанным в § 2.11, за исключением того, что часть активной зоны реактора фактически становится средой, в которой происходит аксиальное перемещение тепловых нейтронов. В настоящее время источником нейтронов может служить так называемая тепловая колонна реактора; в те дни, конечно, никаких реакторов не было, как не было никаких других источников тепловых нейтронов. По этой причине приходилось использовать источник быстрых нейтронов, такой, как  $Ra - \alpha - Be$ -источник. Однако этот источник помещался в блок графита, так что активная зона облучалась тепловыми нейтронами (рис. 8.4).

Вновь для анализа этого эксперимента можно использовать двухгрупповую теорию

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1 + \Sigma_{R1} \phi_1 = \nu \Sigma_f \phi_2; \quad (8.85a)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2 + \Sigma_{a2} \phi_2 = \Sigma_{12} \phi_1 + Q_0 \cos \alpha x \cos \beta y \delta(z), \quad (8.85b)$$

где

$$\alpha = \pi/2 a' \quad (8.86a)$$

и

$$\beta = \pi/2 b'. \quad (8.86b)$$

Уравнения (8.85) выведены в предположении, что нейтроны источника не только полностью замедляются до тепловых энергий, прежде чем достичь активной зоны, но и устанавливается *основная гармоника* их распределения. Это предположение аналогично тому, которое делалось при анализе измерений диффузионной длины. Единственное различие состоит в том, что из-за наличия делящегося материала в экспоненциальной сборке необходимо использовать (по крайней мере) двухгрупповую теорию.

Если поток нейтронов представить в виде

$$\phi_i(x, y, z) = Z_i(z) \cos \alpha x \cos \beta y, \quad i = 1, 2, \quad (8.87)$$

то уравнения (8.85a) и (8.85b) приводятся к следующим:

$$D_1 \left( \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Z_1(z) + \Sigma_{R1} Z_1(z) = \nu \Sigma_f Z_2(z); \quad (8.88a)$$

$$D_2 \left( \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) Z_2(z) + \Sigma_{12} Z_2(z) = \Sigma_{12} Z_1(z) + Q_0 \delta(z). \quad (8.88b)$$

Для наших целей не обязательно иметь полное решение этих уравнений. Нас будет интересовать только *экспоненциальное* ослабление потока нейтронов в направлении оси  $z$  внутри и на верхнем крае активной зоны. Поэтому мы будем рассматривать лишь часть решения, описывающую зависимость от переменной  $z$  в следующем виде:

$$Z_1(z) = K_1 \operatorname{sh} \gamma (c' - z); \quad (8.89a)$$

$$Z_2(z) = K_2 \operatorname{sh} \gamma (c' - z), \quad (8.89b)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — константы, которые должны быть определены. Такая зависимость потока от переменной  $z$  удовлетворяет условиям  $Z_1(c') = Z_2(c') = 0^*$ . Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \operatorname{sh} \gamma (c' - z) = \gamma^2 \operatorname{sh} \gamma (c' - z), \quad (8.90)$$

\* Если бы сборка была критической, то решение уравнений (8.85) следовало бы искать в виде комбинации экспонент не с действительными (т. е.  $\sin$ ), а с мнимыми (т. е.  $\operatorname{sh}$ ) аргументами.

то уравнения (8.89) приводятся к виду

$$[D_1 (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \Sigma_{R1}] K_1 - \nu \Sigma_f K_2 = 0; \quad (8.91a)$$

$$[D_2 (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \Sigma_{a2}] K_2 - \Sigma_{12} K_1 = 0 \quad (8.91b)$$

(член источника в уравнении (8.91b) опущен, так как мы ищем решение вдали от нижнего края активной зоны, где находится источник).

Система однородных уравнений (8.91) имеет решение только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов уравнений, обращается в нуль, т. е.

$$[D_1 (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \Sigma_{R1}] [D_2 (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \Sigma_{a2}] - \nu \Sigma_f \Sigma_{12} = 0. \quad (8.92)$$

Деля это уравнение на  $\Sigma_{a2} \Sigma_{R1}$  и вводя определения

$$D_1 / \Sigma_{R1} = L_1^2; \quad (8.93a)$$

$$D_2 / \Sigma_{a2} = L_2^2; \quad (8.93b)$$

$$(\nu \Sigma_{f2} + \Sigma_{12}) / \Sigma_{a2} \Sigma_{R2} = \eta / \rho = k_{\infty}; \quad (8.93b)$$

получаем

$$k_{\infty} = [1 + L_1^2 (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)] [1 + L_2^2 (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)]. \quad (8.94)$$

Таким образом, если значение  $\gamma$  известно, то из уравнения (8.94) можно определить  $k_{\infty}$  [диффузионные длины предполагаются известными, а лапласианы  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  определяются через геометрические размеры из уравнений (8.86a) и (8.86b)].

Значение  $\gamma$  определяется из аксиального распределения потока тепловых нейтронов (измеренного, например, методом активации фольг, размещенных вдоль оси  $z$  активной зоны сборки), которое подставляется затем в уравнение (8.89b). Термин *экспоненциальная сборка* связан с тем, что для  $z \ll c'$  (т. е. не слишком близко к верхнему краю сборки)

$$\begin{aligned} \text{sh } \gamma (c' - z) &= \frac{1}{2} [\exp(\gamma (c' - z)) - \exp(-\gamma (c' - z))] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \exp(\gamma (c' - z)) = C \exp(-\gamma z), \end{aligned} \quad (8.95)$$

где  $C$  — константа.

Таким образом, в определенной области сборки, не слишком близко к ее границам, величина  $\gamma$  представляет собой просто наклон аксиального распределения потока нейтронов в полулогарифмической шкале.

Приведенный выше анализ можно усовершенствовать, например вводя в уравнение (8.88) коэффициент размножения на быстрых нейтронах  $\epsilon$ . Нетрудно показать, что это приведет к тому, что к выражению для  $k_{\infty}$ , определенному уравнением (8.93b), добавится член

$k_{\infty}^{(1)}$ , соответствующий вкладу в размножение деления на быстрых нейтронах.

Строгий математический анализ этого эксперимента можно найти также в ряде более фундаментальных книг по реакторной физике. Однако приведенный анализ ценен не только с точки зрения лучшего физического понимания задачи, но он представляет и чисто практический интерес, поскольку эксперименты такого типа широко ставятся и в настоящее время.

### § 8.8. ЭФФЕКТИВНАЯ ДОЛЯ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ

В гл. 4 мы отмечали, что энергетический спектр мгновенных нейтронов деления значительно более жесткий, чем запаздывающих нейтронов. Следовательно, можно ожидать, что эффект запаздывающих нейтронов будет отличаться от эффекта мгновенных. Это потребует некоторой модификации полученных в гл. 4 результатов. Рассмотрим нестационарные многогрупповые уравнения, которые получаются, если к уравнению (8.14) добавить член  $(1/u) (\partial \phi / \partial t)$ . Очевидно, что множитель  $1/u$  будет входить в уравнения усредненным по  $k$ -й группе:

$$\frac{1}{v_k} = \frac{\int_{E_{k+1}}^{E_k} dE (1/u) \phi(\mathbf{r}, E)}{\int_{E_{k+1}}^{E_k} dE \phi(\mathbf{r}, E)}. \quad (8.96)$$

В результате в многогрупповых уравнениях появляется дополнительный член  $(1/v_k) (\partial / \partial t) \phi_k(\mathbf{r}, t)$ .

Для изучения эффекта различного энергетического распределения запаздывающих нейтронов необходимо рассмотреть по крайней мере три энергетических группы — тепловую, надтепловую, содержащую источник запаздывающих нейтронов, и быструю, содержащую источник мгновенных нейтронов. Кроме того, необходимо, конечно, рассматривать и предшественники запаздывающих нейтронов. Тогда уравнения кинетики с одним предшественником запаздывающих нейтронов, плотность которого обозначена  $C(\mathbf{r}, t)$ , и тремя энергетическими группами имеют следующий вид\*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_3} \frac{\partial}{\partial t} \phi_3(\mathbf{r}, t) - D_3 \nabla^2 \phi_3(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{a3} \phi_3(\mathbf{r}, t) = \\ = \Sigma_{12} \phi_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (8.97a)$$

Как было отмечено, предполагается, что источник запаздывающих нейтронов присутствует только в надтепловой группе, а источник мгновенных — только в быстрой группе. Кроме того, предполагает-

\* Предполагается, что отсутствует замедление нейтронов из группы 1 в группу 3, т. е.  $\Sigma_{13} = 0$ .

ся, что отсутствует деление на быстрых нейтронах. В результате получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2(\mathbf{r}, t) - D^2 \nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{R2} \phi_2(\mathbf{r}, t) = \\ = \Sigma_{12} \phi_1(\mathbf{r}, t) + \lambda C(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (8.97б)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(\mathbf{r}, t) - D_1 \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{R1} \phi_1(\mathbf{r}, t) = \\ = (1 - \beta) v [\Sigma_{f3} \phi_3(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{f2} \phi_2(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned} \quad (8.97в)$$

Наконец, уравнение для концентрации предшественника имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} C(\mathbf{r}, t) = -\lambda C(\mathbf{r}, t) + \beta v [\Sigma_{f3} \phi_3(\mathbf{r}, t) + \Sigma_{f2} \phi_2(\mathbf{r}, t)]. \quad (8.97г)$$

Предположим, что вклад в решение дают только наименьшие гармоники потока и что можно  $\nabla^2$  заменить  $-B^2$ . Кроме того, решение уравнений будем искать в виде

$$\phi_k(\mathbf{r}, t) = \bar{\phi}_k \exp(\omega t), \quad k=1, 2, 3; \quad (8.98а)$$

$$C(\mathbf{r}, t) = \bar{C} \exp(\omega t). \quad (8.98б)$$

Подставляя уравнения (8.98) в многогрупповые уравнения (8.97) и  $\nabla^2$  заменяя  $-B^2$ , перепишем многогрупповые уравнения в виде системы алгебраических уравнений:

$$\left( \frac{\omega}{v_3} + D_3 B^2 + \Sigma_{f3} \right) \bar{\phi}_3 = \Sigma_{23} \bar{\phi}_2; \quad (8.99а)$$

$$\left( \frac{\omega}{v_2} + D_2 B^2 + \Sigma_{R2} \right) \bar{\phi}_2 = \Sigma_{12} \bar{\phi}_1 + \lambda \bar{C}; \quad (8.99б)$$

$$\left( \frac{\omega}{v_1} + D_1 B^2 + \Sigma_{R1} \right) \bar{\phi}_1 = (1 - \beta) v (\Sigma_{f3} \bar{\phi}_3 + \Sigma_{f2} \bar{\phi}_2); \quad (8.99в)$$

$$\omega \bar{C} = -\lambda \bar{C} + \beta v (\Sigma_{f3} \bar{\phi}_3 + \Sigma_{f2} \bar{\phi}_2). \quad (8.99г)$$

Так как  $v_1$  — скорость нейтронов в быстрой группе, то членом  $\omega/v_1$  можно пренебречь и уравнения (8.99) записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} D_1 B^2 + \Sigma_{R1} & -(1 - \beta) v \Sigma_{f2} & -(1 - \beta) v \Sigma_{f3} & 0 \\ -\Sigma_{12} & \frac{\omega}{v_2} + D_2 B^2 + \Sigma_{R2} & 0 & -\lambda \\ 0 & -\Sigma_{23} & \frac{\omega}{v_3} + D_3 B^2 + \Sigma_{R3} & 0 \\ 0 & -\beta v \Sigma_{f2} & -\beta v \Sigma_{f3} & \omega + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \\ \bar{C} \end{pmatrix} = 0. \quad (8.100)$$

Эта система уравнений имеет решение только в том случае, если ее определитель равен нулю. После ряда алгебраических преобразований это условие можно записать в виде

$$(1 + \omega l_2)(1 + \omega l_3) - (1 - \beta)k_2(1 + \omega l_3) - (1 - \beta)k_3 = \\ = \frac{\lambda}{\omega + \lambda} \left[ \beta k_3 \frac{1 + L_1^2 B^2}{\rho_1} + (1 + \omega l_3) \beta k_2 \frac{1 + L_1^2 B^2}{\rho_1} \right], \quad (8.101)$$

где введено определение групповых коэффициентов размножения  $k_2$  и  $k_3$ :

$$k_2 = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{\Sigma_{R2}} \rho_1 \frac{1}{(1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2)}; \quad (8.102a)$$

$$k_3 = \frac{\nu \Sigma_{f3}}{\Sigma_{R3}} \rho_1 \rho_2 \frac{1}{(1 + L_1^2 B^2)(1 + L_2^2 B^2)(1 + L_3^2 B^2)}. \quad (8.102б)$$

Кроме того, мы ввели определения групповых вероятностей избежать резонансного поглощения  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и средних времен жизни нейтрона  $l_2$  и  $l_3$ :

$$\rho_1 = \Sigma_{12} / \Sigma_{R1}; \quad (8.103a)$$

$$\rho_2 = \Sigma_{23} / \Sigma_{R2}; \quad (8.103б)$$

$$l_2 = 1 / [v^2 \Sigma_{R2}(1 + L_2^2 B^2)]; \quad (8.104a)$$

$$l_3 = 1 / [v^3 \Sigma_{a3}(1 + L_3^2 B^2)]. \quad (8.104б)$$

Если в уравнении (8.101) положить  $\omega = 0$ , то получим просто трехгрупповое уравнение критичности, включающее в себя групповые коэффициенты размножения  $k_2$  и  $k_3$  [см. для сравнения уравнение (8.58)].

Применим теперь уравнение (8.101) к реакторам на тепловых нейтронах. При выводе этого уравнения мы уже сделали предположение о том, что эффективным временем жизни нейтронов в быстрой группе можно пренебречь. Для реакторов на тепловых нейтронах можно положить также  $k_2 = l_2 = 0$ . Тогда уравнение (8.101) приводится к следующему виду (здесь положим  $k_3 = k$  и  $l_3 = l$ ):

$$(1 + \omega l) - (1 - \beta)k = \frac{\lambda}{\omega + \lambda} \left[ \beta k \frac{1 + L_1^2 B^2}{\rho_1} \right]. \quad (8.105)$$

Это уравнение нужно сравнивать с уравнением (4.26a). Различие между ними состоит в том, что в правой части уравнения (8.105) член  $\beta k$  умножается на множитель  $(1 + L_1^2 B^2) / \rho_1$ . Это различие отражает тот факт, что запаздывающие нейтроны появляются в реакторе с энергией меньшей, чем энергия мгновенных нейтронов, т. е. в группе 2, а не в группе 1 для нашей простой модели. Таким образом, запаздывающие нейтроны автоматически избегают поглощения

и утечки в группе 1. Удобно определить эффективную долю запаздывающих нейтронов  $\beta_{эф}$  в следующем виде:

$$\beta_{эф} = \beta \frac{(1 + L_1^2 B^2)}{\rho_1}, \quad (8.106)$$

т. е.  $\beta_{эф}$  представляет собой долю запаздывающих нейтронов, умноженную на отношение вероятности того, что мгновенный нейтрон будет поглощен как тепловой, к вероятности того, что запаздывающий нейтрон будет поглощен подобным же образом. Очевидно, что  $\beta_{эф} \geq \beta$ . Простой, но не очень точный метод учета  $\beta_{эф}$  в расчетах кинетики реакторов состоит в том, что  $\beta$  заменяется  $\beta_{эф}$  всюду в уравнениях кинетики.

Уравнения (8.105) и (8.106) нельзя непосредственно использовать в реакторах на быстрых нейтронах, так как в этом случае мы не можем пренебречь величинами  $k_2$  и  $l_2$ . Следовательно, для анализа таких систем необходимо вернуться к уравнению (8.101). Мы все же можем записать это уравнение в виде, аналогичном уравнению (4.26а), пренебрегая членами второго порядка по  $k$  и  $l$  (конкретно, мы полагаем равными нулю произведения  $l_2 l_3$  и  $k_2 l_3$ ). В этом предположении уравнение (8.101) принимает вид

$$\begin{aligned} 1 + \omega (l_2 + l_3) - (1 - \beta) (k_2 + k_3) = \\ = \frac{\lambda}{\omega + \lambda} \beta (k_2 + k_3) \frac{1 + L_1^2 B^2}{\rho_1}. \end{aligned} \quad (8.107)$$

Это уравнение имеет вид уравнения (8.105), где величины  $k$  и  $l$  заменены  $k_2 + k_3$  и  $l_2 + l_3$  соответственно. Основное различие между уравнениями (8.105) и (8.107) — в значениях эффективного времени жизни  $l$  и эффективной доли запаздывающих нейтронов  $\beta_{эф}$ . В реакторах на быстрых нейтронах эффективное время жизни нейтронов значительно меньше, чем в реакторах на тепловых нейтронах. Эффективная доля запаздывающих нейтронов в реакторах на быстрых нейтронах также меньше, чем на тепловых. Все это приводит к тому, что регулирование реакторов на быстрых нейтронах гораздо труднее, чем реакторов на тепловых нейтронах.

## Задачи

8.1. Показать, что включение в уравнение (8.25) членов с  $k' \neq k$  потребует введения диффузионной матрицы. Вывести выражение для этой диффузионной матрицы.

8.2. Вычислить  $\chi_1$  и  $\chi_2$  [уравнение (8.36)] для  $^{235}\text{U}$  с  $E_2 = 1$  эв и показать, что  $\chi_2 \ll \chi_1$ .

8.3. Групповые константы для двухгрупповой модели реактора PWR (реактор с водой под давлением) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \Sigma_{R1} = 0,02 \text{ см}^{-1}; \quad \nu \Sigma_{f1} = 0,006 \text{ см}^{-1}; \quad D_1 = 1,5 \text{ см}; \\ D_2 = 0,5 \text{ см}; \quad \nu \Sigma_{f2} = 0,13 \text{ см}^{-1}; \quad \Sigma_{12} = 0,01 \text{ см}^{-1}; \end{aligned}$$

Предположим, что реактор представляет собой бесконечную пластину толщиной 100 см. Какое сечение поглощения  $\Sigma_{a2}$  требуется для того, чтобы реактор был критическим?

8.4. Для реактора в задаче 8.3 определить вероятности избежать утечки для тепловых и быстрых нейтронов.

8.5. Для реактора в задаче 8.3 определить вероятность избежать резонансного поглощения.

8.6. Для реактора в задаче 8.3 определить коэффициент размножения на быстрых нейтронах.

8.7. Для реактора в задаче 8.3 вычислить эффективные одnogрупповые константы.

8.8. Предположим, что критический голый реактор, описанный в задаче 8.3, размещается между двумя пластинами, каждая из которых имеет толщину 100 см и следующие групповые константы:

$$\begin{aligned}\Sigma_{R1}^R &= 0,03 \text{ см}^{-1}; & \nu\Sigma_{f1} &= \nu\Sigma_{f2} = 0; & D_1^R &= 1,3 \text{ см}; \\ D_2^R &= 0,4 \text{ см}; & \Sigma_{12}^R &= 0,02 \text{ см}^{-1}; & \Sigma_{a2}^R &= 0,04 \text{ см}^{-1}.\end{aligned}$$

Определить возрастание реактивности.

8.9. Какое количество поглотителя необходимо ввести в реактор с отражателем, описанный в задаче 8.8, чтобы сделать его критическим?

## Список литературы

1. Wachspress E. Iterative Solution of Elliptic Systems. N. Y., Prentice-Hall, 1966.
2. Ferziger J., Zweifel P. The Theory of Neutron Slowing Down in Nuclear Reactors. N. Y., Pergamon Press, 1966.

## РАСЧЕТЫ ЗАМЕДЛЕНИЯ

### § 9.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе мы рассмотрели некоторые, очень специальные задачи, касающиеся замедления нейтронов в бесконечной среде. При этом пространственными эффектами пренебрегали. Такое рассмотрение основывалось на предположении, что при определенных условиях пространственные и энергетические переменные потока нейтронов могут быть разделены; в § 8.6 мы видели, что такое разделение переменных справедливо для голого однородного реактора. Можно ожидать, что переменные разделяются и в неоднородных реакторах с отражателями достаточно далеко от границ между различными областями.

Общепринятый метод расчета в этом случае состоит в том, что на основе расчетов для бесконечной системы вычисляются усредненные по зависящему от энергии потоку нейтронов сечения, которые затем используются в многогрупповых методах, описанных в гл. 8, для получения пространственных эффектов. Этот метод, известный как *спектральный метод*, может быть улучшен, если ввести в расчеты геометрический лапласиан\*  $B^2$ . Тогда спектр нейтронов рассчитывается для голого однородного реактора с геометрическим лапласианом, равным материальному лапласиану для этой системы. Используемые в расчетах материальные лапласианы должны быть вычислены для каждой области активной зоны, после чего для каждой области рассчитывается свой спектр нейтронов. Для областей, где топливо отсутствует (например, для отражателя), обычно считают  $B^2 = 0$ .

Методы, применяемые на практике для получения сечений, используемых в многогрупповых расчетах (так называемых *групповых констант*), подробно описаны в этой главе.

В бесконечной системе ток нейтронов  $\mathbf{J}$  и поток нейтронов  $\phi$  не зависят от пространственной переменной. В этом случае член  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  в уравнении (8.14) обращается в нуль, и мы можем записать

$$\Sigma_T(E) \phi(E) = S(E) + \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(E'). \quad (9.1)$$

\* Отметим, что спектр бесконечной системы представляет собой специальный случай, соответствующий  $B^2 = 0$ .

Напомним, что это уравнение выведено непосредственно из уравнения переноса нейтронов без использования закона Фика. Таким образом, оно не содержит приближений диффузионной теории (разумеется, оно также не описывает пространственного переноса нейтронов).

Удобно предположить, что замедление изотропно, т. е.  $\Sigma_s^1(E' \rightarrow E) = 0$ . В этом случае, как мы определили в гл. 8, можно записать зависящее от энергии диффузионное уравнение:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D(E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T(E) \phi(\mathbf{r}, E) = \\ = S(E) + \int_0^\infty dE' \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E'), \end{aligned} \quad (9.2)$$

где  $D(E)$  — коэффициент диффузии:

$$D(E) = 1/3 \Sigma_T(E). \quad (9.3)$$

Интеграл от  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  по  $E$  дает полное сечение рассеяния  $\Sigma_s(E')$ . Таким образом, удобно ввести ядро столкновения  $P(E' \rightarrow E)$ , описывающее распределение конечных энергий тех нейтронов, которые испытывают рассеивающее столкновение при энергии  $E'$ :

$$\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') P(E' \rightarrow E), \quad (9.4)$$

где  $P(E' \rightarrow E)$  должно удовлетворять следующему условию нормировки:

$$\int dE P(E' \rightarrow E) = 1. \quad (9.5)$$

Очевидно, что процесс замедления будет решающим образом зависеть от детальных свойств ядра столкновений  $P(E' \rightarrow E)$ .

## § 9.2. ЯДРО СТОЛКНОВЕНИЯ: УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

В настоящем параграфе рассматривается процесс столкновения нейтрона с ядрами замедлителя. Предполагается, что читатель знаком с классической теорией столкновений, так что основные результаты даются без выводов (при желании выводы можно найти в приложении Д). Для удобства читателя здесь повторяются некоторые определения и результаты, представленные в приложении Д.

Предположим, что нейтрон, масса которого принята равной единице, испытывает упругое столкновение с ядром массой  $A$  (измеренной в массах нейтрона). Очевидно, что  $A \geq 1^*$ .

\* Строго говоря, для столкновений между нейтроном и протоном  $A$  несколько меньше единицы. Однако обычно считают массу  $A$  равной ближайшему целому числу.

Введем следующие определения (рис. 9.1):

$E_i$  — начальная энергия нейтрона в лабораторной системе координат;

$E_f$  — конечная энергия нейтрона в лабораторной системе координат;

$\mu_0$  — косинус угла рассеяния в лабораторной системе координат;

$\mu_c$  — косинус угла рассеяния в системе центра инерции.

В лабораторной системе координат, используемой обычно в реакторных расчетах, ядро мишени до столкновения с нейтроном

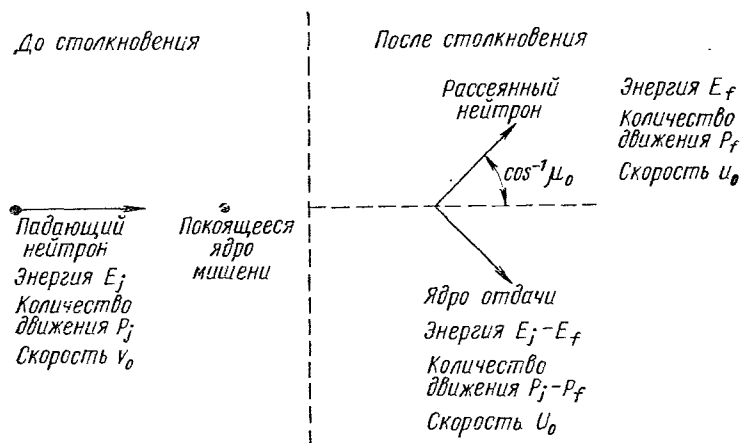


Рис. 9.1. Схема упругого рассеяния в лабораторной системе координат

находится в покое. Система центра инерции, которая обычно используется для теоретического анализа процесса столкновений, определяется из требования, чтобы полное количество движения системы нейтрон + ядро мишени равнялось нулю.

На основе законов сохранения энергии и количества движения в приложении Д получены следующие результаты:

$$E_i \geq E_f \geq \alpha E_i; \quad (9.6)$$

$$\alpha = (A - 1)^2 / (A + 1)^2, \quad (9.7)$$

из которых следует, что энергия нейтрона после столкновения меньше, чем до столкновения, а максимальная потеря энергии равна  $(1 - \alpha) E_i$ . Физически, поскольку до столкновения ядро мишени находилось в покое, энергия может быть передана только от нейтрона ядру мишени. Таким образом, нейтрон должен терять энергию при столкновениях, т. е.  $E_f \leq E_i^*$ . Из закона сохранения количества движения следует, что максимальная потеря энергии нейтроном равна  $(1 - \alpha) E_i$ . Для  $A = 1$ , т. е. для водорода,  $\alpha = 0$ , так что

\* Это утверждение остается справедливым только до тех пор, пока энергия ядер замедлителя не сравнивается с энергией нейтронов, т. е.  $E_i \approx kT$  (см. § 9.8).

в действительности нейтрон при столкновении с ядром водорода может потерять всю свою энергию за одно столкновение. С возрастанием  $A$  значение  $\alpha$  также растет, приближаясь к единице, так что максимальная потеря энергии стремится к нулю; по этой причине легкие элементы оказываются лучшими замедлителями, чем тяжелые.

Отношение  $E_f/E_i$  и косинус угла рассеяния  $\mu_0$  (или  $\mu_c$ ) связаны следующим образом:

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{A^2 + 2A\mu_c + 1}{(A+1)^2} = \frac{\gamma^2 + 2\gamma\mu_c + 1}{(\gamma+1)^2}, \quad (9.8)$$

где

$$\gamma = 1/A. \quad (9.9)$$

(Из уравнения (9.8) следует уравнение (9.6), если положим в нем  $\mu_c = \pm 1$ .) Косинусы углов рассеяния в лабораторной системе координат и системе центра инерции  $\mu_0$  и  $\mu_c$  связаны следующим соотношением:

$$\mu_0 = \frac{\mu_c + \gamma}{(\gamma^2 + 2\gamma\mu_c + 1)^{1/2}}. \quad (9.10)$$

Удобно ввести новую переменную, *летаргию*, определяемую следующим образом:

$$u = \ln(E_0/E); \quad E = E_0 \exp(-u), \quad (9.11)$$

где  $E_0$  — некоторая максимальная энергия. Примем ее равной 10 Мэв, так что  $u = 0$  при  $E = 10$  Мэв. Такой выбор предполагает отсутствие нейтронов деления с энергией, большей 10 Мэв, поэтому отрицательные значения летаргии никогда не будут появляться. (Отметим, что с *ростом* энергии летаргия *убывает*.)

В терминах летаргии можно записать

$$E_f/E_i = \exp(u_i - u_f) = \exp(-\Delta u), \quad (9.12a)$$

где

$$\Delta u = u_f - u_i \quad (9.12b)$$

представляет собой изменение летаргии при столкновении. Из уравнений (9.8) и (9.10) можно вывести выражение для  $\mu_c(\Delta u)$  и  $\mu_0(\Delta u)$ :

$$\mu_c(\Delta u) = 1 - \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma} [1 - \exp(-\Delta u)] \quad (9.13a)$$

и

$$\mu_0(\Delta u) = \frac{1}{2\gamma} [(1+\gamma) \exp(-\Delta u/2) - (1-\gamma) \exp(\Delta u/2)]. \quad (9.13b)$$

Во многих практических применениях справедливо предположение об изотропности рассеяния в системе центра инерции\*. Предположим, что величина  $P(\mu_c) d\mu_c$  определена как вероятность того,

\* Неизотропное рассеяние рассматривается, например, в книге [1].

что нейтрон будет рассеиваться под таким углом, косинус которого лежит в интервале между  $\mu_c$  и  $\mu_c + d\mu_c$ . Тогда для изотропного рассеяния все значения косинуса равновероятны, т. е.

$$P(\mu_c) = \text{const.} \quad (9.14)$$

Константу можно выбрать таким образом, чтобы вероятность  $P(\mu_c)$  удовлетворяла условию нормировки

$$\int_{-1}^1 P(\mu_c) d\mu_c = 1. \quad (9.15a)$$

Очевидно, что

$$P(\mu_c) = 1/2. \quad (9.15b)$$

Теперь можно вычислить вероятность  $P(\Delta u)$   $\Delta u$  того, что изменение летаргии при столкновении будет лежать в интервале между  $\Delta u$  и  $u + \Delta u$ . Так как  $P(\Delta u)$  и  $P(\mu_c)$  описывают одну и ту же величину через разные переменные, связанные между собой определенным образом, то должно выполняться следующее соотношение\*:

$$P(\Delta u) |d(\Delta u)| = P(\mu_c) |d\mu_c|, \quad (9.16)$$

где, согласно уравнению (9.13a),

$$\frac{d\mu_c}{d(\Delta u)} = \frac{(1+\gamma)^2 \exp(-\Delta u)}{2\gamma}. \quad (9.17a)$$

Таким образом, используя величину  $\gamma = 1/A$  и уравнение (9.7), запишем

$$P(\Delta u) = \exp(-\Delta u)/(1-\alpha). \quad (9.17b)$$

Отметим, что соотношение (9.6) можно переписать в терминах летаргии:

$$0 \leq \Delta u \leq \ln(1/\alpha). \quad (9.18)$$

(При столкновении летаргия всегда возрастает. Уравнение (9.17b) дает вероятность того, что летаргия возрастает на данную величину  $\Delta u$ .) Отметим, что, согласно уравнению (9.18),  $P(\Delta u) = 0$  для  $\Delta u > \ln(1/\alpha)$ , так что уравнение (9.17) применимо только для  $0 \leq \Delta u \leq \ln(1/\alpha)$ . На рис. 9.2 приводится зависимость  $P(\Delta u)$ .

Нетрудно показать, что

$$\int_0^{\ln(1/\alpha)} P(\Delta u) d(\Delta u) = 1. \quad (9.19)$$

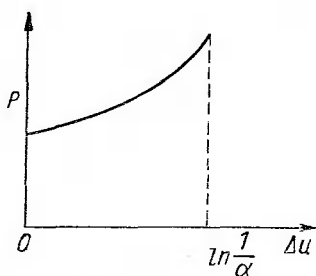


Рис. 9.2. Распределение измененной летаргии при упругом столкновении

\* Две части уравнения (9.16) описывают одну и ту же вероятность, которая не может измениться только из-за того, что преобразуется независимая переменная. Знаки абсолютных значений выражают тот факт, что вероятности должны быть неотрицательными.

Можно также рассчитать величину  $P(E_i \rightarrow E_f)$ , например из уравнения (9.17), используя соотношение

$$P(E_i \rightarrow E_f) = P(\Delta u) \left| \frac{d(\Delta u)}{dE_f} \right|. \quad (9.20)$$

Так как

$$E_f = E_i \exp(-\Delta u), \quad (9.21a)$$

находим, что

$$P(E_i \rightarrow E_f) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha) E_i} & E_i \geq E_f > \alpha E_i; \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (9.21b)$$

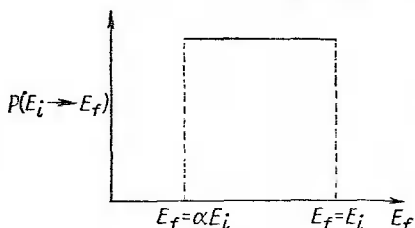


Рис. 9.3. Распределение конечных энергий нейтрона при изотропном упругом рассеивающем столкновении

Отметим, что при столкновении конечная энергия нейтрона изменяется с равной вероятностью в интервале  $E_i \geq E_f > \alpha E_i$  (рис. 9.3). Это является следствием предположения об изотропности рассеяния в системе центра инерции. Для неизотропного рассеяния распределение конечных энергий нейтрона будет другим.

Приведенные выше функции распределения можно использовать для расчета различных средних величин. Например, средний косинус угла рассеяния в системе центра инерции есть просто

$$\bar{\mu}_c = \int_{-1}^1 \mu_c P(\mu_c) d\mu_c = 0. \quad (9.22)$$

В лабораторной системе рассеяние *неизотропно*. Таким образом,

$$\bar{\mu}_0 = \int_{-1}^1 \mu_0(\mu_c) P(\mu_c) d\mu_c, \quad (9.23)$$

где  $\mu_0(\mu_c)$  дается уравнением (9.10). Кроме того, используя уравнение (9.13б) для  $\mu_0(\Delta u)$  и (9.17б) для  $P(\Delta u)$ , можно записать

$$\bar{\mu}_0 = \int_0^{\ln(1/\alpha)} \mu_0(\Delta u) P(\Delta u) d(\Delta u). \quad (9.24)$$

В любом случае легко получить

$$\bar{\mu}_0 = 2\gamma/3 = 2/3A. \quad (9.25)$$

Для больших  $A$ , т. е. для тяжелых ядер замедлителя,  $\mu_0 \rightarrow 0$ ; таким образом, рассеяние становится изотропным в лабораторной системе координат. С другой стороны, для водорода  $A = 1$  и

$\mu_0 = 2/3$ , что означает высокую степень анизотропии рассеяния (резко выделено направление вперед). Когда  $A \rightarrow \infty$ , лабораторная система и система центра инерции совпадают. Это объясняет, почему рассеяние в лабораторной системе стремится стать изотропным.

Представляет также интерес среднее изменение энергии при столкновении. На практике чаще используется среднее изменение логарифма, обычно обозначаемое  $\xi$ :

$$\xi = \int_0^{\ln(1/\alpha)} \Delta u P(\Delta u) d(\Delta u) = 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha. \quad (9.26)$$

Формулу, справедливую для больших  $A$ , можно получить следующим образом:

$$\ln \alpha = \ln \left[ \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2 \right] = 2 [\ln(1-\gamma) - \ln(1+\gamma)]. \quad (9.27)$$

Раскладывая в ряд Тейлора

$$\ln(1 \pm \epsilon) = \pm \epsilon - \epsilon^2/2 + \dots, \quad (9.28)$$

получаем

$$\ln \alpha = 4\gamma \quad (9.29)$$

или

$$\xi = 2\gamma + O(\gamma^2). \quad (9.30a)$$

Несколько более точная формула имеет вид

$$\xi \approx \frac{2}{A+2/3}. \quad (9.30b)$$

### § 9.3. ЯДРО СТОЛКНОВЕНИЯ: НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

При обсуждении упругого рассеяния мы рассмотрели те процессы, при которых нейтрон передает часть своей энергии ядру мишени, увеличивая тем самым его кинетическую энергию. Если нейтрон обладает достаточной энергией, то он может также возбудить внутреннее состояние ядра мишени.

Обычно предполагается, что полная энергия нейтронов и протонов внутри ядра принимает наименьшее возможное значение\*; это называется *основным состоянием*. Конечно, ядро может существовать и в состояниях, при которых нейтроны и протоны обладают большей полной энергией. Такие состояния называются *возбужденными состояниями* ядра.

Возможные энергии возбужденных состояний ядра принимают дискретные значения, зависящие от конкретных типов ядер. В табл. 9.1 приведены энергии первых двух возбужденных состояний различных изотопов. Из таблицы видно, что  $^{12}\text{C}$ , например, помимо основного состояния может находиться в возбужденных

\* Здесь речь идет о внутренней энергии ядра.

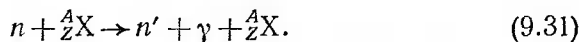
Энергия первых двух возбужденных состояний различных ядер

Ядро	Энергия первого возбужденного состояния, Мэв	Энергия второго возбужденного состояния, Мэв	Ядро	Энергия первого возбужденного состояния, Мэв	Энергия второго возбужденного состояния, Мэв
$^{12}\text{C}$	4,43	7,65	$^{27}\text{Al}$	0,84	1,01
$^{16}\text{O}$	6,06	6,14	$^{56}\text{Fe}$	0,84	2,1
$^{23}\text{Na}$	0,45	2,0	$^{238}\text{U}$	0,045	0,145

состояниях с энергиями, превышающими энергию основного состояния на 4,43 и 7,65 Мэв. Разумеется,  $^{12}\text{C}$  имеет и много других возбужденных состояний с более высокими энергиями. В табл. 9.1 представлены только первые два из них.

На рис. 9.4 приведены некоторые более высокие возбужденные состояния ядра  $^{18}\text{O}$ . Из рисунка видно одно из наиболее важных свойств возбужденных состояний ядра: расстояние между более высокими возбужденными состояниями меньше, чем между первыми двумя возбужденными состояниями. Энергии возбужденных состояний настолько велики, что ядра существующих в природе изотопов находятся в основном состоянии. Если кинетическая энергия нейтрона выше, чем разность энергии между основным и первым возбужденным состояниями ядра, то нейтрон может перевести ядро в возбужденное состояние. Этот процесс известен как *неупругое рассеяние* (рис. 9.5).

После рассеяния ядро возвращается в свое основное состояние, испуская высокоэнергетический фотон ( $\gamma$ -излучение). Процесс можно представить следующим образом:



Очевидно, что неупругие процессы могут происходить только с нейтронами высоких энергий. Даже для того, чтобы испытать неупругое рассеяние на  $^{238}\text{U}$ , нейтроны должны иметь энергию не ниже 45 кэв (см. табл. 9.1).

Сечение неупругих процессов можно записать в таком же виде, который мы использовали для упругого рассеяния (9.4):

$$\Sigma_I (E_i \rightarrow E_f) = \Sigma_I (E_i) P_I (E_i \rightarrow E_f). \quad (9.32)$$

Микроскопическое сечение неупругого рассеяния  $\sigma_I (E_i)$ , как обычно, находят делением  $\Sigma_I$  на ядерную плотность. Очевидно, что  $\sigma_I (E_i)$  должно отражать дискретность возбужденных состояний ядра и иметь пороговые значения. Таким образом,  $\sigma_I (E_i)$  будет равно нулю для  $E_i$  меньше, чем энергия первого возбужденного со-

стояния. С ростом энергии нейтронов  $\sigma_I(E_i)$  должно возрасти, так как при этом легче возбуждается первое состояние и повышается вероятность возбуждения других, более высоких состояний. На

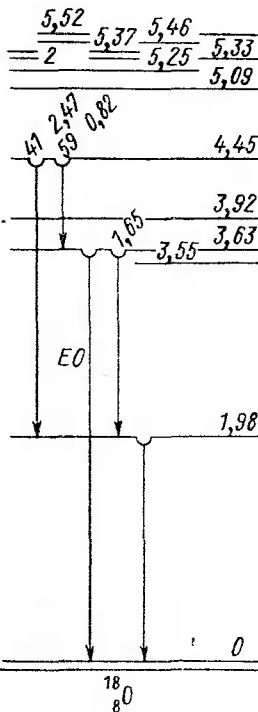
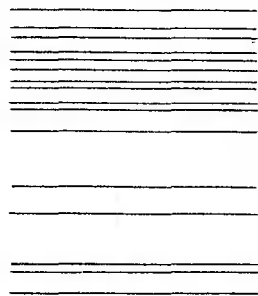


Рис. 9.4. Возбужденные уровни  $^{18}\text{O}$

рис. 9.6 приводятся сечения неупругого рассеяния для некоторых элементов.

Множитель  $P_I(E_i \rightarrow E_f)$  в уравнении (9.32) представляет собой распределение конечных энергий нейтронов с начальной энергией  $E_i$ , претерпевших неупругое рассеяние. Разумеется,  $P_I(E_i \rightarrow E_f)$  должно быть нормировано на единицу:

$$\int_0^{\infty} dE_f P_I(E_i \rightarrow E_f) = 1. \quad (9.33)$$

Обычно не существует аналитического выражения для  $P_I(E_i \rightarrow E_f)$ , как в случае упругого рассеяния, поэтому приходится иметь дело с численными данными. Рассмотрим, однако, энергию падающего нейтрона  $E_i$ , много большую энергии первого возбужденного состояния ядра [2]. В этом случае процесс неупругого рассеяния представим в виде двух этапов. Сначала нейтрон, захватываясь ядром, образует сильно возбужденное ядро с массой  $A + 1$ , называемое *составным ядром*. Затем составное ядро распадается, испуская нейтрон подобно тому, как происходит испарение жидкости. В этой модели составное ядро

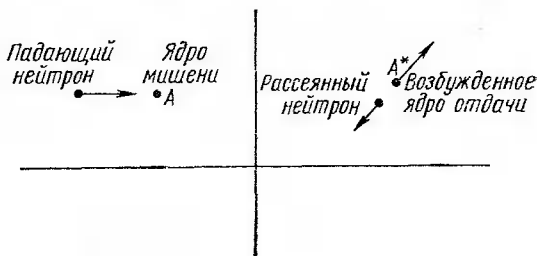


Рис. 9.5. Схема неупругого столкновения

описывается *эффективной температурой*

$$k_B T_{\text{эф}} \cong \theta = 2\sqrt{E_i}/B \text{ Мэв}, \quad (9.34a)$$

где

$$B \approx 0,62 \sqrt{A}, \quad (9.34b)$$

$A$  — массовое число ядра мишени.

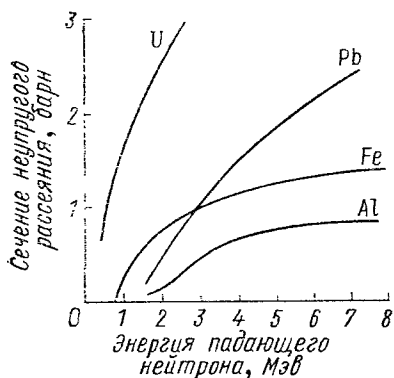


Рис. 9.6. Сечения неупругого рассеяния для некоторых реакторных материалов

грубое приближение\*. Уравнения (9.34) обеспечивают лишь оценку порядка величины  $P_I(E_i \rightarrow E_f)$  для неупругих процессов.

Уравнение (9.34в) можно легко привести к соответствующему выражению для случая, когда в качестве переменной используется летаргия:

$$\begin{aligned}
 P_I(u_i \rightarrow u_f) &= P_I(E_i \rightarrow E_f) \left| \frac{dE_f}{du_f} \right| = \frac{E_f^2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{E_f}{\theta}\right) = \\
 &= \frac{E_0^2}{\theta^2} \exp(-2u_f) \exp\left[-\frac{E_0}{\theta} \exp(-u_f)\right]. \quad (9.35)
 \end{aligned}$$

Обычно в уравнениях (9.1) и (9.3) в величину  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  должны быть включены сечения и упругих, и неупругих процессов.

#### § 9.4. ВОЗРАСТНАЯ ТЕОРИЯ ФЕРМИ

При выводе возрастных уравнений Ферми удобно использовать переменную летаргии, а не энергии. В § 9.2 и 9.3 уже рассматривался переход от энергии к летаргии в распределениях рассеянных (упруго и неупруго) нейтронов. Переход от энергии к летаргии в потоке нейтронов производится обычным образом:

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \phi(\mathbf{r}, u) |du/dE|, \quad (9.36a)$$

или, используя соотношение (9.11),

$$\phi(\mathbf{r}, E) = (1/E) \phi(\mathbf{r}, u). \quad (9.36b)$$

\* По этой причине данная модель в реакторных расчетах может применяться только для топливных материалов (Pu, U), для которых энергия первого возбужденного состояния сравнительно мала (см. табл. 9.1). Однако именно эти материалы, наряду со сталью, обладают наибольшим сечением неупругого рассеяния в реакторе. Для других материалов, таких, как сталь, оценки сечения неупругого рассеяния проводятся с помощью комбинаций экспериментальных данных и более сложных теоретических моделей.

Можно получить диффузионное уравнение в переменных летаргии, умножая уравнение (9.3) на  $|dE/du|$ :

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, E) \left| \frac{dE}{du} \right| + \Sigma_T \phi(\mathbf{r}, E) \left| \frac{dE}{du} \right| = S(E) \left| \frac{dE}{du} \right| + \int_0^\infty dE' \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \left| \frac{dE}{du} \right| \phi(\mathbf{r}, E'). \quad (9.37)$$

Проведем далее замену переменной при интегрировании по  $E'$ :

$$dE' = \left| \frac{dE'}{du'} \right| du'. \quad (9.38)$$

Используя затем результаты двух предыдущих параграфов

$$\Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \left| \frac{dE}{du} \right| = \Sigma_s^0(u' \rightarrow u) = \Sigma_s(u') \cdot P_s(u' \rightarrow u), \quad (9.39)$$

а также уравнение (9.36a) и соотношение

$$S(E) \left| \frac{dE}{du} \right| = S(u), \quad (9.40)$$

можно привести уравнение (9.37) к следующему виду:

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, u) + \Sigma_T \phi(\mathbf{r}, u) = S(u) + \int_0^\infty du' \Sigma_s^0(u' \rightarrow u) \phi(\mathbf{r}, u'). \quad (9.41)$$

При преобразовании интегрального члена в уравнении (9.37) в интегральный член уравнения (9.41) был использован тот факт, что поток нейтронов  $\phi(\mathbf{r}, E')$  обращается в нуль для  $E' > E_0$ .

Рассмотрим интегральный член в уравнении (9.41). Предположим, что сечение рассеяния  $\Sigma_s^0(u' \rightarrow u)$  представляет собой в точности сумму сечений упругого и неупругого рассеяний. Так как в реакторе могут находиться различные типы атомов, то сечение рассеяния  $\Sigma_s^0(u' \rightarrow u)$  можно представить в виде суммы членов вида (9.176) с разными значениями  $A$ . Обозначим разные типы атомов индексом  $j$ . Тогда интегральный член в уравнении (9.41) можно записать в виде

$$\int_0^\infty du' \Sigma_s^0(u' \rightarrow u) \phi(u') = \sum_j \int_{u - \ln(1/\alpha_j)}^u \frac{\exp[-(u-u')]}{1-\alpha_j} \Sigma_{sj}(u') \phi(u') du'. \quad (9.42)$$

Если уравнение (9.42) подставить в (9.41), то получим интегродифференциальное уравнение, решить которое не всегда просто. Предположим, однако, что рассматривается только достаточно

тяжелый замедлитель, например графит. В этом случае изменение летаргии  $\Delta u = \ln(1/\alpha_j)$  мало, и произведение  $\Sigma_{sj}(u') \phi(u')$  можно разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь только первыми двумя членами\*:

$$\Sigma_{sj}(u') \phi(u') = \Sigma_{sj}(u) \phi(u) - (u-u') \frac{\partial}{\partial u} [\Sigma_{sj}(u) \phi(u)] + \dots \quad (9.43)$$

Подставляя этот результат в уравнение (9.42), получаем

$$\int_0^{\infty} du' \Sigma_s^0(u' \rightarrow u) \phi(u') = \sum_j \left\{ \Sigma_{sj}(u) \phi(u) \int_{u-\ln(1/\alpha_j)}^u \frac{\exp[-(u-u')]}{1-\alpha_j} du' - \int_{u-\ln(1/\alpha_j)}^u (u-u') \frac{\exp[-(u-u')]}{1-\alpha_j} du' \frac{\partial}{\partial u} [\Sigma_{sj}(u) \phi(u)] \right\}. \quad (9.44a)$$

Первый интеграл в этом уравнении нормирован на единицу, в то время как второй представляет собой просто определение среднего изменения летаргии  $\xi_j$  (см. (9.26)). Таким образом, если подставить уравнение (9.44a) в (9.41), можно получить следующее приближенное уравнение для потока нейтронов:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, u) + \Sigma_T \phi(\mathbf{r}, u) &= \\ = \Sigma_s \phi(\mathbf{r}, u) - \xi \frac{\partial}{\partial u} [\Sigma_s \phi(\mathbf{r}, u)] + S(u) \end{aligned} \quad (9.44б)$$

или, отмечая, что  $\Sigma_T - \Sigma_s$  в точности равно  $\Sigma_a$ ,

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}, u) + \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, u) = S(u) - \xi \frac{\partial}{\partial u} [\Sigma_s \phi(\mathbf{r}, u)]. \quad (9.44в)$$

Это уравнение по существу и является *диффузионно-возрастным уравнением Ферми*, хотя первоначально Ферми представил его в несколько ином виде. Уравнение (9.44б) наиболее удобно для численных расчетов. Отметим, что величина  $\xi$ , входящая в это уравнение, усреднена по всем типам атомов, т. е.

$$\xi = \sum_j \frac{\xi_j \Sigma_{sj}}{\Sigma_s}, \quad (9.45a)$$

где, конечно,

$$\Sigma_s = \sum_j \Sigma_{sj}. \quad (9.45б)$$

Интересно как с точки зрения исторической, так и для некоторых практических применений преобразовать уравнение (9.44в) к тому виду, который был получен Ферми. Определим сначала плотность замедления  $q(\mathbf{r}, u)$  таким образом, что  $q(\mathbf{r}, u) d^3r$  пред-

\* Это приближение несправедливо для H и D, поэтому и возрастная теория к ним не применима.

ставляет собой число нейтронов в объеме  $d^3r$  в окрестности точки  $\mathbf{r}$ , замедляющихся в единицу времени за летаргию  $u$ . Плотность замедления удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d^2 q(u'' \rightarrow u')}{du'' du'} = \sum_i \Sigma_{sj}(u'') \phi(u'') \frac{\exp[-(u' - u'')]}{1 - \alpha_j}. \quad (9.46)$$

Начальная летаргия  $u''$  изменяется от  $u$  до  $u - \ln(1/\alpha_j)$ , в то время как конечная  $u'$  — от  $u$  до  $u'' + \ln(1/\alpha_j)$ . Таким образом (рис. 9.7),

$$q(u) = \sum_i \int_{u - \ln(1/\alpha_j)}^u du'' \int_u^{u'' + \ln(1/\alpha_j)} du' \Sigma_{sj}(u'') \phi(u'') \frac{\exp[-(u' - u'')]}{1 - \alpha_j}. \quad (9.47)$$

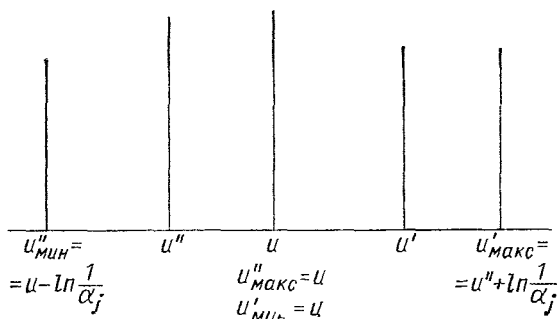


Рис. 9.7. Пределы интегрирования в расчетах плотности замедления

Интегрирование по  $u'$  приводит к следующему результату:

$$q(u) = \sum_i \int_{u - \ln(1/\alpha_j)}^u du'' \Sigma_{sj}(u'') \phi(u'') \frac{\exp[-(u - u'') - \alpha_j]}{1 - \alpha_j}, \quad (9.48)$$

что представляет собой обычное выражение для плотности нейтронов, замедляющихся за летаргию  $u$ , определенную через поток нейтронов с летаргией, превышающей  $u$ . Если разложить  $\Sigma_s(u'') \phi(u'')$  в ряд Тейлора и ограничиться одним членом разложения, то получим приближенное выражение для плотности замедления, используемое в возрастной теории Ферми:

$$q(u) = \xi \Sigma_s \phi(u). \quad (9.49)$$

Кроме того, в возрастной теории была введена вместо энергии новая независимая переменная, которая была названа *возрастом* нейтронов и определена в виде

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi \Sigma_s(u')} du'. \quad (9.50)$$

Переходя от летаргии к возрасту, получаем

$$\frac{\partial q(u)}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{D}{\xi \Sigma_s} \frac{\partial q}{\partial \tau}. \quad (9.51)$$

Предположим, что сечения не зависят от пространственной переменной, а также что  $\Sigma_a$  и  $S(u)$  в уравнениях (9.44) равны нулю. Тогда уравнения (9.44) можно записать через  $q$  и  $\tau$  в следующем виде:

$$\nabla^2 q = \partial q / \partial \tau. \quad (9.52)$$

Это уравнение очень напоминает уравнение теплопроводности

$$\nabla^2 Q = \partial Q / \partial t. \quad (9.53)$$

Обратимся вновь к уравнению (9.44в) и предположим, что сечения постоянны (т.е. не зависят от пространственной переменной). Однако здесь мы не полагаем  $\Sigma_a$  и  $S$  равными нулю. Тогда (применяя в качестве функции  $q$ , а не  $\phi$ ), получаем

$$-\frac{D}{\xi \Sigma_s} \nabla^2 q + \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} q = S - \frac{\partial q}{\partial u}. \quad (9.54)$$

Для использования в уравнении критичности проведем фурье-преобразование решения этого уравнения для точечного источника в бесконечной среде. В этом случае

$$S = \delta(\mathbf{r}) \chi(u), \quad (9.55)$$

и  $q$  подчиняется уравнению\*

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{Dk^2}{\xi \Sigma_s} + \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \right) \bar{q}_s = \chi(u). \quad (9.56)$$

Это уравнение легко проинтегрировать, и в результате

$$\bar{q}_s = \int_0^u \chi(u') \exp[-k^2 \tau(u' \rightarrow u)] p(u' \rightarrow u) du', \quad (9.57)$$

где, по аналогии с уравнением (9.50),  $\tau(u' \rightarrow u)$  определена как

$$\tau(u' \rightarrow u) = \int_{u'}^u \frac{D(u'')}{\xi \Sigma_s(u'')} du''. \quad (9.58a)$$

Кроме того, введем определение

$$p(u' \rightarrow u) = \exp \left[ - \int_{u'}^u \frac{\Sigma_a(u'')}{\xi \Sigma_s(u'')} du'' \right]. \quad (9.58b)$$

\* Здесь  $\chi(u)$  — спектр деления, а  $k$  — переменная фурье-преобразования.

Так как  $\bar{q}_s$  имеет физический смысл числа нейтронов источника деления, которые замедлились за данную летаргию, то величину  $p$  можно интерпретировать как вероятность избежать резонансного поглощения. Кроме того, как будет показано ниже, величина  $\exp(-k^2\tau)$  представляет собой вероятность избежать утечки.

Для небольших значений  $k^2$  (равных  $B^2$ ) уравнение (9.57) принимает более простой приближенный вид:

$$\bar{q}_s = \exp[-k^2\tau(u)] p(u), \quad (9.59)$$

где

$$\tau(u) = \int_0^u \chi(u') \tau(u' \rightarrow u) du', \quad (9.60)$$

а выражение для  $p(u)$  имеет аналогичный вид.

Подставляя этот результат в уравнение критичности, получаем соотношение

$$\eta f p \exp(-B^2\tau)/(1 + L^2B^2) = 1, \quad (9.61)$$

которое подтверждает наше представление члена  $\exp(-B^2\tau)$  как вероятности избежать утечки для быстрых нейтронов из реактора с лапласианом  $B^2$ .

Говоря о вероятности избежать резонансного поглощения и возрасте нейтронов, обычно имеют в виду усредненные значения этих величин по спектру деления. Величины  $\tau$  и  $p$  можно рассчитать непосредственно из данных по сечениям. Рассмотрим, например, при многогрупповом расчете энергетическую группу с летаргией  $u_K \leq u \leq u_{K+1}$ . Используя приведенные выше формулы, можно вывести следующие выражения для  $\tau(u_K \rightarrow u_{K+1})$  и  $p(u_K \rightarrow u_{K+1})$  (см. для сравнения § 8.4):

$$p(u_K \rightarrow u_{K+1}) = (\Sigma_{RK} - \Sigma_{aK})/\Sigma_{RK}; \quad (9.62a)$$

$$\tau(u_K \rightarrow u_{K+1}) = L_K^2 = D_K/\Sigma_{aK}. \quad (9.62b)$$

Уравнение (9.58б) следует из того факта, что для малых  $B^2$

$$\exp(-B^2\tau) \approx 1/(1 + B^2\tau). \quad (9.63)$$

Это соотношение дает в точности вероятность избежать утечки, определенную уравнением (8.45), если  $\tau$  заменить в нем  $L_1^2$ . Это же соотношение можно получить и другим способом, а именно рассматривая физический смысл возраста. Отметим, что уравнение (9.59) дает фурье-преобразование плотности замедления от точечного источника. С помощью обратного преобразования Фурье этот результат можно обратить, получая пространственное распределение плотности замедления\*:

$$q(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(-k^2\tau) d^3k = \frac{\exp(-r^2/4\tau)}{(4\pi\tau)^{3/2}}. \quad (9.64)$$

\* См. приложение В.

Как видно, пространственное распределение нейтронов подчиняется закону Гаусса. Если вычислить

$$\bar{r}^2 = \int r^2 q(r) d^3 r / \int q(r) d^3 r, \quad (9.65)$$

то получим

$$\bar{r}^2 = 6\tau. \quad (9.66)$$

Таким образом, по аналогии с уравнением (2.111в)  $\sqrt{\tau}$  представляет собой длину диффузии для быстрых нейтронов.

Для легких замедлителей, таких, как водород, для которых возрастная теория неприменима, величина  $\tau$  все же определяется уравнением (9.50). Ее значение можно либо измерить, либо вычислить [1], после чего вероятность избежать утечки вновь можно представить в виде  $\exp(-B^2\tau)$ . Однако, к сожалению, это соотношение не дает точных результатов даже при правильных значениях  $\tau$  для систем, которые не подчиняются возрастному уравнению. Тем не менее такой вид вероятности избежать утечки можно использовать в качестве грубого приближения.

Спектр нейтронов в бесконечной среде можно найти, полагая  $B^2 = 0$ . Если к тому же рассмотреть случай, когда поглощение нейтронов отсутствует, то получим (для энергий нейтронов меньше нижней границы спектра деления)

$$q = 1 \quad (9.67a)$$

или

$$\phi(u) = 1/\xi\Sigma_s. \quad (9.67b)$$

Конечно, этот результат физически очевиден, так как если отсутствуют поглощение и утечка нейтронов, то плотность замедления должна быть постоянной и равной мощности источника (которая нормирована на единицу). Поскольку

$$\phi(E) = \phi(u) \left| \frac{du}{dE} \right|, \quad (9.68a)$$

получаем соотношение

$$\phi(E) = 1/(\xi\Sigma_s E), \quad (9.68b)$$

известное как спектр нейтронов, подчиняющийся закону  $1/E$ . Хотя этот результат выведен из возрастной теории, он в действительности справедлив асимптотически (т. е. вдали от источников или стоков\*) для любого замедлителя [1].

Уравнения (9.62) можно использовать для исключения двух из четырех групповых констант, например  $\Sigma_{RK}$  и  $D_K$ . Оставшиеся константы ( $\Sigma_{fK}$  и  $\Sigma_{aK}$ ) можно усреднить по спектру, определяемому уравнением (9.68). Этот способ усреднения общезвестен, хотя он дает точные результаты, только если спектр нейтронов

\* А именно, резонансов.

одинаков всюду в реакторе, т. е. если пространственные и энергетические переменные полностью разделяются. Как известно, это справедливо только для голого гомогенного реактора.

В действительности использование спектра нейтронов в бесконечной среде (см. уравнение (9.68)) для усреднения констант несправедливо. Из уравнения (9.59) следует, что

$$\phi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_s E} p(E) \exp(-B^2 \tau(E)). \quad (9.69)$$

Этот спектр можно было бы использовать для усреднения констант с большей точностью, чем спектр  $1/E$ . Как отмечалось ранее, в качестве  $B^2$  должен использоваться материальный лапласиан активной зоны (или каждой области активной зоны). В отражателе обычно принимают  $B^2 = 0$ .

Более точный спектр можно получить другими методами, однако способ определения групповых констант остается таким же. Этот способ широко используется для получения групповых констант в реакторах на тепловых и быстрых нейтронах.

Иногда для определения системы групповых констант для реакторов данного типа (особенно для реакторов на быстрых нейтронах) используется другое приближение. Однако очевидно, что метод усреднения констант по спектру нейтронов должен быть более точным и, в частности, позволять использовать меньшее число групп.

### § 9.5. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

Чтобы получить уравнение (9.58б) для вероятности избежать резонансного поглощения, мы предположили, что  $\Sigma_s(u) \phi(u)$  в уравнении (9.42) есть не сильно меняющаяся функция  $u$ . Однако само название «резонансное поглощение» указывает на то, что это предположение несправедливо. Сечения поглощения для тяжелых ядер, таких, как  $^{238}\text{U}$  и  $^{232}\text{Th}$ , имеют резкие резонансы (см. рис. 1.3). В окрестности этих резонансов поток нейтронов должен резко ослабляться, поэтому его изменение с энергией очень велико.

Это ослабление потока в окрестности резонанса можно учесть, несколько изменяя вид уравнения (9.58б). Отметим, что показатель экспоненты в уравнении (9.58б) представляет собой интеграл от произведения сечения поглощения на асимптотический поток, определенный уравнением (9.67б):

$$p(u' \rightarrow u) = \exp \left[ - \int_{u'}^u \phi(u'') \Sigma_a(u'') du'' \right], \quad (9.70a)$$

или в переменных энергии

$$p(E' \rightarrow E) = \exp \left[ \int_E^{E'} \phi(E'') \Sigma_a(E'') dE'' \right]. \quad (9.70б)$$

Можно вычислить ослабление потока нейтронов в окрестности резонансов, используя в уравнениях (9.70) не асимптотический, а точный поток нейтронов.

Чтобы рассчитать вероятность избежать резонансного поглощения, необходимо найти поток нейтронов в резонансной области (где  $\chi(E)$  и  $\Sigma_I(E)$  равны нулю), нормированный таким образом, чтобы

$$\phi(u) \xrightarrow{\text{при малых } u} \frac{1}{\xi \Sigma_s} \quad (9.71a)$$

или

$$\phi(E) \xrightarrow{\text{при больших } E} \frac{1}{E \xi \Sigma_s}. \quad (9.71b)$$

В бесконечной среде это означает, что мы должны решить уравнение (9.1) с источником  $S(E) = 0$  и сечением  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$ , определенным в виде суммы сечений упругого рассеяния всех ядер, присутствующих в среде. Для простоты рассмотрим только два типа ядер: тяжелые ядра поглотителя (такого, как  $^{238}\text{U}$  или  $^{232}\text{Th}$ ) и легкие ядра непоглощающего замедлителя (такого, как водород или графит). Обозначим индексами  $F$  и  $M$  поглотитель и замедлитель соответственно. Тогда, используя для сечения рассеяния уравнения (9.21), получаем

$$\begin{aligned} \phi(E) \Sigma_T(E) = & \frac{1}{1 - \alpha_M} \int_E^{E/\alpha_M} dE' \frac{\phi(E') \Sigma_{sM}(E')}{E'} + \\ & + \frac{1}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} dE' \frac{\phi(E') \Sigma_{sF}(E')}{E'}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Прежде чем проводить дальнейший анализ уравнения (9.72), необходимо отметить некоторые особенности поведения сечений в представляющем интерес энергетическом интервале (т. е. в области от  $\approx 1$  эв до  $\approx 1$  кэв). В этой области сечение рассеяния замедлителя не зависит от энергии, а сечение рассеяния поглотителя также постоянно всюду, кроме окрестности резонанса. Сечение поглощения в окрестности резонанса можно записать в следующем виде\*:

$$\Sigma_{aF}(E) = \Sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_r}{E}} \frac{1}{4(E - E_r)^2/\Gamma^2 + 1}. \quad (9.73)$$

$E_r$  называется энергией резонанса,  $\Gamma_\gamma$  — радиационной шириной, а  $\Gamma$  — полной шириной резонанса. Радиационная ширина  $\Gamma_\gamma$  по существу постоянна для всех резонансов данного изотопа. Например, для  $^{238}\text{U}$

$$\Gamma_\gamma(^{238}\text{U}) = 0,0246 \text{ эв}, \quad (9.74a)$$

\* См., например, [3].

а для тория

$$\Gamma_{\gamma} (^{232}\text{Th}) = 0,030 \text{ эв} \quad (9.74б)$$

для всех резонансов.

Сечение рассеяния поглотителя также обнаруживает резонансное поведение в окрестности энергии резонанса  $E_r$ , а вдали от резонанса оно постоянно. Таким образом, сечение рассеяния можно представить в виде

$$\Sigma_{sF}(E) = \Sigma_0 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \frac{1}{4(E - E_r)^2/\Gamma^2 + 1} + \Sigma_I \frac{2(E - E_r)/\Gamma}{4(E - E_r)^2/\Gamma^2 + 1} + \Sigma_p. \quad (9.75)$$

Первый член в этом уравнении описывает *резонансное рассеяние*, второй — *интерференционное*, а третий — *потенциальное рассеяние*.

На рис. 9.8 приводится зависимость сечения рассеяния от энергии. Основной пик определяется членом резонансного рассеяния, постоянный фон — членом потенциального рассеяния  $\Sigma_p$ , а «провал» сечения при энергиях несколько меньше резонансной — интерференционным членом. Множитель  $\Sigma_I$  связан с сечениями  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_p$ . Имеется формула\*, связывающая эти величины, в которую входит *статистический фактор*, зависящий от спина составного ядра.  $\Gamma_n$  — нейтронная ширина резонанса. Полная ширина резонанса представляет собой сумму нейтронной и радиационной ширин:

$$\Gamma = \Gamma_{\gamma} + \Gamma_n. \quad (9.76)$$

Мерой *эффективной ширины* резонанса служит так называемая практическая ширина

$$\Gamma_p = \Gamma \sqrt{\Sigma_0/\Sigma_p}, \quad (9.77)$$

определяемая как интервал энергии между двумя точками, в которых полное резонансное сечение становится равным сечению потенциального рассеяния. Так как  $\Sigma_0$  обычно значительно больше, чем  $\Sigma_p$ , то  $\Gamma_p$  существенно превосходит  $\Gamma$ . В табл. 9.2 приводятся эти параметры для первых 12 резонансов  $^{238}\text{U}$ . В этой же таблице приведены потери энергии при упругих столкновениях с ядрами  $^{238}\text{U}$  нейтронов с энергией  $E_r$ .

Вернемся вновь к уравнению (9.72). В интеграле, относящемся к замедлителю, энергетический интервал  $E/\alpha_M - E$  велик по сравнению с эффективной шириной резонанса  $\Gamma_p$ . В этом случае большая часть интервала интегрирования находится далеко от резонан-

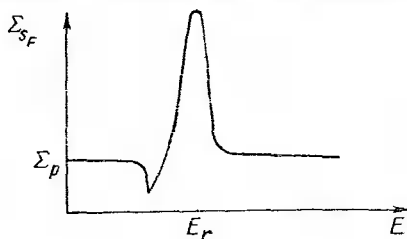


Рис. 9.8. Поведение сечения рассеяния в окрестности резонанса

\* См. [3].

Низкоэнергетические резонансы  $^{238}\text{U}$ ,  $\Gamma_p = 0,0246$  эв

$E_r$ , эв	$\Gamma_n$ , эв	$\Gamma_p$ , эв	$(1 - \alpha_F) E_r$
6,7	0,00148	1,26	0,11*
21,0	0,009	1,95	0,35*
36,8	0,033	3,65	0,62*
66,3	0,023	2,26	1,11*
81,3	0,0021	0,76	1,36
90,0	0,00008	0,13	1,51
102,8	0,07	3,98	1,73*
117,0	0,018	1,32	1,97
146,0	0,0008	0,68	2,44
166,0	0,0035	0,98	2,78
190,0	0,135	5,66	3,21*
209,0	0,055	2,63	3,55

са, поэтому можно получить достаточно хорошее приближение, если заменить поток нейтронов  $\phi(E')$  его асимптотическим значением (9.71б) (напомним, что  $\xi \Sigma_s$  — постоянно)\*. Это приближение справедливо даже в том случае, если энергетический интервал содержит энергию резонанса  $E_r$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \alpha_M} \int_E^{E/\alpha_M} dE' \frac{\phi(E') \Sigma_{sM}}{E'} \approx \\ & \approx \frac{1}{1 - \alpha_M} \frac{\Sigma_{sM}}{\xi \Sigma_s} \int_E^{E/\alpha_M} \frac{dE'}{E'^2} = \frac{\Sigma_{sM}}{\xi \Sigma_s E}. \end{aligned} \quad (9.78a)$$

Используя этот результат в уравнении (9.72), получаем

$$\phi(E) \Sigma_T(E) = \frac{1}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} \frac{\phi(E') \Sigma_{sF}(E')}{E'} + \frac{1}{\xi \Sigma_s E}. \quad (9.78б)$$

Рассмотрим теперь табл. 9.2. Для тех резонансов (отмеченных звездочкой), для которых  $(1 - \alpha_F) E_r$  меньше  $\Gamma_p$ , будем использовать то же приближение, что и для интеграла, относящегося к замедлителю, согласно которому  $\phi \Sigma_s$  заменяется асимптотическим значением

$$\frac{1}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} dE' \frac{\phi(E') \Sigma_{sF}(E')}{E'} \approx \frac{\Sigma_p}{\xi \Sigma_s E}. \quad (9.79)$$

\* В этом случае полное сечение рассеяния  $\Sigma_s$  равно сумме  $\Sigma_p$  и  $\Sigma_{sM}$ . Кроме того, отметим, что  $\Sigma_s$  постоянно.

Затем, используя уравнение (9.72), имеем для потока нейтронов

$$\phi_{NR}(E) = \frac{\Sigma_{sM} + \Sigma_p}{\xi \Sigma_s E \Sigma_T}. \quad (9.80)$$

По очевидной причине это приближение называется *приближением узкого резонанса* (*NR-приближением*). Кроме того, очевидно также, что соотношение (9.79) значительно менее точно, чем уравнение (9.78).

При таком приближении для потока нейтронов вероятность избежать резонансного поглощения в случае одного резонанса можно записать в виде

$$p_{NR} = \exp(-N_F I_{NR} / \xi \Sigma_s), \quad (9.81a)$$

где

$$I_{NR} = \int dE \frac{\sigma_{aF}(E) (\Sigma_{sM} + \Sigma_p)}{E \Sigma_T(E)}, \quad (9.81b)$$

$N_F$  — ядерная плотность поглотителя, а  $\sigma_{aF}$  — микроскопическое сечение поглощения.  $N_F$  выбирается таким образом, чтобы приведенное выше определение резонансного интеграла согласовывалось со стандартным определением.

Для других резонансов табл. 9.2, для которых  $\Gamma_p$  меньше  $(1 - \alpha_F) E_r$ , приближение узкого резонанса неприменимо. В этом случае примем другое крайнее приближение. Предположим, что энергетический интервал  $E/\alpha_F - E$  настолько мал, что изменениями величины  $\phi \Sigma_{sF}$  на этом интервале можно пренебречь:

$$\frac{1}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} dE' \frac{\phi(E') \Sigma_{sF}(E')}{E'} \approx \frac{\phi(E) \Sigma_{sF}(E)}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} \frac{dE'}{E'}. \quad (9.82)$$

Интеграл в уравнении (9.82) должен оцениваться для предельного случая  $\alpha_F = [(A - 1)/(A + 1)]^2 \rightarrow 1$ :

$$\lim_{\alpha_F \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} \frac{dE'}{E'} = 1. \quad (9.83)$$

Тогда уравнение (9.82) принимает вид

$$\frac{1}{1 - \alpha_F} \int_E^{E/\alpha_F} dE' \frac{\phi(E') \Sigma_{sF}(E')}{E'} \approx \phi(E) \Sigma_{sF}(E). \quad (9.84)$$

Вновь по очевидной причине это приближение называется *приближением бесконечной массы* или *IM-приближением\**. Используя

\* Это приближение известно, так же как *NRIM-приближение*, так как замедлитель рассматривается в *NR-приближении*.

(9.78) и (9.84), можно решить уравнение (9.72) для потока в  $IM$ -приближении:

$$\phi_{IM} (\Sigma_T - \Sigma_{sF}) = \Sigma_{sM} / (\xi \Sigma_s E) \quad (9.85a)$$

или

$$\phi_{IM} (E) = \Sigma_{sM} / [\xi \Sigma_s E (\Sigma_T - \Sigma_{sF})]. \quad (9.85b)$$

Вероятность избежать резонансного поглощения в этом случае имеет вид

$$p_{IM} = \exp(-I_{IM} / \xi \Sigma_s), \quad (9.86a)$$

где

$$I_{IM} = \int dE \frac{\sigma_{aF} \Sigma_{sM}}{E (\Sigma_T - \Sigma_{sF})}. \quad (9.86b)$$

Это выражение во многом сходно с выражением для  $I_{NR}$ , за исключением того, что в этом случае пренебрегается рассеянием в топливе. Трудно ожидать, что приведенные выше приближения узкого резонанса и бесконечной массы будут давать точные результаты для всех резонансов, так как во многих случаях энергетический интервал  $E/\alpha_F - E$  и практическая ширина резонанса оказываются сравнимыми, так что ни один из рассмотренных крайних случаев неприменим. Тогда можно использовать модифицированные методы, приводящие, однако, к усложнению расчетов [4].

Представляет интерес так называемый резонансный интеграл для бесконечно разбавленной системы, который можно получить либо из выражения для  $I_{NR}$  [уравнение (9.81б)], либо из выражения для  $I_{IM}$  (уравнение (9.86б)) в предельном случае  $N_F \rightarrow 0$ . В любом случае

$$I_\infty = \int \sigma_{aF} \frac{dE}{E}. \quad (9.86в)$$

Различие между резонансным интегралом для бесконечно разбавленной системы и резонансными интегралами  $I_{NR}$  или  $I_{IM}$  состоит в том, что в последних учитывается эффект ослабления потока нейтронов внутри резонанса, который известен как *энергетическая самоэкранировка*. Отметим, что использование  $I_\infty$  в уравнении (9.81а) приводит к такому же выражению для вероятности избежать резонансного поглощения, которое было получено из возрастной теории Ферми [уравнение (9.58б)].

## § 9.6. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В БЛОКИРОВАННЫХ ПОГЛОТИТЕЛЯХ

Рассмотрим систему, в которой тяжелый резонансный поглотитель размещен в блоке, окруженном замедляющим материалом (рис. 9.9) (это может быть, например, тепловыделяющий стержень, окруженный теплоносителем). На рис. 9.10 приводится зависимость вероятности избежать резонансного поглощения от размеров тепловыделяющего стержня.

Как и в § 7.3, обозначим сечения в областях  $A$  и  $B$  соответствующими индексами.

Предположим, что область  $B$  содержит только замедлитель с сечением  $\Sigma_s^B$  и средним изменением летаргии  $\xi_M^B$ . Асимптотический поток нейтронов в области замедлителя имеет зависимость от энергии в виде  $1/E^*$ :

$$\phi_B(E) = 1/E. \quad (9.87)$$



Рис. 9.9. Резонансный захват в блокированном поглотителе

Поток нейтронов в области  $A$  должен удовлетворять уравнению (8.14), в котором  $S = 0$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T^A \phi(\mathbf{r}, E) = \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \phi_A(\mathbf{r}, E'). \quad (9.88a)$$

Умножим обе части уравнения (9.88a) на  $d^3r$  и проинтегрируем по области  $A$ :

$$\int_A d^3r \nabla \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{r}, E) + \Sigma_T^A \bar{\phi}_A(E) = \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \bar{\phi}_A(E'), \quad (9.88b)$$

где

$$\bar{\phi}_A(E) = \int_A d^3r \phi_A(\mathbf{r}, E). \quad (9.88b)$$

Первый интеграл в уравнении (9.88b) можно вычислить с помощью теоремы Гаусса [см. уравнение (2.20)].

$$\int_A d^3r \nabla \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{r}, E) = \int_A dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{r}, E), \quad (9.89a)$$

\* Здесь не рассматривается нормировочный множитель  $1/\xi \Sigma_s$ , который должен быть соответствующим образом усреднен по областям замедлителя и поглотителя.

где интеграл в правой части представляет собой интеграл по поверхности области  $A$ , а  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности.

Интеграл в уравнении (9.89а) дает результирующее число нейтронов, выходящих из области  $A$  и пересекающих граничную поверхность  $S$ .

Этот результирующий ток нейтронов состоит из двух частей. Те нейтроны, которые испытывают упругое столкновение в области  $A$  и затем уходят из нее, вносят положительный вклад\*. Нейтроны, которые испытывают упругое столкновение в области  $B$  и затем

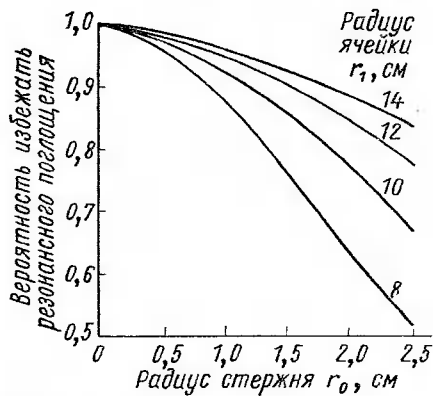


Рис. 9.10. Вероятность избежать резонансного поглощения в гетерогенной системе, состоящей из естественного урана и графита

прегерпевают следующие столкновения в области  $A$ , вносят отрицательный вклад. Нейтроны, которые испытывают поглощающие столкновения, или те, которые входят и выходят из области  $A$  без столкновения, не дают вклада в результирующий ток нейтронов, выходящих из области  $A$ .

Поток нейтронов, испытавших упругое столкновение в области  $A$ , равен  $\int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \phi_A(E')$ . Из этих нейтронов доля  $P_0(A \rightarrow B)$  будет испытывать свои следующие столкновения в области  $B$ , где  $P_0(A \rightarrow B)$  — вероятность выхода нейтронов первого пролета из области  $A$  в область  $B$ .

Эта величина определена в § 7.4 для случая с однородным источником нейтронов в области  $A$ . Тогда, если интеграл  $\int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \phi_A(\mathbf{r}, E)$  приблизительно постоянен по области  $A$ , можно использовать результаты § 7.4. Так как это приближение предполагает, что поток нейтронов  $\phi_A(\mathbf{r}, E)$  не зависит от пространственной переменной, то оно известно как *приближение плоского потока*. В области замедления средние свободные пути рассеяния велики по сравнению с размерами пространственных неоднородностей, и это приближение дает достаточно хорошие результаты.

Аналогично поток нейтронов, испытывающих упругие столкновения в области  $B$ , равен  $\int d^3r \int dE' \phi_B(\mathbf{r}, E') \Sigma_s^{B0}(E' \rightarrow E)$ . Из этих нейтронов доля  $P_0(B \rightarrow A)$  испытывает свои следующие столкновения в области  $A$ .

\* Предполагается, что область  $A$  является выпуклой, так что нейтрон не может выйти, а затем вновь вернуться в область, не испытав столкновения.

Используя эти результаты, уравнение (9.89а) можно записать в следующем виде:

$$\int_A d^3 r \nabla \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{r}, E) = P_0(A \rightarrow B) \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \bar{\phi}_A(E') - \\ - P_0(B \rightarrow A) \int dE' \Sigma_s^{B0}(E' \rightarrow E) \int_B d^3 r \phi_B(\mathbf{r}, E'). \quad (9.89б)$$

Можно использовать приближение плоского потока и асимптотическое выражение для  $\phi_B$  [уравнение (9.87)]. Тогда, применяя для сечения рассеяния в области  $B$  выражения (9.21), получаем

$$P_0(B \rightarrow A) \int dE' \Sigma_s^{B0}(E' \rightarrow E) \int_B d^3 r \phi_B(\mathbf{r}, E') = \\ = P_0(B \rightarrow A) \Sigma_s^B \frac{V_B}{1 - \alpha_M^B} \int_E^{E/\alpha_M^B} \frac{dE'}{E'^2} = P_0(B \rightarrow A) \frac{\Sigma_s^B V_B}{E}. \quad (9.89в)$$

Используем теорему взаимности, которая была получена в гл. 7 [уравнение (7.9)]. Если применять ее к вероятности выхода нейтронов первого пролета, то каждое столкновение представляет собой эффективное поглощение, и соотношение взаимности должно содержать полное сечение, а не только сечение поглощения\*:

$$P_0(B \rightarrow A) \Sigma_s^B V_B = P_0(A \rightarrow B) \Sigma_T^A V_A. \quad (9.89г)$$

Эти результаты можно использовать в уравнении (9.89б), обозначая в нем сокращенно  $P_0(A \rightarrow B)$  через  $P_0$ :

$$\int_A d^3 r \nabla \cdot \mathbf{J}_A(\mathbf{r}, E) = P_0 \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \bar{\phi}_A(E') - \\ - P_0 \Sigma_T^A V_A / E. \quad (9.89д)$$

Если поток нейтронов в области  $A$  является действительно плоским, то можно записать

$$\phi_A(\mathbf{r}, E) = \phi_A / V_A. \quad (9.90)$$

Используем это выражение как определение  $\phi_A(E)$ . Тогда уравнение (9.89б) можно переписать в терминах  $\phi_A(E)$  следующим образом:

$$\Sigma_T^A \phi_A(E) = (1 - P_0) \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \phi_A(E') + P_0 \Sigma_T^A / E. \quad (9.91а)$$

Если разделить обе части этого уравнения на  $1 - P_0$ , то получим

$$\frac{\Sigma_T^A}{1 - P_0} \phi_A(E) = \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \phi_A(E') + \frac{P_0 \Sigma_T^A}{1 - P_0} \frac{1}{E}. \quad (9.91б)$$

\* Полное сечение в области  $B$  равно  $\Sigma_s^B$ .

Последний член в уравнении (9.91б) имеет вид интеграла рассеяния в  $NR$ -приближении [см. уравнение (9.78)]. Эффективное сечение рассеяния для этого члена имеет вид

$$\Sigma_s^{\text{эф}} = P_0 \Sigma_T^A / (1 - P_0). \quad (9.92)$$

В терминах  $\Sigma_s^{\text{эф}}$  уравнение (9.91б) можно записать следующим образом\*:

$$(\Sigma_T^A + \Sigma_s^{\text{эф}}) \phi_A(E) = \int dE' \Sigma_s^{A0}(E' \rightarrow E) \phi_A(E') + \Sigma_s^{\text{эф}}/E. \quad (9.93)$$

Тогда резонансный интеграл

$$I = \int dE \sigma_{aF}^A(E) \phi_A(E). \quad (9.94)$$

Вероятность избежать резонансного поглощения можно записать в виде (9.81а) и (9.86а). Однако член  $\xi \Sigma_s$  необходимо соответствующим образом усреднить по сечениям поглотителя:

$$\xi \Sigma_s = \frac{V_A \xi^A \Sigma_s^A + V_B \xi^B \Sigma_s^B}{V_A + V_B}, \quad (9.95)$$

и вероятность избежать резонансного поглощения записывается в виде

$$p = \exp(-N_F I / \xi \Sigma_s). \quad (9.96)$$

Для вычисления интеграла в уравнении (9.93) можно использовать  $NR$ - и  $IM$ -приближения. Тогда

$$\phi_{NR}^A = \frac{\Sigma_{sM}^A + \Sigma_p^A + \Sigma_s^{\text{эф}}}{(\Sigma_T^A + \Sigma_s^{\text{эф}}) E} \quad (9.97a)$$

и

$$\phi_{IM}^A = \frac{\Sigma_{sM}^A + \Sigma_s^{\text{эф}}}{(\Sigma_T^A + \Sigma_s^{\text{эф}} - \Sigma_{sF}^A) E}. \quad (9.97б)$$

Выражение для резонансного интеграла получается, если эти значения потоков подставить в уравнение (9.94). Тогда

$$I_{NR} = I_{NR}^V + I_{NR}^S, \quad (9.98a)$$

где

$$I_{NR}^V = \int \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_{sM}^A + \Sigma_p^A}{\Sigma_T^A} \sigma_{aF}^A(E) \quad (9.98б)$$

и

$$I_{NR}^S = \int P_0 \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_T^A - \Sigma_{sM}^A - \Sigma_p^A}{\Sigma_T^A} \sigma_{aF}^A(E). \quad (9.98в)$$

\* Этот результат обычно известен как принцип эквивалентности, согласно которому блокирование поглотителя эквивалентно добавлению замедлителя с сечением рассеяния  $\Sigma_s^{\text{эф}}$  в гомогенном случае.

Индексы  $V$  и  $S$  относятся соответственно к *объемному* и *поверхностному* вкладам в полный резонансный интеграл. В случае поглотителей большой оптической толщины для расчета  $P_0$  можно использовать уравнение (7.28б):

$$P_0 = S_A / (4V_A \Sigma_T^A). \quad (9.99)$$

Тогда  $I_{NR}^S \approx S_A / V_A \approx S_A / M$ , где  $M$  — масса поглотителя.

Аналогичные формулы для  $I_{IM}$  имеют вид

$$I_{IM} = I_{IM}^S + I_{IM}^V, \quad (9.100а)$$

где

$$I_{IM}^V = \int \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_{sM}^A}{\Sigma_T^A - \Sigma_{sF}^A (1 - P_0)} \sigma_{aF}^A(E) \quad (9.100б)$$

и

$$I_{IM}^S = \int \frac{dE}{E} P_0 \frac{\Sigma_T^A - \Sigma_{sM}^A}{\Sigma_T^A - \Sigma_{sF}^A (1 - P_0)} \sigma_{aF}^A(E). \quad (9.100в)$$

Приведенные выше формулы справедливы для изолированных блоков. Чтобы распространить их на решетки, достаточно просто заменить  $P_0$  на  $P_0^*$ , как это было описано в § 7.4.

## § 9.7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Приведенные выше формулы для резонансного интеграла получены в предположении, что абсолютная температура среды равна нулю, поэтому область их применения весьма ограничена.

Причина изменения поглощающих свойств с температурой состоит в следующем. Как отмечалось, формула для резонансного сечения поглощения [уравнение (9.73)] описывает функцию, сильно изменяющуюся с энергией. Величина  $E$  в этой формуле представляет собой относительную энергию нейтрона и ядра мишени, т. е. пропорциональна  $|v_n - v_N|^2$ , где  $v_n$  — скорость нейтрона, а  $v_N$  — скорость ядра мишени.

Если ядро мишени находится в покое, что и имеет место при температуре абсолютного нуля, то величина  $E$  описывает просто энергию нейтрона. При более высоких температурах ядра мишени будут находиться в тепловом движении, и соответствующая энергия  $E$  получается усреднением по тепловым движениям ядра. Детальный анализ этого процесса выходит за рамки настоящей книги, мы приведем лишь конечный результат, заключающийся в том, что тепловое движение ядер приводит к так называемому *эффекту Доплера*, состоящему в *уширении* брейт-вигнеровской *формы резонанса* (рис. 9.11). Как видно из этого рисунка, возрастание температуры приводит к тому, что максимум резонансной кривой снижается, а «крылья» повышаются. В хорошем приближении площадь под кри-

выми, соответствующими различным температурам, остается постоянной независимо от температуры. Можно было бы предположить, что останется без изменения также и вероятность избежать резонансного поглощения. Однако это не так. Напомним, что сечение поглощения в максимуме резонанса сильно заблокировано. Другими словами, поглощение в максимуме резонанса настолько велико, что любой нейтрон с энергией, близкой к максимуму, будет в любом случае захватываться ядром. Снижение максимума резонанса даже в 10 раз не повлияет существенно на интенсивность погло-

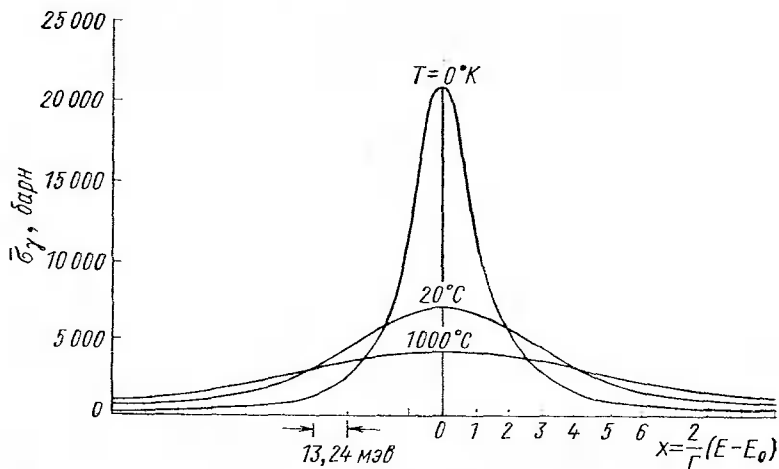


Рис. 9.11. Доплеровское уширение сечения захвата  $^{238}\text{U}$  в резонансе с энергией 6,67 эв

щения нейтронов с энергией, близкой к максимуму. С другой стороны, чем выше температура, тем большее количество нейтронов поглощается на «крыльях» резонанса. По этой причине с ростом температуры резонансное поглощение возрастает, как это показано на рис. 9.12.

Выражение для  $\Sigma_a(E)$ , которое заменяет формулу (9.73), при отличных от нуля температурах имеет вид

$$\bar{\Sigma}_a(E) = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_r}{E}} \Sigma_0 \Psi(\zeta, x), \quad (9.101a)$$

где  $\zeta = \Gamma/\Gamma_D; \quad (9.101б)$

$$\Gamma_D = \sqrt{4E_r kT/A}; \quad (9.101в)$$

$$x = 2(E - E_r)/\Gamma; \quad (9.101г)$$

$$\Psi(\zeta, x) = \frac{\zeta}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{1+y^2} \exp[-\zeta^2(x-y)^2/4]. \quad (9.101д)$$

Сечение рассеяния в поглотителе также уширяется за счет теплового движения ядер

$$\bar{\Sigma}_s(E) = \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \Sigma_0 \psi(\zeta, x) + \Sigma_i \chi(\zeta, x) + \Sigma_p, \quad (9.102a)$$

где

$$\chi(\zeta, x) = \frac{\zeta}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2y dy \frac{\exp[-\zeta^2(x-y)^2/4]}{1+y^2}. \quad (9.102b)$$

Чтобы получить выражения для  $I_{NR}$  и  $I_{IM}$ , используются формулы (9.98) и (9.100), в которых, однако,  $\sigma_{aF}^A$  и  $\Sigma_{sF}^A$  заменяются приведенными выше значениями  $\bar{\sigma}_{aF}^A$  и  $\bar{\Sigma}_{sF}^A$ . Для их вычисления требуются численные расчеты. Выражение же для  $I_{\infty}$ , т. е. для резонансного интеграла в бесконечно разбавленной среде, можно получить в аналитическом виде:

$$I_{\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_0}{E_r} \Gamma_{\gamma}. \quad (9.103)$$

Удобно ввести следующие обозначения:

$$\sigma'_p = (\Sigma_p^A + \Sigma_{sM}^A) / N_F \quad (9.104a)$$

и

$$\sigma''_p = \Sigma_{sM}^A / N_F. \quad (9.104b)$$

Тогда резонансные интегралы для гомогенной среды даются в  $NR$ -приближении в следующем виде:

$$I_{NR} = J(\zeta, \beta) \sigma'_p \Gamma_{\gamma} / E_r, \quad (9.105a)$$

где

$$J(\zeta, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\psi(\zeta, x)}{\psi(\zeta, x) + \beta} dx; \quad (9.105b)$$

$$\beta = \sigma'_p / \sigma_0. \quad (9.105b)$$

Здесь  $J$  — табулированная функция (см., например [5]). При получении этого результата пренебрегали интерференционным рассеянием.

Для  $IM$ -приближения аналогичный расчет приводит к следующим результатам:

$$I_{IM} = \sigma''_p \Gamma_{\gamma} J(\zeta, \beta') / E_r; \quad (9.106a)$$

$$\beta' = \sigma''_p \Gamma_{\gamma} / (\sigma_0 \Gamma). \quad (9.106b)$$

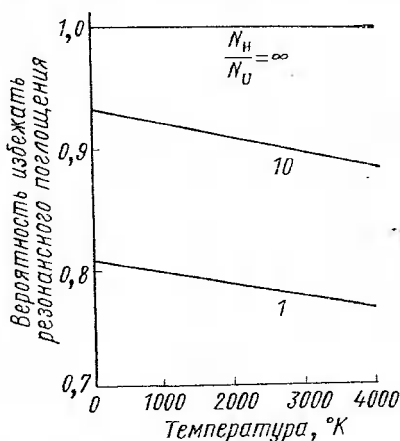


Рис. 9.12. Зависимость вероятности избежать резонансного поглощения для резонанса  $^{238}\text{U}$  с энергией 6,67 эв от температуры при различных концентрациях урана в бесконечном водородсодержащем замедлителе

В гетерогенном случае получаются следующие формулы:

$$I_{NR}^V = J(\xi, \beta) \sigma_p' \Gamma_\gamma / E_r; \quad (9.107a)$$

$$I_{NR}^S = L(t, \xi, \beta) \sigma_0 \Gamma_\gamma / E_r. \quad (9.107b)$$

Здесь  $L(t, \xi, \beta)$  — также табулированная функция (снова см. [5]), в которой параметр  $t$  имеет вид

$$t = (\Sigma_p^A + \Sigma_{sM}^A) 4V_A / S_A. \quad (9.107b)$$

Аналогично

$$I_{IM}^V = \Gamma_\gamma J(\xi, \beta') \sigma_p'' / E_r; \quad (9.108a)$$

$$I_{IM}^S = \frac{\sigma_p''}{\beta'} \frac{\Gamma_\gamma}{E_r} L(t', \xi, \beta'); \quad (9.108b)$$

$$t' = 4V_A \Sigma_{sM}^A / S_A. \quad (9.108b)$$

Когда в поглотителе отсутствует размещенный с ним замедлитель, то  $\beta' = \sigma_p'' = 0$  и  $I_{IM}^V \rightarrow 0$ . Однако очевидно, что такой результат неверен, так как часть нейтронов всегда будет замедляться внутрь резонанса. Введем соответствующую поправку на этот эффект, предполагая, что все нейтроны, попавшие внутрь резонанса, поглощаются. Тогда  $I_{TM}^V$  становится просто плотностью замедления:

$$I_{IM}^V = 2\Sigma_p^A / (AN_F), \quad (9.109)$$

где  $A$  — масса топлива.

Если в выражении для  $\Sigma_s^{\text{эф}}$  (уравнение (9.92)) использовать рациональное приближение Вигнера, то получим

$$\Sigma_s^{\text{эф}} = S_A / 4V_A. \quad (9.110)$$

Подставляя этот результат в выражение для  $I_{NR}$  [уравнение (9.98)], найдем

$$I_{NR} = \int \frac{dE}{E} \sigma_{aF}^A(E) \frac{\Sigma_p^A + \Sigma_{sM}^A + S_A / 4V_A}{\Sigma_T^A + S_A / 4V_A}. \quad (9.111)$$

Сравнивая полученное выражение с уравнением (9.81б), видим, что оно идентично выражению для резонансного интеграла в гомогенной системе, но для решетки  $\Sigma_p$  заменяется  $\Sigma_p^A + S_A / 4V_A$ . Нетрудно видеть, что подобный подход справедлив и для  $I_{IM}^*$ . Таким образом, в пределах точности рационального приближения можно использовать гомогенные расчеты для оценок резонансных интегралов в гетерогенных системах.

\* Эти результаты были получены Д. Черником и А. Верноном («Nucl. Sci. Engng». 1958, v.4, p.649).

Поправки Данкова для решеток можно вычислить таким же способом, заменяя  $S_A$  в приведенных выше формулах  $S_{эф}$ , где\*

$$S_{эф} = \frac{S_A}{1 + S_A V_A / (\Sigma_{SM}^B V_B)}. \quad (9.112)$$

Полученные результаты были подтверждены экспериментально, что позволило, например, рассчитывать резонансные интегралы окислов урана или тория, зная их значения для металлов, и наоборот. Однако, как и ожидалось, резонансные интегралы гетерогенных систем, рассчитанные по формуле (9.111), давали результаты, повышенные примерно на 10% по сравнению со значениями интегралов для эквивалентных гомогенных систем, главным образом из-за неточности рационального приближения.

При использовании соотношений эквивалентности важно помнить, что если две системы имеют одинаковые резонансные интегралы, то это не означает, что они имеют и одинаковые вероятности избежать резонансного поглощения. Это связано с тем, что для гетерогенных систем замедляющая способность зависит не только от замедлителя, размешанного с поглотителем, но и от окружающего замедлителя. Следовательно, используя поглотитель в виде блоков, можно увеличить замедляющую способность без заметного возрастания резонансного захвата. Это особенно важно для реакторов с естественным ураном.

### § 9.8. КОНСТАНТЫ ТЕПЛОВОЙ ГРУППЫ

Как указывалось ранее, для получения многогрупповых констант для реакторных расчетов используется так называемое спектральное приближение, согласно которому предполагается, что поток нейтронов внутри некоторой области реактора имеет определенное энергетическое распределение, по которому и проводится усреднение сечений. Для быстрой группы широко используются различные методы расчета энергетического распределения потока нейтронов, многие из которых основаны на численном интегрировании зависящего от энергии уравнения переноса. Для определенных классов реакторов, в частности для графитовых реакторов, можно использовать теорию возраста, описанную в данной главе. Поскольку в настоящее время графитовых реакторов строится очень мало\*\*, то этот метод имеет скорее исторический, чем практический интерес. Некоторые расчетные методы, используемые в настоящее время для легководных реакторов и реакторов на быстрых нейтронах, кратко обсуждаются в гл. 10.

Спектр тепловых нейтронов, по которому проводится усреднение сечений для получения констант тепловой группы, должен рассчитываться иначе, чем спектр быстрых нейтронов. И в том, и в

\* Эта формула выведена Д. Беллом («Nucl. Sci. Engng», 1959, v.5, p. 75).

\*\* Автор имеет в виду США. — Прим. перев.

другом случае для этой цели имеется уравнение в виде (9.1). Для спектра быстрых нейтронов  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  представляет собой сечение упругого или неупругого рассеяния (см. § 9.2 и 9.3). Однако для тепловой группы энергия теплового движения ядер замедлителя сравнима с энергией нейтронов (по самому определению тепловой группы). Таким образом, сечение  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  описывает столкновения между двумя движущимися объектами. В частности, при столкновении нейтрон может как терять, так и приобретать энергию, в зависимости от того, какова энергия ядра, с которым произошло столкновение.

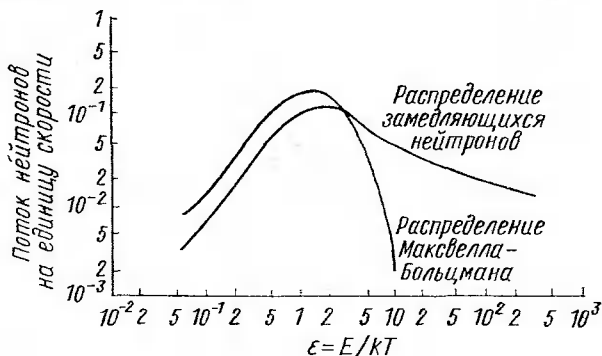


Рис. 9.13. Распределение тепловых нейтронов

Получение соответствующих выражений  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  для различных замедлителей представляет собой довольно сложную задачу, решение которой выходит за рамки настоящей книги. После того как сечение рассеяния определено, спектральное уравнение обычно решается численно. В гл. 10 будут обсуждены некоторые примеры его решения.

Другое, более простое приближение состоит в том, что предполагается некоторый вид энергетического распределения нейтронов в реакторе, по которому и проводится прямое усреднение. В наиболее простом предположении принимается, что спектр тепловых нейтронов имеет максвелловское распределение с некоторой температурой  $T$ :

$$\phi_{th}(E) \approx E \exp(-E/kT), \quad (9.113)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. В действительности это предположение было бы справедливо, если бы нейтроны находились в тепловом равновесии с ядрами замедлителя. Однако из-за того, что нейтроны постоянно рождаются при делении и теряются при поглощении или из-за утечек, они находятся лишь в некотором квазиравновесном состоянии с ядрами замедлителя. Из сравнения с точными расчетами термализации нейтронов можно показать (рис. 9.13), что достаточно хорошим приближением для спектра тепловых нейтронов в реакторе является распределение Максвелла

с некоторой эффективной температурой, которая выше, чем реальная температура системы (говорят, что спектр нейтронов *ужесточается*).

В работе [6] была предложена формула типа

$$T' = T [1 + 0,46 \Sigma_a (kT) / (\xi \Sigma_s)], \quad (9.114)$$

где  $\Sigma_a (kT)$  — сечение поглощения при энергии  $kT$  (равной  $0,025$  эв для  $T' = 20^\circ \text{C}$ ), а  $\Sigma_s$  — сечение рассеяния при энергии выше тепловой\*.

Константы тепловой группы определяются из соотношений типа

$$\Sigma_{th} = \int \phi_{th}(E) \Sigma(E) dE / \int \phi_{th}(E) dE, \quad (9.115)$$

где для  $\phi_{th}$  можно использовать либо распределение Максвелла (с температурой  $T'$ ), либо подсчитанный более точно или измеренный спектр нейтронов.

Для сечений, подчиняющихся закону  $1/v$ , интегрирование в уравнении (9.115) можно провести точно, в результате получим

$$\Sigma = K / \sqrt{E}, \quad (9.116a)$$

где

$$K = \Sigma(kT') \sqrt{kT'}. \quad (9.116b)$$

Тогда\*\*

$$\Sigma_{th} = \Sigma(kT') \sqrt{kT'} \frac{\int_0^{\infty} E^{3/2} \exp(-E/kT') dE}{\int_0^{\infty} E \exp(-E/kT') dE}. \quad (9.117)$$

Легко найти, что

$$\Sigma_{th} = (\sqrt{\pi}/2) \Sigma(kT'). \quad (9.118)$$

### § 9.9. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В МНОГОГРУППОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Вариационные методы и теория возмущений обсуждались в гл. 5. Применение этих методов рассматривалось в односкоростном приближении. В многогрупповой теории энергетические зависимости можно включить, записывая поток нейтронов в виде век-

\* Для энергии выше тепловой сечение рассеяния приближается к постоянной величине, обозначаемой  $\Sigma_s$ . В области тепловой энергии эффекты химических связей стремятся увеличить сечение рассеяния, особенно для наиболее легких элементов.

\*\* Верхний предел можно распространить до бесконечности, так как спектр Максвелла быстро спадает с ростом энергии. Верхний предел тепловой группы должен в действительности выбираться при некоторой энергии, выше которой отсутствует заметное рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов при столкновениях. На практике это значение равно примерно  $0,6$  эв.

тора с  $N$  компонентами, где каждая компонента является, конечно, функцией пространственных переменных.

При такой форме записи потока нейтронов, приведенной в уравнении (8.6), вместо определений, введенных в гл. 5, и в частности вместо определения скалярного произведения, даваемого уравнением (5.23), необходимо использовать скалярное произведение, которое должно учитывать многогрупповое представление потока нейтронов в виде многокомпонентного вектора-столбца. Тогда если вектор потока нейтронов  $\mathbf{f}$  имеет вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ f_N(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (9.119)$$

то скалярное произведение определяется как

$$(f, g) = \sum_j \int d^3 r f_j^*(\mathbf{r}) g_j(\mathbf{r}). \quad (9.120a)$$

Операторы, фигурирующие в многогрупповой диффузионной теории, представляют собой матрицы дифференциальных операторов, как, например, в уравнении (8.7). Для двухгрупповой теории

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot D_1 \nabla + \Sigma_{R1} & 0 \\ \Sigma_{12} & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \Sigma_{R2} \end{pmatrix}. \quad (9.120b)$$

Обычно оператор  $\mathbf{M}$ , действуя на вектор  $\mathbf{f}$ , дает другой вектор  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{M}\mathbf{f} = \mathbf{c}, \quad (9.121a)$$

где компоненты  $c_k$  определяются из соотношения

$$\sum_{\mu} (M_{k\mu} f_{\mu}) = c_k. \quad (9.121b)$$

Компоненты матрицы  $\mathbf{M}$  ( $M_{k\mu}$ ) имеют вид, приведенный в уравнении (9.120b), т. е. они представляют собой дифференциальные операторы или некоторые функции от  $\mathbf{r}$ . Оператор, сопряженный  $\mathbf{M}$ , т. е.  $\mathbf{M}^+$ , определяется так же, как в гл. 5 [уравнение (5.22)]:

$$(\mathbf{M}^+ \mathbf{g}, \mathbf{f}) = (\mathbf{g}, \mathbf{M}\mathbf{f}). \quad (9.122)$$

Операция умножения матриц обсуждается в приложении А.

Известно, что матрица, сопряженная данной, представляет собой матрицу, комплексно-сопряженную транспонированной матрице. Элементы матрицы  $\mathbf{M}$  являются действительными. Однако в их состав входят дифференциальные операторы вида  $\nabla \cdot D \nabla$ , и необходимо учитывать сопряженные им величины. В гл. 5 было показано, что операторы такого вида являются самосопряженными. Таким образом, элементы матрицы, сопряженной  $\mathbf{M}$ , имеют вид

$$(\mathbf{M}^+)_{ji} = M_{ij}. \quad (9.123)$$

Если обратиться к нашему примеру, то

$$M^+ = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot D_1 \nabla + \Sigma_{R1} & \Sigma_{12} \\ 0 & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \Sigma_{R2} \end{pmatrix}. \quad (9.124)$$

Формулы теории возмущений и вариационного метода в многогрупповом приближении аналогичны тем, которые приведены в гл. 5, за исключением того, что в этом приближении необходимо перемножать матрицы. Рассмотрим, например, в двухгрупповом приближении расчет величины  $\nu_c$ , проведенный в § 5.3. Уравнение переноса в матричном представлении имеет вид

$$M\phi = \nu_c F\phi. \quad (9.125)$$

Используя определение скалярного произведения и сопряженную функцию  $\phi^+$ , можно записать

$$\nu_c = (\phi^+, M\phi) / (\phi^+, F\phi). \quad (9.126)$$

Это выражение соответствует уравнению (5.40), и так же, как (5.40), оно вариационно независимо. Однако, поскольку операторы не являются самосопряженными, свойства, определенные уравнением (5.55), здесь не выполняются. Таким образом, вариационный принцип в данном случае теряет большую часть своих преимуществ.

Применение же теории возмущений к уравнению (9.126) может дать положительные результаты. Заменим  $M$  на  $M_0 + \delta M$  и  $F$  на  $F_0 + \delta F$  и используем в качестве пробных функций  $\phi_0$  и  $\phi_0^+$ :

$$M_0 \phi_0 = \nu_c^0 F_0 \phi_0 \quad (9.127a)$$

и

$$M_0^+ \phi_0^+ = \nu_c^0 F_0^+ \phi_0^+. \quad (9.127b)$$

Тогда, используя (9.126), получаем

$$\nu_c = \frac{(\phi_0^+, M_0 \phi_0) + (\phi_0^+, \delta M \phi_0)}{(\phi_0^+, F_0 \phi_0) + (\phi_0^+, \delta F \phi_0)}. \quad (9.128)$$

Деля числитель и знаменатель на  $(\phi_0^+, F_0 \phi_0)$ , раскладывая знаменатель и отмечая, что

$$\delta \nu = \nu_c - \nu_c^0 = \nu_c - \frac{(\phi_0^+, M_0 \phi_0)}{(\phi_0^+, F_0 \phi_0)}, \quad (9.129)$$

видим, что

$$\delta \nu = \frac{(\phi_0^+, \delta M \phi_0)}{(\phi_0^+, F_0 \phi_0)} - \nu_c^0 \frac{(\phi_0^+, \delta F \phi_0)}{(\phi_0^+, F_0 \phi_0)}. \quad (9.130)$$

Это выражение справедливо для любого числа групп. Для двухгрупповой матрицы  $M$  [уравнение (9.120b)] и оператора  $F$ , имеющего вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.131)$$

(т. е. делением на быстрых нейтронах пренебрегают), уравнение (9.130) приводится к следующему:

$$\begin{aligned} \delta v = \{ \int d^3r \phi_{01}^{\pm}(\mathbf{r}) (-\nabla \cdot \delta D_1 \nabla + \delta \Sigma_{R1}) \phi_{01}(\mathbf{r}) + \\ + \int d^3r \phi_{02}^{\pm}(\mathbf{r}) (\Sigma_{12} \phi_{01} - \nabla \cdot \delta D_2 \nabla \phi_{02} + \\ + \delta \Sigma_{c2} \phi_{02}) \} / \int d^3r \phi_{01} \Sigma_f \phi_{02}. \end{aligned} \quad (9.132)$$

## Задачи

9.1. Рассчитать  $E_f/E_i$  и сравнить с  $\exp(\xi)$ . Что можно заключить из этого сравнения?

9.2. Используя отношение  $E_f/E_i$ , вычислить число столкновений, необходимых для замедления нейтронов от  $2 \text{ Мэв}$  до  $0,025 \text{ эв}$  в водороде, в графите. Сравнить с такими же расчетами, основанными на величине  $\xi$ .

9.3. Предполагая, что рассеяние в системе центра инерции не изотропно, а подчиняется закону  $P(\mu_c) = A + B\mu_c$ , где  $A$  и  $B$  — константы, рассчитать  $\bar{\mu}_0$ ;  $\xi$ .

9.4. Вывести формулу для  $\overline{\Delta u \mu_0}$ .

9.5. Используя модель Вейскопфа, рассчитать вероятность того, что нейтрон с энергией  $5 \text{ Мэв}$ , который неупруго рассеивается на  $^{238}\text{U}$ , будет иметь конечную энергию в интервале от 0 до  $1 \text{ эв}$ .

9.6. Предположить, что имеется резонанс с параметрами  $E_r = 1 \text{ Мэв}$ ;  $\Gamma = 0,12 \text{ Мэв}$ ;  $\sigma_0 = 10^4 \text{ барн}$  и  $\Gamma_\nu = 0,02 \text{ Мэв}$ . Рассчитать для него резонансный интеграл для бесконечно разбавленной системы.

## Список литературы

1. Ferziger J., Zweifel P. The Theory of Neutron Slowing Down in Nuclear Reactors. N. Y., Pergamon Press, 1966.
2. Weisskopf V. «Phys. Rev.», 1937, v. 52, p. 294.
3. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Я. В. Шевелева. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Goldstein R., Cohen E. «Nucl. Sci. Engng», 1962, v. 13, p. 132.
5. Adler F. T., Nordheim L. GA 377, 1958.
6. Covlyou R. R., Bate R. R., Osborn R. K. «J. Nucl. Energy», 1956, v. 2, p. 133.

---

**НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

---

**§ 10.1. ВВЕДЕНИЕ**

В этой главе мы обсудим некоторые специальные задачи, встречающиеся при проектировании и работе реакторов. Эти задачи выбраны для иллюстрации расчетных методов, развитых в предыдущих главах. Мы не пытаемся здесь представить всесторонний обзор всех проблем, встречающихся в реакторной физике. Некоторые примеры выбраны, чтобы продемонстрировать те задачи, которые должны решаться более совершенными методами.

**§ 10.2. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛЕГКОВОДНЫХ РЕАКТОРОВ**

**Общие замечания.** Легководные энергетические реакторы разделяются на два класса — реакторы с водой под давлением (PWR) и кипящие реакторы (BWR). Имеется много проблем, как общих для обоих классов, так и специфических, присущих только реакторам данного типа. Основная проблема, возникающая при расчетах легководных реакторов, связана с большой потерей энергии нейтронов при столкновениях с ядрами водорода. Так как желательно иметь ширину энергетической группы достаточно большой для того, чтобы нейтрон мог испытать большое число столкновений в каждой группе, то многогрупповые расчеты обычно заменяются «малогрупповыми» с числом групп примерно четыре.

Групповые константы для малогрупповых методов определяются так же, как описано в гл. 9. Однако спектр нейтронов, по которому проводится усреднение констант в легководных реакторах, не может быть выведен на основе теории возраста Ферми, так как эта теория справедлива только для тяжелых замедлителей (таких, как графит). Ниже мы обсудим методы, используемые для получения спектра быстрых нейтронов.

Еще одна проблема состоит в определении спектра тепловых нейтронов. Метод *эффективной температуры*, описанный в гл. 9, слишком груб, особенно если в системе присутствует достаточно большое количество плутония, изотопы которого имеют большие резонансы в тепловой группе. Поскольку в легководных реакторах обычно используется уран 2—3%-ного обогащения, то в реакторе

присутствует большое количество  $^{238}\text{U}$ . Это означает, что при работе реактора будет накапливаться  $^{239}\text{Pu}$ , низколежащие резонансы которого искажают спектр тепловых нейтронов.

Существует еще одна проблема, связанная с изменением свойств активной зоны при работе реактора. По мере выгорания  $^{235}\text{U}$  и накопления  $^{239}\text{Pu}$  композиция тепловыделяющих элементов изменяется. В итоге выгоревшие элементы должны быть заменены свежими. Обычно не так просто определить порядок замены тепловыделяющих элементов. Это связано с тем, что в тех частях активной зоны реактора, где поток нейтронов выше, топливо *выгорает* больше, чем там, где он ниже, скажем, в периферийных областях активной зоны. Оптимизация режимов перегрузок топлива с точки зрения достижения наибольшего экономического эффекта представляет собой одну из наиболее важных и трудных проблем реакторной физики.

Кипящим реакторам присуща еще одна проблема — взаимозависимость гидравлики и нейтронной физики. В этих реакторах кипение происходит внутри активной зоны, и каждая область активной зоны обладает определенным паросодержанием, зависящим от уровня мощности в данной области. Однако уровень мощности, в свою очередь, зависит от количества присутствующего водорода, т. е. от паросодержания. Таким образом, расчет только критичности оказывается для таких реакторов недостаточным, его нужно согласовывать с распределением паросодержания по активной зоне.

Обсудим некоторые из этих проблем более подробно.

**Спектр быстрых нейтронов.** В § 9.4 показано, что возрастная теория получается из интегро-дифференциального уравнения, если разложить поток нейтронов в ряд Тейлора и провести интегрирование. Как отмечалось, эта процедура несправедлива для водорода. Обратимся к уравнениям (8.14) и (8.20) и посмотрим, что можно сделать для водородсодержащего замедлителя. Перепишем прежде всего эти уравнения в терминах летаргии и представим интеграл рассеяния в обобщенном виде, просуммировав его по всем присутствующим в системе замедлителям:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, u) + \Sigma_T(\mathbf{r}, u) \phi(\mathbf{r}, u) = S(\mathbf{r}, u) + \sum_{i=1}^n \int_{u - \ln(1/\alpha_i)}^u du' \Sigma_{si}(\mathbf{r}, u') P_i^0(u' \rightarrow u) \phi(\mathbf{r}, u'); \quad (10.1a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \nabla \phi(\mathbf{r}, u) + \Sigma_T(\mathbf{r}, u) \phi(\mathbf{r}, u) = \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{u - \ln(1/\alpha_i)}^u du' \mathbf{J}(\mathbf{r}, u') \Sigma_{si}^1(\mathbf{r}, u') P_i^1(u' \rightarrow u). \quad (10.1b) \end{aligned}$$

Суммирование проводится по всем материалам, присутствующим в реакторе: водороду, кислороду, железу, урану и т. п. Величина  $P^0(u' \rightarrow u)$  определена в уравнении (9.21).  $P^1(u' \rightarrow u)$  —

аналогичное ядро замедления для линейно анизотропного рассеяния [см. уравнение (8.186)]. Возрастная теория получается, если в уравнение (10.16) ввести следующее предположение:

$$\Sigma_{si}(u') \mathbf{J}(u') \approx \Sigma_{si}(u) \mathbf{J}(u), \quad (10.2a)$$

а в уравнении (10.1a)

$$\Sigma_{si}(u') \phi(u') \approx \Sigma_{si}(u) \phi(u) + (u' - u) \frac{\partial}{\partial u} [\Sigma_{si}(u) \phi(u)]. \quad (10.2b)$$

При таких предположениях легко показать, что

$$\int_{u - \ln(1/\alpha_i)}^u du' \mathbf{J}(u') \Sigma_{si}(u') P_i^1(u' \rightarrow u) = \mathbf{J}(u) \Sigma_{si}(u) \bar{\mu}_{0i}, \quad (10.3a)$$

где  $\bar{\mu}_{0i}$  — средний косинус угла рассеяния для ядра массой  $A_i$ , ( $\bar{\mu}_{0i} = 2/3A_i$ ) и

$$\begin{aligned} & \int_{u - \ln(1/\alpha_i)}^u du' \phi(u') \Sigma_{si}(u') P_i^0(u' \rightarrow u) = \\ & = \phi(u) \Sigma_{si}(u) - \xi_i \frac{\partial}{\partial u} [\phi(u) \Sigma_{si}(u)]. \end{aligned} \quad (10.3b)$$

Допустим, что эти предположения сделаны для всех элементов, кроме водорода (и дейтерия, если он присутствует в системе). Тогда уравнения  $P_1$ -приближения принимают вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} + (\Sigma_a + \Sigma_{sH}) \phi = S + \int_0^u du' \exp[-(u-u')] \Sigma_{sH}(u') \phi(u') du' - \\ - \frac{\partial}{\partial u} \sum_{i \neq H} \xi_i \Sigma_{si}(u) \phi(u) \end{aligned} \quad (10.4a)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \nabla \phi + \left( \Sigma_{tr} + \frac{2}{3} \Sigma_{sH} \right) \mathbf{J} = \\ & = \int_0^u \exp[-3(u'-u)/2] \Sigma_{sH}(u') \mathbf{J}(u') du', \end{aligned} \quad (10.4b)$$

где в явном виде введены функции рассеяния для водорода:

$$P_H^0(u' \rightarrow u) = \exp[-(u-u')]; \quad (10.5a)$$

$$P_H^1(u' \rightarrow u) = \exp[-3(u-u')/2]. \quad (10.5b)$$

Если использовать приближение лапласиана [т. е. заменить  $\phi$  и  $\mathbf{J}$  соответственно  $\hat{\phi} \exp(iBr)$  и  $\hat{\mathbf{J}} \exp(iBr)$ ], то в результате получим два связанных линейных интегральных уравнения для  $\hat{\phi}$  и  $\hat{\mathbf{J}}$ .

На практике уравнения (10.4а) и (10.4б) решаются, если отметить, что интегральные члены

$$\hat{\Gamma}_0^H = \int_0^u du' \exp[-(u-u')] \Sigma_{sH}(u') \hat{\phi}(u') \quad (10.6а)$$

и

$$\hat{\Gamma}_1^H = \int_0^u du' \exp[-3(u-u')/2] \Sigma_{sH}(u') \hat{J}(u') \quad (10.6б)$$

удовлетворяют простым дифференциальным уравнениям

$$\hat{\Gamma}_0^H(u) + \frac{\partial \hat{\Gamma}_0^H}{\partial u} = \Sigma_{sH}(u) \hat{\phi}(u) \quad (10.7а)$$

и

$$\hat{\Gamma}_1^H(u) + \frac{\partial \hat{\Gamma}_1^H(u)}{\partial u} = \Sigma_{sH}(u) \hat{J}(u). \quad (10.7б)$$

Если подставить определения интегральных членов (10.6а) и (10.6б) в уравнения (10.4а) и (10.4б), то получим

$$iB\hat{J} + (\Sigma_a + \Sigma_{sH}) \hat{\phi} = S + \hat{\Gamma}_0^H - \frac{\partial}{\partial u} \left[ \sum_i \xi_i \Sigma_{si} \hat{\phi}(u) \right] \quad (10.7в)$$

и

$$\frac{iB}{3} \hat{\phi} + \left( \Sigma_{tr} + \frac{2}{3} \Sigma_{sH} \right) \hat{J} = \hat{\Gamma}_1^H(u). \quad (10.7г)$$

Уравнения (10.7) решаются численно, и рассчитанные потоки нейтронов используются для получения констант. Величина  $S$  представляет собой источник нейтронов деления, а лапласиан  $B$  выбирается так, как это описано в гл. 9.

**Резонансное поглощение.** Метод расчета вероятности избежать резонансного поглощения, описанный в гл. 9, обладает высокой точностью, если известны все параметры резонанса. Поскольку обычно это не так, то для получения соответствующей информации о величине резонансного интеграла используются эмпирические данные. В ряде работ (см., например, [11]) проводились измерения резонансных интегралов в гомогенных смесях  $^{238}\text{U}$  и замедлителей, а также в гетерогенных системах, содержащих стержни из  $^{238}\text{U}$ , окруженные замедляющим материалом (рис. 10.1). Аналогичные измерения сделаны и для тория (рис. 10.2).

Очевидный способ определения точности методов расчета резонансного поглощения состоит в обсчете этими методами экспериментальных результатов. Из экспериментальных данных следует, что резонансные интегралы во всех случаях можно записать в виде

простых функций геометрических параметров и композиции. Было установлено, что если определить переменную

$$x = \Sigma_s^A / [N_F(1 - P_0^*)], \quad (10.8a)$$

где  $P_0^*$  — вероятность выхода нейтронов первого пролета (см. § 7.4), то резонансный интеграл для  $^{238}\text{U}$  можно представить в следующем виде:

$$I^{28} = 2,16 x + 2,56 + (0,0279x - 0,0537)\sqrt{T_{эф}^*}. \quad (10.86)$$

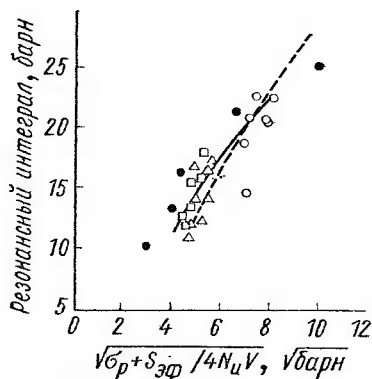


Рис. 10.1. Резонансный интеграл  $^{238}\text{U}$  (экспериментальные данные):

● — гомогенные системы [5]; □ — стержни из металлического урана [6]; △ — стержни из металлического урана [7]; ○ — стержни из окиси урана [7]; — — — — стержни из металлического урана [8]; — — — — стержни из окиси урана [8]

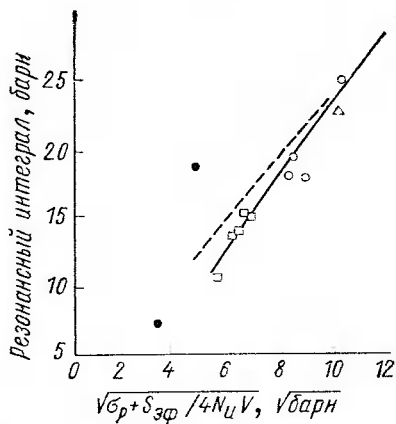


Рис. 10.2. Резонансный интеграл тория (экспериментальные данные):

● — гомогенные системы [5]; □ — стержни из металлического тория [7]; △ — стержни из металлического тория [9]; ○ — стержни из окиси тория [9]; — — — — стержни из металлического тория [10]; — — — — стержни из окиси тория [10]

Уравнение (10.86) определяет полное резонансное поглощение в  $^{238}\text{U}$ , включая 1,08 барн для поглощений, подчиняющихся закону  $1/v$ . Прежде чем пользоваться соотношением (10.86), необходимо решить два вопроса. Во-первых, нужно решить, что использовать в качестве  $T_{эф}^*$ , и, во-вторых, как проводить усреднение тех сечений, которые присутствуют в уравнении (10.8a).

Вторая проблема решается просто. Для замедлителей сечения рассеяния в резонансной области постоянны, и эти значения используются в уравнении (10.8a). Например, сечение кислорода равно 3,8 барн, а соответствующее среднее сечение, используемое для  $^{238}\text{U}$ , равно 10,7 барн.

Выбор  $T_{эф}^*$  несколько более сложен. Температура в стержне, содержащем  $^{238}\text{U}$ , может резко изменяться от центра к поверхности. В этом случае необходимо провести некоторое усреднение

температур в центре и на поверхности стержня, обозначаемых  $T_V$  и  $T_S$  соответственно:

$$T_{\text{эф}} = (\alpha T_S + \beta T_V) / (\alpha + \beta). \quad (10.8\text{в})$$

Множители  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть выбраны из расчетов методами, описанными в гл. 9, поверхностного и объемного вкладов в резонансные интегралы,  $I_s$  и  $I_V$ , и последующего взвешивания температур  $T_s$  и  $T_V$  по этим значениям.

В любом случае резонансный интеграл рассчитывается методами, рассмотренными в гл. 9\*, а затем нормируется на значение, получаемое из уравнения (10.8б). Полученный таким образом резонансный интеграл используется затем в спектральных расчетах для вычисления сечения поглощения в каждой группе. Отношение значения резонансного интеграла, полученного из однородных расчетов, к перенормированному значению называется  $I$ -фактором.

**Спектр тепловых нейтронов.** Точный метод расчета спектра тепловых нейтронов в реакторе состоит в решении уравнения

$$\begin{aligned} & [D(E)B^2 + \Sigma_T(E)] \phi(B^2, E) = \\ & = \int_0^{E_c} \Sigma_s^0(E' \rightarrow E) \phi(B^2, E') dE' + q_T(B^2). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Здесь  $\Sigma_s^0(E' \rightarrow E)$  — ядро рассеяния тепловых нейтронов, а  $E_c$  — граничная энергия тепловой группы, обычно принимаемая равной 0,625 эв. Выше этой энергии рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов, пренебрежимо мало, и можно пользоваться обычной теорией замедления. Последний член,  $q_T$ , представляет собой источник нейтронов в тепловой группе, равный, очевидно, плотности замедления при энергии  $E = E_c$ .

Ядро рассеяния тепловых нейтронов, наиболее часто используемое при расчетах, было введено Вигнером и Уилкинсом [2] в предположении, что атомы замедлителя образуют идеальный газ. С физической точки зрения это предположение является некорректным, однако спектр тепловых нейтронов, рассчитанный из уравнения (10.9) с ядром рассеяния для идеального газа, приводит к достаточно точным результатам.

Очевидно, что ядро рассеяния должно зависеть от массы замедлителя  $A$ . Для  $A = 1$ , т. е. для легководного замедлителя, уравнение (10.9) может быть приведено к дифференциальному уравнению [3], решения которого могут быть получены численно. Усредняя затем сечения по рассчитанному таким методом спектру тепловых нейтронов, получаем константы тепловой группы. Примеры рассчитанных спектров тепловых нейтронов приведены на рис. 10.3.

\* В некоторых случаях используется простой однородный расчет, все геометрические эффекты включаются через поправочные уравнения (10.8). В других программах геометрия входит в расчет резонансного интеграла.

В другом предельном случае для тяжелых замедлителей с  $A \gg 1$  также можно получить дифференциальное уравнение [3]. Для иных замедлителей необходимо искать численные решения уравнения (10.9).

**Перегрузка топлива.** Были предложены различные схемы перегрузок топлива в легководных реакторах. В одной из них активная зона реактора подразделяется на три concentric области. В конце каждого цикла работы реактора топливо внутренней области удаляется из реактора, топливо из средней области перемещается в центр, а из наружной области — в среднюю. В наружную область загружается свежее топливо. Такая схема перегрузок преследует цель выравнять энерговыделение в активной зоне, помещая менее выгоревшее топливо в центр активной зоны, где поток нейтронов достигает наибольшего значения.

В другой, более совершенной схеме перегрузок предполагается *перемена мест* отдельных тепловыделяющих сборок. Цель таких перемен — достижение наиболее равномерного выгорания топлива во всех тепловыделяющих сборках и выгрузка тех из них, в которых достигнуто максимальное выгорание. Такое перемещение тепловыделяющих сборок не является хаотическим, как это может иногда показаться случайному наблюдателю. Например, в кипящих реакторах *элементарная ячейка* состоит из четырех тепловыделяющих сборок, окружающих регулирующий стержень. Во время очередной перегрузки одна из четырех сборок заменяется свежей, а три остальные остаются в том же положении до следующей перегрузки.

В любом случае для анализа режимов перегрузок требуется следующая программа расчетов. Прежде всего проводится расчет критичности и распределения нейтронных полей для *начального состояния* реактора. Расчет выгорания урана и накопления плутония и продуктов деления проводится через короткие интервалы времени (примерно через 20 дней) в предположении, что поток нейтронов и состав активной зоны остаются в течение этого времени постоянными (более детально это обсуждается в гл. 7). В конце каждого

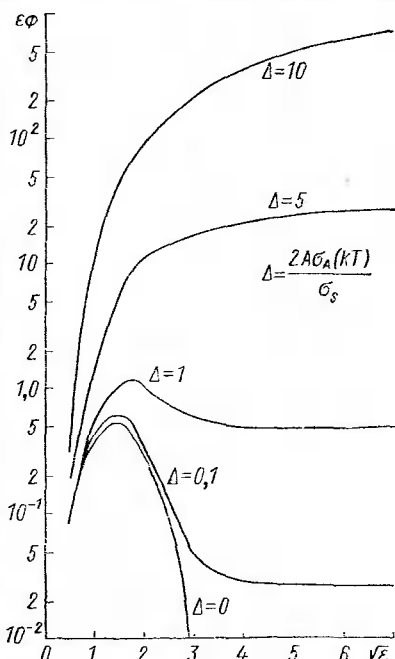


Рис. 10.3. Энергетическое распределение нейтронов для модели тяжелого газа (большие значения  $A$ ) и поглотителя, подчиняющегося закону  $1/v(\phi(\epsilon))$  — поток нейтронов на единичный интервал  $\epsilon$ ;  $\epsilon = E/(kT)$

временного шага скачкообразно изменяется композиция активной зоны, определяются новые значения нейтронных потоков и рассчитывается выгорание урана и накопление плутония для следующего интервала. Этот процесс продолжается вплоть до *конца кампании* — момента, когда реактор уже не может работать дальше, обычно из-за того, что коэффициент размножения системы становится меньше единицы. Таким способом можно исследовать различные возможные схемы перегрузок и на основе их анализа определить оптимальную стратегию режимов перегрузок.

Следует отметить, что такие расчеты весьма трудоемки и требуют большого количества машинного времени.

### § 10.3. РЕАКТОРЫ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

Реакторы на быстрых нейтронах проектируются таким образом, что в них почти отсутствуют замедляющие материалы. В результате максимум распределения нейтронов по энергии в таких реакторах смещен в сторону более высоких энергий, чем в ре-

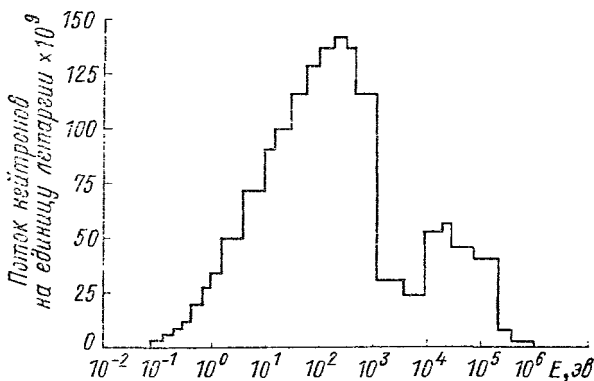


Рис. 10.4. Спектр нейтронов на внутренней поверхности стенки корпуса исследовательского реактора на быстрых нейтронах

акторах с замедлителями из  $H_2O$ ,  $D_2O$  или графита (в этом случае говорят о более *жестком спектре* нейтронов, рис. 10.4). В качестве характеристики жесткости спектра используется средняя энергия нейтронов, вызывающих деление\*. В реакторах на быстрых нейтронах средняя энергия деления лежит в пределах от нескольких *кэв* до нескольких сот *кэв*, в зависимости от типа реактора.

В реакторах с металлическим топливом средние энергии деления лежат в области 100 *кэв*. Однако из-за большей стойкости к радиационным повреждениям в энергетических реакторах на быстрых нейтронах предпочтительнее использовать окисное или

\* Обычно эту величину называют *средней энергией деления*, несмотря на опасность спутать ее со средней энергией спектра деления.

карбидное топливо. В этом случае присутствие в системе кислорода или углерода приводит к смещению спектра (из-за упругого рассеяния) в область более низких энергий. Этому же способствует и наличие в реакторе жидкого натрия, используемого в качестве теплоносителя. На самом деле смещение спектра в область более низких энергий обусловлено главным образом неупругим рассеянием нейтронов на тяжелых ядрах. Однако низкоэнергетическая область спектра, особенно в реакторах с окисным и карбидным топливом, определяется в основном упругим рассеянием.

Напомним, что сечение деления с ростом энергии уменьшается. Следовательно, из-за жесткого спектра нейтронов в реакторах на быстрых нейтронах требуется значительно больше делящегося материала, чем на тепловых. Это достигается за счет увеличения обогащения или концентрации топлива в активной зоне. В результате в реакторах на быстрых нейтронах, в отличие от реакторов на тепловых, сырьевой материал —  $^{238}\text{U}$  находится главным образом вне активной зоны, в так называемой зоне воспроизводства, состоящей из урана с низким содержанием  $^{235}\text{U}$ .

Высокие концентрации делящегося материала в активных зонах реакторов на быстрых нейтронах создают большие проблемы в обеспечении их безопасности. В частности, авария, приводящая к расплавлению активной зоны, может вызвать значительно более серьезные последствия в реакторах на быстрых нейтронах, так как топлива в них настолько много, что в результате его расплавления и после выпаривания теплоносителя в различных частях реактора могут образовываться компактные сверхкритические массы чисто делящегося материала.

Еще одна проблема, связанная с обеспечением безопасности реакторов на быстрых нейтронах, состоит в том, что время жизни мгновенных нейтронов  $l_{\text{эф}}$  в них значительно меньше, чем в реакторах на тепловых нейтронах, в которых эта величина изменяется от 100 мксек для высокообогащенных систем до 1 мсек для графитовых реакторов. В реакторах же на быстрых нейтронах  $l_{\text{эф}} \approx 10$  мксек. Таким образом, при больших изменениях реактивности (около 1 долл.) ответная реакция в реакторе на быстрых нейтронах наступит значительно быстрее, чем в реакторах на тепловых (кинетика реактора, связанная с небольшими изменениями реактивности, контролируется, конечно, запаздывающими нейтронами и одинакова для реакторов на тепловых и быстрых нейтронах).

Необходимо отметить еще одну проблему, связанную с  $\beta_{\text{эф}}$  в реакторах на быстрых нейтронах. В реакторах на тепловых нейтронах  $\beta_{\text{эф}} \approx 0,008$  (см. § 8.8). В реакторах на быстрых нейтронах с топливом из  $^{233}\text{U}$  или  $^{239}\text{Pu}$   $\beta_{\text{эф}}$  значительно меньше. Так, для плутониевых бридеров  $\beta_{\text{эф}} \approx 0,003$ . Очевидно, что чем меньше  $\beta_{\text{эф}}$ , тем труднее регулирование реактора (для реакторов с топливом из  $^{233}\text{U}$   $\beta_{\text{эф}}$  также  $\sim 0,003$ , так что аналогичные выводы справедливы и для них).

Регулирование реакторов на быстрых нейтронах затруднено также из-за отсутствия материалов, сильно поглощающих быстрые нейтроны. Это можно заключить из профиля потока нейтронов, приведенного на рис. 10.5.

Большие трудности могут возникнуть в реакторах на быстрых нейтронах из-за потери теплоносителя. В легководных реакторах водород имеет такой сильный положительный эффект реактивности (из-за его замедляющих свойств), что любая потеря теплоносителя приводит к остановке реактора. При этом тепловыделяющие

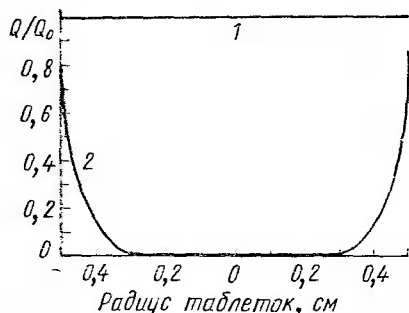


Рис. 10.5. Ослабление потока нейтронов в таблетках из карбида бора:

1 — средний свободный пробег по поглощению для спектра быстрых нейтронов равен 23 см; 2 — средний свободный пробег по поглощению для спектра тепловых нейтронов равен 0,012 см

элементы могут все-таки расплавиться из-за остаточного энерговыведения, однако возникновение сверхкритической ситуации маловероятно. В реакторе же на быстрых нейтронах потеря натриевого теплоносителя может легко привести к возрастанию реактивности. Причины этого следующие.

Присутствие натрия в активной зоне реактора на быстрых нейтронах приводит к двум важным физическим эффектам — рассеянию нейтронов и снижению энергии нейтронов, сопровождающему рассеяние. Рассеяние предотвращает утечку нейтронов из активной зоны, т. е. натрий действует как своего рода внутренний отражатель. Таким образом, при потере теплоносителя за счет этого эффекта происходит уменьшение реактивности, так как большее число нейтронов утекает из активной зоны. С другой стороны, второй эффект может привести к положительной компоненте реактивности. Причина этого состоит в том, что при потере теплоносителя спектр нейтронов ужестчается, при этом отношение сечения захвата к сечению деления делящегося материала уменьшается и (в меньшей степени) сечение деления *сырьевого* материала возрастает. В зависимости от размеров (и формы) активной зоны реакторов на быстрых нейтронах результирующий эффект может оказаться как положительным, так и отрицательным: например, активная зона с большой утечкой нейтронов будет иметь отрицательный коэффициент реактивности натрия, и наоборот.

Все эти трудности отражаются в тех расчетных проблемах, которые приходится решать при проектировании реакторов на быстрых нейтронах. Например, чтобы удовлетворить необходимым критериям безопасности, требуется очень тщательный анализ коэффициентов реактивности. Для легководных реакторов по отмеченным выше причинам анализ безопасности не представляет слишком больших трудностей.

Как правило, поведение реакторов на тепловых нейтронах не очень чувствительно к детальным характеристикам спектра быстрых нейтронов, и обычно оказывается достаточным простой расчет быстрого спектра. Следовательно, основные усилия при проектировании реакторов на тепловых нейтронах можно сосредоточить на области тепловых энергий, где ядерные данные измерены более точно, сечения известны лучше и расчетные методы развиты значительно больше\* (в качестве примера отметим, что известная программа MUFT, используемая для расчета спектра быстрых нейтронов в легководных реакторах, имеет только 54 энергетические группы).

В отличие от реакторов на тепловых нейтронах, в реакторах на быстрых, если не известен спектр быстрых нейтронов, то не известно ничего. Таким образом, все те трудности, которые *не существовали* для реакторов на тепловых нейтронах, имеют место для реакторов на быстрых нейтронах. Не очень точные расчетные методы должны использоваться в энергетических областях, где сечения известны очень плохо; это особенно справедливо для активных зон с окисным или карбидным топливом, спектр нейтронов в которых более мягкий. Существует много расчетных проблем, однако наиболее серьезная из них связана с тем, что многогрупповая теория может оказаться недостаточной точной, если только не используется большое число групп; в этом случае потребность в машинном времени может оказаться настолько большой, что возможно рассмотрение только одномерных задач. В действительности, из-за большой диффузионной длины, сравнимой с размерами активной зоны для систем на быстрых нейтронах, диффузионная теория оказывается в ряде случаев неприменимой, и требуется использование расчетов, основанных на теории переноса нейтронов. (Эта же проблема присуща и реакторам на тепловых нейтронах, однако чаще всего она относится к транспортным расчетам ячейки. Причина этого заключается в большой чувствительности реакторов на тепловых нейтронах к детальному пространственному распределению источников деления. Однако очевидно, что теорию переноса значительно легче применять к ячейкам, чем к большим областям реактора.) Библиотеки групповых констант для реакторов на быстрых нейтронах иногда содержат сотни групп. Необходимость такого числа групп обусловлена отмеченными выше факторами. Несколько лет назад программы расчета спектра обычно не использовались при проектировании реакторов на быстрых нейтронах, вместо них применялись стандартные системы групповых констант. Однако в настоящее время такие программы используются очень широко.

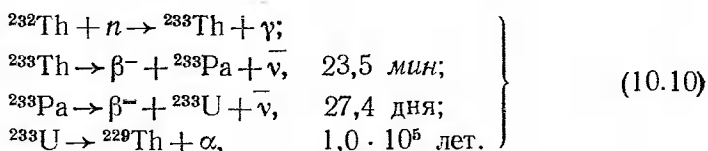
Из-за большого числа отмеченных выше проблем, особенно из-за проблемы обеспечения безопасности, промышленные реакторы на быстрых нейтронах получают широкое распространение не ранее чем по крайней мере через десять лет.

\* Так как тепловые нейтроны не диффундируют так далеко, как быстрые, то спектральное приближение, используемое в расчетах, оказывается значительно более точным в реакторах на тепловых, чем на быстрых нейтронах.

## § 10.4. ТОРИЕВЫЙ КОНВЕРТЕР

Как обсуждалось в гл. 1, основное достоинство реакторов на быстрых нейтронах состоит в том, что из-за высоких значений  $\eta$  для  $^{239}\text{Pu}$  и  $^{235}\text{U}$  в быстрой области энергии ( $\eta \approx 2,7 \div 2,8$ ) возможно воспроизводство плутония. Для тепловых нейтронов значение  $\eta$  и для  $^{235}\text{U}$ , и для  $^{239}\text{Pu}$  слишком мало, чтобы можно было осуществить воспроизводство плутония\* (см. рис. 1.1). Кроме того, в гл. 1 отмечалось, что в принципе возможно воспроизводство  $^{233}\text{U}$  из  $^{232}\text{Th}$ , так как  $\eta$  для  $^{233}\text{U}$  в области тепловых энергий  $\approx 2,28^{**}$ . Таким образом,  $\eta - 2 = 0,28$ , что очень близко к предельному условию, при котором делящегося материала производится больше, чем расходуется.

Реакции, происходящие в реакторах с ториевым циклом, имеют вид:



Большинство проблем, возникающих при изучении ториевых циклов, связано с отсутствием надежных данных по ядерным сечениям. Кроме того, существуют и некоторые инженерные проблемы, сдерживающие развитие ториевых конвертеров; однако основная причина того, что большее внимание уделяется реакторам на быстрых нейтронах — воспроизводителям, состоит в том, что значение  $\eta$  для таких реакторов выше, чем для реакторов с ториевым топливом, в результате чего воспроизводится больше делящегося материала.

С другой стороны, проблемы безопасности в ториевых конвертерах не настолько серьезны, как в реакторах на быстрых нейтронах.

## § 10.5. ТЯЖЕЛОВОДНЫЕ РЕАКТОРЫ

Тяжеловодные реакторы широко распространены в Канаде; однако в США, за исключением некоторого числа исследовательских и промышленных реакторов, тяжеловодные реакторы развиты сравнительно слабо.

Наиболее важной характеристикой тяжеловодных реакторов является пренебрежимо низкое, по сравнению с обычным водородом, сечение поглощения дейтерия. По этой причине тяжеловодные реакторы имеют значительно меньшие критические массы и более

\* Напомним, что необходимое условие воспроизводства имеет вид  $\eta - 2 > 0$ . На практике  $\eta - 2$  должно быть значительно больше нуля (см. § 1.2).

\*\* Реакторы на быстрых нейтронах также хорошо работают на ториевом топливе.

низкие значения сечений деления  $\Sigma_f$ . Так как при данном уровне мощности

$$\text{Удельная мощность} \approx \Sigma_f \phi, \quad (10.11)$$

а  $\Sigma_f$  в тяжеловодных реакторах ниже, чем в легководных, то поток нейтронов  $\phi$  в них значительно выше. Именно поэтому тяжеловодные реакторы являются хорошими исследовательскими реакторами, т. е. они служат мощными источниками тепловых нейтронов. С другой стороны, в реакторах с высоким потоком нейтронов необходимо предусматривать достаточную биологическую защиту. Однако это не столь сложная проблема, как могло бы показаться на первый взгляд, так как обеспечить защиту от тепловых нейтронов сравнительно просто. Дозы же излучения от быстрых нейтронов и  $\gamma$ -излучения пропорциональны интенсивности делений, т. е. мощности реактора.

Так как под действием  $\gamma$ -излучения дейтерий распадается с пороговой энергией 2,24 Мэв



в результате чего испускаются запаздывающие нейтроны, а также из-за запаздывающего  $\gamma$ -излучения, испускаемого продуктами деления, в работающем тяжеловодном реакторе имеется большее число групп запаздывающих нейтронов, чем в легководном. Это несколько усложняет анализ кинетики реактора\*, приводя даже к возможности появления отрицательных эффективных долей запаздывающих нейтронов (см. § 4.4).

Одна из основных трудностей, возникающих при изучении тяжеловодных реакторов, связана с расчетом спектра быстрых нейтронов. Дейтерий обладает слишком низкой массой ( $A = 2$ ), чтобы для этой цели была применима возрастная теория. Использование же теории переноса нейтронов применительно к дейтерию оказывается более сложным, чем для водорода. Например, пределы в интегралах замедления вместо  $(0, u)$  становятся в этом случае  $(u - \ln(1/\alpha_D), u)$ , где  $\alpha_D = [(A - 1)/(A + 1)]^2 = 1/9$ . Это приводит к существенному усложнению численных расчетов. В частности, система двух связанных интегральных уравнений не может быть приведена к более легким для изучения связанным дифференциальным уравнениям типа (10.7).

Однако Грейлинг и Герцель [4] предложили приближенную схему, с помощью которой интегральные уравнения можно привести к дифференциальным. Если интервал интегрирования в интегралах замедления можно распространить до нуля, то вместо интегрального уравнения можно записать дифференциальное. Грейлинг и Герцель сконструировали ядро замедления таким образом, что интеграл от него на интервале  $(0, u)$  равен интегралу от точного ядра замедления на интервале  $(u - \ln(1/\alpha), u)$ . В результате поток

\* Это относится также и к реакторам с бериллиевым замедлителем из-за реакции  $\text{Be}^9 + \gamma \rightarrow n + 2\alpha$ .

ток быстрых нейтронов можно получить как решение четырех независимых дифференциальных уравнений [11]:

$$iB\hat{J} + \Sigma_a \hat{\phi} = S_0 - \partial \hat{I}_D^0 / \partial u; \quad (10.13a)$$

$$\Sigma_{tr} \hat{J} + iB \hat{\phi} = \partial \hat{I}_D^1 / \partial u; \quad (10.13б)$$

$$I_D^0 + \lambda_0 \partial I_D^0 / \partial u = \hat{\phi} \xi \Sigma_{sD}; \quad (10.13в)$$

$$I_D^1 + \lambda_1 \partial I_D^1 / \partial u = \hat{J}_1 \xi \Sigma_{sD}, \quad (10.13г)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{1 - \alpha [1 + \ln(1/\alpha) + (1/2) \ln^2(1/\alpha)]}{1 - \alpha [1 + \ln(1/\alpha)]} = 0,593; \quad (10.14a)$$

$$\lambda_1 = - \left( \frac{(1+\gamma)^2}{4\gamma} \left\{ \frac{(1+\gamma)}{3} \left[ \frac{8}{9} - \alpha^{3/2} \left( \ln^2 \frac{1}{\alpha} - \frac{4}{3} \ln \frac{1}{\alpha} + \frac{8}{9} \right) \right] \right\} - \right. \\ \left. - (1-\gamma) \left[ 8 - \alpha^{1/2} \left( \ln^2 \frac{1}{\alpha} - 4 \ln \frac{1}{\alpha} + 8 \right) \right] \right) / \xi = -693,6; \quad (10.14б)$$

$$\xi = \frac{(1+\gamma)^2}{\gamma^2} \left\{ \frac{1+\gamma}{9} \left[ 1 - \alpha^{3/2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\alpha} + 1 \right) \right] - \right. \\ \left. - (1-\gamma) \left[ 1 - \alpha^{1/2} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} + 1 \right) \right] \right\} = -0,011. \quad (10.14в)$$

Приведенные численные значения относятся к случаю  $A = 2$ . Характерное решение этих уравнений показано на рис. 10.6.

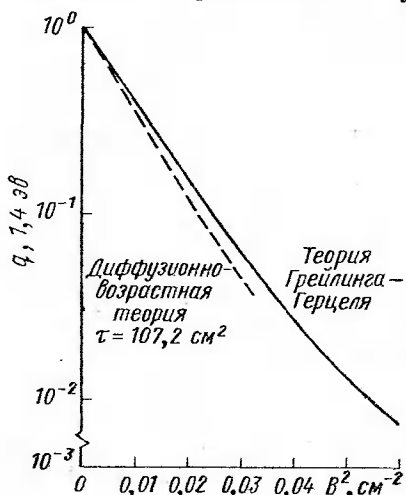


Рис. 10.6. Расчетная плотность замедления (вероятность избежать утечки) в тяжелой воде

Эти уравнения дают более точные решения, чем теория возраста Ферми, даже для таких элементов, как кислород, графит и т. д. Однако основное их назначение состоит в расчете спектров тяжеловодных реакторов.

Проектирование и работа тяжеловодных реакторов сталкиваются с большим числом инженерных проблем, связанных, в частности, с поведением большого количества такого экзотического материала, как тяжелая вода, в условиях облучения. Рассмотрение этих проблем выходит за рамки настоящей книги.

## § 10.6. ГРАФИТОВЫЕ РЕАКТОРЫ

Графитовые реакторы сегодня представляют скорее исторический, чем практический интерес\*, поэтому обсуждение их будет очень кратким. Когда в 1941—1942 гг. американские ученые работали над проблемой создания ядерного реактора, в качестве топлива можно было использовать только естественный уран, а тяжелой воды в достаточном для реактора количестве тогда не было.

В экспоненциальных экспериментах было показано, что  $k_{\infty} < 1$  для любой гомогенной смеси графита и естественного урана. Однако вскоре Ферми установил, что разделяя графит и уран, т. е. создавая гетерогенную структуру активной зоны, можно увеличить  $k_{\infty}$ . Это связано с тем, что эффекты самоэкранировки приводят к уменьшению  $f$  и возрастанию  $p$ , оставляя другие параметры в формуле четырех сомножителей практически неизменными. Если при этом возрастание  $p$  преобладает над уменьшением  $f$ , то результирующим эффектом может стать возрастание произведения  $pf$ , а следовательно, и  $k_{\infty} = \eta \epsilon p f$ .

Это обстоятельство и было использовано на практике. Значения  $p$  и  $f$  для любой гетерогенной системы можно рассчитать из формул, приведенных в гл. 2 и 8. Типичные значения  $p$  представлены на рис. 10.7.

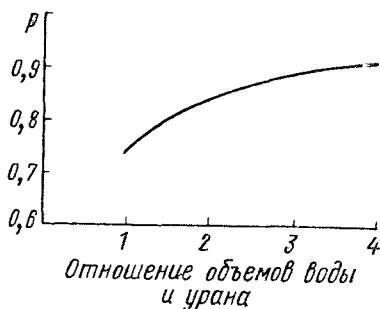


Рис. 10.7. Вероятность избежать резонансного поглощения для урановодных решеток

## § 10.7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Когда мощность, а следовательно, и температура реактора возрастает, то физические свойства активной зоны изменяются. Характер этих изменений различен.

Для легководных реакторов основной вклад в эти изменения вносит коэффициент теплового расширения воды. Таким образом, увеличение температуры приводит к уменьшению эффективной плотности воды в активной зоне (в результате чего возрастает утечка нейтронов), а также к уменьшению отношения ядер водорода и топлива в активной зоне. Последний эффект в легководном реакторе с низкообогащенным топливом приводит к тому, что резонансное поглощение возрастает больше, чем коэффициент использования тепловых нейтронов, что дает основной вклад в отрицательный температурный коэффициент реактивности в таких реакторах.

\* Речь идет о США. — Прим. перев.

Другой эффект состоит в ужесточении спектра тепловых нейтронов при возрастании температуры замедлителя. Согласно уравнению (9.114), с возрастанием температуры замедлителя  $T$  увеличивается и эффективная температура спектра тепловых нейтронов  $T'$ . В результате ужесточения спектра изменяются усредненные по тепловой группе сечения. Например, для сечений поглощения, подчиняющихся закону  $1/v$ , увеличение температуры замедлителя приводит к уменьшению реактивности. Причина такого эффекта состоит в том, что сечение деления спадает с энергией быстрее, чем по закону  $1/v$ , поэтому отношение  $\nu\Sigma_f/\Sigma_a$  с ростом температуры уменьшается.

Для изучения этих эффектов вводится определение температурного коэффициента реактивности:

$$C(T) = \delta\rho/\delta T. \quad (10.15)$$

Если коэффициент  $C(T)$  положителен, то возрастание температуры будет вызывать увеличение реактивности. Это, в свою очередь, вновь приводит к возрастанию мощности (и температуры), что способствует дальнейшему росту реактивности. Очевидно, что это случай нестабильного состояния реактора, приводящего к расплавлению активной зоны.

В активных зонах с отрицательным температурным коэффициентом реактивности возрастание мощности ведет к уменьшению реактивности. Это то состояние, в котором реактор является саморегулируемым и стабильным.

Необходимо, однако, проявлять осторожность при оценке стабильности реактора; даже при отрицательном температурном коэффициенте реактивности реактор может оказаться нестабильным. Это может произойти, например, если максимальные скачки температуры таковы, что приводят к расплавлению активной зоны. Кроме того, вклады в температурный коэффициент реактивности могут давать эффекты, по-разному развивающиеся во времени. Например, ужесточение спектра тепловых нейтронов должно происходить практически одновременно с ростом температуры. С другой стороны, те эффекты реактивности, которые обусловлены тепловым расширением конструктивных элементов реактора, не проявляются до тех пор, пока не возрастет температура топлива. Если реактор имеет мгновенный положительный температурный коэффициент реактивности и более медленный отрицательный коэффициент, то начальное возрастание температуры может привести к расплавлению активной зоны прежде, чем начнет действовать отрицательный температурный эффект.

Существует целый ряд эффектов, приводящих к отрицательным температурным коэффициентам реактивности\*. Мы уже обсуждали

\* Из-за отрицательной обратной связи, при которой введение в реактор положительной реактивности приводит к возрастанию мощности и температуры. Это, в свою очередь, вызывает появление отрицательной реактивности, которая ограничивает этот рост мощности и температуры.

в § 9.7 и 10.2 температурную зависимость резонансного поглощения. В частности, было отмечено, что зависимость резонансного интеграла от температуры может быть представлена в виде закона  $\sqrt{T}$ . Следовательно, вероятность избежать резонансного поглощения уменьшается с ростом температуры. Таким образом, температурный коэффициент реактивности резонансного поглощения, известный как *коэффициент Доплера*, отрицателен. Этот эффект имеет большое значение, особенно в реакторах на быстрых нейтронах, так как резонансное поглощение весьма важно в жестких спектрах. Он важен также и для реакторов с низкообогащенным топливом, таких, как PWR и BWR.

Совершенно ясно, что точный расчет температурных коэффициентов имеет особую ценность для установления того, насколько удовлетворяет данный реактор условиям ядерной безопасности. В связи с этим температурные коэффициенты были известны также как *коэффициенты опасности*.

Мы затронули здесь (и весьма поверхностно) только некоторые проблемы, встречающиеся при изучении ядерных реакторов. Очевидно, что при проектировании реактора все эти проблемы должны быть рассмотрены в максимальной степени подробно и глубоко [12].

### Список литературы

1. Strawbridge L. E., Barry R. F. «Nucl. Sci. Engng», 1965, v. 23, p. 58.
2. Wigner E. P., Wilkens J. E. Rept. AECD 2275, 1944.
3. Williams M. M. R. The Slowing Down and Thermalization of Neutrons. N. Y., 1966.
4. Greuling E., Goerzel G. «Nucl. Sci. Engng», 1960, v. 7, p. 69.
5. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. Под ред. Я. В. Шевелева. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Kouts H. e. a. PICG P/1841, 1958.
7. Klein D. e. a. «Nucl. Sci. Engng», 1958, v. 3, p. 403.
8. Hellstrand E. «J. Appl. Phys.», 1957, v. 28, p. 1443.
9. Edlund M. e. a. PICG P/2405, 1958.
10. Pettus W. BAW-TW-203, 1959.
11. Ferziger J., Zweifel P. The Theory of Neutron Slowing Down in Nuclear Reactors. N. Y., Pergamon Press, 1966.
12. Akcasu A. Z., Lellouche G. S., Shotkin L. M. Mathematical Methods in Nuclear Reactor Dynamics. N. Y. Academic Press, 1971.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### МАТРИЦЫ

Матричное исчисление широко используется в реакторной физике, и прежде чем приступить к изучению пятой и последующих глав, необходимо ознакомиться с основными положениями теории матриц.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_1 x + b_1 y = c_1; \quad (\text{A.1a})$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2. \quad (\text{A.1б})$$

Если определить матрицу  $\mathbf{M}$  в виде

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

а векторы-столбцы  $\phi$  и  $\psi$  как

$$\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

о уравнения (A.1) можно переписать в компактном виде:

$$\mathbf{M}\phi = \psi. \quad (\text{A.4})$$

Введем понятие произведения матриц. Если определить элемент матрицы, стоящий в  $i$  строке и  $j$  столбце, как  $M_{ij}$ , то произведение двух матриц  $\mathbf{MN}$  равно

$$(\mathbf{MN})_{ij} = \sum_k M_{ik} N_{kj}. \quad (\text{A.5})$$

Отметим, что произведение двух матриц представляет собой также матрицу. Матрица  $\mathbf{M}$ , определенная уравнением (A.2), служит примером матрицы специального типа, а именно квадратной матрицы 2-го ранга. Матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  в уравнении (A.5) не обязательно должны быть квадратными, однако требуется, чтобы число столбцов матрицы  $\mathbf{M}$  было равно числу строк матрицы  $\mathbf{N}$ ; в противном случае произведение матрицы определить нельзя.

Векторы-столбцы  $\phi$  и  $\psi$ , определенные в уравнении (A.3), представляют собой в действительности матрицы размером  $2 \times 1$ , т. е. состоят из 2 строк и 1 столбца. Как легко видеть, используя определение (A.5), произведение  $\mathbf{A}\phi$  есть матрица размером  $2 \times 1$ . В общем случае, если матрица  $\mathbf{M}$  — матрица размером  $m_1 \times m_2$ , а  $\mathbf{N}$  — матрица размером  $m_2 \times n_2$ , то произведение  $\mathbf{MN}$  есть матрица размером  $m_1 \times n_2$ .

Некоторые матрицы имеют обратные значения, т. е. если  $\mathbf{M}$  — матрица, то может существовать обратная ей матрица  $\mathbf{M}^{-1}$ , обладающая свойством

$$\mathbf{MM}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}, \quad (\text{A.6})$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, т. е. матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные элементы равны 0. В терминах  $\delta$ -символа Кронекера, определенного в гл. 5, элементы единичной матрицы  $\mathbf{I}$  можно записать в виде

$$(\mathbf{I})_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.7})$$

Решение уравнения (A.4), выраженное через обратную матрицу  $\mathbf{M}^{-1}$ , имеет вид

$$\phi = \mathbf{M}^{-1} \psi.$$

Вспоминая правило Крамера для решения таких систем, как (A.1), мы видим, что обратная матрица  $\mathbf{M}^{-1}$  существует, если определитель матрицы  $\mathbf{M}$  не равен нулю, т. е. если

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

Правило Крамера в действительности есть не что иное, как метод расчета  $\mathbf{M}^{-1}$ .

Матрицы, так же как и линейные операторы, рассмотренные в гл. 5, имеют собственные функции и собственные значения. Квадратная матрица  $N$ -го ранга имеет  $N$  собственных значений (некоторые из них могут совпадать). Собственные значения и собственные функции рассчитываются прямым методом. Собственные функции матрицы  $\mathbf{M}$  удовлетворяют следующему уравнению:

$$\mathbf{M}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.9})$$

Переписывая это уравнение в виде

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\psi_\lambda = 0, \quad (\text{A.10})$$

получаем (вновь с помощью правила Крамера), что эта однородная система имеет решение только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов уравнения, обращается в нуль, т. е.

$$\det \begin{vmatrix} \mathbf{M} - \lambda\mathbf{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda & \dots & \dots & M_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{N1} & \dots & \dots & \dots & M_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.11})$$

(так как это уравнение  $N$ -й степени, то становится ясно, почему имеет-ся  $N$  собственных значений, т. е.  $N$  корней уравнения (A.11)). Уравнение (A.11) называется *секулярным уравнением*.

После того как получено  $N$  собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, N$  собственных векторов\*  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$  легко найти следующим образом: возвращаясь к уравнению (A.9) и подставляя в него  $\lambda_i$ , получаем

$$\mathbf{M}\psi_{\lambda_i} = \lambda_i \psi_{\lambda_i}, \quad (\text{A.12})$$

или, записывая это уравнение в явном виде:

$$M_{11}(\psi_{\lambda_i})_1 + M_{12}(\psi_{\lambda_i})_2 + \dots + M_{1N}(\psi_{\lambda_i})_N = \lambda_i(\psi_{\lambda_i})_1; \quad (\text{A.13a})$$

$$M_{21}(\psi_{\lambda_i})_1 + M_{22}(\psi_{\lambda_i})_2 + \dots + M_{2N}(\psi_{\lambda_i})_N = \lambda_i(\psi_{\lambda_i})_2; \quad (\text{A.13б})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M_{N1}(\psi_{\lambda_i})_1 + \dots + M_{NN}(\psi_{\lambda_i})_N = \lambda_i(\psi_{\lambda_i})_N. \quad (\text{A.13в})$$

\* В некоторых случаях матрица может быть *вырожденной*, т. е. некоторые собственные значения могут не иметь собственных векторов.

Эта система уравнений необязательно имеет решение. В действительности (А.11) является необходимым, но не достаточным условием того, что решение системы уравнений (А.10) существует. Предположим, что система уравнений (А.10) имеет решение. Тогда каждый собственный вектор  $\psi_{\lambda_i}$  содержит  $N$  неизвестных  $(\psi_{\lambda_i})_1, (\psi_{\lambda_i})_2, \dots, (\psi_{\lambda_i})_N$ . Так как система однородна, то одно из этих неизвестных будет произвольным. Иногда его выбирают из условия нормировки собственного вектора:

$$\psi^T \psi = 1, \quad (\text{А.14})$$

где транспонированная матрица, обозначенная индексом  $T$ , получается перестановкой рядов и столбцов. Нетрудно показать, что матрица, полученная перемножением  $\psi$  на  $\psi^T$ , представляет собой квадратную матрицу  $N$ -го ранга.

Обычно произведение матриц зависит от порядка их перемножения, т. е. если  $A$  и  $B$  — две матрицы, то обычно

$$AB \neq BA. \quad (\text{А.15})$$

Наконец, отметим, что аналогами самосопряженных операторов, рассмотренных в гл. 5, являются эрмитовы матрицы, т. е. матрицы, элементы которых удовлетворяют условию

$$A_{ij} = A_{ji}^* \quad (\text{А.16})$$

(так как большинство матриц в реакторной физике являются действительными, то условие (А.16) сводится к следующему:  $A_{ij} = A_{ji}$  или  $A = A^T$ ). Действительная эрмитова матрица является *симметричной*.

Скалярные произведения матриц определяются следующим образом:

$$(\phi, \psi) = \phi^T \psi \quad (\text{А.17а})$$

и

$$(\phi, A\psi) = \phi^T A\psi = (\phi^T) (A\psi) = (\phi^T A) \psi, \quad (\text{А.17б})$$

где  $\phi$  и  $\psi$  — матрицы размером  $1 \times N$  (векторы-столбцы), а  $A$  — матрица размером  $N \times N$ . Иногда элементами матрицы  $A$  являются дифференциальные операторы. Тогда скалярное произведение будет комбинацией произведения и интегрирования матриц, т. е.

$$(\phi, \psi) = \int d\omega \phi^T \psi; \quad (\text{А.18а})$$

$$(\phi, A\psi) = \int d\omega \phi^T A\psi \quad (\text{А.18б})$$

и т. д.

## Задачи

А.1. Показать, что  $\phi\phi^T$  представляет собой матрицу размером  $N \times N$ , если  $\phi$  — вектор-столбец, состоящий из  $N$  элементов.

А.2. Рассчитать собственные значения и собственные функции некоторой матрицы.

А.3. Используя уравнение (5.22), которое определяет сопряженный оператор, доказать, что матрица, сопряженная  $A$ , имеет элементы, удовлетворяющие уравнению (А.16).

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### ДЕЛЬТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В настоящей книге мы рассматривали распределения нейтронов, испускаемых источниками, локализованными в точку, линию и т. д. Эти физические идеализации источников математически описываются  $\delta$ -распределением (или  $\delta$ -функцией) Дирака.

Дирак предложил функцию  $\delta(x)$ , обладающую следующими свойствами:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad (\text{Б.1а})$$

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in (a, b); \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (\text{Б.1б})$$

(Обозначение  $0 \in (a, b)$  означает, что точка  $x = 0$  принадлежит открытому интервалу  $(a, b)$ , т. е.  $a < 0 < b$ .) Уравнения (Б.1) описывают физическую идеализацию точечного источника, размещенного в точке  $x = 0$  [уравнение (Б.1а)] и обладающего конечной «мощностью» [уравнение (Б.1б)].

Функций со свойствами, определенными уравнениями (Б.1а) и (Б.1б), не существует. Однако можно определить  $\delta(x)$  как линейный функционал в пространстве пробных функций с определенными свойствами. Рассмотрим систему всех функций, у которых существуют производные любого порядка (в математике это пространство называется  $C_\infty$ ). Для простоты рассмотрим только функции одной переменной  $x$ . Потребуем далее, чтобы эти функции обращались в нуль для  $|x|$  больших, чем некоторая конечная величина. Такое пространство функций называется пространством  $D$ .

Рассмотрим теперь линейные функционалы на этом пространстве  $D$ , т. е. сопоставим каждой функции в пространстве  $D$  (назовем ее  $\phi_n$ ) комплексное число  $T\phi_n$ . Условие линейности означает, как и в случае операторов (см. гл. 5), что если  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — комплексные числа, то

$$T(\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2) = \alpha_1 T\phi_1 + \alpha_2 T\phi_2. \quad (\text{Б.2})$$

Распределения определяют тогда как линейные функционалы на соответствующем пространстве пробных функций, скажем на пространстве  $D$ . «Дельта-функция» в действительности является  $\delta$ -распределением, т. е. линейным функционалом\*, который связывает функцию  $\phi_n(x)$  с величиной  $\phi_n(0)$ :

$$\delta(x) \phi_n(x) = \phi_n(0). \quad (\text{Б.3})$$

Из уравнения (Б.3) видно, что

$$\delta(x - x_0) \phi_n(x) = \phi_n(x_0). \quad (\text{Б.4})$$

Производную от распределения находят аналогично формуле интегрирования по частям:

$$T' \phi_n = -T \phi_n'. \quad (\text{Б.5})$$

Другим примером распределения является распределение Хевисайда  $H$ , имеющее такой вид:

$$H \phi_n(x) = \int_0^\infty \phi_n(x) dx. \quad (\text{Б.6})$$

Согласно (Б.5),

$$H' \phi_n(x) = -H \phi_n'(x) = -\int_0^\infty \phi_n'(x) dx = \phi_n(0), \quad (\text{Б.7})$$

\* Отметим разницу между функционалом и оператором. Функционал связывает комплексное число с функцией, а оператор — одну функцию с другой.

так как, согласно введенному выше предположению,  $\phi_n(\infty) = 0$ . Следовательно,

$$H' = \delta. \quad (\text{Б.8})$$

Обычные преобразования, которые физики и инженеры проделывают с  $\delta$ -распределением и распределением Хевисайда, можно строго доказать с помощью приведенной выше теории. Например, часто пишут формулы, подобные

$$\int f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0), \quad (\text{Б.9})$$

понимая, что они являются символическими для соотношений типа (Б.4).

Точечный источник представляется в виде произведения  $\delta$ -функционалов:

$$\delta(r-r_0) \equiv \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0). \quad (\text{Б.10})$$

Эти три функционала действуют в трех различных пространствах (т. е. по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ ).

При дифференцировании разрывной функции требуется определенная осторожность. Например, рассмотрим  $f(x) = |x|$ . Очевидно, что  $f'(x) = 1$  для  $x > 0$  и  $f'(x) = -1$  для  $x < 0$ . Таким образом,  $f''(x)$  должно быть  $\delta$ -распределением, т. е.

$$f''(x) = C\delta(x), \quad (\text{Б.11})$$

где  $C$  — константа, которую следует определить. Интегрируя уравнение (Б.11) от  $-\varepsilon$  до  $+\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), находим

$$f'(+\varepsilon) - f'(-\varepsilon) = C, \quad (\text{Б.12a})$$

так что

$$C = 2, \quad (\text{Б.12б})$$

т. е. коэффициент  $\delta$ -распределения равен амплитуде «скачка».

Наконец, отметим, что  $\delta$ -распределение имеет фурье-представление. Запишем символически

$$\delta(x) = \int \bar{f}(k) \exp(ikx) dk, \quad (\text{Б.13a})$$

или, применяя формулу обратного преобразования Фурье,

$$\bar{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int f(x) \exp(-ikx) dx; \quad (\text{Б.13б})$$

$$\bar{f}(k) = 1/2\pi. \quad (\text{Б.13в})$$

Таким образом, фурье-представление  $\delta$ -функций имеет вид

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(ikx) dk. \quad (\text{Б.14})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА

Метод интегральных преобразований является мощным оружием для решения определенных дифференциальных и интегральных уравнений.

Преобразование Фурье  $\bar{f}(k)$  функции  $f(x)$  определяется соотношением

$$\bar{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ikx) dx. \quad (\text{В.1})$$

Обратное преобразование определяется в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \bar{f}(k) \exp(-ikx) dk. \quad (\text{B.2})$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \exp(ikx) dx = -ik \bar{f}(k), \quad (\text{B.3})$$

где последнее соотношение получается интегрированием по частям в предположении, что  $f(\pm\infty) = 0$  (что по существу выполняется для всех функций, представляющих интерес в реакторной физике).

Цель метода интегральных преобразований состоит в том, чтобы с его помощью определенные дифференциальные и интегральные уравнения свести к алгебраическим уравнениям, решать которые несравненно легче. Затем, применяя обратное преобразование (B.2), можно получить решение исходного уравнения.

В качестве примера рассмотрим уравнение, описывающее диффузию нейтронов от плоского источника в бесконечной однородной среде:

$$-\partial^2 \phi / \partial x^2 + \kappa^2 \phi = Q \delta(x) / D. \quad (\text{B.4})$$

Используя дважды уравнение (B.3), получаем

$$\overline{\partial^2 \phi / \partial x^2} = -k^2 \bar{\phi}(k). \quad (\text{B.5})$$

Кроме того (см. приложение Б),

$$\overline{\delta(x)} = 1. \quad (\text{B.6})$$

Таким образом, фурье-преобразование уравнения (B.4) имеет вид

$$k^2 \bar{\phi} + \kappa^2 \bar{\phi} = Q/D, \quad (\text{B.7a})$$

откуда

$$\bar{\phi}(k) = \frac{Q}{D} \frac{1}{k^2 + \kappa^2}. \quad (\text{B.76})$$

Следовательно, проводя обратное преобразование, получаем

$$\phi(x) = \frac{Q}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \frac{1}{k^2 + \kappa^2} dk. \quad (\text{B.8})$$

Интеграл в уравнении (B.8) можно вычислить, используя методы интегрирования функции комплексной переменной. Идея состоит в том, чтобы распространить пределы интегрирования от действительной оси (в комплексной плоскости) до замкнутого контура, который содержит в качестве одного из отрезков интегрирования действительную ось. Это можно сделать только в том случае, если подынтегральное выражение обращается в нуль на добавленных участках интегрирования. Рассмотрим сначала случай  $x < 0$  (случай  $x > 0$  будет рассмотрен отдельно). Записывая координату точки в комплексной области

$$k = R(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (\text{B.9})$$

мы видим, что

$$\exp(ikx) \approx \exp(Rx \sin \theta) \exp(iR \cos \theta). \quad (\text{B.10})$$

Для  $0 < \theta < \pi$  (т. е. в квадрантах I и II комплексной плоскости)  $\sin \theta > 0$  и  $\exp(ikx) \rightarrow 0$ , когда  $R \rightarrow \infty$  (напомним, что  $x < 0$ ). Таким образом, можно добавить к правой части уравнения (B.8) выражение

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \exp(-ikx) \frac{1}{k^2 + \kappa^2} dk, \quad (\text{B.11})$$

которое тождественно равно нулю (контур интегрирования показан на рис. B.1). Следовательно,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2\pi} \oint \exp(-ikx) \frac{1}{k^2 + \kappa^2} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \exp(-ikx) \frac{1}{k - i\kappa} \frac{1}{k + i\kappa} dk. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

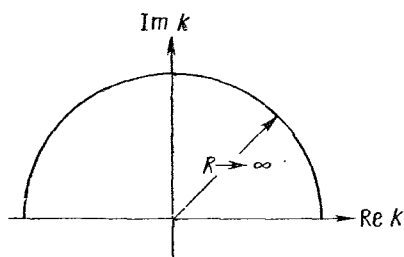


Рис. B.1. Контур интегрирования  $C$  в уравнении (B.11)

Символ  $\oint$  обозначает интегрирование по замкнутому контуру, т. е. по действительной оси плюс контур  $C$ .

Согласно теореме о вычетах, значение приведенного выше интеграла равно произведению  $2\pi i$  на вычеты в полюсах внутри контура. Единственным полюсом в рассматриваемом случае является  $k = +i\kappa$ , и вычет равен коэффициенту перед  $(k - i\kappa)^{-1}$ , вычисленному при  $k = i\kappa$ :

$$\text{Вычет} = Q \exp(\kappa x) / 4 \pi i \kappa D \quad (\text{B.13})$$

и

$$\phi(x) = Q \exp(\kappa x) / 2\kappa D, \quad x < 0. \quad (\text{B.14})$$

Для  $x > 0$  расчет проводится аналогично, за исключением того, что контур интегрирования должен размещаться в нижней полуплоскости. Легко найти, что

$$\phi(x) = Q \exp(-\kappa x) / 2\kappa D, \quad x > 0. \quad (\text{B.15})$$

В прикладной математике широко используется теорема свертки. Свертка двух функций  $f$  и  $g$  определяется в виде

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx', \quad (\text{B.16})$$

тогда

$$\begin{aligned} \overline{f * g} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \int_{-\infty}^{\infty} f_*(x') g(x - x') dx' dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp[ik(x - x')] \exp(ikx') f(x') g(x - x'). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Если заменить переменные  $x, x'$  на  $x'$  и  $y = x - x'$ , то получим

$$\overline{f * g} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iky) g(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx') f(x') dx' = \overline{f}(k) \overline{g}(k). \quad (\text{B.18})$$

Таким образом, теорема свертки для преобразований Фурье устанавливает, что преобразование свертки двух функций равно произведению преобразований этих функций.

Преобразования Фурье можно использовать и для функций, зависящих более чем от одной переменной. Для трехмерного случая, например, фурье-преобразование функции определяется в следующем виде:

$$\bar{f}(\mathbf{k}) = \int d^3 r \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) f(\mathbf{r}), \quad (\text{B.19a})$$

а обратное преобразование в виде

$$\hat{f}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \hat{f}(k). \quad (\text{B.19б})$$

В действительности это можно представить как произведение трех фурье-преобразований с переменными преобразования  $k_x$ ,  $k_y$  и  $k_z$ . Однако иногда удобнее работать в полярных координатах. Тогда уравнение

$$-\nabla^2 \phi + \kappa^2 \phi = (Q/D) \delta(\mathbf{r}), \quad (\text{B.20})$$

т. е. диффузионное уравнение в трехмерном случае можно решить, умножая обе его части на  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  и интегрируя. Отметим, используя интегрирование по частям, что

$$\begin{aligned} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \nabla^2 \phi d^3 r &= -k^2 \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3 r = \\ &= -k^2 \bar{\phi}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

[так как  $\phi(\pm\infty) = 0$ ], поэтому трансформированное уравнение принимает вид

$$(k^2 + \kappa^2) \bar{\phi}(k) = Q/D \quad (\text{B.22a})$$

или

$$\bar{\phi}(k) = \frac{Q}{D} \frac{1}{k^2 + \kappa^2}. \quad (\text{B.22б})$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (B.76), видим, что фурье-преобразования одномерных и трехмерных потоков идентичны. Однако обратное преобразование дает

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 + \kappa^2}. \quad (\text{B.23})$$

Интегрирование легко провести в полярных координатах, записывая

$$d^3 k = 2\pi k^2 dk d(\cos \theta) \quad (\text{B.24a})$$

и

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta. \quad (\text{B.24б})$$

Находим

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi^2 D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dk}{k^2 + \kappa^2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \cos \theta) = \\ &= \frac{Q}{2\pi^2 D r} \int_0^{\infty} \frac{k \sin kr}{k^2 + \kappa^2} dk = \frac{Q}{\pi^2 D r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \sin kr}{k^2 + \kappa^2} dk. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Этот интеграл также легко вычислить с помощью вычетов, представляя  $\sin kr = (1/2i) [\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ .

С преобразованием Фурье связан и метод преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа  $\hat{f}(s)$  функции  $f(t)$  определяется в виде

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt. \quad (\text{B.26})$$

Так как интервал интегрирования в этом случае распространяется от 0 до  $\infty$ , а не от  $-\infty$  до  $+\infty$ , как в методе преобразований Фурье, то преобразование Лапласа обычно используется в задачах на начальное значение. Рассмотрим простую задачу:

$$df(t)/dt = \lambda f(t) \quad (\text{B.27a})$$

с начальным условием

$$f(0) = 1. \quad (\text{B.27б})$$

Преобразование Лапласа уравнения (B.27a) можно получить, умножая его на  $\exp(-st)$  и интегрируя от 0 до  $\infty$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} \exp(-st) \frac{df}{dt} dt = f(t) \exp(-st) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt, \quad (\text{B.28})$$

и трансформированное уравнение становится

$$\hat{f}(s) - 1 = \lambda \hat{f}(s), \quad (\text{B.29})$$

где использовано начальное условие (B.27б). Таким образом,

$$\hat{f}(s) = 1/(s - \lambda). \quad (\text{B.30})$$

Формула обратного преобразования  $\hat{f}(t)$  из  $\hat{f}(s)$  имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(st) \hat{f}(s) ds, \quad (\text{B.31})$$

где интервал интегрирования представляет собой прямую линию в комплексной плоскости, параллельную мнимой оси, но проходящую справа от всех особенностей подынтегрального выражения. В большинстве случаев контур интегрирования может быть замкнутым с бесконечной полуокружностью слева от особенностей, так что, используя теорему вычетов, можно получить

$$f(t) = \sum_{\text{вычет}} \exp(st) \hat{f}(s). \quad (\text{B.32})$$

В нашей частной задаче  $f(s) = 1/(s - \lambda)$  имеется единственный полюс в точке  $s = \lambda$ , и вычет равен  $\exp(\lambda t)$ . Таким образом, решение уравнения (B.20) имеет вид

$$f(t) = \exp(\lambda t). \quad (\text{B.33})$$

Для преобразований Лапласа также существует теорема свертки. Нетрудно показать (читатель может предельно это в качестве упражнения), что если свертка определяется в виде

$$f * g = \int_0^t f(t') g(t-t') dt', \quad (\text{B.34a})$$

то

$$\widehat{f * g} = \hat{f}(s) \hat{g}(s). \quad (\text{B.34б})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РЕАКТОРНОЙ ФИЗИКИ

При решении диффузионного уравнения в различных системах координат приходится иметь дело со специальными функциями, некоторые из них мы рассмотрим ниже.

**Сферические координаты.** Уравнение Гельмгольца  $\nabla^2\psi + B^2\psi = 0$  в сферических координатах имеет вид

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi + B^2\psi = 0. \quad (\text{Г.1})$$

Разделение переменных приводит к двум уравнениям — одно для радиальной переменной, другое — для угловой.

Уравнение для угловой переменной следующее:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 Y = 0, \quad (\text{Г.2})$$

где  $\lambda^2$  — константа разделения.

Собственные решения уравнения (Г.2) существуют только для значений  $\lambda$ , удовлетворяющих условию

$$\lambda^2 = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Г.3})$$

Для данного значения  $l$  имеется  $2l+1$  линейно независимых решений уравнения (Г.2), которые называются *сферическими гармониками порядка  $l$*  и обозначаются  $Y_{lm}$ , где  $m = -l, -l+1, \dots, +l$ . Отнормированные значения  $Y_{lm}$  определяются следующим образом:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_{lm}(\cos\theta) \times \exp(im\varphi), \quad m > 0; \quad (\text{Г.4a})$$

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*, \quad (\text{Г.4б})$$

где  $P_{lm}$  — *присоединенные функции Лежандра*:

$$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{l/2m} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x); \quad (\text{Г.5})$$

$P_l(x)$  — полиномы Лежандра порядка  $l$ :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l. \quad (\text{Г.6})$$

Полиномы Лежандра сами по себе представляют значительный интерес в реакторной физике. Они являются решениями дифференциального уравнения Лежандра:

$$\left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + l(l+1) \right] P_l(x) = 0. \quad (\text{Г.7})$$

$P_l(x)$  — полином степени  $l$ , содержащий только четные или нечетные степени  $x$  в зависимости от того, четно или нечетно  $l$ . Кроме того,  $P_l$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x). \quad (\text{Г.8})$$

С помощью этого соотношения можно определить все  $P_l$  из значений  $P_0$  и  $P_1$ :

$$P_0(x) = 1; \quad (\Gamma.9a)$$

$$P_1(x) = x. \quad (\Gamma.9b)$$

Например,

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2 \quad (\Gamma.10)$$

и т. д.  $P_l(x)$  ортогональны, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (\Gamma.11)$$

Кроме того,

$$P_l(1) = 1; \quad (\Gamma.12a)$$

$$P_l(-1) = (-1)^l. \quad (\Gamma.12b)$$

Возвращаясь к сферическим гармоникам, приведем для них соотношение ортогональности:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\Gamma.13a)$$

где

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\Gamma.13b)$$

Приведем значения некоторых сферических гармоник:

$$Y_{00} = \frac{1}{4\pi}, \quad Y_{10} = \frac{3}{4\pi} \cos \theta, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \exp(\pm i\varphi) \quad (\Gamma.14)$$

и т. д. Наконец, отметим связь сферических гармоник с полиномами Лежандра:

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{(2l+1)/4\pi} P_l(\cos \theta) \quad (\Gamma.15)$$

и теорему сложения

$$P(\hat{a} \cdot \hat{b}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{a}) Y_{lm}(\hat{b}), \quad (\Gamma.16)$$

где  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  — единичные векторы, а  $Y_{lm}(\hat{a})$  означает  $Y_{lm}(\theta_a, \varphi_a)$ , причем  $\theta_a$  и  $\varphi_a$  представляют собой полярные углы вектора  $\hat{a}$  в сферических координатах.

Возвращаясь к уравнению (Г.1), запишем уравнение для радиальной переменной:

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + B^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (\Gamma.17)$$

Это уравнение, называемое *уравнением Бесселя* в сферических координатах, имеет два линейно независимых решения для каждого  $l$ . Они обозначаются  $j_l(\rho)$  и  $n_l(\rho)$ , где  $\rho \equiv Br$ . Для значений  $\rho$ , стремящихся к нулю, имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} j_l(\rho) = \frac{\rho^l}{(2l+1)!} \quad (\Gamma.18a)$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} n_l(\rho) = (2l+1)! \rho^{l-1}, \quad (\Gamma.18b)$$

где  $(2l + 1)!!$  означает  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l + 1)$ , т. е. произведение нечетных чисел, вплоть до  $(2l + 1)$ . Таким образом, мы видим, что  $n_l$  плохо ведет себя вблизи  $\rho = 0$ . При  $\rho \rightarrow \infty$  и  $n_l$  и  $j_l$  приближаются к нулю.

Величины  $n_l$  и  $j_l$  можно представить через обычные функции Бесселя, которые мы обсудим ниже:

$$\begin{aligned} j_l(\rho) &= \left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(\rho); \\ n_l(\rho) &= (-1)^l \left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{1/2} J_{-l-1/2}(\rho). \end{aligned} \quad (\text{Г.19})$$

Значения некоторых  $j_l$  и  $n_l$  приведены ниже:

$$\begin{aligned} j_0 &= \frac{\sin \rho}{\rho}; & n_0 &= \frac{\cos \rho}{\rho}; \\ j_1 &= \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho}; & n_1 &= \frac{\cos \rho}{\rho^2} + \frac{\sin \rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

**Цилиндрические координаты.** Уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \psi + B^2 \psi = 0. \quad (\text{Г.21})$$

Разделение переменных приводит к уравнению для радиальной переменной, известному как *уравнение Бесселя* в цилиндрических координатах:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho'^2} + \frac{1}{\rho'} \frac{d}{d\rho'} + 1 - \frac{n^2}{\rho'^2}\right) R(\rho') = 0, \quad (\text{Г.22})$$

где  $\rho' = B_\rho \rho$  ( $B_\rho$  — радиальный лапласиан).

Два линейно независимых решения этого уравнения обозначаются  $J_n(\rho')$  и  $Y_n(\rho')$ . Существуют подробные таблицы этих функций. Для определения поведения этих функций вблизи нуля существуют следующие разложения:

$$J_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}; \quad (\text{Г.23a})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Y_n(\rho) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} J_0(\rho) \ln \frac{\rho}{2}, & n=0; \\ \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n}, & n > 0. \end{cases} \quad (\text{Г.23б})$$

Из этих разложений следует, что  $J_n$  не имеет особенностей вблизи нуля, в отличие от  $Y_n$ . Из этих выражений можно определить производные от  $J_n$ :

$$\frac{dJ_n(\rho)}{d\rho} = \begin{cases} \frac{1}{2} J_{n-1}(\rho) - J_{n+1}(\rho), & n > 0; \\ -J_1(\rho), & n = 0. \end{cases} \quad (\text{Г.24})$$

В некоторых прикладных задачах необходимо иметь решение следующего уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - 1 + \frac{n^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0. \quad (\text{Г.25})$$

Решение этого уравнения представляет собой произвольную линейную комбинацию  $J_n$  и  $Y_n$  от мнимого аргумента, а именно

$$I_n(\rho) = i^{-n} J_n(i\rho) \quad (\text{Г.26a})$$

и

$$K_n(\rho) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(\rho) - I_{\nu}(\rho)}{\sin \nu \pi}. \quad (\text{Г.26б})$$

Выражения для этих функций в окрестности  $\rho = 0$  имеют вид

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K_0(\rho) = -\ln(\rho/2); \quad (\text{Г.27a})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_0(\rho) = 1; \quad (\text{Г.27б})$$

при  $\rho \rightarrow \infty$  эти функции имеют следующий асимптотический вид:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} K_0(\rho) = \frac{\pi}{2\rho} \exp -\rho; \quad (\text{Г.28a})$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_0(\rho) = \exp \rho/2i\pi. \quad (\text{Г.28б})$$

Из соотношений (Г.20), а также из связи между  $J$  и  $K$  можно найти

$$\frac{d}{d\rho} K_0(\rho) = -K_1(\rho). \quad (\text{Г.29})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

### ДИНАМИКА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Полезно описать процесс столкновения нейтрона с ядром массой  $A$  как в системе центра инерции, так и в лабораторной системе. В частности, представляют интерес соотношения между углом рассеяния в лабораторной системе  $\text{arccos } \mu_0$  и системе центра инерции  $\text{arccos } \mu_c$ , а также передача энергии при столкновении. Лабораторная система координат, как говорит само название, представляет собой систему, в которой можно проводить измерения, предполагая при этом, что ядро мишени находится в покое, а нейтрон движется со скоростью  $v_0 = (2E)^{1/2}$ , если масса нейтрона принята равной единице (рис. Д.1). После рассеяния нейтрон продолжает движение под углом  $\text{arccos } \mu_0 = \theta_0$  к начальному направлению (угол рассеяния в лабораторной системе) со скоростью  $u_0$ , передав ядру часть своей энергии, в результате чего оно стало двигаться со скоростью  $U_0$  под углом  $\varphi$  к начальному направлению движения нейтрона.

В системе центра инерции предполагается покоящимся центр инерции системы ядро—нейтрон (рис. Д.2). До столкновения нейтрон движется в направлении слева направо со скоростью  $v_0 - V_M$ , где  $V_M$  — скорость центра инерции системы ядро—нейтрон относительно лабораторной системы:

$$V_M = v_0/(A+1). \quad (\text{Д.1})$$

Скорость нейтрона в системе центра инерции тогда равна

$$v_0 - V_M = Av_0/(A+1) = v_c. \quad (\text{Д.2})$$

Ядро движется справа налево со скоростью  $V_M$ . В системе центра инерции нейтрон и ядро являются рассеивателями по отношению друг к другу, так

как оба они движутся перед столкновением. После столкновения нейтрон имеет скорость  $u_c$ , а ядро —  $U_c$ . Угол рассеяния в этой системе координат равен  $\arccos \mu_c = \theta_c$ , причем нейтрон и ядро движутся относительно друг друга в противоположных направлениях, так как полное количество движения до столкновения в системе центра инерции равно

$$(v_0 - V_M) - AV_M = v_0 \left[ \left( 1 - \frac{1}{A+1} \right) - \frac{A}{A+1} \right] = 0, \quad (Д.3)$$

и в соответствии с законом сохранения количества движения должно остаться равным нулю и после столкновения. Очевидно, что это возможно только

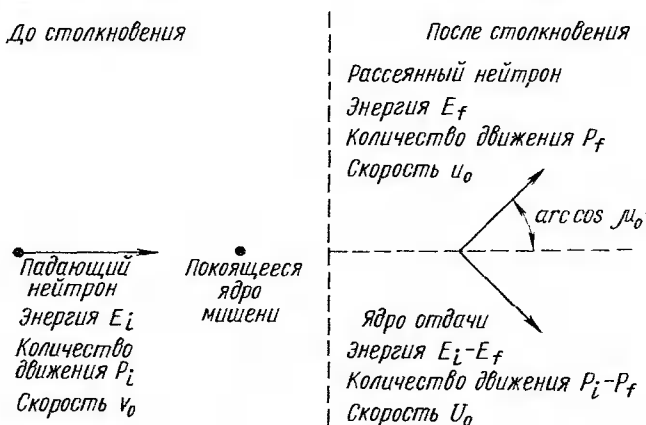


Рис. Д.1. Схема упругого рассеяния в лабораторной системе координат

в том случае, если ядро и нейтрон движутся после столкновения в противоположных направлениях и, кроме того, если

$$u_c = AU_c. \quad (Д.4)$$

Закон сохранения энергии в системе центра инерции устанавливает еще одно соотношение между  $u_c$  и  $U_c$ :

$$\frac{1}{2} A \left( \frac{v_0}{A+1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{Av_0}{A+1} \right)^2 = \frac{1}{2} u_c^2 + \frac{1}{2} AU_c^2. \quad (Д.5)$$

Решая эти два уравнения относительно  $u_c$  и  $U_c$  в терминах  $v_0$ , получаем, что в системе центра инерции скорости нейтрона и ядра не изменяются при упругом столкновении, т. е.

$$v_0 - V_M = u_c = Av_0 / (A+1) \quad (Д.6)$$

и

$$V_M = U_c = v_0 / (A+1). \quad (Д.7)$$

Выведем теперь соотношение между  $\mu_0$  и  $\mu_c$ . Отмечая, что скорость нейтрона в лабораторной системе координат является векторной суммой его скорости в системе центра инерции и скорости центра инерции системы ядро—нейтрон в лабораторной системе, можем записать (рис. Д.3):

$$u_0 \mu_0 = V_M + u_c \mu_c. \quad (Д.8)$$

Подставляя сюда выражения для  $u_c$  и  $V_M$  из уравнений (Д.6) и (Д.7), находим

$$\left(\frac{u_0}{v_0}\right)\mu_0 = \frac{1}{A+1} + \frac{A}{A+1}\mu_c \quad (\text{Д.9})$$

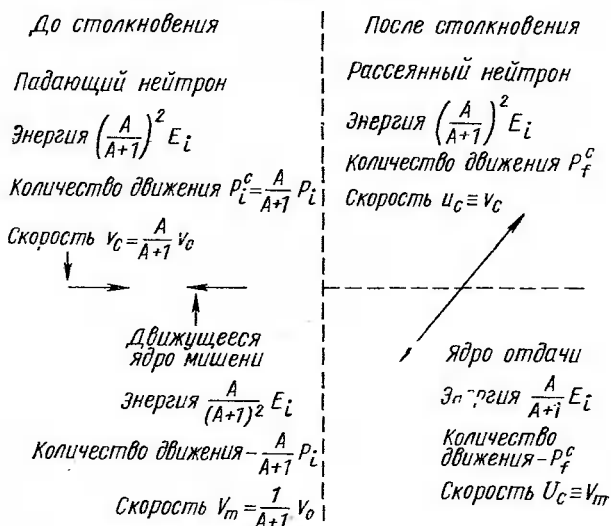


Рис. Д.2. Схема упругого рассеяния в системе центра инерции

Можно также получить отношение  $u_0/v_0$ , используя закон косинусов (см. рис. Д.4):

$$u_0^2 = u_c^2 + V_M^2 + 2u_c V_M \mu_c \quad (\text{Д.10})$$

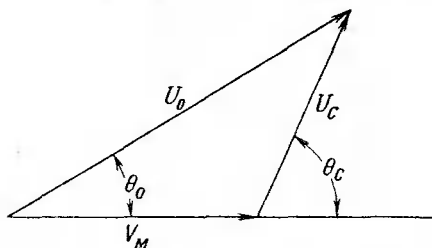


Рис. Д.3. Соотношение между скоростями в лабораторной системе и системе центра инерции

или, применяя вновь уравнения (Д.6) и (Д.7),

$$\frac{u_0^2}{v_0^2} = \frac{A^2 + 2A\mu_c + 1}{(A+1)^2} \quad (\text{Д.11})$$

Уравнения (Д.9) и (Д.11) устанавливают искомое соотношение между  $\mu_0$  и  $\mu_c$ :

$$\mu_0 = \frac{A\mu_c + 1}{(A^2 + 2A\mu_c + 1)^{1/2}} \quad (\text{Д.12a})$$

или в терминах  $\gamma = A^{-1}$

$$\mu_0 = \frac{\mu_c + \gamma}{(\gamma^2 + 2\gamma\mu_c + 1)^{1/2}}. \quad (\text{Д.12б})$$

Рассмотрим далее изменение энергии при столкновении. В лабораторной системе координат отношение энергии после столкновения  $E_f$  к энергии до столкновения  $E_i$  в точности равно  $u_0^2/v_0^2$ , уже определенному в уравнении (Д.11):

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{\gamma^2 + 2\gamma\mu_c + 1}{(\gamma + 1)^2} \quad (\text{Д.13})$$

или в терминах параметра  $\alpha$ , т. е.

$$\alpha = \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 = \left( \frac{A - 1}{A + 1} \right)^2, \quad (\text{Д.14})$$

это отношение принимает вид

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{1}{2} [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \mu_c]. \quad (\text{Д.15})$$

Из уравнения (Д.15) следует, что  $\alpha E' \leq E \leq E'$ , так как  $-1 \leq \mu_c \leq 1$ . Таким образом, в результате упругого столкновения нейтрон не может ускориться и потерять больше, чем  $(1 - \alpha)$  часть своей энергии.

В терминах летаргии, определяемой в виде

$$u = \ln(E_0/E), \quad E = E_0 \exp(-u) \quad (\text{Д.16})$$

(где  $E_0$  — некоторая максимальная энергия, выбираемая обычно равной 10 Мэв), полученные выше результаты можно представить в более простом виде. Например, уравнение (Д.15) принимает вид

$$\exp(-\Delta u) = \frac{1}{2} [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \mu_c], \quad (\text{Д.17а})$$

где

$$\Delta u = u_f - u_i \quad (\text{Д.17б})$$

представляет собой изменение летаргии при столкновении. Решая уравнение (Д.17а) относительно  $\mu_c$  и выражая результат через  $\gamma$ , получаем

$$\mu_c(\Delta u) = 1 - \frac{(1 + \gamma)^2}{2\gamma} (1 - \exp(-\Delta u)). \quad (\text{Д.18})$$

Комбинируя полученный результат с уравнением (Д.16), находим

$$\mu_0(\Delta u) = \frac{1}{2\gamma} [(1 + \gamma) \exp(-\Delta u/2) - (1 - \gamma) \exp(\Delta u/2)]. \quad (\text{Д.19})$$

Здесь  $\mu_0$  и  $\mu_c$  записаны как функции изменения летаргии при столкновении, чтобы обратить внимание на тот факт, что угол рассеяния однозначно связан с изменением летаргии при столкновении. Иногда удобно в качестве независимой переменной выбирать  $\mu_0$ , а в других случаях предпочтительнее рассматривать в качестве таковой  $\Delta u$ . Максимально и минимально возможные потери энергии при столкновении накладывают ограничения и на предельные значения изменения летаргии:

$$0 \leq \Delta u \leq \ln(1/\alpha) \quad (\text{Д.20а})$$

или

$$u_i \leq u_f \leq u_0 + \ln(1/\alpha). \quad (\text{Д.20б})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

### ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ

Исключим ток нейтронов  $\mathbf{J}$  из уравнений (2.47) и (2.32), не используя приближения, что  $(1/u) (\partial \mathbf{J} / \partial t)$  в уравнении (2.47) равно нулю. Для простоты предположим, что сечения не зависят от пространственных переменных и времени.

Если взять дивергенцию уравнения (2.47), то получим

$$\frac{3D}{u} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{J} = -D \nabla^2 \phi, \quad (\text{E.1})$$

где мы использовали определение (2.49б) для коэффициента диффузии. Возьмем далее производную по времени от обеих частей уравнения (2.32):

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{J} + \Sigma_a \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (\text{E.2})$$

Нетрудно видеть, что уравнение (E.2) устанавливает соотношение между  $(\partial/\partial t) \nabla \cdot \mathbf{J}$  и  $\phi$  и  $S$ . Уравнение (2.32) дает связь между  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  и  $\phi$  и  $S$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S - \frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \Sigma_a \phi. \quad (\text{E.3})$$

Используя уравнения (E.2) и (E.3) в уравнении (E.1), получаем телеграфное уравнение

$$\frac{3D}{u^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{1+3D\Sigma_a}{u} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Sigma_a \phi - D \nabla^2 \phi = \frac{3D}{u} \frac{\partial S}{\partial t} + S. \quad (\text{E.4})$$

Очевидно, для получения диффузионного уравнения необходимо, чтобы

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Sigma_a \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (\text{E.5})$$

Это условие должно выполняться так же, как и условия, вытекающие из предположения, что поток нейтронов зависит линейно от  $\Omega$  [именно такое предположение использовалось при выводе уравнения (2.47)]. Условия, вытекающие из последнего предположения, можно связать с предположением о том, что один из членов уравнения (E.5) мал. Например, близкое к изотропному распределение потока нейтронов связано с тем, что сечение  $\Sigma_a$  мало, т. е. мал второй член в левой части уравнения (E.5). Однако при этом необходимо также предположить, что поток и источник нейтронов не сильно зависят от времени.

# АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Авогадро число 22, 60, 112  
Антинейтрино 14  
Асимптотическая кинетика реактора 73

Банахово пространство 100  
Барн 22  
Бесселя уравнение 62, 267  
— в сферических координатах 265  
— в цилиндрических координатах 267  
Больцмана постоянная 13, 234  
— уравнение (см. Переноса нейтронов уравнение) Брейта — Вигнера форма резонанса 229  
Быстрые нейтроны 13

Вариационный принцип 104, 109  
— для неоднородного уравнения 119  
— в многогрупповом формализме 235

Вероятность выхода нейтронов первого пролета 151—154  
— избежать столкновений 151  
— избежать утечки 16

Взаимности теорема 146, 227  
Вигнера рациональное приближение 232

Влияние ксеиона на реактивность 168—171

Возмущений теория 109, 235  
— в многогрупповом формализме 235

Возраст нейтронов 215  
— физический смысл 217  
Время жизни нейтронов 74, 76, 111, 200

Гаусса метод исключения 131  
Гаусса — Остроградского теорема 25, 225

Гельмгольца уравнение 60—61, 69, 73  
Гомогенизация 69

Граничные условия 31, 98, 184  
— периодические 98  
— сопряженные 101  
Грейлинга — Герцеля приближение 251  
Грина функция 36, 147—151  
— для бесконечной среды 36  
— для плоского источника в бесконечной среде 36  
— для конечной среды 38  
Групповые константы 180, 203, 239  
— определение 180—182  
— тепловой группы 233

Данкова — Гинзбурга поправка 154, 233

Дельта-распределение 87, 259  
Делящиеся изотопы 8  
Диффузии длина 37  
— коэффициент 48, 178

Диффузионные параметры 37  
— измерение 48

Диффузионное охлаждение 89  
Диффузионное уравнение 18, 31, 53  
— в плоской геометрии 35

— в сферической геометрии 40  
— в цилиндрической геометрии 44  
— применимость 34  
— в матричном виде 174

Доллар 83  
Доплера эффект 229, 255

Замедлитель 51, 194  
— графитовый 253  
— легководный 184  
— тяжеловодный 250  
Захват нейтронов 58  
Запаздывающие нейтроны 75, 77—83  
— эффективная доля 198, 247

Изотопы плутония 160—161  
Интегральное уравнение 66—69  
Интегральная форма уравнений 189

- Интегрирующий множитель 161  
Итерации внешние 124—127  
— внутренние 132—137  
— лапласиана 140
- Кинетика реактора 73  
— асимптотическая 73  
— уравнение 73—76  
— с запаздывающими нейтронами 77
- Коэффициент воспроизводства 14  
— использования тепловых нейтронов 16, 171  
— размножения на быстрых нейтронах 16  
— размножения 15  
— групповой 200  
— измерение 190  
— реактивности 112
- Крамера правило 257
- Критичность 12  
— расчет 57, 60—63  
— мгновенная 82  
— условие 187, 189  
— физический смысл 64
- Критическая масса 57—60
- Критические размеры 57
- Лабораторная система координат 205, 268
- Лапласа преобразование 85, 88, 113, 260—264
- Лапласиан 54, 62  
— аксиальный 140  
— геометрический 54—55  
— матеральный 54  
— радиальный 140
- Лежандра полином 63, 265  
— уравнение 63, 265  
— функция 265  
— присоединенная 265
- Летаргия 206, 212  
— среднее изменение 209
- Линейной экстраполяции длина 33
- Максвелла распределение 235
- Матрица 130, 175, 256  
— симметричная 258  
— треугольная 175  
— трехдиагональная 130  
— транспонированная 187, 258  
— Эрмитова 258
- Метод одновременной релаксации 135—136  
— последовательной релаксации 136—137, 140
- Методы экстраполяции 139
- Миграции площадь 187
- Мгновенные нейтроны 76
- Многогрупповой метод 15, 173
- Многогрупповое уравнение 173  
— — аналитические решения 182  
— — вывод 176  
— — численные решения 188
- Многослойная система 43
- Нестационарные задачи 73
- Норма 126
- Одногрупповое приближение 15, 52, 186  
— уравнение переноса 27  
— — расчет 51
- Односкоростное приближение (см. Одногрупповое приближение)
- Оператор линейный 97  
— матричный 175  
— самосопряженный 102—103
- Ортогональность 101
- Отражатель 69, 191  
— бесконечный 149
- Отравление продуктами деления 163  
— ксеноном-135 165  
— самарием-149 171
- Передаточная функция 91
- Переноса нейтронов уравнение 25  
— — — зависящее от энергии 176  
— — — односкоростное 27
- Период реактора 80  
— — установившийся 80, 83
- Первого пролета нейтроны 149
- Перегрузка топлива 240, 245
- Плоский реактор 53, 71  
— — с отражателем 69, 150
- Плотность нейтронов 19  
— столкновений 22
- Площадь диффузии 37
- Поглощения макроскопическое сечение 16  
— — — эффективное 148
- Поглощающая поверхность 155—157  
— — для различных геометрий стержня 158
- Поглощения плотность 23, 121
- Поток нейтронов 19, 233  
— — определение 19  
— — одногрупповой 186  
— — многогрупповой 178  
— — в резонансе 222—224  
— — зависящий от времени 73—85
- Пробная функция 104, 107, 120—122
- Плоского потока приближение 226
- Продукты деления 163  
— — насыщающиеся 163—171  
— — ненасыщающиеся 163  
— — частично насыщающиеся 164
- Размножители (см. Реакторы-брнде-ры) 162

Равновесная концентрация ксенона 168  
Рассеяние изотропное 33  
— интерференционное 221  
— неупругое 209—210  
— потенциальное 221  
— резонансное 221  
— упругое 204  
Реакторы гомогенные 51—69  
— — распределение энерговыделения 65  
— на быстрых нейтронах 201, 246  
— регулирование 248  
— бридеры 162  
— — коэффициент воспроизводства 14  
— на тепловых нейтронах 13, 76  
— графитовые 253  
— легководные 191—198, 239—246  
— торневые 250  
— тяжеловодные 250  
— с циркулирующим топливом 77  
Реактивность 53  
Резонансное поглощение 185, 217, 219, 242  
— — вероятность избежать 185, 217, 228, 253  
— — в бесконечной среде 219  
— — в блокированных поглотителях 224  
Резонансный интеграл приближение бесконечной массы 223  
— — приближенно узкого резонанса 223  
— — для бесконечно разбавленной системы 224  
Решетка гексагональная 44  
— квадратная 44

Самозранировка 145, 160  
— энергетическая 224  
Свободный пробег 21  
Сечение макроскопическое 21—22  
— микроскопическое 8, 21  
— полное 24  
— рассеяния 23  
— транспортное 30  
— увода 175  
— утечки 75  
Скачка условие 32  
Скалярное произведение 100  
Синтез потока нейтронов 140  
Собственное значение 88—102  
Собственная функция 98—102  
Спектр нейтронов  
— — быстрых 240  
— — тепловых 244  
— — жесткий 246  
Спектральный радиус 139

Статистический фактор 221  
Степенной метод 127  
Столкновения упругие 24  
— неупругие 24  
Супервариационный принцип 115  
Сходимость метода итераций 125, 132  
— — — доказательство 137

Телеграфное уравнение 30, 272  
Температурный коэффициент реактивности 253  
Тепловая колонна 48  
Тепловые нейтроны 13  
Термализация нейтронов 13  
Ток нейтронов 19  
— — определение 19  
Точечная модель реактора 73

Уравнение обратных часов 111  
Уран-235 8—14  
— выгорание 159—163  
Уран-238 14, 159  
— резонансное поглощение 185, 217—219, 242  
Условие непрерывности потока нейтронов 70  
— — тока нейтронов 70  
Условие нормировки 99

Фнка закон 28  
— — многогрупповая версия 180—181  
Ферми теория возраста 212, 239  
Формула четырех сомножителей 16  
Функция ценности 113—114  
Фурье-преобразование 91—92, 260

Хевисайда распределение 259

Центра инерции система 205, 268  
Цент 83

Чебышева полиномальный метод 140  
Численные методы 124

Ширина резонанса 220—221  
— — эффективная 221  
— — радиационная 220  
— — полная 220

Эквивалентности принцип 228  
Экономия за счет отражателя 70  
Экранирование топлива 47  
Экстраполированная граница 73, 89  
— ширина 58, 65

Эксперименты со сбросом стержня 85  
— с импульсом нейтронов 87  
Энерговыделения распределение 65  
Экспоненциальный эксперимент 184—  
188  
Эффективность регулирующего стерж-  
ня 88, 143  
Эффективное сечение 148  
Эффективная температура 211, 239,  
243

Эффективный радиус стержня 158  
Эффекты выгорания топлива 159  
Ячейка элементарная 44—45, 245  
Ядра-предшественники 77, 166, 171  
— концентрация 199  
Ядро составное 211  
— столкновения 204  
— — упругого рассеяния 204  
— — неупругого рассеяния 209

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава 1. Вводные замечания . . . . .</b>	<b>8</b>
§ 1.1. Основные концепции физики реакторов . . . . .	8
§ 1.2. Физическое описание цепной реакции . . . . .	15
Список литературы . . . . .	17
<b>Глава 2. Уравнение диффузии нейтронов . . . . .</b>	<b>18</b>
§ 2.1. Введение и определения . . . . .	18
§ 2.2. Уравнение переноса нейтронов . . . . .	25
§ 2.3. Односкоростное уравнение переноса . . . . .	27
§ 2.4. Еще одна форма уравнения переноса . . . . .	27
§ 2.5. Закон Фика . . . . .	28
§ 2.6. Граничные условия . . . . .	31
§ 2.7. Применимость диффузионного приближения . . . . .	34
§ 2.8. Диффузионное уравнение в плоской геометрии . . . . .	35
§ 2.9. Диффузионное уравнение в сферической геометрии . . . . .	40
§ 2.10. Диффузионное уравнение в цилиндрической геометрии . . . . .	44
§ 2.11. Измерение диффузионных параметров . . . . .	48
Задачи . . . . .	49
Список литературы . . . . .	50
<b>Глава 3. Расчет реактора в однокоростном приближении . . . . .</b>	<b>51</b>
§ 3.1. Введение. Основное уравнение . . . . .	51
§ 3.2. Плоский реактор без отражателя . . . . .	53
§ 3.3. Общие замечания о расчетах реакторов . . . . .	55
§ 3.4. Критическая масса и критические размеры . . . . .	57
§ 3.5. Расчет критичности для других геометрий . . . . .	60
§ 3.6. Физический смысл условия критичности . . . . .	64
§ 3.7. Распределение энерговыделения . . . . .	65
§ 3.8. Использование интегрального уравнения . . . . .	66
§ 3.9. Многозонные реакторы . . . . .	69
Задачи . . . . .	72
Список литературы . . . . .	72
<b>Глава 4. Нестационарные задачи . . . . .</b>	<b>73</b>
§ 4.1. Введение . . . . .	73
§ 4.2. Асимптотическая кинетика реактора . . . . .	73
§ 4.3. Уравнения кинетики с запаздывающими нейтронами . . . . .	77
§ 4.4. Многоступенчатый процесс образования запаздывающих нейтронов . . . . .	80
§ 4.5. Одна группа запаздывающих нейтронов . . . . .	82

§ 4.6. Измерение реактивности. Установившийся период . . . . .	83
§ 4.7. Эксперименты со сбросом стержня . . . . .	85
§ 4.8. Эксперименты с импульсом нейтронов . . . . .	87
§ 4.9. Обратное размножение . . . . .	89
§ 4.10. Передаточная функция реактора . . . . .	91
§ 4.11. Эксперименты с нейтронными волнами . . . . .	93
Задачи . . . . .	95
Список литературы . . . . .	95
<b>Глава 5. Расчет реактивности . . . . .</b>	<b>96</b>
§ 5.1. Введение . . . . .	96
§ 5.2. Линейные операторы . . . . .	97
§ 5.3. Вариационный принцип . . . . .	104
§ 5.4. Теория возмущений . . . . .	109
§ 5.5. Функция ценности . . . . .	113
§ 5.6. Супервариационный принцип . . . . .	115
§ 5.7. Вариационный принцип для неоднородного уравнения . . . . .	119
Задачи . . . . .	122
Список литературы . . . . .	123
<b>Глава 6. Численные методы . . . . .</b>	<b>124</b>
§ 6.1. Введение . . . . .	124
§ 6.2. Внешние итерации . . . . .	124
§ 6.3. Расчеты потока нейтронов: одномерный случай . . . . .	127
§ 6.4. Двух- и трехмерные задачи: внутренние итерации . . . . .	132
§ 6.5. Доказательство сходимости . . . . .	137
§ 6.6. Методы экстраполяции . . . . .	139
§ 6.7. Итерация лапласиана, синтез потока нейтронов . . . . .	140
Задачи . . . . .	142
Список литературы . . . . .	142
<b>Глава 7. Регулирование реактора . . . . .</b>	<b>143</b>
§ 7.1. Введение . . . . .	143
§ 7.2. Прямой расчет эффективности регулирующего стержня . . . . .	143
§ 7.3. Коэффициент самоэкранировки . . . . .	145
§ 7.4. Вероятность выхода нейтронов первого пролета . . . . .	151
§ 7.5. Черный стержень в диффузионной теории: поглощающая поверхность . . . . .	155
§ 7.6. Эффекты выгорания топлива . . . . .	159
§ 7.7. Отравление продуктами деления . . . . .	163
§ 7.8. Отравление ксеноном . . . . .	165
§ 7.9. Другие насыщающиеся продукты деления . . . . .	171
Задачи . . . . .	172
Список литературы . . . . .	172
<b>Глава 8. Задачи с энергетической зависимостью: многогрупповой метод . . . . .</b>	<b>173</b>
§ 8.1. Введение . . . . .	173
§ 8.2. Многогрупповой метод . . . . .	173
§ 8.3. Вывод многогрупповых уравнений . . . . .	176
§ 8.4. Аналитические решения многогрупповых уравнений . . . . .	182
§ 8.5. Численное решение многогрупповых уравнений . . . . .	188
§ 8.6. Интегральная форма уравнений . . . . .	189

§ 8.7. Измерение $k_{\infty}$ . . . . .	190
§ 8.8. Эффективная доля запаздывающих нейтронов	198
Задачи . . . . .	201
Список литературы . . . . .	202
<b>Г л а в а 9. Расчеты замедления . . . . .</b>	<b>203</b>
§ 9.1. Введение . . . . .	203
§ 9.2. Ядро столкновения: упругое рассеяние . . . . .	204
§ 9.3. Ядро столкновения: неупругое рассеяние . . . . .	209
§ 9.4. Возрастная теория Ферми . . . . .	212
§ 9.5. Резонансное поглощение в бесконечной среде	219
§ 9.6. Резонансное поглощение в заблокированных по-	
глопителях . . . . .	224
§ 9.7. Температурные эффекты . . . . .	229
§ 9.8. Константы тепловой группы . . . . .	233
§ 9.9. Вариационные принципы и теория возмущений	
в многогрупповом формализме . . . . .	235
Задачи . . . . .	238
Список литературы . . . . .	238
<b>Г л а в а 10. Некоторые специальные вопросы . . . . .</b>	<b>239</b>
§ 10.1. Введение . . . . .	239
§ 10.2. Некоторые задачи, встречающиеся при проекти-	
ровании легководных реакторов . . . . .	239
§ 10.3. Реакторы на быстрых нейтронах . . . . .	246
§ 10.4. Ториевый конвертер . . . . .	250
§ 10.5. Тяжеловодные реакторы . . . . .	250
§ 10.6. Графитовые реакторы . . . . .	253
§ 10.7. Температурные коэффициенты . . . . .	253
Список литературы . . . . .	255
Приложение А. Матрицы . . . . .	256
Приложение Б. Дельта-распределение . . . . .	259
Приложение В. Преобразования Фурье и Лапласа . . . . .	260
Приложение Г. Специальные функции реакторной физики . . . . .	265
Приложение Д. Динамика упругих столкновений . . . . .	268
Приложение Е. Телеграфное уравнение . . . . .	272
Алфавитно-предметный указатель . . . . .	273