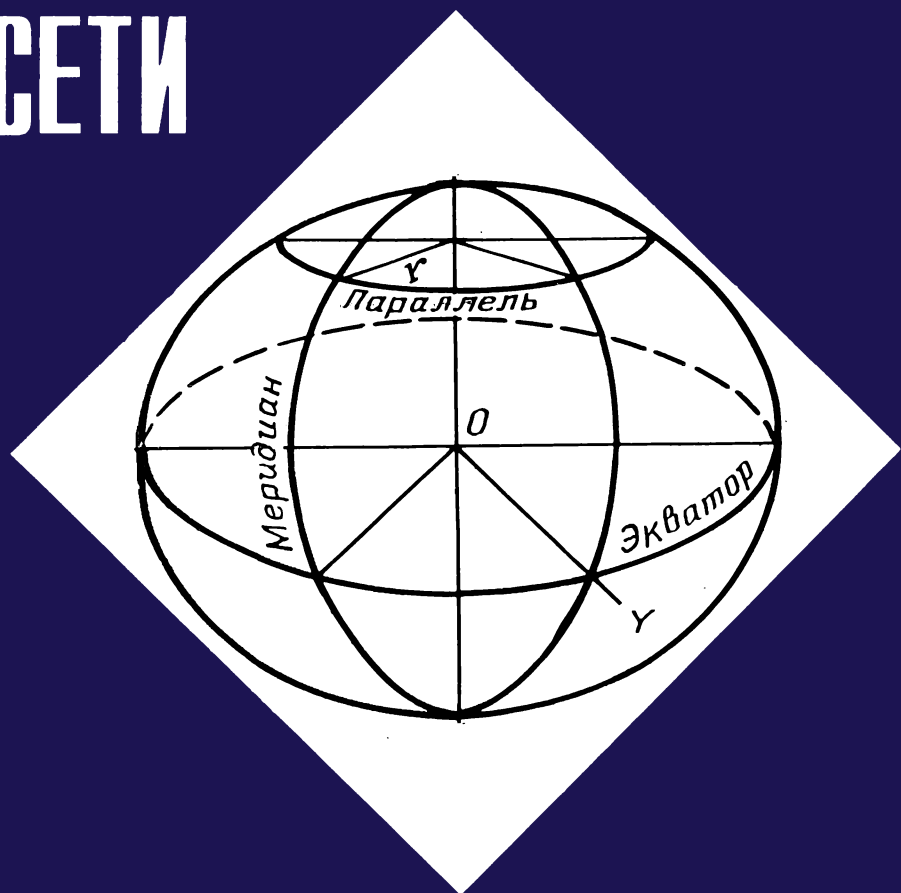


А. П. ГЕРАСИМОВ

УРАВНИВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ



А. П. ГЕРАСИМОВ

УРАВНИВАНИЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ
ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Москва «Картгеоцентр»—«Геодезиздат» 1996

ББК 26.11
Г 37
УДК 528.063

Г $\frac{18020200-9}{991(02)-96}$ Без объявления

© А. П. Герасимов, 1996

ISBN 5-86066-014-6

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ

АГС	— астрономо-геодезическая сеть
АГН	— астрономо-гравиметрическое нивелирование
ГГС	— государственная геодезическая сеть
ГСС	— геодезическая сеть сгущения
ГПЗ	— гравитационное поле Земли
КГС	— космическая геодезическая сеть
КГСС	— космическая геодезическая сеть сгущения
МУН	— Международное условное начало
ОЗЭ	— общеземной эллипсоид

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Координаты, эллипсоид

X, Y, Z — пространственные прямоугольные координаты
 x, y, z — пространственные прямоугольные координаты точки на поверхности эллипсоида

B, L, H — геодезические координаты (широта, долгота, высота)

H° — нормальная высота

φ, λ — астрономические координаты (широта, долгота)

λ° — астрономическая долгота основного долготного пункта

x, y — координаты мгновенного полюса

x, y — плоские прямоугольные координаты в проекции (условные координаты)

x', y' — истинные координаты в проекции

ξ, η — составляющие уклонения отвесной линии

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ — линейные параметры перехода от одной системы координат к другой

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые параметры перехода

m — масштабный параметр перехода

$a_{B^{\circ}}, a_{L^{\circ}}, a_{H^{\circ}}$ — коэффициенты при координатах и параметрах перехода в формулах связи координат разных систем

$C_{B^{\circ}}, C_{L^{\circ}}, C_{H^{\circ}}$ — коэффициенты при Δa и Δe^2 в формулах связи

a — большая полуось эллипсоида

b — малая полуось эллипсоида

Δa — разность больших полуосей двух эллипсоидов

α — сжатие эллипсоида

e — эксцентриситет эллипсоида

e — основание натурального логарифма

e' — второй эксцентриситет эллипсоида

Δe^2 — разность квадратов эксцентриситетов двух эллипсоидов

Φ — геоцентрическая широта

u — приведенная широта

φ — географическая широта на шаре

q — изометрическая широта

M — радиус кривизны меридиана

N — радиус кривизны первого вертикала

R — средний радиус кривизны

r — радиус кривизны параллели

R_A — радиус кривизны нормального сечения

ρ — радиус-вектор

Измерения, редуccionные поправки

a — астрономический азимут направления

a_{12} — прямой астрономический азимут
 a_{21} — обратный астрономический азимут
 A — геодезический азимут направления
 A_{12} — прямой геодезический азимут
 A_{21} — обратный геодезический азимут
 S_0 — расстояние между точками в пространстве (в т. ч. между дальномером и отражателем)
 S — расстояние между центрами пунктов
 D — расстояние, приведенное на средний уровень моря
 s — длина геодезической линии (расстояние, редуцированное на эллипсоид)
 d — расстояние на плоскости проекции
 m — приведенная длина геодезической линии
 $d\lambda$ — лично-инструментальная разность
 N — горизонтальное направление
 N_g — направление геодезической линии (на эллипсоиде)
 N^r — направление на плоскости проекции Гаусса
 ΔN_θ — поправка в направление за уклонение отвесной линии
 ΔN_H — поправка в направление за высоту наблюдаемого пункта
 ΔN_n — поправка в направление за переход от нормального сечения к геодезической линии
 δ — поправка в направление за кривизну изображения геодезической линии
 β — горизонтальный угол
 α — вертикальный угол
 z — зенитное расстояние
 u — уклонение отвесной линии
 ξ, η — составляющие уклонения отвесной линии в меридиане и в первом вертикале
 ϑ — составляющая уклонения отвесной линии в произвольном вертикале
 ζ — высота квазигеоида над эллипсоидом
 R — гравиметрическая поправка к астрономическому нивелированию

Проекция Гаусса

x, y — плоские прямоугольные координаты (условные координаты)
 x', y' — истинные плоские прямоугольные координаты
 l — долгота, отсчитываемая от осевого меридиана
 X — длина дуги меридиана
 q — изометрическая широта
 N — радиус кривизны первого вертикала
 N^r — горизонтальное направление на плоскости проекции Гаусса
 α — дирекционный угол
 a^r — астрономический азимут направления на плоскости проекции Гаусса

δ — поправка в направлении за кривизну изображения геодезической линии

d — расстояние на плоскости проекции Гаусса

$p_1 \div p_3$ — коэффициенты в формуле вычисления X

a_i, b_i — обозначения производных в формулах вычисления прямоугольных координат

k_i, n_i — коэффициенты в формулах вычисления прямоугольных координат

$a_0 \div a_6^0$
 $A_0 \div A_6$
 $q_2 \div q_6$ } коэффициенты, зависящие от параметров эллипсоида

$p_1' \div p_3'$ — коэффициенты в формуле вычисления B_0

A_i, B_i — обозначения производных в формулах вычисления геодезических координат

k_i', n_i' — коэффициенты в формулах вычисления геодезических координат

$$Z_0 = \frac{y'}{a \cos B_0}$$

$$\beta = \frac{x'}{a_0}$$

Проекция Ламберта

B_0, L_0 — геодезические координаты условного начала прямоугольных координат в зоне проекции Ламберта

x_0, y_0 — условное начало прямоугольных координат в зоне проекции Ламберта

B, L — геодезические координаты точки

x, y — прямоугольные координаты точки (ось x направлена на север, ось y — на восток)

φ — географическая широта

φ_0 — географическая широта, соответствующая широте B_0

q — изометрическая широта

λ — полярный угол

$$t = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi}{2}$$

$$t_0 = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi_0}{2}$$

$v_0 = \sin B_0$
 $k_0 = \operatorname{const}$ } постоянные интегрирования

$$k = \frac{t_0^{v_0}}{t^{v_0}}$$

m — масштаб в точке

m_0 — минимальный масштаб

ρ — радиус-вектор параллели

ρ_0 — радиус-вектор параллели с широтой B_0 , на которой масштаб является наименьшим
 r — радиус кривизны параллели
 r_0 — радиус кривизны параллели с широтой B_0
 $v_0' = \frac{1}{\sin B_0}$
 e — эксцентриситет эллипсоида
 e — основание натурального логарифма
 $\alpha_1 \div \alpha_3$ — коэффициенты формулы пересчета геодезической широты в географическую
 $\alpha_1' \div \alpha_3'$ — коэффициенты формулы пересчета географической широты в геодезическую

Уравнения поправок, нормальные уравнения

t — результат измерения, функция результатов измерения
 X — независимые параметры
 X^0 — предварительные значения независимых параметров
 v — поправки к результатам измерений или их функциям
 δx — поправки к предварительным значениям X^0
 l — свободный член уравнения поправок
 m_t — средняя квадратическая ошибка результата измерения
 K_t^0 — ковариационная матрица до уравнивания
 K_t — ковариационная матрица после уравнивания
 μ_0 — ошибка единицы веса до уравнивания
 μ — ошибка единицы веса после уравнивания
 p — вес
 P — весовая матрица
 A — матрица коэффициентов уравнений поправок
 δX — матрица неизвестных (поправок к предварительным значениям независимых параметров)
 L — матрица свободных членов
 V — матрица поправок
 Q — корреляционная матрица
 r — коэффициенты корреляции

1.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ РАЗВИТИИ И УРАВНИВАНИИ СЕТЕЙ

В геодезической практике применяется большое количество систем координат. Здесь рассмотрим лишь три основные группы — общеземные системы, референчные системы и систему астрономических координат.

Понятие «система координат» связано с понятиями, относящимися непосредственно к Земле, такими как положение центра масс Земли, ось вращения Земли, отвесная линия и некоторыми другими. Относительно них определяют положения начала системы координат, координатных линий и плоскостей.

Установление положения начала и координатных линий в разное время выполняли по разным материалам геодезических измерений. По мере получения новых, более точных результатов, уточняются и сами системы координат, поэтому каждая система координат соответствует определенной эпохе. Эпоха формирования или уточнения системы координат, как правило, указывается в ее названии.

В одно и то же время в разных странах и даже при решении разных задач в одной стране могут использоваться разные общеземные и референчные системы. В связи с этим определяют параметры перехода от одной системы к другой, например, от общеземной системы одной эпохи к общеземной системе другой эпохи. Параметры перехода необходимы также для связи систем разных групп, например, референчной системы с общеземной системой.

Общеземными принято называть такие системы координат, которые получены под условием совмещения их начала с центром масс Земли.

Референчные системы выводились, в основном, при том же условии. Однако, ограниченность геодезических измерений вплоть до последних десятилетий позволяла совмещать начала систем с центром масс Земли с точностью сотен метров. Поэтому к референчным системам относят такие, в которых их начало находится на удалении десятков и сотен метров от центра масс Земли.

В астрономической системе координат положение точки определяется также относительно понятий, связанных с Землей, — относительно отвесной линии и оси вращения Земли.

В общеземных и референчных системах положения точек могут задаваться пространственными прямоугольными координатами X , Y , Z , геодезическими координатами B , L , H , плоскими прямоугольными координатами x , y в различных проекциях, полярными

и другими координатами. Между этими координатами одной системы существуют однозначные математические связи. А для установления связей между одноименными координатами разных систем, например, между пространственными прямоугольными координатами двух референцных систем, необходимы параметры перехода.

К параметрам перехода обычно относят три линейные и три угловые величины. Линейные величины характеризуют положение начала одной системы относительно начала другой. Угловые величины соответствуют значениям углов между координатными плоскостями. Иногда в качестве параметра перехода назначают масштабный коэффициент, который характеризует линейный масштаб одной системы относительно другой, т. е. линейный масштаб одной сети относительно другой сети.

Реально системы координат задаются каталогами координат геодезических пунктов. Общеземные системы задаются координатами пунктов сетей, создаваемых в основном методами космической геодезии. Для создания референцных систем развивают астрономо-геодезические сети.

Для создания общеземной системы координат в СССР развита космическая геодезическая сеть, которая является составной частью государственной геодезической сети. Кроме того на ряде пунктов ГГС получены гравиметрическим методом высоты квазигеоида над общеземным эллипсоидом.

Референцная система с начальным пунктом Пулково создана с помощью астрономо-геодезической сети. Через эту же сеть распространяется на всю территорию страны общеземная система. В распространении обеих систем координат участвуют космические геодезические сети сгущения и геодезические сети сгущения.

1.2. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

В астрономической системе координат определяют по наблюдениям звезд астрономические широты и долготы пунктов, астрономические азимуты направлений. В этой же системе координат измеряют горизонтальные и вертикальные углы.

Как уже отмечалось, положение точки в астрономической системе координат определяется относительно отвесной линии и оси вращения Земли.

Отвесной линией называется касательная к силовой линии поля силы тяжести в данной точке. Плоскость, перпендикулярная к силовой линии в точке, называется плоскостью астрономического горизонта или просто плоскостью горизонта. На эту плоскость проектируются угломерными приборами направления между точками в пространстве, и в результате получают горизонтальные направления и горизонтальные углы. От плоскости астрономического горизонта отсчитываются вертикальные углы. Проекцией отвесной линии на небесную сферу является астрономический зенит.

При геодезических измерениях считается, что отвесные линии своего положения не меняют. Положение же оси вращения Земли

относительно точек на ее поверхности непрерывно меняется. В связи с этим существует два понятия — мгновенная ось вращения и средняя ось вращения. Им соответствуют мгновенные и средние астрономические координаты.

Мгновенная ось вращения Земли пересекает ее поверхность в точках, которые называются мгновенными полюсами Земли или просто полюсами Земли. Полюс Земли — это точка, в которой линейная скорость вращения Земли в данный момент равна нулю.

Мгновенная ось вращения совпадает с осью Мира. Проекцией мгновенной оси на небесную сферу являются северный и южный полюсы Мира, т. е. точки, для которых склонения в данную эпоху равны соответственно $+90^\circ$ и -90° . Хотя положение мгновенной оси меняется относительно поверхности Земли, но это не влияет на координаты звезд, а как бы меняется положение самой Земли относительно оси Мира, т. е. относительно ее мгновенной оси вращения.

Из-за движения мгновенных полюсов постоянно меняются астрономические координаты пунктов. Чтобы устранить это неудобство, мгновенные координаты, т. е. полученные непосредственно из наблюдений, приводят к среднему полюсу.

До 1968 года результаты астрономических определений относили к среднему полюсу эпохи (Система полюса А. Я. Орлова), а за эпоху принимали последние 5 календарных лет. По результатам многолетних наблюдений обнаружилось, что средние полюсы разных эпох не совпадают из-за так называемого векового движения полюса Земли. Поэтому начиная с 1968 года координаты полюса Земли (мгновенного полюса) даются относительно среднего полюса в Системе Международного условного начала (МУН или *ОС*).

Систему Международного условного начала задают значения широт пяти станций, расположенных на параллели $39^\circ 08'$ с. ш. Эти значения выполняют ту же роль, что и начальный пункт в референционной системе, поэтому для них по аналогии с начальным пунктом, значения широт назначены. Эти значения соответствуют широтам, вычисленным в Системе полюса А. Я. Орлова на эпоху 1900—1905 гг. Таким образом, положение среднего полюса в Системе МУН назначается под условием неизменности средних астрономических координат, что принимается равнозначным условию неизменности его положения на поверхности Земли.

Положениям северного и южного средних полюсов соответствует средняя ось вращения Земли. Положение ее относительно самой Земли, в том числе и относительно отвесных линий, считается неизменным. Средняя ось вращения не проходит через центр масс Земли и с осью Мира не совпадает.

Положение точек на Земле определяется значениями астрономических широт и долгот.

Астрономической широтой φ называется угол между отвесной линией и плоскостью, перпендикулярной к оси вращения Земли.

Чтобы дать определение астрономической долготы, воспользуемся понятием плоскости астрономического меридиана. Плоскостью ас-

тронического меридиана точки называется плоскость, параллельная оси вращения Земли и проходящая через отвесную линию. Одна из таких плоскостей принимается за плоскость начального меридиана.

Угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана данной точки называется астрономической долготой λ .

Линия на поверхности Земли, в каждой точке которой значение астрономической широты равно нулю, называется астрономическим экватором. Астрономическим меридианом называют линию на поверхности Земли с равными значениями долгот.

Проекциями мгновенного астрономического экватора и меридиана на небесную сферу являются соответственно небесный экватор и небесный меридиан. Проекция среднего экватора и среднего меридиана не совпадают с небесным экватором и меридианом, а на Земле астрономический экватор и меридиан не совпадают с геодезическим экватором и меридианом.

Как уже отмечалось, мгновенному положению полюса Земли, т. е. мгновенному положению оси вращения, соответствуют мгновенные значения астрономических координат точек. Чтобы иметь постоянную, неизменную систему астрономических координат, астрономические измерения редуцируют к среднему полюсу Земли.

Для редуцирования необходимо знать координаты мгновенного полюса относительно среднего полюса. Для получения этих координат ведут постоянные определения мгновенных координат одних и тех же пунктов. По отклонениям мгновенных координат от назначенных средних координат вычисляют координаты мгновенного полюса x , y в секундах дуги.

С этими значениями координат мгновенного полюса приводят результаты астрономических наблюдений на пунктах геодезических сетей к среднему полюсу, т. е. в Систему Международного условного начала, по формулам:

$$\varphi = \varphi_{\text{набл.}} + (y \sin \lambda - x \cos \lambda);$$

$$\lambda = \lambda_{\text{набл.}} - \frac{1}{15} (x \sin \lambda + y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi; \quad (1.2.1)$$

$$a = a_{\text{набл.}} - (x \sin \lambda + y \cos \lambda) \operatorname{sec} \varphi;$$

$$A = A_{\text{набл.}} - (x \sin L + y \cos L) \cos B,$$

где $\varphi_{\text{набл.}}$, $\lambda_{\text{набл.}}$ — астрономические координаты, соответствующие мгновенному полюсу, т. е. полученные непосредственно из наблюдений; a — астрономический азимут; A — геодезический азимут.

По поводу этих формул необходимо иметь в виду следующее. Третье выражение написано для азимутов, вычисленные значения которых мало зависят или совсем не зависят от астрономической долготы. К ним, в частности, относятся астрономические азимуты, полученные по наблюдениям Полярной. В четвертом выражении

предполагается, что геодезический азимут, полученный непосредственно из наблюдений, вычислен с геодезической долготой, соответствующей среднему полюсу в Системе МУН.

Из определения астрономической долготы следует, что ее значение зависит не только от системы полюса, но и от положения плоскости начального меридиана. Реально плоскость начального меридиана задается значениями долгот основных долготных пунктов, совокупность которых выполняет роль начального пункта системы астрономических долгот подобно начальному пункту геодезической сети в референцной системе.

Действительно, на основных пунктах определяют лично-инструментальную разность, которую вычисляют по формуле

$$\delta\lambda = \lambda^\circ - \lambda_n^\circ, \quad (1.2.2)$$

где λ° — долгота основного пункта; λ_n° — полученная из наблюдений долгота основного пункта.

Лично-инструментальную разность учитывают при вычислении долготы полевого пункта:

$$\lambda = \lambda_n + \delta\lambda, \quad (1.2.3)$$

где λ_n — наблюдаемая долгота пункта.

Подставив (1.2.2) в (1.2.3), получаем

$$\lambda = \lambda^\circ + (\lambda_n - \lambda_n^\circ). \quad (1.2.4)$$

Таким образом, чтобы получить долготу полевого пункта, к долготе основного пункта прибавляют разность двух значений долгот, определенных из наблюдений звезд, т. е. долготы на полевые пункты передают от основных пунктов. Соответственно, на все астропункты сети передаются и ошибки основных пунктов, которые проявляются как ошибки задания положения начального астрономического меридиана.

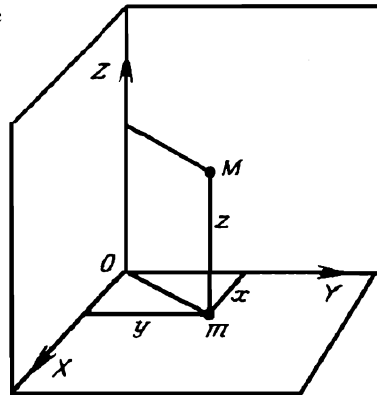
Получаемые из наблюдений звезд долготы зависят от ошибок системы времени и ошибок координат звезд, поэтому стремятся к тому, чтобы эти ошибки были одинаковыми для наблюдений на основном и полевым пунктах, и тогда они исключаются (в общем случае, ослабляются) при вычислении разности долгот ($\lambda_n - \lambda_n^\circ$) в (1.2.4).

1.3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Как уже отмечалось, начало пространственных прямоугольных координат (точка O на рис. 1) либо определяется под условием совмещения с центром масс Земли (в общеземных системах), либо находится вблизи от него (в референцных системах).

Ориентировка оси Z в каждой системе координат выполняется с учетом ориентировки средней оси вращения Земли. При установлении системы среднего полюса, в том числе и полюса в Системе МУН, не накладывают условия прохождения средней оси

Рис. 1. Пространственные прямоугольные координаты



вращения через центр масс Земли, поэтому и в референцных и в общеземных системах оси Z не совпадают со средней осью вращения, а параллельны ей.

Плоскость XOY перпендикулярна оси Z и средней оси вращения Земли. Плоскость XOZ выбирается под условием ее параллельности плоскости начального астрономического меридиана.

Благодаря названным условиям устанавливается взаимная связь между земными и звездными системами координат, применяемыми в геодезии. Оси Z не совпадают и не параллельны оси Мира, поэтому в установлении этой связи участвуют координаты мгновенного полюса относительно среднего полюса.

Ось Z пересекает поверхность Земли в двух точках, которые являются геодезическими полюсами. Плоскость XOZ пересекает поверхность Земли по линии, называемой начальным геодезическим меридианом, а плоскость XOY — по линии, которая является геодезическим экватором.

Начала разных систем координат по-разному расположены относительно Земли, т. е. относительно ее центра масс, поэтому в разных системах координат геодезические полюсы, начальные геодезические меридианы и экваторы на земной поверхности разные. В общеземных системах эта разница невелика и вызвана тем, что совмещение начал этих систем с центром масс Земли и ориентирование осей выполняется небезошибочно.

Положение любой точки задается тремя пространственными координатами — абсциссой X , ординатой Y , аппликатой Z .

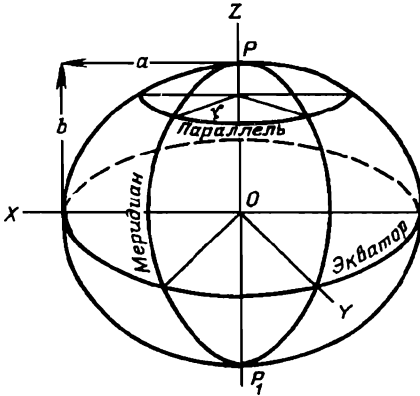
1.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Геодезические координаты задаются относительно земных эллипсоидов (рис. 2). В общеземных системах эллипсоиды называют общеземными, в референцных системах референц-эллипсоидами.

Уравнение поверхности земного эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.4.1)$$

Рис. 2. Земной эллипсоид



где x, y, z — пространственные прямоугольные координаты точки на поверхности эллипсоида; a, b — большая и малая полуоси эллипсоида.

В каждой системе координат центр эллипсоида совпадает с началом пространственных прямоугольных координат этой системы.

Большая и малая полуоси являются элементами эллипсоида и определяют его размеры и форму. К элементам эллипсоида относят также и некоторые другие величины, в том числе следующие: сжатие

$$\alpha = \frac{a-b}{a}; \quad (1.4.2)$$

эксцентриситет

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad (1.4.3)$$

второй эксцентриситет

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (1.4.4)$$

Приведем некоторые соотношения между элементами эллипсоида:

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = a(1 - \alpha);$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}; \quad (1.4.5)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2;$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2}.$$

Точки земной поверхности, в том числе геодезические пункты, проектируются на эллипсоид нормальными к его поверхности.

К основным линиям эллипсоида относятся меридианы и параллели.

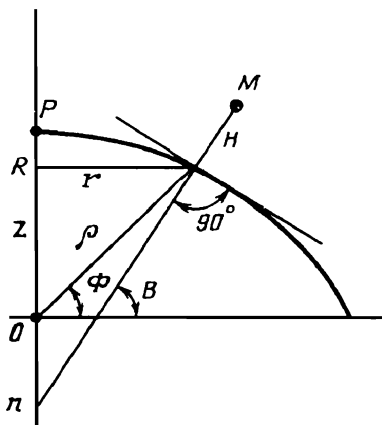


Рис. 3. Геоцентрическая широта

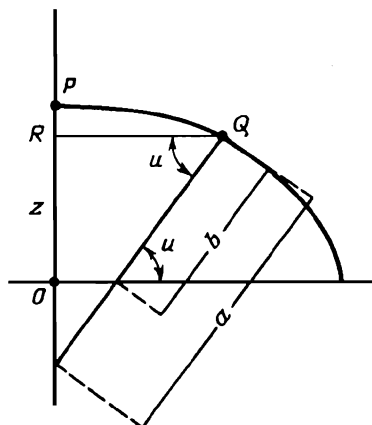


Рис. 4. Приведенная широта

Меридианом называется линия, по которой поверхность эллипсоида пересекается плоскостью, проходящей через нормаль и малую ось, т. е. плоскостью меридиана данной точки. Один из меридианов назначается нулевым или начальным. Плоскость начального меридиана совпадает с плоскостью ZOX . Плоскости меридианов на эллипсоиде параллельны плоскостям одноименных астрономических и геодезических меридианов точек на поверхности Земли.

Параллелями на эллипсоиде являются линии, которые образуются в результате сечения поверхности эллипсоида плоскостями, перпендикулярными малой оси. Линия пересечения эллипсоида с такой плоскостью, проходящей через центр эллипсоида, называется экватором. Плоскость экватора совпадает с координатной плоскостью XOY .

Плоскость меридиана является нормальной плоскостью, т. е. проходит через нормаль к поверхности эллипсоида, а сам меридиан — одним из главных нормальных сечений.

Плоскость, проходящая через нормаль и перпендикулярная плоскости меридиана, называется плоскостью первого вертикала. Первый вертикал, как линия на поверхности эллипсоида, также является главным нормальным сечением.

Положение точки относительно земного эллипсоида задают ее координаты — геодезические широта, долгота и высота.

Геодезическая широта B — это угол между нормалью и плоскостью экватора. Геодезической долготой L называется угол между плоскостью меридиана данной точки и плоскостью начального меридиана. Геодезической высотой H является отрезок нормали от точки до поверхности эллипсоида.

Кроме этих координат при вычислениях используются геоцентрические широты Φ и приведенные широты u , определения которых следуют из рис. 3 и 4. На этих рисунках буквой P обозначено положение полюса на эллипсоиде. Термин «геоцент-

рическая широта» и «приведенная широта» относятся как к общеземным, так и к референсным системам координат.

Связь между геодезической, геоцентрической и приведенной широтами выражается формулами:

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} u; \quad (1.4.6)$$

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B; \quad (1.4.7)$$

$$\operatorname{tg} B = (1 + e'^2) \operatorname{tg} \Phi; \quad (1.4.8)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B; \quad (1.4.9)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} u. \quad (1.4.10)$$

При вычислении на эллипсоиде используются радиусы кривизны. К ним относятся:

M — радиус кривизны меридиана;

N — радиус кривизны первого вертикала;

R — средний радиус кривизны;

r — радиус кривизны параллели;

R_A — радиус кривизны нормального сечения.

Приведем формулы для этих радиусов и для радиус-вектора ρ :

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}; \quad (1.4.11)$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}; \quad (1.4.12)$$

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad (1.4.13)$$

$$r = N \cos B; \quad (1.4.14)$$

$$R_A = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2 B \cos^2 A}; \quad (1.4.15)$$

$$\rho = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 u} = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} = a \sqrt{\frac{1 - (2 - e^2) e^2 \sin^2 B}{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (1.4.16)$$

При выводе формул нередко пользуются географической широтой, т. е. широтой на шаре или такой широтой, которая связана с геодезической широтой соотношением

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B}\right)^{\frac{e}{2}}, \quad (1.4.17)$$

где φ — географическая широта; e — эксцентриситет эллипсоида.

На основе этого выражения могут быть получены формулы в виде рядов, более удобные для практического применения. Так перевычисление геодезических широт в географические вместо формулы (1.4.17) может выполняться по формуле

$$\varphi = B - \sin 2B \left[\frac{e^2}{2} + \sin^2 B \left(\frac{5}{12} e^4 - \frac{1}{12} e^6 \right) + \frac{13}{30} e^6 \sin^4 B \right] \quad (1.4.18)$$

или

$$\varphi = B - \sin 2B \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{3}{32} e^6 \right) + \sin 4B \left(\frac{5}{48} e^4 + \frac{7}{80} e^6 \right) - \frac{13}{480} e^6 \sin 6B. \quad (1.4.19)$$

Формулы обратного перехода имеют вид:

$$B = \varphi + \sin 2\varphi \left[\left(\frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} + \frac{e^6}{2} \right) - \sin^2 \varphi \left(\frac{7}{12} e^4 + \frac{17}{12} e^6 \right) + \frac{14}{15} e^6 \sin^4 \varphi \right] \quad (1.4.20)$$

или

$$B = \varphi + \sin 2\varphi \left(\frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{1}{12} e^6 \right) + \sin 4\varphi \left(\frac{7}{48} e^4 + \frac{29}{240} e^6 \right) + \frac{7}{120} e^6 \sin 6\varphi. \quad (1.4.21)$$

Ошибки перевычисления широт по формулам (1.4.18)—(1.4.21) не превышают величины, которая в линейной мере составляет 2 мм.

Взаимное положение двух точек на поверхности эллипсоида (т. е. проекций точек на эллипсоиде) задается значениями прямого A_{12} и обратного A_{21} азимутов геодезической линии и ее длиной ($s_{12} = s_{21} = s$). Формулы и алгоритмы их вычисления при уравнивании сетей выбирают в зависимости от расстояний. Необходимая точность при любых расстояниях обеспечивается в способе Бесселя. Алгоритмы для этого способа приведены, в частности, в работе [6].

1.5. СВЯЗЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Формулы вычисления пространственных прямоугольных координат имеют вид:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

$$Z = (N + H - e^2 N) \sin B,$$

где e^2 — квадрат первого эксцентриситета эллипсоида.

Перепишем сюда формулу (1.4.12) для радиуса кривизны первого вертикала

$$N = a (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.5.2)$$

Геодезические координаты вычисляются по следующим формулам:

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + \frac{e^2 N \sin B}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \operatorname{tg} \Phi + \frac{e^2 N \sin B}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad \text{при } Z \leq \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} - \frac{e^2 N \cos B}{Z} = \operatorname{ctg} \Phi - \frac{e^2 N \cos B}{Z} \quad \text{при } Z > \sqrt{X^2 + Y^2};$$

$$H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N = Z \operatorname{cosec} B - (1 - e^2) N. \quad (1.5.3)$$

В этих формулах Φ — геоцентрическая широта:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (1.5.4)$$

По формулам (1.5.3) геодезическую широту приходится вычислять приближениями. В первом приближении ее вычисляют по формуле (1.4.9), т. е. для точки на эллипсоиде ($H = 0$)

$$\operatorname{tg} B_1 = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{1 - e^2}. \quad (1.5.5)$$

В каждом следующем приближении вычисляется величина $e^2 N \sin B$ или $e^2 N \cos B$ с широтой B , вычисленной в предыдущем приближении по формуле (1.5.3). Так во втором приближении широту вычисляют по формулам

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \Phi + \frac{e^2 N \sin B_1}{\sqrt{X^2 + Y^2}};$$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} \Phi - \frac{e^2 N \cos B_1}{Z}. \quad (1.5.6)$$

В этих формулах Φ и B_1 вычисляются по (1.5.4) и (1.5.5), а значение N — по формуле (1.5.2), в которой вместо B используется B_1 .

При перевычислениях координат геодезических пунктов достаточно нескольких итераций. При высотах до 7—8 км точность 1 дм обеспечивается после второго приближения.

Приведем частные производные прямоугольных координат по геодезическим и геодезических по прямоугольным [6]:

$$\frac{\partial X}{\partial B} = - (M + H) \sin B \cos L; \quad \frac{\partial B}{\partial X} = - \frac{\sin B \cos L}{(M + H)};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = - (M + H) \sin B \sin L; \quad \frac{\partial B}{\partial Y} = - \frac{\sin B \sin L}{(M + H)};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial B} &= (M + H) \cos B; & \frac{\partial B}{\partial Z} &= \frac{\cos B}{(M + H)}, \\
\frac{\partial X}{\partial L} &= - (N + H) \cos B \sin L; & \frac{\partial L}{\partial X} &= - \frac{\sin L}{(N + H) \cos B}, \\
\frac{\partial Y}{\partial L} &= (N + H) \cos B \cos L; & \frac{\partial L}{\partial Y} &= \frac{\cos L}{(N + H) \cos B}, \\
\frac{\partial Z}{\partial L} &= 0; & \frac{\partial L}{\partial Z} &= 0;
\end{aligned}
\tag{1.5.7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial H} = \cos B \cos L; \quad \frac{\partial H}{\partial X} = \cos B \cos L;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = \cos B \sin L; \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = \cos B \sin L;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial H} = \sin B; \quad \frac{\partial H}{\partial Z} = \sin B.$$

1.6. СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДВУХ СИСТЕМ

Пространственные прямоугольные координаты двух систем, у которых разные начала, ориентировка осей и линейный масштаб, связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_2 + \Delta X + \omega_y Z_2 - \omega_z Y_2 + m X_2; \\
Y_1 &= Y_2 + \Delta Y - \omega_x Z_2 + \omega_z X_2 + m Y_2; \\
Z_1 &= Z_2 + \Delta Z + \omega_x Y_2 - \omega_y X_2 + m Z_2.
\end{aligned}
\tag{1.6.1}$$

В этих формулах величины ΔX , ΔY , ΔZ , ω_x , ω_y , ω_z и m являются параметрами перехода от второй системы к первой. Величины ΔX , ΔY , ΔZ — это координаты начала второй системы относительно начала первой. Для точек земной поверхности это означает, что при $\omega_x = \omega_y = \omega_z = m = 0$

$$\Delta X = X_1 - X_2;$$

$$\Delta Y = Y_1 - Y_2; \tag{1.6.2}$$

$$\Delta Z = Z_1 - Z_2.$$

Угловые параметры ω_x , ω_y равны углам поворота плоскостей ZOY и ZOX вокруг осей X , Y против хода часовой стрелки, если смотреть на начало системы с положительного направления каждой оси. Параметр ω_z равен углу поворота плоскости XOY вокруг оси Z по ходу часовой стрелки. Масштабный коэффициент m соответствует следующим соотношениям:

$$m = \frac{S_1 - S_2}{S_2};$$

$$S_1 = S_2 + mS_2 = S_2(1 + m), \quad (1.6.3)$$

где S_2, S_1 — расстояния между одними и теми же точками в пространстве во второй и первой системах соответственно. Величины ω_x, ω_y учитывают непараллельность осей Z , т. е. непараллельность малых осей эллипсоидов. Величина ω_z учитывает непараллельность плоскостей одноименных меридианов, в том числе начальных, а m — разницу в линейных масштабах.

Параметры перехода для формул (1.6.1) получают при условии, что в обеих системах начальным является Гринвичский меридиан.

Отметим, что обычно в геодезических сетях, задающих две разные системы координат, угловые параметры не превышают десятых долей секунды или единиц секунд, а масштабный коэффициент меньше 10^{-6} , поэтому методическая ошибка формул (1.6.1) не превышает 1—2 мм.

1.7. СВЯЗЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ РАЗНЫХ СИСТЕМ

Формулы перевычисления геодезических координат из одной системы в другую получим, взяв за основу следующие формулы пересчета прямоугольных координат (1.6.1):

$$\begin{aligned} dX &= X_1 - X_2 = \Delta X + \omega_y Z_2 - \omega_z Y_2 + mX_2; \\ dY &= Y_1 - Y_2 = \Delta Y - \omega_x Z_2 + \omega_z X_2 + mY_2; \\ dZ &= Z_1 - Z_2 = \Delta Z + \omega_x Y_2 - \omega_y X_2 + mZ_2. \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Формулы, устанавливающие связь между дифференциалами геодезических и прямоугольных координат, напомним на основании выражений (1.5.7):

$$\begin{aligned} dB &= -\frac{\sin B \cos L}{(M + H)} dX - \frac{\sin B \sin L}{(M + H)} dY + \frac{\cos B}{(M + H)} dZ; \\ dL &= -\frac{\sin L}{(N + H) \cos B} dX + \frac{\cos L}{(N + H) \cos B} dY; \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

$$dH = \cos B \cos L dX + \cos B \sin L dY + \sin B dZ.$$

Для удобства выводов перепишем сюда формулы (1.5.1):

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

$$Z = (N + H - e^2 N) \sin B.$$

Подставим (1.7.1) в (1.7.2) и, чтобы сократить запись, применим специальные индексы вместо произведений частных производных на члены в правой части формул (1.7.1):

$$dB = B_1 - B_2 = dB_1 + dB_2 + dB_3 + dB_4 + dB_5 + dB_6 + dB_7;$$

$$dL = L_1 - L_2 = dL_1 + dL_2 + dL_3 + dL_4 + dL_5 + dL_6 + dL_7; \quad (1.7.4)$$

$$dH = H_1 - H_2 = dH_1 + dH_2 + dH_3 + dH_4 + dH_5 + dH_6 + dH_7.$$

Эти индексы поясним на примере

$$dB_1 = \frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \Delta X} \Delta X + \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \Delta X} \Delta X + \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \Delta X} \Delta X = - \frac{\sin B \cos L}{M + H} \Delta X.$$

На основании непосредственно (1.7.2) и (1.7.1) запишем следующие члены выражений (1.7.4):

$$dB_1 = - \frac{\sin B \cos L}{(M + H)} \Delta X;$$

$$dB_2 = - \frac{\sin B \sin L}{(M + H)} \Delta Y;$$

$$dB_3 = \frac{\cos B}{(M + H)} \Delta Z;$$

$$dL_1 = - \frac{\sin L}{(N + H) \cos B} \Delta X; \quad (1.7.5)$$

$$dL_2 = \frac{\cos L}{(N + H) \cos B} \Delta Y;$$

$$dL_3 = 0;$$

$$dH_1 = \cos B \cos L \Delta X;$$

$$dH_2 = \cos B \sin L \Delta Y;$$

$$dH_3 = \sin B \Delta Z.$$

Чтобы получить остальные члены выражений (1.7.4), сперва напишем несколько вспомогательных формул:

$$\frac{N}{N + H} = 1 - \frac{H}{N} + \frac{H^2}{N^2} - \dots, \quad (1.7.6)$$

$$\frac{M}{M + H} = 1 - \frac{H}{M} + \frac{H^2}{M^2} - \dots. \quad (1.7.7)$$

Имея в виду, что

$$N = M (1 - e^2 \sin^2 B) (1 - e^2)^{-1},$$

после разложения в ряд последнего члена получим

$$N = M (1 + e^2 \cos^2 B + e^4 \cos^2 B + \dots). \quad (1.7.8)$$

А на основании этого выражения с учетом (1.7.7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{N}{M + H} &= 1 + e^2 \cos^2 B + e^4 \cos^2 B - \frac{H}{M} - \frac{H}{M} e^2 \cos^2 B + \\ &+ \frac{H^2}{M^2} + \frac{H^2}{M^2} e^2 \cos^2 B + \dots. \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Из этого выражения, имея в виду, что

$$\frac{H}{M+H} = \frac{H}{M} - \frac{H^2}{M^2} + \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{N+H}{M+H} &= 1 + e^2 \cos^2 B + e^4 \cos^2 B - \frac{H}{M} e^2 \cos^2 B + \\ &+ \frac{H^2}{M^2} e^2 \cos^2 B + \dots \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Применяя формулы (1.7.1)—(1.7.3), напомним коэффициент dB_4

$$dB_4 = \left(\frac{\sin B \sin L}{M+H} Z + \frac{\cos B}{M+H} Y \right) \omega_x = \left(\frac{N+H}{M+H} - \frac{e^2 N \sin^2 B}{M+H} \right) \sin L \omega_x.$$

Подставим сюда (1.7.10) и (1.7.9)

$$\begin{aligned} dB_4 &= (1 + e^2 \cos 2B + e^4 \cos^4 B - \frac{H}{M} e^2 \cos 2B + \\ &+ \frac{H^2}{M^2} e^2 \cos^2 B) \sin L \omega_x. \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Чтобы нагляднее был анализ формул, ошибки dB и dL лучше пересчитывать в ошибки координат в проекции Гаусса (в мм):

$$\begin{aligned} dx_r &\approx 3 \cdot 10^4 dB''; \\ dy_r &\approx 3 \cdot 10^4 dL'' \cos B. \end{aligned} \quad (1.7.12)$$

На основании (1.7.12) получаем, что при $\omega_x \leq 1''$

$$dx_r = 3 \cdot 10^4 e^2 \cos 2B \sin L \omega_x \leq 200 \text{ мм},$$

$$dy_r = 3 \cdot 10^4 e^4 \cos^4 B \sin L \omega_x \leq 1,3 \text{ мм}.$$

Остальные члены в (1.7.11) значительно меньше, поэтому сохраним в этом выражении только два члена

$$dB_4 = (1 + e^2 \cos 2B) \sin L \omega_x. \quad (1.7.13)$$

На основании формул (1.7.3), учитывая формулы (1.7.6), (1.7.9) и (1.7.10), получим выражения для остальных коэффициентов в (1.7.4).

$$\text{Коэффициент } dB_5 = \left(\frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_y} + \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_y} + \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_y} \right) \omega_y$$

или

$$\begin{aligned} dB_5 &= \left(-\frac{\sin B \cos L}{M+H} Z - \frac{\cos B}{M+H} X \right) \omega_y = \left(-\frac{N+H}{M+H} + \frac{e^2 N \sin^2 B}{M+H} \right) \times \\ &\times \cos L \omega_y = -(1 + e^2 \cos 2B + \dots) \cos L \omega_y. \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

Коэффициент

$$dB_6 = \left(\frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_z} + \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_z} + \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_z} \right) \omega_z,$$

поэтому

$$dB_6 = \left(\frac{\sin B \cos L}{M + H} Y - \frac{\sin B \sin L}{M + H} X \right) \omega_z = 0. \quad (1.7.15)$$

Коэффициент

$$dB_7 = \left(\frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial m} + \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial m} + \frac{\partial B}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial m} \right) m$$

или

$$dB_7 = \left(-\frac{\sin B \cos L}{M + H} X - \frac{\sin B \sin L}{M + H} Y + \frac{\cos B}{M + H} Z \right) \times \\ \times m = -\frac{e^2 N \sin B \cos B}{M + H} m = (-e^2 \sin B \cos B + \dots) m. \quad (1.7.16)$$

Коэффициент

$$dL_4 = \left(\frac{\partial L}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_x} + \frac{\partial L}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_x} + \frac{\partial L}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_x} \right) \omega_x.$$

Следовательно,

$$dL_4 = -\frac{\cos L}{(N + H) \cos B} Z \omega_x = -\left(1 - \frac{e^2 N}{N + H} \right) \operatorname{tg} B \cos L \omega_x = \\ = -(1 - e^2 + \dots) \operatorname{tg} B \cos L \omega_x. \quad (1.7.17)$$

Коэффициент

$$dL_5 = \left(\frac{\partial L}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_y} + \frac{\partial L}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_y} + \frac{\partial L}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_y} \right) \omega_y,$$

т. е.

$$dL_5 = -\frac{\sin L}{(N + H) \cos B} Z \omega_y = -\left(1 - \frac{e^2 N}{N + H} \right) \operatorname{tg} B \sin L \omega_y = \\ = -(1 - e^2 + \dots) \operatorname{tg} B \sin L \omega_y. \quad (1.7.18)$$

Коэффициент

$$dL_6 = \left(\frac{\partial L}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_z} + \frac{\partial L}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_z} + \frac{\partial L}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_z} \right) \omega_z$$

или

$$dL_6 = \left(\frac{\sin L}{(N + H) \cos B} Y + \frac{\cos L}{(N + H) \cos B} X \right) \omega_z = \omega_z. \quad (1.7.19)$$

Коэффициент

$$dL_7 = \left(\frac{\partial L}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial m} + \frac{\partial L}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial m} + \frac{\partial L}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial m} \right) m.$$

Следовательно,

$$dL_7 = \left(-\frac{\sin L}{(N+H)\cos B} X + \frac{\cos L}{(N+H)\cos B} Y \right) m = 0. \quad (1.7.20)$$

Коэффициент

$$dH_4 = \left(\frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_x} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_x} + \frac{\partial H}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_x} \right) \omega_x,$$

т. е.

$$\begin{aligned} dH_4 &= (-\cos B \sin L \cdot Z + \sin B \cdot Y) \omega_x = \\ &= e^2 N \sin B \cos B \sin L \omega_x. \end{aligned} \quad (1.7.21)$$

$$\text{Коэффициент } dH_5 = \left(\frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_y} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_y} + \frac{\partial H}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_y} \right) \omega_y$$

или

$$\begin{aligned} dH_5 &= (\cos B \cos L \cdot Z - \sin B \cdot X) \omega_y = \\ &= -e^2 N \sin B \cos B \cos L \omega_y. \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

Коэффициент

$$dH_6 = \left(\frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \omega_z} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \omega_z} + \frac{\partial H}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \omega_z} \right) \omega_z,$$

поэтому

$$dH_6 = (-\cos B \cos LY + \cos B \sin LX) \omega_z = 0. \quad (1.7.23)$$

Коэффициент

$$dH_7 = \left(\frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial m} + \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial m} + \frac{\partial H}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial m} \right) m,$$

т. е.

$$\begin{aligned} dH_7 &= (\cos B \cos LX + \cos B \sin LY + \sin B \cdot Z) m = \\ &= (N + H - e^2 N \sin^2 B) m. \end{aligned} \quad (1.7.24)$$

Теперь остается подставить в (1.7.4) полученные коэффициенты и добавить к ним члены, учитывающие разность полуосей и сжатий двух эллипсоидов [6]:

$$dB_{a, a} = \frac{\rho''}{M+H} \left[\frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} \right];$$

$$dL_{a, a} = 0;$$

$$dH_{a, a} = -\frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2}. \quad (1.7.25)$$

После подстановки получаем:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_2 + \frac{\rho''}{M+H} \left[\frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\
 & - (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \sin B + \cos B \Delta Z \left. \right] + (1 + e^2 \cos 2B) (\omega_x \sin L - \\
 & - \omega_y \cos L) - \rho'' e^2 m \sin B \cos B; \\
 L_1 &= L_2 + \frac{\rho''}{(N+H) \cos B} (\cos L \Delta Y - \sin L \Delta X) - \\
 & - \operatorname{tg} B (1 - e^2) (\cos L \omega_x + \sin L \omega_y) + \omega_z; \tag{1.7.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= H_2 - \frac{a}{N} \Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} + (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \cos B + \sin B \Delta Z + \\
 & + e^2 N \sin B \cos B \left(\frac{\omega_x}{\rho''} \sin L - \frac{\omega_y}{\rho''} \cos L \right) + m (N + H - e^2 N \sin^2 B).
 \end{aligned}$$

В этих формулах обозначено:

$$\Delta a = a_1 - a_2; \quad \Delta e^2 = e_1^2 - e_2^2.$$

Коэффициенты в (1.7.26) вычисляются со средними координатами и параметрами эллипсоидов двух систем, поэтому сначала в первой системе вычисляются приближенные координаты.

Для перевычисления координат с ошибкой не более 3 м формулы (1.7.26) можно несколько упростить. Упрощенные формулы напомним для случая, когда полуоси эллипсоидов и плоскости одноименных меридианов считаются параллельными, а линейные масштабы одинаковыми:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= B_2 + 0,0323 (\cos B \Delta Z - \sin B \cos L \Delta X - \sin B \sin L \Delta Y) + \\
 & + 1,03 \cdot 10^5 \sin 2B \Delta e^2; \\
 L_1 &= L_2 + \frac{0,0323}{\cos B} (\cos L \Delta Y - \sin L \Delta X); \tag{1.7.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= H_2 + (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \cos B + \sin B \Delta Z - \Delta a + \\
 & + 3,19 \cdot 10^6 \sin^2 B \Delta e^2.
 \end{aligned}$$

Формулы (1.7.26) написаны для одного пункта. Напишем их для совокупности пунктов. Для этого обозначим коэффициенты при координатах и параметрах перехода:

$$\begin{aligned}
 a_{B0} &= 1; & a_{B1} &= - \frac{\rho''}{M+N} \sin B \cos L; \\
 a_{B2} &= - \frac{\rho''}{M+H} \sin B \sin L; & a_{B3} &= \frac{\rho''}{M+H} \cos B; \\
 a_{B4} &= (1 + e^2 \cos 2B) \sin L; & a_{B5} &= - (1 + e^2 \cos 2B) \cos L; \\
 a_{B6} &= 0; & a_{B7} &= - \rho'' e^2 \sin B \cos B; \\
 a_{L0} &= 1; & a_{L1} &= - \frac{\rho''}{(N+H) \cos B} \sin L;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{L2} &= \frac{\rho''}{(N+H) \cos B} \cos L; & a_{L3} &= 0; \\
a_{L4} &= -(1-e^2) \operatorname{tg} B \cos L; & a_{L5} &= -(1-e^2) \operatorname{tg} B \sin L; \\
a_{L6} &= 1; & a_{L7} &= 0; \\
a_{H0} &= 1; & a_{H1} &= \cos B \cos L; \\
a_{H2} &= \cos B \sin L; & a_{H3} &= \sin B; \\
a_{H4} &= \frac{e^2 N}{\rho''} \sin B \cos B \sin L; & a_{H5} &= -\frac{e^2 N}{\rho''} \sin B \cos B \cos L; \\
a_{H6} &= 0; & a_{H7} &= N+H-e^2 N \sin^2 B.
\end{aligned} \tag{1.7.28}$$

Обозначим также коэффициенты при Δa и Δe^2 :

$$\begin{aligned}
C_{B1} &= \frac{\rho'' e^2 N}{(M+H) a} \sin B \cos B; & C_{B2} &= \frac{\rho'' N}{2(M+H)} \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) \sin B \cos B; \\
C_{L1} &= 0; & C_{L2} &= 0; \\
C_{H1} &= -\frac{a}{N}; & C_{H2} &= \frac{N \sin^2 B}{2}.
\end{aligned} \tag{1.7.29}$$

С учетом этих обозначений запишем формулы (1.7.26) для группы пунктов

$$X_1 = \left(\frac{\partial X_1}{\partial X_2} \right) \cdot X_2 + C \cdot \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix}, \tag{1.7.30}$$

где X_1 — матрица-столбец координат в первой системе; X_2 — матрица-столбец координат во второй системе и параметров перехода от второй системы к первой; $\left(\frac{\partial X_1}{\partial X_2} \right)$ — матрица коэффициентов при координатах и параметрах перехода, т. е. производных от координат первой системы по аргументам — координатам второй системы и

$$\begin{array}{cccccc}
a_{B01} & & a_{B11} & a_{B21} & \dots & a_{B71} \\
& a_{L01} & a_{L11} & a_{L21} & \dots & a_{L71} \\
& & a_{H11} & a_{H21} & \dots & a_{H71} \\
& & \dots & \dots & \dots & \dots \\
& & & a_{B0r} & a_{B1r} & a_{B2r} & \dots & a_{B7r} \\
& & & & a_{L1r} & a_{L2r} & \dots & a_{L7r} \\
& & & & & a_{H1r} & a_{H2r} & \dots & a_{H7r}
\end{array}$$

Рис. 5. Матрица коэффициентов $\left(\frac{\partial X_1}{\partial X_2} \right)$

параметрам перехода; C — матрица коэффициентов при Δa и Δe^2 ; $\begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix}$ — матрица из двух элементов.

Если в группу входит r пунктов, а для пересчета приняты p параметров, то матрицы имеют следующие размеры:

$$X_1 \quad 3r \times 1;$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \end{pmatrix} \quad (3r) \times (3r + p);$$

$$X_2 \quad (3r + p) \times 1;$$

$$C \quad 3r \times 2.$$

Вид матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_2} \end{pmatrix}$ показан на рис. 5.

1.8. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ В ПРОЕКЦИИ ГАУССА ПО ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ

Для обработки геодезических измерений, в том числе для уравнивания сетей, в СССР до 1930 года пользовались прямоугольными координатами в проекции Зольднера. После 1930 года применяется проекция Гаусса—Крюгера, в которой масштаб на осевом меридиане принят равным единице.

Такие же по своей сути проекции, но с другими названиями, применяются во многих странах. Наиболее употребительные названия: проекция *UTM* (поперечно-цилиндрическая проекция Меркатора) и модернизированные проекции *UTM*.

Они могут отличаться масштабом, условным началом, долготами осевых меридианов, нумерацией зон, обозначением осей и другими особенностями. Кроме того проектирование на плоскость проекции может выполняться с различных эллипсоидов. Для перехода от истинных прямоугольных координат x' , y' в любой из этих проекций к геодезическим координатам B , L на любом эллипсоиде и обратно могут применяться одни и те же формулы, а особенности каждой проекции легко учесть при переходе от истинных координат x' , y' к условным координатам x , y .

Получим эти формулы для проекции Гаусса с масштабом, равным единице, для любого эллипсоида. При этом поставим условие, что формулы должны позволять вычислять координаты с точностью 1 мм при удалении от осевого меридиана до 9° , т. е. в данной и в двух соседних шестиградусных зонах.

Формулы для вычисления прямоугольных координат по геодезическим получают на основе разложения в ряды по степеням долготы l , полагая ее малой величиной [5],

$$\begin{aligned}
 x' = X - \frac{1}{2} \frac{d^2 X}{dq^2} l^2 + \frac{1}{24} \frac{d^4 X}{dq^4} l^4 - \\
 - \frac{1}{720} \frac{d^6 X}{dq^6} l^6 + \frac{1}{40\,320} \frac{d^8 X}{dq^8} l^8 - \frac{1}{3\,628\,800} \frac{d^{10} X}{dq^{10}} l^{10} + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{1.8.1}$$

$$y' = \frac{dX}{dq} l - \frac{1}{6} \frac{d^3 X}{dq^3} l^3 + \frac{1}{120} \frac{d^5 X}{dq^5} l^5 - \frac{1}{5040} \frac{d^7 X}{dq^7} l^7 + \frac{1}{362\,880} \frac{d^9 X}{dq^9} l^9 + \dots,$$

где X — длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой B данной точки; q — изометрическая широта той же точки.

Запишем выражения (1.8.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 x' = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 + a_{10} l^{10} + \dots; \\
 y' = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7 + b_9 l^9 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.8.2}$$

Найдем производные в (1.8.1), имея в виду, что

$$\frac{d^n X}{dq^n} = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^{n-1} X}{dq^{n-1}} \right) \frac{dB}{dq}
 \tag{1.8.3}$$

и выражая каждую предыдущую производную $\frac{d^{n-1} X}{dq^{n-1}}$ как функцию от r и B . При дифференцировании будем использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dq} = N \cos B = r; \\
 \frac{dr}{dB} \cdot \frac{dB}{dq} = -N \cos B \sin B;
 \end{aligned}
 \tag{1.8.4}$$

$$\frac{dB}{dq} = (1 + e'^2 \cos^2 B) \cos B;$$

$$N = a (1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}};$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B,$$

где a — большая полуось эллипсоида; e^2, e'^2 — квадраты первого и второго эксцентриситета.

В результате дифференцирования получим:

$$\frac{dX}{dq} = N \cos B;$$

$$\frac{d^2 X}{dq^2} = -N \cos B \sin B;$$

$$\frac{d^3 X}{dq^3} = -N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2);$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 X}{dq^4} &= N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4); \\
\frac{d^5 X}{dq^5} &= N \cos^5 B (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 13\eta^4 - \\
&\quad - 64\eta^4 \operatorname{tg}^2 B + 4\eta^6 - 24\eta^6 \operatorname{tg}^2 B); \\
\frac{d^6 X}{dq^6} &= -N \sin B \cos^5 B (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^2 - \\
&\quad - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 445\eta^4 - 680\eta^4 \operatorname{tg}^2 B + 324\eta^6 - 600\eta^6 \operatorname{tg}^2 B + \dots); \\
\frac{d^7 X}{dq^7} &= -N \cos^7 B (61 - 479 \operatorname{tg}^2 B + 179 \operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B + 331\eta^2 - \\
&\quad - 3298\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 1771\eta^2 \operatorname{tg}^4 B + 715\eta^4 - 8655\eta^4 \operatorname{tg}^2 B + \\
&\quad + 6080\eta^4 \operatorname{tg}^4 B + \dots); \quad \frac{d^8 X}{dq^8} = N \sin B \cos^7 B (1385 - 3111 \operatorname{tg}^2 B + \\
&\quad + 543 \operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B + 10\,899\eta^2 - 32\,802\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 9219\eta^2 \operatorname{tg}^4 B + \\
&\quad + 34\,419\eta^4 - 129\,087\eta^4 \operatorname{tg}^2 B + 49\,644\eta^4 \operatorname{tg}^4 B + \dots); \\
\frac{d^9 X}{dq^9} &= N \cos^9 B (1385 - 19\,028 \operatorname{tg}^2 B + 18\,270 \operatorname{tg}^4 B - \\
&\quad - 1636 \operatorname{tg}^6 B + \operatorname{tg}^8 B + 12\,284\eta^2 - 214\,140\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 290\,868\eta^2 \operatorname{tg}^4 B - \\
&\quad - 47\,188\eta^2 \operatorname{tg}^6 B + \dots); \quad \frac{d^{10} X}{dq^{10}} = -N \sin B \cos^9 B (50\,521 - \\
&\quad - 206\,276 \operatorname{tg}^2 B + 101\,166 \operatorname{tg}^4 B - 4916 \operatorname{tg}^6 B + \operatorname{tg}^8 B + \dots). \quad (1.8.5)
\end{aligned}$$

В этих производных выполним тригонометрические преобразования и представим радиус кривизны N (1.8.4) в виде ряда

$$\begin{aligned}
N &= a \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 B + \frac{5}{16} e^6 \sin^6 B + \right. \\
&\quad \left. + \frac{35}{128} e^8 \sin^8 B + \dots \right). \quad (1.8.6)
\end{aligned}$$

При подстановке производных в (1.8.1) учтем, что при вычислении координат с точностью 1 мм по формулам (1.8.1) или (1.8.2) можно не учитывать в $b_1 l$ и в $a_2 l^2$ члены с e_8 , а в $b_3 l^3$, $a_4 l^4$ и $b_5 l^5$ — члены с e^6 . В $a_6 l^6$ опустим члены, содержащие e^4 , значение которых на любой широте меньше 0,1 мм. Для $b_7 l^7$ необходимо учесть, что суммарное влияние членов, содержащих e^2 , достигает 6,5 мм, а членов с e^4 существенно меньше 1 мм. В $a_8 l^8$ суммарное влияние членов, содержащих e^2 , меньше 0,2 мм, поэтому их можно не учитывать. Член $b_9 l^9$ достигает величины 1,4 мм при $B = 0^\circ$ и $l = 9^\circ$ и быстро убывает с увеличением широты или с

уменьшением долготы. Член $a_{10}l^{10}$ меньше 0,1 мм. В формулах (1.8.1) и (1.8.2) члены b_9l^9 и $a_{10}l^{10}$ опустим.

Чтобы не иметь дело с $\sin^8 B$, применим метод экономизации степенных рядов, изложенный, в частности, в [6].

С учетом приведенных соображений запишем выражения для слагаемых в формулах (1.8.2):

$$\begin{aligned}
 b_1 l &= l \cos B (n_1 + n_2 \sin^2 B + n_3 \sin^4 B + n_4 \sin^6 B); \\
 a_2 l^2 &= l^2 \sin 2B (k_1 + k_2 \sin^2 B + k_3 \sin^4 B + k_4 \sin^6 B); \\
 b_3 l^3 &= l^3 \cos B (n_5 - n_6 \sin^2 B + n_7 \sin^4 B - n_8 \sin^6 B); \\
 a_4 l^4 &= l^4 \sin 2B (k_5 - k_6 \sin^2 B + k_7 \sin^4 B - k_8 \sin^6 B); \\
 b_5 l^5 &= l^5 \cos B (n_9 - n_{10} \sin^2 B + n_{11} \sin^4 B - n_{12} \sin^6 B); \\
 a_6 l^6 &= l^6 \sin 2B (k_9 - k_{10} \sin^2 B + k_{11} \sin^4 B - k_{12} \sin^6 B); \\
 b_7 l^7 &= l^7 \cos B (n_{13} - n_{14} \sin^2 B + n_{15} \sin^4 B - n_{16} \sin^6 B); \\
 a_8 l^8 &= l^8 \sin 2B (k_{13} - k_{14} \sin^2 B + k_{15} \sin^4 B - k_{16} \sin^6 B). \quad (1.8.7)
 \end{aligned}$$

Значения коэффициентов, входящих в эти формулы, получаются в результате преобразования производных (1.8.5)

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{a}{4}; & n_1 &= a; \\
 k_2 &= \frac{ae^2}{8}; & n_2 &= \frac{ae^2}{2}; \\
 k_3 &= \frac{3ae^4}{32}; & n_3 &= \frac{3ae^4}{8}; \\
 k_4 &= \frac{5ae^6}{64}; & n_4 &= \frac{5ae^6}{16}; \\
 k_5 &= \frac{a(5 - e^2)}{48(1 - e^2)^2}; & n_5 &= \frac{a}{6(1 - e^2)}; \\
 k_6 &= \frac{a(12 + 7e^2 + e^4)}{96(1 - e^2)^2}; & n_6 &= \frac{a(4 - e^2)}{12(1 - e^2)}; \\
 k_7 &= \frac{a(16e^2 + 5e^4)}{128(1 - e^2)^2}; & n_7 &= \frac{ae^4}{16(1 - e^2)}; \\
 k_8 &= \frac{7ae^4}{192(1 - e^2)^2}; & n_8 &= \frac{ae^4}{24(1 - e^2)}; \\
 k_9 &= \frac{a(61 + 270e^2)}{1440}; & n_9 &= \frac{a(5 + 4e^2 + 4e^4)}{120(1 - e^2)^2}; \\
 k_{10} &= \frac{a(360 + 2219e^2)}{2880}; & n_{10} &= \frac{a(56 + 83e^2 + 59e^4)}{240(1 - e^2)^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{a(2 + 23e^2)}{24}; & n_{11} &= \frac{a(4 + 16e^2 + 9e^4)}{20(1 - e^2)^2}; \\
k_{12} &= \frac{3ae^2}{8}; & n_{12} &= \frac{a(24e^2 + 11e^4)}{48(1 - e^2)^2}; \\
k_{13} &= \frac{277a}{16\,128}; & n_{13} &= \frac{a(61 + 231e^2)}{5040(1 - e^2)}; \\
k_{14} &= \frac{1211a}{13\,440}; & n_{14} &= \frac{a(1324 + 5339e^2)}{10\,080(1 - e^2)}; \\
k_{15} &= \frac{91a}{672}; & n_{15} &= \frac{a(22 + 95e^2)}{84(1 - e^2)}; \\
k_{16} &= \frac{a}{16}; & n_{16} &= \frac{a(12 + 55e^2)}{84(1 - e^2)}.
\end{aligned} \tag{1.8.8}$$

В формуле (1.8.2) необходимо знать длину дуги меридиана X . Для любого эллипсоида с ошибкой менее 1 мм она может быть вычислена по формуле [5]

$$X = a_0 B - \sin 2B (p_1 + p_2 \sin^2 B + p_3 \sin^4 B). \tag{1.8.9}$$

В этой формуле

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2} (a_2^0 - a_4^0 + a_6^0); & a_0 &= a(1 - e^2) A_0; \\
p_2 &= a_4^0 - \frac{8}{3} a_6^0; & a_2^0 &= a(1 - e^2) A_2; \\
p_3 &= \frac{8}{3} a_6^0; & a_4^0 &= a(1 - e^2) A_4; \\
a_6^0 &= a(1 - e^2) A_6; \\
A_0 &= 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11\,025}{16\,384} e^8; \\
A_2 &= \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8; \\
A_4 &= \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8; \\
A_6 &= \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8.
\end{aligned} \tag{1.8.10}$$

Для эллипсоида Красовского формулы вычисления истинных прямоугольных координат в проекции Гаусса—Крюгера получим на основании (1.8.2), (1.8.7), (1.8.8) и (1.8.9):

$$\begin{aligned}
x' &= 6\,367\,558,4968B - \sin 2B (16\,002,8900 + 66,9607 \sin^2 B + \\
&0,3515 \sin^4 B) + l^2 \sin 2B (1\,594\,561,25 + 5336,535 \sin^2 B + \\
&26,790 \sin^4 B + 0,149 \sin^6 B) + l^4 \sin 2B (672\,483,4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 811\,219,9 \sin^2 B + 5420,0 \sin^4 B - 10,6 \sin^6 B + \\
& + l^6 \sin 2B (278\,194 - 830\,174 \sin^2 B + 572\,434 \sin^4 B - \\
& - 16\,010 \sin^6 B) + l^8 \sin 2B (109\,500 - 574\,700 \sin^2 B + \\
& + 863\,700 \sin^4 B - 398\,600 \sin^6 B); \tag{1.8.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' = & l \cos B (6\,378\,245 + 21\,346,1414 \sin^2 B + 107,1590 \sin^4 B + \\
& + 0,5977 \sin^6 B) + l^3 \cos B (1\,070\,204,16 - 2\,136\,826,66 \sin^2 B + \\
& + 17,98 \sin^4 B - 11,99 \sin^6 B) + l^5 \cos B (270\,806 - \\
& - 1\,523\,417 \sin^2 B + 1\,327\,645 \sin^4 B - 21\,701 \sin^6 B) + \\
& l^7 \cos B (79\,690 - 866\,190 \sin^2 B + 1\,730\,360 \sin^4 B - 945\,460 \sin^6 B).
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы перевычисления координат для проекции Гаусса—Крюгера с коэффициентами для эллипсоида Красовского даны в работе [6]. Приведем эти формулы в том виде, как они даны автором, исправив лишь ошибки в знаках в формуле вычисления x' ,

$$\begin{aligned}
x' = & 6\,367\,558,497B + (((a_{28}l^2 + a_{26})l^2 + a_{24})l^2 + \\
& + 0,5)l^2N - a_0) \sin B \cos B; \\
y' = & (((b_{17}l^2 + b_{15})l^2 + b_{13})l^2 + 1) lN \cos B; \tag{1.8.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = & [(0,605 \sin^2 B + 107,155) \sin^2 B + 21\,346,142] \sin^2 B + 6\,378\,245; \\
a_0 = & (0,7032 \cos^2 B - 135,3277) \cos^2 B + 32\,140,4046;
\end{aligned}$$

$$a_{24} = [(0,0000076 \cos^2 B + 0,0025269) \cos^2 B + 0,25] \cos^2 B - 0,0416667;$$

$$a_{26} = [(0,00562 \cos^2 B + 0,16358) \cos^2 B - 0,08333] \cos^2 B + 0,00139;$$

$$a_{28} = [(0,125 \cos^2 B - 0,104) \cos^2 B + 0,014] \cos^2 B;$$

$$b_{13} = (0,00112309 \cos^2 B + 0,33333333) \cos^2 B - 0,16666667;$$

$$\begin{aligned}
b_{15} = & [(0,004043 \cos^2 B + 0,196743) \cos^2 B - \\
& - 0,166667] \cos^2 B + 0,008333;
\end{aligned}$$

$$b_{17} = [(0,1429 \cos^2 B - 0,1667) \cos^2 B + 0,0361] \cos^2 B - 0,0002.$$

1.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПО КООРДИНАТАМ ПРОЕКЦИИ ГАУССА

Формулы для вычисления геодезических координат с точностью, соответствующей 1 мм в прямоугольных координатах, получим для удалений от осевого меридиана до 9° . Для этого применим известный прием разложения в ряды по степеням ординаты [5]:

$$B = B_0 + \frac{dB}{dq} (q - q_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2B}{dq^2} (q - q_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{d^3 B}{dq^3} (q - q_0)^3 + \frac{1}{24} \frac{d^4 B}{dq^4} (q - q_0)^4 + \dots; \quad (1.9.1)$$

$$l = \frac{dq}{dX} y' - \frac{1}{6} \frac{d^2 q}{dX^2} y'^3 + \frac{1}{120} \frac{d^4 q}{dX^4} y'^5 - \frac{1}{5040} \frac{d^6 q}{dX^6} y'^7 + \\ + \frac{1}{362880} \frac{d^8 q}{dX^8} y'^9 - \dots$$

В первом выражении B_0 — это широта точки, у которой абсцисса равна абсциссе x' данной точки, а ордината равна нулю. Именно для этой точки берутся значения производных.

Широту B_0 для любого эллипсоида с ошибкой, соответствующей величине менее 1 мм, можно вычислить по формуле

$$B_0 = \beta + \sin 2\beta (p'_1 - p'_2 \sin^2 \beta + p'_3 \sin^4 \beta). \quad (1.9.2)$$

В этой формуле

$$\beta = \frac{x'}{a_0}; \quad a_0 = a (1 - e^2) A_0;$$

$$p'_1 = q_2 + 2q_4 + 3q_6;$$

$$p'_2 = 4q_4 + 16q_6;$$

$$p'_3 = 16q_6;$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_0} + \frac{1}{8} \frac{A_2 A_4}{A_0^2} - \frac{1}{16} \frac{A_2^3}{A_0^3}; \quad (1.9.3)$$

$$q_4 = -\frac{A_4}{4A_0} + \frac{A_2^2}{4A_0^2};$$

$$q_6 = \frac{A_6}{6A_0} - \frac{3A_2 A_4}{8A_0^2} + \frac{3A_2^3}{16A_0^3}.$$

Приведенные здесь коэффициенты $A_0 \div A_6$ вычисляются по формулам (1.8.10).

В первую формулу (1.9.1) входит разность значений изометрических широт. Эта разность вычисляется по формуле

$$q - q_0 = -\frac{1}{2} \frac{d^2 q}{dX^2} y'^2 + \frac{1}{24} \frac{d^4 q}{dX^4} y'^4 - \frac{1}{720} \frac{d^6 q}{dX^6} y'^6 + \\ + \frac{1}{40320} \frac{d^8 q}{dX^8} y'^8 - \dots \quad (1.9.4)$$

Производные изометрической широты по длине дуги меридиана

$$\frac{d^n q}{dX^n} = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^{n-1} q}{dX^{n-1}} \right) \frac{dB}{dX} \quad (1.9.5)$$

получим, представляя предыдущую производную как функцию от $\frac{1}{r}$ и B и имея в виду, что

$$\frac{d}{dB} \left(\frac{1}{r^n} \right) \frac{dB}{dX} = \frac{n}{r^{n-1}} \frac{\sin B}{N^2 \cos^2 B}. \quad (1.9.6.)$$

При дифференцировании воспользуемся следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dX} &= \frac{1}{r}; \\ r &= N \cos B; \\ \frac{dB}{dX} &= \frac{1 + \eta^2}{N}; \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B.$$

В результате дифференцирования получаем требуемые производные:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dX} &= \frac{1}{N \cos B}; \\ \frac{d^2 q}{dX^2} &= \frac{\operatorname{tg} B}{N^2 \cos B}; \\ \frac{d^3 q}{dX^3} &= \frac{1}{N^3 \cos B} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B + \eta^2); \\ \frac{d^4 q}{dX^4} &= \frac{\operatorname{tg} B}{N^4 \cos B} (5 + 6 \operatorname{tg}^2 B + \eta^2 - 4\eta^4); \\ \frac{d^5 q}{dX^5} &= \frac{1}{N^5 \cos B} (5 + 28 \operatorname{tg}^2 B + 24 \operatorname{tg}^4 B + 6\eta^2 + 8\eta^2 \operatorname{tg}^2 B - 3\eta^4 + \\ &+ 4\eta^4 \operatorname{tg}^2 B - 4\eta^6 + 24\eta^6 \operatorname{tg}^2 B); \\ \frac{d^6 q}{dX^6} &= \frac{\operatorname{tg} B}{N^6 \cos B} (61 + 180 \operatorname{tg}^2 B + 120 \operatorname{tg}^4 B + 46\eta^2 + \\ &+ 48\eta^2 \operatorname{tg}^2 B - 3\eta^4 - 36\eta^4 \operatorname{tg}^2 B + \dots); \\ \frac{d^7 q}{dX^7} &= \frac{1}{N^7 \cos B} (61 + 662 \operatorname{tg}^2 B + 1320 \operatorname{tg}^4 B + 720 \operatorname{tg}^6 B + 107\eta^2 + \\ &+ 440\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 336\eta^2 \operatorname{tg}^4 B + \dots); \\ \frac{d^8 q}{dX^8} &= \frac{\operatorname{tg} B}{N^8 \cos B} (1385 + 7266 \operatorname{tg}^2 B + 10\,920 \operatorname{tg}^4 B + 5040 \operatorname{tg}^6 B + \\ &+ 1731\eta^2 + 4416\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 2688\eta^2 \operatorname{tg}^4 B + \dots); \\ \frac{d^9 q}{dX^9} &= \frac{1}{N^9 \cos B} (1385 + 24\,568 \operatorname{tg}^2 B + 83\,664 \operatorname{tg}^4 B + 100\,800 \operatorname{tg}^6 B + \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

$$+ 40\,320 \operatorname{tg}^8 B + 3116\eta^2 + 26\,736\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 47\,808\eta^2 \operatorname{tg}^4 B + \\ + 24\,192\eta^2 \operatorname{tg}^6 B + \dots).$$

Теперь получим производные геодезической широты по изометрической широте

$$\frac{d^n B}{dq^n} = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^{n-1} B}{dq^{n-1}} \right) \frac{dB}{dq}, \quad (1.9.9)$$

необходимые для первого выражения (1.9.1), последовательным дифференцированием, начиная с первой производной

$$\frac{dB}{dq} = \cos B + e'^2 \cos^3 B. \quad (1.9.10)$$

В результате дифференцирования получаем:

$$\frac{dB}{dq} = \cos B (1 + \eta^2); \\ \frac{d^2 B}{dq^2} = -\sin B \cos B (1 + 3\eta^2) (1 + \eta^2); \quad (1.9.11)$$

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = -\cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + 4\eta^2 - 12\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 3\eta^4 - 15\eta^4 \operatorname{tg}^2 B) (1 + \eta^2);$$

$$\frac{d^4 B}{dq^4} = \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 51\eta^2 - 39\eta^2 \operatorname{tg}^2 B + 103\eta^4 - \\ - 135\eta^4 \operatorname{tg}^2 B + \dots) (1 + \eta^2).$$

Чтобы получить формулы для вычисления широт и долгот, запишем выражения (1.9.1) с учетом (1.9.4) в следующем виде:

$$B = B_0 + A_2 y'^2 + A_4 y'^4 + A_6 y'^6 + A_8 y'^8 + \dots; \\ l = B_1 y' + B_3 y'^3 + B_5 y'^5 + B_7 y'^7 + B_9 y'^9 + \dots \quad (1.9.12)$$

Сначала получим формулы для слагаемых во втором выражении (1.9.12). Для этого подставим нечетные производные (1.9.8) во второе выражение (1.9.1). Теперь уже значения производных необходимо писать с широтой B_0 . При преобразованиях производных учтем, что

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 B_0 - \frac{1}{8} e^4 \sin^4 B_0 - \frac{1}{16} e^6 \sin^6 B_0 - \\ - \frac{5}{128} e^8 \sin^8 B_0 + \dots \right). \quad (1.9.13)$$

Кроме того обозначим

$$Z_0 = \frac{y'}{a \cos B_0}. \quad (1.9.14)$$

При подстановке производных будем иметь в виду, что для вычисления координат с точностью 1 мм можно не учитывать в

B_1y' член с e^8 , в $B_3y'^3$ и $B_5y'^5$ — члены, содержащие e^6 , а в $B_7y'^7$ и $B_9y'^9$ — члены с e^4 . Экономизацию степенных рядов применим для $B_5y'^5$. С учетом этого напишем выражения для слагаемых второй формулы (1.9.12):

$$\begin{aligned}
 B_1y' &= Z_0 (1 - n'_1 \sin^2 B_0 - n'_2 \sin^4 B_0 - n'_3 \sin^6 B_0); \\
 B_3y'^3 &= -Z_0^3 (n'_4 + n'_5 \sin^2 B_0 - n'_6 \sin^4 B_0 - n'_7 \sin^6 B_0); \\
 B_5y'^5 &= Z_0^5 (n'_8 + n'_9 \sin^2 B_0 + n'_{10} \sin^4 B_0 - n'_{11} \sin^6 B_0); \\
 B_7y'^7 &= -Z_0^7 (n'_{12} + n'_{13} \sin^2 B_0 + n'_{14} \sin^4 B_0 - n'_{15} \sin^6 B_0); \\
 B_9y'^9 &= Z_0^9 (n'_{16} + n'_{17} \sin^2 B_0 + n'_{18} \sin^4 B_0 + n'_{19} \sin^6 B_0).
 \end{aligned} \tag{1.9.15}$$

Выражения для коэффициентов n'_i имеют вид:

$$\begin{aligned}
 n'_1 &= \frac{1}{2} e^2; \quad n'_{11} = \frac{e^2 - 69e^4}{240}; \\
 n'_2 &= \frac{1}{8} e^4; \quad n'_{12} = \frac{61 + 46e^2}{5040(1 - e^2)}; \\
 n'_3 &= \frac{1}{16} e^6; \quad n'_{13} = \frac{958 - 1361e^2}{10\,080(1 - e^2)}; \\
 n'_4 &= \frac{1}{6(1 - e^2)}; \quad n'_{14} = \frac{358 - 4395e^2}{10\,080(1 - e^2)}; \\
 n'_5 &= \frac{2 - 9e^2}{12(1 - e^2)}; \quad n'_{15} = \frac{815e^2 - 2}{10\,080(1 - e^2)}; \\
 n'_6 &= \frac{4e^2 - 39e^4}{48(1 - e^2)}; \quad n'_{16} = 0,0038; \\
 n'_7 &= \frac{3e^4}{16(1 - e^2)}; \quad n'_{17} = 0,0524; \\
 n'_8 &= \frac{5 + 6e^2 + 3e^4}{120}; \quad n'_{18} = \frac{18\,270 - 113\,789e^2}{362\,880}; \\
 n'_9 &= \frac{192 - 240e^2 - 123e^4}{1280}; \quad n'_{19} = \frac{1636 - 72\,123e^2}{362\,880}; \\
 n'_{10} &= \frac{32 - 1376e^2 + 609e^4}{3840};
 \end{aligned} \tag{1.9.16}$$

Теперь получим формулы для слагаемых в первом выражении (1.9.12), т. е. для широты. Для этого, подставив четные производные

(1.9.8) в (1.9.4), получим значения $(q - q_0)$ в требуемых степенях. Подставим их и производные (1.9.11) в первое выражение (1.9.1). В результате получим слагаемые первого выражения (1.9.12):

$$A_2 y'^2 = -Z_0^2 \sin 2B_0 (k'_1 - k'_2 \sin^2 B_0 + k'_3 \sin^4 B_0); \quad (1.9.17)$$

$$A_4 y'^4 = Z_0^4 \sin 2B_0 (k'_4 - k'_5 \sin^2 B_0 + k'_6 \sin^4 B_0 - k'_7 \sin^6 B_0);$$

$$A_6 y'^6 = -Z_0^6 \sin 2B_0 (k'_8 - k'_9 \sin^2 B_0 + k'_{10} \sin^4 B_0 - k'_{11} \sin^6 B_0);$$

$$A_8 y'^8 = Z_0^8 \sin 2B_0 (k'_{12} - k'_{13} \sin^2 B_0 + k'_{14} \sin^4 B_0 - k'_{15} \sin^6 B_0).$$

Напишем выражения для коэффициентов этих формул:

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{1}{4(1-e^2)}; & k'_9 &= \frac{16 + 333e^2}{720}; \\ k'_2 &= \frac{e^2}{2(1-e^2)}; & k'_{10} &= \frac{2 + 87e^2}{180}; \\ k'_3 &= \frac{e^4}{4(1-e^2)}; & k'_{11} &= \frac{17e^2}{90}; \\ k'_4 &= \frac{5 + 6e^2 + 3e^4}{48}; & k'_{12} &= \frac{277 - 1108e^2}{16128}; \\ k'_5 &= \frac{1 + 14e^2 + 15e^4}{24}; & k'_{13} &= \frac{29 - 116e^2}{4480}; \\ k'_6 &= \frac{8e^2 + 31e^4}{24}; & k'_{14} &= \frac{41 - 164e^2}{3360}; \\ k'_7 &= \frac{2e^4}{3}; & k'_{15} &= \frac{17 - 68e^2}{5040}; \\ k'_8 &= \frac{61 + 107e^2}{1440}; \end{aligned} \quad (1.9.18)$$

Для эллипсоида Красовского формулы пересчета прямоугольных координат Гаусса—Крюгера в геодезические координаты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{x'}{6\,367\,558,4968}; & Z_0 &= \frac{y'}{6\,378\,245 \cos B_0}; \\ B_0 &= \beta + \sin 2\beta (0,00252588689 - 0,00001491867 \sin^2 \beta + \\ &+ 0,00000011910 \sin^4 \beta); \\ B &= B_0 + \Delta B; \\ \Delta B &= -Z_0^2 \sin 2B_0 (0,251684631 - 0,003369263 \sin^2 B_0 + \\ &+ 0,000011276 \sin^4 B_0) + Z_0^4 \sin 2B_0 (0,10500614 - 0,04559916 \sin^2 B_0 + \end{aligned} \quad (1.9.19)$$

$$\begin{aligned}
& + 0,00228901 \sin^4 B_0 - 0,00002987 \sin^6 B_0) - \\
& - Z_0^6 \sin 2B_0 (0,042858 - 0,025318 \sin^2 B_0 + 0,014346 \sin^4 B_0 - \\
& - 0,001264 \sin^6 B_0) + Z_0^8 \sin 2B_0 (0,01672 - 0,00630 \sin^2 B_0 + \\
& + 0,01188 \sin^4 B_0 - 0,00328 \sin^6 B_0);
\end{aligned}$$

$$L = (6^\circ n - 3^\circ) + l;$$

$$\begin{aligned}
l = & Z_0 (1 - 0,0033467108 \sin^2 B_0 - 0,0000056002 \sin^4 B_0 - \\
& - 0,0000000187 \sin^6 B_0) - Z_0^3 (0,16778975 + 0,16273586 \sin^2 B_0 - \\
& - 0,00052490 \sin^4 B_0 - 0,00000846 \sin^6 B_0) + Z_0^5 (0,0420025 + \\
& + 0,1487407 \sin^2 B_0 + 0,0059420 \sin^4 B_0 - 0,0000150 \sin^6 B_0) - \\
& - Z_0^7 (0,01225 + 0,09477 \sin^2 B_0 + 0,03282 \sin^4 B_0 - 0,00034 \sin^6 B_0) + \\
& + Z_0^9 (0,0038 + 0,0524 \sin^2 B_0 + 0,0482 \sin^4 B_0 + 0,0032 \sin^6 B_0).
\end{aligned}$$

В этих формулах n — номер зоны Гаусса—Крюгера. Кроме этих формул приведем аналогичные формулы из работы [6], добавив в формуле вычисления l член с Z^9 , величина которого может достигать 15 мм при удалениях от осевого меридиана до 9° . С учетом этого члена формулы вычисления геодезических координат примут следующий вид:

$$B = B_x + (((A_{28}Z^2 - A_{26})Z^2 + A_{24})Z^2 - 1)Z^2A_{22};$$

$$l = (((B_{19}Z^2 + B_{17})Z^2 + B_{15})Z^2 + B_{13})Z^2 + 1)Z;$$

$$\beta = \frac{x'}{6\,367\,558,497}; \quad (1.9.20)$$

$$B_x = [(2382 \cos^2 \beta + 293\,609) \cos^2 \beta + 50\,221\,747] \sin \beta \cos \beta \cdot 10^{-10} + \beta;$$

$$A_{22} = (0,003369263 \cos^2 B_x + 0,5) \sin B_x \cos B_x;$$

$$\begin{aligned}
A_{24} = & [(0,0056154 - 0,0000151 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x + \\
& + 0,1616128] \cos^2 B_x + 0,25;
\end{aligned}$$

$$A_{26} = [(0,00389 \cos^2 B_x + 0,04310) \cos^2 B_x - 0,00168] \cos^2 B_x + 0,125;$$

$$A_{28} = [(0,013 \cos^2 B_x + 0,008) \cos^2 B_x - 0,031] \cos^2 B_x + 0,078;$$

$$B_{13} = (0,166666667 - 0,00112309 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,333333333;$$

$$B_{15} = [(0,008783 - 0,000112 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,166667] \cos^2 B_x + 0,2;$$

$$B_{17} = (0,1667 - 0,0361 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,1429;$$

$$B_{19} = [(0,064 - 0,004 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x - 0,167] \cos^2 B_x + 0,111;$$

$$N_x = [(0,605 \sin^2 B_x + 107,155) \sin^2 B_x +$$

$$+ 21\,346,142] \sin^2 B_x + 6\,378\,245;$$

$$Z = \frac{y'}{N_x \cos B_x}.$$

1.10. ПЕРЕВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЛАМБЕРТА И ОБРАТНО

Формулы для перевычисления координат в конической равноугольной проекции Ламберта получим с учетом применения современных вычислительных средств. В качестве исходных примем формулы, приведенные в работе [8], изменив их с учетом условного начала прямоугольной системы координат и принятых в данной работе обозначений:

$$\lambda = \nu_0 (L - L_0); \quad \nu_0 = \text{const};$$

$$\rho = \frac{k_0}{U^{\nu_0}}; \quad U = \frac{\text{tg} \left(45^\circ + \frac{B}{2} \right)}{\text{tg}^c \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right)};$$

$$\sin \psi = e \sin B; \quad k_0 = \text{const}; \quad (1.10.1)$$

$$x = x_0 + (\rho_0 - \rho \cos \lambda);$$

$$y = y_0 + \rho \sin \lambda;$$

$$m = \frac{\nu_0 k_0}{r U^{\nu_0}}.$$

В этих формулах приняты следующие обозначения:

B_0, L_0 — геодезические координаты условного начала прямоугольной системы координат в данной зоне проекции Ламберта;
 x_0, y_0 — условное начало прямоугольной системы координат в данной зоне;

λ — полярный угол;

ν_0, k_0 — постоянные интегрирования;

ρ — радиус-вектор параллели с широтой B ;

ρ_0 — радиус-вектор параллели с широтой B_0 , на которой масштаб является наименьшим;

r — радиус кривизны параллели с широтой B ;

B, L — геодезические координаты;

m — масштаб в точке с координатами B, L ;

x, y — координаты точки (ось x направлена на север, ось y — на восток).

В формулы (1.10.1) входит значение ψ — функция широты:

$$\sin \psi = e \sin B,$$

где e — эксцентриситет эллипсоида.

Условное начало прямоугольной системы координат (точка с координатами x_0, y_0) находится на параллели с широтой B_0 , на которой масштаб m_0 наименьший. Постоянная интегрирования v_0 вычисляется по формуле

$$v_0 = \sin B_0. \quad (1.10.2)$$

Минимальный масштаб m_0 связан с постоянной интегрирования k_0 следующими формулами:

$$m_0 = \frac{v_0 k_0}{r_0 U_0^{\nu_0}};$$

$$r_0 = N_0 \cos B_0;$$

$$N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^{\frac{1}{2}}}; \quad (1.10.3)$$

$$U_0 = \frac{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{B_0}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left(45^\circ + \frac{\psi_0}{2} \right)};$$

$$\sin \psi_0 = e \sin B_0,$$

где e — эксцентриситет эллипсоида; a — большая полуось эллипсоида.

Теперь преобразуем выражение для ρ в исходных формулах (1.10.1). Для этого на основании (1.10.2) и (1.10.3) получаем

$$k_0 = m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0 U_0^{\nu_0}. \quad (1.10.4)$$

Учитывая тождество

$$\operatorname{tg}^e \left(45^\circ + \frac{\psi}{2} \right) = \left(\frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}},$$

преобразуем выражение для U из (1.10.1):

$$U = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}}. \quad (1.10.5)$$

Из определения изометрической широты следует, что

$$q = \ln \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}} \right]. \quad (1.10.6)$$

Отметим, что в формулах (1.10.4)—(1.10.6) e — это эксцентриситет.

Из сравнения (1.10.5) и (1.10.6) получаем:

$$U = e^q; U_0 = e^{q_0}, \quad (1.10.7)$$

где e — основание натурального логарифма.

Подставим (1.10.4) и (1.10.7) в выражение для ρ в (1.10.1)

$$\rho = \frac{k_0}{U^{v_0}} = \frac{m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0 e^{q_0 v_0}}{e^{q v_0}}.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_0 = m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0; \quad (1.10.8)$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{e^{q_0}}{e^q} \right)^{v_0}, \quad (1.10.9)$$

где e — основание логарифма.

Преобразуем выражение (1.10.9). Для этого воспользуемся выражением

$$q = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right),$$

где φ — географическая широта на шаре.

Из этой формулы следует, что

$$e^q = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ + \varphi);$$

$$e^{q_0} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ + \varphi_0); \quad (1.10.10)$$

Подставив эти выражения в (1.10.9), получаем

$$\rho = \rho_0 \frac{[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ + \varphi_0)]^{v_0}}{[\operatorname{tg} \frac{1}{2} (90^\circ + \varphi)]^{v_0}}. \quad (1.10.11)$$

Обозначим

$$t_0 = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi_0}{2}; \quad (1.10.12)$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi}{2}; \quad (1.10.13)$$

$$\frac{t_0^{v_0}}{t^{v_0}} = k \quad (1.10.14)$$

и с этими обозначениями перепишем выражение (1.10.11)

$$\rho = \rho_0 k. \quad (1.10.15)$$

В выражениях (1.10.12)—(1.10.15) необходимо вычислять географические широты φ_0 и φ . Это можно сделать с помощью формулы (1.4.19) или формулы (1.4.18). В дальнейшем будем

пользоваться выражением (1.4.18), на основании которого напомним формулы для определяемой точки:

$$\varphi = B - \sin 2B (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2 B + \alpha_3 \sin^4 B); \quad (1.10.16)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} e^2;$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{12} e^4 - \frac{1}{12} e^6;$$

$$\alpha_3 = \frac{13}{30} e^6.$$

Такую же формулу напомним для условного начала координат, т. е. для точки с широтой B_0 ,

$$\varphi_0 = B_0 - \sin 2B_0 (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2 B_0 + \alpha_3 \sin^4 B_0). \quad (1.10.17)$$

Отметим, что при вычислении ρ по формулам (1.10.12) — (1.10.15) используются ρ_0 , ν_0 и t_0 , которые являются постоянными величинами для данной зоны проекции Ламберта, а t вычисляется в каждой точке с координатами B и L .

Подставив (1.10.15) в (1.10.1), получаем

$$x = x_0 + \rho_0 (1 - k \cos \lambda);$$

$$y = y_0 + \rho_0 k \sin \lambda.$$

Теперь приведем сводку формул для вычисления прямоугольных координат:

$$N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\rho_0 = m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0;$$

$$\nu_0 = \sin B_0;$$

$$\varphi_0 = B_0 - \sin 2B_0 (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2 B_0 + \alpha_3 \sin^4 B_0);$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} e^2;$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{12} e^4 - \frac{1}{12} e^6;$$

$$\alpha_3 = \frac{13}{30} e^6;$$

$$t_0 = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi_0}{2};$$

$$\lambda = \nu_0 (L - L_0);$$

$$\varphi = B - \sin 2B (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2 B + \alpha_3 \sin^4 B);$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi}{2};$$

$$k = \frac{t_0^{\nu_0}}{t^{\nu_0}};$$

$$x = x_0 + \rho_0 (1 - k \cos \lambda);$$

$$y = y_0 + \rho_0 k \sin \lambda.$$

Исходными для вычислений по этим формулам являются параметры эллипсоида a и e^2 , постоянные величины для каждой зоны проекции Ламберта $x_0, y_0, B_0, L_0, \nu_0$ и m_0 . С этими исходными данными могут быть заблаговременно вычислены величины $\rho_0, t_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Теперь получим формулы для вычисления геодезических координат по прямоугольным координатам проекции Ламберта.

Из выражений (1.10.1) и (1.10.18) следует, что

$$L = L_0 + \frac{\lambda}{\nu_0}; \quad \lambda = \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)}. \quad (1.10.19)$$

Следовательно, геодезическая долгота может быть вычислена по формуле

$$L = L_0 + \frac{1}{\nu_0} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)}. \quad (1.10.20)$$

Обозначив

$$\frac{1}{\nu_0} = \nu'_0 = \frac{1}{\sin B_0}, \quad (1.10.21)$$

перепишем выражение (1.10.20)

$$L = L_0 + \nu'_0 \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)}. \quad (1.10.22)$$

Теперь получим формулу для широты. На основании (1.10.18) можно написать

$$k = \frac{y - y_0}{\rho_0 \sin \lambda}. \quad (1.10.23)$$

Подставив значение λ из (1.10.19), получим:

$$k = \frac{y - y_0}{\rho_0 \sin \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)}}. \quad (1.10.24)$$

Имея в виду, что

$$\operatorname{arctg} \alpha = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}},$$

можем написать

$$\sin \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)} = \frac{y - y_0}{\sqrt{(\rho_0 - x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \quad (1.10.25)$$

Подставим это выражение в (1.10.24):

$$k = \frac{1}{\rho_0} \sqrt{(\rho_0 - x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1.10.26)$$

Отметим, что в (1.10.26) и (1.10.14) k — это одно и то же значение. С этим значением k получим формулу для географической широты φ . Для этого на основании (1.10.14) напишем

$$t = t_0 k^{-\nu'_0}. \quad (1.10.27)$$

Значение t заменим выражением (1.10.13):

$$\operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi}{2} = t_0 k^{-\nu'_0}. \quad (1.10.28)$$

Из этого выражения, имея в виду, что $\operatorname{arctg} \operatorname{tg} \alpha = \alpha$, получим выражение для географической широты:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} (t_0 \cdot k^{-\nu'_0}) - 90^\circ. \quad (1.10.29)$$

От географической широты перейдем к геодезической широте. Это можно сделать с помощью формулы (1.4.21) или (1.4.20). В дальнейшем будем пользоваться формулой (1.4.20), которую запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} B &= \varphi + \sin 2\varphi (\alpha'_1 - \alpha'_2 \sin^2 \varphi + \alpha'_3 \sin^4 \varphi); \\ \alpha'_1 &= \frac{e^2 + e^4 + e^6}{2}; \\ \alpha'_2 &= \frac{7e^4 + 17e^6}{12}; \\ \alpha'_3 &= \frac{14}{15} e^6. \end{aligned} \quad (1.10.30)$$

Приведем сводку формул для вычисления геодезических координат:

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B_0)^{\frac{1}{2}}}; \\ \rho_0 &= m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0; \\ \nu_0 &= \sin B_0; \\ \nu'_0 &= \frac{1}{\sin B_0}; \\ \varphi_0 &= B_0 - \sin 2B_0 (\alpha_1 + \alpha_2 \sin^2 B_0 + \alpha_3 \sin^4 B_0); \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} e^2; \\ \alpha_2 &= \frac{5}{12} e^4 - \frac{1}{12} e^6; \end{aligned}$$

$$\alpha_3 = \frac{13}{30} e^6;$$

$$t_0 = \operatorname{tg} \frac{90^\circ + \varphi_0}{2};$$

$$\alpha'_1 = \frac{e^2 + e^4 + e^6}{2};$$

$$\alpha'_2 = \frac{7e^4 + 17e^6}{12};$$

$$\alpha'_3 = \frac{14}{15} e^6;$$

$$k = \sqrt{\left(1 - \frac{x - x_0}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{\rho_0}\right)^2};$$

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} (k \cdot v'_0 \cdot t_0) - 90^\circ;$$

$$B = \varphi + \sin 2\varphi (\alpha'_1 - \alpha'_2 \sin^2 \varphi + \alpha'_3 \sin^4 \varphi);$$

$$L = L_0 + v'_0 \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{\rho_0 - (x - x_0)}.$$

По этим формулам постоянные величины $\rho_0, v_0, v'_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ могут вычисляться заблаговременно. Значения k, φ, B, L вычисляются с прямоугольными координатами конкретных точек.

1.11. ПЕРЕСЧЕТ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

В практике используются отклонения отвесных линий как в общеземной, так и в референционной системе координат, поэтому их приходится пересчитывать из одной системы в другую.

Уклонения отвеса в общеземной системе вычисляются по формулам

$$\xi_0 = \varphi - B_0; \quad \eta_0 = (\lambda - L_0) \cos B_0, \quad (1.11.1)$$

а в референционной системе — по формулам

$$\xi = \varphi - B; \quad \eta = (\lambda - L) \cos B. \quad (1.11.2)$$

Из выражений (1.11.1) и (1.11.2) следует, что разность составляющих уклонения отвесной линии можно вычислить по формулам

$$\Delta \xi = \xi - \xi_0 = B_0 - B;$$

$$\Delta \eta = \eta - \eta_0 = (L_0 - L) \cos B. \quad (1.11.3)$$

Обычно принято задавать параметры перехода от референционной системы к общеземной. Таким параметрам соответствует следующее правило пересчета координат:

$$\begin{aligned} B_0 &= B + \Delta B; \\ L_0 &= L + \Delta L. \end{aligned} \quad (1.11.4)$$

В соответствии с этим правилом переписем выражения (1.11.3)

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \xi - \xi_0 = \Delta B; \\ \Delta \eta &= \eta - \eta_0 = \Delta L \cos B. \end{aligned} \quad (1.11.5)$$

Разности координат ΔB и ΔL вычисляются по формулам (1.7.26). В этих формулах опустим члены, влияние которых на уклонения отвеса не более $0,01''$, и напишем формулы пересчета из общеземной системы в референционную систему и обратно:

$$\begin{aligned} \Delta \xi'' &= \frac{\rho''}{M+H} \left[\frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left(\frac{N^2}{a^2} + 1 \right) N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - (\cos L \Delta X + \sin L \Delta Y) \sin B + \cos B \Delta Z \right] + \omega_x \sin L - \omega_y \cos L; \\ \Delta \eta'' &= \frac{\rho''}{N+H} (\cos L \Delta Y - \sin L \Delta X) - \\ &\quad - \sin B (\omega_x \cos L + \omega_y \sin L) + \omega_z \cos B; \\ \xi_0 &= \xi - \Delta \xi; \quad \eta_0 = \eta - \Delta \eta; \\ \xi &= \xi_0 + \Delta \xi; \quad \eta = \eta_0 + \Delta \eta. \end{aligned} \quad (1.11.6)$$

При вычислениях с ошибкой не более $0,1''$ (что соответствует 3 м) можно пользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta \xi'' &= 0,0323 (\cos B \Delta Z - \sin B \cos L \Delta X - \sin B \sin L \Delta Y) + 1,03 \cdot \\ &\quad \cdot 10^5 \sin 2B \Delta e^2 + \omega_x \sin L - \omega_y \cos L; \\ \Delta \eta'' &= 0,0323 (\cos L \Delta Y - \sin L \Delta X) + \omega_z \cos B - \\ &\quad - \sin B (\omega_x \cos L + \omega_y \sin L). \end{aligned} \quad (1.11.7)$$

Формулы (1.11.6) и (1.11.7) применимы для пересчета уклонений отвеса в любых системах координат.

2.1. СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ

Прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

называется матрицей размера $n \times k$ (n строк, k столбцов). Если $n \neq k$, то матрицу называют прямоугольной, а если $n = k$ — квадратной.

Матрица размера $n \times 1$ есть матрица-столбец, а размера $1 \times k$ — матрица-строка.

Квадратная матрица, в которой для всех недиагональных элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$, называется симметрической. Симметрической, в частности, является матрица коэффициентов нормальных уравнений.

Матрица, в которой все недиагональные элементы равны нулю, называется диагональной. Диагональную матрицу E , элементы которой равны единице, называют единичной.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

Суммировать можно только матрицы одинаковых размеров. Суммой матриц является матрица тех же размеров, элементы которой равны суммам соответствующих элементов суммируемых матриц. Приведем две формулы:

$$A + B = B + A; \quad (2.1.2)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B. \quad (2.1.3)$$

Умножать матрицы A и B можно лишь в том случае, когда число столбцов в левой матрице A равно числу строк в правой матрице B . Если A имеет размер $(n \times k)$, а B — размер $(k \times r)$, то матрица $C = AB$ имеет размер $(n \times r)$. Каждый элемент c_{ij} матрицы C получают как сумму из k произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B , т. е. почленно умножают строки матрицы A на столбцы матрицы B .

Если A — матрица-строка размера $1 \times k$, а B — матрица-столбец размера $k \times 1$, то их произведение AB есть число, т. е. матрица с одним элементом, а произведение BA есть матрица размера $k \times k$.

Приведем некоторые правила умножения:

$$(AB)C = A(BC). \quad (2.1.4)$$

$$(A + B)C = AC + BC. \quad (2.1.5)$$

$$A(B + C) = AB + AC. \quad (2.1.6)$$

$$AB = 0, \text{ если } A = 0 \text{ или } B = 0, \quad (2.1.7)$$

т. е. если A или B нулевые матрицы.

Из равенства $AB = AC$ при $A \neq 0$, в общем случае не следует, что $B = C$. (2.1.8)

Матрица A^T называется транспонированной матрице A , если элементы i -ых строк матрицы A^T равны элементам i -ых столбцов матрицы A . Чтобы получить транспонированную матрицу, надо в исходной матрице строки заменить столбцами или, что одно и то же, столбцы заменить строками.

Если матрица A имеет размер $n \times k$, то матрица A^T — размер $k \times n$. При их умножении получаются симметрические матрицы $C = AA^T$ размера $n \times n$ или $D = A^T A$ размера $k \times k$, называемые нормальными.

Приведем некоторые формулы для транспонированных матриц:

$$(A^T)^T = A. \quad (2.1.9)$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T. \quad (2.1.10)$$

$$A^T = B^T, \text{ если } A = B. \quad (2.1.11)$$

$$C^T = A^T + B^T, \text{ если } C = A + B. \quad (2.1.12)$$

$$A^T = A, \text{ если } A \text{ — матрица симметрическая.} \quad (2.1.13)$$

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (2.1.14)$$

$$(AB)^T = BA, \text{ если матрицы } A \text{ и } B \text{ симметрические.} \quad (2.1.15)$$

Если A — матрица-строка, B — симметрическая матрица, то элементы a_{ij} матрицы-строки AB равны элементам a_{ji} матрицы-столбца BA^T , т. е.

$$AB = (BA^T)^T. \quad (2.1.16)$$

$$(AB)^T = AB = B^T A^T, \quad (2.1.17)$$

если A — матрица-строка размера $1 \times k$, а B — матрица-столбец размера $k \times 1$, т. е. если их произведение $C = AB$ есть число.

К симметрическим относятся весовые матрицы P . Для них на основании (2.1.13) получаем

$$P^T = P. \quad (2.1.18)$$

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной матрице A , если она удовлетворяет условию

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \quad (2.1.19)$$

Из этого условия следует, что произведение квадратной матрицы размера $k \times k$ на обратную матрицу есть единичная матрица. Из этого условия также следует, что обратная матрица имеет тот же размер, что и прямая. Условие (2.1.19) применяется для проверки правильности вычисления обратных матриц.

Приведем несколько правил для единичных матриц, которые, напомним, являются диагональными, следовательно, квадратными матрицами:

$$E^T = E; \quad (2.1.20)$$

$$EA = A; \quad (2.1.21)$$

$$BE = B; \quad (2.1.22)$$

$$E^TPE = P. \quad (2.1.23)$$

Для операций с матрицами иногда бывает удобно разделять их на блоки, т. е. матрицы меньших размеров.

Матрица A

$$A = \left\| \begin{array}{cc} B & C \\ D & H \end{array} \right\|$$

является блочной матрицей, состоящей из блок-матриц B , C , D , H . Матрицу A

$$A = \left\| \begin{array}{cc} B & C \end{array} \right\|$$

называют блочной матрицей-строкой, состоящей из блок-матриц B и C , а матрицу A

$$A = \left\| \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right\|$$

блочной матрицей-столбцом.

Напишем несколько формул для блочных матриц. В этих формулах обозначим: P — симметрическая матрица; D — прямоугольная матрица.

$$\text{Если } A = \left\| \begin{array}{cc} B & C \end{array} \right\|, \text{ то } A^T = \left\| \begin{array}{cc} B^T & C^T \end{array} \right\|. \quad (2.1.24)$$

$$\text{Если } A = \left\| \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right\|, \text{ то } A^T = \left\| \begin{array}{cc} B^T & C^T \end{array} \right\|. \quad (2.1.25)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B \\ C \end{vmatrix}, \text{ то } AD = \begin{vmatrix} BD \\ CD \end{vmatrix}. \quad (2.1.26)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B & C \end{vmatrix}, \text{ то } A^T P = \begin{vmatrix} B^T P \\ C^T P \end{vmatrix}. \quad (2.1.27)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B & C \end{vmatrix}, \text{ то } DA = \begin{vmatrix} DB & DC \end{vmatrix}. \quad (2.1.28)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B & O_1 \end{vmatrix}, \text{ то } DA = \begin{vmatrix} DB & O_2 \end{vmatrix}. \quad (2.1.29)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B \\ O_1 \end{vmatrix}, \text{ то } AP = \begin{vmatrix} BP \\ O_1 \end{vmatrix}. \quad (2.1.30)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B & C \end{vmatrix}, \text{ то } A^T P A = \begin{vmatrix} B^T P B & B^T P C \\ C^T P B & C^T P C \end{vmatrix}. \quad (2.1.31)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B & O_1 \end{vmatrix}, \text{ то } A^T P = \begin{vmatrix} B^T P \\ O_1^T \end{vmatrix}. \quad (2.1.32)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} B & O_1 \end{vmatrix}, \text{ то } A^T P A = \begin{vmatrix} B^T P B & O_1 \\ O_1^T & O_2 \end{vmatrix}. \quad (2.1.33)$$

$$\text{Если } A = \begin{vmatrix} E & O_1 \end{vmatrix}, \text{ то } A^T P A = \begin{vmatrix} P & O_1 \\ O_1^T & O \end{vmatrix}. \quad (2.1.34)$$

Для обращения блочных матриц может применяться формула Фробениуса, которую для прямой матрицы

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \quad (2.1.35)$$

напишем в следующем виде:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} M^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} M^{-1} \\ -M^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & M^{-1} \end{vmatrix}. \quad (2.1.36)$$

Здесь

$$M = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}. \quad (2.1.37)$$

2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При математической обработке геодезических измерений, как правило, решают нормальные уравнения, но иногда приходится иметь дело и с собственно линейными уравнениями. Целью преобразования линейных уравнений является выделение из них таких систем, в которых количество неизвестных меньше, чем в исходной системе, и которые, следовательно, легче решить с получением обратной матрицы.

Напишем систему линейных уравнений в матричном виде:

$$B\delta Y + C = 0. \quad (2.2.1)$$

Для преобразования исходной системы ее матрицу разделяют на блоки. Покажем это на примере небольшой матрицы B :

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ \hline b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{array} \right\| \quad (2.2.2)$$

Запишем матрицы исходной системы (2.2.1) в виде блочных матриц:

$$B = \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right\|; \quad C = \left\| \begin{array}{c} C_{11} \\ C_{21} \end{array} \right\|; \quad \delta Y = \left\| \begin{array}{c} \delta Y_{11} \\ \delta Y_{21} \end{array} \right\|. \quad (2.2.3)$$

Поясним принятые здесь обозначения на примере матрицы (2.2.2):

$$B_{11} = \left\| \begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right\|; \quad B_{12} = \left\| \begin{array}{cc} b_{14} & b_{15} \\ b_{24} & b_{25} \\ b_{34} & b_{35} \end{array} \right\|; \quad (2.2.4)$$

$$B_{21} = \left\| \begin{array}{ccc} b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \end{array} \right\|; \quad B_{22} = \left\| \begin{array}{cc} b_{44} & b_{45} \\ b_{54} & b_{55} \end{array} \right\|.$$

Две первые блочные матрицы (2.2.3) преобразуются к следующему виду:

$$B_n = \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{array} \right\|; \quad C_n = \left\| \begin{array}{c} C_{11} \\ C_{21} - B_{21}B_{11}^{-1}C_{11} \end{array} \right\|. \quad (2.2.5)$$

С этими матрицами получают преобразованную систему линейных уравнений

$$B_n\delta Y + C_n = 0. \quad (2.2.6)$$

Хотя в системах (2.2.1) и (2.2.6) матрицы B и B_n , C и C_n разные, но решение этих систем приводит к одним и тем же результатам, т. е. к получению одних и тех же значений δY .

Рассмотрим решение системы (2.2.6) в два этапа. Для этого разделим ее на две группы. Чтобы написать эти две группы, введем обозначения

$$B_1 = \left\| \begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \end{array} \right\|;$$

$$B_2 = B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}; \quad (2.2.7)$$

$$C_2 = C_{21} - B_{21}B_{11}^{-1}C_{11}.$$

С этими обозначениями запишем систему из двух групп линейных уравнений:

$$B_1 \delta Y + C_{11} = 0; \quad (2.2.8)$$

$$B_2 \delta Y_{21} + C_2 = 0. \quad (2.2.9)$$

Если решить эту систему, то получим те же значения δY , что и в случае решения систем (2.2.1) или (2.2.6).

В первую группу уравнений, т. е. в (2.2.8), входят все неизвестные, поэтому число их больше, чем число уравнений в этой группе. Из второй группы исключены неизвестные δY_{11} (2.2.3), поэтому число неизвестных в ней равно числу уравнений, и следовательно, ее можно решить независимо от первой группы.

Итак, в результате одного преобразования исходная система (2.2.1) с помощью формул (2.2.3) и (2.2.7) преобразуется в систему из двух групп — (2.2.8) и (2.2.9). При этом часть линейных уравнений системы (2.2.1), т. е. группа (2.2.8), остаются неизменными.

Методы решения системы (2.2.9) могут быть разными. В частности, ее можно решить методом обращения матриц, т. е. получить обратную матрицу B_2^{-1} и неизвестные

$$\delta Y_{21} = -B_2^{-1}C_2. \quad (2.2.10)$$

Затем отыскиваются остальные неизвестные. Для этого выполняется обратный ход. В обратном ходе необходимо значения δY_{21} , полученные на первом этапе, подставить в первую группу уравнений (2.2.8) и вычисленные значения перенести в свободные члены, т. е. вычислить новые свободные члены по формуле

$$C_1 = C_{11} + B_{12} \delta Y_{21}. \quad (2.2.11)$$

С этими свободными членами система (2.2.8) преобразуется к виду

$$B_{11} \delta Y_{11} + C_1 = 0. \quad (2.2.12)$$

Из решения этой системы, т. е. из обратного хода, отыскиваются остальные неизвестные.

Если система (2.2.1) большая, то можно применить процедуру многократного преобразования, каждый раз получая все меньшие и меньшие системы (2.2.9).

2.3. КОВАРИАЦИОННАЯ И ВЕСОВАЯ МАТРИЦЫ

Каждый результат измерения или уравнивания должен сопровождаться оценкой точности. Оценкой точности единичного ре-

зультата является его средняя квадратическая ошибка. Для оценки точности совокупности уравненных величин применяют ковариационную матрицу [3]

$$K = \begin{vmatrix} m_1^2 & r_{12}m_1m_2 & \dots & r_{1k}m_1m_k \\ r_{21}m_2m_1 & m_2^2 & \dots & r_{2k}m_2m_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1}m_km_1 & r_{k2}m_km_2 & \dots & m_k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1k} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{k1} & K_{k2} & \dots & K_{kk} \end{vmatrix}. \quad (2.3.1)$$

В ковариационной матрице диагональными элементами являются квадраты средних квадратических ошибок (m_i^2); коэффициенты корреляции r характеризуют линейную зависимость между уравненными величинами. Коэффициенты, симметричные относительно диагонали, равны, т. е. $r_{ij} = r_{ji}$, $K_{ij} = K_{ji}$. Если величины связаны произвольной вероятностной зависимостью, то

$$-1 \leq r_{ij} \leq 1.$$

Если результаты измерения являются независимыми, т. е. если $r_{ij} = 0$,

то ковариационная матрица становится диагональной и является матрицей квадратов средних квадратических ошибок

$$K = M^2 = \begin{vmatrix} m_1^2 & & & \\ & m_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & m_n^2 \end{vmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Поясним понятия «зависимые» и «независимые» результаты. Зависимыми (или коррелированными) будем считать такие, которые можно вычислить как функции других результатов. Речь идет именно о результатах измерения или уравнивания, а не о величинах, между которыми существуют функциональные зависимости. Например, если известны величины двух углов треугольника, то можно вычислить величину третьего угла, так как их сумма равна 180° . Однако наличия этой функциональной связи еще недостаточно, чтобы считать углы зависимыми.

Дело в том, что, если два угла известны, то нельзя вычислить измеренное значение третьего угла. Следовательно, эти углы, т. е. результаты измерений, независимые. Если же все три угла уравнены, то по уравненным значениям двух углов можно вычислить уравненное значение третьего угла. В этом случае углы являются зависимыми.

Непосредственно из измерений получают независимые результаты, каждый из которых характеризуется только средней квадратической ошибкой. Ковариационные матрицы с коэффициентами

корреляции r_{ij} или с корреляционными моментами K_{ij} получают в результате уравнивания, а не измерения.

При составлении нормальных уравнений используются не ковариационные, а весовые матрицы (или матрицы весов):

$$P = \mu_0^2 K^{-1}, \quad (2.3.3)$$

где μ_0 — ошибка единицы веса, назначаемая до уравнивания.

Частным случаем выражения (2.3.3) является формула веса независимых результатов

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}. \quad (2.3.4)$$

Для независимых величин весовая матрица является диагональной

$$P = \begin{vmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n \end{vmatrix}. \quad (2.3.5)$$

В результате уравнивания получают корреляционную матрицу уравненных величин

$$Q = \begin{vmatrix} p_1^{-1} & r_{12} p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}} & \dots & r_{1k} p_1^{-\frac{1}{2}} p_k^{-\frac{1}{2}} \\ r_{21} p_2^{-\frac{1}{2}} p_1^{-\frac{1}{2}} & p_2^{-1} & \dots & r_{2k} p_2^{-\frac{1}{2}} p_k^{-\frac{1}{2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} p_k^{-\frac{1}{2}} p_1^{-\frac{1}{2}} & r_{k2} p_k^{-\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}} & \dots & p_k^{-1} \end{vmatrix}. \quad (2.3.6)$$

В этой матрице веса p уравненных величин соответствуют ошибке единицы веса μ , получаемой после уравнивания. Ошибка μ в общем случае не равна ошибке μ_0 , назначенной до уравнивания.

Ковариационная матрица уравненных величин и корреляционная матрица связаны выражением

$$Q^{-1} = \mu^2 K^{-1} \text{ или } K = \mu^2 Q, \quad (2.3.7)$$

где μ — ошибка единицы веса после уравнивания.

В корреляционной матрице (2.3.6) обозначим:

$$Q_{11} = \frac{1}{p_1}; \quad Q_{22} = \frac{1}{p_2}; \quad \dots, \quad Q_{nn} = \frac{1}{p_n}; \quad Q_{12} = \frac{r_{12}}{\sqrt{p_1 p_2}} \dots$$

Тогда для средней квадратической ошибки результата уравнивания получим

$$m_i^2 = \mu^2 Q_{ii} = \frac{\mu^2}{p_i}. \quad (2.3.8)$$

Из (2.3.1) следует, что это диагональные элементы ковариационной матрицы. Таким образом, диагональные элементы ковариационной матрицы характеризуют точность результатов уравнивания.

Если F есть функция результатов, то ковариационная матрица для функций вычисляется по формуле

$$K_F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) K \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^T, \quad (2.3.9)$$

где K — ковариационная матрица результатов уравнивания (в данном случае, аргументов x); $\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$ — матрица коэффициентов $\frac{\partial F}{\partial x}$, т. е. производных функций по аргументам.

В выражении (2.3.9) матрица коэффициентов имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Частным случаем выражения (2.3.9) является формула средней квадратической ошибки функции независимых (некоррелированных) результатов

$$M_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 m_2^2 + \dots, \quad (2.3.11)$$

где $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ — коэффициенты, т. е. производные функции F по аргументам x ; m_i — средние квадратические ошибки результатов (аргументов).

Средняя квадратическая ошибка функции нескольких результатов уравнивания вычисляется с учетом диагональных и недиагональных элементов ковариационной матрицы (2.3.1). Для функции $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ее можно получить по формуле

$$M_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 K_{11} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 K_{22} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \right)^2 K_{kk} + 2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} K_{12} + \dots + \\ + 2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_k} K_{1k} + 2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} K_{23} + \dots \quad (2.3.12)$$

На основании этого выражения напишем формулу средней квадратической ошибки функции двух результатов

$$M_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 K_{11} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 K_{22} + 2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} K_{12}. \quad (2.3.13)$$

Для той же функции двух результатов напишем формулу с элементами корреляционной матрицы:

$$M_F^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 Q_{11} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 Q_{22} + 2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} Q_{12} \right]. \quad (2.3.14)$$

При анализе результатов уравнивания иногда пользуются нормированной корреляционной матрицей. В нормированной корреляционной матрице диагональные элементы равны единице, а недиагональные элементы, т. е. коэффициенты корреляции, вычисляются по формуле

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ii}} \sqrt{K_{jj}}}, \quad (2.3.15)$$

если за основу взята ковариационная матрица (2.3.1), или по формуле

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}} \sqrt{Q_{jj}}}, \quad (2.3.16)$$

если за основу принята корреляционная матрица (2.3.6). Нормированная корреляционная матрица имеет вид:

$$r = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.3.17)$$

2.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

При развитии больших геодезических сетей измеряют миллионы величин. Для уравнивания огромного числа измерений наиболее предпочтительным во многих отношениях является параметрический способ. Пожалуй, самым предпочтительным свойством этого способа является то, что для каждого результата измерений составляется свое уравнение поправок, и ни в одно другое уравнение поправок этот результат не входит. Следовательно, в параметрическом способе, в отличие от других способов, значительно легче избежать лишних уравнений поправок и не пропустить требуемых, так как число уравнений поправок равно числу результатов измерений.

Сущность параметрического способа отражается в принципах, положенных в основу составления уравнений поправок. Когда же уравнения поправок составлены, то дальнейшая задача сводится к их решению под условием

$$V^T P V = \min,$$

где V — матрица поправок к результатам измерений.

Выполнение этого условия практически обеспечивается тем, что от уравнений поправок переходят к нормальным уравнениям. И хотя в действительности решают нормальные уравнения, но это решение является лишь этапом решения уравнений поправок.

Для составления уравнений поправок выбирают так называемые независимые параметры x_1, x_2, \dots, x_k . «Независимость» этих параметров означает, что производная от одного параметра по любому другому параметру принимается равной нулю. Кроме того это означает, что нельзя назначать параметры, которые можно вычислить по другим параметрам. Например, при уравнивании треугольника нельзя назначать в качестве независимых параметров две стороны и два угла, так как один параметр можно вычислить по трем остальным.

В качестве независимых параметров выбирают величины, которые связаны функциональными зависимостями с результатами измерений. Независимыми параметрами могут назначаться и такие величины, значения которых получают непосредственно из измерений.

Для всех независимых параметров назначаются их предварительные значения $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$. К ним из уравнивания отыскиваются поправки δx . При назначении предварительных параметров добиваются, чтобы уравнения поправок были линейными, т. е. чтобы отброшенные члены рядов, содержащие поправки во второй и более высоких степенях, были пренебрегаемо малыми.

Проблема линеаризации уравнений поправок может решаться по-разному. Иногда выполняют предварительные уравнивания с ограниченным числом результатов измерений. Иногда несколько раз решают всю систему уравнений поправок, каждый раз уточняя предварительные параметры, и тем самым добиваясь, чтобы «ошибки предварительных параметров» были достаточно малыми и не исказили результаты уравнивания.

При составлении уравнений поправок могут использоваться как непосредственно результаты измерений, так и результаты предшествующих уравниваний, т. е. функции результатов измерений. Будем обозначать их t_1, t_2, \dots, t_n и называть уравниваемыми величинами.

Каждая уравниваемая величина должна сопровождаться оценкой точности. Результаты собственно измерений характеризуются их средними квадратическими ошибками m_i . Для результатов предшествующих уравниваний необходимо иметь их ковариационную матрицу K_i .

Отметим, что под функциями результатов измерений понимают результаты предшествующего уравнивания, а не просто вычисления. Например, когда вынужденно отступают от строгого выполнения этого правила и вычисляют геодезический азимут как функцию астрономического азимута и долготы, то рассматривать его приходится не как функцию результатов измерений, а как результат измерения, хотя таковым он не является.

Теперь получим уравнение поправок в общем виде.

Как уже отмечалось, независимые параметры связаны функциональными зависимостями с уравниваемыми величинами

$$t = f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (2.4.1)$$

Это выражение называется уравнением связи. Оно справедливо, в частности, и по отношению к уравненным величинам и уравненным параметрам, поэтому на его основе напишем

$$t_i + v_i = f_i(x_1^0 + \delta x_1, x_2^0 + \delta x_2, \dots, x_k^0 + \delta x_k), \quad (2.4.2)$$

где v_i — поправка к уравниваемой величине; δx_j — поправки к предварительным значениям параметров.

Выражение в правой части разложим в ряд и отбросим члены ряда, содержащие поправки δx во второй и более высоких степенях

$$t_i + v_i = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) + \frac{\partial t_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial t_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial t_i}{\partial x_k} \delta x_k. \quad (2.4.3)$$

Перепишем это выражение:

$$v_i = \frac{\partial t_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial t_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial t_i}{\partial x_k} \delta x_k + f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) - t_i. \quad (2.4.4.)$$

Обозначим в полученном выражении свободный член

$$l_i = f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) - t_i. \quad (2.4.5)$$

Член $f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ представляет собой значение уравниваемой величины, но не измеренное, а вычисленное с предварительными параметрами.

Подставим (2.4.5) в (2.4.4.)

$$v_i = \frac{\partial t_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial t_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial t_i}{\partial x_k} \delta x_k + l_i. \quad (2.4.6)$$

Это выражение является уравнением поправок в параметрическом способе.

Для системы уравнений поправок, составленных для всех уравниваемых величин, необходимо получить весовую матрицу на основе ковариационной матрицы K , или, в частности, на основе ошибок m , а также единой ошибки единицы веса μ_0 .

Запишем систему уравнений поправок (2.4.6) в матричной форме

$$A\delta X + L = V \text{ с весовой матрицей } P, \quad (2.4.7)$$

где A — матрица коэффициентов $\frac{\partial t}{\partial x}$ при неизвестных; δX — матрица неизвестных, т. е. поправок к предварительным параметрам; L — матрица свободных членов уравнений поправок; V — матрица поправок к результатам измерений и результатам предшествующего уравнивания.

Подчиним уравнения поправок (2.4.7) условию $V^T P V = \min$. Чтобы выполнить это условие, необходимо, чтобы выполнялось другое условие, а именно,

$$A^T P V = 0, \quad (2.4.8)$$

где 0 — нулевая матрица.

Подставим уравнения поправок (2.4.7)

$$A^T P V = A^T P (A \delta X + L) = A^T P A \delta X + A^T P L = 0. \quad (2.4.9)$$

Таким образом, чтобы выполнить условие $V^T P V = \min$, необходимо от уравнений поправок (2.4.7) перейти к нормальным уравнениям

$$A^T P A \delta X + A^T P L = 0, \quad (2.4.10)$$

где $A^T P A$ — матрица коэффициентов нормальных уравнений; $A^T P L$ — матрица свободных членов нормальных уравнений.

При n уравниваемых величинах (t_1, t_2, \dots, t_n) и k независимых параметрах матрица A в (2.4.7) имеет размер $n \times k$ (n строк и k столбцов). Размер матрицы δX — $k \times 1$, а матриц L и V — $n \times 1$. Весовая матрица P имеет размер $n \times n$. В нормальных уравнениях (2.4.10) матрица $A^T P A$ имеет размер $k \times k$, а матрица $A^T P L$ — размер $k \times 1$.

Рассмотрим размерность весов и ошибок единицы веса.

Веса вычисляются по формуле (2.3.4). Из этой формулы следует, что размерность веса зависит от размерности средней квадратической ошибки, т. е. от размерности измеренной величины. Если уравниваются разнородные величины, выраженные в радианах, метрах, миллигалах и т. д., то тогда веса разных измерений имеют разную размерность.

Иногда ошибку единицы веса принимают равной средней квадратической ошибке каких-либо измерений, например, равной ошибке угла в сетях 2 класса. В этом случае принято указывать ее размерность, например, $\mu_0 = 0,8''$. В общем же случае размерность ошибки единицы веса не имеет значения.

Покажем это на примере. Будем считать, что два независимых параметра x_1 , измеренный в секундах дуги, и x_2 , выраженный в m^2 , связаны горизонтальным направлением N ($m_1 = 0,5''$) и расстоянием s ($m_2 = 1$ м). Назначим $\mu_0 = 1$ мГал. На основании (2.4.6) напомним два уравнения поправок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial N}{\partial x_2} dx_2 + l_1 = v_1 \text{ с весом } p_1 = 4 \frac{\text{мГал}^2}{\text{сек}^2}; \\ \frac{\partial s}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial s}{\partial x_2} dx_2 + l_2 = v_2 \text{ с весом } p_2 = 1 \frac{\text{мГал}^2}{\text{м}^2}. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Обозначим

$$a_{11} = \frac{\partial N}{\partial x_1} \text{ (безразмерная величина);}$$

$$a_{12} = \frac{\partial N}{\partial x_2} \text{ в } \frac{\text{сек}}{\text{м}^2};$$

$$a_{21} = \frac{\partial s}{\partial x_1} \text{ в } \frac{\text{м}}{\text{сек}};$$

$$a_{22} = \frac{\partial s}{\partial x_2} \text{ в } \frac{1}{\text{м}}. \quad (2.4.12)$$

С этими обозначениями перепишем уравнения поправок:

$$\begin{aligned} a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + l_1 &= v_1 \text{ с весом } p_1 = 4 \frac{\text{мГал}^2}{\text{сек}^2}; \\ a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + l_2 &= v_2 \text{ с весом } p_2 = 1 \frac{\text{мГал}^2}{\text{м}}. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Здесь свободный член l_1 выражен в секундах, l_2 — в метрах. Напишем нормальные уравнения:

$$\begin{aligned} (p_1 a_{11} a_{11} + p_2 a_{21} a_{21}) dx_1 + (p_1 a_{11} a_{12} + p_2 a_{21} a_{22}) dx_2 + \\ + (p_1 a_{11} l_1 + p_2 a_{21} l_2) &= 0; \\ p_1 a_{11} a_{12} + p_2 a_{21} a_{22}) dx_1 + (p_1 a_{12} a_{12} + p_2 a_{22} a_{22}) dx_2 + \\ + (p_1 a_{12} l_1 + p_2 a_{22} l_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Легко убедиться, что элементы матриц $A^T P A \delta X$ и $A^T P L$ в (2.4.10) имеют размерность величины $\frac{\mu_0^2}{x_i}$, в которой знаменатель есть независимый параметр, перед поправкой δx_i к которому стоит квадратичный коэффициент. Например, все три члена в первом нормальном уравнении имеют размерность $\frac{\text{мГал}^2}{\text{сек}}$, а во втором уравнении $\frac{\text{мГал}^2}{\text{м}}$.

Таким образом, как измеренные величины, так и независимые параметры могут иметь разные размерности. Например, часть параметров может быть выражена в метрах, а другая часть — в сантиметрах. Размерность ошибки единицы веса не зависит от размерности результатов измерений и независимых параметров. Она может быть безразмерной величиной, поэтому если назначено $\mu_0 = 1$, то в одном случае можно понимать, что $\mu_0 = 1''$, а в другом, что $\mu_0 = 1 \text{ м}$, т. е. надо считать, что ошибки единицы веса в первом и во втором случае одинаковые.

При уравнивании функций с их весовыми матрицами в общем случае для составления нормальных уравнений (2.4.10) придется перемножать матрицы. Когда большинство коэффициентов уравнений поправок равно нулю, операция умножения матриц становится не эффективной. Иногда удастся найти более рациональные приемы вычисления компонентов нормальных уравнений. Эти приемы будут рассмотрены в следующих параграфах.

Когда уравниваются функции результатов измерений с их ковариационными матрицами, компонентами нормальных уравнений являются не отдельные значения $p_i a_{i1} a_{i1}$, $p_i a_{i1} a_{i2}$ и т. д., а частные суммы этих значений в виде матриц коэффициентов $A^T P A$, свободных членов $A^T P L$ и частных сумм $L^T P L$. Каждая частная матрица частных сумм вычисляется для группы уравниваемых величин, связанных одной ковариационной матрицей.

2.6. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Конечной целью решения нормальных уравнений является получение уравненных значений независимых параметров с оценкой точности и уравненных значений уравниваемых величин с оценкой их точности. Результаты этого решения должны обеспечивать возможность последующего вычисления функций уравненных независимых параметров и тоже с оценкой точности.

Непосредственно из решения нормальных уравнений (2.4.10) находят поправки к предварительным параметрам δX и их корреляционную матрицу. Решение системы (2.4.10) в общем виде можно представить формулой

$$\delta X = - (A^T P A)^{-1} (A^T P L). \quad (2.6.1)$$

Уравненные значения независимых параметров вычисляются по формуле

$$X = X^0 + \delta X. \quad (2.6.2)$$

В выражении (2.6.1) обратная матрица $(A^T P A)^{-1}$ является корреляционной матрицей уравненных независимых параметров

$$Q = (A^T P A)^{-1}. \quad (2.6.3)$$

Получив корреляционную матрицу, можно получить ковариационную матрицу независимых параметров, необходимую для оценки точности как самих этих параметров, так и уравненных значений уравниваемых величин и функций уравненных параметров:

$$K = \mu^2 Q, \quad (2.6.4)$$

где μ — ошибка единицы веса после уравнивания.

Из формул (2.6.3) и (2.6.4) следует, что, выбирая конкретный путь решения нормальных уравнений, необходимо предусмотреть возможность получения обратной матрицы и ошибки единицы веса после уравнивания.

При уравнивании геодезических сетей системы нормальных уравнений могут быть настолько большими, что не представится возможности обратить матрицу коэффициентов. В этом случае, чтобы получить ковариационную матрицу, может быть применен метод преобразования нормальных уравнений, при котором получается преобразованная система, содержащая систему нормальных уравнений меньшего размера, чем исходная:

$$(A^T P A)_{\text{пр}} \delta X_0 + (A^T P L)_{\text{пр}} = 0, \quad (2.6.5)$$

где δX_0 — матрица неизвестных, являющаяся частью матрицы δX в (2.4.10).

В результате решения системы преобразованных нормальных уравнений (2.6.5) находят неизвестные δx_0 , которые составляют лишь часть всех неизвестных, и соответствующую им корреляционную матрицу

$$Q_0 = (A^T P A)_{\text{пр}}^{-1}, \quad (2.6.6)$$

которая тоже является лишь частью матрицы (2.6.3).

Принимая полученные значения неизвестных δx_0 в качестве окончательно уравненных, решают остальную часть преобразованной системы и получают значения остальных неизвестных. Подробнее о преобразовании нормальных уравнений сказано в § 2.7.

Нередко, при уравнивании больших сетей, по технологическим соображениям выгодно результаты измерений разбивать на группы. Тогда для каждой группы составляются свои уравнения поправок и нормальные уравнения. При этом уравнения поправок могут составляться с разными независимыми параметрами и разными ошибками единицы веса.

В этом случае необходимо приводить нормальные уравнения к единым параметрам и ошибке единицы веса, а также объединять нормальные уравнения разных групп в единую систему. Эти задачи решаются в рамках многогруппового метода уравнивания, который рассмотрен в § 2.9.

Задача уравнивания результатов измерений не обязательно должна сводиться к решению единой системы нормальных уравнений. До конца, т. е. до получения неизвестных и их ковариационных матриц, могут решаться нормальные уравнения отдельных групп на отдельных этапах уравнивания. С этими результатами уравнивания могут составляться новые уравнения поправок и новые нормальные уравнения. Метод многоэтапного уравнивания рассмотрен в § 2.10.

Как уже отмечалось, при уравнивании больших геодезических сетей одной из серьезных является проблема численного решения нормальных уравнений. Так в АГС б. СССР насчитывается около 170 тысяч пунктов. Следовательно, требуется решать систему нормальных уравнений, содержащую более 300 тысяч неизвестных.

Задача решения нормальных уравнений, по сути дела, является задачей решения линейных уравнений.

Для линейных уравнений в математике рассматриваются два основных вида методов их численного решения — прямые (конечные) и итерационные (бесконечные).

Прямые методы позволяют в принципе получить точное решение, если оно только существует, выполнив конечное число арифметических операций. К таким методам с совершенно точными результатами мы привыкли, решая школьные задачи с двумя-тремя неизвестными. При уравнивании больших сетей получить совершенно точные результаты, как правило, не удастся из-за накопления ошибок округления.

В итерационных методах, в отличие от прямых, для получения точных результатов необходимо выполнить бесконечное число арифметических операций. Конечно, в реальной практике сделать это невозможно, поэтому результаты уравнивания искажаются ошибками ограничения.

Таким образом, решения, полученные прямыми методами, искажены ошибками округления, но свободны от ошибок ограничения, а в итерационных методах, наоборот, искажения возникают из-за ошибок ограничения, но они свободны от ошибок округления. Заранее решить, какой метод приведет к более точным результатам в конкретной задаче, нельзя. Это зависит от многих факторов, но в любом случае плохой алгоритм не может привести к хорошему решению нормальных уравнений.

Известно несколько прямых методов. В практике предпочтение обычно отдают методу исключения Гаусса, т. к. считается, что по количеству арифметических операций он пока является самым эффективным.

2.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель преобразования нормальных уравнений та же, что и для линейных уравнений — выделить из большой системы такую, для которой можно обратить матрицу коэффициентов при неизвестных, т. е. получить корреляционную матрицу, требуемую для получения ковариационной матрицы.

Нормальные уравнения

$$A^T P A \delta X + A^T P L = 0 \quad (2.7.1)$$

являются частным случаем линейных уравнений (2.2.1), преобразование которых рассмотрено в § 2.2.

Введем обозначения

$$B = A^T P A; \quad C = A^T P L. \quad (2.7.2)$$

С этими обозначениями перепишем нормальные уравнения (2.7.1)

$$B \delta X + C = 0. \quad (2.7.3)$$

По аналогии с (2.2.3) запишем матрицы системы (2.7.3) в виде блочных матриц

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{vmatrix}; \quad \delta X = \begin{vmatrix} \delta X_{11} \\ \delta X_{21} \end{vmatrix}. \quad (2.7.4)$$

При разделении на блоки следует выполнять условие о том, что матрица B_{22} должна быть квадратной. В этом случае

$$B_{21} = B_{12}^T, \quad (2.7.5)$$

что и отражено в первой матрице (2.7.4)

По формулам (2.2.5) и (2.2.7)—(2.2.9) получим преобразованную систему в виде двух групп уравнений:

$$B_1 \delta X + C_{11} = 0; \quad (2.7.6)$$

$$B_2 \delta X_{21} + C_2 = 0, \quad (2.7.7)$$

матрицы коэффициентов и свободных членов которых вычисляются по формулам

$$B_1 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \end{vmatrix};$$

$$B_2 = B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12};$$

$$C_2 = C_{21} - B_{12}^T B_{11}^{-1} C_{11}. \quad (2.7.8)$$

В целом система из уравнений (2.7.6) и (2.7.7) не является нормальной; нормальными являются только уравнения группы (2.7.7). Следовательно, если обратить матрицу B_2 , то можно вычислить неизвестные

$$\delta X_{21} = -B_2^{-1} C_2 \quad (2.7.9)$$

и их корреляционную матрицу

$$Q = B_2^{-1}. \quad (2.7.10)$$

В обратном ходе отыскиваются остальные неизвестные. Для этого полученные неизвестные δx_{21} необходимо подставить в группу уравнений (2.7.6), т. е. вычислить новые свободные члены

$$C_1 = C_{11} + B_{12} \delta X_{21} \quad (2.7.11)$$

и с ними преобразовать уравнения (2.7.6) к виду

$$B_{11} \delta X_{11} + C_1 = 0. \quad (2.7.12)$$

Для нормальных уравнений, так же как и для линейных (см. § 2.2), возможна процедура многократных преобразований. В этом случае вместо решения системы нормальных уравнений (2.7.7) выполняется ее преобразование.

Для преобразования матрицы этой системы делят на блоки по формулам (2.7.4) и получают две новые группы уравнений — группу линейных уравнений (2.7.6) и группу нормальных уравнений (2.7.7). Группу линейных уравнений присоединяют к линейным уравнениям, полученным на первом шаге, а для группы нормальных уравнений вновь выполняют преобразования. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет получена система нормальных уравнений с матрицей коэффициентов желаемого размера.

2.8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОШИБКИ ЕДИНИЦЫ ВЕСА ПОСЛЕ УРАВНИВАНИЯ

Ошибка единицы веса после уравнивания вычисляется по формуле

$$\mu^2 = \frac{1}{n - k} V^T P V, \quad (2.8.1)$$

где n — число всех измерений; k — число необходимых измерений.

Разность $(n - k)$ есть число избыточных измерений r .

В число всех измерений входят все собственно результаты измерений и все функции ранее уравненных результатов измерений, использованные при составлении данной системы уравнений поправок. В параметрическом способе число измерений равно числу уравнений поправок.

Число необходимых измерений в параметрическом способе равно числу независимых параметров.

Для вычисления значения $V^T P V$, которое представляет собой одно число, существует несколько способов. Рассмотрим некоторые из них.

Для вычисления значения $V^T P V$ могут быть использованы уравнения поправок (2.4.7). Для этого необходимо вычислить все неизвестные, т. е. все поправки к предварительным значениям независимых параметров, и получить матрицу-столбец δX . Необходимы также матрица коэффициентов и матрица свободных членов уравнений и поправок, а также весовая матрица.

В больших сетях иногда получают сразу все неизвестные, например, из решения общей системы нормальных уравнений итеративными методами. В этом случае не требуется специально формировать матрицу δX .

При решении нормальных уравнений прямыми методами, как правило, приходится прибегать к их преобразованию. Чтобы получить все неизвестные, надо выполнить обратный ход и только после этого можно сформировать матрицу δX .

Систему уравнений поправок при уравнивании сетей обычно не составляют, а вычисляют и суммируют компоненты нормальных уравнений. В этом случае для вычисления значений $V^T P V$ приходится по каждому измерению составлять заново уравнения поправок, вычислять величины pv^2 и прибавлять их к ранее полученной сумме $[pv^2]$.

Другой путь вычисления $V^T P V$ основан на вычислении поправок как разностей между результатами измерений и их уравненными значениями:

$$v = t_{yp} - t_{изм}, \quad (2.8.2)$$

где $t_{изм}$ — результат измерения; t_{yp} — уравненное значение результата измерения.

Уравненные значения вычисляются по формулам связи (2.4.1) с уравненными независимыми параметрами. Следовательно, для вычисления требуются уравненные независимые параметры x ,

результаты измерений (или функции ранее уравненных результатов измерений) и их веса (или весовая матрица).

Эти два способа имеют ту особенность, что для получения значения $V^T P V$ вычисляются поправки ко всем результатам измерений. А поправки дают возможность судить о точности конкретных результатов измерений, что особенно важно при предварительном уравнивании, выполняемом с целью оценки информации для окончательного уравнивания.

Теперь получим формулы для вычисления значения $V^T P V$ с использованием значения $L^T P L$. Для этого на основании уравнений (2.4.7) напишем

$$V^T P V = (A \delta X + L)^T P (A \delta X + L). \quad (2.8.3)$$

Отсюда следует, что

$$V^T P V = \delta X^T A^T P A \delta X + \delta X^T A^T P L + L^T P A \delta X + L^T P L. \quad (2.8.4)$$

Преобразуем первые два члена в правой части полученного выражения, имея в виду правило (2.1.6),

$$\delta X^T A^T P A \delta X + \delta X^T A^T P L = \delta X^T (A^T P A \delta X + A^T P L). \quad (2.8.5)$$

Из (2.4.10) следует, что выражение в правой части есть нулевая матрица. Следовательно, на основании (2.8.4) получаем, что

$$V^T P V = L^T P A \delta X + L^T P L. \quad (2.8.6)$$

Перепишем это выражение, имея в виду (2.1.14) и (2.1.18),

$$V^T P V = \delta X^T A^T P L + L^T P L. \quad (2.8.7)$$

Для вычислений по этой формуле необходимо при составлении нормальных уравнений вычислить значение $L^T P L$ и сохранить матрицу-столбец свободных членов нормальных уравнений. Формула эта относится к исходной системе нормальных уравнений, поэтому необходимы все неизвестные δx .

Получим еще одну формулу. Для этого умножим все члены уравнений поправок (2.4.7) на $V^T P$ слева

$$V^T P V = V^T P A \delta X + V^T P L. \quad (2.8.8)$$

Учитывая, что V^T — это матрица-строка, а $P L$ — матрица-столбец, в соответствии с (2.1.17) напишем

$$V^T P L = L^T P V. \quad (2.8.9)$$

Кроме того по условию (2.4.8) $A^T P V$ есть нулевая матрица. Значит, транспонированная ей матрица тоже нулевая:

$$V^T P A = 0. \quad (2.8.10)$$

Следовательно,

$$V^T P V = V^T P L. \quad (2.8.11)$$

Эта формула может применяться для контроля вычисления поправок v и значений $V^T PV$. Заметим, что в общем случае в соответствии с (2.1.8) из (2.8.11) не следует, что $V = L$.

Теперь рассмотрим вычисление $V^T PV$ одновременно с решением нормальных уравнений.

Выражение (2.8.6) можно рассматривать как уравнение, в которое входят неизвестные δX и одно неизвестное $V^T PV$:

$$L^T PA \delta X - V^T PV + L^T PL = 0. \quad (2.8.12)$$

Добавим это уравнение к системе нормальных уравнений. Если в нормальной системе k неизвестных, то в суммарной системе будет $(k + 1)$ неизвестное

$$(A^T PA)_{k+1} \delta X_{k+1} + (A^T PL)_{k+1} = 0. \quad (2.8.13)$$

Для суммарной системы напомним блочные матрицы:

$$(A^T PA)_{k+1} = \left\| \begin{array}{c|c} A^T PA & 0 \\ \hline L^T PA & -E \end{array} \right\|; \quad \delta X_{k+1} = \left\| \begin{array}{c} \delta X \\ V^T PV \end{array} \right\|; \quad (2.8.14)$$

$$(A^T PL)_{k+1} = \left\| \begin{array}{c} A^T PL \\ L^T PL \end{array} \right\|.$$

Здесь $E = 1$. Система уравнений (2.8.13) в отличие от (2.4.10) не является нормальной.

Чтобы составить уравнение (2.8.13), необходимо вычислить значение $L^T PL$. Заметим, что

$$L^T PA = (A^T PL)^T. \quad (2.8.15)$$

Следовательно, матрица-строка $L^T PA$ состоит из тех же элементов, что и матрица свободных членов $A^T PL$. С учетом (2.8.15) перепишем блочные матрицы:

$$(A^T PA)_{k+1} = \left\| \begin{array}{c|c} A^T PA & 0 \\ \hline (A^T PL)^T & -E \end{array} \right\|; \quad \delta X_{k+1} = \left\| \begin{array}{c} \delta X \\ V^T PV \end{array} \right\|; \quad (2.8.16)$$

$$(A^T PL)_{k+1} = \left\| \begin{array}{c} A^T PL \\ L^T PL \end{array} \right\|.$$

Из решения уравнений (2.8.13) получают неизвестные δX и значение $V^T PV$.

Еще раз отметим, что все ранее написанные формулы этого параграфа относятся к исходным системам нормальных уравнений. Это следует иметь в виду при приведениях и преобразованиях нормальных уравнений.

Если необходимо, то преобразование системы (2.8.13) выполняется по правилам преобразования линейных уравнений (см. § 2.2). В прямом ходе в результате преобразования получается такая же

преобразованная система, как и в случае нормальных уравнений, состоящая из групп (2.7.6) и (2.7.7), но с дополнительным преобразованным уравнением:

$$B_1 \delta X + C_{11} = 0; \quad (2.8.17)$$

$$B_2 \delta X_{21} + C_2 = 0; \quad (2.8.18)$$

$$B_3 \delta X_{21} + B_4 (V^T P V) + C_3 = 0. \quad (2.8.19)$$

Дополнительное уравнение ставят в исходную систему последним, поэтому системы (2.8.17) и (2.8.18) от него не зависят. Следовательно, можно отдельно решить систему (2.8.18), получить неизвестные δX_{21} и их корреляционную матрицу. Получив неизвестные δX_{21} , решают уравнение (2.8.19), т. е. вычисляют значение $V^T P V$. Обратный ход выполняется так же, как и в случае нормальных уравнений, т. е. без уравнения (2.8.19) и без неизвестного $V^T P V$.

2.9. МНОГОГРУППОВОЕ УРАВНИВАНИЕ

Основные вопросы одногруппового уравнивания изложены в предыдущих параграфах этой главы. Отметим лишь, что при одногрупповом уравнивании для всех уравниваемых величин веса и весовые матрицы вычисляются с единой ошибкой единицы веса. Для всех уравниваемых величин назначаются единые независимые параметры и их предварительные значения. В этом параграфе рассмотрим многогрупповое уравнивание.

При многогрупповом уравнивании уравниваемые величины разбиваются на группы. Любой результат измерений может относиться только к одной группе. К одной группе должны относиться и функции ранее уравниваемых измерений, связанные одной ковариационной матрицей.

Для каждой i -ой группы могут назначаться своя ошибка единицы веса μ_i , свои независимые параметры X_i и их предварительные значения X_i^0 .

Уравнения поправок

$$A_i \delta X_i + L_i = V_i \text{ с весовой матрицей } P_i \quad (2.9.1)$$

и нормальные уравнения

$$A_i^T P_i A_i \delta X_i + A_i^T P_i L_i = 0 \quad (2.9.2)$$

составляются по группам. Нормальные уравнения отдельных групп складывают и решают общую систему нормальных уравнений

$$A^T P A \delta X + A^T P L = 0. \quad (2.9.3)$$

Прежде чем складывать системы нормальных уравнений групп, их необходимо привести к единой ошибке единицы веса, единым

независимым параметрам и предварительным значениям этих параметров.

После приведения в каждой группе нормальных уравнений должны быть неизвестные, входящие в другие группы. Будем называть их общими неизвестными, а необщими те, что входят только в одну группу.

Складывать можно как исходные нормальные уравнения групп, так и преобразованные, т. е. такие, в которых уже исключены часть или все необщие неизвестные.

При сложении неизменными остаются те нормальные уравнения, в которых квадратичный коэффициент стоит перед общим неизвестным, т. е. относится к общему независимому параметру. Суммируются нормальные уравнения, в которых квадратичные коэффициенты стоят перед одними и теми же общими неизвестными.

Рассмотрим приведение нормальных уравнений. Сначала изложим приведение к новой ошибке единицы веса.

Допустим, что уравнение поправок

$$A_1 \delta X_1 + L_1 = V_1 \text{ с весовой матрицей } P_1,$$

а следовательно, и нормальные уравнения

$$A_1^T P_1 A_1 \delta X_1 + A_1^T P_1 L_1 = 0 \quad (2.9.5)$$

составлены с ошибкой единицы веса μ_{01} , а привести необходимо к ошибке μ_{02} . Для этого нормальные уравнения (2.9.5) надо разделить на μ_{01}^2 и умножить на μ_{02}^2 . Будет получена новая система нормальных уравнений

$$\frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} A_1^T P_1 A_1 \delta X_1 + \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} A_1^T P_1 L_1 = 0. \quad (2.9.6)$$

Обозначив

$$P_2 = \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} P_1, \quad (2.9.7)$$

запишем нормальные уравнения в таком виде:

$$A_1^T P_2 A_1 \delta X_1 + A_1^T P_2 L_1 = 0. \quad (2.9.8)$$

Им соответствуют уравнения поправок

$$A_1 \delta X_1 + L_1 = V_1 \text{ с весовой матрицей } P_2. \quad (2.9.9)$$

Отметим, что значение $L_1^T P_1 L_1$, необходимое для получения ошибки единицы веса после уравнивания, вычисляется при составлении первоначальной системы нормальных уравнений (2.9.5).

Еще одно замечание. Ошибки единицы веса считаются разными, если они различаются абсолютными величинами. Если же в группе $\mu_{01} = 1''$, а назначено $\mu_{02} = 1 \text{ м}$, то приведения делать не надо.

Сделаем следующий шаг — в нормальных уравнениях (2.9.8) заменим предварительные значения независимых параметров X_1^0 новыми предварительными значениями X_2^0 так, чтобы из решения приведенной системы нормальных уравнений

$$A_1^T P_2 A_1 \delta X_2 + A_1^T P_2 L_2 = 0 \quad (2.9.10)$$

получить те же значения уравненных параметров, что и в случае (2.9.8), т. е. выполнить условие

$$X = X_1^0 + \delta X_1 = X_2^0 + \delta X_2. \quad (2.9.11)$$

Запишем это условие в ином виде

$$\delta X_1 = \delta X_2 + (X_2^0 - X_1^0). \quad (2.9.12)$$

Подставив это выражение в (2.9.8), получаем

$$A_1^T P_2 A_1 \delta X_2 + A_1^T P_2 L_1 + A_1^T P_2 A_1 (X_2^0 - X_1^0) = 0. \quad (2.9.13)$$

Этим нормальным уравнениям соответствуют уравнения поправок

$$A_1 \delta X_2 + L_2 = V_1 \text{ с весовой матрицей } P_2, \quad (2.9.14)$$

в которых

$$L_2 = L_1 + A_1 (X_2^0 - X_1^0) = L_1 + A_1 \Delta X. \quad (2.9.15)$$

Теперь рассмотрим, как в нормальных уравнениях (2.9.13) заменить независимые параметры X другими параметрами Y , сохранив, добавив или убавив количество параметров, которые связаны между собой зависимостями вида

$$X = f(Y). \quad (2.9.16)$$

Для этого значения предварительных параметров в (2.9.13) и (2.9.15) необходимо вычислять по формуле

$$X_2^0 = f(Y_1^0), \quad (2.9.17)$$

а поправки δX_2 в (2.9.13) и (2.9.14) следует заменить поправками δY_1 по формуле

$$\delta X_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) \delta Y_1, \quad (2.9.18)$$

где δY_1 — матрица поправок к предварительным значениям новых параметров; $\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)$ — матрица производных.

Обозначим

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) \quad (2.9.19)$$

и перепишем (2.9.18) в таком виде:

$$\delta X_2 = F \delta Y_1. \quad (2.9.20)$$

Поправки к новым параметрам соответствуют формуле

$$\delta Y_1 = Y - Y_1^0, \quad (2.9.21)$$

где Y_1^0 — матрица предварительных значений новых параметров.

В правой части выражения (2.9.18) по аналогии с (2.4.3) опущены члены $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right) \delta Y_1^2$, $\left(\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}\right) \delta Y_1^3$, ... Их влияние тем меньше, чем меньше значения δY_1 . Следовательно, о проблеме линеаризации не следует забывать при назначении как X_1^0 , так и Y_1^0 .

Уравнения поправок (2.9.14), соответствующие нормальным уравнениям (2.9.13), преобразуем с учетом (2.9.20).

$$A_1 F \delta Y_1 + L_2 = V_1 \text{ с весовой матрицей } P_2. \quad (2.9.22)$$

На их основании напишем нормальные уравнения

$$F^T A_1^T P_2 A_1 F \delta Y_1 + F^T A_1^T P_2 L_2 = 0. \quad (2.9.23)$$

Подставим в (2.9.23) ранее введенные обозначения (2.9.7) и (2.9.15):

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} F^T A_1^T P_1 A_1 F \delta Y_1 + \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} F^T A_1^T P_1 L_1 + \\ & + \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} F^T A_1^T P_1 A_1 (X_2^0 - X_1^0) = 0. \end{aligned} \quad (2.9.24)$$

Итак, по этой формуле нормальные уравнения (2.9.5) приводятся к новой ошибке единицы веса μ_{02} , к новым независимым параметрам Y_1 и их предварительным значениям Y_1^0 . Обе системы уравнений (2.9.5) и (2.9.24) составлены с одними и теми же уравниваемыми величинами и их ковариационными матрицами, но с разными параметрами и ошибками единицы веса. В них разное количество избыточных измерений r . Им соответствуют разные ошибки единицы веса μ , разные значения $V^T P V$, разные корреляционные и ковариационные матрицы Q и K .

При многогрупповом уравнивании суммарную систему нормальных уравнений

$$A_2^T P_2 A_2 \delta Y_1 + A_2^T P_2 L_2 = 0 \quad (2.9.25)$$

получают путем сложения частных систем (2.9.24). Из решения суммарной системы находят уравненные значения независимых параметров Y и корреляционную матрицу Q_y .

Ошибка единицы веса после уравнивания может быть вычислена по формулам

$$\mu_2^2 = \frac{1}{r_2} V_2^T P_2 V_2; \quad (2.9.26)$$

$$V_2^T P_2 V_2 = L_2^T P_2 L_2 + \delta Y_1^T A_2^T P_2 L_2, \quad (2.9.27)$$

где r_2 — число избыточных измерений в системе (2.9.25).

Первый член в правой части выражения (2.9.27) можно получить путем суммирования соответствующих членов частных уравнений (2.9.24):

$$L_2^T P_2 L_2 = \Sigma (L_2^T P_2 L_2)_i, \quad (2.9.28)$$

При составлении уравнений вычисляются не суммы $(L_2^T P_2 L_2)_i$, а суммы $(L_1^T P_1 L_1)_i$. Получим формулу для их приведения.

В соответствии с (2.9.15) и (2.9.22) для каждой частной системы напомним

$$(L_2^T P_2 L_2)_i = (L_1 + A_1 \Delta X)^T P_2 (L_1 + A_1 \Delta X). \quad (2.9.29)$$

Подставим в это выражение (2.9.7)

$$\begin{aligned} (L_2^T P_2 L_2)_i &= \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} (L_1^T P_1 L_1 + L_1^T P_1 A_1 \Delta X + \Delta X^T A_1^T P_1 L_1 + \\ &+ \Delta X^T A_1^T P_1 A_1 \Delta X). \end{aligned} \quad (2.9.30)$$

Имея в виду, что

$$L_1^T P_1 A_1 \Delta X = \Delta X^T A_1^T P_1 L_1, \quad (2.9.31)$$

получаем

$$(L_2^T P_2 L_2)_i = \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}^2} (L_1^T P_1 L_1 + 2\Delta X^T A_1^T P_1 L_1 + \Delta X^T A_1^T P_1 A_1 \Delta X). \quad (2.9.32)$$

По этой формуле выполняется приведение сумм $L_1^T P_1 L_1$, вычисляемых при составлении нормальных уравнений групп (2.9.5). Приведенные суммы частных систем складываются, получается сумма $L_2^T P_2 L_2$ (2.9.28) и с ней по формулам (2.9.26) и (2.9.27) вычисляется ошибка единицы веса после уравнивания μ_2 . С этой ошибкой единицы веса получается ковариационная матрица

$$K_y = \mu_2^2 Q_y. \quad (2.9.33)$$

Частным случаем рассмотренного здесь многогруппового уравнивания является метод Пранис-Праневича. В методе Пранис-Праневича уравнения всех групп составляются с едиными ошибками единицы веса, независимыми параметрами и их предварительными

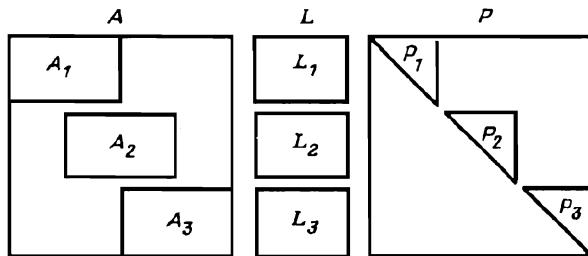


Рис. 6. Матрицы уравнений поправок при многогрупповом уравнивании

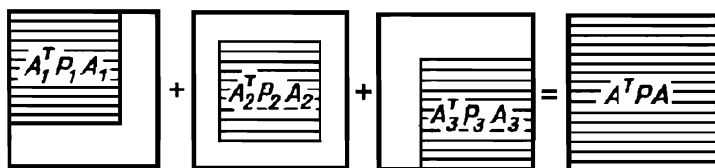


Рис. 7. Сложение матриц нормальных уравнений

значениями. В этом случае нет необходимости приводить нормальные уравнения. Матрицы уравнений поправок и нормальных уравнений показаны на рисунках 6 и 7.

2.10. МНОГОЭТАПНОЕ УРАВНИВАНИЕ

В предыдущем параграфе изложена теория многогруппового уравнивания. В основу теории многогруппового уравнивания положена идея о суммировании приведенных и преобразованных нормальных уравнений отдельных групп.

Разовьем эту идею дальше. Положим, что нормальные уравнения будут решены до конца в группах. Это значит, что будут получены функции уравненных результатов измерений с их ковариационными матрицами. С этими функциями могут формироваться новые группы, в которых заново составляются уравнения поправок и нормальные уравнения.

Формирование групп может выполняться в несколько этапов. Это обеспечит большой выбор путей решения задачи уравнивания.

Таким образом, все результаты измерений разбиваются на группы. На каждом этапе прямого хода решают нормальные уравнения отдельных групп, получают уравненные значения параметров в группах и их ковариационные матрицы. С этими параметрами, т. е. с результатами уравнивания предыдущего этапа, составляются новые группы. На следующем этапе для новых групп составляют уравнения поправок, решают нормальные уравнения и получают новые результаты уравнивания с их ковариационными матрицами.

Так продолжается до тех пор, пока не будет получена одна (связующая) группа результатов. Из решения связующей системы уравнений поправок получают окончательно уравненные значения

части параметров и их ковариационную матрицу. С этими параметрами поэтапно выполняется обратный ход.

На каждом этапе прямого хода для каждой группы результатов измерения или уравнивания назначаются свои параметры. В пределах группы параметры должны быть независимыми. Параметры разных групп могут быть и зависимыми между собой, т. е. такими, когда зная параметры одной группы, можно вычислить параметры другой группы, не используя результатов измерений. В разных группах могут быть общие параметры, но это условие не является обязательным.

В прямом ходе для каждой группы можно назначать свою ошибку единицы веса для получения весовой матрицы группы. Для вычисления ковариационной матрицы уравненных результатов группы должна быть получена, как обычно, ошибка единицы веса из уравнивания группы.

В группах многоэтапного уравнивания уравнения поправок могут решаться одногрупповым или многогрупповым методом.

На разных этапах прямого хода могут быть разные параметры, поэтому для обратного хода необходимо вычислять параметры группы, принимаемые за твердые. Для этого используются другие параметры, полученные на предыдущем этапе обратного хода.

Поясним многоэтапное уравнивание на примере. Положим, что все результаты измерений разбиты на 6 групп:

$$T_{11}, T_{21}, T_{31}, T_{41}, T_{51}, T_{61}.$$

Этим результатам соответствуют ковариационные матрицы:

$$K_{11}^0, K_{21}^0, K_{31}^0, K_{41}^0, K_{51}^0, K_{61}^0.$$

Для примера будем считать, что результаты измерений шестой группы T_{61} предполагается использовать непосредственно при формировании связующей системы, поэтому на промежуточных этапах для нее нормальные уравнения не решают. Для остальных групп на первом этапе назначаются предварительные значения параметров групп:

$$X_{11}^0, X_{21}^0, X_{31}^0, X_{41}^0, X_{51}^0$$

и составляются уравнения поправок:

$$A_{11}\delta X_{11} + L_{11} = V_{11} \quad \text{с} \quad P_{11}, T_{11}, X_{11}^0;$$

$$A_{21}\delta X_{21} + L_{21} = V_{21} \quad \text{с} \quad P_{21}, T_{21}, X_{21}^0;$$

$$A_{31}\delta X_{31} + L_{31} = V_{31} \quad \text{с} \quad P_{31}, T_{31}, X_{31}^0;$$

$$A_{41}\delta X_{41} + L_{41} = V_{41} \quad \text{с} \quad P_{41}, T_{41}, X_{41}^0;$$

$$A_{51}\delta X_{51} + L_{51} = V_{51} \quad \text{с} \quad P_{51}, T_{51}, X_{51}^0.$$

Составив и решив нормальные уравнения, получают уравненные значения параметров в группах:

$$X_{11}, X_{21}, X_{31}, X_{41}, X_{51}$$

и их ковариационные матрицы:

$$K_{11}, K_{21}, K_{31}, K_{41}, K_{51}.$$

Уравненные значения и их ковариационные матрицы достаточно иметь не для всех, а только для тех параметров, которые будут использоваться при составлении уравнений поправок на следующих этапах прямого хода.

Допустим, что результаты пятой группы на втором этапе участвовать не будут, и будут использованы сразу для связующей системы, а на втором этапе будут сформированы две группы — седьмая из результатов X_{11} и X_{21} и восьмая из X_{31} и X_{41} . Результатами, включаемыми в уравнивание этих групп, будут функции или выборки из функций:

$$T_{72} \text{ из } X_{11} \text{ и } X_{21}; T_{82} \text{ из } X_{31} \text{ и } X_{41},$$

и ковариационные матрицы, которые будут получены путем выборки или вычисления ковариационных матриц:

$$K_{72}^0 \text{ из } K_{11} \text{ и } K_{21}; K_{82}^0 \text{ из } K_{31} \text{ и } K_{41}.$$

Для этих двух групп назначаются предварительные параметры:

$$X_{72}^0 \text{ и } X_{82}^0.$$

Далее составляются две системы уравнений поправок и нормальных уравнений и получают уравненные параметры и их ковариационные матрицы:

$$X_{72}; X_{82};$$

$$K_{72}; K_{82}.$$

На третьем этапе из двух групп второго этапа формируется одна группа и получают параметры и их ковариационная матрица:

$$X_{93} \text{ и } K_{93}.$$

На четвертом (в данном случае, последнем) этапе прямого хода формируется десятая — связующая система уравнений поправок. В нее входят все результаты измерений шестой группы T_{61} , результаты T_{52} , которые формируются из уравненных параметров X_{51} , и результаты $T_{10.4}$ из параметров $X_{9.3}$. В формировании ковариационной матрицы этой системы участвуют матрицы $K_{6.1}^0$, $K_{5.1}$ и $K_{9.3}$.

Связующая система уравнений поправок имеет вид:

$$A_{10.4} \delta X_{10.4} + L_{10.4} = V_{10.4}. \quad (2.10.1)$$

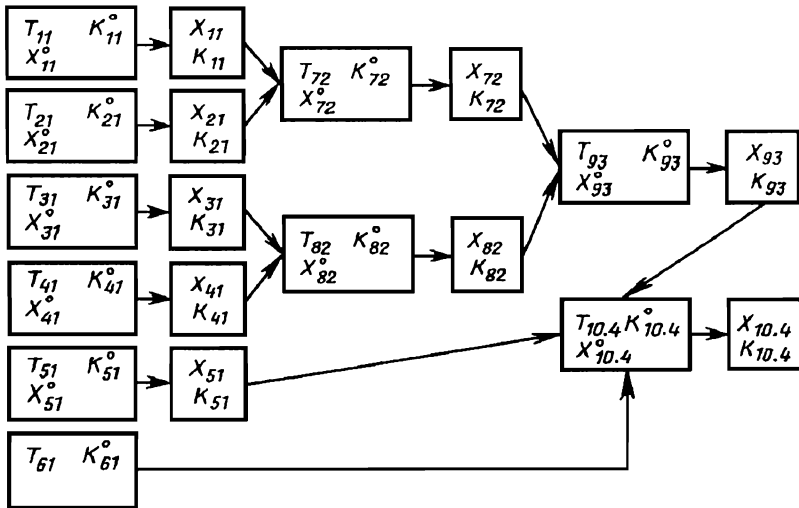


Рис. 8. Схема прямого хода

Ей соответствует система нормальных уравнений:

$$A_{10.4}^T P_{10.4} A_{10.4} \cdot \delta X_{10.4} + A_{10.4}^T P_{10.4} L_{10.4} = 0. \quad (2.10.2)$$

Из решения этой системы получают уравненные значения параметров связующей системы $X_{10.4}$ и ковариационную матрицу всех или только части этих параметров. С этими параметрами начинается обратный ход решения задачи.

Для шестой группы обратный ход не выполняется, так как все параметры получаются из системы (2.10.2). Для пятой и девятой групп вычисляются те параметры, которые являются функциями параметров связующей системы.

Вычисленные таким образом параметры принимаются за окончательные и с ними выполняется обратный ход в пятой и девятой группах. В результате будут получены уравненные значения всех параметров пятой группы, а с параметрами девятой группы вычисляются окончательные значения параметров седьмой и восьмой групп.

Выполняется обратный ход в седьмой и восьмой группах. По такой же процедуре выполняется обратный ход на всех остальных этапах, и в результате получают уравненные значения всех параметров.

Схема прямого хода, соответствующая рассмотренному примеру, показана на рис. 8.

При многоэтапном уравнивании могут применяться и правила многогруппового уравнивания. Если на каком-то этапе составлены уравнения поправок группы и соответствующие им нормальные уравнения, то эти нормальные уравнения можно не решать, а складывать с нормальными уравнениями других групп. В этом

случае для данной группы не потребуются заново составлять уравнения поправок с весовыми матрицами, что особенно важно для больших систем уравнений. Естественно, что нормальные уравнения разных групп необходимо привести к единым независимым параметрам и единой ошибке единицы веса.

В многоэтапном методе значительно проще, чем в многогрупповом методе, решается проблема совместного уравнивания новых измерений и координат ранее уравненных сетей.

2.11. КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА КООРДИНАТ

При уравнивании геодезических сетей среди различных видов оценок точности особое место занимает ковариационная матрица координат пунктов. Матрицы координат нужны для анализа результатов уравнивания отдельных составных частей ГГС на отдельных этапах, для получения весовых матриц на этапах объединения составных частей, и особенно, для характеристики уравненной сети, как в целом, так и ее отдельных элементов.

Ковариационные матрицы могут быть в разных системах координат. В этом параграфе рассмотрим ковариационную матрицу геодезических координат. Матрица с плоскими прямоугольными координатами Гаусса будет рассмотрена в главе 6.

Как уже отмечалось в § 2.3, диагональные элементы ковариационных матриц равны квадратам средних квадратических ошибок. В матрицах координат корни квадратные из диагональных элементов равны средним квадратическим ошибкам координат относительно начала системы. В референционной системе — это ошибки координат относительно начального пункта сети, в общеземной системе — относительно начала общеземной системы.

Если сеть уравнена на основе нескольких начальных (твердых) пунктов, то это будут ошибки относительно всей совокупности начальных пунктов, а не относительно какого-то конкретного пункта. В табл. 2.11.1 показан фрагмент ковариационной матрицы — два пункта, по три координаты для каждого пункта. Будем считать, что координаты пунктов даны в референционной системе, а сеть уравнена от одного начального пункта.

Т а б л и ц а 2.11.1

Фрагменты ковариационной матрицы координат

	Пункт 1			Пункт 2		
	B_1	L_1	H_1	B_2	L_2	H_2
B_1	$K(B_1B_1)$	$K(B_2L_1)$	$K(B_1H_1)$	$K(B_1B_2)$	$K(B_1L_2)$	$K(B_1H_2)$
L_1		$K(L_1L_1)$	$K(L_1H_1)$	$K(L_1B_2)$	$K(L_1L_2)$	$K(L_1H_2)$
H_1			$K(H_1H_1)$	$K(H_1B_2)$	$K(H_1L_2)$	$K(H_1H_2)$
B_2				$K(B_2B_2)$	$K(B_2L_2)$	$K(B_2H_2)$
L_2					$K(L_2L_2)$	$K(L_2H_2)$
H_2						$K(H_2H_2)$

На основании такой матрицы можно написать средние квадратические ошибки координат пунктов относительно начального пункта:

$$M(B_1) = \sqrt{K(B_1B_1)}; M(L_1) = \sqrt{K(L_1L_1)}; M(H_1) = \sqrt{K(H_1H_1)}; \\ M(B_2) = \sqrt{K(B_2B_2)}; M(L_2) = \sqrt{K(L_2L_2)}; M(H_2) = \sqrt{K(H_2H_2)}. \quad (2.11.1)$$

Используя недиагональные элементы ковариационной матрицы координат, можно получить многие другие характеристики уравненной сети. К ним относятся, в частности, следующие:

- средние квадратические ошибки разностей координат пунктов;
- средние квадратические ошибки расстояний между пунктами, в том числе и сторон между смежными пунктами;
- средние квадратические ошибки азимутов направлений между смежными пунктами и пунктами, расположенными далеко друг от друга;
- средние квадратические ошибки углов;
- средние квадратические ошибки взаимного положения в продольном и поперечном направлениях.

Получить все эти характеристики позволяет формула (2.3.12). Очень важной особенностью этой формулы является то, что все входящие в нее частные производные являются коэффициентами соответствующих уравнений поправок, и следовательно, все они вычисляются при составлении нормальных уравнений.

Средние квадратические ошибки разностей координат

$$\Delta B = B_2 - B_1; \\ \Delta L = L_2 - L_1; \\ \Delta H = H_2 - H_1 \quad (2.11.2)$$

получим на основании формулы (2.3.13), которая применительно к разности широт запишется следующим образом

$$M^2(\Delta B) = \left(\frac{\partial \Delta B}{\partial B_1}\right)^2 K(B_1B_1) + \left(\frac{\partial \Delta B}{\partial B_2}\right)^2 K(B_2B_2) + \\ + 2 \frac{\partial \Delta B}{\partial B_1} \frac{\partial \Delta B}{\partial B_2} K(B_1B_2). \quad (2.11.3)$$

Необходимые производные получим из (2.11.2):

$$\frac{\partial \Delta B}{\partial B_1} = -1; \quad \frac{\partial \Delta B}{\partial B_2} = +1. \quad (2.11.4)$$

Это не что иное, как коэффициенты уравнений поправок разностей координат. Подставим их в (2.11.3). Учитывая полную аналогию формул для ΔB , ΔL и ΔH , напишем выражения для средних квадратических ошибок трех разностей координат:

$$M(\Delta B) = \sqrt{K(B_1B_1) + K(B_2B_2) - 2K(B_1B_2)}; \\ M(\Delta L) = \sqrt{K(L_1L_1) + K(L_2L_2) - 2K(L_1L_2)}; \\ M(\Delta H) = \sqrt{K(H_1H_1) + K(H_2H_2) - 2K(H_1H_2)}. \quad (2.11.5)$$

Здесь ошибки разностей широт и долгот выражены в угловой мере. Нагляднее ошибки выражать в метрах. Для этого перейдем к ошибкам плоских прямоугольных координат Гаусса, считая, что ошибки широт и долгот выражены в секундах дуги:

$$\begin{aligned} M(\Delta x) &= n_1 \sqrt{K(B_1 B_1) + K(B_2 B_2) - 2K(B_1 B_2)}; \\ M(\Delta y) &= n_2 \sqrt{K(L_1 L_1) + K(L_2 L_2) - 2K(L_1 L_2)}; \\ M(\Delta H) &= \sqrt{K(H_1 h_1) + K(H_2 H_2) - 2K(H_1 H_2)}, \end{aligned} \quad (2.11.6)$$

где n_1 и n_2 — длина дуги меридиана и параллели в 1" в исследуемой точке.

Для приближенных расчетов можно принять

$$n_1 = 30,9; \quad n_2 = 30,9 \cos B. \quad (2.11.7)$$

Выражение для средней квадратической ошибки расстояния (в данном случае, для длины геодезической линии) напомним в соответствии с формулой (2.3.12)

$$\begin{aligned} M^2(s) &= \left(\frac{\partial s}{\partial B_1}\right)^2 K(B_1 B_1) + \left(\frac{\partial s}{\partial L_1}\right)^2 K(L_1 L_1) + \left(\frac{\partial s}{\partial B_2}\right)^2 K(B_2 B_2) + \\ &+ \left(\frac{\partial s}{\partial L_2}\right)^2 K(L_2 L_2) + 2 \frac{\partial s}{\partial B_1} \cdot \frac{\partial s}{\partial L_1} K(B_1 L_1) + 2 \frac{\partial s}{\partial B_1} \frac{\partial s}{\partial B_2} K(B_1 B_2) + \\ &+ 2 \frac{\partial s}{\partial B_1} \frac{\partial s}{\partial L_2} K(B_1 L_2) + 2 \frac{\partial s}{\partial L_1} \frac{\partial s}{\partial B_2} K(L_1 B_2) + 2 \frac{\partial s}{\partial L_1} \frac{\partial s}{\partial L_2} K(L_1 L_2) + \\ &+ 2 \frac{\partial s}{\partial B_2} \frac{\partial s}{\partial L_2} K(B_2 L_2). \end{aligned} \quad (2.11.8)$$

Производные длины геодезической линии по координатам (5.7.5) приведены в главе 5. Целесообразно иметь в виду, что

$$\frac{\partial s}{\partial L_1} = -\frac{\partial s}{\partial L_2}. \quad (2.11.9)$$

Для приближенных расчетов формулу (2.11.8) упростим

$$\begin{aligned} M^2(s) &= a^2 \cos^2 A_{12} [K(B_1 B_1) + K(B_2 B_2) - 2K(B_1 B_2)] + \\ &+ a^2 \cos^2 B_1 \sin^2 A_{12} [K(L_1 L_1) + K(L_2 L_2) - 2K(L_1 L_2)] + \\ &+ 2a^2 \cos B_1 \cos A_{12} \sin A_{12} [K(B_1 L_1) - K(B_1 L_2) - \\ &- K(B_2 L_1) + K(B_2 L_2)], \end{aligned} \quad (2.11.10)$$

где a — большая полуось эллипсоида.

В формулах (2.11.8) и (2.11.10) корреляционные моменты должны быть выражены в радианах (точнее, в рад²).

На основании той же формулы (2.3.12) напомним выражение для средней квадратической ошибки азимута геодезической линии

$$M^2(A) = \left(\frac{\partial A}{\partial B_1}\right)^2 K(B_1 B_1) + \left(\frac{\partial A}{\partial B_2}\right)^2 K(B_2 B_2) + \left(\frac{\partial A}{\partial L_1}\right)^2 K(L_1 L_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial A}{\partial L_2} \right)^2 K(L_2 L_2) + 2 \frac{\partial A}{\partial B_1} \frac{\partial A}{\partial B_2} K(B_1 B_2) + 2 \frac{\partial A}{\partial B_1} \frac{\partial A}{\partial L_1} K(B_1 L_1) + \\
& + 2 \frac{\partial A}{\partial B_1} \frac{\partial A}{\partial L_2} K(B_1 L_2) + 2 \frac{\partial A}{\partial B_2} \frac{\partial A}{\partial L_1} K(B_2 L_1) + \\
& 2 \frac{\partial A}{\partial B_2} \frac{\partial A}{\partial L_2} K(B_2 L_2) + 2 \frac{\partial A}{\partial L_1} \frac{\partial A}{\partial L_2} K(L_1 L_2). \tag{2.11.11}
\end{aligned}$$

Производные азимута по координатам (5.2.5) даны в 5-ой главе. Напишем упрощенное выражение для ошибки азимута

$$\begin{aligned}
M^2(A) &= \frac{a^2}{s^2} \sin^2 A_{21} [K(B_1 B_1) + K(B_2 B_2) - 2K(B_1 B_2)] + \\
& + \frac{a^2}{s^2} \cos^2 A_{21} \cos^2 B_2 [K(L_1 L_1) + K(L_2 L_2) - 2K(L_1 L_2)] - \\
& 2 \frac{a^2}{s^2} \cos B_2 \sin A_{21} \cos A_{21} [K(B_1 L_1) - K(B_1 L_2) + K(B_2 L_2)].
\end{aligned}$$

Здесь средняя квадратическая ошибка $M(A)$ выражена в тех же единицах, что и корреляционные моменты K .

Взаимное положение двух пунктов характеризуется продольным и поперечным сдвигом. Средняя квадратическая ошибка взаимного положения в продольном направлении равна ошибке длины геодезической линии,

$$M_{\text{прод}} = M(s), \tag{2.11.13}$$

и следовательно, вычисляется по формуле (2.11.8) или (2.11.10).

Чтобы получить среднюю квадратическую ошибку взаимного положения в поперечном направлении, надо ошибку азимута, вычисленную по формуле (2.11.11) или (2.11.12) и выраженную в радианной мере, умножить на расстояние

$$M_{\text{поп}} = sM(A). \tag{2.11.14}$$

Среднюю квадратическую ошибку уравненного горизонтального угла

$$\beta_{213} = f(B_1 L_1, B_2, L_2, B_3, L_3) \tag{2.11.15}$$

напишем в общем виде, памятуя, что частные производные угла по координатам равны коэффициентам уравнений поправок угла,

$$\begin{aligned}
M^2(\beta_{213}) &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial B_1} \right)^2 K(B_1 B_1) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial L_1} \right)^2 K(L_1 L_1) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial B_2} \right)^2 K(B_2 B_2) + \\
& + \left(\frac{\partial \beta}{\partial L_2} \right)^2 K(L_2 L_2) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial B_3} \right)^2 K(B_3 B_3) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial L_3} \right)^2 K(L_3 L_3) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_1} \frac{\partial \beta}{\partial L_1} K(B_1 L_1) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_1} \frac{\partial \beta}{\partial B_2} K(B_1 B_2) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_1} \frac{\partial \beta}{\partial L_2} K(B_1 L_2) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_1} \frac{\partial \beta}{\partial B_3} K(B_1 B_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_1} \frac{\partial \beta}{\partial L_3} K(B_1 L_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial L_1} \frac{\partial \beta}{\partial B_2} K(L_1 B_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial L_1} \frac{\partial \beta}{\partial L_2} K(L_1 L_2) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial L_1} \frac{\partial \beta}{\partial B_3} K(L_1 B_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial L_1} \frac{\partial \beta}{\partial L_3} K(L_1 L_3) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_2} \frac{\partial \beta}{\partial L_2} K(B_2 L_2) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_2} \frac{\partial \beta}{\partial B_3} K(B_2 B_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_2} \frac{\partial \beta}{\partial L_3} K(B_2 L_3) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial L_2} \frac{\partial \beta}{\partial B_3} K(L_2 B_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial L_2} \frac{\partial \beta}{\partial L_3} K(L_2 L_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial B_3} \frac{\partial \beta}{\partial L_3} K(B_3 L_3). \quad (2.11.16)
\end{aligned}$$

Глава 3

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ

3.1. МЕТОДЫ РАЗВИТИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Современная государственная геодезическая сеть создавалась в течение многих десятилетий. За эти годы менялись геодезические средства, а вместе с ними и методы создания сетей [9].

Большая часть сетей в б. СССР развита методом триангуляции. Нередко и сейчас, по традиции, ГГС СССР называют триангуляционной сетью или просто триангуляцией, хотя это уже не соответствует действительности.

В современных сетях триангуляции, как правило, измерены все углы треугольников. Через каждые 100—200 км, на пунктах Лапласа, определены астрономические азимуты, широты и долготы, а также измерены базисные стороны светодальномерами. До появления светодальномеров измеряли обычно базисы в базисных сетях и по ним вычисляли выходные стороны.

Одним из важных достоинств сплошных триангуляционных сетей является то, что в них выполняется большое количество избыточных измерений. Благодаря этому обеспечивается довольно надежный контроль результатов измерений до общего уравнивания ГГС.

Метод триангуляции широко использовался как для создания астрономо-геодезической сети, так и для сетей сгущения.

Полигонометрия, как метод развития сетей, известна столь же давно как и триангуляция, но широкое применение в государственных сетях получила лишь после разработки свето- и радиодальномеров.

В полигонометрических ходах измеряют стороны и, как правило, по два угла (левый и правый) на большинстве пунктов, поэтому в ходах, в отличие от сетей триангуляции, мало избыточных измерений. Не редки случаи, когда грубые ошибки линейных измерений удавалось обнаружить лишь на стадии уравнивания.

Слабость полевых контролей является существенным недостатком полигонометрии высших классов. Видимо, не случайно, что в «Основных положениях 1954—61 гг.» [14] не были четко сфор-

мулированы требования к полигонометрии 1 класса. Схема построения сетей полигонометрии 1 класса была конкретизирована позже, в «Инструкции 1976 г.» [18], но, вероятно, из-за отмеченного недостатка этого метода эта схема на практике не нашла широкого распространения.

Наиболее точная полигонометрия была реализована в виде траверсов протяженностью в несколько сотен и тысяч километров для задания масштаба в космической триангуляции. В траверсах через каждые 100—200 км определены пункты Лапласа и проложены они в основном по пунктам триангуляции. Сейчас они уже утратили свою первоначальную роль «космических» траверсов и являются частью астрономо-геодезической сети.

Большинство остальных сетей полигонометрии постепенно были перекрыты сетями триангуляции. Конечно, сами результаты измерений в полигонометрии 1—2 классов не утратили своего значения.

Метод полигонометрии нашел очень широкое распространение в сетях сгущения, особенно при геодезическом обеспечении крупномасштабных съемок. Представляется, что он будет более эффективным, чем триангуляция, при восстановлении пунктов астрономо-геодезической сети, когда достаточно прокладывать хода с двумя-тремя сторонами. В таких ходах контроль осуществляется достаточно надежно.

Трилатерация при развитии государственной геодезической сети применялась довольно ограниченно, в основном, для распространения координатной основы на удаленные острова и для обеспечения крупномасштабных съемок [19]. Процент пунктов трилатерации в АГС очень мал.

Методами триангуляции и полигонометрии во всех странах, в том числе и в СССР, развиты геодезические сети в референцных системах координат.

Резко повысить точность государственной геодезической сети позволили методы космической геодезии [1].

Первым из них по времени стал метод космической триангуляции, базирующийся на фотографических наблюдениях спутников на фоне звезд. Сейчас он во многом уступает доплеровским методам, но одним из его важных преимуществ остается то, что фотографические наблюдения в отличие от доплеровских позволяют задавать плоскость начального меридиана, соответствующую звездным системам координат, т. е. решать ту же задачу, которая традиционно решается астрономическими методами в АГС.

Доплеровские методы космической геодезии позволили создавать космические геодезические сети, как самостоятельные построения, в общеземной системе координат. Эти методы совместно с методом спутниковой альтиметрии обеспечили существенное повышение точности моделей гравитационного поля Земли, что, в свою очередь, привело к повышению точности результатов, получаемых традиционными методами геодезии.

Современные доплеровские методы позволяют получать не только координаты пунктов в общеземной системе. Одновременные наблюдения одних и тех же спутников дают возможность определять с высокой точностью разности координат, т. е. создавать космические геодезические сети сгущения.

Таким образом, традиционные методы триангуляции и полигонометрии и новые методы космической геодезии позволили создать АГС и КГС, как самостоятельные построения в референционной и общеземной системах координат, которые необходимо уравнивать совместно, как составные части государственной геодезической сети.

3.2. АСТРОНОМО-ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ

В государственной геодезической сети принято выделять астрономо-геодезическую сеть и геодезические сети сгущения. Само это разделение носит условный характер, и в разное время в термин астрономо-геодезическая сеть вкладывалось разное содержание. Однако и прежде и теперь астрономо-геодезической сетью называют такое самостоятельное построение, схема и методы уравнивания которого позволяют распространить референционную систему координат на всю страну.

Первоначально схемой построения ГГС роль астрономо-геодезической сети отводилась рядам 1 класса. На пересечениях рядов, т. е. в вершинах полигонов 1 класса, располагали парные пункты Лапласа, на которых определялись астрономические азимуты, широты и долготы и строились базисные сети.

Сети 2—4 класса выполняли роль сетей сгущения. При уравнивании сетей сгущения за исходные принимались пункты сетей высшего класса.

Такая схема построения позволила с наименьшими затратами сил и времени распространить единую координатную основу и связать сети, развитые в местных системах.

По мере развития сетей 2 класса внутри полигонов 1 класса возникла необходимость локализации ошибок угловых измерений. Для этого стали создавать пункты Лапласа внутри сетей 2 класса. Но поскольку сети 1 класса были уже уравнены, сети 2 класса, несмотря на наличие в них астрономических и линейных измерений, не могли выполнить роль астрономо-геодезической сети.

Исследование построений 1 и 2 класса показало, что вставка сетей в уравненный каркас полигонов 1 класса приводит при последующем уравнивании к неоправданно большим поправкам (а по сути — искажениям) в углы треугольников 2 класса, особенно вблизи вершин полигонов.

Кроме того было установлено, что точность передачи координат по сетям 2 класса выше, чем по полигонам 1 класса, хотя углы в треугольниках 1 класса измерены точнее. Это, естественно, подводило к выводу о том, что при очередном переуравнивании

ГГС необходимо в качестве астрономо-геодезической сети принять построения 1 и 2 классов.

На основании такого вывода в настоящее время к астрономо-геодезической сети относят следующие построения:

— ряды триангуляции 1 класса, проложенные по программам и схемам 1924 и 1928 гг.;

— ряды триангуляции 1 класса, проложенные по «Основным положениям о построении государственной опорной геодезической сети СССР» 1939 г. [11];

— ряды и сети триангуляции 1 класса, развитые по проекту «Положения о государственной геодезической сети СССР» 1948 г.;

— ряды триангуляции 1 класса и сети триангуляции и полигонометрии 1 и 2 классов, развитые по «Основным положениям о государственной геодезической сети СССР» 1954—1961 гг.;

— сети полигонометрии 1 и 2 классов, развитые в соответствии с «Инструкцией по полигонометрии и трилатерации» 1976 г.

В любой сети, как самостоятельном построении, важной проблемой является задание масштаба и положений начального геодезического меридиана и малой оси эллипсоида.

Чтобы правильно задать начальный меридиан, в АГС определяют астрономические долготы на пунктах Лапласа, точность которых зависит от точности основных долготных пунктов. На положение малой оси эллипсоида непосредственно влияют все астрономические азимуты, широты и долготы. Масштаб в АГС задается линейными измерениями.

3.3. ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЕ СЕТИ И КАРТЫ

Для построения геодезических сетей в референчных и общеземных системах координат требуются данные о гравитационном поле Земли. Эти данные необходимы для определения нормальных высот точными методами геометрического нивелирования, для астрономо-гравиметрического нивелирования, для вычисления уклонений отвесных линий, для учета возмущений орбит геодезических спутников и для решения других задач геодезии.

К данным о гравитационном поле Земли, в частности, относятся ускорения силы тяжести и аномалии этих ускорений в отдельных точках, средние аномалии силы тяжести для площадей (трапеций) разных размеров и модели гравитационного поля Земли (модели ГПЗ) или отдельных ее регионов (локальные модели ГПЗ).

Основным источником для получения данных о ГПЗ на территории страны для целей развития ГГС служат гравиметрические карты, исходной основой для которых являются гравиметрические сети.

Предшественниками современных сетей являлись отдельные гравиметрические пункты, определение которых на территории страны началось давно. В довоенные и послевоенные годы было издано несколько каталогов таких пунктов. Измерения, приведенные в этих каталогах, позволили выполнить редуцирование результатов геоде-

зических измерений на поверхность эллипсоида и тем самым отказаться от метода развертывания и перейти к методу проецирования.

Впервые в стране метод проектирования был реализован на большой территории при уравнивании 87-и полигонов I класса в 1942—46 гг. В инструкции [12] по этому уравниванию указывалось, что все измерения «должны быть отнесены к поверхности принятого референц-эллипсоида посредством проектирования их нормальными к этой поверхности».

Начало создания современной гравиметрической сети приходится на первую половину 60-х годов.

Государственная гравиметрическая сеть б. СССР предназначена для распространения единой гравиметрической системы на всю территорию страны. До 1975 года в СССР гравиметрические измерения выполняли в Потсдамской системе. Значение силы тяжести в исходном пункте этой системы — в Потсдаме, было получено обратными маятниками в 1898—1904 гг. В последующем на основе абсолютных измерений это значение было исправлено поправкой «—14 мГал». Это исправленное значение принято для Гравиметрической системы 1971 года, которая введена в СССР с 1 января 1975 года.

Для решения практических задач по созданию государственной геодезической сети используются не пункты гравиметрической сети, а гравиметрические карты, созданные на их основе.

В разные годы карты создавались в разных масштабах, с разными сечениями изоаномал и разной точности. В соответствии с современными положениями гравиметрические карты создаются масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 200 000.

Карта масштаба 1 : 1 000 000 создана на всю территорию страны. Решается задача по завершению создания карты масштаба 1 : 200 000. В отдельных регионах страны выполнены гравиметрические съемки масштаба 1 : 50 000, но процент их мал, поэтому в ближайшие десятилетия основной гравиметрической картой для развития государственной геодезической сети будет карта масштаба 1 : 200 000. При создании этой карты по современным положениям выполняются гравиметрические съемки с плотностью 1 пункт на 4—9 кв. км.

Как уже отмечалось, гравиметрические съемки масштаба 1 : 200 000 завершены пока не на всей территории страны. Их завершение позволит повысить точность государственной геодезической сети. Изданные же карты уже сейчас широко используются для составления карт уклонов отвесных линий и карт высот квазигеоида над эллипсоидом Красовского и общеземным эллипсоидом.

Для вычисления высот квазигеоида и уклонов отвесных линий необходимы сравнительно детальные данные о гравитационном поле за пределами страны. К таким данным, в частности, относятся средние аномалии силы тяжести для трапеций 5' × 7,5', 10' × 15' и более крупного размера. Для получения этих данных используются

зарубежные карты разных масштабов и точности. Приходится считаться и с тем, что в некоторых странах гравиметрические карты еще не создавались.

Ранее уже упоминалось о моделях гравитационного поля Земли. Они играют большую роль в создании ГГС. Для их получения используются гравиметрические карты, каталоги, составленные по материалам наземных и морских гравиметрических съемок, результаты спутниковых наблюдений, в том числе спутниковой альтиметрии. В настоящее время получение моделей ГПЗ становится составной частью уравнивания космических геодезических сетей.

3.4. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

Уклонения отвесных линий широко используются в геодезической практике, в частности, для пересчета астрономических азимутов, определяемых средствами гироскопического ориентирования, в геодезические азимуты. При уравнивании ГГС они нужны на всех пунктах для редуцирования углов на поверхность эллипсоида.

Уклонением отвесной линии называют угол между отвесной линией и нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке. Положение нормали соответствует геодезическим координатам точки. В одной и той же точке для разных эллипсоидов или разных систем координат нормали разные. Следовательно, для уклонений отвесных линий должна указываться система координат.

Проекции уклонения отвесной линии на плоскости меридиана, первого вертикала или произвольного вертикала с азимутом A , называют составляющими уклонения отвесной линии соответственно в меридиане, в первом вертикале, в вертикале с азимутом A . Приведем сводку некоторых формул:

$$\xi = u \cos a;$$

$$\eta = u \sin a;$$

$$\vartheta = u \cos (A - a); \quad (3.4.1)$$

$$u^2 = \xi^2 + \eta^2;$$

$$\vartheta = \xi \cos A + \eta \sin A,$$

где u — уклонение отвесной линии; a — азимут вертикала уклонения отвесной линии; ξ — составляющая в меридиане; η — составляющая в первом вертикале; ϑ — составляющая в вертикале с азимутом A .

Обычно определяют составляющие уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале, а само уклонение отвесной линии и его составляющие в других вертикалах вычисляют. Из формул (1.3.1) следует, что, если составляющие ξ и η определены с одинаковой точностью, то и само уклонение отвесной линии и остальные составляющие получаются с той же точностью, т. е.

$$m_{\xi} = m_{\eta} = m_u = m_{\vartheta}.$$

К числу ставших уже традиционными относятся следующие способы определения уклонений отвесных линий: астрономо-геодезический, гравиметрический и астрономо-гравиметрический. Для вычисления уклонений отвесных линий на Мировом океане в последнее время успешно используют результаты спутниковой альтиметрии.

В астрономо-геодезическом методе определяют астрономические и геодезические координаты точек. Составляющие уклонения отвесной линии вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi - B; \\ \eta &= (\lambda - L) \cos B, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

где φ , λ — астрономические координаты; B , L — геодезические координаты.

По этим формулам уклонения отвесной линии вычисляются в той же системе координат (референцной или общеземной), в какой даны геодезические координаты.

В ГГС астрономо-геодезический метод применяется лишь для пунктов Лапласа. Составить на его основе карты уклонений отвесных линий для всей ГГС нельзя.

Гравиметрический метод основан на использовании данных о гравитационном поле Земли. На практике применяется несколько вариантов этого метода. Здесь приведем лишь формулы Венинг—Мейнеса [4]:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g \cdot Q \cos A dA d\psi; \\ \eta &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g \cdot Q \sin A dA d\psi, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

где Δg — аномалии в свободном воздухе в текущих точках; A — азимут направления на текущую точку; ψ — сферическое расстояние от определяемой до текущей точки; Q — функция Венинг—Мейнеса.

Функция Венинг—Мейнеса вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\rho''}{2\gamma} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

где γ — значение нормальной силы тяжести.

По этим формулам уклонения отвеса вычисляются в общеземной системе координат. Из них следует, что необходимо знать аномалии силы тяжести по всей Земле. Детальность этих данных зависит от расстояния, т. е. от радиуса интегрирования. В непосредственной

близости от точки (в центральной зоне) аномалии силы тяжести определяют по картам. За пределами центральной зоны в радиусе до 1000—3000 км используются средние аномалии по трапециям разных размеров. Наконец, влияние остальной части Земли достаточно точно учитывается по моделям ГПЗ.

Такова лишь общая схема гравиметрического метода. Конкретные методики вычислений, а соответственно и точность уклонений отвеса, зависят от имеющейся гравиметрической информации.

На значительную часть территории страны современная информация позволяет составлять карты уклонений отвесных линий со средней квадратической ошибкой 0,5—1" и вычислять уклонения отвеса в отдельных точках с точностью 0,3". Однако на ряд соседних зарубежных территорий такой информации либо совсем нет, либо она низкой точности. Поэтому на значительной части территории, особенно в южных районах страны, гравиметрический метод не всегда обеспечивает требуемую точность.

В значительно меньшей степени недостаток информации о дальних зонах влияет в астрономо-гравиметрическом методе. В этом методе по гравиметрическим данным, в частности, по формулам (3.4.3), учитывается влияние зоны сравнительно небольшого радиуса r_0 . Влияние остальной части Земли за пределами этой зоны учитывается с помощью уклонений отвесных линий, полученных астрономо-геодезическим методом на пунктах Лапласа. Благодаря этому уклонения отвеса получают обычно в референцной системе, но их можно получить и в общеземной системе, если предварительно пересчитать в эту систему уклонения на пунктах Лапласа.

Для вычисления уклонений отвеса радиус интегрирования в (3.4.3) должен быть не менее чем 1,5—2 расстояния между пунктами Лапласа [17]. Следовательно, и в астрономо-гравиметрическом методе не полностью решается вопрос о картах уклонений отвесных линий для некоторой части приграничных территорий.

При уравнивании ГГС уклонения отвесных линий нужны в основном для редуцирования горизонтальных направлений. Редукции в направления вычисляются по формуле

$$\Delta N = (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{tg} \alpha,$$

где A — азимут направления; α — вертикальный угол направления.

Из этой формулы следует, что требования к точности уклонений отвесных линий на равнине, т. е. при малых вертикальных углах в сетях, не велики. В горных районах их надо знать точнее. Но современные возможности получения уклонений отвеса как раз противоположные.

На ряд районов страны, в основном равнинных, уже имеются карты уклонений отвесных линий с точностью 1". Кроме того с несколько меньшей точностью вычислены уклонения отвеса по средним аномалиям на большую часть страны. Ошибки же вычисления в ряде горных территорий достигают 5—7". Таким образом, проблему уклонений отвесных линий в интересах развития ГГС нельзя считать в настоящее время решенной полностью.

3.5. ВЫСОТЫ КВАЗИГЕОИДА

Проблема получения высот квазигеоида по существу является проблемой получения геодезических координат пунктов ГГС. Действительно, плановые координаты, например, геодезические широты и долготы, можно получить непосредственно геодезическими методами. Для геодезических высот традиционных методов непосредственного определения нет. Средства космической геодезии позволяют получать все три координаты — геодезические широты, долготы и высоты, но абсолютное большинство пунктов ГГС пока определено традиционными методами.

Проблема третьей координаты — геодезической высоты, в настоящее время решается следующим образом. На каждом пункте ГГС определяется его нормальная высота. Геодезическая высота вычисляется по формуле

$$H = H^{\nu} + \zeta, \quad (3.5.1)$$

где H^{ν} — нормальная высота; ζ — высота квазигеоида над эллипсоидом.

Следовательно, для получения геодезических высот в референционной системе нужны высоты квазигеоида над эллипсоидом Красовского, а для высот в общеземной системе — высоты квазигеоида над общеземным эллипсоидом.

Традиционными являются три метода получения высот квазигеоида — астрономическое нивелирование, астрономо-гравиметрическое нивелирование и гравиметрический метод.

При астрономическом нивелировании определяют астрономические координаты пунктов и разности геодезических координат, а по ним вычисляют уклонения отвесных линий. Разности высот квазигеоида вычисляются по формуле

$$\zeta_2 - \zeta_1 = -D_{12} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\rho''}, \quad (3.5.2)$$

где D_{12} — расстояние между пунктами; ϑ_1, ϑ_2 — составляющие уклонений отвесных линий в вертикале с азимутом A_{12} .

Для получения составляющих уклонения отвеса необходимо знать астрономические и геодезические координаты обоих пунктов. С ними можно вычислить составляющие в меридиане и в первом вертикале. С составляющими уклонений отвесных линий, имея в виду (3.4.1), выражение (3.5.2) преобразуется к следующему виду:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = -\frac{D_{12}}{2\rho''} \{ (\xi_1 + \xi_2) \cos A_{12} + (\eta_1 + \eta_2) \sin A_{12} \}, \quad (3.5.3)$$

где A_{12} — азимут направления с пункта 1 на пункт 2.

Выражения (3.5.2) и (3.5.3) верны для случая, когда уклонения отвесных линий между астропунктами меняются линейно. В реальных АГС, где расстояния между астропунктами составляют десятки и сотни километров, такое условие не выполняется, поэтому метод

астрономического нивелирования в государственной геодезической сети не применяется.

В гравиметрическом методе вычисляются не разности, а собственно высоты квазигеоида в общеземной системе координат по формуле

$$\zeta = \frac{R}{2\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta g F(\psi) dA d\psi, \quad (3.5.4)$$

где R — радиус земного шара; γ — среднее значение нормальной силы тяжести; Ψ — сферическое расстояние от определяемой до текущей точки; A — азимут направления на текущую точку; $F(\Psi)$ — функция сферического расстояния.

Для вычисления по этой формуле необходимы гравиметрические данные по всей Земле, в том числе и детальные данные, которые с требуемой точностью можно получить лишь по гравиметрическим картам. Следовательно, и в гравиметрическом методе вычисления высот квазигеоида встает та же проблема недостатка гравиметрических данных на некоторых зарубежных территориях, что и при вычислении уклонов отвесных линий гравиметрическим методом.

В значительной степени эта проблема решается в методе астрономо-гравиметрического нивелирования.

В этом методе вычисляются разности высот квазигеоида. Для их вычисления необходимы астрономические и геодезические координаты пар пунктов и гравиметрические данные, но для области значительно меньшего размера, чем в гравиметрическом методе.

Разности высот квазигеоида в референционной системе вычисляются по формуле астрономо-гравиметрического нивелирования:

$$\begin{aligned} \zeta_2 - \zeta_1 = & -\frac{D_{12}}{2\rho''} \left\{ (\varphi_1 - B_1 + \varphi_2 - B_2) \cos A_{12} + [(\lambda_1 - L_1) \cos B_1 + \right. \\ & \left. + (\lambda_2 - L_2) \cos B_2] \sin A_{12} \right\} + \left\{ (N_2 - N_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} (\Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Перепишем это выражение с учетом формул (3.4.2):

$$\begin{aligned} \zeta_2 - \zeta_1 = & -\frac{D_{12}}{2\rho''} \left\{ (\xi_1 + \xi_2) \cos A_{12} + (\eta_1 + \eta_2) \sin A_{12} \right\} + \\ & + \left\{ (N_2 - N_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} (\Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Первый член в правой части этого выражения является формулой (3.5.3) астрономического нивелирования. Второй член называют гравиметрической поправкой к астрономическому нивелированию:

$$R = (N_2 - N_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} (\Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2). \quad (3.5.7)$$

В этом выражении через N_1 и N_2 обозначены высоты квазигеоида, которые вычисляются по формуле (3.5.4). При этом учитываются

гравиметрические данные не по всей Земле, а только в радиусе, равном полутора-двум расстояниям между астропунктами [17].

Через $\Delta\vartheta_1$ и $\Delta\vartheta_2$ в (3.5.7) обозначены уклонения отвесной линии, вычисляемые по формуле (3.4.3) с теми же гравиметрическими данными, что и N_1 и N_2 .

Астрономо-гравиметрическое нивелирование, особенно в сочетании с методами космической геодезии и гравиметрическим методом, позволяет решить проблему высот квазигеоида, а следовательно и геодезических высот, на большей части территории страны. Однако отсутствие надежных гравиметрических данных на ряд зарубежных территорий не позволяет даже с помощью астрономо-гравиметрического нивелирования вычислять достаточно точно высоты квазигеоида хотя и на узкой, но довольно протяженной приграничной территории.

При дальнейшем совершенствовании ГГС потребуется в этой зоне либо определять дополнительные астропункты (сократить расстояния между ними), либо определять пункты относительными методами космической геодезии до такой плотности, чтобы можно было уверенно интерполировать между ними высоты квазигеоида.

3.6. СИСТЕМЫ ВЫСОТ

В геодезии рассматривается несколько систем высот. К их числу относятся ортометрические, нормальные, динамические и геодезические высоты.

Ортометрической высотой точки называется расстояние от этой точки до геоида. Нормальные высоты отсчитываются от квазигеоида, а геодезические — от эллипсоида.

Сущность метода определения ортометрических высот может быть выражена формулой

$$H_A^g = \frac{1}{g_m} \int_0^A g dh, \quad (3.6.1)$$

где H_A^g — ортометрическая высота точки A ; g_m — среднее ускорение силы тяжести на отрезке от поверхности геоида до точки A ; dh — значения превышений, измеренные нивелиром в точках хода от нуля футштока 0 до точки A (элементарные перемещения по высоте); g — ускорения силы тяжести в точках хода.

Выполнить измерения, необходимые для получения точных значений g_m , нельзя, поэтому в практике геодезических работ ортометрические высоты в настоящее время не используются.

Формула нормальных высот имеет вид:

$$H_A^\gamma = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^A g dh. \quad (3.6.2)$$

В этой формуле среднее значение нормальной силы тяжести вычисляется по формуле приведения в свободном воздухе [4]

$$\gamma_m = \gamma_0 - 0,308 \cdot \frac{1}{2} H_{\text{изм}} = \gamma_0 - 0,154 H_{\text{изм}}, \quad (3.6.3)$$

где γ_0 — значение нормальной силы тяжести в точке А; $H_{\text{изм}}$ — измеренное значение высоты точки А.

С учетом формулы (3.6.2) вычисляются высоты пунктов государственной нивелирной сети I и II классов, а также сетей нивелирования III класса в горных районах [16].

Нормальные и геодезические высоты связаны формулой

$$H = H^{\nu} + \zeta, \quad (3.6.4)$$

где ζ — высота квазигеоида над эллипсоидом.

Динамические высоты вычисляются по формуле

$$H_A^d = \frac{1}{\gamma_{\varphi}} \int_0^A g dh, \quad (3.6.5)$$

где γ_{φ} — фиксированное значение нормальной силы тяжести.

В качестве фиксированного значения нормальной силы тяжести принимают либо значение нормальной силы тяжести на широте 45° , либо среднее значение для района работ.

Динамические высоты используются в основном в инженерной геодезии и не применяются при уравнивании государственной геодезической сети. При развитии и уравнивании геодезических сетей используются только нормальные и геодезические высоты.

В разных странах приняты разные системы нормальных высот. В России применяется Балтийская система высот, началом которой является нуль-пункт Кронштадтского футштока.

Балтийская система высот распространяется на всю территорию страны с помощью государственной нивелирной сети I—IV классов. Через определенные промежутки времени нивелирование I класса повторяется и соответственно переуровнивается вся сеть. Каталоги реперов и марок, получаемые в результате такого переуровнивания, задают новую систему нормальных высот, т. е. Балтийскую систему по состоянию на определенную эпоху.

Действующая сейчас Балтийская система 1977 года характеризуется средней квадратической ошибкой передачи высот от Кронштадтского футштока в районы Чукотки и Дальнего Востока, не превышающей нескольких дециметров. Такая точность значительно выше точности взаимного планового положения пунктов в астрономо-геодезической сети.

В государственной геодезической сети определяют нормальные высоты всех пунктов. Значительная часть пунктов получена геометрическим нивелированием. Точность этих пунктов в Балтийской системе, т. е. относительно Кронштадтского футштока, сопоставима с точностью высот в нивелирных сетях I—II класса и почти

совершенно не зависит от измерений в геодезической сети. В связи с этим уравнивание высот геодезических пунктов, полученных геометрическим нивелированием, выполняется независимо от остальных результатов измерений в геодезической сети.

При тригонометрическом нивелировании измеряют вертикальные углы и расстояния. В геодезической сети собственно для этого расстояния не измеряют, их с достаточной точностью вычисляют при предварительной обработке измерений.

В тригонометрическом нивелировании точность высот зависит в основном от точности измерения вертикальных углов, которая, в свою очередь, существенно зависит от расстояний между пунктами. При уравнивании этих высот им назначают веса обратнопропорциональными квадрату расстояния:

$$p_h = \frac{\mu^2}{S^2}, \quad (3.6.6)$$

а передачу высот стремятся выполнить по коротким сторонам.

Вертикальные углы хоть и измеряют, как правило, одновременно с горизонтальными углами, но они практически не зависят друг от друга, поэтому и в этом методе нормальные высоты уравнивают независимо от остальных геодезических измерений.

Строгие методы построения геодезических сетей невозможны без получения геодезических высот. Известный в прошлом метод развертывания по сути дела отличается от современного, более строгого метода проектирования тем, что при развертывании поправки за редуцирование расстояний вычислялись с нормальными высотами, т. е. вычислялись расстояния, приведенные на средний уровень моря, а не на эллипсоид, как это имеет место при проектировании результатов измерений по нормалям.

Для получения геодезических высот большинства пунктов ГГС необходимо знать высоты квазигеоида над эллипсоидом. Высоты квазигеоида получают из астрономо-гравиметрического нивелирования, а для него, как это следует из формулы (3.5.5), необходимо знать плановые координаты, которые, в свою очередь, зависят от геодезических высот. Такая взаимозависимость геодезических высот и плановых координат диктует необходимость их совместного уравнивания, т. е. получения их уравненных значений на основе совместного уравнивания результатов геодезических, астрономических и гравиметрических измерений, выполняемых при создании АГС.

При уравнивании государственной геодезической сети приходится иметь дело с геодезическими высотами, как минимум, в двух системах — в референцной и в общеземной. Высоты в общеземной системе получают гравиметрическим методом, т. е. по формуле (3.5.4), и методами космической геодезии, а проще говоря, перевычисляя прямоугольные координаты X , Y , Z в геодезические B , L , H . Очевидно, что уравнивать геодезические высоты, полученные в результате такого перевычисления, можно только совместно с плановыми координатами.

Таким образом, нормальные высоты геодезических пунктов, получаемые как геометрическим, так и тригонометрическим нивелированием, необходимо уравнивать отдельно от остальных элементов геодезической сети, в том числе от геодезических высот и высот квазигеоида. В то же время без нормальных высот нельзя уравнивать геодезическую сеть, и следовательно, их уравнивание необходимо выполнять заблаговременно, до уравнивания геодезической сети. Геодезические же высоты должны уравниваться совместно с плановыми координатами пунктов.

3.7. ОБЩЕЗЕМНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Общеземными называют такие системы координат, в которых достаточно строго выполняется условие совмещения их начала с центром масс Земли. До появления космической геодезии общеземную систему координат можно было осуществить на практике, лишь используя геодезические и астрономические измерения совместно с гравиметрическими.

Геодезические широты и долготы в общеземной системе можно получить по формулам

$$\begin{aligned} B &= \varphi - \xi; \\ L &= \lambda - \frac{\eta}{\cos B}, \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

где φ , λ — астрономические координаты; ξ , η — составляющие уклонения отвесной линии.

Составляющие уклонения отвеса должны быть известны в общеземной системе. Формулы для этого получены Венинг—Мейнесом еще в начале XX века. Однако для точных вычислений по этим формулам нужны точные гравиметрические данные — детальные гравиметрические съемки на территории, где развивается сеть, и гравиметрические данные по всей поверхности Земли.

Третью координату — геодезическую высоту, можно получить по формуле

$$H = H^g + \zeta. \quad (3.7.2)$$

В этой формуле ζ — высота квазигеоида над общеземным эллипсоидом. Формулы Стокса для ее вычисления известны тоже давно. Но и для них нужны те же гравиметрические данные, что и для формул Венинг—Мейнеса.

К моменту, когда в большинстве стран приступали к созданию современных геодезических сетей, уже имелись гравиметрические данные, но точность их была невысокой. Так, даже точности моделей ГПЗ не хватало для того, чтобы с ошибками в десятки метров получить хотя бы координаты начальных пунктов сетей. В результате этого в большинстве стран начала координатных систем, которые стремились получить как общеземные, не совпадают с центром масс Земли на сотни метров. Такие системы принято называть референсными.

К 1950—60 гг. положение с гравиметрической изученностью территории СССР и земного шара значительно продвинулось. Стало возможным по формулам (3.7.1) и (3.7.2) вычислять координаты пунктов на значительной части территории страны. Ошибки этих координат составляли десятки метров, при этом не столько из-за случайных ошибок астрономических координат, сколько из-за систематических ошибок, связанных с гравиметрической информацией в дальних зонах и с моделями ГПЗ.

Для вычисленных таким образом координат отдельных пунктов в общеземной системе каталоги не издавались, но именно эти координаты задавали общеземную систему. Их использовали для получения параметров перехода от Системы координат 1942 года к общеземной системе. Естественно, что не вставал и вопрос о совместном уравнивании координат пунктов, полученных в разных системах. Методы математической обработки требовались лишь для вычисления параметров перехода.

Не изменились существенно методы математической обработки и в 70—80-х годах, когда общеземную систему стали задавать сперва совместно традиционные и спутниковые методы, а затем только методы космической геодезии.

В эти годы точность общеземной системы повысилась, но еще не было возможности уравнивать совместно астрономо-геодезическую и космическую геодезическую сети, поэтому по-прежнему не было соответствия между раздельно уравненными координатами одних и тех же пунктов в двух системах. Проще говоря, пересчитав с уравненными параметрами уравненные общеземные координаты пункта, нельзя было получить его уравненные координаты в референционной системе. Приходилось считаться с так называемыми «остаточными несогласиями».

Добиться полного соответствия между системами координат и параметрами перехода можно лишь на основе совместного уравнивания результатов измерений, задающих на практике как референционную, так и общеземную системы координат.

3.8. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ГГС СССР

Попытки создания геодезических сетей впервые предпринимаются в России в первой половине XVIII века. Первые же крупные работы по построению сетей, как исходной основы для топографических карт, были начаты К. И. Тернером и В. Я. Струве в 1816 году.

Сети триангуляции того времени делились на три класса. Сеть 1 класса строилась, как правило, в виде полигонов, состоящих из рядов треугольников. Внутри полигонов 1 класса развивались сети 2 класса. На Дальнем Востоке, в Сибири и в Средней Азии прокладывали и ряды 2 класса. Пункты 3 класса определяли засечками.

Схемы построения сети неоднократно уточнялись. Так схемой, принятой в 1910 году, предусматривалось, что полигоны триан-

гуляции 1 класса должны состоять из звеньев протяженностью 300—500 км.

Создание современной астрономо-геодезической сети на обширной территории практической началось в 20-х годах. В 1926 году было принято решение создавать сеть триангуляции 1 класса как астрономо-геодезическую сеть. В 1928 году Ф. Н. Красовский опубликовал работу «Схема и программа государственной триангуляции» [2].

В этой работе Ф. Н. Красовский обосновал, что полигоны 1 класса должны состоять из звеньев длиной около 200 км, периметр полигона не должен превышать 800 км, в узлах полигонов следует определять базисы и пункты Лапласа. Схема развития государственной геодезической сети, предложенная Ф. Н. Красовским, была закреплена инструкцией по триангуляции 1 класса 1928 года и инструкцией по триангуляции 2 класса 1930 года.

В 1939 году в связи с необходимостью создания исходной основы для топографических карт масштаба 1 : 10 000 были утверждены «Основные положения о построении государственной опорной геодезической сети СССР» [11].

В послевоенные годы, а именно, с 1948 года начался переход к построению более точных геодезических сетей. В 1954 году утверждены новые «Основные положения о государственной геодезической сети СССР» [13], включавшие в себя «Основные положения о построении государственной триангуляции СССР». Этими «Основными положениями» были предусмотрены в сетях 2 класса пункты Лапласа и астрономо-гравиметрическое нивелирование.

Таким образом, с этого времени начали производить измерения, которые позволили в последующем рассматривать астрономо-геодезическую сеть, как построение, состоящее не только из сетей 1 класса, но и включающее сети 2 класса. Более того, теперь АГС создается как пространственное построение, в котором, по крайней мере на астропунктах, из уравнивания можно получить три геодезические координаты — широту, долготу и высоту.

«Основные положения 1954 года» уточнялись и конкретизировались в течение последующих семи лет. Эта работа была проделана комиссией под председательством С. Г. Судакова. Новую редакцию стали именовать «Основными положениями 1954—61 гг.». Одновременно с новой редакцией основных положений была разработана «Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР» [15]. По этим основным положениям и инструкции развивалась государственная геодезическая сеть СССР в последние 30—35 лет [9].

В соответствии с «Основными положениями 1954—61 гг.» государственная геодезическая сеть подразделяется на астрономо-геодезическую сеть (сеть 1 класса) и сети сгущения (сети 2—4 классов, а позднее и сети I—II разрядов). И хотя в сетях 2 класса уже тогда были предусмотрены пункты Лапласа, но по ряду причин, в том числе из-за слабой вычислительной техники,

ее не включали в состав АГС. С тех пор появились методы космической геодезии, возросли возможности вычислительных средств. Новые средства и методы изменили не только подход к уравниванию ГГС, но и схему ее построения. Современная государственная геодезическая сеть включает следующие построения:

- астрономо-геодезическую сеть (сети 1 и 2 класса);
- геодезические сети сгущения (сети 3—4 классов и I—II рядов);
- космическую геодезическую сеть;
- космические геодезические сети сгущения.

АГС и КГС являются самостоятельными пространственными построениями и развиты практически независимо одна от другой. АГС по-прежнему предназначена для создания референцной системы координат. С помощью КГС создается общеземная система координат. В целом ГГС предназначена для создания единой координатной основы страны, т. е. для распространения как референцной, так и общеземной систем координат. Этим особенностям современной ГГС должны соответствовать и методы ее уравнивания.

В уравнивании АГС так же, как и в ее развитии, можно выделить несколько значительных этапов. Первоначально астрономо-геодезические сети отдельных регионов уравнивались в своих, местных системах координат (в Пулковской, Ташкентской, Свободненской, Кольчугинской и других).

Крупная работа по уравниванию АГС в Европейской части СССР была выполнена в 1931—32 годах. Эта сеть состояла из 47 звеньев, составлявших 14 полигонов. Вычислительными средствами того времени даже это количество полигонов уравнивать было нелегко, поэтому из 14 полигонов для уравнивания было образовано 8 полигонов. Уравнивание выполнялось на эллипсоиде Бесселя. В те же годы были уравнены 8 звеньев Уральского полигона.

Впервые единая координатная основа была получена в результате уравнивания 87-и полигонов 1 класса. Эта крупная работа была выполнена в соответствии с «Инструкцией по уравниванию астрономо-геодезической сети СССР», утвержденной в 1943 году [12].

Уравнивание блока «87 полигонов» многое изменило в ГГС СССР. Была создана новая референцная система — Система координат 1942 года, с новыми координатами начального пункта Пулково. В этой системе были получены координаты пунктов сетей, ранее развитых в местных системах, и устранены большие ошибки взаимного положения пунктов относительно Пулково. Уравнивание выполнено на эллипсоиде Красовского. Впервые в широком масштабе был применен многогрупповой метод уравнивания, разработанный И. Ю. Пранис-Праневичем в 1935—36 гг. [7].

Уравнивание блока «87 полигонов» породило и новые проблемы. Дело в том, что к тому времени сеть 1 класса покрывала не всю территорию страны. На остальной территории продолжали развиваться сети 1 и 2 классов. Многократно переуравнивать

старую сеть совместно с новыми построениями и каждый раз заново составлять каталоги было невозможно. При уравнивании новых сетей приходилось принимать за твердые координаты пунктов на границах блока «87 полигонов», т. е. остальные сети уравнивать как-бы нанизыванием.

Методом нанизывания была уравнена большая сеть — блок «Север», которая послужила исходной основой для уравнивания (последующего нанизывания) блока «Восток».

Выполненное в 60-х годах экспериментальное уравнивание блоков «87 полигонов» и «Север» показало, что только из-за нанизывания ошибки координат могут превосходить 10 метров. Кроме того результаты многих исследований показали, что к существенным искажениям элементов сети, прежде всего углов, приводит вставка сети 2 класса в ранее уравненные полигоны 1 класса. Превышенный опыт был учтен в конце 70-х годов при выработке основных положений по уравниванию астрономо-геодезической сети.

Впервые в качестве АГС рассматривались сети 1 и 2 классов, т. е. впервые была поставлена задача по их совместному уравниванию.

С учетом возможностей современных ЭВМ получил дальнейшее развитие метод многогруппового уравнивания.

В конце 70-х годов еще отсутствует концепция совместного уравнивания АГС и КГС. С этим, видимо, был связан и выбор пути уравнивания АГС, как пространственного построения.

Как уже отмечалось, геодезические высоты и плановые координаты взаимосвязаны, т. е. и те и другие можно получить лишь из совместного уравнивания результатов геодезических, астрономических и гравиметрических измерений.

Для решения этой задачи был выбран итерационный путь. Сущность его заключается в том, что с предварительными координатами составляется карта высот квазигеоида; с этой картой уравниваются плановые координаты; с ними снова уточняется карта, затем снова уравниваются координаты и т. д. Основным недостатком этого пути является то, что ковариационную матрицу трех координат пунктов АГС нельзя получить непосредственно из уравнивания. С эволюцией методов развития геодезических сетей и гравиметрических карт связаны методы редуцирования результатов измерений на поверхности относимости — метод развертывания и метод проектирования.

В методе развертывания углы и расстояния редуцируются на геоид, т. е. по отвесным линиям. Это, в частности, означает, что в углы не вводятся поправки за уклонения отвесных линий, а в расстояниях учитываются поправки только за приведение к среднему уровню моря. В методе проектирования углы и расстояния редуцируются на эллипсоид. Углы исправляются поправками за уклонения отвесных линий, а расстояния — поправками за приведение к среднему уровню моря и за высоту квазигеоида.

Для вычисления уклонений отвеса и высот квазигеоида нужны гравиметрические данные. Впервые такие данные обеспечили при-

емлемую точность редуцирования при уравнивании 87-и полигонов. Важным этапом в решении этого вопроса явилась последующая разработка «Наставления по вычислению гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида» [17].

На основе этого наставления по мере создания новых гравиметрических карт несколько раз уточнялись карты высот квазигеоида над общеземным эллипсоидом и эллипсоидом Красовского. На большей части территории страны точность карт высот геоида к концу 80-х годов характеризовалась средней квадратической ошибкой 2 м. И лишь для отдельных участков ГГС еще и сегодня вопрос точности высот квазигеоида и уклонений отвеса является по-прежнему злободневным.

Как уже отмечалось, в конце 70-х годов еще не ставился вопрос об уравнивании КГС и КГСС. Однако уже через несколько лет стало очевидно, что в КГС, уравненной как самостоятельное построение, обеспечивается высокая точность координат пунктов в общеземной системе. К концу 80-х годов появилась возможность включить в уравнивание и измерения, выполненные в КГСС.

Таким образом, к концу 80-х годов в повестку дня однозначно был поставлен вопрос о совместном уравнивании астрономо-геодезической сети, космической геодезической сети и космической геодезической сети сгущения, как составных частей государственной геодезической сети.

Глава 4

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ УРАВНИВАНИЯ АГС

4.1. ОБЩАЯ СХЕМА УРАВНИВАНИЯ ГГС

Астрономо-геодезическая сеть создана как самостоятельное геодезическое построение и вместе с тем она является составной частью государственной геодезической сети, которая включает также космическую геодезическую сеть, космические геодезические сети сгущения и геодезические сети сгущения. Это означает, что методы математической обработки и информация об измерениях должны позволять уравнивать ее как единое целое построение отдельно от других построений, как самостоятельное построение совместно с КГС и КГСС, обеспечивать ее использование в качестве основы для уравнивания геодезических сетей сгущения.

Кроме того, методы математической обработки должны обеспечивать уравнивание отдельных участков АГС. Уравнивание АГС по участкам выполняется, в частности, для контроля результатов измерений. Задачу по переуравниванию отдельных участков придется

решать и после общего уравнивания ГГС, когда будет выполняться модернизация участков путем дополнительных геодезических, астрономических и гравиметрических измерений [20].

Естественно, что общая схема уравнивания всей ГГС, в том числе и схемы уравнивания АГС, будут зависеть от конкретных условий, в частности, от возможностей вычислительных средств и состояния банков геодезической информации. В настоящее же время наиболее оптимальной представляется схема с выделением следующих этапов уравнивания:

- уравнивание АГС, КГС и КГСС, как самостоятельных построений, независимо друг от друга;
- совместное уравнивание АГС, КГС и КГСС;
- окончательное уравнивание АГС, КГС и КГСС (например, обратный ход);
- уравнивание геодезических сетей сгущения;
- каталогизация ГГС.

Уравнивание АГС, как самостоятельного построения (на первом этапе), может завершаться разными результатами — получением координат всех ее пунктов, или части пунктов, например, совмещенных с пунктами КГС и КГСС, или получением нормальных уравнений. Но в любом случае в качестве необходимых независимых параметров должны быть приняты, как минимум, три координаты пунктов, например, геодезические широты, долготы и высоты. Подробнее вопросы уравнивания АГС как самостоятельного построения будут рассмотрены в последующих главах, здесь лишь отметим, что в уравнивание должны включаться все геодезические, астрономические и гравиметрические измерения, без которых нельзя уравнивать АГС.

Современная АГС создавалась десятилетиями. Часть пунктов утрачена. Однако измерения, выполненные на этих пунктах, не утратили своего значения в создании референцной системы координат. Их, естественно, включают в уравнивание наряду с сохранившимися пунктами, но уравненные координаты утраченных пунктов в каталоги не помещают.

Измерения в АГС и ГСС выполняются непрерывно, происходит постоянное пополнение банка данных. Это обстоятельство необходимо учитывать при планировании этапов уравнивания. В уравнивание АГС, как самостоятельного построения, надо включать всю информацию об измерениях, которая готова к моменту начала уравнивания.

Часть измерений, которые появятся позже, можно использовать на стадии совместного уравнивания сетей. Для примера можно указать траверсы полигонометрии. Конечно, в совместное уравнивание сетей можно будет включить только те траверсы, которые связывают пункты, включенные в это совместное уравнивание. Это же относится и к другим измерениям.

Некоторые виды информации не нужны непосредственно при уравнивании АГС, как самостоятельного построения, и при совместном уравнивании сетей. Так, нормальные высоты нужны

для всех пунктов полигонометрии и для пунктов триангуляции, на которых выполнены определения астрономических координат или расстояний. Для большинства же пунктов триангуляции нормальные высоты не нужны. Но нормальные высоты всех пунктов АГС нужны при каталогизации ГГС.

Информация для уравнивания необходима об измерениях на пунктах всех классов. Для обеспечения методического единства при уравнивании как астрономо-геодезической сети так и геодезических сетей сгущения желательнее, чтобы информация во всех классах была единообразной.

4.2. ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ В АГС И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ СГУЩЕНИЯ

Для уравнивания астрономо-геодезической сети и геодезических сетей сгущения широко используются результаты традиционных геодезических, астрономических и гравиметрических измерений. В АГС и ГГС появляются новые виды измерений — измерения средствами космической геодезии, которые позволяют, в частности, определять разности координат пунктов. К числу таких измерений, которые уже сейчас используются или могут использоваться в ближайшее время, относятся следующие:

- горизонтальные углы или горизонтальные направления;
- расстояния;
- астрономические широты и долготы;
- астрономические азимуты;
- геодезические азимуты;
- нормальные высоты;
- гравиметрические поправки к астрономическому нивелированию;
- уклонения отвесных линий;
- высоты квазигеоида над эллипсоидом;
- разности геодезических координат.

Во многие из этих измерений перед уравниванием, т. е. перед составлением уравнений поправок, необходимо вводить редуцированные поправки. Выбор состава редуцированных поправок зависит от методики уравнивания, т. е. от того, какими уравнениями поправок пользуются при решении задачи, от того, с какими координатами (геодезическими или плоскими прямоугольными) составляются уравнения поправок. Следовательно, важно определить, в каком виде хранить результаты измерений, в частности, в банках данных.

В связи с этим следует иметь в виду общий порядок редуцирования результатов измерений:

- измерения приводятся к центрам пунктов;
- измерения от центров пунктов редуцируются на эллипсоид;
- измерения с эллипсоида редуцируются на плоскость проекции.

Здесь важно отметить следующее. Измерения приводятся к центрам пунктов с результатами таких вспомогательных измерений,

которые являются составной частью процесса измерения данной величины. Например, для приведения углов к центрам пунктов определяют элементы центрировки и редукции, и эти определения являются составной частью процесса измерения угла. Но для приведения углов к центрам пунктов не нужны другие астрономо-геодезические данные, например, нормальные высоты и уклонения отвесных линий.

Для редуцирования измерений на эллипсоид уже требуются дополнительные астрономо-геодезические данные. Например, чтобы редуцировать на эллипсоид расстояния, нужны нормальные высоты и высоты геоида. Но нормальные высоты и высоты геоида уточняются, следовательно, меняются и значения расстояний, редуцированных на эллипсоид.

Для перехода с эллипсоида на плоскость проекции Гаусса—Крюгера не нужны дополнительные астрономо-геодезические данные. Но, если, например, меняются нормальные высоты, то меняются не только длины геодезических линий на эллипсоиде, но соответственно меняются и расстояния на плоскости проекции.

Таким образом, наиболее предпочтительным является хранение результатов измерений, приведенных к центрам пунктов, без каких-либо редукций на поверхности относимости. Но на первых порах создания банков данных это не всегда удавалось сделать по разным причинам. В этой главе рассмотрим порядок редуцирования указанных ранее видов измерений от центров пунктов на эллипсоид и с эллипсоида в проекцию Гаусса—Крюгера, а также обратный пересчет, т. е. «восстановление» результатов измерений, исходя из значений величин, ранее приведенных на эллипсоид или в проекцию.

Естественно задать вопрос, а всегда ли можно сделать такой обратный переход. Ведь не всегда есть полная уверенность в том, что при редуцировании на эллипсоид и в проекцию были введены все необходимые поправки и не введены лишние. Дело в том, что измерения выполнялись десятилетиями и не всегда были необходимые для редуцирования астрономо-геодезические данные. А лишние поправки, например, поправка за переход от длины нормального сечения к геодезической линии при вычислении расстояния, приведенного к среднему уровню моря, вводятся и сейчас.

По этому поводу следует иметь в виду следующее. Для большинства измерений еще можно выяснить, с какими астрономо-геодезическими данными они были редуцированы. А если этого выяснить нельзя, то это означает, что принимая в дальнейшую обработку редуцированную величину, мы как бы признаем, что она соответствует современным астрономо-геодезическим данным. И если такую величину пересчитаем к центрам пунктов с современными данными, то, к сожалению, не исправим прежних ошибок, но не внесем и новых. Допущена будет ошибка из-за разницы прежних и современных данных, но зато при последующих уравниваниях не будет допускаться ошибка из-за разницы будущих и современных астрономо-геодезических данных.

4.3. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ УГЛЫ И НАПРАВЛЕНИЯ

Угловые измерения выполняются на пунктах геодезических сетей относительно отвесных линий, поэтому горизонтальные направления и углы получают на плоскости астрономического горизонта. Задача редуцирования направлений на эллипсоид состоит в том, чтобы получить их значения, относящиеся к геодезическим линиям между проекциями геодезических пунктов на эллипсоиде.

Последовательность редуцирования такова. Сначала направления редуцируют из плоскости астрономического горизонта на плоскость геодезического горизонта пункта наблюдения — учитывают поправку за уклонение отвесной линии. В результате получают направление, которое проходит над эллипсоидом в плоскости прямого нормального сечения, а это сечение проходит через геодезический пункт на местности.

Затем вводят поправку за высоту наблюдаемого пункта и получают направление прямого нормального сечения на поверхности эллипсоида, т. е. между проекциями двух пунктов. Наконец, от нормальных сечений переходят к геодезическим линиям. Эту последовательность запишем следующим выражением:

$$N_g = N + \Delta N_\theta + \Delta N_H + \Delta N_n, \quad (4.3.1)$$

где N_g — направление геодезической линии; N — горизонтальное направление; ΔN_θ — поправка за уклонение отвесной линии или за переход к геодезическому горизонту; ΔN_H — поправка за высоту наблюдаемого пункта; ΔN_n — поправка за переход от нормального сечения к геодезической линии.

Поправка за уклонение отвесной линии вычисляется по формуле

$$\Delta N_\theta = (\eta_1 \cos A_{12} - \xi_1 \sin A_{12}) \operatorname{ctg} z, \quad (4.3.2)$$

где ξ , η — составляющие уклонения отвесной линии; A_{12} — азимут направления; z — зенитное расстояние направления.

Составляющие уклонения отвесной линии необходимо знать в пункте наблюдения. Если их значения отнесены к поверхности эллипсоида или геоида, то составляющая ξ исправляется по формуле

$$\xi = \xi_s + 0,171'' H \sin 2B,$$

где ξ_s — составляющая на поверхности геоида или эллипсоида; H — высота пункта в км; B — широта (астрономическая или геодезическая).

Отметим, что уклонения отвесных линий принято давать, в частности, на картах, для точек на поверхности Земли. В настоящее время нередуцированные широты даются и в каталогах астрономических пунктов, поэтому, как правило, вводить поправки в уклонения отвесных линий не требуется.

Поправка за высоту наблюдаемого пункта вычисляется по формуле

$$\Delta N_H^i = 0,108 H_2 \cos^2 B_1 \sin 2A_{12}, \quad (4.3.3)$$

где H_2 — высота наблюдаемого пункта (визирной цели) в км; B_1 — широта пункта, с которого ведутся наблюдения; A_{12} — азимут направления.

Эта поправка не зависит от высоты пункта, с которого ведутся измерения. Требования к высоте не высоки, поэтому можно пользоваться как нормальными, так и геодезическими высотами.

Поправку за переход от нормального сечения к геодезической линии при расстояниях до 100 км можно вычислять по формуле

$$\Delta N_n^i = -0,0000028 \cos^2 B_1 \sin 2A_{12} \cdot s^2, \quad (4.3.4)$$

где s — расстояние в км.

При расстояниях до 50 км сама эта поправка не превосходит $0,007''$.

Выражения (4.3.1)—(4.3.4) используются для вычисления редуцированных углов, которые получают как разность редуцированных направлений:

$$\beta_{213} = N_{13} - N_{12}. \quad (4.3.5)$$

Обратный переход, т. е. переход от направлений геодезических линий к горизонтальным направлениям между центрами пунктов, можно выполнить по формуле

$$N = N_g - \Delta N_g - \Delta N_H - \Delta N_n. \quad (4.3.6)$$

При вычислении по этой формуле необходимо поправку ΔN_g получать с теми же значениями составляющих отклонения отвесной линии, с которыми она была получена при вычислении направлений геодезической линии. Следует также иметь в виду, что нередко в банках данных хранят направления геодезических линий, вычисленных без этой поправки, а учитывают ее непосредственно при уравнивании, используя современные данные об отклонениях отвесных линий.

При дальнейшем редуцировании направлений с эллипсоида на плоскость проекции Гаусса учитывают поправку δ_{12} в направление за кривизну изображения геодезической линии:

$$N_{12}^r = N_{g_{12}} + \delta_{12}, \quad (4.3.7)$$

где N_{12}^r — направление на плоскости проекции Гаусса; $N_{g_{12}}$ — направление на эллипсоиде (касательная к геодезической линии в точке 1).

Поправка за кривизну изображения геодезической линии (в радианах) вычисляется по формуле

$$\delta_{12} = -\frac{\Delta x}{2R_m^2} \left(y_m' - \frac{\Delta y}{6} \right) + \frac{y_m' \Delta x}{24R_m^4} (4y_m'^2 - \Delta x^2) - \\ - \frac{e^2 \sin 2B_m}{24R_m^3} [(12y_m'^2 - \Delta x^2) \Delta y + (4y_m' - \Delta y) (\Delta x^2 - \Delta y^2)]. \quad (4.3.8)$$

Для вычисления по этой формуле координаты обоих пунктов x_1, y_1 и x_2, y_2 должны быть даны в одной зоне Гаусса—Крюгера, а именно, в той зоне, для которой вычисляется направление.

Разности координат вычисляются по формулам

$$\Delta x = x_2 - x_1; \Delta y = y_2 - y_1.$$

Геодезическая широта B_m соответствует средним значениям координат x_m, y_m , вычисляемым по формулам

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

где y_m — условная ордината, т. е. ордината с номером зоны.

Средний радиус кривизны вычисляется с широтой B_m по формуле (1.4.13).

В формуле (4.3.8) y_m' — истинная ордината. Истинные ординаты для шестиградусных зон Гаусса—Крюгера в метрах можно вычислять по формуле

$$y_m' = y_m - (5 + 10n) \cdot 10^5,$$

где n — номер зоны.

При расстояниях до 300 км ошибка вычисления по этой формуле менее $0,001''$. Для сторон триангуляции и полигонометрии можно применять формулу

$$\delta_{12}^* = -f_m \Delta x \left(y_m' - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m'^3}{3R_m^2} \right) - \rho'' \frac{e'^2 \sin 2B_m}{2R_m^3} y_m'^2 \Delta y, \quad (4.3.9)$$

в которой

$$f_m = \frac{\rho''}{2R_m^2}.$$

Для редуцирования в сетях 2 класса применяют и другую формулу:

$$\delta_{12}^* = -f_m \Delta x \left(y_m' - \frac{\Delta y}{6} \right) = -f_m \frac{\Delta x}{3} (2y_1' + y_2'). \quad (4.3.10)$$

В сетях 3 и 4 класса можно пользоваться формулой

$$\delta_{12}^* = -\delta_{21}^* = -\frac{\rho''}{2R_m^2} y_m' \Delta x = -0,00253 y_m' \Delta x, \quad (4.3.11)$$

в которой значения y_m' и Δx выражаются в километрах.

Для вычислений по приведенным формулам координаты должны быть известны с точностью 1 м в сетях 1 класса, 10 м в сетях 2 класса и 0,1 км в сетях 3 и 4 классов.

Обратный переход от направлений на плоскости проекции Гаусса—Крюгера к горизонтальным направлениям между центрами пунктов выполняется по формуле

$$N_{12} = N_{12}^r - \delta_{12} - \Delta N_{\theta} - \Delta N_H - \Delta N_n. \quad (4.3.12)$$

Здесь, как и в (4.3.6), необходимо обращать внимание на поправку ΔN_{θ} .

4.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ И РАССТОЯНИЕ НА ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ

Геодезическая линия, расстояние, приведенное к среднему уровню моря, и расстояние на плоскости проекции Гаусса—Крюгера являются соответствующими редуциями расстояния между центрами пунктов. Формулы для редуцирования результатов линейных измерений к центрам пунктов получим в следующем параграфе. Здесь же будем исходить из того, что расстоянием между центрами пунктов является длина отрезка прямой в пространстве, проходящей через центры пунктов.

В общем случае задача редуцирования состоит в том, чтобы от наклонного расстояния перейти к длине геодезической линии на эллипсоиде. Эта задача решается редуциционной формулой, приведенной в [6],

$$\sin^2 \frac{s}{2R_A} = \frac{S_0^2 - (H_2 - H_1)^2}{4(R_A + H_1)(R_A + H_2)}, \quad (4.4.1)$$

где s — длина геодезической линии; S_0 — наклонное расстояние; H_1, H_2 — геодезические высоты.

Радиус в этом выражении вычисляется по формуле (1.4.15):

$$R_A = \frac{N_1}{1 + e'^2 \cos^2 B_1 \cos^2 A_{12}}.$$

Вместо формулы (4.4.1) можно пользоваться формулой

$$s = S_0 \sqrt{\frac{1 - ((H_2 - H_1)/S_0)^2}{(1 + H_1/R_A)(1 + H_2/R_A)}} + \frac{S_0^3}{24R_A^2}. \quad (4.4.2)$$

Ошибка этой формулы менее 1 мм при расстояниях до 100 км. Если в этой формуле не учитывать второй член, то будет вычисляться хорда нормального сечения

$$s_{\text{нс}} = S_0 \sqrt{\frac{1 - ((H_2 - H_1)/S_0)^2}{(1 + H_1/R_A)(1 + H_2/R_A)}}.$$

Чтобы применять формулы (4.4.1) и (4.4.2), необходимы геодезические высоты:

$$H = H' + \zeta, \quad (4.4.3)$$

где H' — нормальная высота; ζ — высота квазигеоида над эллипсоидом.

Точные значения нормальных высот известны до уравнивания, а высоты квазигеоида или геодезические высоты получают из уравнивания АГС, поэтому процесс редуцирования разделим на два этапа. На первом этапе учтем влияние нормальных высот, а на втором — влияние высот квазигеоида. С этой целью преобразуем выражение (4.4.2).

Учтем, что $\frac{H}{R_A} < 10^{-3}$ и что $\frac{H^3}{R_A^3} < 10^{-9}$ и напомним выражение для знаменателя под знаком радикала в (4.4.2):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{H_2}{R_2}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(1 - \frac{H_1}{2R_A} + \frac{3}{8} \frac{H_1^2}{R_A^2} - \dots\right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{H_2}{2R_A} + \frac{3}{8} \frac{H_2^2}{R_A^2} - \dots\right). \end{aligned}$$

При перемножении правой части опустим члены, содержащие R_A^3 и R_A^4 :

$$\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{H_1}{2R_A} + \frac{3}{8} \frac{H_1^2}{R_A^2} - \frac{H_2}{2R_A} + \frac{H_1 H_2}{4R_A^2} + \frac{3}{8} \frac{H_2^2}{R_A^2}\right).$$

В пятом и шестом членах примем $H_2 = H_1$. При этом для $H = 6$ км, $H_2 - H_1 = 100$ м будет допущена ошибка менее 10^{-8} .

Таким образом, знаменатель в (4.4.2) можно преобразовать к следующему виду:

$$\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{H_1 + H_2}{2R_A} + \frac{H_1^2}{R_A^2}\right). \quad (4.4.4)$$

Теперь разложим в ряд числитель выражения (4.4.2)

$$\sqrt{1 - \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0}\right)^4 - \dots \quad (4.4.5)$$

После замены в (4.4.2) числителя и знаменателя их новыми выражениями (4.4.4) и (4.4.5) получим:

$$s = S_0 \left[1 - \frac{H_1 + H_2}{2R_A} + \frac{H_1^2}{R_A^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0}\right)^2 + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{H_1 + H_2}{4R_A} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 - \frac{H_1^2}{2R_A^2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^4 + \\
& + \left. \frac{H_1 + H_2}{16R_A} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^4 - \frac{H_1^2}{8R_A^2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^4 \right] + \frac{S_0^3}{24R_A^2}.
\end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Преобразуем это выражение. При этом будем иметь в виду, что значение $\frac{H_2 - H_1}{S_0}$ равно тангенсу вертикального угла. При вертикальных углах до 3° ($\alpha \leq 3^\circ$)

$$\left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^4 \frac{H_1^2}{8R_A^2} \leq 10^{-12}; \quad \frac{H_1 + H_2}{16R_A} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^4 < 10^{-9}; \quad \frac{H_1^2}{2R_A^2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 < 2 \cdot 10^{-9}.$$

Опустив эти члены в (4.4.6), получим:

$$\begin{aligned}
s = S_0 \left[1 - \frac{H_1 + H_2}{2R_A} + \frac{H_1^2}{R_A^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 + \frac{H_1 + H_2}{4R_A} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 - \right. \\
\left. - \frac{1}{8} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^4 \right] + \frac{S_0^3}{24R_A^2}.
\end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Таким образом, исходная формула (4.4.2) преобразована к виду (4.4.7). Формулы (4.4.2) и (4.4.7) идентичны до величин порядка $S_0 \cdot 10^{-8} - S_0 \cdot 10^{-9}$.

Теперь в выражении (4.4.7) геодезические высоты заменим нормальными высотами и высотами квазигеоида. Эту замену во втором и пятом членах выполним в соответствии с (4.4.3)

$$H_1 + H_2 = (H_1^y + H_2^y) + (\zeta_1 + \zeta_2). \quad (4.4.8)$$

Рассмотрим четвертый член в (4.4.7):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^2 + \frac{(H_2^y - H_1^y)(\zeta_2 - \zeta_1)}{S_0^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{S_0} \right)^2. \quad (4.4.9)$$

Разность высот квазигеоида в двух точках будет наибольшей, когда в этих точках и на отрезке между ними большие и к тому же одинаковые уклонения отвесных линий ϑ . Тогда

$$\zeta_2 - \zeta_1 = S_0 \frac{\vartheta}{\rho''}.$$

Следовательно,

$$\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{S_0} = \frac{\vartheta}{\rho''}.$$

Уклонения отвесных линий более $20''$ встречаются редко, но даже и при таких уклонениях отвеса член

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{S_0} \right)^2 \leq 0,5 \cdot 10^{-8}.$$

Следовательно, его можно не учитывать.

Рассмотрим второе слагаемое в (4.4.9). При углах наклона до 3° (т. е. при $\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \leq \lg 3^\circ$) и $\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{S_0} < 10^{-4}$ влияние этого слагаемого не превышает $5 \cdot 10^{-6} S_0$, т. е. в отдельных случаях этот член может достигать величин, сопоставимых с точностью современных линейных измерений. Значит, им пренебрегать нельзя.

С учетом изложенного перепишем выражение (4.4.9):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{H_2 - H_1}{S_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^2 + \frac{(H_2^y - H_1^y)(\zeta_2 - \zeta_1)}{S_0^2}. \quad (4.4.10)$$

В остальных членах формулы (4.4.7) можно геодезические высоты заменить нормальными высотами. При этом в большинстве случаев ошибка не превысит $10^{-9} S_0$. С учетом этого и на основании (4.4.8) и (4.4.10) перепишем выражение (4.4.7):

$$s = S_0 \left[1 - \frac{H_1^y + H_2^y}{2R_A} + \frac{H_1^{y2}}{R_A^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^2 + \frac{H_1^y + H_2^y}{4R_A} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^4 \right] - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} S_0 - \frac{(H_2^y - H_1^y)(\zeta_2 - \zeta_1)}{S_0} + \frac{S_0^3}{24R_A^2}. \quad (4.4.11)$$

Таким образом, получена формула длины геодезической линии, в правой части которой четыре члена. Как уже отмечалось, если не учитывать член $\frac{S_0^3}{24R_A^2}$, то будет вычисляться длина хорды нормального сечения. Если учитывать только первый член, то получим следующую формулу:

$$D = S_0 \left[1 - \frac{H_1^y + H_2^y}{2R_A} + \frac{H_1^{y2}}{R_A^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^2 + \frac{H_1^y + H_2^y}{4R_A} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S_0} \right)^4 \right]. \quad (4.4.12)$$

Здесь только нормальные высоты и нет высот квазигеоида. Значение D , вычисляемое по этой формуле, будем называть расстоянием, приведенным к среднему уровню моря.

Учитывая, что формула (4.4.12) идентична (4.4.7), а формула (4.4.7) идентична (4.4.2), можно написать другое выражение для расстояния, приведенного на средний уровень моря:

$$D = S_0 \sqrt{\frac{1 - ((H_2^y - H_1^y)/S_0)^2}{(1 + H_1^x/R_A)(1 + H_2^x/R_A)}}. \quad (4.4.13)$$

Теперь получим формулу перехода от расстояния, приведенного на средний уровень моря, к длине геодезической линии. Для этого подставим (4.4.12) в (4.4.11) и получим

$$s = D - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2R_A} S_0 - \frac{(H_2^x - H_1^x)(\xi_2 - \xi_1)}{S_0} + \frac{S_0^3}{24R_A^2}. \quad (4.4.14)$$

При редуцировании на эллипсоид целесообразно пользоваться расстояниями D , а не S_0 . Замена S_0 на D в (4.4.14) приведет к ошибке порядка

$$ds \approx \frac{\xi_1 + \xi_2}{2R_A} (S_0 - D) \approx \frac{\xi_1 + \xi_2}{2R_A} \frac{H_1^y + H_2^y}{2R_A} S_0,$$

т. е. к относительной ошибке $\frac{ds}{S_0} < 10^{-8}$.

Следовательно, формула редуцирования на эллипсоид расстояния, приведенного на средний уровень моря, т. е. вычисления длины геодезической линии имеет вид:

$$s = D - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2R_A} D - \frac{(H_2^y - H_1^y)(\xi_2 - \xi_1)}{D} + \frac{D^3}{24R_A^2}. \quad (4.4.15)$$

Если в этом выражении не учитывать разность высот квазигеоида, то ошибку, допускаемую в этом случае, можно подсчитать по следующей приближенной формуле:

$$\frac{ds}{s} = 10^{-7} \vartheta \alpha,$$

где α — вертикальный угол направления в градусах; ϑ — составляющая уклонения отвеса в вертикале направления в секундах.

Так при $\alpha = 3^\circ$, $\vartheta = 20''$ относительная ошибка составит 1 : 200 000. Следовательно, пренебрегать разностью высот квазигеоида нельзя. Таким образом, длина геодезической линии может вычисляться по формулам (4.4.1) или (4.4.2) с геодезическими высотами или по формулам (4.4.12) или (4.4.13) совместно с формулой (4.4.15), если пользоваться отдельно нормальными высотами и высотами квазигеоида.

Формулы для обратного перехода — от длины геодезической линии к расстоянию между центрами пунктов, получим на основании выражения (4.4.1):

$$S = [4(R_A + H_1)(R_A + H_2) \sin^2 \frac{s}{2R_A} + (H_2 - H_1)^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4.16)$$

Переход от геодезической линии на эллипсоиде к прямой на плоскости проекции Гаусса—Крюгера при расстояниях в несколько сотен километров может быть выполнен по формуле

$$d = s + s \left[\frac{y_m'^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} - \frac{e^2}{6R_m^3} \sin 2B_m y_m' \Delta x \Delta y + \frac{y_m'^2}{48R_m^4} (2y_m'^2 - 3\Delta y^2 + 2\Delta x^2) - \frac{\Delta y^2}{5760R_m^4} (16\Delta x^2 + 5\Delta y^2) \right]. \quad (4.4.17)$$

Ошибка вычисления по этой формуле не превышает 0,003 м при расстояниях до 300 км.

Для обратного перехода, т. е. для вычисления длины геодезической линии, применяют формулу

$$s = d \left[1 - \frac{y_m'^2}{2R_m^2} - \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{e^2}{6R_m^3} \sin 2B_m y_m' \Delta x \Delta y + \frac{y_m'^2}{48R_m^4} (10y_m'^2 + 5\Delta y^2 - 2\Delta x^2) + \frac{\Delta y^2}{5760R_m^4} (16\Delta x^2 + 15\Delta y^2) \right]. \quad (4.4.18)$$

Для редуцирования длин сторон в триангуляции и полигонометрии 1 и 2 классов применяется следующая формула:

$$d = s + s \left(\frac{y_m'^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m'^4}{24R_m^4} \right). \quad (4.4.19)$$

4.5. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ЦЕНТРАМИ ПУНКТОВ

В геодезии принято приводить измерения к центрам пунктов. К ним приводят горизонтальные углы, астрономические координаты и азимуты, нормальные высоты, ускорения силы тяжести.

Иная практика сложилась в отношении линейных измерений. Расстояния, измеренные базисными приборами, электронными дальномерами, радиогеодезическими системами и другими средствами, приводились не к центрам пунктов, а к так называемым уровням. Из-за этого приходится перевычислять расстояния каждый раз, как только уточняют нормальные высоты, что приводит к излишним вычислениям и появлению дополнительных ошибок.

С этим связана и проблема хранения линейной информации в банках данных. Например, приходится хранить расстояния между светодальномерами и отражателями и высоты этих приборов над центрами пунктов. Высоты дальномеров почти всегда отличаются от высот визирных целей и инструментов, которыми измерены вертикальные углы. Таким образом, приходится хранить для пункта по несколько значений высот инструментов и визирных целей и информацию о том, к каким измерениям они относятся. Это создает серьезные неудобства.

Рассмотрим, как вычислить расстояние между центрами двух геодезических пунктов.

Сначала получим формулу приведения к центрам пунктов расстояния, измеренного электронными дальномерами. Обозначим:

S — расстояние между центрами пунктов, т. е. длина прямой, соединяющей центры двух пунктов;

S_0 — измеренное дальномером расстояние, в котором учтена вся совокупность физических и геометрических поправок, свойственных данному прибору, и поправки за центрировку и редукцию;

i и ν — высоты приборов над центрами пунктов 1 и 2 соответственно.

С этими обозначениями и на основании (4.4.11) напомним два выражения для геодезической линии: одно с расстоянием между центрами пунктов

$$s = S - S \left[\frac{H_1^y + H_2^y}{2R_A} - \frac{H_1^y}{R_A^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S} \right)^2 - \frac{H_1^y + H_2^y}{4R_A} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{H_2^y - H_1^y}{S} \right)^4 \right] - \frac{(H_2^y - H_1^y)(\zeta_2 - \zeta_1)}{S} - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} S + \frac{S^3}{24R_A^2}, \quad (4.5.1)$$

а другое с расстоянием, измеренным дальномером, в котором уже учтены поправки за центрировку и редукцию,

$$s = S_0 - S_0 \left[\frac{H_1^y + i + H_2^y + \nu}{2R_A} - \frac{(H_1^y + i)^2}{R_A^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{H_2^y + \nu - H_1^y - i}{S_0} \right)^2 - \frac{H_1^y + i + H_2^y + \nu}{4R_A} \left(\frac{H_2^y + \nu - H_1^y - i}{S_0} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{H_2^y + \nu - H_1^y - i}{S_0} \right)^4 \right] - \frac{(H_2^y + \nu - H_1^y - i)(\zeta_2 - \zeta_1)}{S_0} - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} S_0 + \frac{S_0^3}{24R_A^2}. \quad (4.5.2)$$

Выражение (4.5.2) вычтем из выражения (4.5.1) и опустим члены, величины которых при расстояниях до 100 км существенно меньше 1 мм

$$S = S_0 - \frac{i + \nu}{2R_A} S_0 - \frac{(\nu - i)^2}{2S_0} - \frac{\nu - i}{S_0} (H_2^y - H_1^y) - \frac{\nu - i}{S_0} (\zeta_2 - \zeta_1). \quad (4.5.3)$$

Это выражение получено на основании формулы (4.4.1), т. е. для случая проектирования по нормальям. Приборы же центрируются

по отвесным линиям. Следовательно, необходимо учесть еще поправку за уклонение отвесных линий на обоих пунктах. Обозначим:

A_{12} — азимут направления 1—2;

ξ, η — составляющие уклонений отвесных линий в меридиане и первом вертикале.

Составляющие уклонений отвесных линий в вертикале с азимутом A_{12} на обоих пунктах получим по формулам

$$\vartheta_1 = \xi_1 \cos A_{12} + \eta_1 \sin A_{12}; \quad \vartheta_2 = \xi_2 \cos A_{12} + \eta_2 \sin A_{12}.$$

Поправка в измеренное расстояние равна разности поправок в поправки за центрировку и редукцию

$$dS = i \frac{\vartheta_1}{\rho''} - v \frac{\vartheta_2}{\rho''}. \quad (4.5.4)$$

Добавим эту поправку в (4.5.3):

$$S = S_0 - \frac{i+v}{2R_A} S_0 - \frac{(v-i)^2}{2S_0} - \frac{(v-i)}{S_0} (H_2^r - H_1^r) - \frac{v-i}{S_0} (\xi_2 - \xi_1) + \left(i \frac{\vartheta_1}{\rho''} - v \frac{\vartheta_2}{\rho''} \right). \quad (4.5.5)$$

Рассмотрим сумму двух последних членов для случая, когда уклонения отвесных линий на отрезке между двумя пунктами меняются линейно. Для этого случая применима формула астрономического нивелирования (3.5.2)

$$\xi_2 - \xi_1 = -S_0 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\rho''}.$$

С учетом этой формулы преобразуем сумму двух последних членов в (4.5.5):

$$-\frac{\xi_2 - \xi_1}{S_0} (v-i) + \left(i \frac{\vartheta_1}{\rho''} - v \frac{\vartheta_2}{\rho''} \right) = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2\rho''} (v+i). \quad (4.5.6)$$

Разность уклонений отвесных линий редко достигает $10''$. Но даже при такой разности и высотах знаков около 30 м величина (4.5.6) меньше 2 мм, поэтому в (4.5.5) последние два члена можно опустить. Тогда

$$S = S_0 - \frac{i+v}{2R_A} S_0 - \frac{(v-i)^2}{2S_0} - \frac{(v-i)}{S_0} (H_2^r - H_1^r). \quad (4.5.7)$$

Таким образом, мы получили формулу для приведения к центрам пунктов расстояния, измеренного электронным дальномером.

Для вычислений по этой формуле нужны разности нормальных высот. Рассмотрим влияние их ошибок. На основании (4.5.7) получим

$$dS = -\frac{v-i}{S_0} d(H_2^r - H_1^r). \quad (4.5.8)$$

Т а б л и ц а 4.5.1

Допустимые ошибки $d(H_2^y - H_1^y)$ при $\frac{dS}{S} = 1:3 \cdot 10^6$

$S, \text{ км}$ $v-i, \text{ м}$	5	10	15	20	30
40	0,20	0,8	1,8	3	7
30	0,25	1,0	2,2	4	9
20	0,40	1,5	3,4	6	14
10	0,75	3,0	6,8	12	27
5	1,50	6,0	13,5	24	—

Если известна точность разностей высот, то с помощью (4.5.8) можно решать вопрос о том, следует ли приведения к центрам пунктов считать окончательными и не хранить в банках данных высоты приборов, или в будущем, при изменении высот, придется делать повторное приведение.

Требования к точности получим при условии, чтобы в сетях 1 и 2 класса относительная ошибка вычисления расстояния была не более $1 : 3 \cdot 10^6$. Этому условию соответствует выражение

$$d(H_2^y - H_1^y) \leq 0,3 \frac{S_0^2}{v-i}. \quad (4.5.9)$$

Здесь $d(H_2^y - H_1^y)$, $(v-i)$ — в метрах, а S_0 — в километрах. Значения допустимых ошибок разностей высот представлены в табл. 4.5.1.

Из таблицы следует, что при расстояниях 25 км и более допустимы ошибки 5 м. При расстояниях более 10 км требуемая точность нормальных высот обеспечивается при тригонометрическом нивелировании. Для более коротких базисов, измеренных при большой разности высот приборов над центрами пунктов, необходимо разности нормальных высот получать из геометрического нивелирования.

Теперь рассмотрим базисы, измеренные инвариными проволоками. На рис. 9 показан базис S между пунктами 1 и 2. Измерены же наклонные длины пролетов ΔD и разности нормальных высот штативов, т. е. концов пролетов. Рассмотрим порядок вычисления длины геодезической линии.

По каждому наклонному пролету вычислим соответствующие отрезки хорды нормального сечения ΔS по формуле (4.4.11):

$$\begin{aligned} \Delta s = \Delta D - \frac{H_i^y + H_k^y}{2R_A} \Delta D + \frac{H_i^y{}^2}{R_A^2} \Delta D - \frac{1}{2} \frac{(H_k^y - H_i^y)^2}{\Delta D} - \frac{H_i^y + H_k^y}{4R_A} \frac{(H_k^y - H_i^y)^2}{\Delta D} - \\ - \frac{1}{8} \frac{(H_k^y - H_i^y)^4}{\Delta D^3} - \frac{\zeta_i + \zeta_k}{2R_A} \Delta D - \frac{(H_k^y - H_i^y)(\zeta_k - \zeta_i)}{\Delta D}. \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

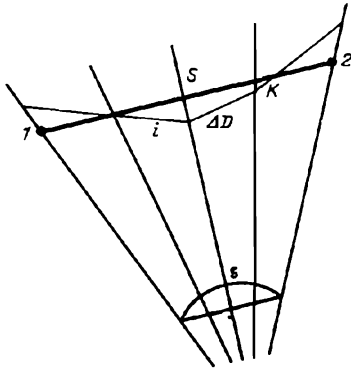


Рис. 9. Базис, измеренный проволоками

Отметим, что раньше при вычислении базисов вычисляли горизонтальные проложения по формуле Пифагора [10]

$$\Delta s_n = \sqrt{\Delta D^2 - h_{ik}^2}. \quad (4.5.11)$$

Разложим эту формулу в ряд

$$\Delta s_n = \Delta D - \frac{h_{ik}^2}{2\Delta D} - \frac{h_{ik}^4}{8\Delta D^3} - \dots \quad (4.5.12)$$

Имея в виду, что

$$h_{ik} = H_k^y - H_i^y,$$

подставим это выражение в (4.5.10):

$$\begin{aligned} \Delta s = \Delta s_n - \frac{H_i^y + H_k^y}{2R_A} \Delta D + \frac{H_i^y{}^2}{R_A^2} \Delta D + \frac{H_i^y + H_k^y}{4R_A} \frac{(H_k^y - H_i^y)^2}{\Delta D} - \\ - \frac{\zeta_i + \zeta_k}{2R_A} \Delta D - \frac{(H_k^y - H_i^y)(\zeta_k - \zeta_i)}{\Delta D}. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Выполним суммирование членов этой формулы по всей хорде. При этом учтем, что для базисов, измеренных инвариантными проволоками, член $\frac{(H_1^y + H_k^y)(H_2^y - H_1^y)^2}{4R_A D}$ очень мал. Обозначим

$$\Sigma \Delta s_n = s_n.$$

При суммировании будем иметь в виду, что с ошибкой менее 1 мм выполняются следующие равенства:

$$\Sigma \frac{H_i^y + H_k^y}{2R_A} \Delta D = H_m^y \frac{s_n}{R_A}; \quad \Sigma \frac{H_i^y{}^2}{R_A^2} \Delta D = \frac{H_m^y{}^2}{R_A^2} s_n,$$

где H'_m — среднее арифметическое из нормальных высот всех штативов.

Вычислить суммы и разности высот геоида по всем штативам практически невозможно, но с достаточной точностью можно принять

$$\sum \frac{\zeta_i + \zeta_k}{2R_A} \Delta D = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} s_n;$$

$$\sum \frac{(H'_k - H'_i)(\zeta_k - \zeta_i)}{\Delta D} = \frac{(H'_2 - H'_1)(\zeta_2 - \zeta_1)}{s_n}.$$

После суммирования по хорде, учтя поправку за переход к геодезической линии, получим

$$s = s_n - \frac{H'_m}{R_A} s_n + \frac{H'^2_m}{R_A^2} s_n - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} s_n -$$

$$- \frac{(H'_2 - H'_1)(\zeta_2 - \zeta_1)}{s_n} - \frac{s_n^3}{24R_A^2}. \quad (4.5.14)$$

Такова формула вычисления длины геодезической линии по результатам измерения базиса инвариными проволоками. Величину s_n принято называть расстоянием, приведенным к горизонту.

От длины геодезической линии, вычисленной по формуле (4.5.14), можно перейти к расстоянию между центрами пунктов по формуле (4.4.16). При этом необходимо пользоваться теми же значениями нормальных высот и высот квазигеоида.

Теперь получим формулу перехода от расстояния, приведенного к горизонту, к расстоянию между центрами пунктов. Для этого в левой части выражения (4.5.1) заменим длину геодезической линии выражением (4.5.14):

$$S = s_n - \left(\frac{H'_m}{R_A} s_n - \frac{H'^2_1 + H'^2_2}{2R_A} S \right) + \left(\frac{H'^2_m}{R_A^2} s_n - \frac{H'^2_1}{R_A^2} S \right) -$$

$$- \left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} s_n - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} S \right) - \left[\frac{(H'_2 - H'_1)(\zeta_2 - \zeta_1)}{s_n} - \frac{(H'_2 - H'_1)(\zeta_2 - \zeta_1)}{S} \right] +$$

$$+ \left(\frac{s_n^3}{24R_A^2} - \frac{S^3}{24R_A^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(H'_2 - H'_1)^2}{S}. \quad (4.5.15)$$

Заменив в правой части этого выражения значение S значением s_n и опустив члены, величины которых меньше 0,1 мм, получим формулу для вычисления расстояния между центрами базисных пунктов:

$$S = s_n + \frac{1}{R_A} \left(\frac{H_1^y + H_2^y}{2} - H_m^y \right) s_n + \frac{1}{2} \frac{(H_2^y - H_1^y)^2}{s_n}. \quad (4.5.16)$$

Все необходимые для этой формулы величины определяются при базисных измерениях. Именно с ними должны вычисляться расстояния между центрами пунктов.

Таким образом, расстояния, измеренные электронными дальномерами и приборами Едерина, можно привести к центрам пунктов по формулам (4.5.7) или (4.5.16), если имеются материалы полевых работ.

В тех случаях, когда материалы обработки полевых наблюдений не сохранились, можно поступить следующим образом.

Для дальномерных измерений в базисных каталогах помещены значения длин геодезических линий, старые значения нормальных высот и высот геоида и высоты приборов над центрами пунктов. С этими значениями можно вычислить расстояние между дальномером и отражателем по формуле (4.4.16), которую в данном случае необходимо написать в следующем виде:

$$S_0 = \left[4 (R_A + H_1) (R_A + H_2) \sin^2 \frac{s}{2R_A} + (H_2 - H_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.5.17)$$

где H_1 и H_2 — геодезические высоты дальномера и отражателя.

Далее с современными значениями нормальных высот вычисляется по формуле (4.5.7) расстояние между центрами пунктов.

Для расстояний, измеренных приборами Едерина, в базисных каталогах помещены длины геодезических линий, старые значения средней высоты базиса над уровнем моря, высоты пунктов и высоты геоида. В длины геодезических линий введен ряд поправок. Для некоторых базисов позже были вычислены поправки за длину жезла и новый температурный коэффициент. Длины геодезических линий, как правило, вычислены по формуле, приведенной в [10],

$$s = s_n - \frac{H_m + h_m}{R_m} s_n + \frac{(H_m + h_m)^2}{R_m^2} s_n, \quad (4.5.18)$$

где s_n — длина базиса, приведенная к горизонту; H_m — средняя высота базиса над уровнем моря; h_m — средняя высота квазигеоида над эллипсоидом.

Исходя из этой формулы можно от длины геодезической линии, исправленной всеми поправками, перейти к длине базиса, приведенной к горизонту:

$$s_n = s + \frac{H_m + h_m}{R_m} s - \frac{(H_m + h_m)^2}{R_m^2} s. \quad (4.5.19)$$

Затем следует перейти к расстоянию между центрами пунктов по формуле (4.5.16). Что касается современных значений нормальных высот пунктов и высот геоида, то следует иметь в виду следующее. Современные значения нормальных высот могли быть получены из

тригонометрического нивелирования и уравнены без учета их разности, определенной более точно во время измерения базисов инварными проволоками. Следовательно, при вычислении по формуле (4.5.16) надо пользоваться старыми нормальными высотами, полученными при базисных измерениях геометрическим нивелированием.

Переход от расстояния между центрами пунктов к длине геодезической линии выполняется по формуле (4.5.1). Здесь следует пользоваться современными высотами квазигеоида.

4.6. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ АЗИМУТЫ

Астрономические и геодезические азимуты в астрономо-геодезической сети получают, как правило, из наблюдений звезд. Кроме того, при уравнивании АГС могут использоваться геодезические азимуты, вычисленные по координатам пунктов, т. е. полученные из решения обратной геодезической задачи.

Необходимо иметь в виду, что геодезический азимут направления всегда соответствует координатам точки, являющейся началом этого направления. Если геодезические координаты этой точки не известны, то бессмысленно говорить о значении геодезического азимута. Следовательно, значение геодезического азимута должно сопровождаться значениями геодезических координат начальной точки, и прежде всего, значением долготы.

Эти координаты могут быть в любой системе, в том числе и в такой, которая не используется для уравнивания АГС. При уравнивании азимут от такой системы может быть приведен к значениям предварительных координат, например, по формуле Лапласа, и тогда с ним можно составлять уравнение поправок геодезического азимута.

Из астрономических наблюдений определяют астрономические и геодезические азимуты горизонтальных направлений. Редуцирование на эллипсоид заключается в переходе от горизонтальных направлений к геодезическим линиям. В данном случае это означает переход от астрономических и геодезических азимутов горизонтальных направлений к астрономическим и геодезическим азимутам геодезических линий.

При редуцировании азимутов учитываются те же поправки, что и при редуцировании горизонтальных направлений — за уклонение отвесной линии, за высоту наблюдаемого пункта, за переход от нормального сечения к геодезической линии. Формулы для этих поправок приведены в § 4.3. С этими поправками геодезический и астрономический азимуты вычисляются по формулам

$$A_{12} = A_{12}^{\text{изм}} + \Delta N_{\theta} + \Delta N_H + \Delta N_n; \quad (4.6.1)$$

$$a_{12} = a_{12}^{\text{изм}} + \Delta N_{\theta} + \Delta N_H + \Delta N_n, \quad (4.6.2)$$

где $A_{12}^{\text{изм}}$ — измеренный геодезический азимут горизонтального направления; $a_{12}^{\text{изм}}$ — измеренный астрономический азимут горизонтального направления.

Из решения обратной геодезической задачи получают непосредственно геодезический азимут геодезической линии. Этот азимут указанными поправками, естественно, не исправляется.

При редуцировании азимутов с эллипсоида на плоскость проекции Гаусса необходимо иметь в виду следующее. Геодезический азимут пересчитывается в дирекционный угол. На основе же астрономического азимута геодезической линии могут вычисляться либо дирекционный угол, либо астрономический азимут направления на плоскости проекции Гаусса.

Значения геодезических и астрономических азимутов геодезических линий на эллипсоиде перевычисляются в дирекционные углы по формулам

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}; \quad \alpha_{12} = a_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}, \quad (4.6.3)$$

где γ_1 — сближение меридианов в точке 1; δ_{12} — поправка в направление за кривизну изображения геодезической линии.

Формулы для поправки за кривизну изображения геодезической линии приведены в § 4.3.

Для пунктов, расположенных на удалении до $3^\circ 30'$ от осевого меридиана, сближение меридианов (в радианах) с ошибкой менее $0,001''$ может быть вычислено по формуле

$$\begin{aligned} \gamma = \sin B \cdot l + \sin B \cos^2 B (1 + 3e'^2 \cos^2 B) \frac{l^3}{3} + \\ + \sin B \cos^4 B (2 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^5}{15}, \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

где B — геодезическая широта точки; e'^2 — квадрат второго эксцентриситета эллипсоида.

В этой формуле

$$l = L - L_0 \quad (4.6.5)$$

в случае геодезического азимута и

$$l = \lambda - L_0 \quad (4.6.6)$$

в случае астрономического азимута. Здесь L_0 — долгота осевого меридиана.

Отметим, что сближение астрономического и геодезического меридианов обычно вычисляется по формуле

$$\gamma = l \sin B. \quad (4.6.7)$$

Ошибка вычисления по этой формуле менее $0,001''$ при $l \leq 12'$.

Если для уравнивания необходимо вычислять астрономический азимут направления на плоскости проекции Гаусса, то при редуцировании астрономического азимута необходимо учесть только поправку за кривизну изображения геодезической линии:

$$a_{12}^r = a_{12} + \delta_{12}, \quad (4.6.8)$$

где a_{12}^r — астрономический азимут направления на плоскости проекции Гаусса; a_{12} — астрономический азимут геодезической линии.

4.7. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

При уравнивании ГГС астрономические координаты нужны для вычисления уклонений отвесных линий, для перевычисления астрономических азимутов в геодезические и для астрономо-гравиметрического нивелирования. Исходя из этого рассмотрим вопрос об их редуциях.

Редуцирование астрономических координат на эллипсоид выполняется по нормальным силовым линиям. Нормальная силовая линия является плоской кривой и лежит в плоскости меридиана, поэтому ее кривизна на астрономическую долготу не влияет, т. е. поправка в долготу за ее редуцирование на эллипсоид равна нулю. Следовательно, для вычислений уклонений отвесных линий, геодезических азимутов и при астрономо-гравиметрическом нивелировании нужны значения астрономических долгот, полученные непосредственно в точках на земной поверхности.

Поправка в астрономическую широту за редуцирование на эллипсоид вычисляется по формуле

$$\Delta\varphi_H = -0,171''H \sin 2\varphi, \quad (4.7.1)$$

где H — высота пункта в км.

Редуцированное значение широты вычисляется по формуле

$$\varphi_3 = \varphi - 0,171''H \sin 2\varphi, \quad (4.7.2)$$

где φ — измеренная на пункте широта.

Астрономические координаты участвуют в вычислении уклонений отвеса. Уклонения отвесных линий нужны, в основном, для редуцирования угловых измерений, поэтому их значения должны быть известны не на эллипсоиде, а в точках на поверхности Земли.

Именно такие значения приводятся на картах уклонений отвесных линий. Следовательно, для вычисления уклонений отвесных линий по формулам астрономо-геодезического метода нужны нередуцированные астрономические широты и долготы.

Уклонения отвесных линий, получаемые гравиметрическим методом, т. е. по гравиметрическим данным, редуцируют с поверхности эллипсоида на физическую поверхность Земли в процессе их вычисления. Для этого составляющие уклонений отвесных линий в меридиане исправляют поправкой за кривизну силовой линии:

$$\xi = \xi' + 0,171H \sin 2B, \quad (4.7.3)$$

где ξ' — составляющая уклонения отвеса, вычисленная по гравиметрическим данным.

Следовательно, и для этих уклонений отвеса дополнительные редукции не требуются.

Рассмотрим учет поправки за кривизну силовой линии при астрономо-гравиметрическом нивелировании. Для этого выражение (3.5.5) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi_2 - \zeta_1 = & -\frac{D_{12}}{2\rho''} \left\{ (\xi_1 - \xi_1^0 + \xi_2 - \xi_2^0) \cos A_{12} + \right. \\ & \left. + (\eta_1 - \eta_1^0 + \eta_2 - \eta_2^0) \sin A_{12} \right\} + (N_2 - N_1). \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

В этом выражении значения ξ_0 и η_0 вычисляются по гравиметрическим данным, а ξ и η — по астрономическим данным. И те и другие должны быть отнесены к одной и той же поверхности — либо к эллипсоиду, либо к поверхности Земли.

Положим, что выражение (4.7.4) написано для поверхности Земли. Аналогичное выражение напомним для эллипсоида:

$$\begin{aligned} \xi_2 - \zeta_1 = & -\frac{D_{12}}{2\rho''} \left\{ (\xi_1' - \xi_1^{0'} + \xi_2' - \xi_2^{0'}) \cos A_{12} + \right. \\ & \left. + (\eta_1' - \eta_1^{0'} + \eta_2' - \eta_2^{0'}) \sin A_{12} \right\} + (N_2 - N_1). \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Для выражения (4.7.4) необходимо редуцировать на поверхность Земли уклонения отвеса, вычисленные по гравиметрическим данным:

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= \xi_1^{0'} + 0,171'' H_1 \sin 2B_1; \\ \xi_2^0 &= \xi_2^{0'} + 0,171'' H_2 \sin 2B_2. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Для (4.7.5) следует редуцировать на эллипсоид уклонения отвесных линий, вычисленные астрономо-геодезическим методом:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_1 - 0,171'' H_1 \sin 2B_1; \\ \xi_2' &= \xi_2 - 0,171'' H_2 \sin 2B_2. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Уклонения отвесной линии в астрономо-геодезическом методе вычисляются по формуле

$$\xi = \varphi - B,$$

поэтому можно написать

$$\xi' = \varphi - 0,171'' H \sin 2B - B$$

или с учетом (4.7.2)

$$\xi' = \varphi_s - B,$$

где φ_s — широта, редуцированная на эллипсоид.

Таким образом, при уравнивании АГС, как правило, нет необходимости редуцировать астрономические координаты на эллипсоид. Необходимость редуцирования астрономических широт может возникнуть лишь при астрономо-гравиметрическом нивелировании, если при вычислении гравиметрической поправки не учтена поправка за кривизну силовой линии.

4.8. НОРМАЛЬНЫЕ ВЫСОТЫ

Как уже отмечалось, нормальные высоты пунктов ГГС, получаемые из геометрического и тригонометрического нивелирования, необходимо уравнивать независимо от плановых координат. Но плановые координаты зависят от точности нормальных высот.

Эта зависимость проявляется прежде всего через линейные измерения. Из формул § 4.5 следует, что от точности нормальных высот зависит точность геодезических линий. При этом ошибки расстояний могут быть обусловлены не только общими ошибками высот обоих пунктов, но и ошибками их разности, т. е. ошибками превышений.

Следовательно, уравнивание нормальных высот должно выполняться до уравнивания АГС, а не при каталогизации, т. е. не после него. В уравнивании нормальных высот можно выделить три основных этапа:

- уравнивание нивелирной сети I класса;
- уравнивание на ее основе нивелирных сетей II—IV классов;
- на основе пунктов нивелирной сети уравнивание высот пунктов геодезической сети, полученных методом тригонометрического нивелирования.

Переуравнивание нивелирной сети I класса производится примерно через 20—25 лет. В результате получают новую систему нормальных высот. На основе последнего переуравнивания была принята Балтийская система высот 1977 года.

К полученной таким образом системе должны быть приведены высоты всех пунктов ГГС перед ее общим уравниванием.

Государственная геодезическая сеть является пространственным построением. Положения пунктов задаются тремя координатами — плановыми координатами и геодезической высотой.

На большинстве пунктов геодезические высоты вычисляются по формуле (4.4.3), т. е. как сумма нормальных высот и высот квазигеоида. Геодезические высоты, полученные по формуле (4.4.3) на пунктах КГС и КГСС, участвуют в совместном уравнивании этих сетей с АГС, а следовательно, и в получении параметров перехода от референционной системы к общеземной. В связи с этим нормальные высоты пунктов КГС и КГСС необходимо определять из геометрического нивелирования.

Геодезические высоты от пунктов космической геодезической сети передаются на все остальные пункты ГГС через пункты астрономо-гравиметрического нивелирования. Высоты пунктов АГН необходимо также определять из геометрического нивелирования.

Как уже отмечалось, косвенное влияние на плановые координаты оказывают нормальные высоты через линейные измерения, т. е. через базисы и базисные стороны в триангуляции и через стороны полигонометрии. Целесообразно при модернизации сети определять геометрическим нивелированием прежде всего высоты базисных пунктов и пунктов полигонометрии.

При определении всех базисов инварными проволоками выполнялось геометрическое нивелирование. Как правило, в последующем при уравнивании нормальных высот пунктов ГГС результаты

этих нивелировок не использовались. Их целесообразно использовать, выполняя уравнивание нормальных высот при подготовке к общему уравниванию ГГС.

4.9. ГРАВИМЕТРИЧЕСКИЕ ПОПРАВКИ, ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ВЫСОТ ГЕОИДА

Для уравнивания ГГС используются гравиметрические данные. При уравнивании АГС, как пространственного построения, нужны те же результаты гравиметрических измерений, что и при астрономо-гравиметрическом нивелировании, т. е. гравиметрические поправки к астрономическому нивелированию. Для уравнивания геодезических сетей сгущения обычно используются карты высот квазигеоида.

Гравиметрические поправки вычисляются по формуле (3.5.7). Методика астрономо-гравиметрического нивелирования, в том числе вычисления гравиметрических поправок, изложена в [17]. Для гравиметрических поправок необходимо получать их средние квадратические ошибки.

Гравиметрические поправки вычисляются по сторонам между астропунктами. Эти стороны следует выбирать исходя из следующего. Астропункты в АГС, как правило, расположены парами. Условно назовем их первым и вторым. Между ними вычисляется гравиметрическая поправка.

Кроме того с первого астропункта вычисляются гравиметрические поправки на соседние первые астропункты, которые обычно расположены на удалении 100—200 км. Со второго астропункта достаточно вычислить две гравиметрические поправки на соседние первые пункты, при этом следует выбирать такие стороны, чтобы угол между ними был близок к 90°. Схема сторон астрономо-гравиметрического нивелирования показана на рис. 10.

С помощью этих гравиметрических поправок уравниваются геодезические высоты пунктов астрономо-гравиметрического нивелирования, т. е. астропунктов. Но геодезические высоты нужны на всех пунктах АГС, с которых выполнены линейные измерения, и на пунктах КГС и КГСС. На эти пункты надо интерпретировать геодезические высоты или высоты квазигеоида с пунктов астрономо-гравиметрического нивелирования.

Для интерполирования могут использоваться дополнительные гравиметрические поправки или разности высот геоида в общеземной системе. Рассмотрим интерполяционные формулы.

На рис. 11 показаны определяемый пункт i и ближайшие к нему пункты АГН, т. е. астропункты. Формулу для высоты квазигеоида над референц-эллипсоидом на определяемом пункте найдем на основании выражения (3.5.6):

$$\zeta_i + \frac{D_{Ai}}{2\rho''} \cos A_{Ai} \xi_i + \frac{D_{Ai}}{2\rho''} \sin A_{Ai} \eta_i = \zeta_A - \frac{D_{Ai}}{2\rho''} \cos A_{Ai} \xi_A - \frac{D_{Ai}}{2\rho''} \sin A_{Ai} \eta_A + R_{Ai} \quad (4.9.1)$$

где ζ_A — высота геоида на астропункте.

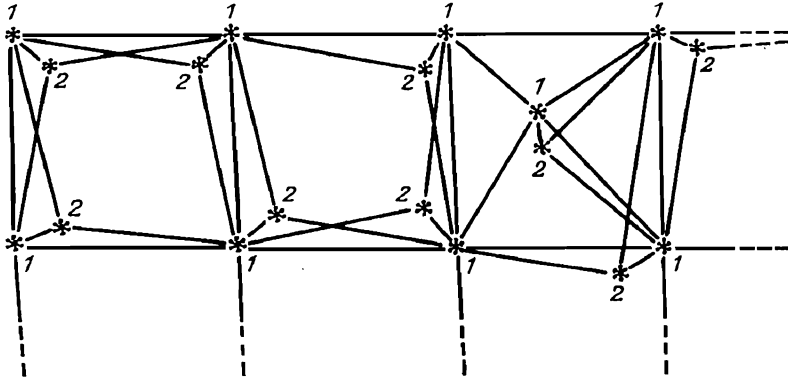


Рис. 10. Схема сторон астрономо-гравиметрического нивелирования

* 1

* 2

Δi

Рис. 11. Пункты АГН и определяемый пункт

* 4

* 3

Таких уравнений будет столько, сколько исходных пунктов. В этих уравнениях три неизвестных — ζ_i , ξ_i , η_i . Обычно интерполирование выполняется от четырех пунктов, поэтому возникает задача уравнивания. Уравнения поправок для гравиметрической поправки будут рассмотрены в главе 5.

Теперь рассмотрим интерполирование высот геоида над референц-эллипсоидом с помощью разностей высот геоида над общеземным эллипсоидом. Обозначения определяемого и исходных пунктов сохраним те же, что на рис. 11.

Высоту геоида определяемого пункта представим следующим выражением:

$$\zeta_i = \zeta_A + \Delta\zeta_{Ai}, \quad (4.9.2)$$

где ζ_A — высота геоида на астропункте; $\Delta\zeta_{Ai}$ — разность высот геоида в референционной системе.

Для разности высот геоида можно написать

$$\Delta\zeta_{ij} = \Delta\zeta_{ij}^r + \varepsilon_{ij}s_{ij}, \quad (4.9.3)$$

где $\Delta\zeta_{ij}^r$ — разность высот геоида в общеземной системе; ε_{ij} — составляющая угла между поверхностями референц-эллипсоида и общеземного эллипсоида в направлении между пунктами; s_{ij} — расстояние между пунктами.

Напишем выражение для угла ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_M \cos A_{ij} + \varepsilon_B \sin A_{ij}, \quad (4.9.4)$$

где $\varepsilon_m, \varepsilon_b$ — составляющие угла между поверхностями эллипсоидов соответственно в меридиане и в первом вертикале.

На основании (4.9.2)—(4.9.4) получим

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \zeta_1 + \Delta\zeta_{1i}^r + s_{1i} (\varepsilon_m \cos A_{1i} + \varepsilon_b \sin A_{1i}); \\ \zeta_i &= \zeta_2 + \Delta\zeta_{2i}^r + s_{2i} (\varepsilon_m \cos A_{2i} + \varepsilon_b \sin A_{2i}); \\ \zeta_i &= \zeta_3 + \Delta\zeta_{3i}^r + s_{3i} (\varepsilon_m \cos A_{3i} + \varepsilon_b \sin A_{3i}); \\ \zeta_i &= \zeta_4 + \Delta\zeta_{4i}^r + s_{4i} (\varepsilon_m \cos A_{4i} + \varepsilon_b \sin A_{4i}).\end{aligned}\tag{4.9.5}$$

В этих уравнениях три неизвестных — $\zeta_i, \varepsilon_m, \varepsilon_b$. Следовательно, интерполирование должно выполняться не менее чем от трех пунктов. Естественно, что интерполировать надежнее от четырех пунктов.

В случае четырех и более исходных пунктов надо делать уравнивание. На основании (4.9.5) напишем уравнение поправок разности высот геоида в общеземной системе между астропунктом и определенным пунктом:

$$d\zeta_i - s_{Ai} \cos A_{Ai} \varepsilon_m - s_{Ai} \sin A_{Ai} \varepsilon_b + (\zeta_i^0 - \zeta_A - \Delta\zeta_{Ai}^r) = v,\tag{4.9.6}$$

где ζ_i^0 — предварительное значение высоты квазигеоида над референц-эллипсоидом на определенном пункте.

4.10. ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ УРАВНИВАНИЯ

Оценка измеренных и уравненных величин является очень важной составной частью всех этапов работ по созданию и уравниванию геодезической сети. Результаты такой оценки нужны для того, чтобы выявить отдельные грубые результаты измерений, установить веса, соответствующие реальной точности измерений, обнаружить ошибки в информации, подготовленной для уравнивания, обеспечить возможность получения весовых матриц для уравнивания функций результатов измерения и, наконец, дать потребителям геодезической сети достоверное представление о ее точности в целом и об отдельных ее элементах.

Для уравнивания нужен не только сам результат измерения, но и его средняя квадратическая ошибка. Первоначальную оценку обычно получают по результатам измерения на станции. Полученная таким образом средняя квадратическая ошибка характеризует измеренную величину по внутренней сходимости.

Такая оценка необходима для первоначального заключения о качестве измерений, но она, как правило, недостаточно хорошо характеризует реальную точность измерений. Так, средняя квадратическая ошибка астрономического азимута, вычисленная на станции по отклонениям от среднего, как правило, меньше $0,5''$. Реальная же точность астрономических азимутов составляет $1,0—1,5''$.

Т а б л и ц а 4.10.1

Среднестатистические значения средних квадратических ошибок измерений

Вид измерения	Значение ср. кв. ошибки
Горизонтальные направления в триангуляции и полигонометрии	
1 класса	0,49"
2 класса	0,71"
3 класса	1,06"
4 класса	1,41"
1—2 разряда	5,00"
Базис, измеренный прибором Едерина (инварными проволоками)	1 мм + $2 \cdot 10^{-6} s$
Стороны в полигонометрии	
1 класса	10 мм + $3 \cdot 10^{-6} s$
2 класса	10 мм + $3 \cdot 10^{-6} s$
3 класса	10 мм + $4 \cdot 10^{-6} s$
4 класса	10 мм + $4 \cdot 10^{-6} s$
1—2 разряда	$10^{-6} s$
Базисные стороны в триангуляции	5 мм + $2 \cdot 10^{-6} s$
Астрономический азимут (двухсторонний)	0,80"
Астрономическая широта	0,50"
Астрономическая долгота	$0,50''/\cos \varphi$

Более надежными являются оценки по внешней сходимости, т. е. по разного рода условиям, которые выражают функциональные связи целых групп величин, к тому же, как правило, однородных. Именно на основе оценок по внешней сходимости были определены средние квадратические ошибки многих видов измерений, принятые для уравнения ГГС. Величины этих ошибок приведены в табл. 4.10.1.

Как бы тщательно не разрабатывались методики оценки по материалам собственно наблюдений, обнаружить все грубые измерения все-таки не удастся. Кроме того, при подготовке информации к уравниванию в результаты измерений вносятся всевозможные ошибки, в том числе грубо искажающие целые массивы измерений.

Чтобы обнаружить такие ошибки, обычно выполняют предварительное уравнивание участков астрономо-геодезической сети и даже всей АГС.

При оценке информации по результатам предварительных уравниваний АГС используются полученные при этом значения поправок к результатам измерений и ковариационные матрицы. Важная роль отводится также косвенным методам оценки, основанным на сравнении с другими видами информации. Так, при первом общем уравнивании АГС одной из задач ее предварительных уравниваний являлась оценка качества геодезической информации. Для решения этой задачи предварительно уравненная АГС сравнивалась с другими построениями, в частности, с космической геодезической сетью.

Поправки к результатам измерений, т. е. к измеренным величинам, можно вычислить с помощью уравнений поправок или по формулам свободных членов.

В первом случае для вычисления поправки к измеренной величине необходимо в уравнение поправок (2.1.6) подставить поправки к предварительным значениям независимых параметров. Для этого, естественно, надо хранить сами уравнения поправок. В больших сетях уравнения поправок обычно не только не хранят, но даже и не составляют, а составляют сразу нормальные уравнения.

На практике чаще пользуются формулами, аналогичными формулам свободных членов. Из выражения (2.1.2) следует, что

$$v_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) - t_i, \quad (4.10.1)$$

где X_1, \dots, X_n — уравненные значения независимых параметров.

Первый член в правой части этого выражения есть результат измерения, вычисленный с уравненными параметрами,

$$t_i^{yp} = f_i(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (4.10.2)$$

поэтому можно написать

$$v_i = t_i^{yp} - t_i. \quad (4.10.3)$$

Выражение (4.10.1) аналогично выражению свободного члена (2.1.5), т. е. свободный член и поправка к измеренной величине вычисляются по одной и той же формуле. Разница состоит лишь в том, что в вычислении свободного члена участвуют предварительные значения параметров, а при вычислении поправок — уравненные значения параметров.

Глава 5

УРАВНИВАНИЕ АГС С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УРАВНИВАНИЯ АГС

Современные астрономо-геодезические сети создаются как пространственные построения. С этой целью измеряются горизонтальные углы, расстояния, астрономические азимуты, широты и долготы, геодезические азимуты, нормальные высоты и выполняются гравиметрические измерения. Решение задачи по уравниванию АГС состоит в совместном уравнивании результатов этих астрономических, геодезических и гравиметрических измерений.

В этой главе рассмотрим уравнивание АГС с геодезическими координатами, когда положения точек задаются значениями геодезических широт, долгот и высот. Уравнения поправок АГС с

координатами проекции Гаусса—Крюгера будут рассмотрены в следующей главе.

Горизонтальные углы измеряются в астрономической системе координат, т. е. в плоскости астрономического горизонта. В уравнивании можно включать именно эти углы, но тогда в уравнениях поправок необходимо будет предусматривать поправки за их редуцирование на плоскость геодезического горизонта. Это неоправданно усложнило бы процесс уравнивания. Проще и достаточно точно можно редуцировать углы в плоскость геодезического горизонта, т. е. на эллипсоид, на стадии предварительной обработки.

Требуемые для этого величины, в том числе и уклонения отвесных линий, с необходимой точностью могут быть вычислены до уравнивания АГС. Это же относится и к горизонтальным направлениям, в том числе измеряемым при определении азимутов из астрономических наблюдений.

Нормальные высоты пунктов геодезических сетей уравниваются независимо от уравнивания остальных измеренных элементов сетей. Как уже отмечалось, находить к ним поправки из совместного уравнивания бесполезно, т. к. это не даст положительного эффекта, тем более что высоты многих пунктов получены из геометрического нивелирования точнее, чем плановые координаты.

Редуцировать на эллипсоид расстояния (базисы, базисные стороны, стороны полигонометрии) до уравнивания всей АГС не представляется возможным, так как для этого необходимы геодезические высоты (или высоты квазигеоида), которые сами получаются из уравнивания. Следовательно, до уравнивания расстояния следует редуцировать на средний уровень моря с помощью нормальных высот, а дальнейшее редуцирование на эллипсоид необходимо предусматривать в уравнениях поправок.

Астрономические и геодезические азимуты из наблюдений звезд определяют в прямом и обратном направлениях. Среднее значение азимута меньше искажено влиянием рефракции, чем прямой и обратный азимуты в отдельности. Если в уравнивание включать прямые и обратные азимуты, то будет искажена оценка уравненных величин. Следовательно, уравнения поправок предпочтительнее составлять для средних значений азимутов.

Из гравиметрических измерений непосредственно в интересах развития АГС используются аномалии силы тяжести. Уравнивать аномалии совместно с другими измеренными элементами сети нельзя, т. к. это слишком усложнило бы уравнивание. Проще вычислять гравиметрические поправки к астрономическому нивелированию (3.5.7), которые входят в формулу астрономо-гравиметрического нивелирования (3.5.5), составлять с ними уравнения поправок, а также использовать их для интерполяции высот геоида.

Аномалии силы тяжести могут использоваться для вычисления уклонений отвесных линий. Уклонения отвесных линий при уравнивании АГС нужны лишь для редуцирования горизонтальных углов, поэтому включать их в уравнения поправок нет смысла.

По гравиметрическим данным могут также вычисляться высоты квазигеоида гравиметрическим методом. Эти высоты получают в общеземной системе координат, поэтому включать их лучше не на стадии уравнивания АГС, а при совместном уравнивании астрономо-геодезической и космической геодезической сети.

Может возникнуть необходимость включать в уравнивание АГС отдельные расстояния, азимуты и разности высот квазигеоида, полученные, например, методами космической геодезии.

Из любых, в том числе спутниковых измерений, в конечном счете, получают расстояния между парами точек, т. е. длины пространственных прямых. Если известны нормальные высоты обеих точек, пространственная прямая может быть редуцирована на средний уровень моря. Именно такие значения базисов и сторон полигонометрии рассматриваются при уравнивании АГС как результаты измерения.

Возможны и такие случаи, когда по результатам измерений средствами космической геодезии точнее будут вычисляться длины геодезических линий, а не расстояния, редуцированные на средний уровень моря. Следовательно, потребуются уравнения поправок длин геодезических линий.

Методами космической геодезии могут определяться разности геодезических высот, что позволяет вычислять разности высот квазигеоида. Чтобы обеспечить высокую точность разностей высот квазигеоида, иногда надо знать сравнительно грубо параметры перехода от системы координат, в которой получены высоты, к системе, в которой уравнивается АГС.

При составлении уравнений поправок потребуется пользоваться двумя системами координат — геодезической и астрономической, поэтому в качестве независимых параметров примем геодезические координаты B, L, H и астрономические φ, λ .

В результате уравнивания АГС должны быть получены уравненные геодезические координаты B, L, H и их ковариационная матрица. По уравненным геодезическим высотам и нормальным высотам могут быть вычислены высоты квазигеоида над референц-эллипсоидом и составлена карта этих высот, которая необходима для совместного уравнивания АГС и КГС.

5.2 УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО АЗИМУТА

Сначала получим уравнение поправок для одностороннего азимута. В качестве измеренной величины примем геодезический азимут A_{12} , полученный из астрономических наблюдений и вычисленный с предварительными геодезическими координатами. Связь азимута A_{12} и азимута A_{12}^{yp} , соответствующего уравненным координатам, представим выражением

$$A_{12} + v_{A_{12}} = A_{12}^{yp} - (L_1^{yp} - L_1^0) \sin B_1. \quad (5.2.1)$$

Учитывая, что поправка к предварительному значению долготы равна

$$dL_1 = L_1^{yp} - L_1^0,$$

преобразуем выражение (5.2.1):

$$A_{12} + v_{A_{12}} + dL_1 \sin B_1 = A_{12}^{yp}. \quad (5.2.2)$$

Для уравненного азимута можно написать:

$$A_{12}^{yp} = A_{12}^0 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_2} dL_2, \quad (5.2.3)$$

где A_{12}^0 — значение азимута, вычисленное с предварительными координатами из решения обратной геодезической задачи.

Теперь напишем уравнение поправок в общем виде:

$$v_{A_{12}} = A_{12}^0 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_2} dL_2 - (A_{12} + dL_1 \sin B_1). \quad (5.2.4)$$

Выражения для коэффициентов уравнения поправок имеют вид:

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial B_1} = \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12};$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial B_2} = \frac{M_2}{m} \sin A_{21};$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial L_1} = \sin B_1 - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{12} = \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21};$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial L_2} = - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21}. \quad (5.2.5)$$

В этих выражениях:

M, N — главные радиусы кривизны в точках 1 и 2;

s — длина геодезической линии;

m — приведенная длина геодезической линии.

При вычислении координат с точностью 1 мм для расстояний до 600 км ($s \leq 0,1 a$) приведенную длину геодезической линии можно вычислять по формулам

$$m = R_1 \sin \frac{s}{R_1};$$

$$R_1 = \sqrt{M_1 N_1}, \quad (5.2.6)$$

где R_1 — средний радиус кривизны.

Производная приведенной длины геодезической линии вычисляется по формуле

$$\left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) = \cos \frac{s}{R_1}.$$

Подставив (5.2.5) в (5.2.4), получаем

$$\begin{aligned} v_{A_{12}} = & \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{12} dL_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \\ & - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + (A_{12}^0 - A_{12}). \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Обозначим свободный член

$$l_{A_{12}} = A_{12}^0 - A_{12} \quad (5.2.8)$$

и запишем уравнение поправок для одностороннего геодезического азимута:

$$\begin{aligned} v_{A_{12}} = & \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{12} dL_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \\ & - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + l_{A_{12}}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Подчеркнем, что здесь $v_{A_{12}}$ — поправка к измеренному геодезическому азимуту:

$$A_{12} + v_{A_{12}} = A'_{12},$$

где A'_{12} — уравниваемое значение азимута, но соответствующее предварительному значению долготы L_1^0 .

Уравниваемое значение азимута, соответствующее уравниваемым координатам, можно вычислить по формуле

$$A_{12}^{yP} = A'_{12} - (L_1^0 - L_1^{yP}) \sin B_1. \quad (5.2.10)$$

С учетом правой части третьего выражения (5.2.5) напишем еще одно выражение для уравнения поправок:

$$\begin{aligned} v_{A_{12}} = & \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 + \left(\frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} - \sin B_1 \right) dL_1 + \\ & + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + l_{A_{12}}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

В § 5.1 отмечалось, что в уравнивание следует включать не односторонние азимуты, а среднее из прямого и обратного. Чтобы вывести уравнение поправок для среднего значения, напишем на основании (5.2.9) уравнение поправок для обратного азимута:

$$\begin{aligned} v_{A_{21}} = & \frac{M_2}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{21} dL_2 + \frac{M_1}{m} \sin A_{12} dB_1 - \\ & - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \cos A_{12} dL_1 + l_{A_{21}}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Обозначив

$$v_{A_{cp}} = \frac{v_{A_{12}} + v_{A_{21}}}{2},$$

получим из выражений (5.2.9) и (5.2.12) уравнение поправок для среднего из прямого и обратного азимутов:

$$v_{A_{cp}} = \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\right) + 1}{2} \frac{M_1}{m} \sin A_{12} dB_1 - \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\right) + 1}{2} \frac{N_1 \cos B_1}{m} \cos A_{12} dL_1 + \\ + \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\right) + 1}{2} \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\right) + 1}{2} \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + l_{A_{cp}}. \quad (5.2.13)$$

В этом выражении

$$l_{A_{cp}} = \frac{l_{A_{12}} + l_{A_{21}}}{2}. \quad (5.2.14)$$

Выражение свободного члена получим из (5.2.14) и (5.2.8):

$$l_{A_{cp}} = \frac{1}{2} (A_{12}^0 + A_{21}^0) - \frac{1}{2} (A_{12} + A_{21}). \quad (5.2.15)$$

В результате уравнивания будет получено значение полусуммы из прямого и обратного азимутов

$$\frac{1}{2} (A_{12} + A_{21})' = \frac{1}{2} (A_{12} + A_{21}) + v_{A_{cp}}, \quad (5.2.16)$$

соответствующее предварительным координатам.

Уравненные значения собственно азимутов, соответствующих предварительным долготам, могут быть вычислены по формулам

$$A_{12}' = \frac{1}{2} (A_{12} + A_{21})' \pm 90^\circ + \frac{1}{2} (L_1^0 - L_2^0) \sin B_m;$$

$$A_{21}' = \frac{1}{2} (A_{12} + A_{21})' \pm 90^\circ + \frac{1}{2} (L_2^0 - L_1^0) \sin B_m.$$

Уравненные азимуты, соответствующие уравненным долготам, можно получить, исходя из (5.2.10), по формулам

$$A_{12}^{yp} = A_{12}' - (L_1^0 - L_1^{yp}) \sin B_1; \quad A_{21}^{yp} = A_{21}' - (L_2^0 - L_2^{yp}) \sin B_2$$

или по уравненным значениям геодезических координат.

5.3. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВКИ ДЛЯ АСТРОНОМИЧЕСКОГО АЗИМУТА

Напишем очевидное равенство, связывающее измеренный астрономический азимут a_{12} и его уравненное значение a_{12}^{yp} ,

$$a_{12}^{yp} = a_{12} + v_{A_{12}}. \quad (5.3.1)$$

Такие же уравнения напишем для координат:

$$L_1^{yp} = L_1^0 + dL_1;$$

$$\lambda_1^{yp} = \lambda_1^0 + d\lambda_1, \quad (5.3.2)$$

где dL_1 и $d\lambda_1$ — поправки к предварительным значениям геодезической и астрономической долгот.

Связь между урaвненными значениями астрономического и геодезического азимутов устанавливается формулой Лапласа:

$$a_{12}^{yp} = A_{12}^{yp} - (L_1^{yp} - \lambda_1^{yp}) \sin B_1. \quad (5.3.3)$$

На основании (5.3.1)–(5.3.3) и с учетом (5.2.3) напишем:

$$\begin{aligned} v_{a_{12}} = & A_{12}^0 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_2} dL_2 - dL_1 \sin B_1 + \\ & + d\lambda_1 \sin B_1 - L_1^0 \sin B_1 + \lambda_1^0 \sin B_1 - a_{12}. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Подставим в это выражение коэффициенты (5.2.5)

$$\begin{aligned} v_{a_{12}} = & \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{12} dL_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \\ & - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + \sin B_1 d\lambda_1 + [A_{12}^0 - a_{12} + (\lambda_1^0 - L_1^0) \sin B_1]. \end{aligned}$$

Обозначим свободный член:

$$l_{a_{12}} = A_{12}^0 - a_{12} + (\lambda_1^0 - L_1^0) \sin B_1 \quad (5.3.5)$$

и с ним напишем уравнение поправок для одностороннего астрономического азимута:

$$\begin{aligned} v_{a_{12}} = & \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{12} dL_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \\ & - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + \sin B_1 d\lambda_1 + l_{a_{12}}. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

По аналогии со средним геодезическим азимутом получим уравнение поправок для среднего значения астрономического азимута. Для этого на основании (5.3.6) напишем уравнение поправок для обратного азимута:

$$\begin{aligned} v_{a_{21}} = & \frac{M_2}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \cos A_{21} dL_2 + \frac{M_1}{m} \sin A_{12} dB_1 - \\ & - \frac{N_1 \cos B_1}{m} \cos A_{12} dL_1 + \sin B_2 d\lambda_2 + l_{a_{21}}. \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Из выражений (5.3.6) и (5.3.7), обозначив

$$v_{a_{cp}} = \frac{v_{a_{12}} + v_{a_{21}}}{2},$$

получаем уравнение поправок для среднего значения астрономического азимута:

$$v_{a_{cp}} = \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) + 1}{2} \frac{M_1}{m} \sin A_{12} dB_1 - \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) + 1}{2} \cdot \frac{N_1 \cos B_1}{m} \cos A_{12} dL_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\right) + 1}{2} \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial s}\right) + 1}{2} \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 + \frac{\sin B_1}{2} d\lambda_1 + \\
& + \frac{\sin B_2}{2} d\lambda_2 + l_{a_{cp}}.
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Выражение для свободного члена

$$l_{a_{cp}} = \frac{l_{a_{12}} + l_{a_{21}}}{2}$$

получим, исходя из (5.3.5),

$$l_{a_{cp}} = \left[\frac{A_{12}^0 + A_{21}^0}{2} + \frac{(\lambda_1^0 - L_1^0) \sin B_1 + (\lambda_2^0 - L_2^0) \sin B_2}{2} - \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \right]. \tag{5.3.9}$$

В результате уравнивания будут получены уравненные значения величин

$$\left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)_{yp} = \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right) + v_{a_{cp}} \tag{5.3.10}$$

и астрономических долгот λ_1^{yp} и λ_2^{yp} . С этими значениями вычисляются уравненные значения собственно астрономических азимутов (условно назовем их свободными от рефракции):

$$\begin{aligned}
a_{12}^{yp} &= \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)_{yp} \pm 90^\circ + \frac{1}{2} (\lambda_1^{yp} - \lambda_2^{yp}) \sin \varphi_m; \\
a_{21}^{yp} &= \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2}\right)_{yp} \pm 90^\circ + \frac{1}{2} (\lambda_2^{yp} - \lambda_1^{yp}) \sin \varphi_m.
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Эти же значения можно получить следующим образом: по уравненным геодезическим координатам вычислить уравненные геодезические азимуты и от них с уравненными астрономическими координатами перейти к уравненным астрономическим азимутам по формуле (5.3.3).

5.4. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ

При уравнивании направлений приходится для каждого пункта принимать дополнительный параметр — ориентирующий угол, т. е. азимут нулевого направления (направления, значение которого равно нулю).

На рис. 12 обозначены:

z_1 — ориентирующий угол;

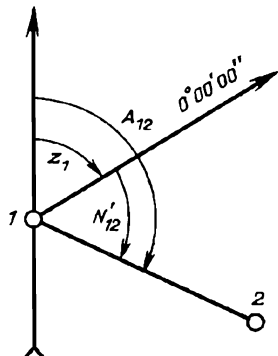
N'_{12} — направление с пункта 1 на пункт 2;

A_{12} — азимут направления 1—2.

На основании этого рисунка напишем:

$$N'_{12} = A_{12} - z_1. \tag{5.4.1}$$

Рис. 12. Ориентирующий угол



Исходя из этого равенства, получим уравнение поправок. Для этого обозначим:

N_{12} — измеренное значение направления;

z_1^0 — предварительное значение ориентирующего угла;

A_{12}^0 — значение азимута, вычисленное с предварительными координатами.

С этими обозначениями напомним:

$$N_{12} + v_{N_{12}} = \left(A_{12}^0 + \frac{\partial A}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A}{\partial L_2} dL_2 \right) - (z_1^0 + dz_1). \quad (5.4.2)$$

Подставим сюда значения производных (5.2.5). После подстановки получим:

$$v_{N_{12}} = \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 + \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_2 - dz_1 + (A_{12}^0 - z_1^0 - N_{12}). \quad (5.4.3)$$

Обозначим свободный член

$$l_{N_{12}} = A_{12}^0 - z_1^0 - N_{12}$$

и напомним уравнение поправок для горизонтального направления:

$$v_{N_{12}} = -dz_1 + \frac{M_1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \sin A_{12} dB_1 + \frac{N_2 \cos B_2}{m} \cos A_{21} dL_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{2} \cos A_{21} dL_2 + l_{N_{12}}. \quad (5.4.4)$$

При уравнивании небольших сетей, когда можно не опасаться накопления ошибок координат из-за ошибок коэффициентов при неизвестных, принимают

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \approx \frac{1}{s}; \quad \frac{1}{m} \approx \frac{1}{s}.$$

Тогда уравнение поправок можно записать в следующем виде:

$$v_{N_{12}} = -dz_1 + \frac{M_1}{s_{12}} \sin A_{12} dB_1 + \frac{N_2 \cos B_2}{s_{12}} \cos A_{21} dL_1 + \frac{M_2}{s_{12}} \sin A_{21} dB_2 - \\ - \frac{N_2 \cos B_2}{s_{12}} \cos A_{21} dL_2 + l_{N_{12}}.$$

Иногда значение z_1^0 вычисляют по формуле

$$z_1^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (A_{1i}^0 - N_{1i}),$$

где n — число направлений на пункте.

В этом случае

$$\Sigma l_N = 0$$

для любого пункта.

5.5. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО УГЛА

Уравнение поправок получим для угла, редуцированного на эллипсоид, т. е. для угла между двумя геодезическими линиями, поэтому в качестве результата измерений будем считать такие измеренные углы, в которые введены соответствующие поправки (см. § 4.3) на этапе предварительных вычислений. Для измеренного угла β_{213} и уравненного β_{213}^{yp} напомним уравнение

$$\beta_{213} + v_{\beta_{213}} = \beta_{213}^{yp}. \quad (5.5.1)$$

Значение уравненного угла представим как разность уравненных геодезических азимутов

$$\beta_{213}^{yp} = A_{13}^{yp} - A_{12}^{yp}. \quad (5.5.2)$$

На основании (5.5.2) и (5.2.3) преобразуем (5.5.1):

$$v_{\beta_{213}} = (A_{13}^0 + \frac{\partial A_{13}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{13}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_{13}}{\partial B_3} dB_3 + \frac{\partial A_{13}}{\partial L_3} dL_3) - \\ - (A_{12}^0 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial A_{12}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial A_{12}}{\partial L_2} dL_2) - \beta_{213}. \quad (5.5.3)$$

Обозначим свободный член

$$l_{\beta_{213}} = (A_{13}^0 - A_{12}^0) - \beta_{213} \quad (5.5.4)$$

и, подставив в (5.5.3) выражения коэффициентов из (5.2.5), получим уравнение поправок горизонтального угла,

$$v_{\beta_{213}} = \left[\frac{M_1}{m_{13}} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right)_{13} \sin A_{13} - \frac{M_1}{m_{12}} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right)_{12} \sin A_{12} \right] dB_1 -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{N_1 \cos B_1}{m_{13}} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right)_{13} \cos A_{13} - \frac{N_1 \cos B_1}{m_{12}} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right)_{12} \cos A_{12} \right] dL_1 + \frac{M_3}{m_{13}} \sin A_{31} dB_3 - \\
& - \frac{N_3 \cos B_3}{m_{13}} \cos A_{31} dL_3 - \frac{M_2}{m_{12}} \sin A_{21} dB_2 + \frac{N_2 \cos B_2}{m_{12}} \cos A_{21} dL_2 + l_{\beta_{213}}. \quad (5.5.5)
\end{aligned}$$

Горизонтальные углы измеряются между сторонами, длины которых меньше 60 км ($s < 0,01 a$). Для таких расстояний можно положить

$$\frac{1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial s} \right) \approx \frac{1}{s}; \quad \frac{1}{m} \approx \frac{1}{s}.$$

Это приведет к ошибке в коэффициентах уравнений поправок порядка $s/3a$. Если даже поправки dB и dL достигают $1''$, то и тогда ошибки членов уравнений поправок будут меньше $0,003''$. В небольших сетях накопление этих ошибок не окажет существенного влияния. Следовательно, уравнения поправок углов для небольших сетей можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
v_{\beta_{213}} = & \left(\frac{M_1}{s_{13}} \sin A_{13} - \frac{M_1}{s_{12}} \sin A_{12} \right) dB_1 - \left(\frac{N_1 \cos B_1}{s_{13}} \cos A_{13} - \right. \\
& \left. - \frac{N_1 \cos B_1}{s_{12}} \cos A_{12} \right) dL_1 + \frac{M_3}{s_{13}} \sin A_{31} dB_3 - \frac{N_3 \cos B_3}{s_{13}} \cos A_{31} dL_3 - \\
& - \frac{M_2}{s_{12}} \sin A_{21} dB_2 + \frac{N_2 \cos B_2}{s_{12}} \cos A_{21} dL_2 + l_{\beta_{213}}. \quad (5.5.6)
\end{aligned}$$

5.6. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ДЛЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Астрономические координаты являются результатами измерений и вместе с тем приняты в качестве необходимых параметров. Поэтому уравнения поправок имеют вид:

$$\begin{aligned}
v_{\varphi} &= d\varphi + l_{\varphi}; \\
v_{\lambda} &= d\lambda + l_{\lambda}. \quad (5.6.1)
\end{aligned}$$

В этих уравнениях поправок свободные члены вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
l_{\varphi} &= \varphi^0 - \varphi; \\
l_{\lambda} &= \lambda^0 - \lambda. \quad (5.6.2)
\end{aligned}$$

где φ , λ — измеренные значения астрономических координат.

5.7. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК РАССТОЯНИЯ, ПРИВЕДЕННОГО К СРЕДНЕМУ УРОВНЮ МОРЯ

В качестве результата измерения примем расстояние D_{12} между двумя пунктами, редуцированное на средний уровень моря. Следовательно,

$$D_{12} + \nu_D = D_{12}^{yp}, \quad (5.7.1)$$

где D_{12}^{yp} — уравненное расстояние, приведенное на средний уровень моря.

Из решения обратной геодезической задачи вычисляется длина геодезической линии на эллипсоиде, поэтому D_{12}^{yp} выразим через геодезическую линию на основании (4.4.15):

$$D_{12}^{yp} = s_{12}^{yp} + \frac{1}{2} D_{12}^{yp} \left(\frac{\xi_1^{yp} + \xi_2^{yp}}{R_A} \right) + \frac{(H_2^y - H_1^y) (\xi_2^{yp} - \xi_1^{yp})}{D_{12}^{yp}} - \frac{(D_{12}^{yp})^3}{24R_A^2}. \quad (5.7.2)$$

При уравнивании четвертый член целесообразно учитывать как редуцирующую величину при вычислении свободных членов уравнений поправок.

В правой части выражения (5.7.2) можно заменить D_{12}^{yp} на геодезическую линию s_{12}^0 , вычисленную с предварительными координатами. При этом во втором, третьем и четвертом членах будут допущены ошибки порядка $(D_{12}^0 - s_{12}^0) \frac{\xi_{cp}}{a}$, $(D_{12} - s_{12}^0) \alpha \vartheta_{cp}$, $\frac{(D_{12} - s_{12}^0) D^2}{8a^2}$ соответственно, т. е. существенно меньше 1 мм. С учетом этого и на основании (4.4.3) можно принять, что

$$D_{12}^{yp} = s_{12}^{yp} + \frac{1}{2} s_{12}^0 \left[\frac{H_1^0 + dH_1 - H_1^y}{R_A} + \frac{H_2^0 + dH_2 - H_2^y}{R_A} \right] + \frac{(H_2^y - H_1^y) (H_2^0 + dH_2 - H_2^y - H_1^0 - dH_1 + H_1^y)}{s_{12}^0} - \frac{s_{12}^0{}^3}{24R_A^2}, \quad (5.7.3)$$

где H^0 — предварительные значения геодезических высот; dH — поправки к предварительным геодезическим высотам.

Запишем выражение для уравненного значения длины геодезической линии

$$s_{12}^{yp} = s_{12}^0 + \frac{\partial s_{12}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial s_{12}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial s_{12}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial s_{12}}{\partial L_2} dL_2, \quad (5.7.4)$$

где s_{12}^0 — длина геодезической линии, вычисленная с предварительными координатами.

Приведем значения производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_{12}}{\partial B_1} &= -M_1 \cos A_{12}; \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial L_1} &= -N_1 \cos B_1 \sin A_{12}; \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial B_2} &= -M_2 \cos A_{21}; \\ \frac{\partial s_{12}}{\partial L_2} &= -N_2 \cos B_2 \sin A_{21}.\end{aligned}\tag{5.7.5}$$

С учетом (5.7.3)—(5.7.5) перепишем (5.7.1)

$$\begin{aligned}v_D &= s_{12}^0 - M_1 \cos A_{12} dB_1 - N_1 \cos B_1 \sin A_{12} dL_1 - \\ &- M_2 \cos A_{21} dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 + \left(\frac{s_{12}^0}{2R_A} - \frac{H_2^y - H_1^y}{s_{12}^0} \right) dH_1 + \\ &+ \left(\frac{s_{12}^0}{2R_A} + \frac{H_2^y - H_1^y}{s_{12}^0} \right) dH_2 + \frac{s_{12}^0}{2} \left[\frac{(H_1^0 - H_1^y)}{R_A} + \frac{(H_2^0 - H_2^y)}{R_A} \right] + \\ &+ \frac{(H_2^y - H_1^y)(H_2^0 - H_2^y - H_1^0 + H_1^y)}{s_{12}^0} - \frac{s_{12}^0{}^3}{24R_A^2} - D_{12}.\end{aligned}\tag{5.7.6}$$

Обозначим свободный член:

$$\begin{aligned}l_D &= s_{12}^0 + \frac{s_{12}^0}{2} \left[\frac{(H_1^0 - H_1^y)}{R_A} + \frac{(H_2^0 - H_2^y)}{R_A} \right] + \frac{(H_2^y - H_1^y)(H_2^0 - H_2^y - H_1^0 + H_1^y)}{s_{12}^0} - \\ &- \frac{s_{12}^0{}^3}{24R_A^2} - D_{12}.\end{aligned}\tag{5.7.7}$$

Запишем это выражение в ином виде:

$$\begin{aligned}l_D &= D_{12}^0 - D_{12}; \\ D_{12}^0 &= s_{12}^0 + \frac{1}{2} s_{12}^0 \left[\frac{(H_1^0 - H_1^y)}{R_A} + \frac{(H_2^0 - H_2^y)}{R_A} \right] + \\ &+ \frac{(H_2^y - H_1^y)(H_2^0 - H_2^y - H_1^0 + H_1^y)}{s_{12}^0} - \frac{s_{12}^0{}^3}{24R_A^2}.\end{aligned}$$

В (5.7.6) поправки dB и dL даны в радианах. Напишем уравнение поправок расстояний для случая, когда поправки выражаются в секундах дуги,

$$\begin{aligned}
v_D = & -\frac{M_1}{\rho''} \cos A_{12} dB_1 - \frac{N_1}{\rho''} \cos B_1 \sin A_{12} dL_1 - \frac{M_2}{\rho''} \cos A_{21} dB_2 - \\
& -\frac{N_2}{\rho''} \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 + \left(\frac{s_{12}^0}{2R_A} - \frac{H_2^y - H_1^y}{s_{12}^0} \right) dH_1 + \\
& + \left(\frac{s_{12}^0}{2R_A} + \frac{H_2^y - H_1^y}{s_{12}^0} \right) dH_2 + l_D.
\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

При составлении этого уравнения поправок целесообразно иметь в виду уравнение Клеро

$$N_1 \cos B_1 \sin A_{12} = -N_2 \cos B_2 \sin A_{21}. \tag{5.7.9}$$

5.8. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВК ДЛИНЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Напишем выражение, связывающее измеренное значение длины геодезической линии и ее уравненное значение,

$$s_{12} + v_s = s_{12}^{yp}. \tag{5.8.1}$$

Подставим сюда выражение (5.7.4)

$$v_s = \frac{\partial s_{12}}{\partial B_1} dB_1 + \frac{\partial s_{12}}{\partial L_1} dL_1 + \frac{\partial s_{12}}{\partial B_2} dB_2 + \frac{\partial s_{12}}{\partial L_2} dL_2 + (s_{12}^0 - s_{12}), \tag{5.8.2}$$

где s_{12}^0 — длина геодезической линии, вычисленная с предварительными координатами из решения обратной геодезической задачи.

Обозначим свободный член

$$l_s = s_{12}^0 - s_{12} \tag{5.8.3}$$

и, подставив в (5.8.2) производные (5.7.5), получим уравнение поправок длины геодезической линии:

$$\begin{aligned}
v_s = & -M_1 \cos A_{12} dB_1 - N_1 \cos B_1 \sin A_{12} dL_1 - \\
& -M_2 \cos A_{21} dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 + l_s.
\end{aligned} \tag{5.8.4}$$

По аналогии с (5.7.8) запишем это уравнение для случая, когда поправки к геодезическим широтам и долготам выражаются в секундах дуги,

$$\begin{aligned}
v_s = & -\frac{M_1}{\rho''} \cos A_{12} dB_1 - \frac{N_1}{\rho''} \cos B_1 \sin A_{12} dL_1 - \\
& -\frac{M_2}{\rho''} \cos A_{21} dB_2 - \frac{N_2}{\rho''} \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 + l_s.
\end{aligned} \tag{5.8.5}$$

Отметим, что уравнение Клеро (5.7.9) имеет отношение и к этому уравнению поправок.

Уравнение поправок длины геодезической линии широко использовалось при раздельном уравнивании плановых координат и астрономо-гравиметрического нивелирования в АГС. При простран-

ственном уравнивании АГС необходимость в нем возникает редко. При уравнивании же геодезических сетей сгущения на основе твердых пунктов АГС это уравнение по-прежнему будет основным линейным уравнением поправок.

5.9. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ ПОПРАВКИ

Искомое уравнение поправок получим из формулы астрономо-гравиметрического нивелирования (3.5.5). Второй член этой формулы — гравиметрическую поправку

$$R_{12} = (N_2 - N_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} (\Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2), \quad (5.9.1)$$

вычисляемую по гравиметрическим данным, будем при уравнивании сети рассматривать как результат измерения, поэтому напишем:

$$v_R + R_{12} = R_{12}^{yp}. \quad (5.9.2)$$

Уравненное значение R_{12}^{yp} представим так:

$$R_{12}^{yp} = R_{12}^0 + dR,$$

и тогда

$$v_R = dR + (R_{12}^0 - R_{12}). \quad (5.9.3)$$

Чтобы получить выражения для R_{12}^0 и dR , напишем на основании (3.5.5) с учетом обозначения (5.9.1) выражение для гравиметрической поправки

$$R_{12} = (\zeta_2 - \zeta_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} \{ (\varphi_1 - B_1 + \varphi_2 - B_2) \cos A_{12} + [(\lambda_1 - L_1) \cos B_1 + (\lambda_2 - L_2) \cos B_2] \sin A_{12} \}. \quad (5.9.4)$$

На основании этого выражения получим

$$dR_{12} = d\zeta_2 - d\zeta_1 + \frac{D_{12}}{2\rho''} \cos A_{12} (d\varphi_1 + d\varphi_2 - dB_1 - dB_2) + \frac{D_{12}}{2\rho''} \sin A_{12} \cos B_1 (d\lambda_1 - dL_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} \sin A_{12} \cos B_2 (d\lambda_2 - dL_2). \quad (5.9.5)$$

К нормальным высотам

$$H^y = H - \zeta \quad (5.9.6)$$

поправки при уравнивании не отыскиваются, поэтому

$$dH = d\zeta. \quad (5.9.7)$$

Исходя из выражений (5.9.3), (5.9.5) и (5.9.7), получим уравнение поправок для гравиметрической поправки

$$v_R = dH_2 - dH_1 + \frac{D_{12}}{2\rho''} \cos A_{12} (d\varphi_1 + d\varphi_2 - dB_1 - dB_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_{12}}{2\rho''} \sin A_{12} \cos B_1 (d\lambda_1 - dL_1) + \\
& + \frac{D_{12}}{2\rho''} \sin A_{12} \cos B_2 (d\lambda_2 - dL_2) + l_R.
\end{aligned} \tag{5.9.8}$$

Свободный член этого уравнения в соответствии с (5.9.3) вычисляется по формуле

$$l_R = R_{12}^0 - R_{12}. \tag{5.9.9}$$

Значение R_{12}^0 получим из (5.9.4) и (5.9.6)

$$\begin{aligned}
R_{12}^0 = & (H_2^0 - H_2') - (H_1^0 - H_1') + \frac{D_{12}}{2\rho''} \{ (\varphi_1^0 - B_1^0 + \varphi_2^0 - B_2^0) \cos A_{12} + \\
& + [(\lambda_1^0 - L_1^0) \cos B_1 + (\lambda_2^0 - L_2^0) \cos B_2] \sin A_{12} \}.
\end{aligned} \tag{5.9.10}$$

Вывод уравнения поправок (5.9.8) дан для тех пунктов, на которых выполнены астрономические наблюдения, т. е. для пунктов астрономо-гравиметрического нивелирования. Это уравнение позволяет получить уравненные значения геодезических высот. Но геодезические высоты нужны не только на пунктах АГН.

Для уравнивания необходимо высоты от пунктов АГН передавать, в частности, на пункты КГС, на пункты, с которых выполнены линейные измерения, и на некоторые другие пункты. В этом случае уравнения поправок (5.9.8) используются, по сути дела, для интерполяции высот квазигеоида и астрономических координат. Каждое уравнение поправок будет составляться для пары пунктов, один из которых — пункт АГН.

В случае интерполяции реальными неизвестными в уравнениях (5.9.8) являются только dH_1 , $d\varphi_1$, $d\lambda_1$, а остальные неизвестные получаются независимо от этого уравнения, т. е. по другим результатам измерений. Следовательно, для надежной интерполяции необходимо, чтобы определяемый пункт был связан уравнениями (5.9.8), т. е. гравиметрическими поправками (5.9.1), не менее чем с тремя астропунктами. Очевидно, что уравнения поправок астрономических координат (5.6.1) на определяемых пунктах не составляются.

5.10. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВКОВ РАЗНОСТИ ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА

В § 5.9 рассмотрен путь интерполирования геодезических высот от пунктов астрономо-гравиметрического нивелирования с использованием гравиметрических поправок. Такое решение является строгим, но при уравнивании сетей полигонометрии связано с вычислением большого количества гравиметрических поправок. Значительно проще и в то же время достаточно строго для редуцирования линейных измерений на эллипсоид можно решить эту задачу, используя разности высот квазигеоида, снятые с карт высот квазигеоида.

С этими разностями высот квазигеоида напомним уравнение связи для геодезических высот двух пунктов

$$\zeta_2 - \zeta_1 = (H_2 - H_2^y) - (H_1 - H_1^y). \quad (5.10.1)$$

Чтобы получить уравнение поправок, сначала на основе этой формулы напомним следующее выражение:

$$v_{\Delta\zeta} + (\zeta_2 - \zeta_1) = (H_2^0 + dH_2 - H_2^y) - (H_1^0 + dH_1 - H_1^y). \quad (5.10.2)$$

Преобразовав это выражение, запишем уравнение поправок для разности высот квазигеоида

$$v_{\Delta\zeta} = dH_2 - dH_1 + l_{\Delta\zeta}. \quad (5.10.3)$$

Свободный член этого уравнения вычисляется по формуле

$$l_{\Delta\zeta} = (H_2^0 - H_2^y) - (H_1^0 - H_1^y) - (\zeta_2 - \zeta_1), \quad (5.10.4)$$

где $(\zeta_2 - \zeta_1)$ — «измеренная» разность высот квазигеоида.

Это уравнение поправок получено для разности высот квазигеоида, как для результата измерений. В действительности, эта разность, по крайней мере во многих случаях, не является результатом измерения. Как правило, ее можно получить лишь по карте, которая составлена по результатам астрономо-гравиметрического нивелирования.

Когда разность высот квазигеоида можно рассматривать как измерение, то вес назначается в соответствии с ее средней квадратической ошибкой. Если же уравнение поправок используется лишь для интерполяции, то такой подход не годится.

Чтобы получить формулу веса интерполированных разностей высот геоида, перепишем выражение (3.5.6) в таком виде:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = -\frac{D_{12}}{2\rho''} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + (N_2 - N_1) + \frac{D_{12}}{2\rho''} (\Delta\vartheta_1 + \Delta\vartheta_2), \quad (5.10.5)$$

где ϑ_1, ϑ_2 — составляющие уклонения отвесной линии в вертикале направления между астропунктами, вычисляемые по астрономическим координатам.

Из этого выражения следует, что точность разности высот квазигеоида на астропунктах зависит от точности астрономических координат и от точности гравиметрических данных, по которым вычисляются значения $\Delta\vartheta$ и $(N_2 - N_1)$. Точность гравиметрических данных обычно выше точности астрономических координат, поэтому при вычислении веса разности высот геоида для интерполирования можно учесть только средние квадратические ошибки астрономических координат:

$$m_{(\zeta_2 - \zeta_1)} = \frac{D_{12}}{\rho''\sqrt{2}} m_{\vartheta}. \quad (5.10.6)$$

Весы при интерполировании имеют формальный характер и не должны оказывать влияния на уравненные разности высот квазигеоида между астропунктами. Это условие можно выполнить,

если для разностей высот квазигеоида, снятых с карты, назначать веса значительно меньше, чем веса разностей для пар астропунктов, получаемых из астрономо-гравиметрического нивелирования. С учетом этого соображения веса разностей высот квазигеоида, снятых с карты, можно назначать, исходя из фиктивной средней квадратической ошибки, вычисляемой по формуле

$$m_{(\zeta_i - \zeta_j)} = 5m_{(\zeta_2 - \zeta_1)} = \frac{5D_{ij}}{\rho''\sqrt{2}} m_\theta, \quad (5.10.7)$$

где D_{ij} — расстояние между геодезическими пунктами, для которых разности высот квазигеоида определяются по карте; m_θ — средняя квадратическая ошибка уклонений отвесных линий на астропунктах.

Отметим, что при подсчете числа необходимых и избыточных измерений не следует считать измерениями разности высот квазигеоида вычисляемые для интерполирования, а определяемыми величинами не следует считать интерполированные геодезические высоты.

5.11. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК РАЗНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

При построении государственной геодезической сети методами триангуляции и полигонометрии непосредственно разности координат как таковые не измеряются. Однако при многоэтапном уравнивании сети может возникнуть необходимость рассматривать отдельные разности как результаты измерений с их средними квадратическими ошибками.

Приведем пример. Допустим, что к моменту начала уравнивания АГС не были завершены работы в полигонометрическом ходе большой протяженности. Если же к началу совместного уравнивания АГС, КГС и КГСС в таком ходе завершены полностью все вычисления, то в совместное уравнивание можно будет включить разности координат нескольких пунктов хода.

Относительными методами космической геодезии определяются именно разности координат. Разности координат могут быть получены в космических геодезических сетях сгущения, в астрономо-геодезической сети и в геодезических сетях сгущения. Следовательно, на всех этапах уравнивания государственной геодезической сети могут потребоваться уравнения поправок разностей координат. Иногда это будут разности только плановых координат, а иногда — всех трех координат.

Для разностей координат напомним уравнения связи:

$$\begin{aligned} \Delta B_{ij} &= B_j - B_i; \\ \Delta L_{ij} &= L_j - L_i; \\ \Delta H_{ij} &= H_j - H_i. \end{aligned} \quad (5.11.1)$$

На основании этих уравнений напомним уравнения поправок:

$$\begin{aligned}
v_{\Delta B} &= dB_j - dB_i + (B_j^0 - B_i^0 - \Delta B_{ij}); \\
v_{\Delta L} &= dL_j - dL_i + (L_j^0 - L_i^0 - \Delta L_{ij}); \\
v_{\Delta H} &= dH_j - dH_i + (H_j^0 - H_i^0 - \Delta H_{ij}),
\end{aligned}
\tag{5.11.2}$$

где B^0 , L^0 , H^0 — предварительные значения координат; ΔB , ΔL , ΔH — измеренные разности координат.

Обозначим свободные члены:

$$\begin{aligned}
l_{\Delta B} &= B_j^0 - B_i^0 - \Delta B_{ij}; \\
l_{\Delta L} &= L_j^0 - L_i^0 - \Delta L_{ij}; \\
l_{\Delta H} &= H_j^0 - H_i^0 - \Delta H_{ij}
\end{aligned}
\tag{5.11.3}$$

и с ними запишем уравнения поправок разностей координат:

$$\begin{aligned}
dB_j - dB_i + l_{\Delta B} &= v_{\Delta B}; \\
dL_j - dL_i + l_{\Delta L} &= v_{\Delta L}; \\
dH_j - dH_i + l_{\Delta H} &= v_{\Delta H}.
\end{aligned}
\tag{5.11.4}$$

5.12. ПОДСЧЕТ ЧИСЛА ИЗБЫТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ УРАВНИВАНИИ АГС

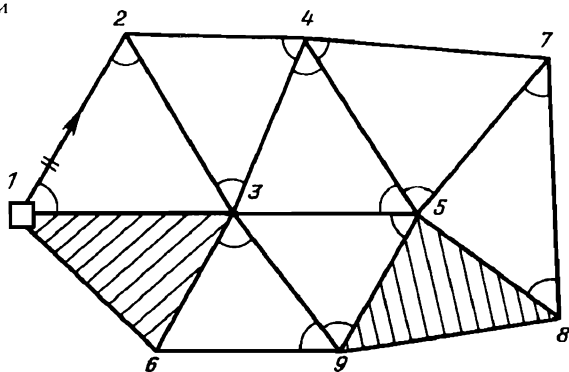
При вычислении количества избыточных измерений необходимо учитывать следующее. Результаты измерений обеспечивают, в конечном счете, вычисление трех координат каждого пункта АГС.

Непосредственно из уравнивания получают три координаты астропунктов, пунктов полигонометрии и пунктов, совмещенных с пунктами КГС и КГСС. При этом на пункты полигонометрии, КГС и КГСС геодезические высоты передаются интерполированием от астропунктов с помощью гравиметрических данных. На всех остальных пунктах АГС непосредственно из уравнивания получают две координаты — широту и долготу, а третья координата — высота, снимается с карты высот квазигеоида, которая, в свою очередь, составляется после уравнивания.

Для всей сети, а при уравнивании участков — для каждого участка, назначаются три координаты одного исходного (начального) пункта. В подсчете числа необходимых и избыточных эти координаты не участвуют. Кроме того, в качестве необходимых исходных данных должны быть приняты астрономическая долгота одного из пунктов, астрономический азимут с этого же пункта и одно расстояние для триангуляции. Хотя это и не обязательно, но для простоты рассуждений будем считать, что долгота, азимут и расстояние измерены на исходном пункте.

Рассмотрим число необходимых азимутов. Если для начального пункта измерены астрономический азимут и долгота и измерены необходимые расстояния и углы в триангуляции и полигонометрии, то можно по ним вычислить координаты остальных пунктов, а

Рис. 13. Необходимые и избыточные треугольники



следовательно, и геодезический азимут любой другой стороны. Значит, все измеренные геодезические азимуты являются избыточными.

Вычислить по одному исходному астрономическому азимуту и измеренным углам астрономический азимут любой другой стороны нельзя.

Для этого должны быть известны астрономическая долгота исходного и рассматриваемого пункта. Следовательно, если в качестве необходимых принять значения долгот всех пунктов, то все астрономические азимуты кроме одного станут избыточными.

Азимуты в прямом и обратном направлении измеряют, чтобы ослабить влияние рефракции. Считается, что два измерения, т. е. прямой и обратный азимуты, позволяют получить две величины, т. е. собственно азимут и поправку за влияние рефракции. В связи с этим, если в уравнивании участвуют средние значения азимутов, то подсчитывается количество только средних, а не прямых и обратных азимутов. Если же уравнения поправок составляются для односторонних азимутов, то каждый из них считается как одно измерение.

Для всей триангуляции, в том числе и для участка, необходимым является одно расстояние, остальные — избыточные.

В триангуляции один треугольник, опирающийся на исходную сторону при исходном пункте, позволяет вычислить координаты двух других пунктов. Каждый последующий треугольник дает координаты одного пункта. Из-за этого, например, в центральной фигуре один треугольник является избыточным. На рис. 13 избыточные треугольники заштрихованы. Таким образом, в сетях триангуляции количество необходимых треугольников равно количеству пунктов без двух (один из них исходный).

В треугольниках необходимыми являются два угла, каждый третий угол избыточный.

Таким образом, если в сети триангуляции измерено t треугольников, а число всех пунктов, включая исходный, равно r , то

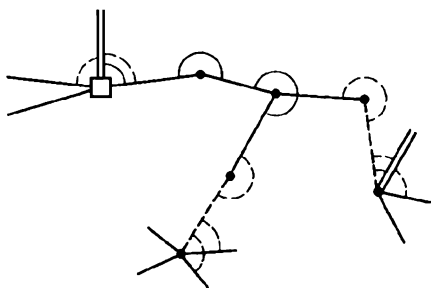


Рис. 14. Избыточные измерения в полигонометрии

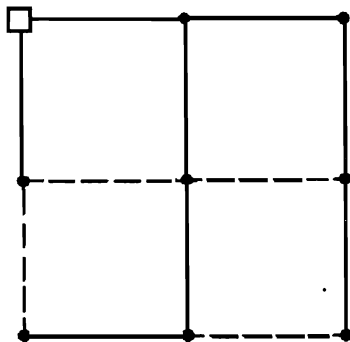


Рис. 15. Необходимые гравиметрические поправки

число необходимых углов равно $2(r-2)$, а число избыточных углов $3t - 2r + 4$.

В полигонометрии для вычисления координат одного пункта необходимыми являются одна сторона и азимут или угол. На рис. 14 четыре определяемых пункта полигонометрии, следовательно, необходимых — 4 угла и 4 стороны. Избыточные углы и расстояния показаны штрихами.

Если измерены углы, то, как уже отмечалось, все измеренные азимуты являются избыточными. Следовательно, в полигонометрии количества необходимых углов и расстояний равны числу пунктов полигонометрии, не считая пунктов триангуляции и исходного пункта, на которые опираются ходы полигонометрии.

Из формулы астрономо-гравиметрического нивелирования (3.5.5) следует, что для вычисления превышений квазигеоида между любой парой пунктов необходимы астрономические широты и долготы обоих пунктов. Значит, все эти широты и долготы являются необходимыми.

Для передачи высот квазигеоида на каждый астропункт необходимо только одно значение гравиметрической поправки, остальные являются избыточными, т. е. необходимое число гравиметрических поправок равно числу астропунктов, не считая начального (см. рис. 15).

Что касается гравиметрических поправок для интерполирования высот квазигеоида, то непосредственно в передаче координат (в частности, геодезических высот) они не участвуют, поэтому не входят ни в число необходимых, ни в число избыточных.

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последние несколько десятилетий в отечественной литературе опубликовано много работ, посвященных уравниванию сетей с плоскими прямоугольными координатами. Но во всех этих работах реально речь идет о сетях сгущения.

Действительно, обычно рассматриваются три уравнения поправок — горизонтальных углов, дирекционных углов и расстояний. Как правило, этих уравнений хватает для уравнивания геодезических сетей сгущения, развитых методами триангуляции и полигонометрии.

При уравнивании же больших сетей, в том числе астрономо-геодезической сети, предпочтение почти всегда отдавалось геодезическим координатам. Хотя следует отметить, что при раздельном уравнивании плановых координат и астрономо-гравиметрического нивелирования и в больших сетях обходились такими же тремя уравнениями поправок.

Практический опыт применения координат Гаусса для уравнивания АГС очень мал. К сожалению, слабо исследованы вопросы, связанные с большим количеством зон проекции Гаусса при уравнивании АГС как единого построения.

При уравнивании больших сетей на ЭВМ можно обойтись уравнениями поправок, составляемыми только с геодезическими координатами, т. е. без координат Гаусса, а после уравнивания для каталогизации пересчитывать геодезические координаты в плоские прямоугольные. Такой же подход годится и для сравнительно небольших сетей.

Имеет ли уравнивание с координатами Гаусса преимущества по сравнению с геодезическими координатами? Раньше ответ для сетей сгущения был однозначным — оно проще и достаточно строгое. Будет оно применяться и в будущем, ведь не всегда под рукой будут ЭВМ с большими возможностями. При уравнивании с геодезическими координатами приходится решать ряд дополнительных задач, в том числе перевычислять геодезические координаты в плоские прямоугольные и обратно. Следовательно, и сейчас не следует отвергать уравнивание сетей с координатами Гаусса.

Рассматривая методики уравнивания с координатами Гаусса, надо учитывать изменения в средствах и методах развития сетей. Когда будут применяться относительные методы космической геодезии, в том числе и для геодезических сетей сгущения, в качестве результатов измерений станут выступать разности координат. Следовательно, кроме трех традиционных уравнений поправок потребуются уравнения поправок разностей координат.

Чтобы применять координаты Гаусса для участков астрономо-геодезической сети, необходимо писать уравнения поправок для всех видов измерений, т. е. для всех тех измерений, для которых приведены уравнения поправок с геодезическими координатами в главе 5. Соответствующие уравнения с координатами Гаусса получим в этой главе.

При написании уравнений поправок будем пользоваться традиционными и не традиционными терминами. К традиционным относятся дирекционный угол, горизонтальное направление на плоскости проекции Гаусса, расстояние, приведенное на плоскость проекции, разность плоских прямоугольных координат. Традиционными терминами, но относящимися не к плоскости проекции, а к эллипсоиду, будут являться гравиметрические поправки к астрономическому нивелированию и высоты квазигеоида.

Не редуцируются на плоскость проекции и такие результаты измерений, как астрономические координаты и расстояния, приведенные к среднему уровню моря. Вопросы редукций всех результатов измерений, для которых придется писать уравнения поправок с координатами Гаусса, рассмотрены в главе 4.

В качестве независимых параметров примем плоские прямоугольные координаты x , y , геодезическую высоту H , астрономические широту и долготу φ , λ .

6.2. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДИРЕКЦИОННОГО УГЛА

Обычно при уравнивании геодезических сетей дирекционные углы рассматривали как собственно результаты измерений. В действительности, в большинстве случаев они являются функциями других результатов измерений, а именно, астрономических долгот и азимутов.

Для уравнивания сети как пространственного построения необходимо составлять уравнения поправок для астрономических координат, поэтому вместо традиционного уравнения поправок дирекционного угла, который раньше вычислялся, в частности, по наблюдениям Полярной, следует составлять уравнение поправок астрономического азимута.

Некоторые способы, например, астрономические наблюдения звезд в меридиане, позволяют получать непосредственно геодезический азимут. По результатам таких наблюдений можно вычислить дирекционный угол без использования астрономических долгот и, следовательно, можно рассматривать такой дирекционный угол как результат измерений. В этом параграфе рассмотрим именно этот случай.

Напишем уравнение поправок дирекционного угла в общем виде:

$$\alpha_{12} + v_{\alpha} = \alpha_{12}^{yp}, \quad (6.2.1)$$

где α_{12} — дирекционный угол, как результат измерения; α_{12}^{yp} — уравненный дирекционный угол.

Для уравненного дирекционного угла можно написать:

$$\alpha_{12}^{yp} = \alpha_{12}^0 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} dy_2, \quad (6.2.2)$$

где α_{12}^0 — дирекционный угол, вычисленный с предварительными координатами.

На основании следующих выражений:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (6.2.3)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \alpha} \quad (6.2.4)$$

напишем выражения для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} &= - \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= - \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = - \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} &= \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}}. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Здесь для каждой производной написано по два выражения. Дальше будем писать уравнения только со вторыми производными. Уравнение поправок одностороннего дирекционного угла напишем, исходя из выражений (6.2.1), (6.2.2) и (6.2.5),

$$v_a = \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_1 - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_1 - \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_2 + \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_2 + l_a. \quad (6.2.6)$$

Свободный член этого уравнения равен

$$l_a = \alpha_{12}^0 - \alpha_{12}. \quad (6.2.7)$$

6.3. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК АСТРОНОМИЧЕСКОГО АЗИМУТА

При выводе уравнения поправок будем исходить из того, что результатом измерения является астрономический азимут a^Γ направления в плоскости проекции Гаусса (4.6.8). Такой астрономический азимут и дирекционный угол связаны выражением

$$\alpha = a^\Gamma - \gamma. \quad (6.3.1)$$

Сближение меридианов вычисляется по формулам (4.6.6) и (4.6.7). Следовательно, можно написать:

$$\alpha_{12}^0 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} dy_2 + \left(\gamma_1^0 + \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} d\lambda_1 \right) = a_{12}^\Gamma + v_a. \quad (6.3.2)$$

При написании этого выражения принято, что

$$\frac{dy}{dB} dB = 0.$$

В (6.3.2) сближение γ_1^0 и дирекционный угол α_{12}^0 вычисляются с предварительными координатами. В $\frac{dy}{d\lambda} d\lambda$ достаточно учесть только первый член выражения (4.6.4):

$$\frac{dy}{d\lambda} = \sin B. \quad (6.3.3)$$

Подставив в (6.3.2) выражение (6.3.3) и производные (6.2.5), напомним уравнение поправок одностороннего астрономического азимута

$$v_a = \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_1 - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_1 - \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_2 + \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_2 + \sin B_1 d\lambda_1 + l_a. \quad (6.3.4)$$

Здесь свободный член равен

$$l_a = \alpha_{12}^0 + \gamma_1^0 - a_{12}^\Gamma. \quad (6.3.5)$$

Отметим, что уравнения поправок (6.2.6) и (6.3.4) получены для одностороннего дирекционного угла и астрономического азимута. При уравнивании сетей, когда это возможно, целесообразно по аналогии с (5.2.13) и (5.3.8) составлять уравнения поправок для средних значений.

6.4. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ГОРИЗОНТАЛЬНОГО УГЛА

Горизонтальный угол, редуцированный на плоскость проекции Гаусса, можно представить как разность дирекционных углов:

$$\beta_{213} = \alpha_{13} - \alpha_{12}. \quad (6.4.1)$$

На основании этого выражения напишем:

$$\beta_{213} + v_\beta = \left(\alpha_{13}^0 + \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \alpha_{13}}{\partial y_3} dy_3 \right) - \left(\alpha_{12}^0 + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \alpha_{12}}{\partial y_2} dy_2 \right). \quad (6.4.2)$$

Подставив коэффициенты (6.2.5), получим уравнение поправок угла:

$$v_{\beta} = \left(\frac{\sin \alpha_{13}}{d_{13}} - \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} \right) dx_1 - \left(\frac{\cos \alpha_{13}}{d_{13}} - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} \right) dy_1 - \frac{\sin \alpha_{13}}{d_{13}} dx_3 + \\ + \frac{\cos \alpha_{13}}{d_{13}} dy_3 + \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_2 - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_2 + l_{\beta}, \quad (6.4.3)$$

в котором свободный член равен

$$l_{\beta} = \alpha_{13}^0 - \alpha_{12}^0 - \beta_{213}. \quad (6.4.4)$$

6.5. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ГОРИЗОНТАЛЬНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

По аналогии с выражением (5.4.2) напишем:

$$N_{12}^r + v_N = \left(\alpha_{12}^0 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} dy_2 \right) - \\ - (z_1^0 + dz_1), \quad (6.5.1)$$

где N_{12}^r — измеренное значение направления, редуцированное на плоскость проекции Гаусса; α_{12}^0 — дирекционный угол, вычисленный с предварительными координатами; z_1^0 — предварительное значение ориентирующего угла.

Подставим коэффициенты (6.2.5) и получим уравнение поправок горизонтального направления

$$v_{N_{12}} = \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_1 - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_1 - \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} dx_2 + \\ + \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} dy_2 - dz_1 + l_N, \quad (6.5.2)$$

свободный член которого равен

$$l_N = \alpha_{12}^0 - z_1^0 - N_{12}^r. \quad (6.5.3)$$

6.6. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ДЛЯ АСТРОНОМИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Для уравнивания АГС с координатами проекции Гаусса в качестве независимых параметров выбраны прямоугольные координаты x , y , геодезическая высота H и астрономические координаты φ , λ . Кроме того координаты φ , λ являются результатами измерения. В ранее полученные уравнения поправок астрономических координат (5.6.1) и (5.6.2) параметры x , y не входят, следовательно, эти

уравнения можно использовать при уравнивании АГС и с координатами проекции Гаусса:

$$\begin{aligned}v_{\varphi} &= d\varphi + l_{\varphi}; \\v_{\lambda} &= d\lambda + l_{\lambda}; \\l_{\varphi} &= \varphi^0 - \varphi; \\l_{\lambda} &= \lambda^0 - \lambda.\end{aligned}\tag{6.6.1}$$

6.7. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ РАССТОЯНИЯ, ПРИВЕДЕННОГО К СРЕДНЕМУ УРОВНЮ МОРЯ

В качестве результата измерения примем расстояние D , приведенное на средний уровень моря. Напишем выражение, связывающее это значение расстояния с расстоянием d , приведенным на плоскость проекции. Для этого значения d , вычисляемые по формулам (4.4.17) или (4.4.19), запишем в следующем виде:

$$d = s + \Delta s,\tag{6.7.1}$$

где Δs — поправка в длину геодезической линии за масштаб ее изображения (редукция длины).

После подстановки (4.4.15) в это выражение получим:

$$d = D - \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2R_A} D - \frac{(H_2^y - H_1^y)(\zeta_2 - \zeta_1)}{D} + \frac{D^3}{24R_A^2} + \Delta s.\tag{6.7.2}$$

В этой формуле

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= H_1 - H_1^y; \\ \zeta_2 &= H_2 - H_2^y.\end{aligned}\tag{6.7.3}$$

В выражении (6.7.2) результатом измерения является D — расстояние, приведенное к среднему уровню моря. Значения d , ζ_1 , ζ_2 и Δs выразим через значения независимых параметров x , y , H , т. е. через прямоугольные координаты и геодезические высоты. Для этого перепишем (6.7.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned}D &= d + \frac{D}{2R_A} (H_1 - H_1^y + H_2 - H_2^y) + \frac{(H_2^y - H_1^y)(\zeta_2 - \zeta_1)}{D} - \\ &- \Delta s - \frac{D^3}{24R_A^2}.\end{aligned}\tag{6.7.4}$$

Для сторон триангуляции и полигонометрии в АГС поправка в длину геодезической линии за масштаб ее изображения в соответствии с (4.4.19) может вычисляться по формуле

$$\Delta s = s \left(\frac{y_m'^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2} + \frac{y_m'^4}{24R_m^4} \right).\tag{6.7.5}$$

На основании (6.7.4) и с учетом (6.7.5) и (6.7.3) получим:

$$D + v_D = \left(d^0 + \frac{\partial d}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial d}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial d}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial d}{\partial y_2} dy_2 \right) + \frac{D}{2R_A} (H_1^0 + dH_1 - H_1^y + H_2^0 + dH_2 - H_2^y) + \frac{(H_2^y - H_1^y)}{D} (H_2^0 + dH_2 - H_2^y - H_1^0 - dH_1 + H_1^y) - \left(\Delta s^0 + \frac{\partial \Delta s}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Delta s}{\partial y_2} dy_2 \right) - \frac{D^3}{24R_A^2}. \quad (6.7.6)$$

где d^0 и Δs^0 — величины, вычисляемые с предварительными координатами x^0, y^0 ; H_1^0, H_2^0 — предварительные значения геодезических высот.

Из формулы

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad (6.7.7)$$

имея в виду, что

$$\frac{x_2 - x_1}{d} = \cos \alpha_{12}; \quad \frac{y_2 - y_1}{d} = \sin \alpha_{12},$$

получим производные:

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = - \frac{x_2 - x_1}{d} = - \cos \alpha_{12};$$

$$\frac{\partial d}{\partial y_1} = - \frac{y_2 - y_1}{d} = - \sin \alpha_{12};$$

$$\frac{\partial d}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{d} = \cos \alpha_{12};$$

$$\frac{\partial d}{\partial y_2} = \frac{y_2 - y_1}{d} = \sin \alpha_{12}. \quad (6.7.8)$$

Из (6.7.5) следует, что при $y_m' = 300$ км и $dy = 10$ м величина члена $\left(\frac{\partial \Delta s}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Delta s}{\partial y_2} dy_2 \right)$ в (6.7.6) меньше 10^{-7} s, поэтому им можно пренебречь.

Обозначим в (6.7.6) свободный член:

$$l_D = d^0 + \frac{D}{2R_A} (H_1^0 - H_1^y + H_2^0 - H_2^y) + \frac{H_2^y - H_1^y}{D} (H_2^0 - H_2^y - H_1^0 + H_1^y) - \Delta s^0 - \frac{D^3}{24R_A^2} - D. \quad (6.7.9)$$

Подставив (6.7.8) и (6.7.9) в (6.7.6), получим уравнение поправок для расстояния, приведенного к среднему уровню моря,

$$v_D = - \cos \alpha_{12} dx_1 - \sin \alpha_{12} dy_1 + \cos \alpha_{12} dx_2 + \sin \alpha_{12} dy_2 + \left(\frac{D}{2R_A} - \frac{H_2^y - H_1^y}{D} \right) dH_1 + \left(\frac{D}{2R_A} + \frac{H_2^y - H_1^y}{D} \right) dH_2 + l_D. \quad (6.7.10)$$

6.8. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ РАССТОЯНИЯ, ПРИВЕДЕННОГО НА ПЛОСКОСТЬ ПРОЕКЦИИ

Еще раз отметим, что при уравнивании астрономо-геодезических сетей необходимо в качестве измерения рассматривать расстояния между центрами пунктов или расстояния, приведенные к среднему уровню моря. В сетях сгущения, как правило, придется пользоваться расстояниями, редуцированными на эллипсоид или на плоскость проекции. Может потребоваться с такими же расстояниями составлять отдельные уравнения поправок и в АГС.

Если иметь в виду уравнения поправок, то расстояние на плоскости проекции отличается от расстояния, приведенного на средний уровень моря, тем, что в нем до уравнивания учтено влияние геодезических высот, и следовательно, при уравнивании отыскиваются поправки только к плановым координатам. Значит, можно написать

$$d + v_d = d + \frac{\partial d}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial d}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial d}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial d}{\partial y_2} dy_2, \quad (6.8.1)$$

где d — «измеренное» расстояние, т. е. заранее редуцированное на плоскость проекции; d^0 — значение расстояния, вычисленное с предварительными координатами, например, по формуле (6.7.7).

Подставим в (6.8.1) производные (6.7.8)

$$v_d = d^0 - d - \cos \alpha_{12} dx_1 - \sin \alpha_{12} dy_1 + \cos \alpha_{12} dx_2 + \sin \alpha_{12} dy_2. \quad (6.8.2)$$

Обозначим свободный член

$$l_d = d^0 - d \quad (6.8.3)$$

и напишем уравнение поправок для расстояния, приведенного на плоскость проекции Гаусса—Крюгера,

$$v_d = -\cos \alpha_{12} dx_1 - \sin \alpha_{12} dy_1 + \cos \alpha_{12} dx_2 + \sin \alpha_{12} dy_2 + l_d. \quad (6.8.4)$$

В этом уравнении поправок дирекционные углы вычисляются с предварительными координатами, например, по формуле (6.2.3).

6.9. УРАВНЕНИЕ ПОПРАВОК ДЛЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ ПОПРАВКИ

Уравнение поправок для гравиметрической поправки с координатами проекции Гаусса получим из уравнения (5.9.8). Для этого в уравнении (5.9.8) необходимо поправки к геодезическим координатам dB и dL заменить поправками к прямоугольным координатам dx и dy и сохранить в нем поправки dH , $d\varphi$, $d\lambda$.

Связь между дифференциалами dB , dL и dx , dy получим из выражений (1.9.19), которые с достаточной для этой цели точностью запишем в следующем виде:

$$B = B_0 + \Delta B;$$

$$L = (6^\circ n - 3^\circ) + l;$$

$$B_0 = \beta + 0,0025 \sin 2\beta;$$

$$\Delta B = -0,25 Z_0^2 \sin 2B_0;$$

$$l = Z_0 (1 - 0,0033 \sin^2 B_0);$$

$$\beta = \frac{x}{a_0};$$

$$Z_0 = \frac{y - (10n + 5)10^5}{a \cos B_0} = \frac{y_n}{a \cos B_0}, \quad (6.9.1)$$

где y_n — истинная ордината.

Эти выражения написаны с коэффициентами для эллипсоида Красовского, для которого $a_0 = 6\,367\,558,5$ м, $a = 6\,378\,245$ м. Из них следует:

$$dB = dB_0 + d\Delta B;$$

$$dB_0 = d\beta + 0,005 \cos 2\beta d\beta;$$

$$d\beta = \frac{\rho'' dx}{a_0};$$

$$d\Delta B = -0,50 Z_0 \sin 2B_0 dZ_0;$$

$$dZ_0 = \frac{\rho'' dy}{a \cos B_0}. \quad (6.9.2)$$

На основании этих формул получим дифференциал широты

$$dB = \frac{\rho''}{a_0} dx + \frac{\rho'' \cdot 0,005 \cos 2\beta}{a_0} dx - \frac{\rho'' y_n \operatorname{tg} B_0}{a^2} dy. \quad (6.9.3)$$

Дифференциал долготы получим из (6.9.1)

$$dL = dZ_0 (1 - 0,0033 \sin^2 B_0). \quad (6.9.4)$$

Второй и третий члены в (6.9.3) малы по сравнению с первым членом. Исследуем их влияние на точность вычисления высоты квазигеоида. Для этого в уравнении поправок (5.9.8) заменим dB его выражением (6.9.3). Имея в виду, что

$$y_n \approx al \cos B_0, \quad (6.9.5)$$

после замены получим

$$\begin{aligned} \frac{D}{2\rho''} \cos A dB &= \frac{D \cos A}{2a_0} dx + \frac{0,005 D \cos A \cos 2\beta}{2a_0} dx - \\ &- \frac{D \cos A \cdot l \cdot \sin B_0}{2a} dy. \end{aligned} \quad (6.9.6)$$

Если не учитывать второй и третий члены этого выражения, то при $dx = 10$ м; $dy = 10$ м, $D = 200$ км, $l = 3^\circ = 0,052$, ошибка вычисления высоты квазигеоида будет меньше 1 см. Следовательно,

для преобразования уравнения поправок (5.9.8) можно воспользоваться выражением

$$\frac{D \cos A}{2\rho''} dB = \frac{D \cos A}{2a_0} dx. \quad (6.9.7)$$

Теперь получим выражение для замены дифференциала долготы. Для этого в (6.9.4) подставим dZ_0 из (6.9.2):

$$dL = \frac{\rho'' dy}{a \cos B_0} (1 - 0,0033 \sin^2 B_0). \quad (6.9.8)$$

Подставив это выражение в соответствующие члены уравнения поправок (5.9.8), получаем

$$\frac{D}{2\rho''} \sin A \cos B dL = \frac{D}{2a} \sin A (1 - 0,0033 \sin^2 B_0) dy. \quad (6.9.9)$$

При $D = 200$ км и $dy = 10$ м влияние второго члена в скобках на высоту квазигеоида меньше 1 мм, поэтому можно принять, что

$$\frac{D}{2\rho''} \sin A \cos B dL = \frac{D \sin A}{2a} dy. \quad (6.9.10)$$

Подставим полученные выражения в (5.9.8) и получим уравнение поправок для гравиметрической поправки:

$$\begin{aligned} v_{R_{12}} = & dH_2 - dH_1 + \frac{D_{12}}{2\rho''} \cos A_{12} d\varphi_1 + \frac{D_{12}}{2\rho''} \cos A_{12} d\varphi_2 - \frac{D_{12}}{2a_0} \cos A_{12} dx_1 - \\ & - \frac{D_{12}}{2a_0} \cos A_{12} dx_2 + \frac{D_{12}}{2\rho''} \sin A_{12} \cos B_1 d\lambda_1 + \frac{D_{12}}{2\rho''} \sin A_{12} \cos B_2 d\lambda_2 - \\ & - \frac{D_{12}}{2a} \sin A_{12} dy_1 - \frac{D_{12}}{2a} \sin A_{12} dy_2 + l_R. \end{aligned} \quad (6.9.11)$$

Свободный член этого уравнения можно вычислить по формулам (5.9.9) и (5.9.10). Перепишем эти формулы:

$$\begin{aligned} l_R = & R_{12}^0 - R_{12}; \\ R_{12}^0 = & (H_2^0 - H_2^y) - (H_1^0 - H_1^y) + \\ & + \frac{D_{12}}{2\rho''} \{ (\varphi_1^0 - B_1^0 + \varphi_2^0 - B_2^0) \cos A_{12} + [(\lambda_1^0 - L_1^0) \cos B_1 + \\ & + (\lambda_2^0 - L_2^0) \cos B_2] \sin A_{12} \}. \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

Предварительные значения геодезических координат B^0 и L^0 в этих выражениях должны точно соответствовать предварительным значениям координат x^0, y^0 в проекции Гаусса.

Уравнения поправок разности высот квазигеоида при уравнивании сети с координатами в проекции Гаусса такие же, как и при уравнивании с геодезическими координатами (5.10.3)–(5.10.4):

$$\begin{aligned} v_{\Delta\zeta} = & dH_2 - dH_1 + l_{\Delta\zeta}; \\ l_{\Delta\zeta} = & (H_2^0 - H_2^y) - (H_1^0 - H_1^y) - (\zeta_2 - \zeta_1). \end{aligned} \quad (6.9.13)$$

6.10. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК РАЗНОСТЕЙ КООРДИНАТ

Пространственное положение геодезического пункта в случае использования проекции Гаусса-Крюгера задается тремя координатами — плоскими прямоугольными координатами x , y и геодезической высотой H . Прямоугольные координаты x , y соответствуют геодезическим координатам B , L как самого пункта на местности, так и его проекции на эллипсоиде. Геодезическая высота H отсчитывается от поверхности эллипсоида.

Этим трем координатам пункта соответствуют и их разности, которые здесь рассматриваем как результаты измерений. Следовательно, уравнения связи можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta x_{12} &= x_2 - x_1; \\ \Delta y_{12} &= y_2 - y_1; \\ \Delta H_{12} &= H_2 - H_1.\end{aligned}\tag{6.10.1}$$

Исходя из этих уравнений связи, напомним следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Delta x_{12} + v_{\Delta x} &= (x_2^0 + dx_2) - (x_1^0 + dx_1); \\ \Delta y_{12} + v_{\Delta y} &= (y_2^0 + dy_2) - (y_1^0 + dy_1); \\ \Delta H_{12} + v_{\Delta H} &= (H_2^0 + dH_2) - (H_1^0 + dH_1),\end{aligned}\tag{6.10.2}$$

где Δx_{12} , Δy_{12} , ΔH_{12} — измеренные разности координат; x^0 , y^0 , H^0 — предварительные значения координат.

Обозначим свободные члены:

$$\begin{aligned}l_{\Delta x} &= x_2^0 - x_1^0 - \Delta x_{12}; \\ l_{\Delta y} &= y_2^0 - y_1^0 - \Delta y_{12}; \\ l_{\Delta H} &= H_2^0 - H_1^0 - \Delta H_{12}.\end{aligned}\tag{6.10.3}$$

С этими свободными членами преобразуем выражения (6.10.2) и получим уравнения поправок разностей координат:

$$\begin{aligned}v_{\Delta x} &= dx_2 - dx_1 + l_{\Delta x}; \\ v_{\Delta y} &= dy_2 - dy_1 + l_{\Delta y}; \\ v_{\Delta H} &= dH_2 - dH_1 + l_{\Delta H}.\end{aligned}\tag{6.10.4}$$

6.11. ОБЩАЯ СХЕМА УРАВНИВАНИЯ АГС С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ И ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ КООРДИНАТАМИ

Основными, наиболее важными характеристиками любой методики уравнивания астрономо-геодезической сети являются следующие:

- тип координат, с которыми составляются уравнения поправок;
- метод решения уравнений поправок — одnogрупповое, многогрупповое или многоэтапное решение;
- метод решения нормальных уравнений.

В методиках возможно практически любое сочетание этих характеристик. Одногрупповое, многогрупповое и многоэтапное решение одинаково применимы для решения уравнений поправок, составленных как с прямоугольными, так и с геодезическими координатами. На разных стадиях многоэтапного уравнивания совсем не обязательно решать нормальные уравнения только одним каким-то методом, важно, чтобы выбранные методы обеспечивали требуемую точность и возможность получения ковариационной матрицы на каждой стадии, т. е. на каждом этапе.

В уравнивании АГС выделим три основных этапа:

- уравнивание АГС, как самостоятельного построения;
- уравнивание АГС совместно с другими сетями;
- заключительное уравнивание АГС.

Рассмотренные в главах 5 и 6 уравнения поправок относятся к первому и третьему этапам.

На первом этапе составляются уравнения поправок для всех результатов измерений, выполненных на всех пунктах АГС, а уравненные координаты достаточно получить лишь для нескольких десятков или сотен пунктов, которые будут участвовать в совместном уравнивании сетей. Для этих пунктов должна быть получена ковариационная матрица. Эта матрица нужна лишь в интересах самого уравнивания.

На первом этапе координаты и ковариационную матрицу получают при многоэтапном уравнивании АГС и КГС. Если же для АГС и КГС принято многогрупповое уравнивание, то можно не получать координаты и ковариационную матрицу, а довести решение на первом этапе до получения преобразованных нормальных уравнений только для тех пунктов АГС, которые будут участвовать в совместном уравнивании сетей.

Предпочтительным представляется многоэтапное решение, поэтому многогрупповое совместное уравнивание АГС и КГС в данной работе детально не описывается. Уравнения поправок для второго этапа многоэтапного решения будут получены в главе 7.

На втором этапе, т. е. после совместного уравнивания АГС с другими сетями, должны быть получены окончательные значения координат пунктов АГС, включенных в совместное уравнивание, и ковариационная матрица.

Если на втором этапе уравнена только часть пунктов, то на третьем этапе выполняется уравнивание координат всех остальных пунктов АГС. Координаты пунктов АГС, уравненные на втором этапе, принимаются за твердые.

При уравнивании астрономо-геодезической сети, как пространственного построения, должны быть решены следующие основные задачи:

- получены координаты всех пунктов АГС;
- получены ковариационные матрицы, позволяющие дать необходимые характеристики как АГС в целом, так и ее отдельных участков;
- составлена карта высот квазигеоида над эллипсоидом Красовского и над общим земным эллипсоидом.

6.12. МНОГОГРУППОВОЕ УРАВНИВАНИЕ АГС

При современной схеме построения государственной геодезической сети применить в чистом виде многогрупповое уравнивание астрономо-геодезической сети почти невозможно, или уж во всяком случае, не целесообразно. В то же время для первого этапа уравнивания АГС, который в отдельных методиках играет роль прямого хода в АГС, предпочтительным является именно многогрупповое решение задачи.

Для многогруппового и многоэтапного уравнивания полная система уравнений поправок АГС должна быть разбита на группы. Разбивать их целесообразно по участкам сети.

Границы между участками будут проходить по пунктам АГС. Назовем такие пункты граничными. Пункты, которые находятся на стыках отрезков границ одного или более участков, будем называть узловыми.

Внутри участков будут такие пункты, которые непосредственно связаны результатами измерений с пунктами только данного участка, в том числе с узловыми и граничными. Эти пункты назовем внутренними.

При разбивке сети на участки необходимо учитывать два обстоятельства.

Во-первых, в результате уравнивания АГС как самостоятельного построения должна быть получена ковариационная матрица уравненных координат, необходимая для последующего совместного уравнивания с другими сетями. Если по каким-либо причинам нельзя получить ковариационную матрицу для всех пунктов, то в нее должны входить, по меньшей мере, все пункты, совмещенные с пунктами других сетей.

Во-вторых, при выделении участков невозможно сделать так, чтобы уравнения поправок связывали пункты только одного участка. Это прежде всего относится к уравнениям гравиметрической поправки, т. е. к астрономо-гравиметрическому нивелированию. Это же касается полигонометрии, больших расстояний, если они будут в АГС, и даже отдельных углов, азимутов и базисных сторон в триангуляции. В этих случаях в одно уравнение поправок будут входить координаты пунктов двух разных участков. Назовем их связующими пунктами участков.

Таким образом, в каждом участке будут внутренние пункты, граничные, узловые, связующие пункты участков и общие пункты сетей.

Граничные и узловые пункты, как правило, одновременно являются пунктами нескольких участков и фактически выполняют роль связующих пунктов. На границах АГС, т. е. на краю сети, граничные пункты и несколько узловых пунктов относятся только к одному участку.

Связующие пункты участков и общие пункты сетей могут находиться внутри участков, на границах и на стыках границ. В число связующих пунктов сетей должен входить начальный пункт АГС.

В сетях триангуляции большинство углов, азимутов и базисных сторон возможно отнести к одному конкретному участку, не выделяя для них связующих пунктов участков.

Сети полигонометрии для уравнивания целесообразно разбивать на отдельные полигонометрические хода:

— между пунктом триангуляции и узловым пунктом полигонометрии;

— между двумя пунктами триангуляции;

— между двумя узловыми пунктами полигонометрии.

Если в полигонометрическом ходе все результаты измерений (примычные углы, углы поворота, стороны, азимуты, гравиметрические поправки) связывают пункты только одного участка, то все пункты этого хода считаются внутренними, граничными или узловыми соответственно. Если же хотя бы один результат измерений, в том числе примычный угол и гравиметрическая поправка, связывают пункты разных участков, то все пункты хода считаются связующими пунктами участков.

Большинство измерений связывают несколько пунктов, в том числе и пунктов разных участков, но каждое измерение, а следовательно, и каждое уравнение поправок, должно быть отнесено к одному конкретному пункту.

В группу объединяются все уравнения поправок, относящиеся к пунктам данного участка.

Соответственно этому и группы нормальных уравнений составляются по участкам на основании всех уравнений поправок только данного участка.

Чтобы обеспечить в последующем совместное уравнивание сетей, необходимо в результате решения всех нормальных уравнений АГС получить пространственные координаты B , L , H всех общих пунктов сетей и их ковариационную матрицу. Если позволяют возможности вычислительных средств, то кроме общих пунктов сетей следует получать ковариационную матрицу для возможно большего количества узловых пунктов.

Решение нормальных уравнений разбивается на несколько стадий. Из-за возможностей ЭВМ может возникнуть необходимость объединять уравнения участков в блоки. Ниже предусмотрена такая возможность, хотя это не всегда обязательно.

На первой стадии для каждого отдельного участка составляется система нормальных уравнений и выполняется прямой ход решения этой системы вплоть до исключения поправок координат dB , dL , dH , $d\varphi$, $d\lambda$ всех внутренних пунктов участка.

Оставшаяся часть системы представляет собой часть связующей системы нормальных уравнений координат граничных, узловых пунктов, связующих пунктов участков и общих пунктов сетей. Она записывается на хранение для дальнейшего суммирования с другими частями связующей системы.

Для контроля уравнивания участка можно продолжить прямой ход решения системы вплоть до исключения поправок координат последнего пункта. Последний пункт в этом, контрольном, урав-

нивании принимается за временный исходный пункт данного участка.

Затем выполняется обратный ход решения нормальной системы для всего участка. Получают поправки координат и результатов измерений. Выполняют анализ результатов контрольного уравнивания для выявления ошибок счета и ошибок информации. Результаты контрольного уравнивания на последующих стадиях не используются.

На второй стадии образуют блоки участков, в каждом из которых суммированием частей связующих уравнений, полученных после исключения поправок координат внутренних пунктов на первой стадии, получают систему уравнений блока.

Выполняют прямой ход решения этой системы вплоть до исключения поправок координат граничных пунктов (кроме пунктов на границах между блоками) и связующих пунктов участков (кроме связующих пунктов участков разных блоков). В результате получается преобразованная система с треугольной матрицей для поправок координат граничных пунктов (расположенных внутри блока), связующих пунктов участков (расположенных внутри блока), которая записывается на магнитные носители для хранения, и нормальная система, которая является частью связующей системы АГС, для поправок координат узловых пунктов, граничных пунктов (на границах блоков), связующих пунктов участков (на границах блоков) и общих пунктов сетей. Эта нормальная система также хранится на магнитных носителях для дальнейшего счета.

На третьей стадии для всех блоков суммированием частей связующих уравнений, полученных на второй стадии, получают полную связующую систему уравнений АГС.

Затем выполняют прямой ход решения этой системы вплоть до исключения всех поправок астрономических координат, поправок координат граничных пунктов, поправок координат связующих пунктов участков, поправок координат части (или всех) узловых пунктов.

В результате получается преобразованная система с треугольной матрицей для поправок координат указанных пунктов, которая хранится для обратного хода. Кроме того, получается нормальная система для поправок координат dB , dL , dH общих пунктов сетей, а по возможности, и части узловых пунктов, которая также хранится для счета на четвертой стадии.

На четвертой стадии решается нормальная система общих пунктов сетей и получают уравненные значения координат общих пунктов сетей и их ковариационная матрица, которые используются для совместного уравнивания АГС с другими сетями.

Обратный ход решения нормальных уравнений АГС выполняется после совместного уравнивания сетей.

6.13. КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА КООРДИНАТ ГАУССА

Ковариационная матрица с координатами Гаусса может быть получена в результате уравнивания сети с плоскими прямоугольными координатами Гаусса или на основе пересчета ковариационных матриц, полученных из уравнивания с геодезическими или пространственными прямоугольными координатами.

По аналогии с (2.10.1) напомним выражения для средних квадратических ошибок координат двух пунктов относительно начала системы или начального пункта:

$$\begin{aligned} M(x_1) &= \sqrt{K(x_1x_1)}; \quad M(y_1) = \sqrt{K(y_1y_1)}; \\ M(H_1) &= \sqrt{K(H_1H_1)}; \quad M(x_2) = \sqrt{K(x_2x_2)}; \\ M(y_2) &= \sqrt{K(y_2y_2)}; \quad M(H_2) = \sqrt{K(H_2H_2)}. \end{aligned} \quad (6.13.1)$$

Напомним, что для вычисления по формуле (2.2.11) средних квадратических ошибок величин, которые выражаются как функции урвненных координат, используются частные производные, являющиеся коэффициентами уравнений поправок. Таким образом, все требуемые для оценки частные производные вычисляются при составлении нормальных уравнений.

Формулы для средних квадратических ошибок разностей координат напомним в соответствии с уравнением связи (6.10.1) или уравнением поправок (6.10.4):

$$\begin{aligned} M^2(\Delta x) &= \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x_1}\right)^2 K(x_1x_1) + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x_2}\right)^2 K(x_2x_2) + 2 \frac{\partial \Delta x}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta x}{\partial x_2} K(x_1x_2); \\ M^2(\Delta y) &= \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial y_1}\right)^2 K(y_1y_1) + \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial y_2}\right)^2 K(y_2y_2) + 2 \frac{\partial \Delta y}{\partial y_1} \frac{\partial \Delta y}{\partial y_2} K(y_1y_2); \\ M^2(\Delta H) &= \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial H_1}\right)^2 K(H_1H_1) + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial H_2}\right)^2 K(H_2H_2) + 2 \frac{\partial \Delta H}{\partial H_1} \frac{\partial \Delta H}{\partial H_2} K(H_1H_2); \\ \frac{\partial \Delta x}{\partial x_1} &= -1; \quad \frac{\partial \Delta y}{\partial y_1} = -1; \quad \frac{\partial \Delta H}{\partial H_1} = -1; \\ \frac{\partial \Delta x}{\partial x_2} &= +1; \quad \frac{\partial \Delta y}{\partial y_2} = +1; \quad \frac{\partial \Delta H}{\partial H_2} = +1. \end{aligned} \quad (6.13.2)$$

Выражения для средней квадратической ошибки расстояния на плоскости проекции Гаусса—Крюгера получим в соответствии с уравнением поправок (6.8.4):

$$\begin{aligned} M^2(d) &= \left(\frac{\partial d}{\partial x_1}\right)^2 K(x_1x_1) + \left(\frac{\partial d}{\partial y_1}\right)^2 K(y_1y_1) + \left(\frac{\partial d}{\partial x_2}\right)^2 K(x_2x_2) + \\ &+ \left(\frac{\partial d}{\partial y_2}\right)^2 K(y_2y_2) + 2 \frac{\partial d}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial y_1} K(x_1y_1) + 2 \frac{\partial d}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial x_2} K(x_1x_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial d}{\partial x_1} \frac{\partial d}{\partial y_2} K(x_1 y_2) + 2 \frac{\partial d}{\partial y_1} \frac{\partial d}{\partial x_2} K(y_1 x_2) + \\
& + 2 \frac{\partial d}{\partial y_1} \frac{\partial d}{\partial y_2} K(y_1 y_2) + 2 \frac{\partial d}{\partial x_2} \frac{\partial d}{\partial y_2} K(x_2 y_2); \\
\frac{\partial d}{\partial x_1} & = -\cos \alpha_{12}; \quad \frac{\partial d}{\partial y_1} = -\sin \alpha_{12}; \\
\frac{\partial d}{\partial x_2} & = \cos \alpha_{12}; \quad \frac{\partial d}{\partial y_2} = \sin \alpha_{12}.
\end{aligned} \tag{6.13.3}$$

По этим же формулам вычисляется средняя квадратическая ошибка взаимного положения двух пунктов в продольном направлении

$$M_{\text{прод}} = M(d). \tag{6.13.4}$$

Формулы для средней квадратической ошибки дирекционного угла получим исходя из уравнения поправок (6.2.6):

$$\begin{aligned}
M^2(\alpha) & = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right)^2 K(x_1 x_1) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_1}\right)^2 K(y_1 y_1) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)^2 K(x_2 x_2) + \\
& + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_2}\right)^2 K(y_2 y_2) + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} K(x_1 y_1) + \\
& + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} K(x_1 x_2) + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} K(x_1 y_2) + \\
& + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} K(y_1 x_2) + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} K(y_1 y_2) + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} K(x_2 y_2); \\
\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & = \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_1} = -\frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}}; \\
\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} & = -\frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y_2} = \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}}.
\end{aligned} \tag{6.13.5}$$

С этой ошибкой дирекционного угла получим среднюю квадратическую ошибку взаимного положения пунктов в поперечном направлении

$$M_{\text{поп}} = dM(\alpha). \tag{6.13.6}$$

Теперь с учетом (6.4.3) напишем формулы для средней квадратической ошибки горизонтального угла:

$$\begin{aligned}
M^2(\beta) & = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2 K(x_1 x_1) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y_1}\right)^2 K(y_1 y_1) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2 K(x_2 x_2) + \\
& + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y_2}\right)^2 K(y_2 y_2) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_3}\right)^2 K(x_3 x_3) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y_3}\right)^2 K(y_3 y_3) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial y_1} K(x_1 y_1) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} K(x_1 x_2) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial y_2} K(x_1 y_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_3} K(x_1 x_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial y_3} K(x_1 y_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial y_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} K(y_1 x_2) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial y_1} \frac{\partial \beta}{\partial y_2} K(y_1 y_2) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial y_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_3} K(y_1 x_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial y_1} \frac{\partial \beta}{\partial y_3} K(y_1 y_3) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial y_2} K(x_2 y_2) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_3} K(x_2 x_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \frac{\partial \beta}{\partial y_3} K(x_2 y_3) + \\
& + 2 \frac{\partial \beta}{\partial y_2} \frac{\partial \beta}{\partial x_3} K(y_2 x_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial y_2} \frac{\partial \beta}{\partial y_3} K(y_2 y_3) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_3} \frac{\partial \beta}{\partial y_3} K(x_3 y_3); \\
\frac{\partial \beta}{\partial x_1} &= \left(\frac{\sin \alpha_{13}}{d_{13}} - \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}} \right); \quad \frac{\partial \beta}{\partial x_2} = \frac{\sin \alpha_{12}}{d_{12}}; \\
\frac{\partial \beta}{\partial x_3} &= -\frac{\sin \alpha_{13}}{d_{13}}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial y_1} = -\left(\frac{\cos \alpha_{13}}{d_{13}} - \frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}} \right); \\
\frac{\partial \beta}{\partial y_2} &= -\frac{\cos \alpha_{12}}{d_{12}}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial y_3} = \frac{\cos \alpha_{13}}{d_{13}}.
\end{aligned} \tag{6.13.7}$$

Глава 7

СОВМЕСТНОЕ УРАВНИВАНИЕ СЕТЕЙ

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ СЕТЕЙ

Задачу совместного уравнивания астрономо-геодезической сети и космических геодезических сетей будем рассматривать как задачу уравнивания сетей, развитых в разных системах координат и имеющих общие пункты.

Объединение таких сетей для их совместного уравнивания может выполняться на разных этапах, например, на этапе составления уравнений поправок, на этапе получения преобразованных нормальных уравнений или после того как каждая сеть уравнена независимо от других сетей, т. е. как самостоятельное построение.

По поводу объединения систем уравнений поправок отметим лишь, что для всех сетей должны быть назначены с самого начала единая ошибка единицы веса для всех результатов измерений и общие предварительные координаты, что не всегда возможно. Здесь рассмотрим лишь объединение сетей после их отдельного уравнивания на предыдущих этапах. В этом случае для уравнивания каждой сети, как самостоятельного построения, можно назначать свою ошибку единицы веса и свои предварительные координаты.

В результате совместного уравнивания сетей должны быть получены уравненные значения координат всех пунктов. Следовательно, необходимо решить систему из нескольких сотен тысяч нормальных уравнений. Для таких больших систем целесообразно применять многоэтапные методы уравнивания.

В уравнивание кроме астрономо-геодезической сети и космической геодезической сети может включаться несколько космических геодезических сетей сгущения. При этом каждая КГСС хотя и получалась в общеземной системе, но начала этих систем могут не совпадать на величины, превышающие ошибки координат пунктов. Такие КГСС необходимо уравнивать как сети, развитые в разных общеземных системах координат.

В уравнивании кроме координат пунктов АГС и КГС могут участвовать и другие результаты измерений, например, геодезические высоты, полученные по гравиметрическим данным в общеземной системе координат, разности координат, расстояния, азимуты. Для таких результатов измерений также должны составляться уравнения поправок с учетом их системы координат.

Поскольку предполагается, что каждая сеть развита и уравнена в своей системе, то при последующем составлении уравнений поправок необходимо предусматривать переход к одной из систем координат, принятой за базовую при уравнивании, а в результате совместного уравнивания получать параметры связи между всеми системами координат сетей.

В зависимости от конкретной задачи, которая ставится перед уравниванием, может определяться различное количество параметров перехода от одной системы к другой. Обычно для описания связи между двумя системами используют не более семи параметров, в том числе три линейных, три угловых и один, характеризующий разность линейных масштабов сетей.

Линейные параметры ΔX , ΔY , ΔZ характеризуют взаимное положение начал двух систем координат. Два угловых параметра ω_x и ω_y служат характеристиками непараллельности осей Z , а угловой параметр ω_z — это угол между одноименными плоскостями меридианов, в том числе и начальных.

Если ставится задача уравнивать сети под условием обеспечения единого масштаба, параллельности осей Z и параллельности одноименных плоскостей меридианов, то следует назначать только три линейных параметра.

Для совместного уравнивания сетей необходимы ковариационные матрицы уравненных координат. Получение таких матриц следует предусматривать на этапах их раздельного уравнивания. Отдельные матрицы, в частности, для высот, полученных по гравиметрическим данным, для расстояний и азимутов, могут быть диагональными. Очевидно, что для совместного уравнивания сетей должна назначаться единая ошибка единицы веса и единые предварительные координаты для общих пунктов разных сетей.

В результате совместного уравнивания получают координаты пунктов каждой сети, уравненные значения параметров связи систем и ковариационные матрицы уравненных координат в разных системах. По этим матрицам могут выполняться более детальные оценки уравненных элементов геодезической сети в разных системах, например, ошибки взаимного положения пунктов.

7.2. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ СОВМЕСТНОГО УРАВНИВАНИЯ СЕТЕЙ

Как уже отмечалось, в совместное уравнивание могут быть включены координаты пунктов АГС, КГС, КГСС, отдельные полигонометрические хода, геодезические высоты отдельных пунктов, расстояния и азимуты между пунктами.

Геодезические координаты B , L , H астрономо-геодезической сети, уравненной на предыдущем этапе, должны сопровождаться их ковариационной матрицей. В уравнивание включают пункты АГС, совмещенные с пунктами КГС и КГСС, с пунктами, на которых вычислены высоты по гравиметрическим данным. Могут также включаться и несомещенные пункты.

КГС, как самостоятельное построение, обычно уравнивается в пространственных прямоугольных координатах. Координаты X , Y , Z и их ковариационная матрица должны быть пересчитаны в координаты B , L , H и соответствующую ковариационную матрицу.

Особенность пунктов КГСС, т. е. пунктов относительных определений, заключается в том, что из одновременных наблюдений определяют координаты пар пунктов в общеземной системе. Эта общеземная система может значительно отличаться от общеземной системы, задаваемой уравненными координатами КГС.

Кроме того, координаты одного и того же пункта КГСС, полученные по наблюдениям разных пар пунктов, могут различаться существенно. Разности же координат пунктов получаются точнее, чем сами координаты. Следовательно, в космических геодезических сетях сгущения, развитых как самостоятельные построения, необходимо уравнивать не координаты, а разности координат.

Чтобы уравнивать разности координат, необходимо один из пунктов КГСС принять в качестве начального. Целесообразно до уравнивания координаты начального пункта вычислить с разностями от нескольких ближайших пунктов.

Из такого уравнивания КГСС, как самостоятельного построения, будут получены координаты всех пунктов и их ковариационная матрица. Именно эти координаты следует включать в совместное уравнивание сетей, а в качестве независимых параметров кроме координат принять параметры перехода к референцной системе.

Вообще, по поводу разностей координат необходимо иметь в виду следующее. В практике нет таких методов, которые позволяли бы определять эти разности в референцной или общеземной системах, соответствующих уравненным координатам АГС и КГС. На основе определений или вычислений получают координаты пар пунктов в системах, которые существенно или несущественно, но отличаются от этих систем, полученных на предыдущих этапах. Следовательно, и вычисленные разности координат не будут точно соответствовать этим системам.

Если разности координат невелики (при малых расстояниях между пунктами), а их ошибки из-за разницы систем тоже невелики и имеют случайный характер, то это не внесет существенных

систематических ошибок в уравнившую ГГС. Если же координаты пунктов на большей территории вычислены в одной системе, даже не очень сильно отличающейся от систем АГС и КГС, то это может привести к искажению координатной основы. С учетом этого сделаем несколько замечаний о полигонометрическом ходе между пунктами, включенными в совместное уравнивание. К таким ходам могут относиться базисы космической триангуляции, т. е. полигонометрические хода большой протяженности.

Такой ход должен вычисляться как свободный, т. е. от одного исходного пункта. Для исходного пункта следует принять его предварительные координаты. Для вычисления геодезических азимутов на пунктах Лапласа, расположенных внутри хода, надо также использовать предварительные координаты или близкие к ним значения.

Для редуцирования длин сторон на эллипсоид должны использоваться высоты квазигеоида с карты, которая получена в результате уравнивания АГС на предыдущем этапе. Ход целесообразно уравнивать за азимутальные условия и после этого вычислить разности координат ΔB , ΔL . Разности ΔH , естественно, не вычисляют и в совместное уравнивание не включают.

Геодезические высоты отдельных пунктов вычисляются по формуле

$$H = H' + \zeta,$$

где H' — нормальная высота; ζ — высота квазигеоида над общим земным эллипсоидом.

Очевидно, что следует позаботиться о точности нормальных высот. А чтобы сами геодезические высоты были получены в общеземной системе, необходимо высоты квазигеоида вычислять с теми же параметрами гравитационного поля Земли, с которыми была уравнена КГС.

Значения геодезических высот сопровождаются их средними квадратическими ошибками. Чтобы эти высоты можно было считать независимыми, расстояния между пунктами должны быть достаточно большими.

Что же касается измеренных расстояний, то они инвариантны к системам координат. Следовательно, в уравнивание целесообразно включать расстояния, приведенные на средний уровень моря, а редуцирование на эллипсоид предусматривать в процессе совместного уравнивания, т. е. через механизм уравниваний поправок.

Геодезические азимуты всегда соответствуют определенной системе координат, т. е. направлению оси Z и положению плоскости XOZ . Если они не параллельны соответствующим оси и плоскости референцной системы, задаваемой координатами АГС, то такие азимуты могут исказить ГГС. Следовательно, азимуты отдельных сторон должны быть до общего уравнивания приведены в референдную систему. Если этого сделать нельзя, то, их лучше в общее уравнивание не включать.

7.3. ПЕРЕСЧЕТ КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ К ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ И ОБРАТНО

Космические геодезические сети обычно уравниваются в пространственных прямоугольных координатах X, Y, Z , а астрономо-геодезическая — в геодезических координатах B, L, H , поэтому необходимо пересчитать ковариационные матрицы. Это можно сделать с помощью формулы (2.2.8).

Рассматривая в этой формуле координаты X, Y, Z как аргументы, а координаты B, L, H как функции этих аргументов, напомним формулу для ковариационной матрицы геодезических координат

$$K_B = \left(\frac{\partial B}{\partial X} \right) \cdot K_X \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial X} \right)^T, \quad (7.3.1)$$

где K_B — ковариационная матрица геодезических координат; K_X — ковариационная матрица прямоугольных координат; $\left(\frac{\partial B}{\partial X} \right)$ — матрица коэффициентов, т. е. производных геодезических координат по прямоугольным координатам.

Производные геодезических координат по прямоугольным координатам получим исходя из формул (1.7.2). На основе этих формул для целей пересчета ковариационных матриц можно несколько упростить выражения для полных дифференциалов:

$$\begin{aligned} dB'' &= -0,0323 \sin B \cos L dX - 0,0323 \sin B \sin L dY + \\ &+ 0,0323 \cos B dZ; \\ dL'' &= -0,0323 \frac{\sin L}{\cos B} dX + 0,0323 \frac{\cos L}{\cos B} dY; \\ dH &= \cos B \cos L dX + \cos B \sin L dY + \sin B dZ. \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

На основе этих выражений, введя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial X} &= a_{11}; \quad \frac{\partial B}{\partial Y} = a_{12}; \quad \frac{\partial B}{\partial Z} = a_{13}; \\ \frac{\partial L}{\partial X} &= b_{11}; \quad \frac{\partial L}{\partial Y} = b_{12}; \quad \frac{\partial L}{\partial Z} = b_{13}; \\ \frac{\partial H}{\partial X} &= c_{11}; \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = c_{12}; \quad \frac{\partial H}{\partial Z} = c_{13}, \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

напишем элементы матрицы коэффициентов для одного пункта:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0,0323 \sin B_i \cos L_i; \quad a_{12} = -0,0323 \sin B_i \sin L_i; \\ a_{13} &= 0,0323 \cos B_i; \quad b_{11} = -0,0323 \frac{\sin L_i}{\cos B_i}; \\ b_{12} &= 0,0323 \frac{\cos L_i}{\cos B_i}; \quad b_{13} = 0; \quad c_{11} = \cos B_i \cos L_i; \\ c_{12} &= \cos B_i \sin L_i; \quad c_{13} = \sin B_i. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

7.4. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПРИ СОВМЕСТНОМ УРАВНИВАНИИ

В совместное уравнивание включают координаты пунктов астрономо-геодезической сети, космической геодезической сети, космических геодезических сетей сгущения. Вместе с ними могут уравниваться и другие геодезические построения. При совместном уравнивании необходимо уравнивания поправок для каждой сети составлять в той системе координат, в которой она уравнивается как самостоятельное построение на предыдущем этапе.

Основную роль в распространении координатной основы играют КГС, развиваемая в общеземной системе координат, и АГС, развиваемая в референционной системе. При совместном уравнивании необходимо пользоваться семью параметрами перехода — ΔX , ΔY , ΔZ , ω_x , ω_y , ω_z , m .

В результате уравнивания координаты пунктов в обеих системах получают поправки, значит, для каждого пункта будут получены новые значения координат. Им будут соответствовать две новые системы координат с новыми началами и ориентировками координатных плоскостей. Начало общеземной системы изменится незначительно.

Для выявления систематических ошибок целесообразно выполнить предварительное совместное уравнивание АГС и КГС. В уравнения поправок координат следует включить все семь параметров. При наличии систематических ошибок будут получены большие значения параметров ω_x , ω_y , ω_z , m или некоторых из них.

Полезно также убедиться, что совместное уравнивание АГС и КГС не приведет к сдвигу начала общеземной системы. Для этого следует получить значения ΔX , ΔY , ΔZ из сравнения координат пунктов КГС, уравниваемых на предыдущем этапе, с координатами, полученными в результате совместного уравнивания.

В результате совместного уравнивания практически формируются две новые государственные системы координат — общеземная и референционная.

При получении любой геодезической системы координат накладывают следующие условия: ось Z должна быть параллельна средней оси вращения Земли, плоскость начального геодезического меридиана — параллельна плоскости начального астрономического меридиана, а расстояния должны соответствовать эталону метра. Для выполнения этих условий приводят измерения к среднему полюсу, фундаментальному каталогу звезд и к международной системе долгот.

В формировании систем координат участвуют практически все измерения, выполненные в сетях. Безошибочных измерений не бывает, поэтому во всех системах, которые уже получены и будут еще получены, указанные условия выполнены не идеально. В связи с этим при совместном уравнивании сетей необходимо выполнить другие условия, условия взаимной согласованности, а именно — в обеих системах оси Z и плоскости начальных меридианов должны быть параллельны, а расстояния равны между собой.

В КГС, построенной по современным наблюдениям, приведения к среднему полюсу, фундаментальному каталогу звезд и к международной системе долгот выполнены надежнее, чем в АГС, измерения в которой продолжались более 50 лет. В связи с этим целесообразно сохранить ориентировку полученной из совместного уравнивания общеземной системы и по отношению к ней обеспечить условия параллельности в референционной системе.

Чтобы выполнить указанные условия взаимной согласованности, необходимо, чтобы четыре параметра были равны нулю ($\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, $m = 0$), т. е. чтобы переход от общеземной системы к референционной выполнялся по формулам

$$X_{p1} = X_0 + \Delta X_1, \quad Y_{p1} = Y_0 + \Delta Y_1, \quad Z_{p1} = Z_0 + \Delta Z_1, \quad (7.4.1)$$

а не по формулам

$$\begin{aligned} X_p &= X_0 + \Delta X + \omega_y Z_0 - \omega_z Y_0 + m X_0; \\ Y_p &= Y_0 + \Delta Y - \omega_x Z_0 + \omega_z X_0 + m Y_0; \\ Z_p &= Z_0 + \Delta Z + \omega_x Y_0 - \omega_y X_0 + m Z_0, \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

где X_0 , Y_0 , Z_0 — координаты в общеземной системе; X_p , Y_p , Z_p — координаты в референционной системе.

Если в формулах (7.4.1) принять $\Delta X_1 = \Delta X$, $\Delta Y_1 = \Delta Y$, $\Delta Z_1 = \Delta Z$, т. е. принять линейные параметры, которые получены из совместного уравнивания и входят в формулу (7.4.2), то изменятся координаты начального пункта Пулково. Наложив условие неизменности координат Пулково ($X_{p1} = X_p$, $Y_{p1} = Y_p$, $Z_{p1} = Z_p$), на основании выражений (7.4.1) и (7.4.2) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= \Delta X + \omega_y Z_0 - \omega_z Y_0 + m X_0; \\ \Delta Y_1 &= \Delta Y - \omega_x Z_0 + \omega_z X_0 + m Y_0; \\ \Delta Z_1 &= \Delta Z + \omega_x Y_0 - \omega_y X_0 + m Z_0. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Угловые и масштабные параметры малы, поэтому при вычислении по формулам (7.4.3) можно вместо координат X_0 , Y_0 , Z_0 пользоваться координатами Пулково в референционной системе X_p , Y_p , Z_p .

С вычисленными по формуле (7.4.3) значениями линейных параметров ΔX_1 , ΔY_1 , ΔZ_1 необходимо вычислить в референционной системе координаты B , L , H всех пунктов, участвовавших в совместном уравнивании. Эти пункты будут исходными при уравнивании остальных пунктов 1 и 2 классов, а затем и 3, 4 классов.

Полученные в результате совместного уравнивания координаты и параметры перехода зададут новую референционную и новую общеземную системы координат.

7.5. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВКООРДИНАТ РЕФЕРЕНЦНОЙ СИСТЕМЫ

Исходной информацией для составления уравнений поправок являются координаты АГС, уравненной на предыдущем этапе в референционной системе, и их ковариационная матрица. Предварительные координаты каждого пункта должны быть едиными для уравнений поправок всех видов, в том числе и для рассматриваемых уравнений. Единой должна быть и ошибка единицы веса.

Обозначим:

B_1, L_1, H_1 — координаты пунктов АГС;

B^0, L^0, H^0 — предварительные значения координат;

μ_0 — ошибка единицы веса;

K_1 — ковариационная матрица координат пунктов АГС.

С этими обозначениями напомним уравнения поправок для одного пункта:

$$\begin{aligned}dB + (B^0 - B_1) &= v_{B1}; \\dL + (L^0 - L_1) &= v_{L1}; \\dH + (H^0 - H_1) &= v_{H1}.\end{aligned}\tag{7.5.1}$$

Обозначим свободные члены:

$$\begin{aligned}l_{B1} &= B^0 - B_1; \\l_{L1} &= L^0 - L_1; \\l_{H1} &= H^0 - H_1.\end{aligned}\tag{7.5.2}$$

Теперь уравнения поправок координат референционной системы примут вид:

$$\begin{aligned}dB + l_{B1} &= v_{B1}; \\dL + l_{L1} &= v_{L1}; \\dH + l_{H1} &= v_{H1}.\end{aligned}\tag{7.5.3}$$

Если в качестве предварительных координат принять координаты пунктов АГС:

$$B^0 = B_1; \quad L^0 = L_1; \quad H^0 = H_1,\tag{7.5.4}$$

то уравнения (7.5.3) преобразуются к виду:

$$dB = v_{B1}; \quad dL = v_{L1}; \quad dH = v_{H1}.\tag{7.5.5}$$

Систему уравнений поправок для всех уравниваемых пунктов запишем в матричном виде

$$D_1 + l_1 = V_1,\tag{7.5.6}$$

где D_1 — матрица поправок к предварительным координатам; l_1 — матрица свободных членов АГС; V_1 — матрица поправок координат АГС.

Все эти матрицы состоят из матриц отдельных пунктов АГС:

$$D_1 \text{ из матриц } \begin{pmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{pmatrix}; V_1 \text{ из матриц } \begin{pmatrix} V_{B1} \\ V_{L1} \\ V_{H1} \end{pmatrix}; l_1 \text{ из матриц } \begin{pmatrix} l_{B1} \\ l_{L1} \\ l_{H1} \end{pmatrix}.$$

Уравнениям поправок (7.5.6) соответствует весовая матрица

$$P_1 = \mu_0^2 K_1^{-1}. \quad (7.5.7)$$

Если общая система нормальных уравнений составляется в референционной системе, то можно не составлять уравнений поправок (7.5.3), а пользоваться преобразованными нормальными уравнениями АГС.

7.6. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК КООРДИНАТ ОБЩЕЗЕМНОЙ СИСТЕМЫ

Для этих уравнений поправок исходной информацией являются координаты КГС, уравненной в общеземной системе, и ковариационная матрица этих координат.

Обозначим:

B_2, L_2, H_2 — координаты пунктов КГС;

K_2 — ковариационная матрица этих координат.

Чтобы получить уравнения поправок, воспользуемся формулами (1.7.26) для перехода от общеземной системы координат к референционной системе. В этих формулах величины Δa и Δe^2 известны и в ходе уравнивания не отыскиваются. Задача уравнивания состоит в отыскании поправок к координатам B_2, L_2, H_2 и параметров перехода $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, m$.

Обозначим:

$\Delta X^0, \Delta Y^0, \Delta Z^0, \omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0, m^0$ — предварительные значения параметров перехода.

В результате совместного уравнивания сетей, т. е. из решения нормальных уравнений, целесообразно получать параметры перехода от референционной системы к общеземной, а не наоборот. С учетом этого на основании формул (1.7.26) и обозначений коэффициентов (1.7.28) — (1.7.29) напишем уравнения связи между системами координат:

$$\begin{aligned} B_2 &= B_1 + a_{B1}\Delta X + a_{B2}\Delta Y + a_{B3}\Delta Z + a_{B4}\omega_x + a_{B5}\omega_y + \\ &+ a_{B7}m + c_{B1}\Delta a + c_{B2}\Delta e^2; \\ L_2 &= L_1 + a_{L1}\Delta X + a_{L2}\Delta Y + a_{L4}\omega_x + a_{L5}\omega_y + a_{L6}\omega_z; \\ H_2 &= H_1 + a_{H1}\Delta X + a_{H2}\Delta Y + a_{H3}\Delta Z + a_{H4}\omega_x + a_{H5}\omega_y + \\ &+ a_{H7}m + c_{H1}\Delta a + c_{H2}\Delta e^2. \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

В отличие от (1.7.26) в этих формулах

$$\Delta a = a_2 - a_1;$$

$$\begin{aligned}
\Delta e^2 &= e_2^2 - e_1^2; \\
\Delta X &= X_2 - X_1; \\
\Delta Y &= Y_2 - Y_1; \\
\Delta Z &= Z_2 - Z_1.
\end{aligned} \tag{7.6.2}$$

Запишем выражения (7.6.1) в матричном виде

$$X_2 = aX_1 + c_1 \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix}, \tag{7.6.3}$$

где X_2 — матрица-столбец координат в общеземной системе; a — матрица коэффициентов при координатах и параметрах перехода; X_1 — матрица-столбец координат в референцной системе и параметров перехода от референцной системы к общеземной; c_1 — матрица коэффициентов при Δa и Δe^2 ; $\begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix}$ — матрица из двух элементов.

Матрицы коэффициентов a и c_1 вычисляются по формулам (1.7.28) и (1.7.29). Они соответствуют параметрам (7.6.2).

Теперь с предварительными значениями координат и параметров на основании (7.6.1) напомним уравнения поправок:

$$\begin{aligned}
B_2 + v_{B2} &= B^0 + dB + a_{B1} (\Delta X^0 + d\Delta X) + a_{B2} (\Delta Y^0 + d\Delta Y) + \\
&+ a_{B3} (\Delta Z^0 + d\Delta Z) + a_{B4} (\omega_x^0 + d\omega_x) + a_{B5} (\omega_y^0 + d\omega_y) + \\
&+ a_{B7} (m^0 + dm) + c_{B1}\Delta a + c_{B2}\Delta e^2; \\
L_2 + v_{L2} &= L^0 + dL + a_{L1} (\Delta X^0 + d\Delta X) + a_{L2} (\Delta Y^0 + d\Delta Y) + \\
&+ a_{L4} (\omega_x^0 + d\omega_x) + a_{L5} (\omega_y^0 + d\omega_y) + a_{L6} (\omega_z^0 + d\omega_z); \\
H_2 + v_{H2} &= H^0 + dH + a_{H1} (\Delta X^0 + d\Delta X) + a_{H2} (\Delta Y^0 + d\Delta Y) + \\
&+ a_{H3} (\Delta Z^0 + d\Delta Z) + a_{H4} (\omega_x^0 + d\omega_x) + a_{H5} (\omega_y^0 + d\omega_y) + \\
&+ a_{H7} (m^0 + dm) + c_{H1}\Delta a + c_{H2}\Delta e^2.
\end{aligned} \tag{7.6.4}$$

Преобразовав эти выражения, напомним уравнения поправок координат общеземной системы для одного пункта:

$$\begin{aligned}
dB + a_{B1}d\Delta X + a_{B2}d\Delta Y + a_{B3}d\Delta Z + a_{B4}d\omega_x + \\
+ a_{B5}d\omega_y + a_{B7}dm + l_{B2} &= v_{B2}; \\
dL + a_{L1}d\Delta X + a_{L2}d\Delta Y + a_{L4}d\omega_x + a_{L5}d\omega_y + a_{L6}d\omega_z + l_{L2} &= v_{L2}; \\
dH + a_{H1}d\Delta X + a_{H2}d\Delta Y + a_{H3}d\Delta Z + a_{H4}d\omega_x + \\
+ a_{H5}d\omega_y + a_{H7}dm + l_{H2} &= v_{H2}.
\end{aligned} \tag{7.6.5}$$

Для этих уравнений поправок свободные члены вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 l_{B2} &= (B^0 + a_{B1}\Delta X^0 + a_{B2}\Delta Y^0 + a_{B3}\Delta Z^0 + a_{B4}\omega_x^0 + a_{B5}\omega_y^0 + a_{B7}m^0 + \\
 &+ c_{B1}\Delta a + c_{B2}\Delta e^2) - B_2; \\
 l_{L2} &= (L^0 + a_{L1}\Delta X^0 + a_{L2}\Delta Y^0 + a_{L4}\omega_x^0 + a_{L5}\omega_y^0 + a_{L6}\omega_z^0) - L_2; \\
 l_{H2} &= (H^0 + a_{H1}\Delta X^0 + a_{H2}\Delta Y^0 + a_{H3}\Delta Z^0 + a_{H4}\omega_x^0 + a_{H5}\omega_y^0 + a_{H7}m^0 + \\
 &+ c_{H1}\Delta a + c_{H2}\Delta e^2) - H_2.
 \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

Напишем матрицу свободных членов

$$l_2 = aX_1^0 + c_1 \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix} - X_2, \tag{7.6.7}$$

в которой обозначения те же, что и в (7.6.3).

Систему уравнений поправок для всех пунктов КГС запишем в матричном виде

$$D_2 + AD_p + l_2 = v_2. \tag{7.6.8}$$

В этих уравнениях поправок матрицы состоят из матриц отдельных пунктов КГС:

$$\begin{aligned}
 D_2 &\text{ — из матриц } \begin{pmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{pmatrix}; A \text{ — из матриц } \begin{pmatrix} a_{B1} & a_{B2} & \dots & a_{B7} \\ a_{L1} & a_{L2} & \dots & a_{L7} \\ a_{H1} & a_{H2} & \dots & a_{H7} \end{pmatrix}; \\
 l_2 &\text{ — из матриц } \begin{pmatrix} l_{B2} \\ l_{L2} \\ l_{H2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 \\ L^0 \\ H^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_2 \\ L_2 \\ H_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{B1} & c_{B2} \\ c_{L1} & c_{L2} \\ c_{H1} & c_{H2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{pmatrix} a_{B1} & \dots & a_{B7} \\ a_{L1} & \dots & a_{L7} \\ a_{H1} & \dots & a_{H7} \end{pmatrix} \times (\Delta X^0 \ \Delta Y^0 \ \Delta Z^0 \ \omega_x^0 \ \omega_y^0 \ \omega_z^0 \ m^0)^T,
 \end{aligned}$$

а D_p является матрицей поправок к предварительным значениям параметров перехода, т. е.

$$D_p = (d\Delta X \ d\Delta Y \ d\Delta Z \ d\omega_x \ d\omega_y \ d\omega_z \ dm)^T.$$

Уравнениям поправок (7.6.8) соответствует весовая матрица

$$P_2 = \mu_0^2 K_2^{-1}. \tag{7.6.9}$$

Матрица K_2 может быть получена по формуле (7.3.1).

7.7. УРАВНИВАНИЕ КОСМИЧЕСКИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ СГУЩЕНИЯ

Как уже отмечалось в § 7.2, пункты космических геодезических сетей сгущения определяют в системе координат, начало и ориентировка осей которой, хотя и незначительно, но отличаются

от общеземной системы. Особенностью КГСС является и то, что разности координат пар смежных пунктов, полученные из одно-временных наблюдений этих пунктов, получают значительно точнее, чем сами координаты. Следовательно, при уравнивании целесообразно считать результатами измерений не координаты, а измеренные разности координат.

Включать разности координат в совместное уравнивание АГС, КГС и КГСС нельзя, так как сеть, в которой известны только разности координат, не является самостоятельным построением, т. е. не задает самостоятельной системы координат. Из этого следует, что сначала необходимо уравнивать КГСС, назначив в ней начальный пункт.

Выбор начального пункта, вообще говоря, может быть произвольным, однако желательно, чтобы он был хорошо связан с сетью. Координаты начального пункта должны, по возможности, наиболее точно соответствовать системе координат, которая, в свою очередь, соответствует всей совокупности измеренных координат пунктов КГСС (именно координат, а не их разностей). Следовательно, в качестве начального следует выбирать такой пункт, в котором измерено несколько разностей координат в разных сеансах наблюдений.

Координаты начального пункта можно вычислить как среднее из значений координат, полученных в разных сеансах наблюдений, а также из значений координат, переданных на него через 2—3 связи от других пунктов КГСС.

Из наблюдений обычно получают прямоугольные координаты X, Y, Z , а совместное уравнивание сетей выполняют с геодезическими координатами B, L, H . Формулы пересчета прямоугольных координат в геодезические приведены в разделе 1.5. Требуемые для этих формул значения полуоси и сжатия эллипсоида известны. Пересчет координат должен выполняться для каждого сеанса наблюдений, а по вычисленным таким образом геодезическим координатам должны вычисляться разности координат.

Таким образом, исходной информацией для уравнивания КГСС являются координаты начального пункта и разности геодезических координат. Эти разности координат должны сопровождаться значениями средних квадратических ошибок, в соответствии с которыми вычисляются веса при составлении уравнений поправок.

Можно считать, что в КГСС все разности координат измерены в одной системе. Для этого случая уравнения поправок получены в § 5.11. С помощью этих уравнений выполняется уравнивание КГСС как самостоятельного построения в своей системе координат.

На основе уравнивания КГСС, как самостоятельного построения, получают уравненные координаты пунктов этой сети и ковариационная матрица уравненных координат. С этими координатами и их ковариационной матрицей на этапе совместного уравнивания сетей составляются такие же уравнения поправок, как уравнения поправок КГС, рассмотренные в § 7.6. Естественно, что параметры перехода в уравнениях КГС и КГСС разные. Более того, если в

уравнивание включается несколько космических геодезических сетей сгущения, то каждая из них уравнивается отдельно, как самостоятельное построение со своим начальным пунктом, а при совместном уравнивании сетей для каждой КГСС в качестве независимых назначаются свои параметры перехода к референцной системе.

7.8. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ОТДЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

К результатам отдельных измерений отнесем, условно конечно, геодезические высоты в общеземной системе, расстояния и азимуты между отдельными пунктами. Вообще говоря, сюда могут входить любые результаты, поэтому для составления уравнений поправок важно знать, к какой системе координат относятся эти результаты отдельных измерений.

Так например, расстояния инвариантны к системе координат, поэтому уравнения поправок для них можно писать в любой системе. В частности, для системы, принятой при уравнивании за базовую, можно пользоваться уравнением (5.7.8), т. е. уравнением поправок расстояний, приведенных на средний уровень моря.

При уравнивании отдельных азимутов следует пользоваться ранее полученным уравнением поправок одностороннего геодезического азимута (5.2.9) или (5.2.11). Исходной информацией для этих уравнений являются геодезические азимуты, приведенные к среднему полюсу в системе МУН, и их средние квадратические ошибки.

Азимуты обязательно должны приводиться к предварительным координатам пункта. Если дан азимут A'_{ij} , соответствующий другим координатам B'_i, L'_i , то приведение его к предварительным координатам выполняется по формуле

$$A_{ij} = A'_{ij} - (L'_i - L_i^0) \sin B. \quad (7.8.1)$$

Исходной информацией для уравнений поправок геодезических высот являются геодезические высоты, вычисленные по нормальным высотам и высотам квазигеоида над общим земным эллипсоидом, а также их средние квадратические ошибки. Эти уравнения поправок — третье уравнение (7.6.5), получены в разделе 7.6. Особенность состоит только в том, что здесь для них веса вычисляются по формуле

$$p_H = \frac{\mu_0^2}{m_H^2}, \quad (7.8.2)$$

где m_H — средняя квадратическая ошибка геодезической высоты.

В качестве отдельных измерений, как уже отмечалось в § 7.2, могут выступать и отдельные разности координат.

7.9. УРАВНИВАНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ КООРДИНАТ

В § 7.7 рассмотрен вопрос об уравнивании космической геодезической сети сгущения, как единого самостоятельного построения. Однако может оказаться, что отдельные разности координат, полученные относительными методами космической геодезии, нельзя будет уравнивать в составе КГСС. Рассмотрим порядок их использования при совместном уравнивании сетей.

Сначала посмотрим, можно ли включать в уравнивание разности ΔB , ΔL , ΔH отдельных пар пунктов.

Если в качестве результатов измерений рассматривать именно разности измеренных координат, то тогда для каждой пары пунктов пришлось бы составлять каждые три уравнения поправок со своими, скажем, семью параметрами перехода к базовой системе координат. Следовательно, такой путь не годится.

Теперь рассмотрим вопрос об азимутах и расстояниях.

По измеренным координатам можно вычислить как расстояние между центрами пунктов, так и длину геодезической линии.

Если вычислять расстояние между центрами пунктов, то для последующего вычисления расстояния, приведенного на средний уровень моря, или длины геодезической линии придется пользоваться формулами вида (4.4.12) или (4.4.11) и составлять уравнения поправок (5.7.8). Но ранее уже отмечалось, что формулы (4.4.11) и (4.4.12) предназначены для редуцирования сравнительно коротких расстояний, а составляя уравнение поправок (5.7.8), надо составлять и уравнение поправок (5.10.3). В этом уравнении $\Delta \zeta$ рассматривается как измерение, но при расстояниях в несколько сотен километров навряд ли такие измерения можно считать надежными.

Длина геодезической линии, получаемая из решения обратной геодезической задачи, не зависит от высот квазигеоида. Она не зависит от положения начала системы координат и ориентировки координатных осей, но зависит от значений полуоси и сжатия эллипсоида. Следовательно, для вычисления длины геодезической линии необходимо измеренные прямоугольные координаты обоих пунктов пересчитать в геодезические координаты на эллипсоиде Красовского в той же системе, что и пространственные прямоугольные координаты.

Далее следует по координатам B и L вычислить длину геодезической линии из решения обратной геодезической задачи. С вычисленной длиной геодезической линии составляются соответствующие уравнения поправок.

Из решения обратной задачи можно получить также геодезические азимуты. Но азимуты зависят от ориентировки координатных осей системы, в которой измерены разности координат. Ось Z этой системы в общем случае не параллельна оси Z референционной системы, поэтому азимуты не следует включать в уравнивание. Не удастся использовать и информацию о разностях геодезических высот.

7.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕХОДА ПО РАЗНОСТЯМ КООРДИНАТ

Обычно при совместном уравнивании сетей находят параметры связи между системами, которые соответствуют координатам, получаемым в результате такого уравнивания. Но иногда бывает необходимо получить параметры связи между системами, которые задаются координатами пунктов, уравненными ранее. В этом случае параметры перехода вычисляются по разностям координат.

Необходимые для вычислений уравнения поправок получим из выражений (1.7.26) с учетом обозначений (1.7.28) и (1.7.29):

$$\begin{aligned}
 (B_1 - B_2) + v_{\Delta B} &= a_{B1} (\Delta X^0 + d\Delta X) + a_{B2} (\Delta Y^0 + d\Delta Y) + \\
 &+ a_{B3} (\Delta Z^0 + d\Delta Z) + a_{B4} (\omega_x^0 + d\omega_x) + a_{B5} (\omega_y^0 + d\omega_y) + \\
 &+ a_{B7} (m^0 + dm) + c_{B1}\Delta a + c_{B2}\Delta e^2; \\
 (L_1 - L_2) + v_{\Delta L} &= a_{L1} (\Delta X^0 + d\Delta X) + a_{L2} (\Delta Y^0 + d\Delta Y) + \\
 &+ a_{L4} (\omega_x^0 + d\omega_x) + a_{L5} (\omega_y^0 + d\omega_y) + a_{L6} (\omega_z^0 + d\omega_z); \\
 (H_1 - H_2) + v_{\Delta H} &= a_{H1} (\Delta X^0 + d\Delta X) + a_{H2} (\Delta Y^0 + d\Delta Y) + \\
 &+ a_{H3} (\Delta Z^0 + d\Delta Z) + a_{H4} (\omega_x^0 + d\omega_x) + a_{H5} (\omega_y^0 + d\omega_y) + \\
 &+ a_{H7} (m^0 + dm) + c_{H1}\Delta a + c_{H2}\Delta e^2.
 \end{aligned} \tag{7.10.1}$$

В этих выражениях $\Delta X^0, \dots, m^0$ — это предварительные значения параметров перехода от второй системы к первой. Из этих выражений получим уравнения поправок разностей координат:

$$\begin{aligned}
 a_{B1}d\Delta X + a_{B2}d\Delta Y + a_{B3}d\Delta Z + a_{B4}d\omega_x + a_{B5}d\omega_y + a_{B7}dm + l_{\Delta B} &= v_{\Delta B}; \\
 a_{L1}d\Delta X + a_{L2}d\Delta Y + a_{L4}d\omega_x + a_{L5}d\omega_y + a_{L6}d\omega_z + l_{\Delta L} &= v_{\Delta L}; \\
 a_{H1}d\Delta X + a_{H2}d\Delta Y + a_{H3}d\Delta Z + a_{H4}d\omega_x + a_{H5}d\omega_y + \\
 + a_{H7}dm + l_{\Delta H} &= v_{\Delta H}.
 \end{aligned} \tag{7.10.2}$$

Свободные члены вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 l_{\Delta B} &= B_2 - B_1 + a_{B1}\Delta X^0 + a_{B2}\Delta Y^0 + a_{B3}\Delta Z^0 + a_{B4}\omega_x^0 + a_{B5}\omega_y^0 + \\
 &+ a_{B7}m^0 + c_{B1}\Delta a + c_{B2}\Delta e^2; \\
 l_{\Delta L} &= L_2 - L_1 + a_{L1}\Delta X^0 + a_{L2}\Delta Y^0 + a_{L4}\omega_x^0 + a_{L5}\omega_y^0 + a_{L6}\omega_z^0; \\
 l_{\Delta H} &= H_2 - H_1 + a_{H1}\Delta X^0 + a_{H2}\Delta Y^0 + a_{H3}\Delta Z^0 + a_{H4}\omega_x^0 + a_{H5}\omega_y^0 + \\
 &+ a_{H7}m^0 + c_{H1}\Delta a + c_{H2}\Delta e^2.
 \end{aligned} \tag{7.10.3}$$

Для вычисления параметров перехода остается решить уравнения поправок (7.10.2) под условием $\sum pv^2 = \min$. Отметим, что в ходе такого решения координаты пунктов не уравниваются. Обычно в

таких задачах все разности координат $(B_2 - B_1)$, $(L_2 - L_1)$, $(H_2 - H_1)$ полагают равноточными, т. е. веса всех уравнений поправок принимают равными единице.

7.11. ПЕРЕСЧЕТ КООРДИНАТ ИЗ РЕФЕРЕНЦНОЙ СИСТЕМЫ В ОБЩЕЗЕМНУЮ

Из совместного уравнивания сетей получают координаты пунктов в референционной системе, параметры перехода от референционной системы к общеземной и ковариационную матрицу этих координат и параметров. Необходимо вычислять координаты тех же пунктов в общеземной системе и их ковариационную матрицу.

Перевычисление координат может выполняться по формуле (7.6.3),

$$X_2 = aX_1 + c_1 \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta e^2 \end{pmatrix}, \quad (7.11.1)$$

где X_2 — матрица-столбец координат в общеземной системе; X_1 — матрица-столбец координат в референционной системе и параметров перехода от референционной системы к общеземной.

Элементы $\begin{pmatrix} \partial X_2 \\ \partial X_1 \end{pmatrix}$ матрицы a вычисляются по формулам (1.7.28), при этом используются координаты пунктов в референционной системе. Матрица X_1 получается из совместного уравнивания сетей. Элементы матрицы c_1 вычисляются по формулам (1.7.29), а значения Δa и Δe^2 — по формулам

$$\Delta a = a_0 - a_p; \quad \Delta e^2 = e_0^2 - e_p^2,$$

где a_0, e_0^2 — элементы общеземного эллипсоида; a_p, e_p^2 — элементы референц-эллипсоида.

Пересчет ковариационных матриц можно выполнить по формуле

$$K_2 = aK_1a^T, \quad (7.11.2)$$

где K_2 — ковариационная матрица координат в общеземной системе; K_1 — ковариационная матрица координат в референционной системе и параметров перехода.

Если в совместное уравнивание включено r пунктов и получено p параметров перехода, то матрицы имеют следующие размеры:

$$\begin{aligned} \text{матрица } K_2 & 3r \times 3r; \\ \text{матрица } K_1 & (3r + p) \times (3r + p); \\ \text{матрица } a & 3r (3r + p). \end{aligned}$$

7.12 ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СОВМЕСТНО УРАВНЕННЫХ ПУНКТОВ ГГС

В результате совместного уравнивания сетей получают две ковариационные матрицы для нескольких сотен пунктов. Одна матрица — для координат в референционной системе и параметров перехода к общеземной системе, получается непосредственно из уравнивания, Другую матрицу — для координат в общеземной системе, получают путем пересчета первой матрицы, например, по формуле (7.11.2). Обе эти матрицы относятся к одним и тем же пунктам.

В первой матрице на диагонали — квадраты средних квадратических ошибок координат пунктов относительно начального пункта референционной системы (относительно Пулково). В этой же матрице характеристики параметров перехода от референционной системы к общеземной.

В другой матрице диагональные элементы — это квадраты средних квадратических ошибок координат всех совместно уравненных пунктов относительно начала общеземной системы координат. Данных о точности совмещения этого начала с центром масс Земли матрица не содержит. Эти данные получают косвенным путем, как правило, на этапе уравнивания КГС, как самостоятельного построения.

Таким образом, две матрицы дают обобщенную характеристику двум государственным системам координат — референционной и общеземной, а следовательно, и всей государственной геодезической сети, распространяющей обе эти системы.

Недиагональные элементы обеих матриц совместно с диагональными позволяют вычислить средние квадратические ошибки ряда важных элементов ГГС — разностей координат, расстояний, азимутов, взаимных положений в продольном и поперечном направлениях.

Ошибки расстояний между пунктами, вычисленные по той и по другой матрице, одинаковые, если при уравнивании принято, что масштаб в обеих системах координат, т. е. в обеих сетях, одинаковый. При необходимости, по любой из этих ковариационных матриц можно вычислить средние квадратические ошибки азимутов между любой парой из этого сравнительно небольшого числа пунктов. Формулы для вычисления характеристик этих и некоторых других элементов ГГС приведены в § 2.10.

Для остального большинства пунктов ГГС таких ковариационных матриц из уравнивания не получают. Ошибки координат остальных пунктов относительно начального пункта или, если это необходимо, относительно начала общеземной системы, могут быть получены линейным интерполированием от пунктов, для которых получены матрицы. По таким данным можно построить карту изолиний средних квадратических ошибок для всех пунктов АГС.

Полученные таким образом оценки будут несколько завышены для так называемых слабых мест АГС, т. е. для участков, наиболее удаленных от пунктов КГС, и расположенных между пунктами АГС, входящими в ковариационную матрицу. Для этих участков

средние квадратические ошибки целесообразно получать экстраполированием.

Кроме карты или вместо нее, для наглядного представления средних квадратических ошибок относительно начального пункта или начала системы, могут быть составлены таблицы. При этом ошибки широт и долгот целесообразно пересчитать в ошибки ординат и абсцисс в проекции Гаусса—Крюгера по формулам:

$$m_x = 30,9 m_B; \quad m_y = 30,9 \cos B m_L.$$

Средние квадратические ошибки разностей координат тоже для наглядности могут быть представлены в таблицах. При сравнительно большом числе пунктов таблицы целесообразно составлять по каждой координате.

В таблицах могут быть представлены и другие характеристики точности, которые можно получить по ковариационной матрице.

7.13. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ УРАВНИВАНИЕ АГС

В совместном уравнивании сетей участвует менее одного процента пунктов АГС. Могут не участвовать и пункты КГС, не совмещенные с пунктами АГС. Следовательно, после совместного уравнивания необходимо получить еще уравненные координаты остальных пунктов.

Выбор конкретной методики уравнивания координат остальных пунктов зависит от того, каким методом были уравнены АГС и КГС как самостоятельные построения. Но при любой методике координаты совместно уравненных пунктов должны остаться неизменными.

В практическом отношении наиболее полно разработаны две методики уравнивания АГС — многогрупповое уравнивание АГС с решением нормальных уравнений прямым методом (методика Сазонова А. З.) и одnogрупповое уравнивание АГС с решением нормальных уравнений методом сопряженных градиентов (методика Ефимова Г. Н.).

Методика А. З. Сазонова разработана для уравнивания только плановых координат в проекции Гаусса—Крюгера, но ее основные идеи можно перенести и на пространственное уравнивание сетей как с плоскими координатами Гаусса—Крюгера, так и с геодезическими координатами.

При многогрупповом пространственном уравнивании АГС так же, как и в методике А. З. Сазонова, на заключительном этапе может выполняться обратный ход для решения связующей системы, т. е. обратный ход решения преобразованной системы нормальных уравнений, в которую входят граничные, узловые, связующие и общие пункты (см. § 6.12). При этом координаты всех пунктов, полученные на предыдущем этапе, т. е. при совместном уравнивании сетей, не меняются.

В результате получают уравненные координаты всех граничных, узловых, связующих и общих пунктов. Всего в АГС таких пунктов несколько тысяч. Получать ковариационную матрицу для всех

пунктов не имеет смысла, размеры ее слишком велики для практического использования.

В результате решения всей связующей системы получают для каждого участка уравненные координаты всех его граничных, узловых, связующих и общих пунктов. Принимая координаты этих пунктов за твердые, можно продолжить обратный ход в системе нормальных уравнений участка. Такое решение нормальной системы эквивалентно уравниванию заново всех результатов измерений, выполненных в участке, на основе твердых, ранее указанных пунктов.

В практическом плане уравнивать участок заново проще, чем сделать обратный ход. Кроме того при уравнивании участка проще подобрать пункты, для которых следует получить ковариационную матрицу. Такие ковариационные матрицы пунктов участков нужны для получения характеристик сетей участков, и прежде всего характеристик, помещаемых в каталоги координат.

К числу таких характеристик следует отнести следующие:

- средние квадратические ошибки азимутов или дирекционных углов сторон между уравненными смежными пунктами;
- средние квадратические ошибки уравненных углов;
- средние квадратические ошибки длин сторон между уравненными смежными пунктами;
- средние квадратические ошибки разностей координат смежных и несмежных пунктов.

Формулы для вычисления этих характеристик приведены в § 2.10.

Как уже было отмечено, в число узловых, граничных, связующих или общих пунктов входят все пункты астрономо-гравиметрического нивелирования, т. е. все астропункты с измеренными широтами и долготами. При решении связующей системы для них будут получены уравненные геодезические высоты. Геодезические высоты для пунктов КГС и КГСС получены ранее, на этапе совместного уравнивания сетей. С использованием этих геодезических высот может быть составлена карта высот квазигеоида над эллипсоидом Красовского. Составление такой карты является составной частью уравнивания АГС.

Средние квадратические ошибки геодезических высот, а следовательно, и высот геоида, получают по ковариационной матрице совместно уравненных пунктов. Если таких пунктов мало, то следует предусматривать получение ковариационной матрицы при решении связующей системы хотя бы для некоторой части астропунктов.

Такова общая схема заключительного этапа уравнивания АГС, когда на первом этапе было применено многогрупповое или многоэтапное решение. Важным достоинством такого уравнивания является то, что при уравнивании участков сети удается получить ковариационные матрицы, позволяющие выполнить оценку отдельных элементов сетей участков.

При одnogрупповом уравнивании АГС методом сопряженных градиентов на первом этапе решают все уравнения поправок,

составленные в АГС, и получают уравненные координаты всех пунктов АГС и ковариационную матрицу для пунктов, включаемых в общее уравнивание сетей. Координаты этих общих пунктов, полученные на втором этапе, в дальнейшем считаются окончательными и с ними на третьем этапе заново решается вся система уравнений поправок в АГС.

В результате получают уравненные координаты всех пунктов АГС. Полученные на втором и третьем этапах пространственного уравнивания геодезические высоты позволяют составить карту высот квазигеоида над эллипсоидом Красовского.

При совместном уравнивании сетей получают параметры перехода от референцной системы координат к общеземной. Следовательно, после заключительного этапа уравнивания АГС можно высоты квазигеоида над эллипсоидом Красовского пересчитать в высоты квазигеоида над общеземным эллипсоидом и составить соответствующую карту. Таким образом, пространственное уравнивание сетей позволяет полностью согласовать между собой параметры связи референцной и общеземной систем координат и высот квазигеоида над референц-эллипсоидом и общим земным эллипсоидом.

7.14. О СОВМЕСТНОМ УРАВНИВАНИИ СЕТЕЙ МНОГОГРУППОВЫМ МЕТОДОМ

Все предыдущие параграфы этой главы посвящены многоэтапному методу совместного уравнивания сетей. Он в организационном отношении проще, чем многогрупповой метод. Здесь изложим общую идею многогруппового совместного уравнивания АГС, КГС и КГСС.

В § 6.12 описано многогрупповое уравнивание астрономо-геодезической сети. В АГС для всех групп уравнений поправок назначают единые независимые параметры, единые их предварительные значения и единую ошибку единицы веса. Выполнить с самого начала эти же условия во всех совместно уравниваемых сетях — в АГС, КГС и КГСС, очень трудно. При уравнивании этих сетей как самостоятельных построений в каждой из них назначают свои независимые параметры и ошибки единицы веса. С ними и составляются нормальные уравнения в каждой из трех сетей

$$A_1^T P_1 A_1 \delta X_1 + A_1^T P_1 L_1 = 0. \quad (7.14.1)$$

Прежде чем при многогрупповом уравнивании складывать эти системы нормальных уравнений, их необходимо привести к единой ошибке единицы веса, общим независимым параметрам и предварительным значениям этих параметров. Приведение нормальных уравнений каждой сети выполняется по формуле (2.9.24):

$$\frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}} F^T A_1^T P_1 A_1 F \delta Y_1 + \frac{\mu_{02}}{\mu_{01}} F^T A_1^T P_1 L_1 + \frac{\mu_{02}^2}{\mu_{01}} F^T A_1^T P_1 A_1 (X_2^0 - X_1^0) = 0. \quad (7.14.2)$$

Для АГС, КГС и КГСС следует получить три системы таких нормальных уравнений.

В формуле (7.14.2) μ_{01} — ошибки единицы веса, с которыми получены нормальные уравнения каждой из трех сетей (7.14.1). Допустим, что для совместного уравнивания назначена ошибка единицы веса μ_{02} . Значение μ_{02} может отличаться от ошибок единицы веса любой из совместно уравниваемых сетей. Из практических же соображений полезно принять ее равной ошибке единицы веса одной из сетей, например, АГС.

В § 2.4 показано, что размерность ошибки единицы веса не имеет значения. Если в АГС принято $\mu_{01} \approx 1''$, а в КГС $\mu_{01} = 1$ м, то следует считать, что в них ошибки единицы веса одинаковые, и не требуется приводить ошибку единицы веса КГС к ошибке АГС. Числа μ_{02}^2/μ_{01}^2 вычисляются без учета размерностей μ_{01} и μ_{02} , так как размерность ошибки единицы веса является понятием чисто условным.

Для каждой сети вычисляется только одно такое число. Если это число равно единице, то для данной сети никаких приведений к единой ошибке единицы веса не требуется. В любом случае приведение к единой ошибке единицы веса выполняется довольно просто.

Сложнее обстоит дело с приведением к единым независимым параметрам. Между независимыми параметрами всех систем уравнений, т. е. между всеми неизвестными, должны существовать однозначные связи. В совместно уравниваемых сетях такие связи есть, они выражаются точными формулами.

В такие формулы кроме неизвестных, которые уже имеются в уравнениях сетей (7.14.1), могут входить также и другие неизвестные. Например, неизвестными в уравнениях АГС являются геодезические координаты B, L, H в референцной системе. В КГС нормальные уравнения могут быть составлены с прямоугольными координатами X, Y, Z в общеземной системе. Связь между этими координатами можно представить следующей схемой: XYZ в ОЗСК $\rightarrow BLH$ в ОЗСК $\rightarrow BLH$ в РефСК + параметры перехода.

В соответствии с этой схемой необходимо будет переходить от независимых параметров X, Y, Z в общеземной системе к независимым параметрам суммарной системы, которыми являются координаты B, L, H в референцной системе и параметры перехода от референцной системы к общеземной.

Если при многогрупповом уравнивании складывают нормальные уравнения АГС, в которые кроме геодезических входят астрономические координаты, то в суммарной системе должны быть также астрономические координаты или уклонения отвесных линий. Чтобы не усложнять суммарную систему, целесообразно складывать преобразованные нормальные уравнения АГС, в которых астрономические координаты уже исключены. Такие же преобразования могут быть выполнены в КГС и КГСС, если в нормальные уравнения входят независимые параметры, которых не будет в суммарной системе.

Таким образом, в суммарной системе нормальных уравнений целесообразно назначать в качестве независимых параметров координаты B , L , H в референционной системе, параметры перехода от референционной системы к общеземной и от референционной системы к системе координат, в которой выполнены измерения в КГСС. При таких независимых параметрах суммарной системы не потребуется делать приведений для преобразованных нормальных уравнений АГС, если в них исключены астрономические координаты.

При совместном уравнивании сетей многогрупповым методом потребуется приводить предварительные значения независимых параметров (неизвестных) каждой сети к предварительным значениям, которые выбраны для суммарной системы нормальных уравнений. Если для суммарной системы принять предварительные значения неизвестных в АГС, то для нормальных уравнений АГС специальных приведений не потребуется.

Теперь рассмотрим формулы для получения матриц и чисел, которые входят в формулу (7.14.2). При этом будем считать, что для суммарной системы принята ошибка единицы веса μ_{02} , такая же как в уравнениях поправок АГС. Допустим также, что независимыми параметрами являются координаты в референционной системе и параметры перехода от референционной системы к системам координат других сетей. Предварительные координаты в суммарной системе такие же, как в АГС, и кроме того назначены предварительные значения параметров перехода.

В формуле (7.14.2) для АГС $\mu_{02}^2/\mu_{01}^2 = 1$. Формально в нормальных уравнениях АГС появляются новые неизвестные — поправки к предварительным значениям параметров перехода. Но в матрице F , которая вычисляется по формуле (2.9.19), производные координат по координатам равны единице, а по параметрам перехода равны нулю, поэтому реально неизвестные и коэффициенты при этих неизвестных не меняются.

Третий член формулы (7.14.2) будет нулевой матрицей, а второй член — это та же матрица, что и в нормальных уравнениях АГС. Следовательно, нормальные уравнения АГС не меняются. Неизвестными в них, которые в (7.14.1) обозначены δX_1 , по-прежнему будут поправки dB , dL , dH к предварительным геодезическим координатам B^0 , L^0 , H^0 .

В соответствии с формулой (7.14.2) каждое нормальное уравнение КГС и КГСС изменится следующим образом. Неизвестные, например, X , Y , Z , которые в (2.9.16) обозначены X , заменяются на неизвестные B , L , H , ΔX , ΔY , ΔZ , ω_x , ω_y , ω_z , t , которые обозначены Y . При этом в соответствии с (2.9.19) необходимо вычислить производные первоначальных независимых параметров по новым независимым параметрам. Это можно сделать по формулам (1.5.7) и по формулам, которые получим на основании (1.6.1):

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta X} = 1; \quad \frac{\partial Y}{\partial \Delta X} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial \Delta X} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial \Delta Y} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial \Delta Y} &= 1; & \frac{\partial Z}{\partial \Delta Y} &= 0; \\
\frac{\partial X}{\partial \Delta Z} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial \Delta Z} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial \Delta Z} &= 1; \\
\frac{\partial X}{\partial \omega_x} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial \omega_x} &= -Z; & \frac{\partial Z}{\partial \omega_x} &= Y; \\
\frac{\partial X}{\partial \omega_y} &= Z; & \frac{\partial Y}{\partial \omega_y} &= 0; & \frac{\partial Z}{\partial \omega_y} &= -X; \\
\frac{\partial X}{\partial \omega_z} &= -Y; & \frac{\partial Y}{\partial \omega_z} &= X; & \frac{\partial Z}{\partial \omega_z} &= 0; \\
\frac{\partial X}{\partial t} &= X; & \frac{\partial Y}{\partial t} &= Y; & \frac{\partial Z}{\partial t} &= Z.
\end{aligned} \tag{7.14.3}$$

Эти производные используются для вычисления коэффициентов при новых неизвестных и для новых свободных членов. Для вычисления новых свободных членов необходимо также пересчитать новые предварительные значения независимых параметров по формуле (2.9.17):

$$X_2^0 = f(Y_1^0),$$

где X_2^0 — пространственные прямоугольные координаты X , Y , Z ; Y_1^0 — предварительные значения координат АГС B^0 , L^0 , H^0 и вновь назначенных параметров перехода.

Этот пересчет выполняется в два этапа. Сначала вычисляют геодезические координаты B , L , H так же, как при переходе от референционной системы к общеземной. Затем по формулам (1.5.1) пересчитывают геодезические координаты в пространственные прямоугольные. Полученные таким образом координаты X , Y , Z обозначены в формуле (7.14.2) как X_2^0 .

Отметим, что в (7.14.2) предварительные значения координат X^0 , Y^0 , Z^0 , с которыми были составлены первоначальные нормальные уравнения КГС и КГСС, обозначены X_1^0 . Отметим также, что в (7.14.2) $A_1^T P_1 A_1$ и $A_1^T P_1 L_1$ — это коэффициенты и свободные члены первоначальных (не приведенных) нормальных уравнений АГС, КГС и КГСС.

Полученные таким образом для КГС и КГСС нормальные уравнения (7.14.2) складываются с первоначальными нормальными уравнениями АГС (7.14.1) и получается суммарная система нормальных уравнений (2.9.25). Из решения этой суммарной системы получают уравненные значения координат в референционной системе и параметры перехода от нее к двум другим системам координат, а также корреляционную матрицу этих координат и параметров.

Порядок вычисления ошибки единицы веса после уравнивания и ковариационной матрицы рассмотрен в § 2.9. Следует отметить, что при составлении первоначальных нормальных уравнений всех сетей необходимо получать суммы $L_1^T P_1 L_1$ и приводить их к единой

ошибке единицы веса и к новым независимым параметрам по формуле (2.9.32). С этими приведенными суммами вычисляется ошибка единицы веса после уравнивания по формулам (2.9.28), (2.9.27) и (2.9.26). Входящие в (2.9.26) поправки V являются поправками ко всем результатам измерений во всех совместно уравниваемых сетях. Следовательно, необходимо знать число всех измерений n или в параметрическом способе число всех уравнений поправок.

Число избыточных измерений вычисляется по формуле

$$r = n - k,$$

где k — число необходимых измерений.

Если приведение выполняется для преобразованных нормальных уравнений, то значения $L_1^T P_1 L_1$, $A_1^T P_1 L_1$, $A_1^T P_1 A_1$ в (2.9.32) должны быть получены при преобразовании. Эти значения соответствуют количеству всех независимых параметров в не преобразованной системе, т. е. сумме исключенных и оставленных неизвестных. Следовательно, в нашем случае число k равно сумме количества неизвестных в суммарной системе и количества неизвестных, исключенных при преобразованиях нормальных уравнений.

С полученной ошибкой единицы веса вычисляется по формуле (2.9.33) ковариационная матрица уравненных координат и параметров перехода.

Глава 8

УРАВНИВАНИЕ СЕТЕЙ СГУЩЕНИЯ И УЧАСТКОВ ГГС

8.1. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ СГУЩЕНИЯ

Как уже отмечалось, современная государственная геодезическая сеть России состоит из астрономо-геодезической сети, космической геодезической сети, космических геодезических сетей сгущения и геодезических сетей сгущения. АГС, КГС и КГСС задают координатную основу на территории всей страны, т. е. задают две системы координат — общеземную и референционную. С помощью геодезических сетей сгущения обеспечивается необходимая для потребителей сети плотность пунктов, распространяющих эти две системы координат.

Государственная геодезическая сеть создана на территории всей страны. Дальнейшая задача заключается в ее совершенствовании, т. е. в повышении ее точности и обеспечении требуемой плотности. Эта задача может быть решена на основе модернизации ГГС.

Основными направлениями модернизации ГГС являются следующие:

— повышение точности КГС и КГСС на основе дополнительных измерений и новых методов построения этих сетей средствами космической геодезии с целью совершенствования всей координатной основы страны;

— дополнительные астрономические и геодезические измерения между существующими геодезическими пунктами для повышения точности элементов сети на отдельных участках;

— определение новых пунктов АГС и ГСС на основе угловых и линейных измерений, а также относительными методами космической геодезии, чтобы обеспечить необходимую плотность пунктов сети;

— на основе геометрического нивелирования повышение точности нормальных высот пунктов, в том числе пунктов КГС, КГСС, пунктов Лапласа и пунктов, между которыми выполнены линейные измерения;

— дальнейшее совершенствование гравиметрических карт, каталогов средних аномалий силы тяжести по стандартным трапециям и моделей гравитационного поля Земли, необходимых для повышения точности общеземной системы координат, высот квазигеоида и уклонов отвесных линий.

По мере выполнения работ по модернизации ГГС потребуются совместные уравнивания результатов прежних и новых измерений. Вопросы уравнивания АГС, КГС и КГСС изложены в главах 5—7. В этой главе рассмотрим геодезические сети сгущения и отдельные участки ГГС, на которых выполнены дополнительные измерения.

Современная государственная геодезическая сеть является многоступенчатым построением. В нее входят геодезические сети сгущения нескольких классов, развиваемые при условии, что пункты сетей старших классов являются исходными для сетей младших классов. Чем ниже класс сети, тем ниже точность измерений и требования к геометрическим условиям построения. В соответствии с этим, чем ниже класс сети, тем больше средние квадратические ошибки дирекционных углов и относительные ошибки длин сторон между смежными пунктами. В табл. 8.1.1 приведены требования нормативных документов к точности элементов современных сетей сгущения.

В таблице (п. п. 1—6) приведены сети, развитые в соответствии с «Основными положениями 1954—61 гг.» [14]. Сеть 2 класса в настоящее время уже не рассматривается как сеть сгущения и приведена в таблице лишь для сравнения с ней других сетей.

Из таблицы следует, что точность измерения углов и расстояний в сетях 2—4 классов, развитых по «Основным положениям 1954—61 гг.», различается не очень сильно — лишь в 1,5—2 раза. Это соотношение точности измерений соответствует соотношению точности уравненных дирекционных углов. Следовательно, эти сети целесообразно уравнивать совместно, но если это можно сделать без нарушения правил уравнивания.

Для потребителей сети, т. е. для использования пунктов сети в качестве исходной основы при последующем определении гео-

Таблица 8.1.1

Характеристики сетей сгущения

№№ п. п.	Вид сети	Ср. кв. ошибка		Относительная ср. кв. ошибка измерения рас- стояния
		измерения угла	дирекционного угла	
1	Триангуляция 2 кл.	1,0"	2"	1 : 300 000
2	Полигонометрия 2 кл.	1,0"	2"	1 : 250 000
3	Триангуляция 3 кл.	1,5"	3"	—
4	Полигонометрия 3 кл.	1,5"	3"	1 : 200 000
5	Триангуляция 4 кл.	2,0"	4"	—
6	Полигонометрия 4 кл (Осн. пол. 1954—61 гг.)	2,0"	4"	1 : 150 000
7	Полигонометрия 4 кл. (Инструкция 1976 г.)	2,0"	—	1 : 40 000
8	Сеть 1 разряда	5,0"	—	1 : 10 000
9	Сеть 2 разряда	10,0"	—	1 : 5 000

дезических данных, не так уж важно, с какой точностью измерены углы и расстояния. Зато очень важное значение имеет точность дирекционных углов и длин сторон в уравненной, каталогизированной, т. е. используемой сети.

Сеть полигонометрии 4 класса, развитая по «Инструкции 1976 г.» [18], резко отличается от остальных сетей 3—4 класса прежде всего точностью дирекционных углов. Дело в том, что в этой сети допускаются очень короткие стороны — до 250 м, а точность дирекционных углов при малых расстояниях сильно зависит от стабильности центров геодезических пунктов, от точности центрировок и редукций как при развитии сети, так и при ее использовании.

По существу, сети 4 класса, развитые по «Основным положениям 1954—61 гг.» и по «Инструкции 1976 г.», — это сети разных классов. Чтобы обратить на это внимание, в некоторых технических руководствах сеть 4 класса, развитую по «Инструкции 1976 г.», называют полигонометрией пониженной точности. В каталогах, чтобы избежать недоразумений из-за разницы в точности дирекционных углов, сети 4 класса, развитые по «Основным положениям 1954—61 гг.» и по «Инструкции 1976 г.», помещают в разные разделы каталогов.

Точность измерения углов и расстояний в полигонометрии 4 класса, развитой по «Инструкции 1976 г.», мало отличается от

остальных сетей 3—4 класса. Если исходить из этого формального равенства, то эти сети следовало бы уравнивать совместно.

Однако, надо учитывать следующее. Формальная разница весов мала, поэтому взаимное влияние сетей друг на друга при их совместном уравнивании будет примерно одинаковым. Уравненные дирекционные углы будут характеризоваться примерно одинаковыми ошибками. Но это противоречит реальному положению дел — реальная разница средних квадратических ошибок дирекционных углов существенная, из-за чего сети триангуляции 4 класса при построении принимаются в качестве исходной основы для полигонометрии 4 класса. Следовательно, сети полигонометрии 4 класса и сети 1, 2 разряда, развиваемые по «Инструкции 1976 г.», следует уравнивать отдельно от сетей 3 и 4 класса, развитых по «Основным положениям 1954—61 гг.».

Как уже отмечалось, сети 2, 3 и 4 классов целесообразно уравнивать совместно, когда это возможно технически и не противоречит правилам уравнивания. Рассмотрим этот вопрос детальнее.

Сначала зададимся вопросом, полезно ли уравнивать сети 3 и 4 классов совместно с астрономо-геодезической сетью.

В государственной геодезической сети около 1 000 000 пунктов. В АГС около 170 000 пунктов, т. е. примерно в 5 раз меньше. Если решать систему нормальных уравнений, которая в 5 раз больше, чем система уравнений АГС, то в прямых методах решения существенно возрастет влияние ошибок округления, что снизит точность уравненных координат пунктов АГС и, в конечном счете, понизит точность координатной основы в целом.

То же самое будет и с ошибками ограничения в косвенных методах решения нормальных уравнений (см. § 2.4). Следовательно, при общем уравнивании ГГС не целесообразно уравнивать сети сгущения совместно с астрономо-геодезической сетью.

При многогрупповом и многоэтапном уравнивании в обратном ходе для внутренних пунктов участка могут заново составляться уравнения поправок с результатами измерений 1 и 2 класса. При уравнивании собственно участков ошибки округлений или ограничения существенной роли уже не играют. Однако присоединить к сетям 1 и 2 классов в участке сети сгущения нельзя, т. к. они не участвовали в формировании исходной системы нормальных уравнений.

Следовательно, уравнивание сетей сгущения совместно с сетями 1 и 2 класса в обратном ходе противоречило бы правилам способа наименьших квадратов.

Совместное уравнивание измерений в сетях 1—4 классов при модернизации отдельных участков ГГС будет рассмотрено в § 8.4. Что же касается совместного уравнивания сетей 3 и 4 классов, развитых по «Основным положениям 1954—61 гг.», то необходимо иметь в виду следующее.

Точность уравненной сети зависит не только от ошибок измерений, но и от ошибок исходных пунктов. Известно, например, что при уравнивании сетей 2 класса на основе твердых пунктов 1 класса

углы в сетях 2 класса получали такие большие поправки, которые совершенно не соответствуют точности измерения углов 2 класса.

Как уже отмечалось, разница реальной точности измерений в сетях 3 и 4 классов не велика. Следовательно, совместное их уравнивание позволит несколько повысить точность сети старшего, т. е. 3 класса. При этом пункты сети 3 класса уже не будут выполнять роль твердых пунктов и, следовательно, не вызовут искажений в сети низшего, в данном случае 4 класса. Измерения в каждой сети получают поправки в соответствии с их реальными весами.

8.2. МОДЕРНИЗАЦИЯ УЧАСТКОВ ГГС

Главной задачей модернизации сетей на отдельных участках является повышение их точности. Если же точность участка сети оказалась неудовлетворительной из-за тектогенных процессов, например, из-за землетрясений, то тогда нужно не модернизировать, а заново определить сеть на участке.

В оценке точности геодезических сетей можно выделить два аспекта. Первый — это точность взаимного положения пунктов, расположенных на больших расстояниях друг от друга, или точность взаимного положения разных участков сети. Эта проблема точности решается в рамках программ построения и модернизации всей государственной геодезической сети.

Второй аспект — это точность взаимного положения смежных пунктов и пунктов, расположенных в пределах отдельных участков ГГС. Эта задача может решаться путем выполнения дополнительных измерений на участке сети с последующим уравниванием старых и новых (т. е. дополнительных) измерений.

К дополнительным могут относиться угловые и линейные измерения, астрономические и гравиметрические определения, измерения разностей координат методами космической геодезии, определения нормальных высот геометрическим нивелированием.

ГГС СССР развита в основном методом триангуляции. В таких сетях выполнен большой объем угловых измерений, поэтому дополнительные измерения углов, как правило, не смогут существенно повысить точность координат. Более существенное влияние оказывают дополнительные линейные измерения, тем более, что точность современных линейных измерений в 1,5—2 раза выше, чем точность измерения углов.

Точность сетей характеризуется не только точностью плановых координат, но и точностью геодезических высот. В связи с этим на некоторых участках могут потребоваться дополнительные измерения, обеспечивающие повышение точности астрономо-гравиметрического нивелирования. Следовательно, могут потребоваться дополнительные пункты Лапласа, а при уравнивании сетей участков всегда будет целесообразно использовать новые результаты гравиметрических съемок.

Точность взаимных положений по высоте, т. е. точность разностей геодезических высот, находится в прямой зависимости от точности

нормальных высот. На тех участках сети, где большинство высот получено тригонометрическим нивелированием, будут требоваться дополнительные определения высот методом геометрического нивелирования.

Самым, видимо, действенным для повышения точности взаимных положений пунктов, удаленных друг от друга на десятки и сотни километров, являются методы относительных определений средствами космической геодезии. Этими методами определяются разности трех координат — геодезических широт, долгот и высот.

В рамках программ модернизации участков сети кроме дополнительных измерений в астрономо-геодезической сети могут выполняться дополнительные измерения на пунктах сетей сгущения или определяться новые пункты ГСС, в том числе и методами космической геодезии.

Дополнительные измерения в астрономо-геодезической сети и геодезических сетях сгущения на участке не обязательно выполнять в таком же объеме, как при первоначальном развитии сети. Совсем не обязательно стремиться к тому, чтобы координаты пунктов можно было получать только по одним дополнительным измерениям. При дополнительных измерениях не обязательно строить сеть триангуляции, если достаточно выполнить лишь дополнительные угловые и линейные измерения.

Таким образом, для повышения точности отдельных участков ГГС могут использоваться все виды геодезических измерений, от которых зависит как точность плановых координат, так и точность геодезических высот. Следовательно, и методики уравнивания участков должны обеспечивать совместное уравнивание всех видов измерений и получение уравненных значений трех координат. Это особенно необходимо, когда методами космической геодезии определяются разности трех координат.

8.3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В СЕТЯХ

Перед уравниванием сетей необходимо выполнить предварительную оценку всех видов измерений. Делается она главным образом для того, чтобы выявить грубые результаты измерений и получить значения средних квадратических ошибок, наиболее полно отражающих реальную точность измерений.

Большинство оценок основаны на разного рода геометрических условиях и соответствующих им невязках. Для разных видов измерений условия, а следовательно, и формулы средних квадратических ошибок разные. Общим для всех измерений является, пожалуй, только их анализ по поправкам, получаемым из уравнивания. Предварительное уравнивание является, пожалуй, самым эффективным средством оценки измерительной информации. Поправки из уравнивания желательно вычислять для всех результатов измерений.

При анализе по материалам уравнивания подход ко всем величинам одинаковый — большая по сравнению с остальными поправка должна побуждать к тщательному анализу данного измерения.

Теперь рассмотрим виды невязок и методы косвенного анализа всех величин, которые могут входить в состав информации для уравнивания.

Горизонтальные углы в триангуляции и полигонометрии принято оценивать по невязкам и формулам, которые соответствуют геометрическим условиям фигур и полигонов.

В триангуляции проверяется выполнение условия суммы углов треугольника. В этом условии невязка вычисляется по формуле

$$W_{\text{тр}} = \Sigma\beta - 180^\circ, \quad (8.3.1)$$

где β — углы треугольника, приведенные на плоскость проекции Гаусса—Крюгера.

Эти невязки вычисляются для каждого треугольника. На них в сетях разных классов установлены полевые допуски. В сетях триангуляции невязка в каждом треугольнике является одной из самых представительных оценок. Перед уравниванием должны быть проанализированы невязки во всех треугольниках непосредственно по информации, подготовленной к уравниванию.

Для обобщенной характеристики точности углов в сетях триангуляции вычисляют среднюю квадратическую ошибку по невязкам треугольников (формула Ферреро)

$$m_\beta = \sqrt{\frac{\Sigma W^2}{3n}}, \quad (8.3.2)$$

где n — число невязок.

В табл. (4.10.1) представлены средние квадратические ошибки углов в сетях триангуляции всех классов, вычисленные именно по этой формуле.

В полигонометрии углы оценивают по угловым невязкам полигонов по формуле

$$W_n = \Sigma\beta - 180^\circ (n - 2), \quad (8.3.3)$$

где $\Sigma\beta$ — сумма левых по ходу углов полигона; n — число углов полигона.

Полюсные условия возникают в каждом геодезическом четырехугольнике и в каждой центральной фигуре. Невязки полюсных условных уравнений вычисляются по формуле

$$W_{\text{пол}} = \rho'' \left(\frac{\sin A_1 \sin A_2 \dots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \dots \sin B_n} \right). \quad (8.3.4)$$

Обозначения углов в центральной фигуре показаны на рис. 16.

Уравнения связи для измеренных расстояний без других видов информации возникают, главным образом, в сетях трилатерации.

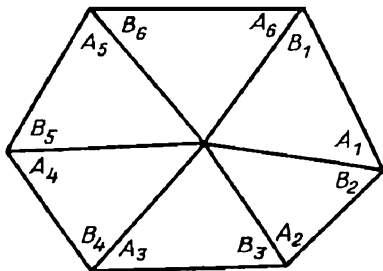


Рис. 16. Полусное условие

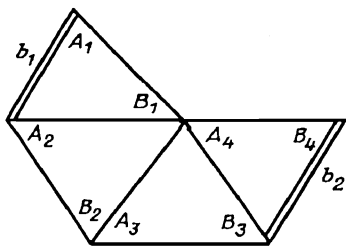


Рис. 17. Базисное условие

Сетей таких сравнительно мало, да и избыточных измерений в них тоже мало.

В большинстве случаев уравнения связывают расстояния с углами. Свободные члены базисного условия (рис. 17) вычисляют по формуле

$$W_b = b_1 \frac{\sin A_1 \sin A_2 \dots \sin A_n}{\sin B_1 \sin B_2 \dots \sin B_n} - b_2. \quad (8.3.5)$$

Для проверки точности линейных измерений в полигонах полигонометрии вычисляют невязки в координатах.

При оценке астрономических азимутов вычисляют несколько видов невязок и средних квадратических ошибок.

Для оценки азимута по результатам измерений на станции применяется формула

$$m_{a1} = \sqrt{\frac{\sum (a_i - a_{cp})^2}{n - 1}}, \quad (8.3.6)$$

где a_i — значение азимута в каждом приеме наблюдения; a_{cp} — среднее значение азимута; n — число приемов наблюдения.

Средняя квадратическая ошибка, вычисленная по этой формуле, является оценкой по внутренней сходимости. Установлено, что она недостаточно хорошо соответствует реальной точности азимутов.

На пунктах Лапласа большинство азимутов определено в прямом и обратном направлениях, чтобы ослабить влияние боковой рефракции. Для таких азимутов вычисляется невязка по формуле

$$W_{a2} = a_{12} - [a_{21} - (\lambda_2 - \lambda_1) \sin \varphi], \quad (8.3.7)$$

где a_{12} — прямой азимут направления; a_{21} — обратный азимут направления; λ_1, λ_2 — астрономические долготы пунктов.

Невязка, вычисленная по этой формуле, зависит не только от ошибок азимутов, но и от ошибок измерения долгот, которые увеличивают азимутальную часть невязки. Недостатком этой формулы является и то, что она дает преувеличенное представление об остаточном влиянии рефракции на среднее значение азимута.

Если прямой и обратный азимуты измерены с одинаковыми систематическими ошибками, то эти ошибки никак не проявятся

в невязке. Из-за этого по формуле (8.3.7) не всегда обнаруживаются даже большие ошибки измерений.

При анализе азимутальных измерений принято также вычислять невязки из сравнения средних азимутов на ближайших пунктах Лапласа. Заметим, что реально сравниваются не астрономические, а вычисленные по ним геодезические азимуты:

$$W_a = [a_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1] + \Sigma\beta - [a_2 - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2], \quad (8.3.8.)$$

где a_1, a_2 — средние значения астрономических азимутов на соседних пунктах Лапласа; $\Sigma\beta$ — сумма редуцированных на эллипсоид углов по кратчайшей ходовой линии между соседними пунктами Лапласа.

В этой невязке в отличие от (8.3.7) проявляется реальная, остающаяся часть рефракции. Но средняя квадратическая ошибка суммы углов в несколько раз больше ошибки каждого азимута в отдельности и обоих азимутов вместе, поэтому в самих азимутах можно обнаружить лишь очень грубые ошибки.

Учитывая невысокую надежность каждой из приведенных оценок в отдельности, был выполнен специальный, многоплановый анализ всех азимутов, измеренных в сетях 1 и 2 классов. На основе такого анализа были выделены азимуты, точность которых вызывала сомнения. Эти азимуты были измерены заново.

Не менее сложно обстоит дело с прямыми методами оценки астрономических широт и долгот. Нет прямой связи между астрономическими широтами пары пунктов Лапласа, а связь между астрономическими долготами выражается лишь через астрономические азимуты, например, по формуле

$$a_2 = a_1 - (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi_1, \quad (8.3.9)$$

поэтому основными для астрономических координат являются косвенные методы оценки.

Косвенно оценить астрономические широты и долготы можно с помощью уклонений отвесных линий или совместно с гравиметрическими поправками. Совместной оценки с гравиметрическими поправками ранее не выполняли. О ней будет сказано при анализе гравиметрических поправок, а здесь рассмотрим оценку с помощью уклонений отвесных линий.

Этот способ оказался наиболее выгодным, т. к. раньше параметры связи между референцной и общеземной системами координат получали не по спутниковым, а по астрономо-гравиметрическим данным, и для этой, в данном случае главной, задачи вычисляли по гравиметрическим данным уклонения отвесной линии в общеземной системе (см. § 3.4).

Не излагая детально методику, поясним на примере широты основную идею анализа астрономических координат.

Составляющая уклонения отвесной линии в меридиане в общеземной системе координат в соответствии с (1.1.11) вычисляется по формуле

$$\xi_0 = \varphi - B_0, \quad (8.3.10)$$

где φ — астрономическая широта; B_0 — геодезическая широта в общеземной системе координат.

Составляющие уклонения отвеса вычисляют по гравиметрическим данным. Всю сеть разбивают на участки. В каждом участке для каждого пункта назначают две зоны интегрирования — ближнюю и дальнюю:

$$\xi_0 = \xi_B - \xi_D. \quad (8.3.11)$$

На основании (8.3.10) и (8.3.11) образуем разности для двух пунктов участка

$$\xi_{Bi} - \xi_{Bj} = (\varphi_i - \varphi_j) - (B_{0i} - B_{0j}) - (\xi_{Di} - \xi_{Dj}). \quad (8.3.12)$$

В ближней зоне детальность учета гравиметрических данных выбирают так, чтобы не допустить потери точности, а радиус начала дальней зоны назначают исходя из того, чтобы значения на всех пунктах данного участка были одинаковыми:

$$\xi_{Di} = \xi_{Dj}. \quad (8.3.13)$$

Кроме того, размеры участка берут такими, чтобы на всех пунктах были примерно одинаковыми разности геодезических координат в референцной и общеземной системах:

$$B_{0i} - B_{0j} = B_i - B_j. \quad (8.3.14)$$

Подставив (8.3.12)—(8.3.14) в (8.3.11), получаем

$$\xi_{Bi} - \xi_i = \xi_{Bj} - \xi_j, \quad (8.3.15)$$

где ξ_i , ξ_j — составляющие уклонения отвесной линии в референцной системе.

Отсюда следует, что, если для всех пунктов Лапласа на данном участке вычислить значения

$$\Delta_i = \xi_{Bi} - \xi_i, \quad (8.3.16)$$

то все они должны быть равны между собой. Реально они не равны из-за ошибок гравиметрических данных и астрономических координат, поэтому вычисляют среднее из всех значений (8.3.16) и с ним сравнивают значения на отдельных пунктах.

Такое же сравнение выполняется для астрономических долгот. По результатам сравнения определяют пункты, координаты которых вызывают сомнения.

К настоящему времени по гравиметрическим данным проверена значительная часть пунктов Лапласа.

Для гравиметрических поправок к астрономическому нивелированию нет уравнений связи без участия других величин. А с другими величинами они связаны уравнением астрономо-гравиметрического нивелирования, т. е. уравнением разности высот квазигеоида (3.5.5).

В это уравнение входят геодезические и астрономические координаты. Расстояния между пунктами Лапласа составляют 100—200 км, а между смежными астропунктами 10—20 км. При таких расстояниях влияние ошибок разности геодезических координат на величины невязок мало.

Ошибки же астрономических координат будут влиять на разность высот геоида наравне с ошибками гравиметрических поправок. Правда, астрономические координаты проверяются через уклонения отвесных линий. Но эти уклонения очень сильно связаны с гравиметрическими поправками. Поэтому при такой проверке в выявленных ошибках разностей высот геоида не всегда легко установить, чем они вызваны — ошибками гравиметрических поправок или астрономических координат. И на этот счет нет, видимо, единого рецепта.

По формуле астрономо-гравиметрического нивелирования вычисляются разности высот квазигеоида. С этими разностями можно образовать условные уравнения фигур — сумма разностей высот геоида по сторонам замкнутой фигуры равна нулю. Отличие от нуля составляет невязку. Вычисление и анализ таких невязок эквивалентно уравниванию результатов АГН. Уравнение связи по каждой стороне астрономо-гравиметрического нивелирования имеет вид:

$$(\zeta_1 - \zeta_2) = \zeta_1 - \zeta_2, \quad (8.3.17)$$

где $(\zeta_1 - \zeta_2)$ — «измеренная» т. е. вычисленная по формуле (3.5.5) разность высот квазигеоида.

Ему соответствует уравнение поправок

$$\begin{aligned} v_{\Delta\zeta} &= d\zeta_1 - d\zeta_2 + l; \\ l &= (\zeta_1^0 - \zeta_2^0) - (\zeta_1 - \zeta_2), \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

где ζ_1^0, ζ_2^0 — предварительные значения высот геоида.

Для уравнивания один из пунктов следует принять за начальный.

Весы для уравнений поправок получим на основании ошибок, представленных выражениями (5.10.6) или (5.10.7). В соответствии с ними можно принять следующую формулу веса:

$$p = \frac{8 \cdot 10^4}{D_{12}^2} \quad (8.3.19)$$

где D_{12} — расстояние между астропунктами в км.

По величинам $v\sqrt{p}$, получаемым из уравнивания, можно судить о надежности «измеренных» разностей высот геоида. В случае больших отклонений этих величин от среднего уровня необходимо установить, чем они вызваны — ошибками гравиметрических поправок или астрономических координат.

Разности координат пунктов в любой замкнутой фигуре связаны между собой условием о том, что их сумма равна нулю. Исходя из этого условия, вычисляются невязки разностей координат. Если

в результате измерения разностей координат создана сеть, состоящая из замкнутых фигур, то вместо вычисления и анализа невязок целесообразно выполнять самостоятельное уравнивание такой сети.

По разностям координат можно вычислить, а следовательно, и проверить другие величины.

По формуле

$$S = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (8.3.20)$$

может быть вычислено расстояние между центрами пунктов, а по формуле

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (8.3.21)$$

расстояние на плоскости проекции Гаусса. Длина геодезической линии вычисляется из решения обратной геодезической задачи. Для этого принимаются приближенные координаты одного пункта, а от него вычисляются координаты второго пункта по измеренным разностям координат.

Геодезический азимут геодезической линии вычисляется из решения обратной геодезической задачи вместе с длиной геодезической линии. Приведем формулу дирекционного угла

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (8.3.22)$$

Чтобы получить астрономический азимут на пункте Лапласа, необходимо по разностям координат вычислить геодезический азимут, а по нему с измеренной астрономической долготой и предварительной геодезической долготой — астрономический азимут направления:

$$\alpha = A - (L - l) \sin B. \quad (8.3.23)$$

Разности высот квазигеоида над референц-эллипсоидом вычисляются по формуле

$$\zeta_2 - \zeta_1 = (H_2 - H_1)_{\text{изм}} - (H_2^y - H_1^y), \quad (8.3.24)$$

где $(H_2 - H_1)_{\text{изм}}$ — измеренная разность геодезических высот.

8.4. УРАВНИВАНИЕ МОДЕРНИЗИРОВАННЫХ УЧАСТКОВ ГГС

Полевые работы по модернизации участков сети, естественно, будут заканчиваться после завершения общего уравнивания ГГС. Следовательно, на участках потребуются заново уравнивать новые результаты измерений и результаты измерений прежних лет.

Геодезическая сеть участка создается как пространственное построение. Это означает, что в ней будут выполнены такие измерения, которые позволяют получать три координаты, например, геодезическую широту, долготу и высоту. Следовательно, такая сеть и уравниваться должна как пространственное построение, а в качестве независимых параметров должны быть приняты не только плановые координаты, но и геодезические высоты.

Измеренными величинами в сети участка являются горизонтальные углы, длины отдельных сторон, астрономические азимуты,

широты и долготы, нормальные высоты пунктов и гравиметрические поправки, вычисляемые при астрономо-гравиметрическом нивелировании по результатам гравиметрических измерений. При уравнивании участков сети в качестве измеренных величин могут быть геодезические азимуты, получаемые прямыми методами, и разности геодезических координат, получаемые, например, средствами космической геодезии.

Таким образом, при уравнивании участка сети будут использоваться все виды информации, по которой составляются уравнения поправок при общем уравнивании государственной геодезической сети. Следовательно, для участка сети нужны все виды уравнений, полученные в главах 5 и 6:

- уравнение поправок угла;
- уравнения поправок астрономических координат;
- уравнение поправок астрономического азимута;
- уравнение поправок геодезического азимута;
- уравнение поправок расстояний;
- уравнение поправок длины геодезической линии;
- уравнение для гравиметрической поправки;
- уравнения поправок разностей координат;
- уравнение поправок для разности высот квазигеоида.

За твердые при уравнивании участка сети необходимо принять пункты АГС, расположенные за пределами участка, в том числе и пункты астрономо-гравиметрического нивелирования.

После уравнивания координаты всех пунктов на участке, в том числе и на границе участка, получают поправки, обусловленные дополнительными измерениями. Из-за этого изменятся дирекционные углы и расстояния между уравниваемыми и твердыми пунктами. Если твердые пункты будут на границе участка, то эти изменения дирекционных углов и расстояний могут совершенно не соответствовать результатам измерений. Значит, между исходными пунктами и границей участка необходимо предусматривать буферную зону, т. е. полосу из пунктов сети, на которых не выполнялись дополнительные измерения.

Ширину буферной зоны целесообразно назначать исходя из предполагаемой величины изменения разностей координат Δ_{xy} между наиболее удаленными друг от друга пунктами участка. При уравнивании эта разность распределится между крайними пунктами примерно поровну. Следовательно, наибольшие изменения дирекционного угла между твердыми пунктами и пунктами на краю участка можно получить по следующей приближенной формуле

$$d\alpha = \frac{\Delta_{xy}}{D}, \quad (8.4.1)$$

где D — расстояние от границы участка до твердых пунктов в км.

В этой формуле величины Δ_{xy} выражены в сантиметрах, а $d\alpha$ — в секундах.

Из формулы (8.4.1) получим расстояние D , т. е. ширину буферной зоны в км,

$$D = \frac{\Delta_{xy}}{d\alpha}. \quad (8.4.2)$$

Точность уравненных дирекционных углов сторон между смежными пунктами в АГС составляет около 2", поэтому величина $d\alpha$ должна быть не более 0,3—0,5".

Буферная зона может оказаться сравнительно широкой, когда разность координат на участке определяется методами космической геодезии. Если на участке дополнительно измеряются только углы, азимуты и расстояния, то достаточно иметь по 2—3 пункта между границей участка и твердыми пунктами.

В результате пространственного уравнивания участка с дополнительными измерениями изменятся плановые координаты и высоты квазигеоида. Потребуется пересоставлять каталоги координат пунктов и уточнить карту высот геоида как на самом участке, так и в буферной зоне.

На участке модернизированной ГГС необходимо уравнивать все измерения, выполненные как в астрономо-геодезической сети, так и в сетях сгущения. Ранее отмечалось, что все эти измерения предпочтительно уравнивать совместно. Вместе с тем отмечалось, что при общем уравнивании ГГС объединение в одну систему измерений в АГС, КГС и ГСС приводит к излишним ошибкам из-за необходимости решения очень больших систем нормальных уравнений.

Количество пунктов на участке во много раз меньше, чем во всей ГГС, поэтому здесь не будет этой проблемы. Следовательно, на модернизированных участках сети целесообразно уравнивать совместно АГС, КГСС и сети сгущения, развитые по «Основным положениям 1954—61 гг.». А полигометрию 4 класса, развитую по «Инструкции 1976 г.», и сети 1 и 2 разряда следует уравнивать отдельно.

Модернизированные участки уравниваются в референционной системе координат. Из такого уравнивания параметры перехода к общеземной системе координат не уточняются. В результате даже пространственного уравнивания для большинства пунктов получают только плановые координаты. Но для любого пункта должна обеспечиваться возможность вычисления пространственных координат, т. е. трех координат каждого пункта, как в референционной, так и в общеземной системе.

Такая возможность обеспечивается тем, что для каждого пункта определяются нормальные высоты. Карта высот квазигеоида над эллипсоидом Красовского получается ранее, на основе совместного уравнивания АГС и КГС. На участке сети при его уравнивании она уточняется. С помощью этой карты можно нормальные высоты любого пункта пересчитать в геодезические, например, по формуле (3.6.4) и таким образом получить третью координату в референционной системе. А с помощью параметров перехода, полученных ранее из совместного уравнивания АГС и КГС, можно пространственные координаты пересчитать из референционной системы в общеземную.

Здесь речь шла о больших участках сети. Но уравнивание с буферной зоной может быть применено и в тех случаях, когда

заново определяется всего лишь несколько пунктов АГС или на нескольких пунктах выполняются дополнительные измерения. В методическом отношении этот случай практически ничем не отличается от уравнивания больших участков.

8.5. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ СГУЩЕНИЯ

Давно уже сложилась традиция уравнивать сети сгущения с плоскими прямоугольными координатами Гаусса. При этом составляют обычно только три уравнения поправок — углов, дирекционных углов и расстояний на плоскости проекции. При ручном счете составлять эти уравнения несколько проще, чем аналогичные им уравнения углов, азимутов и длин геодезических линий с геодезическими координатами.

При уравнивании сетей на ЭВМ это качество уравнений поправок с координатами Гаусса перестает быть сколько-нибудь ощутимым преимуществом. Более важным становится другое обстоятельство — для разных сетей целесообразно иметь одно программное обеспечение. Большие сети, например модернизированные сети участков ГГС, можно уравнивать как с геодезическими, так и с плоскими прямоугольными координатами Гаусса. Следовательно, и сети сгущения надо уравнивать с теми же координатами, с которыми составлено программное обеспечение для участков астрономо-геодезической сети.

Если имеется программа уравнивания участка астрономо-геодезической сети, то сам процесс уравнивания сетей сгущения ничем не отличается от уравнивания АГС. Разница заключается в подготовке исходной информации.

Сначала рассмотрим уравнивание сетей сгущения отдельно от АГС.

Как правило, в сетях сгущения нет пунктов астрономо-гравиметрического нивелирования, а значит, и нет измерений, которые позволили бы получить геодезические высоты. Уравнивание в этом случае уже не является пространственным, а редукции линейных измерений должны выполняться не в ходе собственно уравнивания, а до составления уравнений поправок. Это также означает, что по результатам такого уравнивания карта высот квазигеоида не уточняется.

В этом случае для редуцирования используется заранее составленная карта высот квазигеоида. С этой картой вычисляются либо длины геодезических линий, либо расстояния на плоскости проекции Гаусса и составляются соответствующие им уравнения поправок.

В некоторых сетях сгущения определяют астрономические азимуты. Такие азимуты до уравнивания должны быть пересчитаны в геодезические азимуты или дирекционные углы, например, с использованием карт уклонений отвесных линий.

Если в сети сгущения измерены разности трех координат, например, методами космической геодезии, то третья координата — геодезическая высота, при уравнивании геодезических сетей

сгущения отдельно от астрономо-геодезической сети становится бесполезной и уравнение поправок разности геодезических высот не составляется.

При уравнивании сетей сгущения отдельно от АГС бесполезно также составлять уравнения поправок астрономического азимута, расстояния, приведенного к среднему уровню моря, астрономических координат, гравиметрической поправки и разности высот геоида. Но это никак не мешает уравнивать сети сгущения по программам, в которых предусмотрены эти уравнения. Важно, чтобы в этих программах были все уравнения поправок, рассмотренные в главе 5 или 6.

Теперь рассмотрим уравнивание сетей сгущения совместно с астрономо-геодезической сетью.

В геодезических сетях сгущения могут составляться любые уравнения поправок, которые составляются в астрономо-геодезической сети, если соответствующие измерения имеют функциональные связи с координатами пунктов. А таких связей иногда может и не быть. Например, если на пункте измерен астрономический азимут, но нет астрономических координат, то нельзя составлять уравнение поправок астрономического азимута. Надо вычислить геодезический азимут и уравнение поправок составить для него.

По результатам линейных измерений можно составлять уравнения поправок либо для расстояний, приведенных к среднему уровню моря, либо для расстояний на плоскости проекции. Если составляется уравнение поправок для расстояния, приведенного на средний уровень моря, то надо составлять и уравнения поправок разностей высот геоида. Эти разности определяются по карте высот квазигеоида, которая составляется по результатам предшествующего общего уравнивания ГГС.

При совместном уравнивании АГС и ГГС можно использовать уже не две, а три измеренные разности координат пунктов. Дополнительно к уравнению разности геодезических высот иногда могут потребоваться уравнения поправок разностей высот геоида, связывающие определяемый пункт с пунктами, для которых получают геодезические высоты, например, с пунктами астрономо-гравиметрического нивелирования.

В только что указанных случаях вместо уравнений поправок разностей высот геоида можно составлять уравнения гравиметрической поправки. Но надо иметь в виду, что вычисление гравиметрических поправок требует дополнительных затрат времени.

Значения геодезических высот, полученные при совместном уравнивании на пунктах сетей сгущения, используются для уточнения карты высот квазигеоида наравне с высотами пунктов АГС.

8.6. ТРЕБОВАНИЯ К ПРОГРАММАМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УРАВНИВАНИЯ СЕТИ

При разработке программного обеспечения пространственного уравнивания всей астрономо-геодезической сети, отдельных ее участков, сетей сгущения и даже отдельных пунктов придется

решать разные по своей сложности задачи. Разными могут быть и алгоритмы для разных сетей, а соответственно разными будут и требования к ним.

Конечно, вставку одного пункта в треугольник можно уравнивать по программе уравнивания всей АГС, но навряд ли разумно для небольших сетей разрабатывать программы, рассчитанные на сотни тысяч пунктов. В то же время неразумно разрабатывать и большое число программ уравнивания сетей разного размера, т. к. большинство подпрограмм будут общими и для всей АГС и для десятка пунктов.

Представляется, что достаточно алгоритмов двух типов — для всей АГС, т. е. примерно для 200 000 пунктов, и для участка сети, т. е. ориентировочно для 2000 пунктов. У этих алгоритмов много общего. Здесь рассмотрим основные условия, которым должен отвечать алгоритм участка, а затем отметим особенности алгоритма всей АГС.

В алгоритме должна быть предусмотрена возможность уравнивания всех видов измерений, выполняемых в астрономо-геодезической сети и в геодезических сетях сгущения. Для этого в нем должны быть все виды уравнений поправок, приведенные в главе 5 или 6.

Алгоритм должен обеспечивать возможность пространственного уравнивания, т. е. получение непосредственно из решения единой системы уравнений поправок как плановых координат, так и геодезических высот тех пунктов, для которых выполнены требуемые для этого измерения. К таким измерениям, в частности, относятся все прежние и дополнительные определения астрономических широт и долгот, разности геодезических координат, получаемые средствами космической геодезии, новые гравиметрические карты для уточнения каталога гравиметрических поправок, новые значения нормальных высот, старая карта высот квазигеоида для интерполяции на некоторые пункты новых высот квазигеоида.

В алгоритме следует предусматривать получение ковариационной матрицы уравненных координат и нормированной корреляционной матрицы уравненных параметров. Следовательно, надо применять такие методы решения нормальных уравнений, которые позволяют получить ковариационную матрицу.

Размер ковариационных матриц следует определять, принимая во внимание следующие соображения.

Пользоваться распечатками больших ковариационных матриц трудно или просто бесполезно. Следовательно, в больших сетях надо получать и, тем более, выдавать на печать ковариационную матрицу лишь для части пунктов. В число этих пунктов должны входить те, по которым можно наиболее полно составить представление о точности всей сети.

Что касается нормированной корреляционной матрицы, то данные, содержащиеся в ней, при каталогизации сети не используются, но иногда могут требоваться для анализа результатов уравнивания. Следовательно, алгоритмом должна быть предус-

мотрена возможность ее вычисления только в том случае, когда она потребуется.

Алгоритм должен позволять вычислять характеристики элементов уравненной сети. Такими характеристиками, которые вычисляются по ковариационной матрице, являются средние квадратические ошибки разностей координат, углов, расстояний, азимутов и взаимного положения в продольном и поперечном направлениях. Для этих характеристик должны быть формы представления, удобные для работы по составлению каталогов.

Алгоритм должен предусматривать вычисление по результатам уравнивания поправок ко всем видам измерений. При этом следует стремиться к тому, чтобы поправки вычислялись для всех результатов измерений и выдавались на печать вместе со всеми результатами измерений. Это особенно важно для оценки информации, использованной для уравнивания.

Необходимо, чтобы по алгоритму можно было выполнять как совместное уравнивание сетей разных классов, так и ступенчатое уравнивание, когда пункты сетей старших классов принимаются за твердые для сетей младших классов. По сути дела, этот вопрос решается автоматически, если все результаты измерений сопровождаются их средними квадратическими ошибками и предусмотрена возможность записи измерений разных классов в единый массив исходной информации.

В алгоритме следует учесть необходимость пересчета геодезических координат в прямоугольные координаты проекции Гаусса—Крюгера и обратно, независимо от того, с какими, геодезическими или прямоугольными, координатами составляются уравнения поправок. Потребность в таких пересчетах может возникнуть не только в процессе самого уравнивания, но и при решении разного рода частных задач.

При уравнивании по рассматриваемому алгоритму может потребоваться пересчитывать координаты из референционной системы в общеземную и обратно с заранее полученными параметрами перехода. Такие задачи обычно возникают либо до, либо после уравнивания, поэтому программное обеспечение такого пересчета может быть создано и вне алгоритма.

Алгоритм должен быть рассчитан на работу как с исходной информацией об измерениях, записанной в банк данных, так и с результатами дополнительных измерений, которые в банк данных еще не помещены. Это требование является особенно важным для уравнивания модернизированных участков сети, т. е. для участков с новыми, дополнительными, измерениями, и для сетей сгущения. Ведь для уравнивания таких участков и сетей сгущения кроме измерений, выполненных много лет назад, нужно использовать результаты самых последних по времени работ.

Результаты уравнивания должны выдаваться в виде, удобном для автоматизированного составления каталогов. Видимо, в ближайшие годы технология автоматизированного составления каталогов будет совершенствоваться, поэтому можно предполагать, что эту

часть алгоритма потребуются уточнять по мере уточнения самой технологии.

До настоящего времени при уравнивании сетей не уравнивали измеренных значений астрономических широт, долгот и азимутов и, естественно, не вычисляли их уравненных значений. При простейшем уравнивании АГС и ее отдельных участков астрономические координаты уравниваются не только как результаты измерений, но и как параметры. В ходе уравнивания могут быть получены диагональные элементы ковариационных матриц, а следовательно, и средние квадратические ошибки уравненных астрономических координат. Уравненные астрономические координаты и значения их ошибок нужны для последующего практического использования, поэтому в алгоритме следует предусматривать их вычисление и выдачу на печать.

Надо вычислять также уравненные значения астрономических азимутов. Необходимые для этого формулы приведены в главах 5 и 6.

Как уже отмечалось, по результатам уравнивания АГС или ее отдельных участков должна составляться заново или уточняться карта высот квазигеоида над эллипсоидом Красовского или отдельные участки этой карты. Собственно, при уравнивании получают уравненные значения геодезических высот. Что же касается вычисления по ним высот квазигеоида, то это можно делать и в рамках алгоритма уравнивания, а можно выделить как самостоятельную задачу по составлению карты высот геоида.

Сформулированные требования одинаково относятся к алгоритму уравнивания как АГС, так и ее модернизированных участков. Но в алгоритме уравнивания АГС необходимо соблюсти еще одно условие — он должен обеспечивать возможность одnogруппового, многогруппового и многоэтапного уравнивания.

В заключение отметим еще раз, что такой алгоритм уравнивания участка АГС позволит уравнивать и геодезические сети сгущения как совместно с пунктами АГС, так и по схеме многоступенчатого построения.

8.7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УРАВНЕННЫХ СЕТЕЙ СГУЩЕНИЯ

Сети сгущения представляют собой, как правило, небольшие самостоятельные построения. Благодаря этому и ковариационные матрицы координат, рассмотренные в § 6.13, также небольшие. Это позволяет по таким матрицам выполнять детальную оценку уравненных пунктов. Здесь рассмотрим оценку сетей сгущения, уравненных на основе твердых пунктов старших классов.

Общее представление о точности измерений в сети дает ошибка единицы веса после уравнивания. Она не зависит от геометрии сети. Если сеть состоит из треугольников с очень малыми углами, то с низкой точностью будут получены координаты пунктов, а ошибка единицы веса будет соответствовать не точности этих координат, а точности самих измерений.

Если средние квадратические ошибки измеренных величин соответствуют реальной точности, т. е. реальным невязкам, то ошибка единицы веса после уравнивания мало отличается от ошибки единицы веса, назначенной до уравнивания. Если же эти две ошибки единицы веса различаются значительно, то это свидетельствует о том, что средние квадратические ошибки всех или части измерений не отражают действительной точности самих измерений. Значительная разница может быть и в том случае, когда уравнивается мало измеренных величин, что нередко и бывает в сетях сгущения.

Таким образом, ошибка единицы веса после уравнивания позволяет судить не столько о точности результатов измерений, сколько о соответствии средних квадратических ошибок реальной точности этих результатов.

Для уравненных элементов сети характеристики точности можно получить по ковариационной матрице координат.

В ковариационных матрицах сетей, которые уравнены на основе твердых пунктов, на диагонали — квадраты средних квадратических ошибок координат относительно совокупности всех пунктов старших классов, принятых в качестве твердых для данной сети. Эти средние квадратические ошибки могут использоваться при составлении каталогов координат пунктов.

По ковариационной матрице можно получить характеристики элементов сети между уравниваемыми пунктами. К таким элементам могут относиться разности координат, длины и азимуты сторон, горизонтальные углы или направления. По средним квадратическим ошибкам этих элементов можно судить и о точности измерений и, что особенно важно, о точности самой уравненной сети.

В сетях триангуляции, полигонометрии и трилатерации разности координат не измеряются. Их средние квадратические ошибки не используются и при составлении каталогов. Эти ошибки целесообразно получать в сетях, развитых относительно методами космической геодезии, так как по ним можно судить о точности полевых измерений.

Очень важными характеристиками являются средние квадратические ошибки длин и азимутов (или дирекционных углов) сторон между смежными пунктами. По величинам этих ошибок делают заключение о том, соответствует ли конкретный пункт или конкретная сеть требованиям данного класса.

В отчетах об уравнивании и в каталогах приводят сведения об ошибках уравненных горизонтальных углов или направлений. Эти ошибки могут быть получены по ковариационной матрице координат пунктов сетей сгущения.

Формулы для вычисления рассмотренных здесь характеристик приведены в § 6.13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойко Е. Г., Кленицкий Б. М., Ландис И. М., Устинов Г. А.* Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей. М., Недра, 1977, 376 с.
2. *Красовский Ф. Н.* Схема и программа государственной триангуляции. Издание Главного Геодезического Комитета ВСНХ—СССР. М., 1928, 36 с.
3. *Мазмишвили А. И.* Способ наименьших квадратов. М., Недра, 1968, 440 с.
4. *Макаров Н. П.* Геодезическая гравиметрия. М., Недра, 1968, 408 с.
5. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1969, 304 с.
6. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, перераб. и доп. М., Недра, 1979, 296 с.
7. *Иранис-Праневич И. Ю.* Руководство по уравнильным вычислениям за-
полняющей триангуляции II, III и IV классов. М., Геодезиздат, 1941, 416 с.
8. *Соловьев М. Д.* Математическая картография. М., Недра, 1969, 287 с.
9. *Судаков С. Г.* Основные геодезические сети. М., Недра, 1975, 368 с.
10. *Шерман Д. С.* Руководство по камеральной обработке базисов 1, 2 и 3 классов. М., Геодезиздат, 1961, 179 с.
11. *Основные положения о построении государственной опорной геодезической сети в СССР.* М., Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939, 12 с.
12. *Инструкция по уравниванию астрономо-геодезической сети СССР.* М., Геодезиздат, 1944, 46 с.
13. *Основные положения о государственной геодезической сети СССР.* М., Геодезиздат, 1954, 14 с.
14. *Основные положения о государственной геодезической сети СССР.* М., Геодезиздат, 1961, 20 с.
15. *Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР.* М., Недра, 1966, 342 с.
16. *Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов.* М., Недра, 1974, 160 с.
17. *Наставление по вычислению гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида.* М., изд. ЦНИИГАиК, 1974, 42 с.
18. *Инструкция по полигонометрии и трилатерации.* М., Недра, 1976, 104 с.
19. *Инструкция по топографической съемке в масштабах 1 : 5000—1 : 500.* ГКИНП—02—003—82. М., 1982.
20. *Маркузе Ю. И., Бойко Е. Г., Голубев В. В.* Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей. Справ. пособие. — М.: Картогеоцентр—Геодезиздат, 1994. — 431 с.: ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень сокращений.....	3
Перечень условных обозначений.....	4
Глава 1. Системы координат.....	8
1.1. Системы координат, используемые при развитии и уравнивании сетей.....	8
1.2. Астрономические координаты.....	9
1.3. Пространственные прямоугольные координаты.....	12
1.4. Геодезические координаты.....	13
1.5. Связь геодезических и пространственных прямоугольных координат.....	17
1.6. Связь пространственных прямоугольных координат двух систем.....	19
1.7. Связь геодезических координат разных систем.....	20
1.8. Вычисление координат в проекции Гаусса по геодезическим координатам.....	27
1.9. Вычисление геодезических координат по координатам проекции Гаусса.....	32
1.10. Перевычисление геодезических координат в прямоугольные в проекции Ламберта и обратно.....	39
1.11. Пересчет уклонений отвесных линий.....	45
Глава 2. Элементы теории математической обработки геодезических измерений.....	47
2.1. Сведения из алгебры матриц.....	47
2.2. Преобразование линейных уравнений.....	50
2.3. Ковариационная и весовая матрицы.....	52
2.4. Параметрический способ уравнивания.....	56
2.5. Составление нормальных уравнений.....	61
2.6. Решение нормальных уравнений.....	62
2.7. Преобразование нормальных уравнений.....	64
2.8. Вычисление ошибки единицы веса после уравнивания.....	66
2.9. Многогрупповое уравнивание.....	69
2.10. Многоэтапное уравнивание.....	74
2.11. Ковариационная матрица координат.....	78
Глава 3. Государственная геодезическая сеть.....	82
3.1. Методы развития геодезических сетей.....	82
3.2. Астрономо-геодезическая сеть.....	84
3.3. Гравиметрические сети и карты.....	85
3.4. Уклонения отвесных линий.....	87
3.5. Высоты квазигеоида.....	90
3.6. Системы высот.....	92
3.7. Общеземные системы координат.....	95
3.8. Основные этапы развития ГГС СССР.....	96
Глава 4. Информация для уравнивания АГС.....	100
4.1. Общая схема уравнивания ГГС.....	100
4.2. Информация об измерениях в АГС и геодезических сетях сгущения.....	102
4.3. Горизонтальные углы и направления.....	104
4.4. Геодезическая линия и расстояние на плоскости проекции.....	107
4.5. Расстояние между центрами пунктов.....	112
4.6. Астрономические и геодезические азимуты.....	119
4.7. Астрономические координаты.....	121

4.8. Нормальные высоты.....	123
4.9. Гравиметрические поправки, интерполирование высот геоида.....	124
4.10. Оценка информации для уравнивания.....	126
Глава 5. Уравнивание АГС с геодезическими координатами.....	128
5.1. Постановка задачи уравнивания АГС.....	128
5.2. Уравнения поправок для геодезического азимута.....	130
5.3. Уравнения поправок для астрономического азимута.....	133
5.4. Уравнение поправок для направления.....	135
5.5. Уравнение поправок для горизонтального угла.....	137
5.6. Уравнения поправок для астрономических координат.....	138
5.7. Уравнение поправок расстояния, приведенного к среднему уровню моря.....	139
5.8. Уравнение поправок длины геодезической линии.....	141
5.9. Уравнение поправок для гравиметрической поправки.....	142
5.10. Уравнение поправок разности высот квазигеоида.....	143
5.11. Уравнения поправок разностей геодезических координат.....	145
5.12. Подсчет числа избыточных измерений при пространственном уравнивании АГС.....	146
Глава 6. Уравнивание АГС и ГСС с координатами проекции Гаусса.....	149
6.1. Постановка задачи.....	149
6.2. Уравнение поправок дирекционного угла.....	150
6.3. Уравнение поправок астрономического азимута.....	151
6.4. Уравнение поправок горизонтального угла.....	152
6.5. Уравнение поправок горизонтального направления.....	153
6.6. Уравнения поправок для астрономических координат.....	153
6.7. Уравнение поправок для расстояния, приведенного к среднему уровню моря.....	154
6.8. Уравнение поправок для расстояния, приведенного на плоскость проекции.....	156
6.9. Уравнение поправок для гравиметрической поправки.....	156
6.10. Уравнения поправок разностей координат.....	159
6.11. Общая схема уравнивания АГС с геодезическими и прямоугольными координатами.....	159
6.12. Многогрупповое уравнивание АГС.....	161
6.13. Ковариационная матрица координат Гаусса.....	164
Глава 7. Совместное уравнивание сетей.....	166
7.1. Постановка задачи совместного уравнивания сетей.....	166
7.2. Исходная информация для совместного уравнивания сетей.....	168
7.3. Пересчет ковариационных матриц при переходе от прямоугольных координат к геодезическим и обратно.....	170
7.4. Системы координат при совместном уравнивании.....	172
7.5. Уравнения поправок координат референцной системы.....	174
7.6. Уравнения поправок координат общеземной системы.....	175
7.7. Уравнивание космических геодезических сетей сгущения.....	177
7.8. Уравнения поправок отдельных измерений.....	179
7.9. Уравнивание отдельных разностей координат.....	180
7.10. Вычисление параметров перехода по разностям координат.....	181
7.11. Пересчет координат из референцной системы в общеземную.....	182
7.12. Оценка точности совместно уравненных пунктов ГГС.....	183
7.13. Заключительное уравнивание АГС.....	184
7.14. О совместном уравнивании сетей многогрупповым методом.....	186
Глава 8. Уравнивание сетей сгущения и участков ГГС.....	190
8.1. Геодезические сети сгущения.....	190
8.2. Модернизация участков ГГС.....	194
8.3. Предварительная оценка результатов измерений в сетях.....	195

8.4. Уравнивание модернизированных участков ГГС.....	201
8.5. Уравнивание геодезических сетей сгущения.....	204
8.6. Требования к программам пространственного уравнивания сети.....	205
8.7. Оценка точности уравненных сетей сгущения.....	208
Список литературы.....	210

Герасимов А. П.

Г 37 Уравнивание государственной геодезической сети. — М.: «Картгеоцентр»—«Геодезиздат», 1996. — 216 с.: ил.

ISBN 5—86066—014—6

Излагаются теоретические и практические вопросы уравнивания современной государственной геодезической сети, созданной на основе как традиционных методов, так и современных средств космической геодезии. В ней сформулирована схема построения этой сети, впервые излагается примененный на практике многоэтапный метод и теория пространственного уравнивания сетей, обеспечивающие однозначное согласование государственных общеземной и референцной системы координат. В книге читатель найдет также общую теорию многогруппового уравнивания и новые формулы для решения ряда частных задач геодезии. В ней приведены формулы пересчета геодезических координат в плоские прямоугольные координаты и обратно для проекции Гаусса—Крюгера и зарубежных проекций Гаусса и Ламберта.

Предназначается для инженерно-технических и научных работников, занимающихся развитием и математической обработкой геодезических сетей, применением геодезических методов в специальных инженерно-технических работах, вычислением координат в разных системах и проекциях. Она может быть использована также студентами вузов, обучающимися по астрономо-геодезической и картографической специальностям.

Г $\frac{18020200-9}{991(02)-96}$ Без объявления

ББК 26.11

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Герасимов Александр Петрович

УРАВНИВАНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Главный редактор *Л. Г. Иванова*
Редактор *Н. В. Венгерцева*
Технический редактор *Г. В. Лехова*
Корректор *М. Д. Мирзоева*

Сдано в набор 31.07.95. Подписано в печать 12.11.96. Формат 60×90 1/16.
Печать офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 16,0.
Тираж 1000 экз. Заказ 1052.

«Картгеоцентр»—«Геодезиздат»

Санкт-Петербургская картографическая фабрика ВСЕГЕИ
199178, Санкт-Петербург, Средний пр., 72



Coates Lorveux

При изготовлении книги использованы печатные краски
"Торжокского завода полиграфических красок"

ДЛЯ ЗАМЕТОК
